TOPOLOGÍA GENERAL

DIEDERICH HINRICHSEN
JOSÉ L. FERNÁNDEZ MUÑIZ
ANDRÉS FRAGUELA COLLAR
ANGEL ÁLVAREZ PRIETO

TOPOLOGÍA GENERAL

Prefacio

Este libro es el resultado de un trabajo en conjunto. Se basa en un curso de Topología de 8 horas semanales (4 horas de teoría, 4 horas de práctica), que fue impartido en la Escuela de Matemática de la Universidad de la Habana durante el primer semestre del año escolar 1971 por Diederich Hinrichsen y José L. Fernández Muñiz. Después, el manuscrito del curso estuvo sujeto a una revisión crítica y sistemática en la cual participarón tres estudiantes del curso: Andrés Fraguela, Angel Álvarez y Arnoldo Bezanilla. Ante todo es debido a la iniciativa y perseverancia de ellos que este libro pudo aparecer. El proceso de redacción duró dos años, en los cuales cada uno de los capítulos ha sido escrito tres veces y ha pasado tres revisiones colectivas. Necesitamos ahora la experiencia práctica para mejorarlos.

I. Objetivos didácticos

El objetivo principal del libro es de carácter didáctico: facilitar a los estudiantes una introducción a la Topología General, que se adapte a las necesidades y fines generales del estudio matemático en las tres universidades cubanas. Esto significa sobre todo no exponer la Topología General como una teoría aislada y autosuficiente, sino como un taller que contiene herramientas de trabajo para la solución de problemas científicos más concretos. Más detalladamente el libro tiene los objetivos didácticos siguientes:

— darles a los estudiantes el conocimiento de las nociones fundamentales, teoremas y métodos más útiles de la Topología General;

— entrenarles en el empleo de los conceptos, teoremas y métodos por medio de ejercicios de rutina y de problemas que exigen un esfuerzo creativo del alumno;

— darles una visión panorámica de las interrelaciones de la Topología con otras teorías matemáticas;

— ponerles en condición de percibir la topología en problemas concretos y de utilizar los medios de la Topología General al tratarlos;

— presentar por un lado la Topología General como modelo ejemplar para una teoría axiomática de una estructura matemática fundamental;

— y demostrarles por otro lado la génesis histórica de tales teorías axiomáticas a partir de problemas científicos más concretos.

Estamos conscientes de que la Topología General no es un ejemplo ideal para mostrar a los estudiantes que la razón de ser de las teorías matemáticas, así como de todas las ciencias, descansa en su vinculación con la práctica. En efecto, existen solamente ejemplos bastante artificiales para la aplicación *directa* de resultados topológicos a problemas concretos de la producción o de la distribución. La utilidad de la Topología General consiste más bien en *organizar* y *sistematizar* los conceptos y métodos empleados en otras disciplinas más cerca de la aplicación

práctica, como el Análisis Funcional, la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, el Cálculo Operacional o Teoría de Aproximación.

La combinación masiva del estudio y del trabajo en las universidades cubanas sin ninguna duda ayudará a una revisión profunda de los programas y de los materiales de estudio. El criterio supremo de esta transformación será la vinculación cada vez más estrecha entre la teoría y la práctica, entre la ciencia y los problemas concretos de la producción y de la distribución, entre el trabajo manual y el trabajo intelectual. ¿Qué partes de la matemática contemporánea integrarán, y en qué forma, la nueva formación matemática orientada por estos objetivos?

Hubiese sido absurdo anticipar teóricamente la respuesta a este problema que sólo se resolverá sobre la base de las experiencias prácticas adquiridas en el proceso histórico que se ha iniciado en Cuba con la combinación masiva del estudio y del trabajo. Una transformación radical de las materias de enseñanza antes de esta experiencia práctica sería necesariamente subjetivista. Por eso nos hemos contentado en este libro con una revisión didáctica de la Topología General, que no altera en sustancia el contenido de los cursos que hoy en día se imparten mundialmente.

II. Resumen del contenido

En la presentación de la materia *no* hemos seguido estrictamente el método deductivo según el cual se avanza en línea recta de lo abstracto a lo concreto. Para un libro de carácter enciclopédico (como BOURBAKI [29], [30], [31]; DUGUNDJI [51]) este método acaso es el más económico; pero seguramente no es óptimo para la capacitación de los estudiantes. Por lo tanto, en muchos casos, sobre todo en la primera parte del libro, hemos tomado el camino al revés: a base de problemas más concretos se desarrolla, pues, el concepto más general.

Por ejemplo, no hemos comenzado inmediatamente con la definición abstracta de espacio topológico. Siguiendo el método genético, todo el primer capítulo sirve para que el lector comprenda que los tres axiomas topológicos (que desde el punto de vista estructuralista contituyen el inicio abstracto de la Topología General) en realidad son el *resultado* de un largo proceso de abstracción y de trabajo científico.

Partiendo de problemas de convergencia y otros problemas topológicos en espacios concretos de puntos y funciones, el capítulo 1 llega a la definición abstracta de *espacio métrico*; y explicando la insuficiencia de esta abstracción para establecer una teoría general de la convergencia y continuidad se desarrolla finalmente la idea de los espacios topológicos por medio de una caracterización axiomática de los abiertos.

Junto con esta función de desarrollar genéticamente la base axiomática de la Topología General, el primer capítulo tiene la tarea de iniciar al lector que no conoce la Teoría de los Espacios Métricos en los elementos de esta teoría.

Comparado con el capítulo 1, el capítulo 2 tiene un carácter más sistemático. Introduce la categoría de los espacios topológicos y describe el método de construir topologías concretas por medio de bases y subbases.

Después, los capítulos 3 y 4 siguen sistemáticamente al modelo del Análisis en su tratamiento de los conceptos topológicos. Partiendo de problemas de con-

vergencia que dominan en los estudios topológicos del Análisis elemental se llega a las nociones de conjuntos abiertos y cerrados, puntos adherentes, etc. El *filtro*, concepto indispensable, pero difícil desde el punto de vista didáctico, se introduce mediante las sucesiones Moore Smith con las cuales se generaliza de manera natural el concepto usual de sucesiones.

Para eludir este problema didáctico, muchos libros de Topología General excluyen más o menos la noción de convergencia o la tratan relativamente tarde. Sin embargo, tal presentación corre el riesgo de desvincularse del Análisis Funcional que históricamente ha sido la fuente principal para la mayoría de los conceptos elementales de la Topología General, y aún hoy en día constituye una de sus más importantes áreas de aplicación.

En el capítulo 5 volvemos de modo más sistemático al problema de construir espacios topológicos concretos. Las definiciones de subespacios y de espacio producto conducen al método general de definir una topología por medio de aplicaciones. Después de estudiar las propiedades abstractas de las topologías iniciales y finales se tratan los espacios cociente, espacios suma y brevemente los espacios de adjunción.

Con este capítulo termina la primera parte del libro, la cual se dedica principalmente a la categoría de espacios topológicos en general. Cabe mencionar que en una primera lectura no es necesario estudiar detenidamente los ultrafiltros (3.5) ni las topologías iniciales y finales (5.3). Las demás nociones son fundamentales y no pueden omitirse ni en una primera lectura.

En los siguientes capítulos 6 a 10 se tratan subclases especiales de espacios topológicos que son de importancia particular en las aplicaciones de la Topología General. Para el estudio de estos capítulos se cuenta con un lector motivado que conoce las nociones fundamentales. Por tanto se hacen progresos más rápidos.

El capítulo 6 se divide en dos partes. Primeramente se analizan diversas nociones de conexión aplicando estas nociones para obtener invariantes topológicos que permitan distinguir entre espacios diferentes. El concepto de homotopía estudiado en la segunda parte permite introducir invariantes topológicos más sutiles por la asociación de los llamados grupoides de homotopía a los espacios topológicos. En esta parte el lector obtendrá una primera visión de los métodos de la Topología Algebraica. Además se acentúa aquí el *aspecto geométrico* de la Topología que ha sido algo descuidado en los capítulos anteriores. Aunque son esenciales para adquirir una visión panorámica de las diferentes ramas de la Topología, estas dos secciones sobre Homotopía pueden omitirse en una primera lectura.

El capítulo 7 también se divide en dos partes. La primera parte expone las propiedades elementales de los espacios topológicos definidos por los diversos axiomas de separación. La segunda parte plantea el problema general de la *separación por funciones* y analiza la construcción de funciones reales continuas sobre un espacio normal. Además al final de la sección 7.5 se trata el problema lineal correspondiente: la *separación de conjuntos convexos* en un espacio vectorial topológico. Una sección adicional muestra cómo las particiones de unidad se utilizan en la Topología Diferencial para vincular nociones y propiedades globales con nociones y propiedades locales. Ambas cuestiones que traspasan el contenido

canónico de este capítulo pueden saltarse en una primera lectura.

El capítulo 8 estudia la clase de espacios topológicos que más importancia tiene en Análisis y en Análisis Funcional: los espacios compactos. Las secciones 1, 2, 3, 5 exponen las propiedades básicas y necesitan un estudio cuidadoso y completo. La importancia de los resultados expuestos se pone de manifiesto en la última sección (§8.7) que deriva una serie de teoremas fundamentales del Análisis Funcional, del Álgebra y de la Teoría de los Espacios Vectoriales Topológicos empleando argumentos de compacidad. En cambio, para una primera lectura, de las secciones §8.4 y §8.6 sólo importan la caracterización de los espacios métricos compactos en §8.4 y la compactificación de Alexandroff tratado en la primera parte del §8.6.

El capítulo 10 presenta una solución general del problema de metrizabilidad planteado en el capítulo 2. Además estudia una generalización de los espacios compactos que juega un papel importante en cuestiones de metrizabilidad así como en otras teorías topológicas. La importancia de los resultados presentados en este capítulo se limita más bien a la propia topología. Por eso puede saltarse en una primera lectura.

El capítulo 11 introduce una nueva categoría fundamental, la categoría de los *espacios uniformes* que permiten un tratamiento axiomático de conceptos como *sucesión de Cauchy y continuidad uniforme* conocidos del Análisis. La teoría de estos espacios nos parecía tan indispensable para la aplicación de la Topología General a los espacios métricos, grupos topológicos, espacios vectoriales topológicos y espacios funcionales que terminamos por integrarlos en el texto después de vacilar durante mucho tiempo. No obstante, el capítulo 11 contiene solamente las nociones y resultados más fundamentales. En la segunda parte se presentan una serie de teoremas más específicos sobre *espacios métricos completos*, que tienen aplicaciones importantes en diversas áreas matemáticas. El capítulo termina con una sección que concretiza algunas de estas aplicaciones en Análisis, en Teoría de Aproximación, en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales y en la Teoría de los Espacios de Hilbert.

Finalmente, el capítulo 12 vuelve a la disciplina matemática que, aparte de las varias geometrías, ha sido el decisivo estimulante externo para el desarrollo de la Topología General: el Análisis Funcional. De manera sistemática se estudian diversas topologías sobre espacios funcionales cada vez más concretos terminando con el teorema de Ascoli, y los resultados de Stone-Weierstrass sobre la aproximación de funciones reales continuas. La aplicación de estos resultados a la teoría de los anillos $\mathfrak{C}(X)$ puede omitirse en una primera lectura.

III. Comentario didáctico

Para el estudio de este libro se necesitan en lo esencial algunos conocimientos fundamentales del Análisis que se adquieren en los primeros dos años en la universidad. El lector necesita saber qué es una función continua, resp. uniformemente contunia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, necesita conocer algunas nociones elementales topológicas en $\mathbb{R}^n$ (subconjuntos abiertos y cerrados, sucesiones convergentes, puntos adherentes de sucesiones y conjuntos), los teoremas de Heine-Borel y de Bolzano

Weierstrass y necesita saber distinguir la convergencia simple y la convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Un poco de conocimiento de la Teoría de los Espacios Métricos sería útil pero no preciso, porque las nociones elementales de esta teoría se hallan resumidas en el capítulo 1. Los conceptos empleados de la Teoría de Conjuntos y sobre todo de la Teoría de Conjuntos Ordenados se hallan especificados en el apéndice.

Para alcanzar los objetivos indicados en I, es importante que el lector estudie los problemas, ejemplos y ejercicios con igual empeño que las definiciones, teoremas y demostraciones. Para facilitarlo, la parte teórica no fue separada de la parte práctica como en el curso, sino el texto contiene varios ejemplos, ejercicios y problemas. Esperamos que el lector aproveche la oportunidad para controlarse a sí mismo y que haga el estudio con 'papel y lápiz'. Para poder trabajar productivamente con la teoría estudiada, uno tiene que disponer de un inventario de ejemplos, posibilidades de aplicación e interpretaciones intuitivas. Insistimos en que el trabajo matemático, el saber formular los problemas y el saber aplicar los teoremas es al menos tan importante como el saber probarlos.

El libro no ha sido concebido como manual para el profesor que quiere preparar sus conferencias, sino como libro de texto para el estudio individual o colectivo de los estudiantes. Esperamos que contribuya a una participación más activa de los estudiantes en las clases de Topología.

Recomendamos intercalar en forma sistemática exposiciones de equipos estudiantiles sobre temas especiales. El libro contiene suficientes aplicaciones, ejercicios y temas extra, idóneas para tales exposiciones.

En el futuro, el profesor, contando con un libro de texto que puede sustituir como fuente de información a sus conferencias, pudiera organizar el trabajo en base a exposiciones de los alumnos. Puede adoptarse por ejemplo el método siguiente:

Al comienzo del curso el profesor elabora junto con los estudiantes un plan de trabajo que determina el material de cada reunión para las próximas semanas, basándose en el programa general del curso. Todos los alumnos estudian individual o colectivamente las partes respectivas del libro antes de tratarlas en clase. Además, cada reunión la prepara especialmente un equipo de 2 a 4 estudiantes cuya tarea sea resumir los puntos principales del contenido, explicar su significación intuitiva, aclarar preguntas, elaborar preguntas, dar ejercicios y buscar, eventualmente, ejemplos y aplicaciones adicionales en la literatura. Unos días antes de la clase el profesor se reúne con el equipo para discutir sobre la exposición preparada, corregir errores, aclarar dudas matemáticas y didácticas. Como todos los estudiantes han analizado el material anteriormente, pueden especificar sus preguntas y dificultades individuales en la clase y participar activamente en la solución de los problemas planteados en la discusión del tema. Es claro que este método no puede emplearse en todas las circunstancias. En partícular presupone que el número de estudiantes del curso sea pequeño.

IV. Referencias y símbolos gráficos

Para la confección del libro hemos estudiado todos los libros de texto a nuestro alcance. Ninguno de estos libros nos ha podido servir como modelo pero los hemos utilizado siempre que nos han ayudado a realizar nuestros objetivos didácticos. Además de los libros listados en la bibliografía, nos fueron útiles algunos manuscritos de curso dados por E. Artin, H. Bauer (Erlangen, R.F.A.) y Zieschang (Bochum, R.F.A.).

El lector interesado en profundizar en algún tema hallará un comentario bibliográfico al final de cada capítulo, que le proporciona también algunas informaciones históricas sobre el desarrollo de los conceptos y resultados más fundamentales.

Para poder referirnos dentro del texto a proposiciones, ejemplos y ejercicios anteriores los hemos enumerado por una tríada de números, de los cuales el primero indica el capítulo, el segundo la sección y el tercero, la numeración interior de la sección, excepto para los ejercicios finales y para el apéndice, en que en lugar del primer número de la tríada, hemos puesto las letras E y A respectivamente.

Además hemos utilizado los siguientes símbolos con vista a estructurar el texto:

$+$ para indicar secciones, teoremas, demostraciones, etc., que pueden omitirse en una primera lectura.

$*$ para indicar ejercicios difíciles.

$\rightsquigarrow$ para advertir errores que pueden ocurrir fácilmente en el contexto respectivo.

$\blacksquare$ para indicar el final de una demostración

Un índice completo de todos los símbolos utilizados se halla en las páginas siguientes.

Agradecemos a la compañera Clara Iñurrieta por el gran interés con que realizó la mecanografía de este libro. Damos también las gracias a todos los que de una forma o de otra nos han ayudado y estimulado para llevar a cabo esta tarea, especialmente a la dirección de la escuela de Matemática de la Universidad de La Habana.

DIEDERICH HINRICHSEN
JOSÉ L. FERNÁNDEZ MUÑIZ
ANDRÉS FRAGUELA COLLAR
ANGEL ÁLVAREZ PRIETO

UNIVERSIDAD DE LA HABANA
19 de abril de 1974
AÑO DEL XV ANIVERSARIO

Prefacio de la segunda edición

Como se señala en el prefacio de la primera edición, este libro fue escrito por la insatisfacción de los autores con los textos de Topología de Conjuntos entonces de moda. En aquella época el énfasis en la Matemática era de abstracción y generalización. Los libros de texto de Matemática Teórica y en especial de Topología General tenían con frecuencia la siguiente estructura: teorema–demostración–comentario, al estilo de Bourbaki, evitando redundancias y material superfluo. La obra de Bourbaki tiene un gran mérito como purificadora de la Matemática; aclarando la estructura lógica de distintas disciplinas matemáticas y enfatizando la unidad de la Matemática. Desde el punto de vista didáctico, no consideramos óptimo, para una introducción a los estudiantes de los Elementos de la Topología de Conjuntos, el estilo de presentación de Bourbaki. Como consecuencia nuestro libro tiene algunas redundancias, para hacer más accesible el tema. Incluimos comentarios históricos y aplicaciones, para mostrar a los estudiantes la utilidad de la teoría.

El libro se ha venido empleando en las universidades cubanas y también en algunas universidades de otros paises, como por ejemplo de México y de España.

Esta nueva edición sale bajo los auspicios de la SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA y esperamos que siga teniendo una buena acogida. Se le han hecho sólo pequeños ajustes y, a sugerencia de los editores intercalamos un capítulo dedicado a la Teoría de Continuos escrito por la Dra. Isabel Puga y el Dr. Raúl Escobedo.

En estos años los integrantes del grupo de autores han tomado distintos rumbos. Diederich Hinrichsen trabaja en el Instituto de Sistemas Dinámicos de la Universidad de Bremen, Alemania; Andrés Fraguela Collar labora en el Posgrado en Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, donde también laboraba José Luis Fernández Muñiz hasta su fallecimiento el día 5 de febrero de 2001. El otro integrante del grupo original: Angel Álvarez Prieto, falleció tempranamente, antes de que saliera a la luz la primera edición. Durante todo este tiempo hemos seguido manteniendo una relación de amistad. Agradecemos a Aportaciones Matemáticas de la SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA la reedición de nuestra obra común. También expresamos nuestro agradecimiento a la facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la cual nos ha brindado las condiciones para poder culminar el trabajo que ha dado lugar a esta segunda edición. Finalmente, expresamos nuestro agradecimiento al estudiante Luis Alberto Torres Ramírez por su destacada labor en la captura, corrección de texto y figuras, sin lo cual no se habría podido alcanzar nuestro objetivo.

Puebla, México, Junio de 2002.

DIEDERICH HINRICHSEN
JOSÉ L. FERNÁNDEZ MUÑIZ
ANDRÉS FRAGUELA COLLAR

Contenido

Prefacio 7

Simbología 18

Capítulo 1. **Espacios Métricos** 27

1.1 Conceptos de convergencia 27
1.2 Métricas. Ejemplos de espacios métricos 34
1.3 Subespacios. Isometrías 40
1.4 Seudométricas 41
1.5 Sucesión convergente. Bola. Diámetro. Distancia entre conjuntos . . . 47
1.6 Funciones continuas, vecindades y abiertos 54
1.7 Transición a una nueva teoría 63

Capítulo 2. **La categoria de los espacios topológicos** 65

2.1 Definición y primeros ejemplos 66
2.2 Comparación de topologías 70
2.3 Bases y subbases 71
2.4 Las categorías de los espacios métricos y los espacios topológicos . . . 77

Capítulo 3. **Vecindades y filtros** 89

3.1 Vecindades 90
3.2 Convergencia de sucesiones y continuidad en un punto 95
3.3 Redes 100
3.4 Filtros y bases de filtros 102
3.5 Comparación de filtros, Ultrafiltros 105
3.6 Límites y puntos adherentes de filtros 112
3.7 Convergencia y continuidad 118

Capítulo 4. **Conjuntos abiertos y cerrados** 122

4.1 Puntos adherentes y clausura de un conjunto 123
4.2 Conjuntos cerrados 128
4.3 Interior, exterior y frontera 130
4.4 Conjuntos densos y espacios separables 137
4.5 Funciones continuas, abiertas y cerradas 141

4.6 F_δ, G_σ-conjuntos y conjuntos de Borel 146

Capítulo 5. **Topologías iniciales y finales** 151

5.1 Subespacios 152
5.2 Espacios producto 160
5.3 Topologías iniciales y topologías finales 170
5.4 Espacios cociente 179
5.5 Espacios suma 180

Capítulo 6. **Conexión y homotopía** 196

6.1 Espacios conexos 197
6.2 Componentes conexas 206
6.3 Espacios conexos por arcos 216
6.4 La relación de homotopía 221
6.5 Grupos fundamentales 229

Capítulo 7. **Axiomas de separación** 142

7.1 Introducción a los axiomas de separación 242
7.2 Espacios de Hausdorff 244
7.3 Espacios regulares y espacios normales 248
7.4 Separación de conjuntos por funciones 254
7.5 Prolongación de funciones reales continuas 261
7.6 Cubrimientos y particiones de unidad sobre un espacio normal . . . 272
7.7 Anexo: Utilización de las particiones de unidad de topología diferencial 277

Capítulo 8. **Compacidad** 284

8.1 Espacios y subconjuntos compactos 285
8.2 Compactos y aplicaciones continuas 294
8.3 Producto de compactos 299
8.4 Compacidad y numerabilidad 304
8.5 Espacios localmente compactos 311
8.6 Extensiones y compactificaciones 316
8.7 Aplicaciones 327

Capítulo 9. **Continuos** 333

9.1 El cubo de Hilbert, intersecciones anidadas y conceptos 333
9.2 Quasicomponentes y teoremas de comportamiento en la frontera . . 339
9.3 Continuos irreducibles y composantes 342
9.4 Continuos descomponibles y continuos indescomponibles 344
9.5 Conexidad local y conexidad por trayectorias 348
9.6 Continuos tipo arco o encadenables 350
9.7 Creación de ejemplos 358

Capítulo 10. **Paracompacidad y metrizabilidad** 361

10.1 Espacios paracompactos 361

10.2 Criterios de metrizabilidad 369

Capítulo 11. **Espacios uniformes y espacios métricos completos** . 375

11.1 Espacios uniformes y espacios uniformizables 376
11.2 Aplicaciones uniformes continuas y construcción de espacios uniformes 389
11.3 Filtros de Cauchy y espacios uniformes completos 394
11.4 Espacios métricos completos 400
11.5 Completamiento de un espacio métrico 404
11.6 Aplicaciones 408

Capítulo 12. **Espacios funcionales** 419

12.1 Estructuras uniformes sobre espacios funcionales 420
12.2 La topología compacta abierta 430
12.3 Subconjuntos compactos en C C(X,Y) 435
12.4 Aproximación de funciones reales continuas 442

Ejercicios finales 462

Apéndice 491

Conceptos sobre teoría de conjuntos 491
A.1 conjuntos 492
A.2 Colecciones de conjuntos 493
A.3 Relaciones 494
A.4 Cojunto cociente 495
A.5 Funciones 497
A.6 Descomposición canónica 499
A.7 Familia de conjuntos 500
A.8 Producto 501
A.9 Suma 502
A.10 Conjuntos ordenados 502
A.11 Cardinales 505

Bibliografía general 507

Bibliografía comentada 515

Indice alfabético 526

Simbología

Conjuntos y espacios usuales

$\varnothing$	conjuntos vacíos	
$\mathbb{N}$	números naturales (con el cero)	
$\mathbb{Z}$	números enteros	
$\mathbb{Q}$	números racionales	
$\mathbb{I}$	números irracionales	
$\mathbb{R}$	números reales	
$\mathbb{C}$	números complejos	
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}$ ampliado ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)	
$\mathbb{R}^n$	espacio euclideano n-dimensional sobre $\mathbb{R}$	
$\mathbb{C}^n$	espacio euclideano n-dimensional sobre $\mathbb{C}$	
E^{n-1}	esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$	(6.4.7)
T^n	Toro	(5.4.10)
$P(E)$	espacio proyectivo	(5.4.12)
E^*	dual algebraico	
E'	dual topológico	
$M_n(\mathbb{R})$	matrices reales $n \times n$	
$l^2(\mathbb{N})$	sucesiones de cuadrado sumable	(1.2.6)
l^∞	sucesiones acotadas	(4.4.9)
$\mathfrak{C}(X, Y)$	funciones continuas de X en Y	
$\sum_{\alpha \varepsilon I}(X_\alpha, X_\alpha)$	espacio suma	(5.5.1)
$\prod_{\alpha \varepsilon I}(X_\alpha, X_\alpha)$	espacio producto	(5.2.1)
$Y \sqcup_f X$	espacio de adjunción	(5.5.7)
X/R	espacio cociente	
$\prod_{\alpha \varepsilon I} \mathcal{U}_\alpha$	producto de estructuras uniformes	
$\prod_{\alpha \varepsilon I} \{X_\alpha \vert \alpha \in I\}$	conjunto producto	(A.8.1)

$\bigsqcup_{\alpha\varepsilon I} \{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$	unión disjunta	(A.9.1)
$[\Phi]$	estructura diferenciable	(7.7.5)
$(X, [\Phi])$	variedad diferenciable	(7.7.6)
$\Im(X, Y) = Y^X$	funciones de X en Y	(§12.1)
$d_A(f, g)$	(seudo)-métrica de la convergencia uniforme sobre A	(12.1.1)
$W(A, \varepsilon)$	Entorno uniforme de orden ε	(12.1.1)
$W(A, V)$	Entorno uniforme de orden V	(12.1.2)
$\Im_\sigma(X, Y)$	$\Im(X, Y)$ provisto de la estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de la colección σ	(12.1.4)
$\Im_p(X, Y)$	$\Im_\sigma(X, Y)$ con $\sigma = (\{x\})_{x \in X}$	(12.1.3)
$\Im_c(X, Y)$	$\Im_\sigma(X, Y)$ con $\sigma = \{X\}$	(12.1.5)
$\Im_u(X, Y)$	$\Im_\sigma(X, Y)$ donde σ es la colección de los compactos de X	(12.1.7)
$\Im_a(X, Y)$	$\mathcal{F}_\sigma(X, Y)$ donde σ es la colección de los acotados de X	(12.1.8)
$\mathfrak{C}_c(X, Y)$	$\mathfrak{C}(X, Y)$ como subespacio uniforme de $\Im_c(X, Y)$	(§12.3)
$\overline{H^P}$	adherencia de H en $\Im_p(X, Y)$	(12.3.10)
$\overline{H^c}$	adherencia de H en $\Im_c(X, Y)$	(12.3.10)
$\overline{H^u}$	adherencia de H en $\Im_u(X, Y)$	(12.413)
$H(x)$	Conjunto de las evaluaciones de las funciones de H en x	(12.3.11)
$\mathcal{H}_c(U)$	Funciones homorfas sobre U con la topología de la convergencia compacta (§12.3-aplicación- 1)	
$L(H)$	Espacio vectorial generado por H (2o. problema, §11.4)	
$A(H)$	Algebra generada por H (§11.4-3er. problema)	
Z_H	ceros de H	(12.4.6)
R_H	Puntos no separables por H	(12.4.7)

Subconjuntos y subespacios

(a, b)	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$[a, b)$	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$(a, b]$	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$[a, b]$	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$(\leftarrow, b)$	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$(a, \rightarrow)$	Intervalos en un conjunto ordenado (2.1.9) (2.1.10)	
$B(a, \rho)$	bola abierta de centro a y radio ρ	(1.5.4)
$B'(a, \rho)$	bola cerrada de centro a y radio ρ	(1.5.4)
$E(a, \rho)$	esfera de centro a y radio ρ	(1.5.4)
Δ	diagonal de $X \times X$	(A.3.1)

C	conjunto de Cantor	(6.2.11)
H_+, H_-	semiespacios en $\mathbb{R}^2$	(§7.5)
E_+^{n-1}	esfera unitaria positiva en $\mathbb{R}^n$	
E^*	$E \setminus \{0\}$	
$\mathbb{R}_+$	semieje real positivo	
$\mathbb{R}_-$	semieje real negativo	
E_+	semiesfera positiva (superior)	
E_-	semiesfera negativa (inferior)	
$L(M)$	subespacio vectorial generado por M	
$[f \leq \alpha]$	semiespacio cerrado	(4.5.4)
$[f = \alpha]$	$f^{-1}(\alpha)$	(A.5.4)
	hiperplano (f lineal)	(4.5.4)
$\prod_0(X)$	componentes conexas por arcos	(6.4.11)
Z_f	cilindro de la aplicación f	(6.4.16)
$A(X, x_0)$	arcos cerrados	(6.5.10)
$\prod_1(X, x_0)$	clases de homotopía	(6.5.10)
$Sop\ f$	soporte de f	(7.6.5)
$c(A)$	envoltura convexa	(§7.5)
λC	cono	(§7.5)
$A + B$	suma algebraica	(§7.5)

Categorías y colecciones

$\mathcal{P}(X)$	colección de los subconjuntos de X	
	(conjunto potencia de X)	(A.1.4)
H	categoría	(2.4.7)
$\mathcal{R}$	categoría de los números reales	(2.4.12)
$\mathcal{C}$	categoría de los conjuntos	(2.4.8)
$\mathcal{G}$	categoría de los grupos	(2.4.10)
$\mathcal{D}$	categoría de los conjuntos ordenados	(2.4.9)
$\mathcal{V}$	categoría de los espacios vectoriales reales	(2.4.11)
$\mathcal{M}$	categoría de los espacios métricos	(2.4.14)
$\mathcal{I}(X)$	categoría de los espacios topológicos	(2.4.26)
$\mathcal{U}$	categoría de los espacios uniformes	(11.2.9)
$\mathcal{I}_p$	categoría de los espacios topológicos	
	con punto fijado	(6.5.21)
$\mathcal{V}(x)$	vecindades de x	(3.1.1)
$\mathcal{V}_A(x)$	vecindades de x en el subespacio $(A, \mathcal{X}_A)$	$(A,\ \mathcal{X}_A)$
$\overset{\circ}{\mathcal{V}}(x)$	vecindades abiertas de x	
$\mathcal{F}(x)$	sistema fundamental de vecindades de x	(3.1.9)
$\mathcal{V}(A)$	vecindades del conjunto A	
S_α	sección final definida por la red	(3.4.8)
$\mathrm{S}(x_\alpha)$	familia de las secciones finales	(3.4.8)
$\mathcal{F}$	notación usual de filtro	(3.4.1)

$\mathcal{U}$	notación usual para ultra filtro y para uniformidad	(3.5.17)
$\mathcal{L}$	notacion usual para base de filtro	(3.4.3)
$(\mathcal{L})$	filto generado de $\mathcal{L}$	(3.5.11)
$\mathcal{U}$	notación usual para subbase de filtro	(3.5.11)
$\mathcal{L}(\mathcal{U})$	base de filtro generado por $\mathcal{U}$	
$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	notaciones usuales para topologías	(2.1.1)
β	notación usual para bases de topologías	(2.3.5)
D	notación usual para subbase de topología	(2.3.1)
$r(r^n)$	topología usual de $\mathbb{R}$ (de $\mathbb{R}^n$)	
τ	topología de los complementos finitos o cofinita	(2.1.7)
$\mathcal{X}_I$	topología izquierda	(5.3.2)
$\mathcal{X}_D$	topología derecha	(5.3.2)
$\mathcal{X}_A$	topología en el subespacio $A \subset X$	(5.1.1)
$\mathcal{X}_S$	topología del límite superior	(2.3.15)
$\mathcal{X}_u$	topología del espacio uniforme	(10.1.13)
$\mathcal{I}(f_\alpha)_I$	topología inicial definida por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$	(5.3.2)
$\Im(f_\alpha)_I$	topología final definida por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$	(5.3.11)
$\mathcal{I}$	colección de los subconjuntos finitos de I	
$P[a,b]$	colección de las particiones finitas del intervalo $[a,b]$	
$C_{\mathcal{X}}$	colección de los cerrados respecto a la topología	(4.2.1)
$\beta_{u/A}$	colección de los entornos $W(A,\varepsilon), \varepsilon > 0$	(12.1.1)
$\mathbf{U}_\sigma$	Estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de la colección σ	(12.1.4)
$\mathbf{U}_u$	$\mathbf{U}_\sigma$ para $\sigma = \{X\}$	(12.1.2)
$\mathbf{U}_{u/A}$	$\mathbf{U}_\sigma$ para $\sigma = \{A\}, A \subset X$	(12.1.1)
$\mathbf{U}_p$	$\mathbf{U}_\sigma$ para $\sigma = (\{X\})_{x\in X}$	(12.1.3)
$\mathcal{X}_\sigma$	Topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de la colección σ	(12.1.4)

Operaciones topológicas en subconjuntos

$\delta(A)$	diámetro de A	(1.5.10)
int A ó $\overset{\circ}{A}$	interior de A	(4.3.1)
ext A	exterior de A	(4.3.1)
$\overline{A}$	adherencia (o clausura) de A	(4.1.2)
A'	conjunto derivado	(4.1.9)
$fr\, A$ ó ∂A	frontera de A	(4.3.1)
$\overset{\circ}{A}_B$	interior de A en el subespacio $(B, \mathcal{X}_B)$	
$\overline{A}_B$	adherencia (o clausura) de A en el subespacio $(B, \mathcal{X}_B)$	

Operaciones en espacios y conjuntos

$A \subset B$	inclusión	
$A \cup B$	unión	
$A \cap B$	intersección	
$A \setminus B$	diferencia	
$\complement_A B$	$A \setminus B \wedge B \subset X$	
	(cuando no hay duda se omite A)	
$\cup\mathcal{F}, \cap\mathcal{F}$	unión e intersección de colecciones	
$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$	unión e intersección de familias	
$\times_{i=1} A_i$, $\times_{\alpha\in I} A_\alpha$	producto de conjuntos	
$\mathcal{L}' \vdash \mathcal{L}$	la base de filtro $\mathcal{L}'$ es más fina que la $\mathcal{L}$	
$V \circ U$	Operaciones con entornos uniformes	(11.1.4)
U^{-1}	Operaciones con entornos uniformes	(11.1.4)
$U(a)$	Operaciones con entornos uniformes	(11.1.4)
$U(A)$	Operaciones con entornos uniformes	(11.1.4)
V^n	Operaciones con entornos uniformes	(11.1.4)
sup A, ínf A	supremo e ínfimo de A	(A.10.A)
G_f	Grafica de f	(A.5.1)

Funciones o aplicaciones

f, g, h	notaciones usuales para funciones	
$f : X \to Y$	función de X en Y	
$X \xrightarrow{f} Y$		
$x \mapsto f(x)$	función	
$f\|A$	restricción de f a A	
$f(x)$	imagen de x por f	
$f[A]$	imagen del conjunto A por f	
$f\{\Im\}$	imagen de la colección $\Im$ por f	
$f^{-1}[A]$	imagen recíproca del conjunto A	(A.5)
$f^{-1}\{\Im\}$	imagen recíproca de la colección $\Im$	
$f^{-1}(x)$	$f^{-1}[\{x\}]$	(A.5.4)
$\mathbb{1}_X$	función identidad de X sobre X	
χ_A	función característica de A	
$t \mapsto sig\ t$	función signo	
$< a >$	función constante	
$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$	familia de funciones	
$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$	familia de puntos	

$(x_n), (x_{\alpha(n)})$	sucesión, subsucesión	
i_A	inyección de A en X, $A \subset X$	
π_i, π_x, π_α	proyecciones	(4.5.11)(A.8.2)
φ_R	aplicación canónica de X en $X\|R$	(A.5.2)
$f \simeq g$	aplicaciones homotópicas	(6.4.1)
$h : f \simeq g$	homotopía entre aplicaciones	(6.4.1)
$u \dot{\simeq} v$	arcos homótopos	(6.5.1)
$h : u \dot{\simeq} v$	homotopía entre arcos	(6.5.1)
rest A	cap. 12 (11)	

Convergencia

$x_n \xrightarrow[d]{} x$	convergencia de sucesiones en un espacio metrico	
	(Se omite d cuando no haya confusión)	(1.5.1)
$x_n \xrightarrow[\mathcal{X}]{} x$	convergencia de sucesiones y redes en un espacio	
$x_\alpha \xrightarrow[\mathcal{X}]{} x$	topológico. (Se omite $\mathcal{X}$ cuando no haya confusión)	(3.2.1)(3.3.4)
$\mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{X}]{} x$	convergencia de filtros de base de filtro. (Se omite	
$\mathcal{L} \xrightarrow[\mathcal{X}]{} x$	$\mathcal{X}$ cuando no haya confusión	(3.6.1)

CAPÍTULO 1 Espacios métricos

En este primer capítulo no se pretende hacer un estudio exhaustivo de los espacios métricos, puesto que más adelante, al englobarlos en una teoría más general, los espacios topológicos serán estudiados como tales, resaltando, cuando su importancia lo requiera, propiedades particulares.

El objetivo fundamental del capítulo es motivar la generalización de los conceptos fundamentales del análisis a los espacios topológicos a través de los espacios métricos.

Así en la sección 1 se estudian distintos tipos de convergencia del análisis y cómo pueden unificarse muchos de ellos con la noción de *métrica* . En la sección 2 se define métrica y espacio métrico, estudiándose algunos ejemplos importantes. En la sección 3 se estudian los subespacios y los espacios métricos isomorfos. En la sección 4 se generalizan las métricas a las seudométricas. En las secciones 5 y 6 se estudian, con la abstracción de los espacios métricos, los conceptos fundamentales de convergencia y continuidad, resaltando con las caracterizaciones de los mismos su *independencia* de la noción de métrica, propiciando su generalización a los espacios topológicos. Ya con estos elementos se analiza en la sección 7 esta transición a una nueva teoría.

§ 1.1 Conceptos de convergencia

El concepto de convergencia es fundamental en Análisis Matemático. Lo empleamos si hablamos de sucesiones convergentes de números reales y complejos, de sucesiones de puntos de un espacio euclideano, de sucesiones de funciones. En el último caso incluso utilizamos diversos tipos de convergencia: convergencia puntual, convergencia uniforme, convergencia en media. El concepto de convergencia no sólo es fundamental para los razonamientos teóricos del Análisis y del Análisis Funcional, sino también en Matemática Aplicada. Basta mencionar los problemas de aproximación en Análisis Numérico y en Cálculo Operacional. En la Teoría de Optimización por ejemplo, muchas veces no es posible determinar

explícitamente el valor optimal; entonces el problema consiste en hallar un algoritmo para construir una sucesión de valores que *converga* al valor optimal desconocido. Para funciones, en lugar de valores reales y vectoriales, existen problemas análogos: aproximación de controles optimales en Teoría de Control, aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales en Análisis Numérico.

En todos estos casos se utiliza el concepto de *convergencia*, basándose en un concepto de *distancia*. Pero en cada caso las definiciones de dichas 'distancias' son diferentes. Consideremos unos ejemplos.

1.1.1 *Ejemplo*

Decimos que una sucesión de números reales (x_i) **converge** a un número real x, y escribimos $(x_i) \twoheadrightarrow x$ si los términos x_i pueden estar tan cerca de x como se quiera tomando i suficientemente grande. Esta condición se precisa de la manera siguiente:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N(\varepsilon)$ tal que:

$$| x - x_i | \leq \varepsilon \text{ para todo } i \geq N(\varepsilon)$$

Aquí el valor absoluto de la diferencia $x - x_i$ es una medida para la proximidad de x_i a x. La llamamos **distancia** de x_i a x y la denotamos por $d(x, x_i)$ (fig. 1).

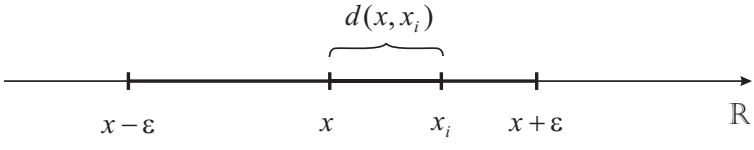


Figura 1

Evidentemente la sucesión (x_i) converge a x , si y sólo si la sucesión de las distancias $| x - x_i |$ converge a 0.

1.1.2. *Ejemplo*

Consideremos sucesiones (x_i) de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$. Para no confundir los subíndices de la sucesión con los índices de las coordenadas, denotaremos por $x_i(1), \ldots, x_i(n)$ las n coordenadas del punto x_i $(i \in \mathbb{N})$. Decimos que la sucesión (x_i) **converge** al punto $x \in \mathbb{R}^n$ si las distancias

$$d_2(x, x_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x(k) - x_i(k))^2} \tag{1}$$

son tan pequeñas como se quiera tomando los subíndices i son suficientemente grandes. Esta definición de la distancia entre dos puntos (1) se obtiene partiendo de nuestra intuición espacial en $\mathbb{R}^3$ (fig. 2).

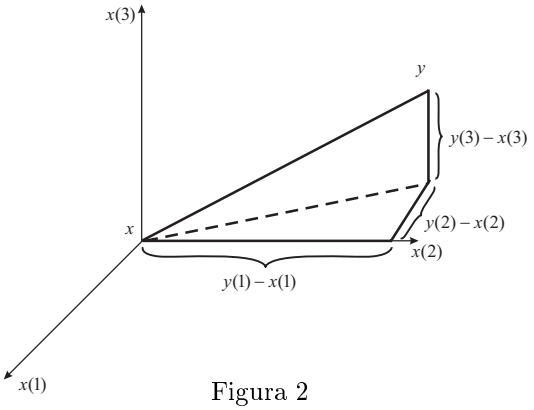


Figura 2

1.1.3. *Ejemplo*

Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto cualquiera y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a una función $f : A \to \mathbb{R}$, si para todo $x \in A$ la sucesión real $(f_n(x))$ converge al número real $f(x)$. Este concepto de convergencia es bastante débil. Mientras que en un punto fijo x las funciones f_n se acercan a f pueden alejarse de f en otros puntos. Consideremos por ejemplo la sucesión de las funciones f_n sobre $A = [0, 1]$ cuya gráfica forma un triángulo isósceles de altura n, mientras que $f_n(x) = 0$ para $x \geq 1/n$ (fig. 3). Aunque esta sucesión varía de manera tan errática en la proximidad de 0, es fácil probar que converge puntualmente a la función constante $\langle 0 \rangle : x \to 0$ sobre $[0, 1]$.

Para cuestiones, donde importa el comportamiento global de una función f

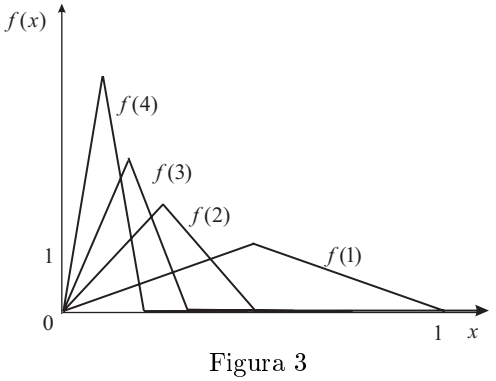


Figura 3

sobre todo su dominio, una aproximación puntual no sería suficiente. En este caso muchas veces se buscan aproximaciones *uniformes*:

1.1.4 *Ejemplo*

Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto cualquiera y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas $f_n : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f_n **converge uniformemente** a una función $f : A \to \mathbb{R}$

en el conjunto A, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow \mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon \qquad \text{para todo}\, x \in A \tag{2}$$

Esto significa intuitivamente que a partir de un cierto índice N las gráficas de f_n se hallan dentro de la ε-banda de la gráfica de f (fig. 4). La condición (2) es equivalente a

$$d_\infty(f, f_n) = \sup_{x \in A} \mid f(x) - f_n(x) \mid < \varepsilon \qquad \text{para n} > N \tag{3}$$

Luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, si la sucesión real $\{d_\infty(f,\ f_n)\}$ converge a 0.

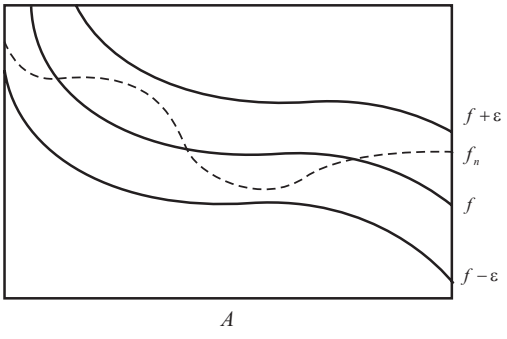


Figura 4

En teorías como probabilidad o estadística, no son importantes, en la mayoría de los casos, los valores de una función en puntos particulares. Entonces no se necesitan aproximaciones que sean *buenas* en todos los puntos, sino solamente las que sean *buenas en media o en media cuadrática.*

1.1.5 *Ejemplo*

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas sobre el intervalo $[\,0, 1\,]$. Entonces $\mid f(x) - g(x) \mid$ es, para todo $x \in [\,0, 1\,]$, la distancia entre los valores de f y de g en x. La **distancia media** entre los valores de g y f:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 \mid f(x) - g(x) \mid dx$$

depende sólo de las dos funciones f y g. Su significación intuitiva es el área entre las gráficas de f y g (fig. 5).

Se dice que una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ sobre $[\,0, 1\,]$ **converge en media** hacia una función f, si la sucesión $(d_1(f, f_n))$ converge a 0.

En la teoría de aproximación se utiliza otro método para medir la proximidad entre dos funciones integrables $f,\ g$: $[\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$. Considerando f como una

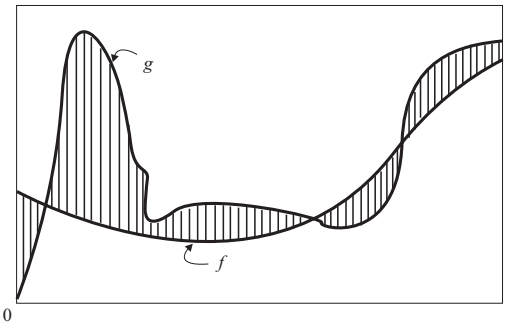


Figura 5

función dada o buscada y g como una aproximación (p. ej., polinómica) de f, $(f(x) - g(x))^2$ es el **error cuadrático** que se comete, si se sustituye f por g en el punto x. Luego

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \tag{4}$$

es el error cuadrático que se comete en media si se sustituye f por g. Para obtener una medida de proximidad, que sea positivamente homogénea, se introduce en lugar de (4) su raíz cuadrada

$$d_2(f, g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2} \tag{5}$$

Se dice que una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ **converge en media cuadrada** a f sobre $[0, 1]$, si la sucesión de los errores cuadráticos $\{d_2(f, f_n)\}$ converge a 0.

1.1.6 *Ejercicio*

i) Prueba que toda sucesión uniformemente convergente de funciones es puntualmente convergente, pero que no se cumple el inverso.

ii) Prueba que toda sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, que converge uniformemente a f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, converge también *en media* y *en media cuadrada* a f, pero que no se cumple el inverso.

iii) Prueba que la convergencia puntual no implica la convergencia en media o en media cuadrada.

iii) Prueba que un límite uniforme de funciones continuas es continuo pero no en el caso para límites puntuales

Indicación: considerar las funciones de 1.1.3.

1.1.7 *Ejercicio*

Todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ puede identificarse con la función $k \mapsto x(k)$ de A=$\{1, ..., n\}$ en $\mathbb{R}$, que asocia a todo índice $k \in A$ la k-ésima coordenada de x. Prueba que

para tales funciones (que tienen un dominio finito) la convergencia puntual y la convergencia uniforme coinciden.

Los conceptos de convergencia, definidos en los ejemplos anteriores, son aparentemente muy heterogéneos. Sin embargo, para números, vectores o funciones, se plantean frecuentemente problemas similares. Por ejemplo: ¿esta determinado de manera única el límite de una sucesión convergente? ¿Son convergentes las sucesión de Cauchy (de números, vectores o funciones)? ¿Puede extraerse una subsucesión convergente de una sucesión acotada?

Parece lógico desarrollar, para estos problemas comunes, una teoría común, aplicable igualmente a números, vectores, funciones y otros objetos matemáticos. Para desarrollar tal teoría habría que hacer un análisis de los razonamientos usuales en el tratamiento de los diferentes tipos de convergencia, y formular la base lógica común de estos razonamientos como sistemas de axiomas de una nueva teoría. No podemos reproducir aquí el proceso histórico que terminó con la definición de los espacios métricos de Fréchet (1905). Sin embargo, ya nuestros ejemplos nos dan unas sugerencias. Analicemos su estructura común.

Todos estos conceptos de convergencia quedan expresados en la siguiente fórmula general: una sucesión de elementos $\{x_i\}$ (resp. $\{f_i\}$) converge a un elemento x (resp. f), si las x_i (resp. f_i) están tan cerca de x (resp. f) como se quiera, cuando los subíndices i son suficientemente grandes. Lo esencial es, cómo se precisa en cada caso la palabra *cerca*. Con excepción del ejemplo 1.1.3 (convergencia puntual) esto se hace por una **medida de proximidad**, a saber por:

$$d(x,y) = \mid y - x \mid \tag{6}$$

para la convergencia de números en $\mathbb{R}$;

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x(k) - y(k))^2} \tag{7}$$

para la convergencia de puntos en $\mathbb{R}^n$;

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in A} \mid g(x) - f(x) \mid \tag{8}$$

para la convergencia uniforme;

$$d_1(f,g) = \int_0^1 \mid g(x) - f(x) \mid dx \tag{9}$$

para la convergencia en media;

$$d_2(f,g) = \left(\int_0^1 (g(x) - f(x))^2 dx \right)^{1/2} \tag{10}$$

para la convergencia en media cuadrada.

En el ejemplo 1.1.3 no tenemos una sola medida sino toda una familia que miden la proximidad de f_n a f en los distintos puntos $x \in A$

$$d_x(f,g) = \mid f(x) - g(x) \mid \quad (x \in A)$$

Esto parece ser una diferencia estructural tan importante, que es natural excluir la convergencia puntual en una primera fase de nuestra consideración.

Regresemos a los demás ejemplos. Corresponde a nuestra intuición geométrica interpretar las dos magnitudes $d(x,y)$ y $d_2(x,y)$ en (6), (7) como distancias: $\mid x - y \mid$ es la distancia entre los números reales x y y en la recta real y

$$\sqrt{(x(1)-y(1))^2 + (x(2)-y(2))^2 + (x(3)-y(3))^2}$$

es la distancia entre los dos puntos $x = (x(1),\, x(2),\, x(3))$ y $y = (y(1),\, y(2),\, y(3))$ en el espacio tridimensional.

Pero, no tenemos una idea intuitiva de lo que sería una distancia entre dos funciones, estamos acostumbrados a hablar de la distancia entre dos *valores* de funciones. Fue un gran logro en la historia de las matemáticas cuando, en vez de fijarse en los valores de las funciones, las funciones mismas se consideraron como *puntos* de un nuevo espacio abstracto y las magnitudes (8), (9) y (10) se interpretaron como distancia entre estos *puntos*. Esta concepción es el origen del Análisis Funcional.

Con la interpretación de las *medidas de proximidad* (8) - (10) como distancias entre funciones casi tenemos ya un *modelo matemático* para las cuestiones de convergencia. Queda sólo precisar lo que es una distancia en general. No podemos recurrir a nuestra intuición espacial, porque no tenemos una intuición geométrica de la distancia entre dos funciones, además existen diferentes conceptos de distancias como hemos visto.

Coleccionemos las propiedades más elementales de las distancias definidas. Según nuestros ejemplos, la distancia entre dos elementos de un conjunto X (de números, vectores, funciones, etc.) es un número real positivo. Si asociamos a todo par de elementos $(x,y) \in X^2$ su distancia, obtenemos una función de $X \times X \to \mathbb{R}$ que se llama **métrica**. Claro, que no llamaremos *métrica* a cualquier función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$. Exigiremos que sus valores verifiquen algunas propiedades básicas de las distancias intuitivas. Por ejemplo, la distancia entre dos elementos x, y podrá ser 0 únicamente si $x = y$. Además la distancia de x a y deberá ser igual a la distancia de y a x.

La selección de propiedades fundamentales para la caracterización axiomática de una métrica debe verificar dos criterios:

1. Las propiedades deben ser suficientemente débiles para ser comunes a todas las métricas concretas ya utilizadas.

2. Deben ser suficientemente fuertes para establecer una teoría sólida que permita el tratamiento sistemático y simultáneo de los problemas fundamentales de convergencia y de continuidad.

Fue FRÉCHET quien descubrió primero (en su disertación de doctorado [59]) que es suficiente añadir la desigualdad triangular:

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$

a las dos propiedades mencionadas anteriormente, para tener una base axiomática adecuada de la *teoría de los espacios métricos.*

§ 1.2 Métricas. Ejemplos de espacios métricos

1.2.1 *Definición (métrica, espacio métrico)*

Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama **métrica** o **distancia** sobre X, si verifica los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{lll} (D1) & d(x,y) = d(y,x) & x,y \in X \\ (D2) & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & x,y,z \in X \\ (D3) & d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y & x,y \in X \\ (D4) & d(x,y) \geq 0 & x,y \in X \end{array}$$

Para $x, y \in X$ el número real $d(x,\, y)$ se llama entonces **distancia** entre x y y. Al par (X, d) se le dice **espacio métrico**.

Nota: Una métrica sobre X no es una función sobre X sino sobre $X^2 = X \times X$.

1.2.2 *Ejercicio.*

Probar que $(6), (7), (8), (9), (10)$ definen métricas sobre los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $B([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f \text{ acotada}\}$, $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid \text{continua}\}$ respectivamente.

Indicación: En el caso de (10) se puede utilizar la desigualdad de Minkowski:

$$\int_0^1 \mid fg \mid dx \leq \left(\int_0^1 f^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2 dx\right)^{1/2}$$

Hemos hallado el espacio métrico como modelo para el tratamiento de cuestiones de convergencia y de aproximación. Pero, como es costumbre con los modelos matemáticos, la teoría de los espacios métricos sirve para muchos otros fines. La gran variedad de aplicaciones posibles ya se indica en los siguientes ejemplos de espacios métricos, que no sólo pertenecen al Análisis o Análisis Funcional, sino también a disciplinas aparentemente tan ajenas como la teoría algebraica de los números y la teoría de gráficas.

1.2.3 *Ejemplo (métrica discreta).*

Sea X un conjunto cualquiera. Entonces la aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Es una métrica. Todo conjunto puede proveerse de esta métrica trivial que se llama **discreta**.

1.2.4 *Ejemplo* (**espacios normados**)

Sea E un espacio vectorial real. Nos interesan especialmente las métricas d sobre E que son *compatibles* con la estructura lineal de este espacio. Por compatible, entendemos que cumplen dos propiedades que tienen un significado geométrico sencillo.

Homogeneidad positiva bajo homotecias:

$$(DV\,1) \quad d(\lambda x, \lambda y) = \mid \lambda \mid d(x,y) \quad \text{para todos } x,\, y \in E, \lambda \in \mathbb{R} \text{ (fig. 6)}$$

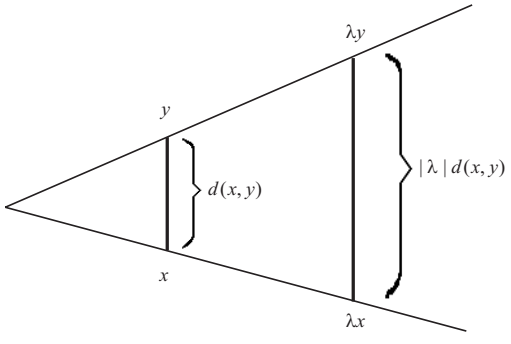


Figura 6

Invariancia bajo traslaciones:

$$(DV\,2) \quad d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \text{para todos } x,\, y,\, z \in E \text{ (fig. 7)}$$

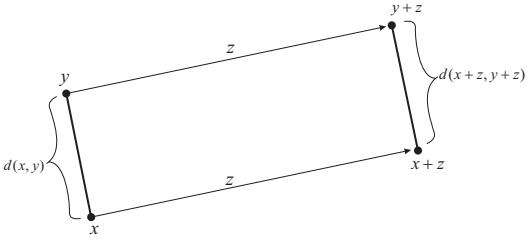


Figura 7

Si d tiene estas dos propiedades, la distancia entre x y y es igual a la distancia del vector $y - x$ a 0:

$$d(x,y) = d\,(\,0,\, y - x\,)$$

o sea, d está determinada por la función de una sola variable

$$\| \cdot \| \colon z \mapsto d(0,z) = \| \, z \, \| \quad \text{sobre } E.$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{lll} (N1) & \| \lambda z \| = | \lambda | \, \| z \| & z \in E \\ (N2) & \| z + z' \| \leq \| z \| + \| z' \| & z, z' \in E \\ (N3) & \| z \| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 & z \in E \\ (N4) & \| z \| \geq 0 & z \in E \end{array}$$

Toda función $z \mapsto \| z \|$ de E en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que cumple estas tres propiedades se llama una **norma** sobre el espacio vectorial E y al par $(E, \| \cdot \|)$ se le llama **espacio normado**. Resulta que, si d es una métrica sobre E que satisface las dos propiedades de compatibilidad $(DV\,1), (DV\,2)$, entonces la aplicación $z \mapsto \| z \| := d(0, z)$ es una norma.

Dejamos al lector probar que lo inverso se cumple también:
Si $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio normado, entonces la aplicación

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \| y - x \| \text{ sobre } E \times E$$

es una métrica compatible con la estructura vectorial de E. Esta métrica se asocia canónicamente al espacio normado $(E, \| \cdot \|)$.

Pregunta: ¿Cuáles de las métricas mencionadas en el ejercicio 1.2.2 son compatibles con la estructura vectorial, y cuáles son las normas correspondientes?

1.2.5 *Ejemplo (espacio prehilbertiano)*

Recordemos que un espacio prehilbertiano es un espacio vectorial H (sobre $K = \mathbb{C}$ o sobre $K = \mathbb{R}$) con un producto interior que asocia a todo par $(x, y) \in H \times H$ un escalar $\langle x, y \rangle$ y que satisface los axiomas siguientes:

$(H\ 1)$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (la barra significa aquí el complejo conjugado)
$(H\ 2)$ $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
$(H\ 3)$ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
$(H\ 4)$ $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad x, y, z \in E, \lambda \in K$

Decimos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio prehilbertiano real** (resp. **complejo**) o **espacio pre-euclideano**, si $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$). Si $K = \mathbb{R}$ el producto interior es lineal en ambas variables. Si $K = \mathbb{C}$, entonces $\langle x, y \rangle$ es lineal solamente en x. En ambos casos, para todo $x \in H, \langle x, x \rangle$ es un número real positivo.
Dejamos al lector probar que en todo espacio prehilbertiano real o complejo se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz (sin necesidad de exigir la segunda parte de $(H4)$).

$$| \langle x, y \rangle | \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle y, y \rangle^{1/2} \tag{11}$$

Está claro que la función $\| \cdot \|$: $x \mapsto$ sobre H, donde $\| x \| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ sobre H verifica los axiomas métricos $(N1)$ y $(N3)$. Además, empleando (11) se tiene que

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 = & \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2Re \langle x, y \rangle \\ \leq & \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \| y \| = (\| x \| + \| y \|)^2 \end{aligned}$$

(Re denota la parte real), para todos los $x, y \in H$. Por lo tanto $\| \, . \, \|$ cumple también $(N2)$. Luego es una norma sobre H.

De tal manera, tenemos canónicamente asociado a todo espacio prehilbertiano una métrica.

$$d(x,y) = \| \, y - x \, \| = \langle \, y - x, y - x \, \rangle^{1/2} \tag{12}$$

que es compatible con la estructura vectorial de H. Es fácil comprobar que las normas derivadas de un producto interior cumplen la ley del paralelogramo:

$$\| \, x + y \, \|^2 + \| \, x - y \, \|^2 = 2 \, \| \, x \, \|^2 + 2 \, \| \, y \, \|^2 \tag{13}$$

Incluso esta propiedad es característica para estas normas o sea: Si una norma $\| \cdot \|$ sobre un espacio vectorial real o complejo E cumple (13), entonces se deriva de un producto interior sobre E. Un ejemplo está dado por la norma euclideana

$$\| \, x \, \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2)}$$

sobre $\mathbb{R}^n$, que verifica la ley del paralelogramo. Se deriva del producto interior canónico que:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

sobre $\mathbb{R}^n$.

Un contraejemplo está dado por la norma

$$\| \, x \, \|_\infty = \text{máx}\{ \, | \, x_i \, | \; i = 1, ..., n\}$$

sobre $\mathbb{R}^n$. Para

$$x = (1,0) \in \mathbb{R}^2, \;\; y = (0,1) \in \mathbb{R}$$

tenemos $\| \, x \, \|_\infty = 1$, $\| \, y \, \|_\infty = 1$, $\| \, x + y \, \|_\infty = 1$ y $\| \, x - y \, \|_\infty = 1$. Luego esta norma no cumple la ley del paralelogramo.

1.2.6 *Ejemplo (el espacio $l^2(\mathbb{N})$)*

Para construir un espacio pre-euclideano de dimensión infinita, consideremos el conjunto $l^2(\mathbb{N})$ de todas las sucesiones de números reales $\{x_k\}$, con $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$.

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz para los espacios $\mathbb{R}^n$ el lector deducirá fácilmente que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{1/2} \tag{14}$$

De aquí que $l^2(\mathbb{N})$, provisto de la adición y del producto escalar usuales para sucesiones, es un espacio vectorial real. Evidentemente la aplicación

$$(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{15}$$

es simétrica, bilineal y positiva, por lo tanto es un producto interior sobre $l^2(\mathbb{N})$. El par $l^2((\mathbb{N}), \langle .,. \rangle)$ es un espacio pre-euclideano de dimensión infinita con la norma

$$x \mapsto \| x \| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{1/2} \tag{16}$$

y la métrica

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \| y - x \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (y - x)^2 \right)^{1/2} \tag{17}$$

A pesar de la analogía de las definiciones, el espacio $l^2(\mathbb{N})$ es métricamente muy diferente de los espacios euclideanos de dimensión finita $\mathbb{R}^n$, como veremos más adelante.

1.2.7 *Ejemplo* (**distancia $p-$ádica**)

Procederemos a definir sobre el conjunto $X = \mathbb{Q}$ de los números racionales la llamada distancia p-ádica, que juega un papel importante en la teoría algebraica de los números.

Sea p un número primo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $v_p(n)$ al exponente de p en la descomposición de n en factores primos. Entonces se cumple para todos los $n, n' \in \mathbb{N}$

$$v_p(n \cdot n') = v_p(n) + v_p(n') \tag{18}$$

Si ahora $x = \pm\, r/s \in \mathbb{Q}$ con $r, s \neq 0, \quad r, s \in \mathbb{N}$ podemos definir

$$v_p(x) := v_p(r) - v_p(s). \tag{19}$$

De (18) es fácil ver que este valor no depende de la expresión particular de x como fracción y, además con esta definición, (18) sigue siendo válida para $n, n' \in \mathbb{Q}$. Con tal convenio podemos definir la métrica p-ádica d_p por:

$$d_p(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ p^{-v_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \end{cases} \qquad ((x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \tag{20}$$

Dejamos al lector verificar que d_p cumple los axiomas $(D1)$ a $(D3)$.

Daremos ahora un ejemplo de un espacio métrico finito. Tales espacios métricos se estudian por ejemplo en la *teoría de gráficas*.

1.2.8 *Ejemplo* (**distancia de costos**)

Consideremos el problema siguiente: en una región un cierto número finito de lugares deben conectarse por carreteras. Se conocen los costos de construcción de toda una serie de carreteras posibles. Se busca una red de carreteras que conecte todos los lugares y cuyos costos de construción sean minimales. Para resolver

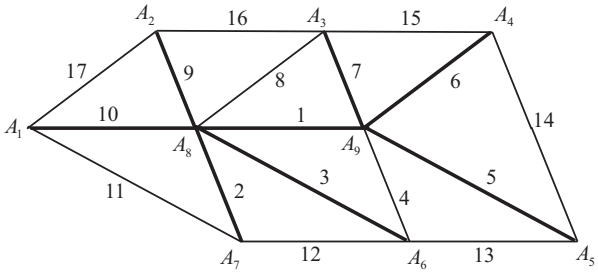


Figura 8. Gráfica con peso

este tipo de problemas se toman como modelos las *gráficas con peso* (conexas). Por ejemplo: (fig. 8).

No daremos la definición formal de una gráfica con peso, para nuestro objetivo basta el concepto intuitivo (v., p. ej., BERGE[17]). Veremos enseguida cómo introducir una métrica sobre el conjunto de los vértices. Estos vértices pueden conectarse por al menos un camino (por conexidad). En nuestro ejemplo tenemos entre A_1 y A_4 los caminos: (A_1, A_2, A_3, A_4), (A_1, A_8, A_9, A_4), $(A_1, A_2, A_8, A_3, A_9, A_4)$, etc. A cada camino $(A_{i_1}, ..., A_{i_r})$ se le asocia sus costos de construcción

$$c(A_{i_1}, A_{i_2}) + ... + c(A_{i_{r-1}}, A_{i_r}),$$

por ejemplo al camino (A_1, A_2, A_3, A_4) se le asocian los costos $17 + 16 + 15 = 48$. Está claro que entre ellos existe (al menos) un camino cuyos costos de construcción son minimales. Evidentemente tales caminos tienen un interés particular en la economía; la teoría de gráficas ha desarrollado algoritmos para determinar explícitamente estos caminos llamados *caminos geodésicos*.

Si denotamos por d_{ij} los costos del camino geodésico entre A_i y A_j, es fácil comprobar que mediante la función

$$d : (A_i, A_j) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ & \qquad\qquad i, j = 1, ..., 9 \\ d_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se define una métrica sobre el conjunto de los vértices de la gráfica. $d_{ij}(i \neq j)$ que se llama **distancia de costos** entre A_i y A_j , la matriz (d_{ij}), $i, j = 1, ..., 9$ se llama **matriz de distancias** de la gráfica con peso.

En cuanto al problema planteado inicialmente puede demostrarse que la red de costos minimales que conectan todos los lugares $A_1, ..., A_n = A_9$ tiene $n - 1 = 8$ carreteras. Existen algoritmos para determinar explícitamente tales redes. En nuestra gráfica hemos dibujado una red de costos minimales.

1.2.9 *Ejercicio*

Representemos métricamente, en $\mathbb{R}^2$, la situación de una tribu en un lugar muy boscoso con un río en $y = 0$.

Para llegar al agua, Los habitantes de una tal tribu hicieron brechas perpendiculares al río. Si alguien desea ir de un punto (x_1, y_1) a un punto (x_2, y_2), sólo

puede hacerlo, debido a lo espeso del bosque, por las brechas o por la orilla del río (fig. 9).

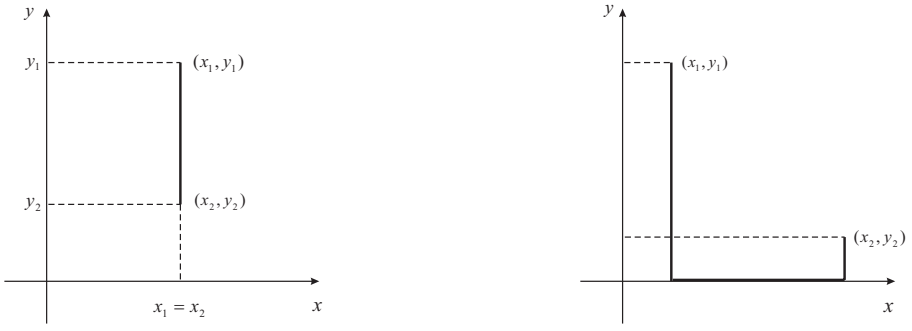


Figura 9. Métrica del bosque

i) Dar la definición precisa de la métrica apropiada a esta situación y verifica que es una métrica.

ii) Prueba que no es compatible con la estructura vectorial de $\mathbb{R}$.

§ 1.3 **Subespacios. Isometrías**

Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Para todo par de puntos x y $y \in A$, tenemos asociada una distancia $d(x, y)$ ya que x y y son elementos del espacio métrico (X, d). Estas distancias $d(x, y)$, $(x, y \in A)$ verifican trivialmente los axiomas (D 1) - (D 3); luego inducen una métrica sobre A.

1.3.1 *Definición (subespacios métricos)*

Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$. Entonces la métrica

$$d_A : (x, y) \to d_A(x, y) := d(x, y), \qquad (x, y) \in A \times A$$

se llama **métrica inducida** por d sobre el subconjunto $A \subset X$ y (A, d_A) se llama **subespacio métrico** de X.

Esta definición nos provee de una gran variedad de nuevos espacios métricos partiendo de los espacios métricos ya definidos en los ejemplos anteriores. Por ejemplo, todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ nos da un espacio métrico. Podemos preguntarnos ahora a qué espacios métricos debemos llamar *isomorfos*.

1.3.2 *Definición (Isometría)*

Sean $(X, d), (X', d')$ dos espacios métricos. Una biyección $f : X \to X'$ se llama **isometría**, si para todo lo x, $y \in X$ se cumple que $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Dos espacios métricos se llaman **isomorfos** o **isométricos** si existe una isometría de uno sobre otro. ¿Por qué es suficiente pedir *sobreyección* en lugar de *biyección* en esta definición?

1.3.3 *Ejemplo*

Cada subespacio lineal o afín de $\mathbb{R}^n$, de dimensión m, es isométrico al espacio $\mathbb{R}^m$ (con la métrica euclideana).

Todo subespacio métrico del espacio euclideano es isomorfo a todas sus traslaciones.

1.3.4 *Ejemplo*

Todo espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ *es isomorfo*, *como espacio* métrico, al subespacio $\{(x_i) \in l^2(\mathbb{N}) \mid x_{n+k} = 0$, para, $k \in \mathbb{N}^*\}$ del espacio euclideano l^2 $(\mathbb{N})$, definido en el ejemplo 1.2.6.

1.3.5 *Ejemplo*

Se puede probar el siguiente resultado: si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ sobre sí mismo con $f(0) = 0$, entonces f es lineal y conserva al producto interior, o sea f es un automorfismo del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$.

1.3.6 *Ejercicio*

¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son isometrías sobre $\mathbb{R}^n$:

i) las *traslaciones*: $x \mapsto x + b, \qquad b \in \mathbb{R}^n \ fijo,$

ii) las *homotecias*: $x \mapsto \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \ fijo,$

iii) las *rotaciones*: $x \mapsto Ax, \quad A$ *matriz* de $n \times n$ *ortogonal*,

iv) o las aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que conservan la norma?

§ 1.4 **Seudométricas**

Sea $X \subset \mathbb{R}^A$ un conjunto de funciones reales sobre un conjunto $A \neq \varnothing$. De manera natural, la proximidad de dos funciones $x, y \in X$ en un punto $a \in A$ se mide por la distancia $\mid x(a) - y(a) \mid$ entre sus valores en el punto a.

Sin embargo, la aplicación

$$f_a : (x, y) \mapsto \mid x(a) - y(a) \mid$$

no puede interpretarse como una métrica sobre X, f_a es simétrica y cumple la desigualdad triangular , pero de $f_a(x, y) = 0$ no puede deducirse que $x = y$.

Se dice que f_a es una **seudométrica** sobre X .

1.4.1 *Definición (Seudométrica)*

Sea X un conjunto. Una aplicación $f : X^2 \to \mathbb{R}$ se llama una **seudométrica** o **semidistancia** sobre X si cumple:

$$\begin{array}{ll} \text{(D 1) } f(x,y) = f(y,x) & \text{(simetría)} \\ \text{(D 2) } f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y) & \text{(desigualdad triangular)} \\ \text{(D 3) } x = y \Longrightarrow f(x,y) = 0 & \end{array}$$

para todos los $x, y, z \in X$.

Al par (X, f) se le llama **espacio seudométrico**.

Para ver si una seudométrica es una métrica hay que verificar que todos sus valores sean reales y que $f(x,y) \neq 0$ para todos los x, $y \in X$ con $x \neq y$.

1.4.2 *Ejemplo*

Sea X un conjunto y $h : X \to \mathbb{R}$ una función real sobre X. Entonces la aplicación, definida por

$$f(x,y) :=\mid h(x) - h(y) \mid \quad (x, y \in X)$$

es una seudométrica sobre X y si h es inyectiva, f es una métrica.

1.4.3 *Ejemplo (seminormas)*

Análogamente que para métricas se dice que una seudométrica $f : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sobre un espacio vectorial real E es compatible con la estructura lineal de E, si cumple:

$$\begin{array}{ll} \text{(DV 1) } f(\lambda x, y) =\mid \lambda \mid f(x,y) & \\ \text{(DV 2) } f(x+z, y+z) = f(x,y) & \text{para todo } x,\ y,\ z \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tales endométricas definen una aplicación $p : x \mapsto f(0,x)$ sobre E con las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} \text{(N 1) } p(\lambda x) =\mid \lambda \mid p(x) & \text{(homogeneidad positiva)} \\ \text{(N 2) } p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \text{(desigualdad triangular)} \\ \text{(N 3}') \ x = 0 \Longrightarrow p(x) = 0. & \end{array}$$

Las funciones $p : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (sobre espacios vectoriales reales o complejos E) con estas tres propiedades se llaman **seminormas**. Si, inversamente, $p : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una seminorma, entonces se define por

$$f(x,y) := p(y - x) \tag{21}$$

una seudométrica real sobre E. La mayoría de las seudométricas usuales sobre un espacio vectorial provienen de una seminorma.

1.4.4 *Ejercicio*

Sea E un espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Prueba que $N = \{x \in E | \text{ con } p(x) = 0\}$ forma un subespacio vectorial de E y que p induce una norma sobre el espacio cociente E/N.

Pregunta: ¿Es posible que una seminorma p que no es una norma sobre un espacio vectorial E induzca una *norma* sobre un subespacio vectorial de E? ¿Por ejemplo?

Partiendo de una seudométrica o de una familia de seudométricas dadas, se obtienen nuevas seudométricas por toda una serie de operaciones bastante generales. Es precisamente la variedad de estas posibilidades lo que constituye la utilidad de las seudométricas:

i) La suma de una familia (finita o no) de seudométricas es una seudométrica.

ii) Todo límite puntual de seudométricas es una seudométrica.

iii) El supremo de una familia (finita o no) de seudométricas es una seudométrica.

iv) Si $\rho : X \to Y$ es una aplicación y g: $Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una seudométrica, entonces

$$f(x, y) := g(\rho(x), \rho(y)), \quad (x,\, y \in X) \tag{22}$$

es una nueva seudométrica sobre X que se llama **imagen recíproca** de la seudométrica g.

v) Si $f : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es una seudométrica y φ: $\overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función creciente con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, entonces $g := \varphi \circ f$ es otra seudométrica sobre X.

vi) Más generalmente, si $f_1, ..., f_n : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ son seudométricas, $f = (f_1, ..., f_n) : X^2 \to (\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ y $\varphi : (\overline{\mathbb{R}}_+)^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función **creciente**[1] con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)+\varphi(y)$, entonces $g := \varphi$ o f es otra seudométrica sobre X.

1.4.5 *Ejercicio.* Probar los enunciados i) – vi).

[1]Sobre el conjunto ordenado $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$, provisto del orden producto:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, ..., x_n \leq y_n$$

para $x, y \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^n$, una función real se llama creciente, si cumple:

$$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \quad \text{para toda } x,\, y \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^n.$$

Veamos algunas aplicaciones.

1.4.6 *Ejemplo (convergencia uniforme sobre un subconjunto)*

Sea X un conjunto de aplicaciones de un conjunto $A \neq \varnothing$ en un espacio métrico (Y, d) y sea $B \subset A$. Para todo $b \in B$ la función

$$d_b : (x, y) \mapsto d_b(x, y) := d(x(b), y(b)) \tag{23}$$

es una seudométrica sobre X. Luego, por iii), la función

$$d_B : (x, y) \to \sup_{b \in B} d_b(x, y) \tag{24}$$

es una seudométrica sobre X. Esta métrica d_B mide la proximidad de las funciones $x, y \in X$ sobre el conjunto $B \subset A$ (fig. 10).

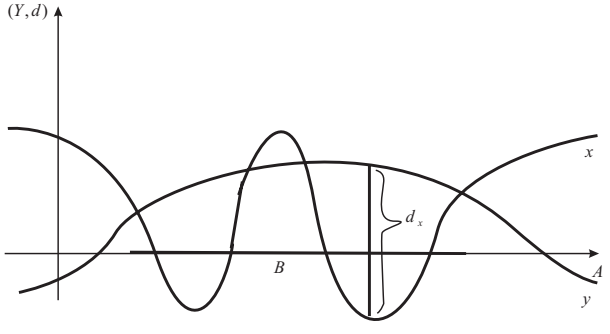


Figura 10.

Para $B = A$ obtenemos la seudométrica $d_A = d_\infty$ de la convergencia uniforme (1.1.4).

1.4.7 *Ejemplo (producto finito de espacios métricos)*

Mencionemos primeramente que la función

$$x \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

sobre $\overline{\mathbb{R}}_+^n$, tiene las propiedades requeridas en vi) (por la desigualdad triangular para la norma euclideana). Sea (X_i, d_i), $i = 1, ..., n$ una familia finita de espacios métricos. Las funciones

$$(x, y) \mapsto d_i(x_i, y_i) \ \ (i = 1, ..., n)$$

son seudométricas sobre el producto $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$. Luego, por vi), iii) y i), las aplicaciones d_2, d_∞, d_1 definidas por:

$$d_2(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2} \tag{25}$$

$$d_\infty(x,y) := \sup\{d_i(x_i,y_i) \mid i = 1,...,n\} \tag{26}$$

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i) \tag{27}$$

son seudométricas sobre X. Es evidente que son, de hecho, métricas y que cumplen

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq nd_\infty \tag{28}$$

Según sea el caso se utiliza una de estas tres seudométricas canónicas sobre el espacio producto $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. La primera se utiliza, principalmente, si los espacios X_i son espacios euclideanos y las d_i son las métricas asociadas, $(i = 1,...,n)$. El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es un caso particular de tal producto: la distancia euclideana sobre $\mathbb{R}^n$ se construye como producto de las métricas

$$d_i(x_i,y_i) :=\mid y_i - x_i \mid \text{ sobre } X_i := \mathbb{R} \qquad i = 1,...,n$$

1.4.8 *Ejemplo*

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces las funciones

$$d' := \frac{d}{1+d} \tag{29}$$

$$d'' := \text{ínf}\{1,d\} \tag{30}$$

son métricas sobre X (por v)). Para esta métricas se tiene

$$d' \leq d'' \leq 2d' \tag{31}$$

y ambas están acotadas (por 1). Se utilizan, principalmente, si es necesario sustituir una métrica dada d por una métrica acotada. En los dos ejemplos anteriores hemos definido sobre un mismo conjunto diferentes métricas que son comparables (28), (31).

Veremos, más adelante, que muchos conceptos de la teoría de los espacios métricos (p. ej., *sucesión convergente, conjunto acotado, función continua o uniformemente continua*) se mantienen invariantes al pasar de una métrica a otra métrica *comparable.*

1.4.9 *Definición (seudométricas semejantes)*

Dos seudométricas d, d' sobre un conjunto X se llaman **semejantes**, si existen números reales $k, k' > 0$ tales que

$$d(x,y) \leq k'd'(x,y) \quad \text{y} \quad d'(x,y) \leq kd(x,y) \tag{32}$$

para todo x, $y \in X$. Es fácil comprobar que la semejanza es una relación de equivalencia entre las seudométricas sobre un conjunto. Una *seudométrica* semejante a una *métrica* es ella misma una *métrica.* Por (28) las tres métricas canónicas

sobre un producto finito de espacios métricos son semejantes. Esto explica por qué pueden utilizarse equivalentemente, según convenga. Por lo mismo, las dos métricas acotadas d', d'', canónicamente asociadas a una métrica d (ej. 1.4.8), son semejantes. Sin embargo, una métrica no acotada, no puede ser semejante a una métrica acotada; luego una métrica no acotada d sobre un conjunto X, no es semejante a la métrica $d' = \dfrac{d}{(1+d)}$ ni a la métrica $d'' = \text{ínf}\{1, d\}$.

Pregunta: ¿Son semejantes las métricas d_∞ (8) y d_1 (9) sobre $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R})$?
¿Son semejantes las métricas $d_1(9)$ y $d_2(10)$ sobre $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R})$?

Regresemos a nuestro problema inicial, o sea, a los diferentes conceptos de convergencia para sucesiones de funciones. Podemos ahora precisar la diferencia estructural entre la *convergencia puntual* y los demás tipos de convergencia. Para estudiar la convergencia puntual en un conjunto de funciones $X \subset \mathbb{R}^A$ debemos considerar *toda una familia* de seudométricas $(d_a)_{a \in A}$ mientras que la *convergencia uniforme, la convergencia en media y la convergencia en media cuadrada* se definen por una sola métrica, de tal forma que, para su estudio, el espacio métrico nos sirve como modelo abstracto.

(f_n) converge puntualmente a $f \Leftrightarrow [d_a(f_n, f)]$ converge a 0 para todo a $\in A$	$A \neq \varnothing$ $f_n, f : A \to \mathbb{R}$
(f_n) converge uniformemente a $f \Leftrightarrow [d_\infty(f_n, f)]$ converge a 0	$d_a(f_n, f) := \lvert f_n(a) - f(a) \rvert$ $d_\infty(f_n, f) := \sup\limits_{a \in A} \lvert f_n(a) - f(a) \rvert$

(33)

Desarrollaremos ahora la teoría de los espacios métricos hasta el punto en el que se pueda concebir una teoría axiomática todavía más general, que englobe también la convergencia puntual. Puesto que la teoría de los espacios métricos generaliza directamente los conceptos y métodos utilizados por el Análisis Clásico en su tratamiento de la convergencia y continuidad, podemos proceder en forma acelerada, dejando al lector una parte de las demostraciones. De tal manera las secciones 1.5 y 1.6 persiguen dos objetivos:

1. Servir de autocontrol para ver si se ha entendido la estructura abstracta de los razonamientos *métricos* del Análisis Clásico.

2. Familiarizar al lector con conceptos topológicos a un nivel de abstracción intermedio, como preparación didáctica a la Topología General.

§ 1.5 **Sucesión convergente. Bola. Diámetro. Distancia entre conjuntos.**

1.5.1 *Definición (sucesión convergente)*

Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión de elememtos de X. Se dice que $\{x_n\}$ **converge** a $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_n) < \varepsilon \text{ para } n \geq N \tag{34}$$

En este caso x se llama el **límite** de la sucesión $\{x_n\}$. En símbolos: $(x_n) \underset{d}{\twoheadrightarrow} x$ o $\lim(x_n) = x$.

Nota a). La métrica d permite reducir el problema de convergencia de elementos de un espacio métrico a un problema de convergencia de *números reales*:

$$(x_n) \twoheadrightarrow x \Longleftrightarrow (d(x, x_n)) \twoheadrightarrow 0 \tag{35}$$

Mediante la distancia d hemos subordinado el concepto abstracto de acercamiento entre dos puntos de X al, ya conocido, de acercamiento entre dos puntos de $\mathbb{R}$.

Nota b) El enunciado $(x_n) \underset{d}{\twoheadrightarrow} x$ no depende tanto de la métrica particular d como puede aparecer a primera vista. Por (32) y por la definición anterior, una sucesión (x_n) con $(x_n) \underset{d}{\twoheadrightarrow} x$ converge a x *con respecto a toda métrica que sea semejante a* d.

1.5.2 *Ejemplo (sucesión convergente en un espacio métrico discreto)*

En un espacio métrico *discreto* una sucesión (x_n) **converge** a un punto x si y sólo si, todos los términos x_n son iguales a x a partir de cierto rango $N \in \mathbb{N}$.

La convergencia se define con respecto a un espacio métrico. Sea (A, d_A) un subespacio del espacio métrico (X, d).

Pregunta: ¿Cuáles de los siguientes enunciados son válidos?

i) Toda sucesión convergente en (A, d_A) es convergente en (X, d).

ii) Una sucesión de puntos de A es convergente en (A, d_A) si y sólo si es convergente en (X, d).

iii) Una sucesión de puntos de A es convergente en (A, d_A) si y sólo si converge a un punto de A en (X, d).

1.5.3 *Ejercicio*

Probar la unicidad del límite en cada espacio métrico (X, d). Definir la convergencia en un espacio seudométrico. Dar un ejemplo de una sucesión convergente en un espacio seudométrico (espacio funcional) con dos límites diferentes.

La condición (34) significa que

$$x_n \in B(x, \varepsilon) := \ \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \ \text{ para } n \geq N \tag{36}$$

Los conjuntos $B(x,\rho)$ $(x \in X, 0 < \rho < \infty)$ juegan un papel fundamental en la teoría de los espacios métricos. Por su forma, en el caso del espacio euclideano $\mathbb{R}^3$, se llaman bolas.

1.5.4 *Definición (bolas abiertas o cerradas, esferas)*

Sea (X,d) un espacio seudométrico, $a \in X$, $0 < \rho < \infty$. Entonces

$$B(a,\rho) := \{x \in X \mid d(a,x) < \rho\} \tag{37}$$

$$(\text{resp. } B'(a,\rho) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq \rho\}) \tag{38}$$

se llama **bola abierta** (resp.**bola cerrada**) de centro a y de radio ρ. El conjunto

$$E(a,\rho) := \{x \in X \mid d(a,x) = \rho\} = B'(a,\rho) \backslash B(a,\rho) \tag{39}$$

se llama **esfera** de centro a y de radio ρ.

En el espacio euclideano $\mathbb{R}^2$ las bolas son discos y las esferas son círculos.

$\rightsquigarrow$ Resaltemos que las bolas en un espacio seudométrico cualquiera no tienen, en general, las propiedades geométricas de las bolas euclideanas.

1.5.5 *Ejemplo (bolas en $\mathbb{R}^n$ con respecto a diversas métricas)*

i) Las bolas en $\mathbb{R}^n$, definidas por la métrica euclideana

$$d_2(a,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}$$

tienen la forma de la figura 11 i).

ii) Las bolas en $\mathbb{R}^n$, definidas por la métrica

$$d_\infty(a,x) = \sup\{\mid x_i - a_i \mid \mid i = 1, ..., n\}$$

tienen la forma de la figura 11 ii).

iii) Las bolas en $\mathbb{R}^n$, definidas por la métrica

$$d_1(x,a) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - a_i \mid$$

tienen la forma de la figura 11 iii).

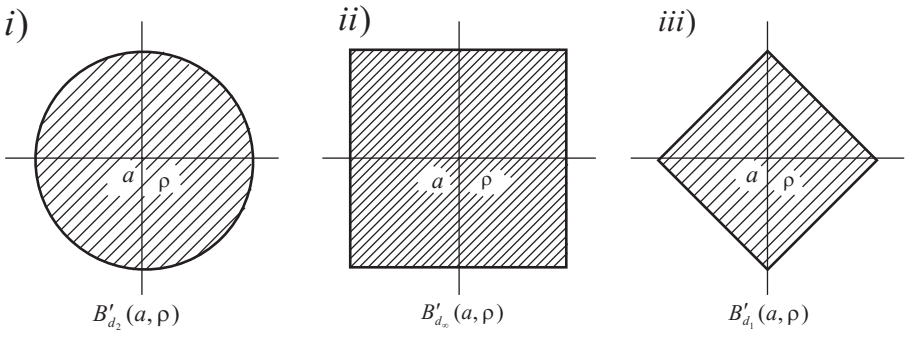


Figura 11. Bolas cerradas en $\mathbb{R}^2$

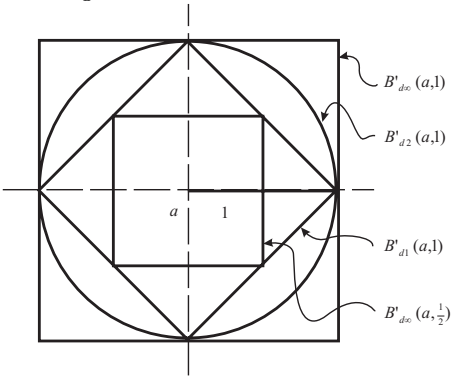


Figura 12. Inclusión de bolas en $\mathbb{R}^2$

Por (28) tenemos $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq nd_\infty(x,y)$, por lo tanto:

$$B_{d_\infty}(a,1/n) \subset B_{d_1}(a,1) \subset B_{d_2}(a,1) \subset B_{d_\infty}(a,1) \tag{40}$$

(fig.11) y (fig.12).

¿Qué métricas sobre $\mathbb{R}^2$ definen bolas de forma elíptica?

1.5.6 *Ejemplo (bolas de un espacio métrico discreto).*

Sea (X,d) un espacio métrico discreto (ej.,1.2.3). Entonces tenemos para todo $a \in X$:

$$B(a,\rho) = B'(a,\rho) = X \quad \text{y} \quad E(a,\rho) = \varnothing, \quad \text{si} \quad \rho > 1$$

$$B(a,\rho) = B'(a,\rho) = \{a\} \quad \text{y} \quad E(a,\rho) = \varnothing, \quad \text{si} \quad 0 < \rho < 1$$

$$B(a,\rho) = \{a\}, \quad B'(a,\rho) = X, \quad E(a,\rho) = X \backslash \{a\}, \quad \text{si} \quad \rho = 1$$

1.5.7 *Ejemplo (bolas en subespacios)*

Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$. Entonces las bolas $B_A(a,\rho)$ de centro $a \in A$ y de radio $\rho > 0$ en el subespacio métrico (A,d_A) son, precisamente, las intersecciones de las bolas del mismo centro y del mismo radio en (X,d) con A:

$$B_A(a,\rho) = A \cap B(a,\rho) \qquad \text{(fig. 13).}$$

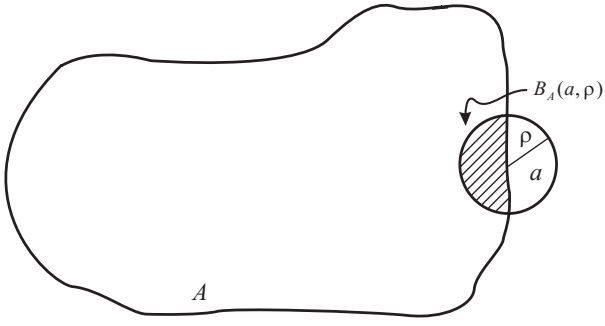


Figura 13. Bola en un subespacio

1.5.8 *Ejercicio*

Describe las bolas de la topología del bosque (1.2.9).

1.5.9 *Ejercicio*

Prueba que la unión de una familia de bolas abiertas de un mismo centro a es una bola abierta, si no es todo el espacio métrico. Análogamente, la intersección de una familia de bolas cerradas del mismo centro a es una bola cerrada o bien el conjunto unitario $\{a\}$. ¿Pueden intercambiarse *abierto* y *cerrado* en estas dos proposiciones?

1.5.10 *Definición (diámetro, conjunto, acotado, oscilación)*

Sea (X, d) un espacio seudométrico $A \subset X$. Entonces

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid (x, y) \in A^2\} \tag{41}$$

se llama **diámetro** de A, si $A \neq \varnothing$ y $\delta(\varnothing) = 0$.

A se dice **acotado**, si su diámetro es finito.

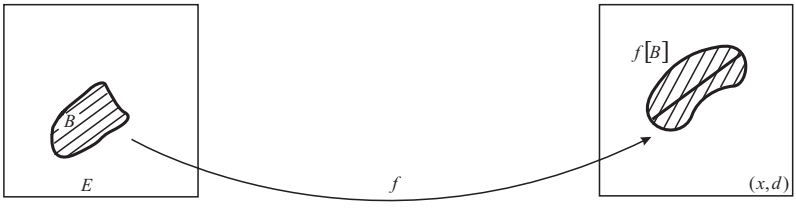


Figura 14. $\delta(f[B])$ = Oscilación de f sobre B

Si f es una aplicación de un conjunto E en (X, d) y $B \subset E$, entonces el diámetro de $f[B] \subset X$ se llama **oscilación de** f *sobre* B. La función f se llama

acotada, si $f[E] \subset X$ es acotado (fig.14).

$\rightsquigarrow$ ¡Atención! No necesariamente existen x, $y \in A$ tales que $\delta(A) = d(x, y)$.

Nota. El concepto de *conjunto acotado* no depende tanto de la métrica particular d como puede parecer a primera vista. Por (32) y la definición anterior, un subconjunto acotado de (X, d) es acotado con respecto a toda seudométrica d' semejante a d.

1.5.11 *Ejemplo*

En $\mathbb{R}^n$ el diámetro de una recta o de una semirrecta es infinito.

1.5.12 *Ejemplo*

En $\mathbb{R}$ con su métrica usual, el diámetro de un intervalo acotado (abierto o cerrado) es igual a la diferencia de sus extremos.

$$\begin{aligned} A &= (a, b) \Rightarrow \mid b - a \mid \geq \delta(A) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} d(b - 1/n, a + 1/n) = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left| b - a - \frac{1}{2n} \right| = \mid b - a \mid \end{aligned}$$

1.5.13 *Ejemplo*

$\rightsquigarrow$ En los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$ el diámetro de una bola (abierta o cerrada) de radio ρ es igual a 2ρ. Esto no se cumple en todos los espacios métricos. Por ejemplo, en un espacio métrico discreto toda bola $B(a, 1)$ tiene diámetro 0, mientras que $B'(a, 1)$ tiene diámetro 1.

Pregunta: ¿Es necesariamente finita la oscilación de una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}$?

1.5.14 *Ejercicio*

Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que:

i) Si A es acotado y $B \subseteq A$, también B es acotado.
ii) Si A es acotado, entonces $A \subset B'(a, \delta(A))$, para todo a $\in A$.
iii) $A \subset X$ acotado $\Leftrightarrow$ A está contenido en una bola. (42)
iv) La unión de dos conjuntos acotados es acotado.
v) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$

Para estimar, en algunos casos, el diámetro de la unión de dos conjuntos disjuntos A, B hay que conocer la *distancia entre* A y B(fig. 15).

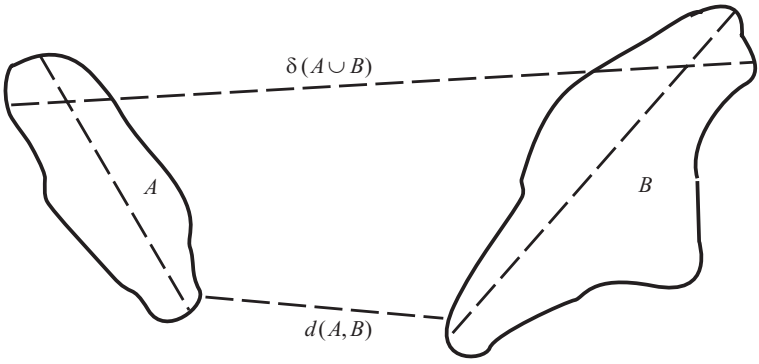


Figura 15.

1.5.15 *Definición (distancia entre conjuntos)*

Sea (X, d) un espacio métrico, $A, B \subset X$ y $A, B \neq \varnothing$. Entonces

$$d(A, B) := \text{ínf}\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \tag{43}$$

se llama **distancia entre el conjunto** A **y el conjunto** B.

Si $x \in X, d(x, B) := d(\{x\}, B) = \text{ínf}\{d(x, y) \mid y \in B\}$ se **llama distancia entre el punto** x **y el conjunto** B.

$\rightsquigarrow$ La aplicación $(A, B) \to d(A, B)$ no es una métrica, ni una seudométrica sobre $\mathcal{P}(X)$ porque no cumple la desigualdad triangular:

Si A, C son dos conjuntos de distancia $d(A, C) > 0$ y si B es un conjunto que tiene una intersección no vacía con A y con C, entonces $d(A, B) = 0,\ d(B, C) = 0$; luego $d(A, C)$ no es menor o igual que $d(A, B) + d(B, C)$

1.5.16 *Ejemplo*

Si dos conjuntos A, B en $\mathbb{R}$ tienen un *punto de adherencia común*, entonces $d(A, B) = 0$

$$A := \ \{x \in \ \mathbb{R}^n \mid \| x \| < 1\}$$

$$B := \ \{x \in \ \mathbb{R}^n \mid \| x - 2 \| < 1\}, \ \ d(A, B) = 0, \ \ \text{(fig. 16)}$$

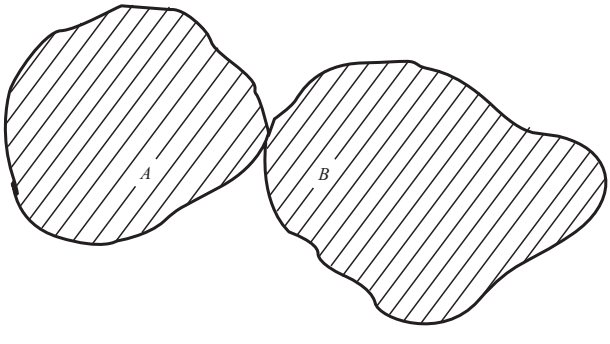


Figura 16. $d(A, B) = 0$

Sin embargo, la relación $d(A, B) = 0$ entre A y B no implica que estos conjuntos tengan un punto de adherencia común; por ejemplo, la hipérbola $\{(x, 1/x) \mid x > 0\}$ y el eje x no lo tienen, pero sí tienen distancia 0 entre ellos (fig. 17).

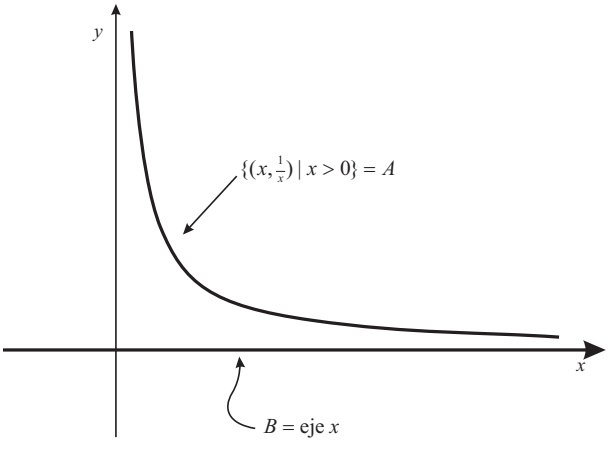


Figura 17. $d(A, B) = 0$

1.5.17 *Ejemplo*

La distancia entre un punto x y una recta G, en el espacio euclideano $\mathbb{R}^2$, es igual a la distancia de x a su proyección sobre G. Probaremos más adelante una generalización de este enunciado para todas las variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ (fig. 18).

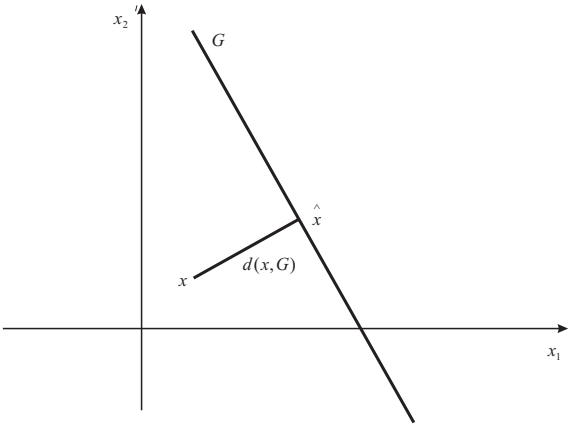


Figura 18. Distancia de un punto a una recta

1.5.18 *Ejercicio*

Sea (X, d) un espacio métrico, A y B subconjuntos no vacíos de X. Pruebe que existen sucesiones (a_i), (b_i) de A y B respectivamente, con $\lim(d(a_i, b_i)) = d(A, B)$. Dar un ejemplo mostrando que las sucesiones (a_i), (b_i) no necesariamente convergen en A, (resp. en B), incluso ni en X.

1.5.19 *Ejercicio*

Probar la siguiente generalización del ejercicio 1.5.14 iv :

Para subconjuntos no vacíos A y B de un espacio seudométrico (X, d) se cumple:

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B) \tag{44}$$

1.5.20 *Proposición*

Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$. Entonces se tiene, para $x, y \in X$:

$$\mid d(x, A) - d(y, A) \mid \leq \ d(x, y) \tag{45}$$

Demostración: Para todo $z \in A$ se tiene :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

luego, tomando el ínfimo para todos los $z \in A$:

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \ \text{ o sea } \ d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

intercambiando x y y se obtiene (45).

§ 1.6 **Funciones continuas, vecindades y abiertos**

Consideremos ahora el segundo concepto fundamental del Análisis: la continuidad. Su definición para espacios seudométricos es una generalización directa de la definición para funciones reales de una variable.

1.6.1 *Definición (función continua en un punto)*

Sean (X, d), (Y, d') espacios seudométricos. Una aplicación $f : X \to Y$ se llama **continua en el punto** $a \in X$, si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$:

$$d(a, x) < \delta \Longrightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon \tag{46}$$

1.6.2 *Ejemplo*

La proposición 1.5.20 nos muestra que para todo subconjunto no vacío B de un espacio métrico (X, d) la función

$$f : x \mapsto d(x, B), \text{ de } X \text{ en } \mathbb{R}$$

es continua en todo punto $a \in X$. Intuitivamente esto significa que la distancia $d(x, B)$ aproxima la distancia $d(a, B)$ si x está cerca de a. En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ es suficiente poner $\delta_a = \varepsilon$ para obtener

$$d(f(x), f(a)) = \mid f(x) - f(a) \mid = \mid d(x, B) - d(a, B) \mid < \varepsilon$$

para todo $x \in X$ con $d(x, a) < \delta_a$ (45) significa que la imagen directa de la bola $B(a, \delta) \subset X$ por f esta contenida en la bola $B(f(a), \varepsilon) \subset Y$.

Equivalentemente $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$, si
y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ la <u>preimagen</u> bajo f de la bola (47)
$B(f(a), \varepsilon)$ contiene a una bola de radio $\delta > 0$ (fig. 19)

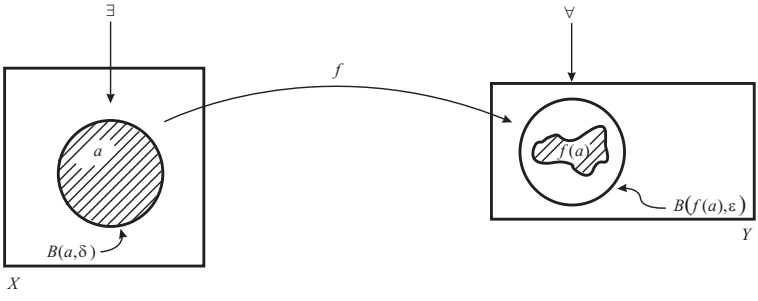


Figura 19. Continuidad de f en a

Los subconjuntos de X con esta propiedad, de contener a una bola de centro a, se llaman **vecindades** de $a \in X$.

1.6.3 *Definición(vecindades)*

Sea (X, d) un espacio seudométrico y sea $a \in X$. Entonces se dice que $V \subset X$ es una **vecindad** de a o que a es un **punto interior** de V, si existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset V$.

La colección de todas las vecindades de a en X se denota por $\mathcal{V}(a)$ (fig. 20).

1.6.4 *Ejemplo (vecindades en un espacio métrico discreto)*

En un espacio métrico discretro (X, d) cada subconjunto V que contiene un punto dado $a \in X$ como elemento, es una vecindad de este punto. En particular, el conjunto unitario $\{a\}$ es vecindad de a

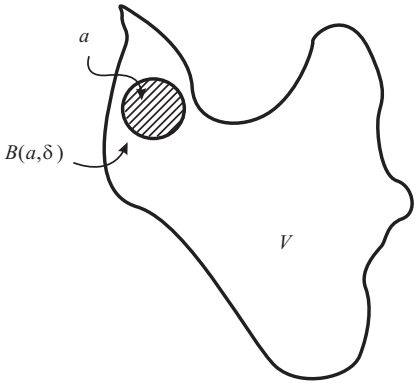


Figura 20. Vecindad de a

1.6.5 *Ejemplo*

Toda bola abierta $B(x,\rho)$ en un espacio métrico (X,d) es vecindad de cada uno de sus elementos. En efecto, si $a \in B(x,\rho)$, entonces tenemos $d(a,x) < \rho$ y $V := B(x,p)$ contiene a $B(a,\delta)$ con $\delta := \rho - d(x,a) > 0$, según la desigualdad triangular (fig. 21).

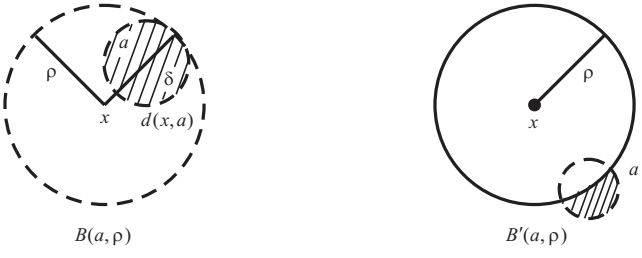


Figura 21.

Para $X = \mathbb{R}^2$ esto coincide con nuestra intuición: una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ contiene a todos los elementos como puntos interiores. En cambio una bola cerrada $B'(x,\rho)$ no es vecindad de sus puntos frontera $a \in E(x,\rho)$, o sea, estos puntos no son interiores a $B'(x,\rho)$.

Pregunta: ¿Existen bolas cerradas en ciertos espacios métricos distintos de $\mathbb{R}^n$ que sean vecindades de cada uno de sus elementos?

Se puede verificar fácilmente las siguientes propiedades elementales de las vecindades en un espacio métrico:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & V \in \mathcal{V}(a) \Longrightarrow a \in V \\ \text{ii)} & V \in \mathcal{V}(a) \wedge V' \supset V \Longrightarrow V' \in \mathcal{V}(a) \\ \text{iii)} & V, V' \in \mathcal{V}(a) \Longrightarrow V \cap V' \in \mathcal{V}(a) \\ \text{iv)} & a, b \in X,\ a \neq b \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \exists W \in \mathcal{V}(b) \text{ tal que } V \cap W = \varnothing \end{array} \tag{48}$$

Por medio del nuevo concepto podemos simplificar la defición de una función

continua. Puesto que toda vecindad de $f(a)$ en Y contiene una bola de centro $f(a)$, podemos precisar:

$$\begin{gathered} f : X \to Y \text{ es continua en } a \in X \Longleftrightarrow f^{-1}[V] \in \mathcal{V}(a) \\ \text{para todo } V \in \mathcal{V}(f(a)) \end{gathered} \tag{49}$$

o sea:

$$\begin{gathered} f : X \to Y \text{ es continua en } a \in X \Longleftrightarrow \text{ Para todo } V \in V(f(a)) \\ \text{existe } U \in V(a) \text{ con } f[U] \subset V \end{gathered} \tag{50}$$

Estas caracterizaciones ya *no* se refieren *explícitamente* a la distancia sobre X. Nos preguntamos, si podemos también caracterizar la convergencia a través de vecindades. En efecto, esto es casi trivial. Puesto que toda vecindad de x en (X, d) contiene a una bola $B(x, \varepsilon)$ e inversamente toda bola $B(x, \varepsilon)$ es una vecindad de x. Tenemos para todas las sucesiones $\{x_n\}$ en (X, d) que:

$$\begin{gathered} \{x_n\} \twoheadrightarrow x \Longleftrightarrow \text{ para toda vecindad } V \in \mathcal{V}(x) \text{ existe } N \in \mathbb{N} \\ \text{tal que } \{x_n \mid n \geq N\} \subset V \end{gathered} \tag{51}$$

o sea:

$$\begin{gathered} \{x_n\} \twoheadrightarrow x \Longleftrightarrow \text{ para toda vecindad } V \in \mathcal{V}(x) \\ \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \text{ no pertenece a } V\} \text{ es finito} \end{gathered} \tag{52}$$

Es interesante que esta propiedad de $V \in \mathcal{V}(a)$, de contener *a casi todos* los términos de cada sucesión, que converge al punto a, es *característica* para las vecindades de a en el sentido siguiente:

1.6.6 *Ejercicio*

Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $V \subset X$. Prueba lo siguiente: V no pertenece a $\mathcal{V}(a)$, si y sólo si, existe una sucesión (x_n), con $x_n \in X \backslash V$ para toda $n \in \mathbb{N}$, que converga a a.

La estrecha vinculación entre las nociones de *continuidad* y de *convergencia* se precisa en el siguiente teorema, cuya demostración dejamos al lector (generalización directa de la demostración del teorema clásico correspondiente).

1.6.7 *Teorema*

Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos. Entonces una aplicación $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$, si y sólo si, $\lim(f(x_n)) = f(a)$ para toda sucesión (x_n) con $\lim x_n = a$ en X.

Demostración: Ejercicio.

Indicación para la demostración: Utiliza ej. 1.6.6.■

Hasta ahora hemos estudiado solamente la continuidad en un punto, no la continuidad global sobre todo el dominio.

1.6.8 *Definición (función continua)*

Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios seudométricos. Una aplicación $f : X \to Y$ se llama (globalmente) **continua**, si es continua en todo punto $a \in X$.

1.6.9 *Ejemplo (funciones lineales continuas)*

Sean $(E, \| \cdot \|), (F, \| \cdot \|')$ espacios normados. *Una aplicación lineal $f : E \to F$ es (globalmente) continua si es continua en un punto.* En efecto, para verlo, es suficiente probar que f es continua en un punto cualquiera $a \in E$, si y sólo si, es continua en 0. Pero esto resulta inmediatamente de la caracterización de la continuidad puntual por sucesiones (1.6.7), porque

$$x_n \twoheadrightarrow a \Longleftrightarrow (a - x_n) \twoheadrightarrow 0 \text{ en } E$$

$$f(x_n) \twoheadrightarrow f(a) \Longleftrightarrow (f(a) - f(x_n)) = (f(a - x_n)) \twoheadrightarrow 0 \text{ en } F$$

Más precisamente, *una aplicación lineal $f : E \to F$ es continua si y sólo si existe un número real $M > 0$* tal que

$$\| f(x) \|' \leq M \| x \| \quad \text{para todo } x \in E \tag{53}$$

Para deducir (53) notamos que para una función lineal que es continua en $0 \in E$, existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\| x \| \leq \delta \Longrightarrow \| f(x) \|' \leq 1$$

luego si $x \neq 0$:

$$\frac{\| f(x) \|'}{\| x \|} = \| f(\frac{x}{\| x \|}) \|' = \delta^{-1} \| f\left(\frac{\delta}{\| x \|}\right) \|' \leq \delta^{-1}$$

por la homogeneidad de f. Inversamente toda aplicación lineal $f : E \to F$ que cumple (53), es evidentemente continua en $0 \in E$, por lo tanto es globalmente continua.

1.6.10 *Ejercicio*

Prueba que toda aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua.

Para caracterizar las aplicaciones globalmente continuas (no necesariamente lineales) el concepto de *vecindad* no es suficiente, porque se refiere a un punto particular. Necesitaremos los conceptos de abiertos.

Notación: Para un subconjunto A, de un espacio métrico (X, d), el conjunto de los puntos interiores de A, se denota por $\overset{\circ}{A}$ y se llama el **interior** de A.

Ya sabemos que toda bola *abierta* es vecindad de cada uno de sus puntos, luego es igual a su interior. La colección de todos los subconjuntos de (X, d) con esta propiedad juega un papel fundamental en Topología General.

1.6.11 *Definición (conjunto abierto)*

Sea (X, d) un espacio seudométrico. $A \subset X$ se llama **abierto**, si A es vecindad de cada uno de sus puntos, o sea si $A = \overset{\circ}{A}$.

1.6.12 *Ejemplo(abiertos en un espacio métrico discreto)*

En un espacio métrico discreto todo subconjunto es abierto.

1.6.13 *Ejemplo*

En $\mathbb{R}^n$ todo producto de n intervalos abiertos ($n \in \mathbb{N}$)

$$(a_1, b_1) \times ..., \times (a_n, b_n), \ a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

es abierto. En particular, el conjunto $(\mathbb{R}_+)^n$ de los vectores estrictamente positivos es abierto.

Todo complemento de un conjunto finito en $\mathbb{R}^n$ es abierto.

Pregunta: ¿Se cumple lo mismo para el complemento de conjuntos numerables en $\mathbb{R}^n$?

1.6.14 *Ejemplo*

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces las sucesiones $(x_k) \in l^2(\mathbb{N})$ con $(x_1, ..., x_n) \in A$ forman un subconjunto abierto del espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$. El conjunto P de todas las sucesiones $(x_k) \in l^2(\mathbb{N})$ con términos estrictamente positivos *no* es abierto en $l^2(\mathbb{N})$. Tampoco lo es el subconjunto

$$A = \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \subset l^2(\mathbb{N})$$

¿ Por qué?

1.6.15 *Ejemplo*

Consideremos el espacio seudométrico $(\mathbb{R}^{[-1,1]}, d_\infty)$ de todas las funciones reales sobre $[-1, 1]$ provisto de la distancia de la convergencia uniforme. Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Entonces el subconjunto A de todas las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ con valores en I, en general, no es abierto en $(\mathbb{R}^{[-1,1]}, d_\infty)$. Por ejemplo, si

$$I = (-1, 1) \ \text{ y } \ f_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \ \text{ o } \ x = 1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

entonces no existe una ε-banda de la gráfica f_0 que esté totalmente incluída en el área $[-1,1]\times(-1,1)$. Luego f_0 no es un punto interior de A. A no es abierto. La función f_0 no es discontinua por casualidad (fig. 22).

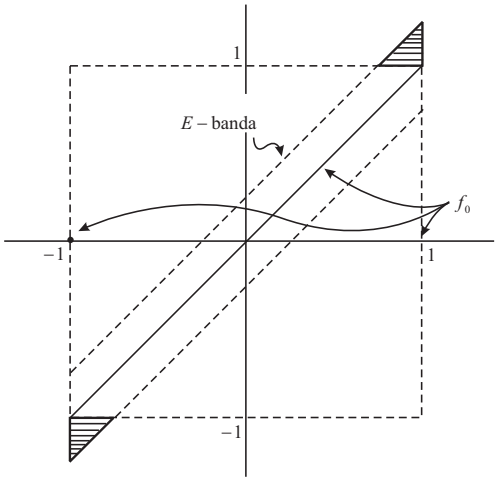


Figura 22.

Si nos limitamos al espacio métrico $(\mathfrak{C}([-1,1],\,\mathbb{R}),d_\infty)$ de todas las funciones reales *continuas* sobre $[-1,1]$, entonces el subconjunto

$$A\cap X=\{f\in C([-1,1],\mathbb{R})\mid\ \ |f(x)|\ <1\ \text{ para }\ x\in[-1,1]\}$$

es abierto en este espacio.

1.6.16 *Ejercicio*

Probar que el concepto de *abierto* es tan fundamental como el concepto de *vecindad*, más precisamente, que las vecindades pueden caracterizarse a partir de los abiertos de la manera siguiente:

$$V\subset X \text{ es vecindad de } x\in X \iff \text{ Existe un abierto } A\subset X \text{ con } x\in A\subset V.$$

1.6.17 *Teorema (propiedades fundamentales de los abiertos)*

Sea (X,d) un espacio seudométrico. Entonces se cumple
(0 1) $\varnothing$ y X son subconjuntos abiertos de (X,d);
(0 2) si A_1, A_2 son abiertos en (X,d), entonces $A_1\cap A_2$ es abierto;
(0 3) si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de abiertos, entonces $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ es abierto.

Demostr*ación*:

(0 1) por la definición 1.6.11
(0 2) por la propiedad iii) de las vecindades.
(0 3) $\cup_{i\in I}A_i$ es vecindad de todo $x\in A_i\,(i\in I)$, porque $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\supset A_i\in\mathcal{V}(x)$ (por la propiedad ii) de las vecindades). ■

1.6.18 *Ejercicio*

Dar un ejemplo de una familia infinita de abiertos en $\mathbb{R}$ cuya intersección no sea abierta.

El siguiente teorema da una caracterización completa de los subconjuntos abiertos:

1.6.19 *Teorema*

Sea (X, d) un espacio métrico , $A \subset X$. Entonces A es abierto $\Longleftrightarrow$ A puede representarse como unión de bolas abiertas.

Demostración: $\Longleftarrow$: por (0 3)

$\Longrightarrow$: si $A \subset X$ es abierto, entonces existe para $a \in A$ un radio δ_a con $B(a, \delta_a) \subset A$. Luego $A = \cup B(a, \delta_a)$. ■

1.6.20 *Teorema (caracterización de funciones continuas)*

Sean $(X, d), (Y, d)$ espacios seudométricos. Entonces una aplicación $f : X \to Y$ es continua, si y sólo si, la preimagen de cada abierto en Y es abierto en X.

Demostración : Ejercicio. ■

Las notas de 1.5.1 y de 1.5.10 nos hacen suponer que *diferentes* métricas sobre un conjunto pueden determinar la *misma* colección de abiertos.

1.6.21 *Definición (seudométricas topológicamente equivalentes)*

Dos (seudo)métricas d, d' sobre un conjunto X se llaman **topológicamente equivalentes**, si se cumple que para todo $A \subset X$:

$$A \text{ es abierto en } (X, d) \Longleftrightarrow A \text{ es abierto en } (X, d'). \tag{54}$$

Para comprobar que dos seudométricas d, d' sobre X son topológicamente equivalentes, hay que demostrar que toda bola $B_d(a, \rho)$ con respecto a d contiene a una bola $B_{d'}(a, \rho')$ del mismo centro con respecto a d' e inversamente. Es evidente que podemos limitarnos aquí a bolas con radios $\rho, \rho' \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es arbitrario.

1.6.22 *Ejercicio*

Prueba que dos métricas son topológicamente equivalentes si definen la misma convergencia.

1.6.23 *Ejemplo (las seudométricas semejantes son topológicamente equivalentes).*

Sean d, d' dos seudométricas semejantes sobre un conjunto X y $B_d(a, \rho)$ una bola cualquiera en (X, d). Existe $k' > 0$ con $d \leq k'd'$. Luego, es suficiente tomar

$\rho' := \rho/k'$ para obtener $B_{d'}(a,\rho') \subset B_d(a,\rho)$. Puesto que la semejanza es una relación simétrica, el inverso se obtiene análogamente. Concluimos que d, d' son topológicamente equivalentes.

$\rightsquigarrow$ El siguiente ejemplo muestra que no todas las métricas topológicamente equivalentes son semejantes.

1.6.24 *Ejemplo*

La distancia euclideana d sobre $\mathbb{R}^n$ no es semejante a la distancia $d' = \text{ínf}(1,d)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Sin embargo ambas distancias son topológicamente equivalentes, puesto que para $\rho \leq 1$ las bolas abiertas con respecto a ambas métricas coinciden

$$\rho \leq 1 \Longrightarrow B_d(a,\rho) = B_{d'}(a,\rho)$$

Nota: Este ejemplo muestra que a toda seudométrica corresponde una seudométrica acotada topológicamente equivalente.

1.6.25 *Ejercicio*

Sean φ, φ' dos funciones crecientes de $\mathbb{R}_+$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$ continuas en 0 y tal que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Prueba que si d, d' son dos métricas sobre un conjunto X tales que

$$d' \;\leq\; \varphi_0 d \quad \text{y} \quad d \;\leq\; \varphi_0' d' \quad \text{sobre} \quad X^2$$

entonces d y d' son topológicamente equivalentes.

En cambio dos métricas sobre un espacio vectorial (real o complejo), *compatibles con su estructura vectorial*, son *topológicamente equivalentes* si y sólo si son *semejantes*.

1.6.26 *Ejercicio*

Dos normas $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial real o complejo E se llaman **equivalentes**, si las métricas asociadas d_1, d_2 son topológicamente equivalentes. Prueba que $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si y sólo si existen $k_1, k_2 > 0$ tales que

$$\|\cdot\|_1 \leq \; k_2 \|\cdot\|_2 \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_2 \leq \; k_1 \|\cdot\|_1 \quad \text{sobre} \; E$$

$$(\Longleftrightarrow d_1 \;\leq\; k_2 d_2 \quad \text{y} \quad d_2 \leq k_1 d_1) \tag{55}$$

Finalmente enunciaremos un resultado fundamental de la teoría de los espacios normados, cuya demostración podremos dar más adelante (capítulo 8), cuando tengamos los instrumentos topológicos necesarios.

1.6.27 *Teorema*

Dos normas cualesquiera sobre un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita son equivalentes.

$\rightsquigarrow$Por lo tanto, todas las *normas* posibles sobre $\mathbb{R}^n$ determinan la misma colección de abiertos. Sin embargo existen *métricas* sobre $\mathbb{R}^n$ que *no* son topológicamente equivalentes a la métrica euclideana. Tales métricas son necesariamente no compatibles con la estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$

1.6.28 *Ejercicio*

Prueba que la *métrica del bosque* sobre $\mathbb{R}^2$ (ejercicio 1.2.9) no es topológicamente equivalente a la métrica euclideana sobre $\mathbb{R}^2$.

§ 1.7 **Transición a una nueva teoría**

Los resultados de la sección anterior nos muestran el papel central de los abiertos para la topología de los espacios métricos. Si conocemos la colección de todos los abiertos de un espacio métrico (X, d), entonces podemos determinar:

– qué conjuntos $V \subset X$ son vecindades de un punto $x \in X$ (1.6.16).
– qué sucesiones (x_n) en X convergen a un punto $x \in X$ (53).
– qué aplicaciones sobre X son continuas (1.6.20).
– qué aplicaciones sobre X son o no continuas en cierto punto $a \in X$ (51).

Por lo tanto, para tratar problemas de convergencia y de continuidad sobre X, podemos prescindir de la métrica d, si conocemos los abiertos de X. Además esto parece más adecuado, porque continuidad y convergencia dependen esencialmente de la colección de los abiertos, pero no de la métrica específica que las define. Una función f, continua sobre un espacio métrico (X, d), sigue siendo continua sobre (X, d') para todas las métricas d' topológicamente equivalentes a d (por el teorema 1.6.20). Esto nos sugiere axiomatizar el concepto de *conjunto abierto* sin la utilización de una distancia. Para tal axiomatización deberíamos partir de propiedades básicas de los abiertos en un espacio métrico, y considerar conjuntos que tengan asociadas colecciones de subconjuntos que cumplan estas propiedades básicas. Con esto desaparecería, para nosotros, la hasta ahora imperiosa necesidad de una seudométrica para definir las nociones de continuidad y convergencia.

Además de que una *axiomatización de los abiertos* es más adecuada a la estructura de los conceptos de continuidad y convergencia, que la *axiomatización de las distancias*, podemos esperar ventajas esenciales de tal procedimiento:

1. Como hemos visto, la teoría de los espacios métricos no comprende la convergencia puntual. Esta insuficiencia de la teoría de los espacios métricos es otro indicio, de que la axiomatización del concepto de distancia todavía no nos proporciona la teoría axiomática definitiva de la continuidad y de la convergencia. Escogiendo propiedades de los abiertos que son suficientemente generales, podemos construir una teoría que nos servirá para un análisis de la convergencia puntual, así como de toda convergencia definida por una *familia de seudométricas*.

2. En ciertos conjuntos resulta más natural y más sencillo definir directamente los abiertos, que definirlos mediante el método de introducir una distancia, a priori innecesaria. Un ejemplo claro de esto es $\mathbb{R}$, donde podemos definir directamente los abiertos con uniones arbitrarias de intervalos abiertos. Además podemos esperar que una axiomatización de los abiertos basada en la teoría de los conjuntos, en lugar de la compleja teoría de los números reales (métrica), nos permita hacer las demostraciones más claras y evitar la *epsilóntica*.

3. Otra ventaja sistemática tiene que ver con la construcción estructural de la matemática. La teoría de los espacios métricos presupone una teoría de los números reales. Pero $\mathbb{R}$ tiene una estructura muy compleja, que es una combinación de tres estructuras elementales: la estructura algebraica, la estructura de orden y la estructura topológica. Dentro de la jerarquía de las estructuras que constituye la matemática estructural moderna, no parece muy lógico confeccionar una teoría de una estructura fundamental como la topológica, presuponiendo en esta teoría una estructura tan compleja como los números reales. Con una axiomatización de los abiertos, la Topología General se fundamenta únicamente en la teoría de conjuntos, base común de todas las teorías estructurales.

El problema de axiomatizar el concepto de subconjunto abierto es el problema de seleccionar propiedades básicas sencillas, suficientemente generales y suficientemente sustanciales, para servir como axiomas de una teoría general de convergencia y continuidad.

El sistema de sólo tres axiomas, expuesto en la primera definición del capítulo siguiente, es uno de los importantes logros de la matemática en las primeras décadas del siglo XX. Aunque esta definición sea el *inicio* de la Topología General, debemos entenderla como *resultado* de un largo trabajo de abstracción y de investigación topológica.

CAPÍTULO 2

La categoría de los espacios topológicos

En la primera sección de este capítulo introduciremos el concepto fundamental de *espacio topológico* partiendo de las propiedades fundamentales de los abiertos en un espacio métrico. Ilustraremos el nuevo concepto con muchos ejemplos que tienen también importancia para el posterior desarrollo de la teoría.

Puesto que sobre cada conjunto no unitario existe una variedad de diferentes topologías, se plantea el problema de su *comparación*: esto será el tema de la segunda sección, donde veremos que las topologías sobre un conjunto, forman una *retícula completa* con respecto a la inclusión.

La sección 2 nos conduce de manera natural al problema de la construcción de topologías concretas a partir de ciertos conjuntos abiertos elementales. Estudiaremos, en la sección 3, la generación de una topología por una base, respectivamente una subbase de abiertos. Veremos que la topología de un espacio seudométrico se obtiene tomando como base la colección de todas las bolas abiertas.

Se plantea el problema de que de esta manera se puede obtener toda topología. Veremos, con algunos contraejemplos, que no toda topología es *seudometrizable* (o sea: puede derivarse de una seudométrica). Este problema de metrizabilidad nos conduce a las siguientes preguntas:

¿Cuál es la diferencia precisa entre la teoría de los espacios métricos y la teoría de los espacios topológicos?

¿Cómo pueden precisarse los conceptos intuitivos de propiedades *métricas y propiedades topológicas*?

Contestaremos a estas cuestiones en la sección 4 introduciendo la noción de categoría. El objeto de la Topología General es la categoría de los espacios topológicos. Para definir esta categoría se debe precisar los morfismos correspondientes. Estos serán las funciones continuas. La Topología General es la teoría de las propiedades topológicas de los espacios topológicos, así como de sus morfismos, o sea las aplicaciones continuas.

§ 2.1 Definición y primeros ejemplos

Si se analizan las demostraciones de los teoremas fundamentales sobre funciones continuas, resulta que para su fundamentación axiomática las tres propiedades básicas de los abiertos en un espacio métrico (1.6.17) son suficientes.

2.1.1 *Definición (topología, espacio topológico)*

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ la colección de los subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **topología** sobre X si cumple:
(A1) $\varnothing \in \mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{X}$;
(A2) $A_1 \in \mathcal{X}$, $A_2 \in \mathcal{X} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{X}$;
(A3) $\forall_{\alpha \in I}, A_\alpha \in \mathcal{X} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{X} \quad I$ conjunto

Nota: La hipótesis $\varnothing \in \mathcal{X}$ en (A1) puede omitirse basándose en que, $\bigcup\limits_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$ y $\bigcap\limits_{i \in \varnothing} A_i = X$.

Los elementos de $\mathcal{X}$ se llaman **abiertos**. Si X es un conjunto y $\mathcal{X}$ una topología sobre X, al par $(X, \mathcal{X})$ se le llama **espacio topológico**. Si no hay riesgo de confusión, lo denotamos simplemente por X. Sus elementos se llaman **puntos**.

Nota:
(A1) formula que el conjunto vacío y todo el conjunto X son abiertos en todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$;
(A2) dice que la intersección de dos y por lo tanto, por inducción, de un número finito de abiertos, es abierto;
(A3) dice que la unión de una familia cualquiera de abiertos es abierto. (Veremos más tarde que la *intersección* de una familia *cualquiera* de abiertos no es necesariamente abierto).

Estos axiomas definen qué subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ son una topología sobre el conjunto X, no determinan *cómo* construir una topología concreta sobre un conjunto concreto. Los siguiente ejemplos muestran la gran variedad de métodos para contruir topologías concretas.

2.1.2 *Ejemplo (espacio de Sierpinski)*

Sobre el conjunto de los puntos $X = \{1, 2\}$ existen en total 4 topologías:

$$\mathcal{X}_1 = \{\varnothing, X\}; \mathcal{X}_2 = \{\varnothing, X, \{1\}\}; \mathcal{X}_3 = \{\varnothing, X, \{2\}\} \text{ y } \mathcal{X}_4 = \mathcal{P}(X)$$

$\mathcal{X}_2$ y $\mathcal{X}_3$ no difieren esencialmente. Evidentemente, en este caso, todo subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que contiene a $\varnothing$ y a X es una topología.

Al espacio topológico $(X, \mathcal{X}_2)$ se le llama **espacio de Sierpinski**. Merece un nombre propio, a pesar de su trivialidad aparente, porque sirve como contraejemplo en ciertos casos.

2.1.3 *Ejemplo*

Para un conjunto de tres elementos, $X = \{1, 2, 3\}$, ya no todos los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ forman una topología. $\{\varnothing, \{2\}, \{1, 2, \}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ es una topología sobre X (fig. 23), mientras que el conjunto $\{\ \varnothing,\ \{1\},\ \{1, 2\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}\ \} \subset \mathcal{P}(X)$ no lo es.

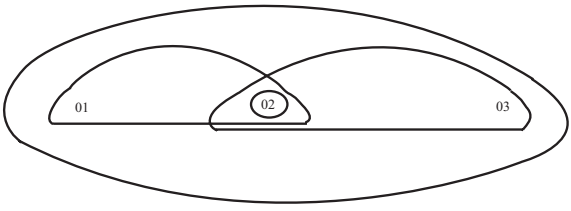


Figura 23. Topología sobre un conjunto de tres puntos

De este modo, para conjuntos finitos, es posible obtener explícitamente las topologías, nombrando todos los abiertos.

2.1.4 *Ejercicio*

Determinar todas las topologías sobre el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

2.1.5 *Ejemplo (topología discreta)*

Sea X un conjunto cualquiera. Entonces $\mathcal{P}(X)$ es una topología sobre X. Se llama la **topología discreta** sobre X. En esta topología todos los subconjuntos, en particular todos los subconjuntos unitarios $\{x\}$, son abiertos.

2.1.6 *Ejemplo (topología indiscreta)*

Sea X un conjunto. Entonces la colección $\{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X que se llama **topología indiscreta** sobre X. Si X tiene más de un elemento, entonces la topología indiscreta y la topología discreta son diferentes.

Nota: Si se consideran diferentes topologías sobre un mismo conjunto, es importante precisar la topología con respecto a la cual un conjunto es abierto.

Notación: $A \subset X$ se llama **$\mathcal{X}$-abierto**, si $A \in \mathcal{X}$, es decir, si A es abierto en el espacio $(X, \mathcal{X})$.

2.1.7 *Ejemplo (topología de los complementos finitos)*

Sea X un conjunto cualquiera, $\complement A := \mathcal{X} \backslash A$ el complemento de A respecto a X y τ la colección de todos los conjuntos $A \subset X$ tales que $A = \varnothing$ $\complement A$ es finito. Entonces τ es una topología sobre X.

Verificación: $(A1)$ es evidente. Para probar $(A2)$, sean $A, B \in \tau$. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cap B \in \tau$. Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $\complement A$ y $\complement B$ son finitos. Luego $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ es finito; entonces $A \cap B \in \tau$. Esto prueba $(A2)$. Sean ahora $A_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in I$. Si $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, entonces existe $\beta \in I$ tal que $A_\beta \neq \varnothing$.

De aquí que $\complement A_\beta$ es finito, por lo tanto $\complement \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \complement A_\beta$ es finito y, $(A3)$ también se cumple. La topología τ se llama **topología de los complementos finitos o cofinita** sobre X.

Pregunta: ¿Para qué conjuntos X coincide la topología de los complementos finitos con la topología discreta?

2.1.8 *Ejemplo (el espacio topológico $\mathbb{R}$)*

¿Cómo definir una topología sobre la recta real $\mathbb{R}$? A primera vista podría proponerse la colección de los intervalos abiertos como una topología sobre $\mathbb{R}$. Pero la unión de intervalos abiertos no es necesariamente un *intervalo* abierto. Por lo tanto vamos a definir:

$$r := \{\bigcup_{\alpha\in I} \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \forall\alpha \in I;\ \ a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}\}\},\ \ \text{(fig. 24)} \tag{1}$$

El lector comprobará que r verifica los axiomas (A1)-(A3). Si se considera $\mathbb{R}$ como espacio topológico sin indicar la topología, se trata siempre de $(\mathbb{R}, r)$.

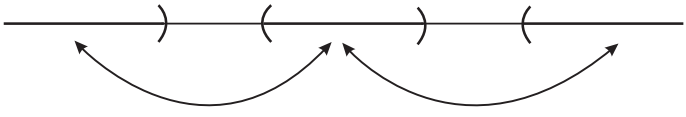


Figura 24. Abierto en $\mathbb{R}$

Tomando $A_n = (-1/n, 1/n)$, vemos que la intersección de una familia *infinita* de abiertos $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$, no es abierto. El axioma (A2) no se verifica en general para familias infinitas de abiertos.

2.1.9 *Ejemplo (topologías definidas por una relación de orden total).*

El método de construcción de la topología usual sobre $\mathbb{R}$ puede generalizarse para conjuntos totalmente ordenados cualesquiera. Sea $(X, \leq)$ un conjunto *totalmente ordenado*. Entonces la colección de todas las uniones de intervalos abiertos de la forma

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{x \in X \mid a < x < b\} \\ (\leftarrow, b) & = & \{x \in X \mid x < b\}\ \ (a, b \in X) \\ (a, \rightarrow) & = & \{x \in X \mid x > a\} \\ (\leftarrow, \rightarrow) & = & X \end{array} \tag{2}$$

es una topología $\mathcal{X}$ sobre X. Esa topología se llama **topología de orden** sobre X.

Si partimos sólo de los intervalos abiertos de la forma $(\leftarrow, b)$, (resp.$(a, \rightarrow)$) obtenemos otras dos topologías sobre X, que se denotan $\mathcal{X}_I$ y $\mathcal{X}_D$ respectivamente:

$$\mathcal{X}_I = \{\bigcup_{x\in A} (\leftarrow, x) \mid A \subset X\} \cup \{X\} \qquad \text{topología izquierda} \tag{3}$$

$$\mathcal{X}_D = \{\bigcup_{x\in A} (x, \rightarrow) \mid A \subset X\} \cup \{X\} \qquad \text{topología izquierda} \tag{4}$$

Para $X = \mathbb{R}$, los abiertos con respecto a estas dos topologías tienen la forma (fig. 25).

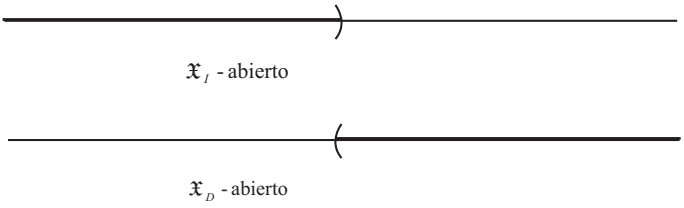


Figura 25.

Pregunta: ¿La topología de orden sobre $\mathbb{Q}$ es igual a la topología discreta? ¿La topología de orden sobre $\mathbb{Z}$ es la discreta?

Pregunta: ¿Por qué, a diferencia con el caso $X = \mathbb{R}$, no todos los subconjuntos $\mathcal{X}_I$-abiertos del conjunto totalmente ordenado $X = \mathbb{Q}$ pueden escribirse en la forma $(\leftarrow, x)$, $x \in X$?

2.1.10 *Ejercicio*

Consideremos sobre $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ la relación de orden definida de la siguiente manera:

$$(x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n) \quad \text{si} \quad x_1 \leq y_1 \ \wedge \ ... \ \wedge \ x_n \leq y_n \tag{5}$$

Para $n \geq 2$, esta relación de orden no es total.

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $a \leq b$, el conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(resp.(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, ..., n\} : a < x_i < b\})$$

se llama *intervalo cerrado* o *'cubo' cerrado de vértices* a y b (resp.*intervalo abierto* o *'cubo' abierto de vértices* a y b) (fig. 26).

Probar que la colección de todas las uniones de cubos abiertos en $\mathbb{R}^n$ forman una topología sobre $\mathbb{R}^n$.

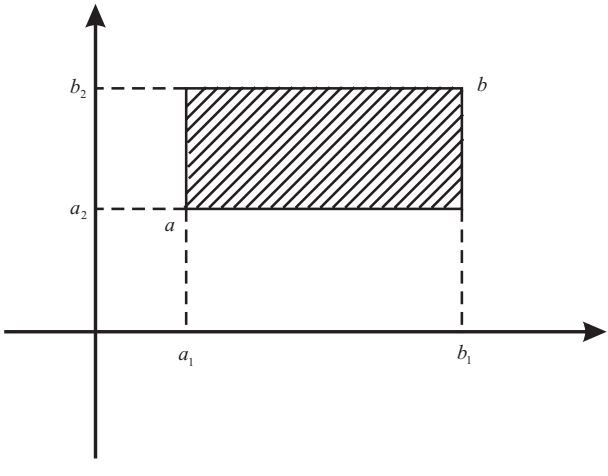


Figura 26. Cubo cerrrado $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$

§ 2.2 Comparación de topologías

Es evidente que existen relaciones de inclusión entre las diferentes topologías que hemos definido, por ejemplo, se tiene que $\mathcal{X}_I \subset r$ y $\mathcal{X}_D \subset r$ en el ejemplo 2.1.9, mientras que las topologías $\mathcal{X}_I$ y $\mathcal{X}_D$ no son *comparables*, es decir, no se cumple $\mathcal{X}_I \subset \mathcal{X}_D$ ni $\mathcal{X}_D \subset \mathcal{X}_I$. Luego la inclusión define una relación de orden *parcial* entre las topologías sobre un mismo conjunto.

2.2.1 *Definición (topologías más gruesas y más finas)*

Sea X un conjunto $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ dos topologías sobre X. Se dice que $\mathcal{X}_1$ es **más gruesa (débil)** que $\mathcal{X}_2$, o que $\mathcal{X}_2$ es **más fina (fuerte)** que $\mathcal{X}_1$, si $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$.

La topología discreta $\mathcal{P}(X)$ es la topología más fina que puede darse sobre un conjunto X y la topología indiscreta $\{\varnothing, X\}$ es la topología más gruesa. Estos hechos pueden expresarse de la manera siguiente: la topología indiscreta es el elemento mínimo y la topología discreta es el elemento máximo en el conjunto $\Im(X)$ de todas las topologías $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ sobre X, ordenado por inclusión.

2.2.2 *Ejercicio*

Dibujar la gráfica de la relación de orden $\subset$ entre las diferentes topologías sobre $\{1, 2, 3\}$, (2.1.4).

Continuando con el estudio de la relación de orden entre las topologías sobre un conjunto X, veremos que el conjunto $\Im(X)$ de todas las topologías sobre un conjunto X, ordenado por la inclusión $\subset$, forma una retícula completa.

2.2.3 *Proposición*

Sea $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de topologías sobre un conjunto X. Entonces su intersección es la topología más fina de todas las topologías que son más gruesas que cada una de las $\mathcal{X}_\alpha$ $(\alpha \in I)$.

Demostración:

(A1) tenemos que $\varnothing, X \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, por lo tanto $\varnothing, X \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$.

(A2) Si $A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$, entonces $A, B \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$; por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por tanto $A \cap B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$.

(A3) Si $A_\beta \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\beta \in K$, entonces $A_\beta \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\beta \in K$ y todo $\alpha \in I$, entonces, por (A3), $\bigcup_{\beta \in K} A_\beta \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, es decir: $\bigcup_{\beta \in K} A_\beta \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$. ■

Esta proposición puede interpretarse de la manera siguiente: En el conjunto ordenado $(\Im(X), \subset)$ cada familia de topologías tiene un ínfimo, a saber:

$$\inf_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha.$$

Si bien la intersección de topologías es una topología, la unión de topologías no necesariamente es una topología. Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{X}_D$ y $\mathcal{X}_I$ son topologías, pero si $\mathcal{X}_D \cup \mathcal{X}_I$ fuera una topología, entonces para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ el conjunto $(-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b)$ tendría que ser elemento de $\mathcal{X}_D \cup \mathcal{X}_I$, lo cual es falso.

Sin embargo, es fácil ver que la unión de topologías $\mathcal{X}_\alpha (\alpha \in I)$ sobre un conjunto X 'genera' una topología que es su supremo. Consideremos la colección $\mathcal{A}$ de todas las topologías sobre X que contienen a $D = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$. $\mathcal{A}$ no es vacía, porque tiene a $\mathcal{P}(X)$ como elemento. La intersección $\mathcal{X}$ de todas las topologías de $\mathcal{A}$ es una topología, por 2.2.3. Evidentemente, es la más gruesa de todas las topologías que contienen a $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$, es decir, $\mathcal{X}$ es el supremo de $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en $(\Im(X), \subset)$.

2.2.4 *Corolario*

El conjunto $\Im(X)$ de todas las topologías sobre un conjunto X, ordenado por inclusión, es una retícula completa.

Nota: Aunque este resultado pueda parecer demasiado abstracto para ser útil, veremos en la siguiente sección que tiene una gran importancia para la construcción de topologías concretas sobre un conjunto. Volveremos a verlo más adelante, al introducir la topología inicial y la topología final, dos importantes métodos para definir nuevas topologías a partir de topologías dadas.

§ 2.3 **Bases y subbases**

Los elementos de $\sup_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$ son precisamente todos los subconjuntos de X que son necesariamente abiertos, si consideramos todos los elementos de $D = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$ como abiertos. En la práctica, esta situación ocurre frecuentemente: tenemos una colección de conjuntos *elementales* (bolas, cubos, cilindros, etc.), que queremos llamar abiertos y nos preguntamos cuál es la topología *generada* por esta colección de abiertos elementales.

2.3.1 *Definición (subbase de una topología)*

Sea X un conjunto y sea $D \subset \mathcal{P}(X)$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Entonces se dice que D **genera la topología** $\mathcal{X}$ sobre X, si $\mathcal{X}$ es la más gruesa de todas las topologías que contienen a D. En este caso D se llama también una **subbase** de $\mathcal{X}$. Dos subbases que generan la misma topología se dice que son **equivalentes**.

Según 2.2.3, sabemos que para todo conjunto $D \subset \mathcal{P}(X)$ *existe* la topología generada. Sin embargo, en matemáticas los teoremas de existencia muchas veces

no son suficientes. Queremos conocer, por ejemplo, la *forma concreta* de los abiertos que constituyen la topología generada por D, es decir, de los conjuntos que serán necesariamente abiertos, si consideramos todos los conjuntos $A \in D$ como abiertos.

2.3.2 *Proposición*

Sea D una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto dado X. Entonces la topología $\mathcal{X}$ generada por D consta del conjunto X y de la colección de todos los subconjuntos de X que pueden representarse como unión de una familia de intersecciones finitas de elementos de D.

Demostración: Es claro que $\mathcal{X}$ debe contener a todas las intersecciones finitas $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ de elementos $A_1, \ldots, A_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$), luego también la unión de toda familia de tales intersecciones.

Inversamente, el lector verificará fácilmente (por distributividad de $\bigcup\limits_{\alpha \in I}$ con respecto a $\cap$) y la nota de la definición 2.1.1 que la colección de todas estas uniones forma una topología, por lo tanto contiene a $\mathcal{X}$. ■

Esta proposición tiene una gran importancia práctica porque da un método general de definir topologías concretas sobre un conjunto X, a partir de una colección D de *conjuntos abiertos* elementales. Se procede en dos pasos:

i) Se toman todas las intersecciones finitas de los elementos de D y el conjunto X.

ii) Se toman todas las uniones de estas intersecciones. La colección de estas uniones es la topología generada por D.

2.3.3 *Ejemplo*

Consideremos como subbase la colección D de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. El primer paso no nos aporta nada nuevo, porque la intersección finita de intervalos abiertos es otra vez un intervalo abierto. Entonces la topología generada por D es igual a la colección de todas las uniones de intervalos abiertos, o sea, es la topología de orden r sobre $\mathbb{R}$. El lector verificará que, dado $\varepsilon > 0$, para la colección D_ε de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con un diámetro menor o igual a ε. Todo intervalo puede representarse como unión de intervalos de este tipo, luego D_ε genera también la topología usual de $\mathbb{R}$.

Consideremos ahora como subbase la colección D_1 de todos los intervalos abiertos, que tienen diámetro 1. En este caso, el paso $i)$ es esencial. Por intersección finita de intervalos de D_1 obtenemos todos los intervalos de diámetro ≤ 1. Si $\mid b - a \mid \leq 1$, entonces $(a, b) = (a, a+1) \cap (b-1, b)$. La consideración anterior nos muestra que en el segundo paso volvemos a obtener la topología de orden sobre $\mathbb{R}$.

2.3.4 *Ejemplo*

Sea X un conjunto. Entonces los complementos de los subconjuntos unitarios $\{x\}$ de X, $(x \in X)$ generan la topología de los complementos finitos sobre X. En este caso basta efectuar el primer paso, puesto que $\complement\{x_i, ..., x_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \complement\{x_i\}$ para todo subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de X.

Pregunta: ¿Qué topología genera el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^2$?

La construcción de una topología, por los dos pasos mencionados, empezando por una colección cualquiera de subconjuntos, tiene una desventaja: es bastante complicada, puesto que intervienen las intersecciones finitas, cuya forma, en general, no conocemos. Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{R}^n$ la colección

$$\beta = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0, \},$$

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} < r\} \tag{6}$$

de las bolas abiertas como subbase de una topología sobre $\mathbb{R}^n$, las intersecciones finitas de estas bolas pueden tener una forma bastante complicada. Sin embargo, en los ejemplos vimos que en muchas ocasiones el primer paso no es necesario para la construcción de la topología generada.

2.3.5 *Definición (base de una topología)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Una subcolección $\beta \subset \mathcal{X}$ se llama **base** de $\mathcal{X}$, si todo abierto de $(X, \mathcal{X})$ distinto de X, puede representarse como unión de elementos de β.

Con esta definición podemos reformular la proposición 2.3.2 de la manera siguiente: si $D \subset \mathcal{P}(X)$, $D \neq \varnothing$ la colección de las intersecciones finitas $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ $(n \in \mathbb{N}; A_1, ..., A_n \in D)$ forma una base de la topología generada por D. Si D ya es una base, como en el ejemplo 2.3.3, sólo hay que formar todas las uniones posibles de sus elementos para obtener la topología generada. El siguiente ejemplo muestra que es éste precisamente el método, con el que se define la topología de un espacio seudométrico.

2.3.6 *Ejemplo (topología de un espacio seudométrico)*

Sea (X, d) un espacio seudométrico. Por la definición, llamamos *abiertos* a todos los subconjuntos de X que pueden representarse como *unión de bolas abiertas*. La colección de estos abiertos verifica a los axiomas (A1) - (A3), por 1.6.17, luego es una topología. Se llama **topología del espacio seudométrico** (X, d) y se denota por $\mathcal{X}_d$. Por definición, la colección β_d de las bolas abiertas es una base de la topología $\mathcal{X}_d$. Si d, d' son dos seudométricas sobre X, las bases

de las bolas abiertas β_d y $\beta_{d'}$ son equivalentes (2.3.1), si y sólo si d y d' son topológicamente equivalentes (1.6.21).

2.3.7 *Ejemplo (bases de la topología euclideana sobre $\mathbb{R}^n$)*

Ya sabemos que las tres métricas d_2, d_1, d_∞ sobre $\mathbb{R}^n$ (1.4.7) son semejantes, por lo tanto son topológicamente equivalentes, o sea, $\mathcal{X}_{d_2} = \mathcal{X}_{d_\infty} = \mathcal{X}_{d_1}$. En particular, la colección de todas las bolas abiertas euclideanas y la colección de todos los cubos regulares abiertos son bases *equivalentes*, de la topología euclideana $r^n = \mathcal{X}_{d_2}$, aunque no tengan un elemento común. Otra base de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los cubos abiertos (a, b) en $\mathbb{R}^n$ $(a, b \in \mathbb{R}^n)$ (fig. 27).

Se plantean ahora tres problemas:

i) ¿Dada una topología $\mathcal{X}$ sobre un conjunto X y una subcolección $\beta \subset \mathcal{X}$, cómo puede decirse si β es una base de $\mathcal{X}$, sin considerar todas las uniones posibles de sus elementos?

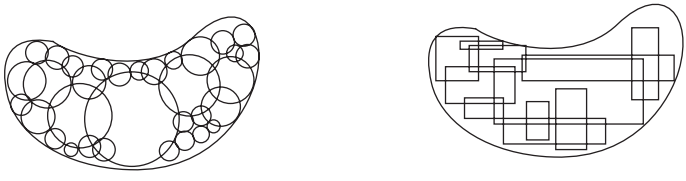


Figura 27.

ii) ¿Dada una colección $D \subset \mathcal{P}(X)$, cómo puede determinarse si D es *base* de una cierta topología?

iii) ¿Cómo puede determinarse si dos bases son *equivalentes* en el sentido de que generan la misma topología?

Las proposiciones y corolarios siguientes dan las respuestas.

2.3.8 *Proposición (caracterización de las bases de una topología dada)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces $\beta \subset \mathcal{X}$ es una base de $\mathcal{X}$, si y sólo si para todo $A \in \mathcal{X}$ y todo $x \in A$ existe $B \in \beta$ con $x \in B \subset A$. (fig. 28).

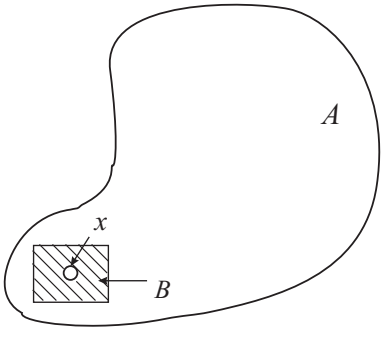


Figura 28.

Demostración: Si β es una base de $\mathcal{X}$, entonces, todo $A \in \mathcal{X}$ se representa como $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ con $B_\alpha \in \beta$. Entonces para $x \in A$ existe $\alpha_x \in I$ con $x \in B_{\alpha_x} \subset A$. Supongamos ahora que la condición se verifica.

Entonces se cumple para todo $A \in \mathcal{X}$:

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \cup\{B \mid B \in \beta, B \subset A\} \subset A.$$

Por lo tanto A puede representarse como unión de una familia de elementos de β. ■

La demostración de los dos corolarios siguientes la dejamos al lector como ejercicio.

2.3.9 *Corolario (caracterización de los abiertos a partir de una base)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $\beta \subset \mathcal{X}$ una base de $\mathcal{X}$. Entonces para todo $A \subset X$:

$$A \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \exists B \in \beta \text{ tal que } x \in B \subset A$$

2.3.10 *Corolario (caracterización de bases equivalentes)*

Sea X un conjunto. Dos bases $\beta_1, \beta_2 \subset \mathcal{P}(X)$ son equivalentes, si y sólo si cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $B_2 \in \beta_2 \wedge x \in B_2 \Longrightarrow \exists B_1 \in \beta_1 : x \in B_1 \subset B_2$

ii) $B_1 \in \beta_1 \wedge x \in B_1 \Longrightarrow \exists B_2 \in \beta_2 : x \in B_2 \subset B_1$

En este corolario, la condición i) significa que la topología generada por β_1 es más fina que la topología generada por β_2 y la condición ii) significa el inverso.

2.3.11 *Proposición (caracterización de las bases)*

Sea X un conjunto, $\beta \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces son equivalentes:

i) β es la base de la topología generada por ella misma.

ii) Para todo $B_1, B_2 \in \beta$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \beta$ con $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ (fig. 29).

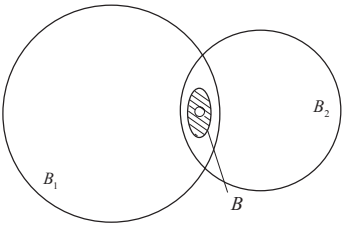


Figura 29.

Demostración: La implicación i) $\Longrightarrow$ ii) resulta de 2.3.8, pues la intersección $B_1 \cap B_2$ de dos elementos de β es abierto en la topología generada por β.

Para ver que ii) $\Longrightarrow$ i), sea $\mathcal{X}$ la topología generada por β (como subbase). Las intersecciones finitas $B_1 \cap ... \cap B_r$ ($r \in \mathbb{N}$; $B_1, ..., B_r \in \beta$) forman una base de $\mathcal{X}$.

Aplicando la caracterización 2.3.8 a esta base, se tiene que para cualquier $A \in \mathcal{X}$ y para todo $x \in A$ existen $B_1, ..., B_n \in \beta$ tales que $x \in B_1 \cap ... \cap B_n \subset A$.

Por 2.3.8, basta probar que existe $B \in \beta$ con $x \in B \subset B_1 \cap ... \cap B_n$, puesto que entonces $x \in B \subset A$. Para $n = 2$ es cieto por la condición ii); para $n > 2$ puede probarse por inducción: por ii), si $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_2' \in \beta$ con $x \in B_2' \subset B_1 \cap B_2$ y esto nos da que $x \in B_2' \cap B_3 \cap ... \cap B_n \subset A$, una intersección que tiene un miembro menos. ■

La utilidad de los conceptos y criterios deducidos se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

2.3.12 *Ejemplo (base numerable para la topología euclideana de $\mathbb{R}^n$)*

En $\mathbb{R}^n$ una bola $B(x, r)$ se llama **racional**, si $x \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}$, es decir, si su radio y las coordenadas de su centro son racionales (fig. 30).

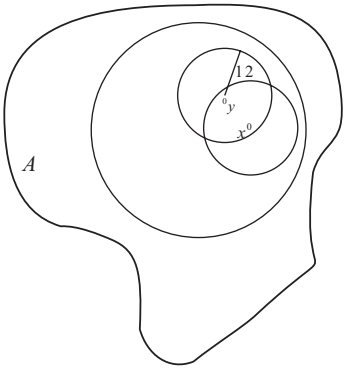


Figura 30.

Si c es la colección de todas las bolas racionales en $\mathbb{R}^n$, se tiene que c es una base de la topología euclideana. Para probarlo, utilizaremos el criterio 2.3.8. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in A$. Entonces existe $r > 0$ con $B(x, r) \subset A$. Podemos suponer que $r \in \mathbb{Q}$. Tomemos un punto y, con coordenadas racionales cuya distancia a x es menor que $r/2$ (¿Por qué existe?). Entonces se cumple $x \in B(y, r/2) \subset B(x, r) \subset A$, como requiere la caracterización 2.3.8. Por lo tanto la topología euclideana de $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable.

2.3.13 *Definición (AN 2)*

Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ verifica al segundo axioma de numerabilidad (AN 2) si tiene una base numerable.

2.3.14 *Ejercicio*

Probar que el espacio topológico, formado por el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos sobre $\mathbb{R}$, no verifica el segundo axioma de numerabilidad.

2.3.15 *Ejercicio (topología del límite superior)*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la colección D de todos los subconjuntos de la forma $(a, \rightarrow)$ o de la forma $(\leftarrow, b)$. La topología $\mathcal{X}_S$ generada por la subbase D sobre $\mathbb{R}$ se llama **topología del límite superior**. Probar que:

i) Los intervalos de la forma $(a, b]$ forman una base de $\mathcal{X}_S$.

ii) $\mathcal{X}_S$ es estrictamente más fina que lo topología usual r sobre $\mathbb{R}$.

iii) Los intervalos de la forma $(a, b]$ con extremos racionales $a, b \in \mathbb{Q}$ no forman una base de $\mathcal{X}_S$.

§ 2.4 Las categorías de los espacios métricos y los espacios topológicos

En nuestros primeros ejemplos (2.1.3 - 2.1.9) no hemos utilizado una métrica para definir los espacios topológicos correspondientes. Pero esto no significa que *no puedan* derivarse de una métrica. Por ejemplo, ya hemos mostrado (2.1.8) que la topología de orden sobre $\mathbb{R}$ puede también definirse *métricamente*.

2.4.1 *Definición (metrizabilidad)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se dice metrizable (resp. seudometrizable) si existe una distancia (resp. seudodistancia) d sobre X para la cual $\mathcal{X} = \mathcal{X}_d$, donde $\mathcal{X}_d$ es la topología canónicamente asociada a d.

2 4.2 *Ejemplo*

La topología discreta $\mathcal{P}(X)$ es metrizable por la *distancia discreta*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

En efecto, tenemos que si $B(x, 1) = \{x\}$ para todo $x \in X$, entonces $A = \bigcup_{x \in A} B(x, 1) \in \mathcal{X}_d$ para todo $A \subset X : \mathcal{X}_d = \mathcal{P}(X)$.

2.4.3 *Ejemplo*

Si X tiene más de un elemento, el espacio indiscreto $(X, \{\varnothing, X\})$ no es metrizable. Para verlo supongamos que sea metrizable. En este caso existiría una distancia para la cual $\mathcal{X}_d = \{\varnothing, X\}$.

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$, $r > 0$ tal que $r < d(x,y)$. Entonces $x \in B(x,r)$, $y \notin B(x,r)$, o sea, $B(x,r) \neq \varnothing$, $B(x,r) \neq X$. Como $B(x,r) \in \mathcal{X}_d$ resultaría falso que $\mathcal{X}_d = \{\varnothing, X\}$.

Sin embargo, el espacio indiscreto es *seudometrizable*: Basta tomar la seudodistancia

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+ : \text{con } d(X \times X) = \{0\}.$$

2.4.4 *Ejemplo*

Si proveemos a $\mathbb{R}$ de la topología de los complementos finitos:

$$A \subset \mathbb{R} \text{ es abierto } \iff \complement A \text{ es finito o } A = \varnothing.$$

Puede probarse (lo veremos más adelante) que este espacio topológico no es ni metrizable, ni seudometrizable.

2.4.5 *Ejemplo*

El espacio de Sierpinski $\{1,2\}$ (con la topología $\mathcal{X} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{1\}\}$, ver (2.1.2) no es metrizable ni seudometrizable; pues, si d es una sedométrica sobre X y $d(1,2) = \rho > 0$, entonces $B(2,\rho) = \{2\}$ es un abierto en $(X, \mathcal{X}_d)$; en cambio, si $d(1,2) = 0$, entonces $\mathcal{X}_d$ es la topología indiscreta. Por lo tanto $\mathcal{X}_d \neq \mathcal{X}$.

Estos últimos ejemplos muestran que los espacios topológicos forman una clase estríctamente más amplia que los espacios (seudo-)métricos. El problema de hallar condiciones necesarias y suficientes, para que un espacio topológico sea metrizable, fue uno de los problemas más investigados de la Topología General. La solución completa del problema fue dada sólo en el año 1951 (Por NAGATA [122], SMIRNOV [141], BING [20]). Trataremos este tema en el capítulo 9.

El problema de metrizabilidad es un problema de *existencia*: ¿Existe una distancia que defina la topología dada? El problema de unicidad correspondiente es trivial. En general existe más de una distancia que define la misma topología. Ya conocemos algunos ejemplos de distancias *topológicamente equivalentes*, (2.3.7) (fig. 31).

El hecho de que diferentes métricas definan la misma topología nos indica que la *estructura topológica* es más abstracta que la estructura métrica, no sólo en el sentido de *más general* (toda estructura métrica define una estructura topológica, pero no el inverso), sino también en el sentido de que perdemos información al pasar de una métrica a la topología asociada. Partiendo de la topología asociada, no podemos reconstruir la métrica original, sino sólo la clase de todas las distancias que le son topológicamente equivalentes. Sabemos que para cuestiones de continuidad y de convergencia esta pérdida de información no es esencial.

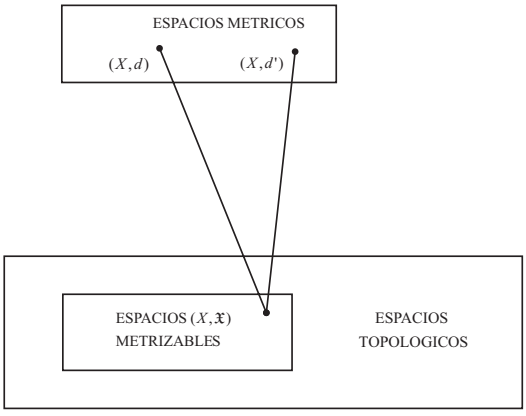


Figura 31

Basta conocer los abiertos de un espacio métrico para decidir si una función dada es continua o no. Es decir: si f es continua con respecto a una distancia d, sigue siéndolo con respecto a toda distancia topológicamente equivalente (1.6.20). Sin embargo, existen otras propiedades que no son invariantes con repecto a tal cambio de la distancia. Por ejemplo, un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) puede ser acotado, y no ser acotado para una distancia topológicamente equivalente a d.

2.4.6 *Ejemplo*

$\mathbb{R}^n$ no es acotado en el espacio euclideano $(\mathbb{R}^n, d_2)$, mientras que es acotado en $(\mathbb{R}^n, d')$, donde la distancia d' viene dada por: $d'(x, y) = \text{ínf}\{1, d_2(x, y)\}$, $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ y es topológicamente equivalente a d_2, (1.6.24).

Evidentemente existen propiedades *topológicas* que sólo dependen de la estructura topológica de un espacio métrico y otras que dependen más específicamente de su métrica particular.

Trataremos ahora de definir con precisión lo que significan, *la estructura topológica, las propiedades topológicas*, etc., y de relacionar la Topología General con otras teorías de estructuras matemáticas fundamentales.

Con vista a unificar los tratamientos en diferentes ramas en la matemática y resaltar los métodos más generales que le son comunes, se ha establecido el concepto de *categoría*. Aquí sólo daremos una idea de este concepto sin entrar en los detalles de su teoría. Pero mencionaremos que algunos autores desarrollan sistemáticamente partes de la topología general, en el contexto de esta teoría ya que tiene bastante desarrollo.

2.4.7 *Definición (categoría)*

Una categoría $\wp$ es una terna formada por:

– Una clase $Ob(\wp)$ de objetos de $\wp$;

– Conjuntos $Mor\ (A, B)$ para cada par $A, B \in Ob(\wp)$;

– Para tres objetos cualesquiera $A, B, C \in Ob(\wp)$ una aplicación (ley de composición) $(f, g) \mapsto g \circ f$ de $Mor\ (A, B) \times Mor(B, C)$ en $Mor(A, C)$ que cumple:

Kat.1: Si $f \in Mor(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$, $h \in Mor(C,D)$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (asociatividad).

Kat.2: Para cada $A \in Ob(\wp)$ existe un *elemento neutro* $1_A \in Mor(A,A)$ tal que para todo $f \in Mor(A,B)$ y todo $g \in Mor(C,A)$ se tiene $f \cdot 1_A = f$ y $1_A \cdot g = g$.

Los elementos de $Mor(A,B)$ se llaman **morfismos** y a la aplicación $(f,g) \mapsto g \circ f$ se le llama **composición** de los morfismos f y g . Para ilustrar este concepto damos a continuación unos ejemplos señalando los objetos, los morfismos y la ley de composición, dejando al lector la verificación de que cada uno de ellos es una categoría.

2.4.8 *Ejemplo (categoría $\mathcal{C}$ de los conjuntos)*

Tomemos como la clase $Ob\,(\mathcal{C})$ la clase de los conjuntos y dados dos conjuntos cualesquiera A, B, tomemos como $Mor(A,B)$ el conjunto de todas las aplicaciones de A en B. La composición de morfismos viene dada por la composición de aplicaciones.

2.4.9 *Ejemplo (categoría $\mathcal{D}$ de los conjuntos ordenados)*

$Ob\,(\mathcal{D})$: conjuntos ordenados.
$Mor(A,B)$: aplicaciones crecientes (es decir, con: $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$).
Ley de composición: composición de aplicaciones.

2.4.10 *Ejemplo (categoría $\mathcal{G}$ de los grupos)*

$Ob\,(\mathcal{G})$: los grupos.
$Mor(A,B)$: homomorfismos del grupo A en el grupo B.
Ley de composición: composición de aplicaciones.

2.4.11 *Ejemplo (categoría $\mathcal{V}$ de los espacios vectoriales reales)*

$Ob\,(\mathcal{V})$:?
$Mor(A,B)$:?
Ley de composición:?

La ley de composición entre los morfismos no es necesariamente igual a la composición de aplicaciones.

Por ejemplo, podemos considerar a $\mathbb{R}$ como conjunto de morfismos de una categoría cuya clase de objetos tiene un único elemento:

2.4.12 *Ejemplo (categoría $\mathcal{R}$)*

$Ob\,(\mathcal{R})$: 1.
$Mor(1,1) = \mathbb{R}$.

La ley de composición : multiplicación en $\mathbb{R}$.

La teoría de grupos no puede distinguir entre grupos isomorfos. Si un enunciado de esta teoría se cumple para un grupo concreto, entonces también para todo grupo isomorfo. Más general, podemos decir que la teoría de una categoría estudia propiedades que son invariantes para los *isomorfismos de esta categoría.*

2.4.13 *Definición (isomorfismo entre los objetos de una categoría)*

En una categoría $\wp$ se define que para $A, B \in Ob(\wp)$ un morfismo $f \in Mor(A, B)$ es un **isomorfismo** de A sobre B, si existe $g \in Mor(B, A)$ tal que se cumple

$$f \circ g = \mathbb{1}_B \text{ y } g \circ f = \mathbb{1}_A.$$

El lector verificará fácilmente que:

- los isomorfismos de la categoría $\mathcal{C}$ son las biyecciones.
- los isomorfismos de la categoría $\mathcal{D}$ son los isomorfismos de orden, es decir, las biyecciones $f : A \to B$ con $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ para todos los $x, y, \in A$.
- los isomorfismos de la categoría $\mathcal{C}$ son los isomorfismos de grupo,
- los isomorfismos de $\mathcal{V}$ son las biyecciones lineales,
- los isomorfismos de $\mathcal{R}$ son los números reales $\neq 0$.

Luego, de la definición general 2.4.7 se derivan precisamente los conceptos de isomorfismo que conocemos de las teorías respectivas (teoría de conjuntos ordenados, de grupos, espacios vectoriales, etc.). Queremos introducir la categoría de los espacios métricos, pero la definición de los morfismos de esta categoría no es tan evidente. Parece natural tomar las aplicaciones continuas como morfismos. Sin embargo, esta definición no es compatible con nuestro concepto de isomorfismo entre espacios métricos. Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') se llaman isomorfos, si existe una isometría f de (X, d) sobre (X', d'), es decir, una biyección $f : X \to X'$ con $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todos los $x, y \in X$. Pero existen biyecciones continuas así como sus inversas, entre espacios métricos que no son isometrías. Para obtener las isometrías como únicos isomorfismos de la categoría de los espacios métricos hay que definir la siguiente categoría:

2.4.14 *Ejemplo (categoría $\mathcal{M}$ de los espacios métricos)*

$Ob(\mathcal{M})$: espacios métricos.
$Mor(A, B)$: contracciones de A en B (es decir: $f : A \to B$ con $d_B(f(x), f(y)) \leq d_A(x, y)$ para todos los $x, y \in A$).

Ley de composición: composición de aplicaciones.

Regresemos a los espacios topológicos. Para ver que forman una categoría debemos definir los morfismos correspondientes, que son, ahora sí, las aplicaciones continuas.

2.4.15 *Definición (aplicaciones continuas)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos. Una aplicación f de X en Y se llama **continua**, si para todo $U \in \mathcal{Y}$ se tiene que $f^{-1}[U] \in \mathcal{X}$.

2.4.16 *Ejercicio*

Probar que $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua si y sólo si $f^{-1}[U] \in \mathcal{X}$ para todo U de una base (resp. subbase) de $\mathcal{Y}$.

2.4.17 *Ejemplo (aplicación identidad)*

Sea $(X, \mathcal{X})$, un espacio topológico. Entonces la aplicación $\mathbb{1}_x : X \to X$ es una aplicación continua.

2.4.18 *Ejemplo (funciones constantes)*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos, $y_0 \in Y$. La aplicación constante $f : X \to Y$ con $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$ es una aplicación continua, ya que la preimagen de todo abierto $U \in \mathcal{Y}$ es X ó es $\varnothing$, dependiendo de si el abierto contiene o no a y_0.

2.4.19 *Ejemplo (variación de topologías)*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación.

i) Si $\mathcal{X}$ es la topología más fina sobre X o si $\mathcal{Y}$ es la topología más gruesa sobre Y, entonces toda aplicación f de X en Y es continua.

ii) Si $\mathcal{X}$ es la topología indiscreta sobre X y $\mathcal{Y}$ la discreta sobre Y, sólo son continuas las aplicaciones constantes.

iii) Si la aplicación f es continua, f seguirá siendo continua si sustituimos a $\mathcal{Y}$ por una topología más gruesa o bien si sustituimos a $\mathcal{X}$ por una topología más fina.

iv) Si $\mathcal{X}_1$, y $\mathcal{X}_2$ son dos topologías sobre un conjunto X, entonces la aplicación identidad 1_X de $(X, \mathcal{X}_1)$ en $(X, \mathcal{X}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1$.

Este ejemplo nos muestra que la continuidad de una función no es una propiedad sólo de la función, sino que está estrechamente ligada a la topología del dominio y del codominio.

El ejemplo siguiente mostrará cómo la topología general permite considerar a las funciones semicontinuas como funciones continuas, con respecto a ciertas

topologías de $\mathbb{R}$, y luego incorpar su teoría a la teoría general de las aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro.

2.4.20 *Ejemplo (funciones semicontinuas)*

En Análisis se dice que una aplicacion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **semicontinua inferiormente** (resp. **superiormente**) si y sólo si para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \mid x - a \mid < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \tag{7}$$

$$(\, resp.\ x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \mid x - a \mid < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) + \varepsilon\,) \ \text{(fig. 32)} \tag{8}$$

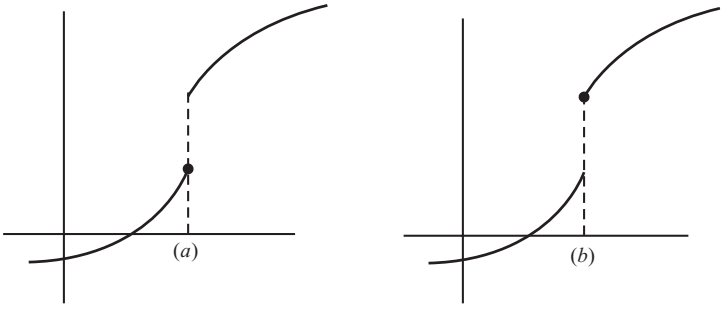


Figura 31. Semicontinua inferiormente (a) y superiormente (b)

Trataremos de exponer esta definición en la forma de la definición 2.4.15.

Si $f(a)$ es estrictamente mayor que cualquier número b (que puede escribirse en la forma $b = f(a) - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$), entonces por (7) existe un intervalo de centro $a : \{x \in \mathbb{R} \mid \ \mid x - a \mid < \delta\}$, sobre el cual f es estrictamente mayor que b, es decir, que para todo $b \in \mathbb{R}$ la preimagen $f^{-1}((b, \infty))$, o sea, el conjunto de todos $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) > b$, es abierto en $\mathbb{R}$, pues es vecindad de todos sus puntos. Puesto que los conjuntos (b, ∞) son precisamente los elementos de la topología $\mathcal{X}_D$ sobre $\mathbb{R}$ (4), una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si y sólo si f es una aplicación continua de $\mathbb{R}$, provisto de la topología usual, en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_D)$ (fig. 33).

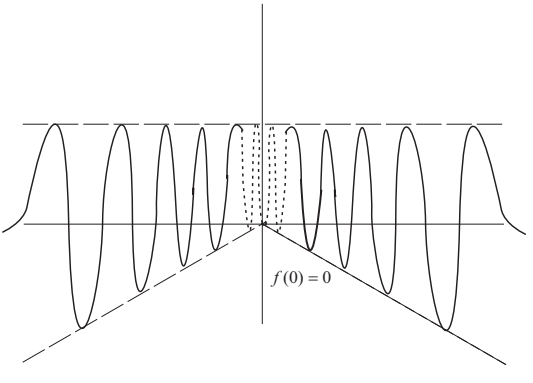


Figura 31. Función semicontinua inferiormente

(Obsérvese la inversión: semicontinua *inferiormente*, si las preimágenes de los intervalos abiertos no acotados *superiormente* son abiertos). Generalizando, obtenemos, como conclusión de este ejemplo, la siguiente definición topológica de las funciones numéricas semicontinuas:

Una aplicación de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (\pm\infty)$ (con la topología de orden) se llama **semicontinua inferiormente** (resp. **superiormente**), si para todo $b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f^{-1}((b, \infty)) \in \mathcal{X} \ \text{ (resp. } \ f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{X}), \tag{9}$$

o sea si f es continua como aplicación de $(X, \mathcal{X})$ en $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{X}_D)$ (resp.$(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{X}_I)$.

Con esta definición queda aclarada la relación entre la noción de semicontinuidad y de continuidad, y pueden aplicarse los resultados de la teoría general directamente a las funciones semicontinuas. Las funciones semicontinuas son muy importantes en muchas ramas, especialmente de la matemática aplicada. Los siguientes ejercicios facilitarán al lector la comprensión de su definición topológica.

2.4.21 *Ejercicio*

Sea χ_A la función característica de un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en : } A \end{cases}$$

Probar que $\chi_A(x)$ es semicontinua inferiormente si y sólo si A es abierto.

2.4.22 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sean $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$, $(\alpha \in I)$ funciones semicontuinas inferiormente (resp. superiormente)).

i) Probar que $\sup\limits_{\alpha \in I} f_\alpha$ (resp. $\inf\limits_{\alpha \in I} f_\alpha$) es semicontinua inferiormente (resp. superiormente). (En particular la envoltura superior (resp. inferior) de funciones numéricas continuas es semicontinua inferiormente (resp. superiormente).

ii) Probar que $\inf\limits_{\alpha \in I} f_\alpha$ (resp. $\sup\limits_{\alpha \in I} f_\alpha$) es semicontinua inferiormente (resp. superiormente), si I es finito.

iii) Dar un ejemplo de que esto no se cumple en general si I no es finito

2.4.23 *Ejercicio*

Una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ es continua (para la topología usual sobre $\mathbb{R}$) si y sólo si es superior e inferiormente continua.

Mostraremos ahora que los espacios topológicos forman una categoría con las aplicaciones continuas como morfismos.

2.4.24 *Teorema (composición de aplicaciones continuas)*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}), (Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua .

Demostración: Sea $C \in \mathcal{Z}$. Entonces:
$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1} \circ g^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$; pero $g^{-1}[C] \in \mathcal{Y}$ por ser g continua y $f^{-1}[g^{-1}[C]] \in \mathcal{X}$ por ser f continua. Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}[C] \in \mathcal{X}$.

2.4.25 *Ejemplo*

La aplicación $x \mapsto \mid x \mid$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua. Entonces, si f es una aplicación continua de un espacio topológico$(X, \mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$, la función $\mid f \mid : x \mapsto \mid f(x) \mid$ es continua.

2.4.26 *Corolario*

Los espacios topológicos con las aplicaciones continuas como morfismos constituyen una categoría.

Demostración: El teorema 2.4.24 muestra que es posible tomar como ley de composición entre los morfismos (aplicaciones continuas) la composición de aplicaciones: $(f, g) \mapsto g \circ f$, que es una aplicación de $Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z)$ en $Mor(X, Z)$ y cumple evidentemente Kat.1 (asociatividad) y Kat.2 ($1_X \in Mor(X, X)$ es el elemento neutro por la izquierda y por la derecha).

Notación: La categoría de los espacios topológicos la denotaremos por $\mathcal{T}$. Si $X, Y \in Ob(\mathcal{T})$, escribiremos $\mathfrak{C}\ (X, Y)$ en vez de $Mor(X, Y)$, es decir, por $\mathfrak{C}(X, Y)$ denotamos al conjunto de todas las aplicaciones continuas del espacio topológico X en el espacio topológico Y.

2.4.27 *Ejercicio*

Sea f una función semicontinua inferiormente de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$, sea $[a, b]$ un intervalo de $\overline{\mathbb{R}}$ con $f[X] \subset [a, b]$ y $g : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ una función creciente y continua ($\overline{\mathbb{R}}$ provisto de su topología de orden).
Probar que $g \circ f$ es semicontinua inferiormente.

Los isomorfismos de la categoría de los espacios topológicos se llaman *homeomorfismos*, es decir:

2.4.28 *Definición (homeomorfismo, espacios equivalentes)*

Una aplicación f de un espacio $(X, \mathcal{X})$ en un espacio $(Y, \mathcal{Y})$ se llama **homeomorfismo,** si f es una biyección tal que f *y* f^{-1} son continuas. Dos espacios

topológicos $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ se dicen **homeomorfos** o **equivalentes** si existe un homeomorfismo de X sobre Y.

2.4.29 *Ejemplo*

Toda homotecia $x \mapsto \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$ de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Más general: toda aplicación lineal sobreyectiva f de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. (Sabemos que toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es continua; si f es además sobreyectiva, existe su inversa que es también lineal y por lo tanto continua).

2.4.30 *Ejemplo*

Sean X, Y conjuntos totalmente ordenados y sea $f : X \to Y$ una biyección creciente de X sobre Y. Si consideramos sobre X y Y las topologías de orden, entonces f es un homeomorfismo. Esto parece lógico, puesto que f es un isomorfismo de orden y las topologías estan definidas por medio de las relaciones de orden). Verificación: Las preimagenes de los intervalos abiertos en Y (2) son intervalos abiertos en X, p. ej.,

$$f^{-1}(y_1, y_2) = (f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

para $y_1, y_2 \in Y$, como los intervalos abiertos forman una base de la topología de Y, f es continua (2.4.16). El mismo razonamiento se aplica a $f^{-1} : Y \to X$.

2.4.31 *Ejemplo*

$f : x \mapsto \frac{x}{(1+|x|)}$ es un isomorfismo de orden de $(\mathbb{R}, \leq)$ sobre $((-1; 1), \leq)$, por lo tanto un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $(-1, 1)$. Podemos prolongar f al conjunto totalmente ordenado $\overline{\mathbb{R}}$ aplicando $-\infty$ a -1 e ∞ a 1.

Esta prolongación $\overline{f}$ es una biyección creciente de $\overline{f}$ sobre $[-1, 1]$. Entonces, si proveemos ambos conjuntos con sus topologías de orden, $\overline{f}$ es un homeomorfismo. Y los espacios topológicos $\mathbb{R}$ y $(-1, 1)$, (resp. $\overline{\mathbb{R}}$ y $[-1, 1]$) son homeomorfos.

$\rightsquigarrow$ *Nota:* Es conveniente señalar que hay aplicaciones que son continuas y biyectivas, pero que no necesariamente son bicontinuas (o sea, su inversa no es continua).

Por ejemplo, la aplicación identidad

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$$

de la recta real, provista de la topología discreta, sobre $\mathbb{R}$ provisto de su topología usual, es continua, mientras que su inversa evidentemente no es continua.

Puesto que la inversa de un homeomorfismo y la compuesta de dos homeomorfismos son homeomorfismos (2.4.28 y 2.4.24), la homeomorfía es una relación de equivalencia entre los espacios topológicos.

Para probar que dos espacios topológicos son homeomorfos, hay que mostrar que existe un homeomorfismo entre ellos.

En general es más difícil demostrar que no existe tal homeomorfismo.

En capítulos posteriores veremos criterios que nos permitirán asegurar que ciertos espacios topológicos no son homeomorfos.

Para dar una idea de lo que significa la homeomorfía, agrupamos a continuación unas letras y unas figuras que son equivalentes como espacios topológicos (fig. 34)

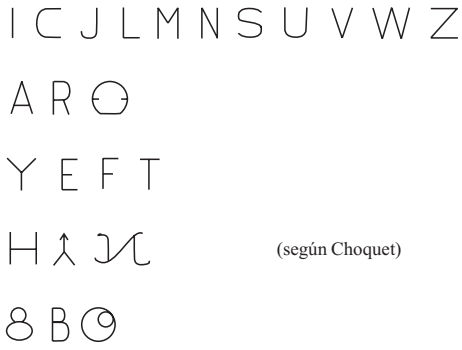


Figura 34. Letras homeomorfas

Podemos ver, intuitivamente, si curvas en el plano $\mathbb{R}^2$ o superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$ son homeomorfías, suponiendo que son de goma.

Si se pueden transformar una en otra por una serie de extensiones o comprensiones sin romperlas, ni pegarlas, son homeomorfías.

Se ha definido a un topólogo como un matemático que no ve la diferencia entre una rosquilla y una taza de café.

El siguiente dibujo muestra diferentes estados en la deformación de una rosquilla en una taza (fig. 35)

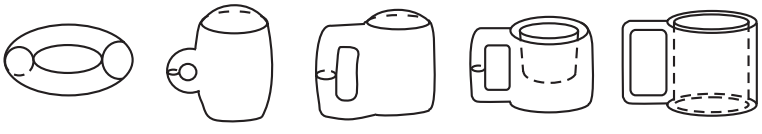


Figura 35. Deformación topológica de una rosquilla

Cada una de las geometrías clásicas tiene su concepto de configuraciones equivalentes. Para un geómetra euclideano no es bueno el concepto de equivalencia topológica. Para él, una rosquilla y una taza de café son configuraciones completamente diferentes. En geometría euclideana se dice que dos configuraciones son equivalente si son congruentes, o sea, si existe un movimiento rígido que lleve una sobre la otra. Sabemos que una congruencia en $\mathbb{R}^3$ está definida por una isometría de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo, luego a una geómetra le interesan, más que las propiedades topológicas de los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ aquellas que son específicamente métricas.

Las propiedades de los espacios topológicos que pueden definirse por medio de los abiertos son invariantes con respecto a homeomorfismos. Si se cumplen para un espacio topológico, se cumplen para todos los espcios homeomorfos. Tales propiedades que pueden considerarse como propiedades de las clases de espacios topológicamente equivalentes, se llaman *propiedades topológicas.* Por ejemplo, la propiedad de tener una base numerable es una propiedad topológica: si el

espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ tiene una base numerable β y si f es un homeomorfo de $(X, \mathcal{X})$ sobre otro espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$, entonces $\{f(B) \mid B \in \beta\}$ es una base numerable de $\mathcal{Y}$.

Las propiedades topológicas de los objetos matemáticas forman el tema de la topolgía general.

Algunos autores dan la siguiente definición breve y abstracta de la topolgía como disciplina matemática: ≪La tarea de la topología es la investigación de la categoría de los espacios topológicos≫. Esto nos parece una buena definición del objeto general de la topolgía. Pero el objeto general no determina la tarea de una disciplina. Segun nuestra opinion, la categoría de los espacios topológicos no tienen un interés en sí mismo, es decir, los topólogos no deben encerrarse con esta categoría para investigarla con un interés estructuralista.

Los espacios topológicos son una abstración artificial por la cual se aisla un aspecto fundamental de las estructuras concretas de la realidad, para hacer una teoría coherente y eficiente de este aspecto y producir conocimientos instrumentales para el análisis concreto. En la aplicación (que es la única justificación final para el desarrollo de tal teoría abstracta), los razonamientos topológicos vuelven a combinarse con razonamientos algebraicos estadísticos, etc., para adaptarse a la estructura compleja de los problemas reales (tecnológicos, económicos, etc.). Luego es necesaria una vinculación estrecha entre la topología general y las demás disciplinas matemáticas.

El objetos de los siguientes capítulos no es presentar una teoría autosuficiente de la categoría de los espacios topológicos, sino dar una exposición de los conceptos y resultados básicos que se utilizan en el análisis funcional y otras ramas matemáticas cercanas a la aplicación.

CAPÍTULO 3 Vecindades y filtros

Supongamos que tenemos un conjunto dado X. Hasta ahora la expresión *generar una topología sobre* significa para nosotros determinar una base o una subbase de una topología. El primer objetivo de este capítulo será estudiar un nuevo método de generar una topología, que ya hemos utilizado para espacios métricos en el capítulo 1: el método de definir los conjuntos abiertos partiendo de las *vecindades* de los puntos en X.

La noción de vecindad es fundamental para el estudio de la continuidad puntual y de la convergencia en espacios topológicos. En la sección 2 veremos que en un espacio topológico general no es suficiente considerar la convergencia de sucesiones para caracterizar las funciones continuas en un punto, como sucedía en los espacios métricos.

Es por esto que introducimos, en la sección 3, las redes como generalización natural de las sucesiones. Un concepto equivalente, pero que presenta ciertas ventajas técnicas es el de filtro. Exponemos este concepto en la sección 4 junto con algunos ejemplos importantes.

En la sección siguiente desarrollaremos la teoría de filtros para tener a nuestra disposición un aparato técnico, que permita un tratamiento formal y eficiente de problemas de convergencia en espacios topológicos generales. Sin embargo, gran parte de los resultados aquí expuestos no tienen una aplicación directa en la teoría desarrollada en los capítulos posteriores. Debido a esto, no es necesario en una primera lectura estudiar todos los tópicos de esta sección, sino solamente los relacionados con límites y puntos adherentes de filtros, límite funcional, caracterizaciones de la continuidad con filtros, filtros en AN 1 espacios y el teorema de existencia de ultrafiltros.

3.1 Vecindades

3.1.1 *Definición (vecindad de un punto y de un subconjunto)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $x \in X$. Un subconjunto $V \subset X$ se llama **vecindad** de x, si existe un abierto $U \in \mathcal{X}$ con

$$x \in U \subset V \tag{1}$$

Más generalmente, un subconjunto $V \subset X$ es vecindad de un subconjunto $A \subset X$, si contiene a un abierto $U \in \mathcal{X}$ que a su vez contiene a A.

Nota: Convendremos en denotar por $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$ al sistema de todas las vecindades del punto x con respecto a la topología $\mathcal{X}$ y cuando no haya lugar a dudas sobre la topología $\mathcal{X}$, a la cual nos referimos, pondremos sencillamente $\mathcal{V}(x)$.

3.1.2 *Ejemplo*

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $V \subset X$ es vecindad de $x \in X$ en (X, d) si y sólo si lo es en el espacio topológico asociado $(X, \mathcal{X}_d)$, por (1.6.16).

3.1.3 *Ejemplo*

En $\mathbb{R}$ el conjunto $(0, 1) \cup \mathbb{Q}$ es vecindad de todo subconjunto $A \subset (0, 1)$.

3.1.4 *Ejemplo*

En un espacio indiscreto $(X, \mathcal{X})$ la única vecindad de un punto $x \in X$ es todo el espacio X.

3.1.5 *Ejemplo*

En un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ un conjunto $V \subset X$ es vecindad de cada uno de sus subconjuntos.

Pregunta: Supongamos que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ no contiene abiertos unitarios. ¿Pueden existir conjuntos en X que sean vecindades de un punto solamente?

Está claro que $V \subset X$ es vecindad de un conjunto A en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ si y sólo si es vecindad de cada punto $x \in A$:

$$V \in \mathcal{V}(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, \;\; V \in \mathcal{V}(x) \tag{2}$$

Al igual que en los espacios métricos podemos ahora caracterizar los abiertos de un espacio topológico a partir del concepto de vecindad.

3.1.6 *Proposición (caracterización de los abiertos por vecindades)*

En un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$, un subconjunto U de X es abierto si y sólo si es vecindad de cada uno de sus puntos, o sea, si $U \in \mathcal{V}(U)$.

Demostración: Si $U \in \mathcal{X}$, y $x \in U$, entonces, por definición, U es vecindad de x. Inversamente, sea U vecindad de cada uno de sus puntos. Entonces para cada $x \in U$ existe $U_x \in \mathcal{X}$ tal que $x \in U_x \subset U$. Concluimos, por $(A3)$, que $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. ■

Para que sea más intuitivo, conviene a veces utilizar las expresiones *suficientemente cerca o tan cerca como se quiera*, en enunciados que se refieren a vecindades. Por ejemplo, la proposición anterior puede ser expresada de la siguiente forma: Un conjunto U es abierto si y sólo si para cada $x \in U$ todos los puntos *suficientemente cerca* de x pertenecen a U. Más generalmente diremos que una propiedad se cumple para todo punto *suficientemente cerca* de x, si ocurre para todo punto de una vecindad de x.

La proposición anterior nos indica cómo podríamos reconocer qué subconjuntos de un espacio topológico son abiertos, si solamente conociéramos las vecindades de todos los puntos. Hemos utilizado ya este procedimiento en el caso de los espacios métricos (X, d). Por medio de las *bolas*, hemos introducido las *vecindades* y entonces hemos *definido los abiertos* de (X, d) como los subconjuntos de X, que son vecindades de cada uno de sus puntos.

En el caso de los espacios métricos se podían definir las bolas y, por ende, las vecindades, con la ayuda de una distancia; pero en un espacio topológico general no siempre tenemos una distancia a nuestra disposición.

Trataremos pues de hallar propiedades básicas que puedan servirnos como axiomas para la *introducción axiomática* de vecindades sobre un conjunto. En un *espacio con vecindades* definido de tal manera podremos introducir los 'abiertos' mediante la proposición 3.1.6 convertida en definición. Si seleccionamos convenientemente las propiedades básicas, será posible probar que estos *abiertos* forman una topología en el sentido de la definición 2.1.1 y que las vecindades en el espacio topológico correspondiente son precisamente las vecindades de partida.

Incluso tal procedimiento parece ser más natural. Si partimos de problemas de convergencia y de continuidad puntual, nuestro primer interés debía ser obtener una definición de lo que significa *suficientemente cerca de un punto o tan cerca de un punto como se quiera*, y esto nos conduce al concepto de *vecindad* antes que al concepto de *conjunto abierto*. De hecho, las matemáticas, históricamente, han seguido este camino. Antes de tener la definición más sencilla y económica de una *topología* (2.1.1) Hausdorff introdujo [71] en su *Teoría de conjuntos*, la noción de un espacio topológico general partiendo de una axiomatización del concepto de *vecindad*. Fue él quien seleccionó, dentro de una serie de axiomas enunciados por distintos matemáticos de su tiempo, los cuatro axiomas siguientes, que han resultado ser los más prácticos.

3.1.7 *Proposición (propiedades fundamentales de las vecindades)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, y sea $x \in X$. Entonces el sistema $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$ de vecindades de x posee las siguientes propiedades:

$(V1)$ $(U \in \mathcal{V}(x) \wedge U \subset V \subset X) \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$
$(V2)$ $U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$
$(V3)$ $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$
$(V4)$ Si $V \in \mathcal{V}(x)$ entonces existe un $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \in \mathcal{V}(y)$ para todo $y \in U$.

Demostración: Ejercicio. ■

Las propiedades $(V1) - (V3)$ las hemos visto en el capítulo 1. La propiedad $(V4)$ puede ser expresada diciendo que una vecindad de x es también vecindad de todos los puntos suficientemente cercanos a x (fig. 36).

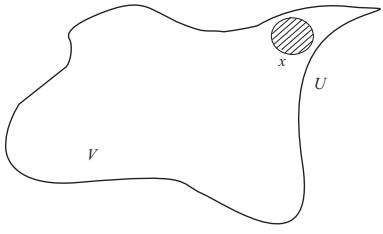


Figura 36

Estas propiedades, nos proporcionan un nuevo sistema de axiomas para los espacios topológicos.

3.1.8 *Teorema*

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{V} : x \mapsto \mathcal{V}(x)$ una aplicación de X en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ que asocia a cada $x \in X$ una colección no vacía de subconjuntos de X que cumplan $(V1) - (V4)$. Entonces existe una topología $\mathcal{X}$ única sobre X, tal que para todo $x \in X$ la colección $\mathcal{V}(x)$ es el sistema de vecindades de x en el espacio topológico $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Por la proposición 3.1.6, si existiera una topología $\mathcal{X}$ sobre X satisfaciendo la condición anterior, los abiertos para dicha topología serían precisamente los subconjuntos U de X, tales que $U \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in U$; de lo que se concluye la *unicidad* de esta topología en caso de que exista.

Existencia: Definiremos $\mathcal{X}$ precisamente como la colección de todos los subconjuntos U de X, tales que $U \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in U$. Debemos verificar que $\mathcal{X}$ cumple $(A1) - (A3)$.

$(A1)$ $\varnothing \in \mathcal{X}$ porque se tiene $\varnothing \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in \varnothing$

$X \in \mathcal{X}$ porque $X \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$, porque $\mathcal{V}(x) \neq \varnothing$ y por $(V1)$

$(A2)$ Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{X}$ y $x \in A := A_1 \cap A_2$ arbitrario. Como $A_i \in \mathcal{V}(x)$

$(i = 1, 2)$, por $(V2)$ se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$. Por lo tanto $A \in \mathcal{X}$.

$(A3)$ Sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{X}$. Si $x \in A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ existe $\alpha \in I$ tal que $x \in A_\alpha \subset A$ y por $(V1)$ se tiene que $A \in \mathcal{V}(x)$. Luego $A \in \mathcal{X}$.

Para terminar la demostración queda por probar que $\mathcal{V}(x)$ es el sistema de vecindades de x en $(X, \mathcal{X})$, o sea, que $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$ para todo $x \in X$.

Sea V una vecindad de x en $(X, \mathcal{X})$ tal que $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$. Entonces existe $U \in \mathcal{X}$ con $x \in U \subset V$. Como $U \in \mathcal{V}(x)$, concluimos que $V \in \mathcal{V}(x)$ $(V1)$. Luego $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Inversamente sea $V \in \mathcal{V}(x)$. Definamos:

$$U = \{y \in \mathcal{V} |\ V \in \ \mathcal{V}(y)\}$$

Entonces $x \in U \subset V$ por $(V3)$. Probaremos que $U \in \mathcal{X}$, con lo cual se tendrá que $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$.

Si $y \in U$, entonces $V \in \mathcal{V}(y)$ y por $(V4)$ existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $V \in \mathcal{V}(z)$ para todo $z \in W$. De la definición de U concluimos que $W \subset U$ y de $(V1)$, que $U \in \mathcal{V}(y)$.

Como y es arbitrario tenemos que U es vecindad de cada uno de sus puntos; entonces $U \in \mathcal{X}$.■

Nota: Cada una de las propiedades $(V1) - (V4)$ es indispensable para obtener como resultado la tesis del teorema anterior, como muestra la proposición 3.1.7.

Si estudiamos la topología de un espacio métrico, no comenzamos por las vecindades, sino por una colección de vecindades especiales: las bolas. Partiendo de las bolas de un centro dado x puede determinarse el sistema de todas las vecindades de x.

3.1.9 *Definición (sistema fundamental de vecindades)*

Dado $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $x \in X$. Una subcolección $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ se llama un **sistema fundamental** de vecindades de x si para toda vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $F \in \mathcal{F}(x)$ tal que $F \subset V$.

$\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x si y sólo si cumple:

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X |\ \exists F \in \mathcal{F}(x) \ \wedge \ F \subset V\} \tag{3}$$

3.1.10 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces para todo $x \in X$ la colección $\mathcal{V}(x)$ es el máximo sistema fundamental de vecindades de x. No existe en general un sistema fundamental de vecindades de x que sea *minimal*.

Si W es una vecindad cualquiera de x entonces

$$\mathcal{F}_W(x) := \{V \in \mathcal{V}(x) |\ V \subset W\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de x más pequeñas que W.

El lector verificará fácilmente que la colección de todas las vecindades abiertas de x

$$\overset{o}{\mathcal{V}}(x) := \{U \in \mathcal{V}(x) | U \in \mathcal{X}\} \tag{4}$$

también es un sistema fundamental de vecindades de x.

3.1.11 *Ejemplo*

En un espacio métrico (X, d) la colección de las bolas $B(x, 1/n)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ forma un sistema fundamental de vecindades de x $(x \in X)$.

3.1.12 *Ejemplo*

En el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ las dos familias siguientes forman sistemas fundamentales de vecindades de x:

– cubos centrados en x

– bolas de radio racional centradas en x.

Como nos muestra este ejemplo, un mismo punto puede tener varios sistemas fundamentales de vecindades sin que haya ninguna relación de inclusión entre los mismos.

Pregunta: En un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ cada punto posee un sistema fundamental de vecindades que es *minimal*. ¿Cuál es?

Existe una analogía entre los sistemas fundamentales de vecindades y las bases de una topología. Ambos son subcolecciones que permiten reconstruir la *colección total* de vecindades de x (resp. de abiertos de $(X, \mathcal{X})$). Más precisamente, tenemos la siguiente relación entre las bases y los sistemas fundamentales.

3.1.13 *Ejercicio*

Probar que una subcolección β de X es una base de $\mathcal{X}$ si y sólo si para todo $x \in X$ la colección

$$\beta(x) := \{B \in \beta | \ x \in B\} \tag{5}$$

forma un sistema fundamental de vecindades de x.

Para los sistemas fundamentales de vecindades podemos formular un axioma de numerabilidad análogo al axioma $AN2$.

3.1.14 *Definición (Primer axioma de numerabilidad)*

Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ **cumple el primer axioma de numerabilidad** o que $(X, \mathcal{X})$ es un AN 1 espacio, si cada punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de vecindades numerable.

Los espacios topológicos que cumplen esta condición tienen propiedades particulares, especialmente importantes para cuestiones de convergencia.

$(AN\ 2)$ implica $(AN\ 1)$. Pero el inverso no se cumple. Mientras que todos los espacios métricos son AN 1-espacios, no siempre satisfacen $(AN\ 2)$.

3.1.15 *Ejercicio*

Dar un ejemplo de un espacio topológico que cumpla $(AN\ 1)$ y que no satisfaga $(AN\ 2)$.

3.1.16 *Ejemplo (un espacio topológico que no es seudometrizable)*

Cada espacio seudométrico (X, d) es un AN 1-espacio, puesto que para todo $x \in X$ las bolas de centro x y de radio $1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ forman un sistema fundamental numerable de vecindades de x en $(X, \mathcal{X}_d)$. Si el espacio $(X, \mathcal{X})$ no satisface el $(AN\ 1)$ entonces no es seudometrizable.

Consideremos, por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$ provisto de la topología de los complementos finitos (2.1.7). Este espacio topológico no cumple AN 1. Para demostrarlo, consideremos una sucesión cualquiera de vecindades $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un punto $x \in \mathbb{R}$ con dicha topología. $\complement V_n$ es un conjunto finito para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un número real $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \complement(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement V_n)$ diferente de x. Pero $V := \mathbb{R} - \{y\}$ es una vecindad de x en este espacio topológico que no contiene a ningún V_n por lo tanto, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es un sistema fundamental de vecindades de x.

Concluimos que $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos no es seudometrizable.

§ 3.2 Convergencia de sucesiones y continuidad en un punto

En el capítulo 1 caracterizamos las sucesiones convergentes mediante vecindades, esta caracterización se generaliza inmediatamente a espacios topológicos cualesquiera.

3.2.1 *Definición (sucesión convergente)*

Decimos que una sucesión x_n es **convergente** al punto $x \in X$ en el espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ (y escribimos $x_n \underset{\mathcal{X}}{\twoheadrightarrow} x$ o sencillamente $x_n \twoheadrightarrow x$), si y sólo si para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x_n \in V \text{ para todo } n \geq k$$

El lector verificará, como en el caso de los espacios métricos, la equivalencia siguiente:

$$(x_n) \twoheadrightarrow x \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \{n \in \mathbb{N} |\ x_n \notin V\} \text{ es finito} \tag{6}$$

Nota: Está claro que podemos sustituir $\mathcal{V}(x)$ por un sistema fundamental de vecindades $\mathcal{F}(X)$ cualquiera de x, sin afectar la validez del enunciado (6).

3.2.2 *Ejemplo*

Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión de puntos distintos (x_n) en X converge a $x \in X$, si y sólo si cada bola $B(x, 1/n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, contiene a casi todos los términos x_n, (es decir, excepto a un número finito).

3.2.3 *Ejemplo*

En un espacio topológico indiscreto $(X, \mathcal{X})$ cualquier sucesión de puntos de X converge a todos los puntos de X.

3.2.4 *Ejemplo*

Una sucesión (x_n), en un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{X})$, converge a un punto x si y sólo si a partir de un cierto término todos los x_n son iguales a x.

3.2.5 *Ejemplo*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología de los *complementos numerables*

$$\mathcal{X} := \{A \subset \mathbb{R} \,|\, \complement A \text{ finito o numerable } \} \cup \{\varnothing\}. \tag{7}$$

Si $(x_n) \twoheadrightarrow x$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, entonces a partir de un cierto rango todos los x_n son iguales a x. Pues si el conjunto

$$D := \{n \in \mathbb{N} |\ x_n \neq x\}$$

fuera infinito, podríamos construir una vecindad V de x en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$

$$V := \mathbb{R} \backslash \{x_n \mid n \in D\} \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$$

para la cual $\{n \in \mathbb{N} | x_n \notin V\} = D$ sería infinito, en contradicción con (6).

Concluimos que en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ se cumple $(x_n) \twoheadrightarrow x$ precisamente si $x_n = x$ para casi todos los subíndices $n \in \mathbb{N}$. Comparando este resultado con el ejemplo anterior podemos ver que, *diferentes topologías sobre un mismo conjunto pueden determinar la misma clase de sucesiones convergentes.*

Pregunta: ¿Cómo pueden caracterizarse las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ provisto de la topología τ de los complementos finitos (2.1.7)? ¿Están determinados de manera única los límites en $(\mathbb{R}, \tau)$?

El ejemplo 3.2.3 nos muestra cómo, en general, en un espacio topológico cualquiera *no* es posible hablar de la unicidad del límite, como lo hacemos en el caso de las sucesiones en un espacio métrico. Hasta ahora no tenemos argumentos en los cuales nos podamos basar para decir que en determinados espacios topológicos el límite es único. Más adelante estudiaremos condiciones que nos servirán para asegurar la unicidad del límite en espacios topológicos, donde las sucesiones convergentes no tendrán que ser tan específicas como en el ejemplo 3.2.4, ni tan arbitrarias como en el ejemplo 3.2.3.

Por ahora nos contentaremos con escribir $\lim(x_n) = x$ cuando x sea el *único* límite de la sucesión (x_n).

Analicemos ahora la relación entre las sucesiones convergentes y las aplicaciones continuas en un punto $a \in X$ para espacios topológicos en general. Sabemos por el teorema 1.6.7 que en la teoría de los espacios métricos el concepto de continuidad puntual puede definirse en las dos formas equivalentes siguientes:

$$f : (X, d) \to (Y, d') \text{ se llama continua en } a \in X \text{ si :}$$

i) para toda vecindad W de $f(a)$ en Y existe una vecindad V de a en X tal que

$$f(V) \subset W; \tag{8}$$

ii) para toda sucesión (x_n) que converga a a en (X, d) se cumple que:

$$(f(x_n)) \twoheadrightarrow f(a) \; en \; (Y, d') \tag{9}$$

Estas dos caracterizaciones, generalizan las definiciones alternativas de la continuidad puntual dadas en análisis clásico para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aparentemente ambas pueden generalizarse directamente para espacios topológicos cualesquiera. Sin embargo, debemos tener en consideración que ya definimos las aplicaciones *globalmente* continuas entre espacios topológicos en general. Nuestra definición de la continuidad *puntual* tiene que ser compatible con esta definición (y además con la definición de convergencia puntual para espacios métricos). Veremos que sólo la generalización de i) cumple esta condición, lo cual es sorprendente.

Las sucesiones convergentes no caracterizan la topología de un espacio topológico completamente. Mientras que a diferentes topologías corresponden necesariamente diferentes clases de funciones continuas, diferentes topologías sí pueden determinar el mismo conjunto de sucesiones convergentes. Así que no podemos esperar que las funciones continuas entre espacios topológicos generales, puedan caracterizarse por sucesiones.

3.2.6 *Definición. (función continua en un punto)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es **continua en** $a \in X$ si para toda vecindad W de $f(a)$ existe una vecindad $\mathcal{V}$ de a tal que $f[V] \subset W$.

Equivalentemente:

$$\begin{gathered} f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D}) \text{ es continua en} \\ a \in X \iff \forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}(f(a)) \; (f^{-1}[V] \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(a)) \end{gathered} \tag{10}$$

Es fácil comprobar que la *continuidad por vecindades* i), implica la continuidad por sucesiones ii).

3.2.7 *Ejercicio*

Probar que si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D})$ es continua en $a \in X$. Entonces para toda sucesión (x_n) convergente a a en $(X, \mathcal{X})$, se cumple que $(f(x_n)) \twoheadrightarrow f(a)$ en $(Y, \mathcal{D})$.

La siguiente proposición muestra la relación existente entre la definición anterior y la definición de continuidad global dada en el capítulo 2.

3.2.8 *Proposición*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{D})$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es continua (globalmente) si y sólo si es continua en cada punto $x \in X$.

Demostración. La condición es necesaria por (10).

Si W es una vecindad de $f(x)$, entonces W contiene un abierto U tal que $f(x) \in U$. Por la definición 2.4.14, $f^{-1}[U]$ es abierto en X y $x \in f^{-1}[U] \subset f^{-1}[W]$ entonces $f^{-1}[W] \in \mathcal{V}(x)$.

Recíprocamente, supongamos que f es continua en todos los puntos de X. Si $U \in \mathcal{D}$ y $x \in f^{-1}(U)$, entonces $f(x) \in U \in \mathcal{V}(f(x))$ y por tanto $f^{-1}[U] \in \mathcal{V}(x)$. Dado que $x \in f^{-1}(U)$ es arbitrario, se concluye que $f^{-1}(U) \in \mathcal{X}$. ■

En general no hubiéramos podido llegar a un resultado tan armonioso como el de la proposición anterior, si hubiéramos tomado la proposición ii) en vez de i) como base de la definición de la continuidad puntual.

El siguiente ejemplo nos muestra el caso de una función entre dos espacios topológicos que no es continua en ningún punto y que, sin embargo, transforma toda sucesión convergente del dominio en una sucesión convergente del codominio.

3.2.9 *Ejemplo*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología usual r y la topología de los complementos numerables $\mathcal{X}$, definida en el ejemplo 3.2.5. La aplicación identidad

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to (\mathbb{R}, r)$$

no es continua en ningún punto $a \in \mathbb{R}$, puesto que la imagen inversa de la vecindad $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \in \mathcal{V}_r(1_{\mathbb{R}}(a))$ con $\varepsilon > 0$), bajo $1_{\mathbb{R}}$ no es vecindad de a en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Por otra parte está claro que, si $(x_n) \twoheadrightarrow a$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x_n) = x_n \twoheadrightarrow a$ en $(\mathbb{R}, r)$; pues, por el ejemplo 3.2.5, para tal sucesión se tiene que $x_n = a$ para casi todos los subíndices $n \in \mathbb{N}$.

3.2.10 *Ejercicio*

Dar un ejemplo de dos topologías diferentes sobre $\mathbb{R}$ que determinan ambas el mismo conjunto de sucesiones convergentes.

3.2.11 *Ejercicio*

Sean d y d' dos métricas sobre un conjunto X, que determinan sobre X, el

mismo conjunto de sucesiones convergentes. Probar que d y d' son topológicamente equivalentes.

Pregunta: ¿Qué paso de la demostración del teorema 1.6.7 no puede generalizarse a espacios topológicos cualesquiera? ¿Por qué?

El lector que ha analizado esta demostración ciertamente ha descubierto el papel clave del primer axioma de numerabilidad para nuestro problema. Más precisamente:

3.2.12 *Proposición*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios topológicos y sea $a \in X$ un punto que tiene en $(X, \mathcal{X})$ un sistema fundamental de vecindades numerables. Entonces son equivalentes:

i) f es continua en a

ii) Para toda sucesión (x_n) convergente a a en $(X, \mathcal{X})$ se cumple $f(x_n) \twoheadrightarrow f(a)$

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) por el ejercicio 3.2.7. Para probar la implicación inversa demostraremos que (no i) $\Rightarrow$ (no ii).

Si f no es continua en a es porque existe una vecindad W de $f(a)$ en Y que no contiene completamente a la imagen por f de ninguna vecindad de a. Sustituyendo eventualmente V_n por $V_1 \cap ... \cap V_n$ $(n \in \mathbb{N})$, podemos suponer que (V_n) es decreciente, o sea, $V_n \supset V_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $f[V_n] \nsubseteq W$ para estas vecindades, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $x_n \in V_n$ tal que $f(x_n) \notin W$. La sucesión (x_n) así construida converge a a. Sin embargo la sucesión imagen $(f(x_n))$ no converge a $f(a)$. ■

3.2.13 *Corolario*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{D})$ dos espacios topológicos, donde $(X, \mathcal{X})$ es un $AN1$-espacio. Entonces para toda aplicación $f : X \to Y$ son equivalentes:

i) f es continua.

ii) Para cada $x \in X$ y para toda sucesión (x_n) convergente a x se tiene que $f(x_n) \twoheadrightarrow f(x)$.

Demostración: Es inmediata de las dos proposiciones anteriores. ■

§ 3.3 **Redes**

Si en la demostración de la proposición 3.2.12 el punto $a \in X$ no tuviera un sistema fundamental de vecindades numerable, el no ser f continua en a nos permitiría también encontrar una vecindad $W \in \mathcal{V}(f(a))$ tal que la imagen $f[\mathcal{V}]$ de toda vecindad de a no estaría incluida completamente en W. Entonces, por el axioma de elección podríamos asociar a todo $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(a)$ un punto $x_v \in \mathcal{V}$ con $f(x_v) \notin W$. La diferencia esencial es que la familia $(x_v)_{v \in \mathcal{V}(a)}$, ahora no es necesariamente numerable. Su existencia no es contradictoria con que f cumpliera la propiedad ii), ya que la familia $(x_v)_{v \in \mathcal{V}(a)}$ no es una sucesión y no hay nada que asegure que se puede extraer una sucesión de dicha familia que converja a x.

La primer idea para remediar esta infeliz situación, fue precisamente la de extender el concepto de sucesión convergente a familias no numerables.

Los primeros estudios con vista a obtener una teoría de convergencia, en espacios topológicos generales, que mantuviera una cierta uniformidad con la teoría desarrollada en los espacios métricos sobre la base de las sucesiones, fueron hechas por E. H. MOORE y más tarde por SMITH [114]. Los objetos *creados* por ellos, que fueron precisamente estas *sucesiones* no numerables, son llamados *redes* o sucesiones de Moore-Smith.

Parece natural definir la convergencia de tal familia a un punto x de manera análoga a como lo definimos para sucesiones, es decir: La familia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a x si y sólo si para toda vecindad $\mathcal{V}$ de x se tiene que a *partir de un cierto* α, todos los x_α están contenidos en $\mathcal{V}$.

Pero esta definición en realidad no tiene sentido, a menos que se precise el término a partir de cierta α. Este término exige la presencia de un cierto orden en el conjunto de índices I. En el caso de las sucesiones, el conjunto de índices es precisamente el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$, en el cual la expresión 'a partir de un cierto n' tiene sentido, ya que $\mathbb{N}$ es un conjunto totalmente ordenado. En realidad veremos que basta con que el conjunto I sea dirigido, lo cual cumple todo conjunto totalmente ordenado.

También, toda retícula (p. ej., $\mathbb{R}^n$) es un conjunto dirigido. El siguiente ejemplo nos muestra una clase de conjuntos dirigidos que, en general, no son retículas.

3.3.1 *Ejemplo*

Sea $\mathcal{F}(a)$ un sistema fundamental de vecindades de un punto a en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. La inclusión $\subset$ define una relación de orden entre los elementos de $\mathcal{F}(a)$. Esta relación de orden es filtrante (ver apéndice A.10.2), puesto que para U, $\mathcal{V} \in \mathcal{F}(a)$, cualesquiera existe $W \in \mathcal{F}(a)$ tal que $W \subset U \cap V$ (3.1.9). Luego $(\mathcal{F}(a), \subset)$ es un conjunto dirigido.

3.3.2 *Ejemplo*

En la construcción de la integral de Riemann sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se utilizan *particiones*. Una familia finita $(x_1, ..., x_n)$ de números reales ($n \in \mathbb{N}$) se llama partición de $[a, b]$, si

$$a = x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Si $P[a,b]$ es la colección de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, entonces es fácil ver que $(P[a,b], \subset)$ es un conjunto dirigido (incluso es una retícula).

Utilizando en vez de $\mathbb{N}$ un conjunto dirigido cualquiera como conjunto de índices podemos definir la generalización buscada del concepto de *sucesión*. Para eso hay que recordar que una sucesión en X se define como una aplicación de $\mathbb{N}$ en el conjunto X.

3.3.3 *Definición (red)*

Una **red** en un conjunto X es una aplicación $\varphi : \alpha \mapsto x_\alpha$ de un conjunto dirigido $(I, \leq)$ en X. Comúnmente φ se denota por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Puesto que en un conjunto dirigido $(I, \leq)$, la expresión 'a partir de un elemento $\alpha \in I$' tiene un sentido evidente, la noción de *sucesión convergente* puede generalizarse análogamente a redes cualesquiera en un espacio topológico general.

3.3.4 *Definición (red convergente)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en X. Entonces se dice que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a $x \in X$, si para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $\alpha_V \in I$ tal que:

$$x_\alpha \in V \quad \text{para todo } \alpha \in I \quad \text{con} \quad \alpha_V \leq \alpha \tag{11}$$

(Usamos la misma notación que para una sucesión convergente $(x_\alpha \twoheadrightarrow x)$).

3.3.5 *Ejemplo*

Sea $\mathcal{F}(x)$ un sistema fundamental de vecindades de un punto a en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Sabemos por (3.3.1) que $(\mathcal{F}(x), \subset)$ es un conjunto dirigido. Si tenemos asociado a cada vecindad $V \in \mathcal{F}(x)$ un punto $x_V \in V$, la familia $(x_V)_{V \in \mathcal{F}(x)}$ es una red en $(X, \mathcal{X})$ que converge a a.

Recordemos que: si $f : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (Y, \mathcal{D})$ no es continua en $a \in X$, entonces existe una vecindad W de $f(a)$ en $(Y, \mathcal{D})$ y una red $(x_V)_{V \in \mathcal{V}(a)}$ tal que:

$$x_V \in V \text{ y } f(x_V) \notin W \text{ para todo } V \in \mathcal{V}(a) \tag{12}$$

Por tanto, la red $(f(x_V))$ no converge a $f(a)$ en $(Y, \mathcal{D})$, mientras que la red (x_V) sí converge al punto a en $(X, \mathcal{X})$ (ejemplo anterior). Entonces, si sustituimos en el segundo criterio clásico de continuidad puntual (9) las *sucesiones* por *redes*, el criterio será válido en espacios topológicos cualesquiera.

3.3.6 *Proposición (criterio de continuidad puntual por redes)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios topológicos y sea $a \in X$. Entonces son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) Para cada red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ en X que converge al punto a, se tiene que $(f(x_\alpha))$ converge a $f(a)$.

Si dada una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ llamamos **sección final determinada por** α al conjunto

$$S_\alpha := \{x_\beta \,|\, \alpha \leq \beta\} \tag{13}$$

entonces la definición de convergencia para una red se puede expresar de forma equivalente de la siguiente manera:

$$x_\alpha \twoheadrightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists \alpha \in I \quad \text{tal que} \quad S_\alpha \subset V \tag{14}$$

Esta reformulación de la definición de convergencia de una red prueba que la convergencia de la misma no está determinada por el conjunto de sus términos $\{x_\alpha | \alpha \in I\} \subset X$, sino por el comportamiento de la colección de las secciones finales $\mathrm{S}(x_\alpha) := \{S_\alpha | \alpha \in I\}$.

El hecho de que I sea un conjunto dirigido bajo la relación $\leq$ se traduce en las dos propiedades siguientes:

$$S \in \mathrm{S}(x_\alpha) \Longrightarrow S \neq \varnothing \quad (\leq \ \text{ es reflexiva}) \tag{15}$$

$$S', S'' \in \mathrm{S}(x_\alpha) \longrightarrow \exists\, S \in \mathrm{S}(x_\alpha) \quad (S \subset S' \cap S'') \tag{16}$$

($\leq$ es transitiva y filtrante).

La colección $\mathrm{S}(x_\alpha)$ nos permite enunciar un criterio de convergencia para la red (x_α), que no usa subíndices explícitamente:

$$x_\alpha \twoheadrightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists S \in \mathrm{S}(x_\alpha) \quad \text{tal que} \quad S \subset \mathcal{V} \tag{17}$$

Para evitar completamente la utilización de índices y simplificar el lenguaje parece natural desarrollar un concepto de convergencia para colecciones de *conjuntos* que tienen las propiedades de $\mathrm{S}(x_\alpha)$. Tales colecciones de conjuntos se llaman *bases de filtros*. A continuación desarrollaremos la teoría de convergencia mediante este nuevo concepto, que sustituye el concepto más atractivo de una red por uno más práctico.

§ 3.4 **Filtros y bases de filtros**

Fue HENRI CARTAN [43] quien en el año 1937 introdujo el concepto de filtro para tratar la convergencia en espacios topológicos cualesquiera. Un filtro es sencillamente una ampliación de una base de filtro que se obtiene añadiendo a los elementos de la base, que son conjuntos, todos los superconjuntos de éstos en el espacio dado X. Aunque las bases de filtro son perfectamente suficientes para

desarrollar la teoría, emplearemos también el concepto de *filtro*, pues facilita un tratamiento más elegante de la teoría.

3.4.1 *Definición (filtro)*

Un **filtro** $\mathcal{F}$ en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} (F1) & \mathcal{F} \neq \varnothing \ \text{ y } \ \varnothing \notin \mathcal{F} \\ (F2) & F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F} \\ (F3) & F \in \mathcal{F} \ y \ F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F} \end{array}$$

Como para las redes, hay que notar que *filtro* se define sobre un conjunto cualquiera, sin tener que definir de antemano una estructura topológica sobre él mismo. Antes de estudiar algunos ejemplos de filtros analizaremos la relación entre los filtros y las bases de filtro.

3.4.2 *Proposición*

Sea $\mathcal{L}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Entonces la familia $[\mathcal{L}] \subset \mathcal{V}(X)$ formada por los superconjuntos de elementos de $\mathcal{L}$ es un filtro si y sólo si $\mathcal{L}$ tiene las dos propiedades siguientes:

(B 1) La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{L}$ contiene un conjunto de $\mathcal{L}$.

(B 2) $\mathcal{L}$ no es vacío y el subconjunto vacío de X no está en $\mathcal{L}$.

Demostración: Supongamos que $[\mathcal{L}]$ es un filtro. Si $A, B \in \mathcal{L}$, entonces $A \cap B \in [\mathcal{L}]$ y por tanto $A \cap B$ contiene algún elemento de $\mathcal{L}$. Además en este caso se cumple evidentemente (B 2).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{L}$ cumpla (B 1) y (B 2).

De (B 2) tenemos (F 1) para $[\mathcal{L}]$. Por otra parte, si F,$G \in [\mathcal{L}]$ existen $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $A \subset F, B \subset G$ y por (B 1) existe $C \in \mathcal{L}$ tal que $C \subset A \cap B \subset F \cap G$; de donde $F \cap G \in [\mathcal{L}]$. Entonces se tiene (F 2) para $[\mathcal{L}]$. Finalmente si $F \subset G$ y $F \in [\mathcal{L}]$ existe $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \subset F$ y como $A \subset G$ se tiene que $G \in [\mathcal{L}]$; de lo que concluimos (F 3). ■

3.4.3 *Definición (base de filtro)*

Una colección $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de un conjunto X se llaman **base de filtro**, si satisface los axiomas (B 1) y (B 2). En este caso se dice también que $\mathcal{L}$ es base del filtro

$$[\mathcal{L}] := \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, \exists B \in \mathcal{L} \ \ (B \subset A)\} \tag{18}$$

Dos bases de filtro $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ sobre X son **equivalentes**, si son bases del mismo filtro: $[\mathcal{L}] = [\mathcal{L}']$. Los ejemplos siguientes muestran que en la práctica los filtros se definen muchas veces a partir de bases de filtro.

3.4.4 *Ejemplo (filtros principales)*

Sea X un conjunto no vacío y $A \subset X$. Entonces

$$[\{A\}] := \{M \in \mathcal{P}(X) \,|\, A \subset M\}$$

es un filtro en X, con base de filtro la colección que consiste de un sólo elemento A. [{A}] se llama **filtro principal** definido por A.

3.4.5 *Ejemplo (filtro de vecindades)*

En un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ las colecciones $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$ representan una clase particularmente importante de filtros. Generalmente, si $A \subset X$ no es vacío, $\mathcal{V}(A)$ es un filtro en X llamado **filtro de vecindades** del conjunto A en $(X, \mathcal{X})$. Por la definición 3.1.9, todo sistema fundamental $\mathcal{F}(x)$ de vecindades de $x \in X$ es una base del filtro $\mathcal{V}(x)$.

3.4.6 *Ejemplo (filtro de los complementos finitos)*

Si X es un conjunto infinito, la colección formada por todos los subconjuntos de X que tienen complemento finito en X es un filtro sobre X llamado **filtro de los complementos finitos**.

3.4.7 *Ejemplo (filtro de Fréchet)*

Las secciones finales del conjunto dirigido $(I, \prec)$,

$$S_\alpha = \{\beta | \alpha \prec \beta\}; \alpha \in I,$$

forman la base de un filtro sobre I llamado **filtro de secciones del conjunto dirigido** $(I, \prec)$.

En particular si $(I, \prec)$ es el conjunto dirigido $(\mathbb{N}, \leq)$ lo llamaremos *filtro de Fréchet* en $\mathbb{N}$. Este filtro, que juega un papel central en la teoría de convergencia de los $AN1$-espacios, es precisamente el filtro de los complementos finitos de $\mathbb{N}$.

3.4.8 *Ejemplo (filtro de secciones asociado a una red)*

La colección de todas las secciones finales

$$\mathrm{S}(x_\alpha), \;\; ((x_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ red}),$$

forma una base de filtro. El filtro asociado se llama *filtro de secciones de la red* $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. En particular, a toda sucesión (x_n) se le asocia canónicamente un filtro generado por la base:

$$S_n = \{x_k \mid k \geq n\} \;\; (n \in \mathbb{N})$$

Este filtro se llama **filtro elemental asociado a la sucesión** (x_n).

3.4.9 *Ejercicio*

Probar que si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X, entonces

$$\mathcal{X} := \mathcal{F} \cup \{\varnothing\} \tag{19}$$

es una topología sobre X. ¿Cuáles son los filtros de vecindades de $x \in X$ con respecto a esta topología? Dar un ejemplo de que no toda topología se obtiene de tal manera a partir de un filtro. (Sobre un conjunto X hay por lo general más topologías que filtros.)

Encontramos los filtros analizando la convergencia de redes. El ejemplo 3.4.8 nos ha mostrado que a cada red se asocia un filtro de secciones. Veremos ahora que todo filtro puede representarse como un filtro de secciones de una red apropiada.

3.4.10 *Ejercicio*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X e I el conjunto de todos los pares (a, F) con $a \in F \in \mathcal{F}$. Probar que I, preordenado por la relación definida de la siguiente manera:

$$(a, F) \prec (b, G) \Longleftrightarrow G \subset F$$

es un conjunto dirigido, y que el filtro de secciones de la red $\varphi : I \to X$, definida por:

$$\varphi((a, F)) = a \quad ((a, F) \in I)$$

es el filtro $\mathcal{F}$.

3.4.11 *Ejercicio*

Probar que un subconjunto $\mathcal{L}$ de un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es una base de $\mathcal{F}$ si y sólo si todo conjunto de $\mathcal{F}$ contiene un conjunto de $\mathcal{L}$.

3.4.12 *Ejercicio*

La **traza** $\mathcal{F}_A$ del filtro $\mathcal{F}$ sobre $A \subset X$ definida mediante

$$\mathcal{F}_A := \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$$

es un filtro si y sólo si cada conjunto de $\mathcal{F}$ intersecta al conjunto A.

§ 3.5 Comparación de Filtros. Ultrafiltros

En la sección 3.3 concluimos que una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ converge a un punto $a \in X$, si para toda vecindad $V \in \mathcal{V}(a)$ existe una sección final $S \in \mathrm{S}(x_\alpha)$ con $V \supset S$ (17). Esto significa precisamente que el filtro de secciones de la red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ contiene al filtro de vecindades $\mathcal{V}(x)$. Resulta

que la inclusión es una relación fundamental para las cuestiones de convergencia. Estudiaremos en esta sección la relación de inclusión entre los filtros en general y aplicaremos, más adelante, los resultados a los problemas de convergencia.

3.5.1 *Definición (filtros comparables)*

Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre un mismo conjunto X se dice que $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$ o que $\mathcal{F}$ es más grueso que $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Dos filtros se dicen comparables si uno es más fino que el otro.

En general, dos filtros cualesquiera sobre un mismo conjunto no tienen por qué ser comparables; basta considerar sobre la recta real los filtros de vecindades para dos puntos distintos.

Seria útil tener un criterio para verificar directamente si una base de filtro *genera* un filtro más fino, que otra base de filtro sobre el mismo conjunto.

3.5.2 *Proposición*

En un conjunto X, un filtro $\mathcal{F}'$ con base $\mathcal{L}'$ es más fino que un filtro $\mathcal{F}$ con base $\mathcal{L}$ si y sólo si todo conjunto de $\mathcal{L}$ contiene un conjunto de $\mathcal{L}'$:

$$[\mathcal{L}] \subset [\mathcal{L}'] \Longleftrightarrow \forall\, B \in \mathcal{L} \quad \exists B' \in \mathcal{L}' \text{ tal que } (B' \subset B) \tag{20}$$

Demostración: La condición es necesaria (3.4.3) por ser $\mathcal{L}$ parte de $\mathcal{F}'$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Reciprocamente, si para todo $B \in \mathcal{L}$ existe $B' \in \mathcal{L}'$ tal que $B' \subset B$, por (F3) se tiene que $B \in \mathcal{F}'$; pero por ser $\mathcal{L}$ base de $\mathcal{F}$ y aplicando de nuevo (F3) concluimos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.■

Nota: De acuerdo con esta proposición se dice que una base $\mathcal{L}'$ de un filtro $\mathcal{F}'$ es más fina que una base $\mathcal{L}$ del filtro $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}'$ es más fino (en simbolos: $\mathcal{L}' \vdash \mathcal{L}$). A diferencia de los filtros la relación '*más fina que*' define sólo una relación de preorden sobre el conjunto de todas las bases de filtro sobre un mismo conjunto. En efecto, de $\mathcal{L}' \vdash \mathcal{L}$ y $\mathcal{L} \vdash \mathcal{L}'$ no se desprende que ambas bases de filtro sean iguales, sino solamente que son equivalentes.

3.5.3 *Corolario*

Dos bases de filtro $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ sobre un conjunto X son equivalentes si y sólo si todo conjunto de $\mathcal{L}$, contiene un conjunto de $\mathcal{L}'$ y todo conjunto de $\mathcal{L}'$ contiene un conjunto de $\mathcal{L}$.

3.5.4 *Ejemplo*

Sean A, B subconjuntos no vacíos de un subconjunto X. Entonces la base de filtro $\{A\}$ es más fina que la base de filtro $\{B\}$ si y sólo si $A \subset B$. El filtro más grueso sobre X es el filtro $\{X\}$, siendo $X \neq \varnothing$. Si $x \in X$, no existe un filtro estrictamente más fino que el filtro principal $[\{x\}]$. Dos filtros principales $[\{x\}]$ y $[\{y\}]$ con $x \neq y$ no son comparables.

3.5.5 *Ejemplo (subsucesiones)*

Dada una sucesión x_n en un conjunto X y una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n), las secciones finales correspondientes satisfacen:

$$S_k(x_n) = \{x_i \mid k \leq i\} \supset \{x_{\varphi(n)} \mid k \leq \varphi(n)\} = S_k(x_{\varphi(n)})$$

Por lo tanto el filtro de secciones de la subsucesión es más fino que el filtro de secciones de la sucesión original. El inverso no se cumple. Es decir: si el filtro elemental definido por una sucesión es más grueso que el filtro elemental definido por otra sucesión, ésta no es necesariamente una subsucesión de la primera. Dejamos al lector la tarea de construir un ejemplo.

3.5.6 *Ejercicio*

Definir el concepto de subred de tal manera que pueda demostrarse el siguiente enunciado. Una red $(y_\alpha)_{\alpha\in K}$ es la subred de otra red $(x_\beta)_{\beta\in I}$ si y sólo si el filtro de secciones de la primera red, es más fino que el filtro de secciones de la segunda.

Nos dedicaremos ahora al estudio de la relación de orden '*más fino que*' (inclusión) sobre el conjunto de todos los filtros de un conjunto dado $X \neq \varnothing$, al cual denotaremos por $(\mathbb{F}_X, \subset)$.

La siguiente proposición, cuya demostración es fácil, muestra que toda familia de elementos del conjunto ordenado $(\mathbb{F}_X, \subset)$ posee un ínfimo en $(\mathbb{F}_X, \subset)$.

3.5.7 *Proposición*

Sea $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de filtros sobre un conjunto no vacío X, entonces $\mathcal{F} := \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro, a saber el filtro más fino de todos los que son más gruesos que cada uno de los $\mathcal{F}_\alpha$.

Demostración: Ejercicio. ■

Precisaremos ahora la relación existente entre filtros y sucesiones mediante la proposición siguiente, la cual nos mostrará, más adelante, que las sucesiones pueden sustituir a los filtros en la teoría de los $AN1$-espacios (cosa que ya nos sugería la proposición 3.2.12).

3.5.8 *Proposición*

Si un filtro $\mathcal{F}$ posee una base numerable, entonces es igual a la intersección de todos los filtros elementales más finos que él.

Demostración: Sea $\mathcal{F}'$ la intersección de todos los filtros elementales más finos que $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Supongamos por el absurdo que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$. Entonces existe $F' \in \mathcal{F}'$ tal que $F' \notin \mathcal{F}$. Esto implica que $F \nsubseteq F'$, o sea, $F - F' \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Sabemos que existe una base numerable $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_k | k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{F}$. Sustituyendo eventualmente B_k por $B_k' = B_1 \cap ... \cap B_k$ $(B_k \in \mathcal{V})$ podemos suponer que $B_k \supset B_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por el axioma de elección (A.8.4) existe una sucesión (x_k) con $x_k \in B_k - F'$. El filtro elemental asociado a esta sucesión es más fino que $\mathcal{F}$, puesto que

$$S_n(x_k) = \{x_k | k \geq n\} \subset B_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces todo elemento de $\mathcal{F}'$ pertenece al filtro elemental asociado a (x_k). Pero esto contradice el hecho de que cada sección final de dicho filtro elemental tiene una intersección vacía con $F' \in \mathcal{F}'$. Concluimos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.■

3.5.9 *Ejemplo*

$\rightsquigarrow$ Un filtro que sea más grueso que un filtro que posee una base numerable no posee necesariamente una base numerable; por ejemplo, si X es un conjunto infinito no numerable, entonces el filtro de los complementos finitos de X (3.4.6), no tiene una base numerable. Sin embargo, este filtro es más grueso que todo filtro elemental asociado a una sucesión infinita de elementos distintos de X.

3.5.10 *Ejercicio*

Si el filtro de secciones de una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es más fino que un filtro dado $\mathcal{F}$, decimos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ está **subordinada** a $\mathcal{F}$. Probar que todo filtro $\mathcal{F}$ es igual al ínfimo de todos los filtros de secciones de redes subordinadas a $\mathcal{F}$.

Después de esta aplicación del concepto de *ínfimo* en $(\mathbb{F}_X, \subset)$ a una familia particular de filtros regresamos ahora al estudio de la estructura de orden de $(\mathbb{F}_X, \subset)$. Mientras que toda familia de filtros sobre X posee un *ínfimo* (3.5.7), en general no posee un *supremo* en $(\mathbb{F}_X, \subset)$. En efecto, si por ejemplo $\mathcal{F} = [\{x\}]$, $\mathcal{F}' = [\{y\}]$ son dos filtros principales diferentes sobre un conjunto X, no existe una *cota superior* del conjunto $\{\mathcal{F}, \mathcal{F}'\}$ en $(\mathbb{F}_X, \subset)$, es decir, no existe ningún filtro $\mathcal{G}$ con $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$. Sin embargo, si una familia de filtros $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ sobre X posee una cota superior, entonces tiene siempre un supremo, a saber el ínfimo de todas las cotas superiores en $(F_X, \subset)$, que existe por la proposición 3.5.7. Evidentemente este supremo es el filtro más grueso sobre X que contiene al conjunto $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$. Más generalmente dada una subcolección $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ nos preguntamos cual es el filtro más grueso que contiene a $\mathcal{U}$.

3.5.11 *Definición (subbase de filtro, filtro generado)*

Una subcolección $\mathcal{U}$ de conjuntos de X se llama **subbase de filtro** si existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$. En este caso se dice que $\mathcal{U}$ **genera** al filtro más grueso $\mathcal{F}$ con $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ o que $\mathcal{U}$ es una **subbase del filtro** $\mathcal{F}$. Es claro que el filtro $\mathcal{F}$ generado por una subbase $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(X)$ es precisamente la intersección de todos los filtros que contienen a $\mathcal{U}$. El siguiente teorema nos suministra una caracterización práctica de las subbases de filtro, así como de los filtros generados por ellas.

3.5.12 *Teorema*

Una subcolección no vacía $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ es subbase de filtro si y sólo si ninguna intersección finita de conjuntos de $\mathcal{U}$ es vacía. En este caso el conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ de todas estas intersecciones finitas forma una base del filtro generado por $\mathcal{U}$.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ una subbase y $G_1 ... G_n$ elementos de $\mathcal{U}$ entonces la intersección $G_1 \cap ... \cap G_n$ es un elemento del filtro generado por $\mathcal{U}$, luego no puede ser vacía.

Inversamente, supongamos que $\varnothing \notin \mathcal{L}(\mathcal{U})$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ cumple las condiciones (B 1), (B 2) de la proposición 3.4.2, por lo tanto es una base de filtro. Puesto que todo filtro que contiene a $\mathcal{U}$ contiene necesariamente también a $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ por (F 2), $[\mathcal{L}(\mathcal{U})]$ es el filtro generado por $\mathcal{U}$. ■

3.5.13 *Corolario*

La colección $\mathfrak{R} \subset F_X$ tiene un supremo en $(\mathbb{F}_X, \subset)$ si y sólo si para todo número finito de filtros $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n \in \mathfrak{R}$ y para todo elemento $F_i \in \cap F_i$ $(i = 1, ..., n)$ se cumple

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$$

Demostración: Ejercicio. ■

Recordemos que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se llama **inductivamente ordenado** si todo subconjunto totalmente ordenado de $(X, \leq)$ posee una cota superior en $(X, \leq)$.

3.5.14 *Corolario*

El conjunto $(\mathbb{F}_X, \subset)$ es inductivamente ordenado.

Demostración: Si $\mathfrak{R}$ es un conjunto totalmente ordenado de filtros sobre X y si $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n \in \mathfrak{R}$, entonces uno de estos filtros, por ejemplo $\mathcal{F}_n$, es más fino que los demás. Entonces si $F_i \in \mathcal{F}_i$ $(i = 1, ..., n)$ se tiene que $F_i \in \mathcal{F}_n$ para $i = 1, ..., n$. Podemos concluir que

$$F := F_i \cap ... \cap F_n \neq \varnothing \text{ puesto que } F \in \mathcal{F}_n. \blacksquare$$

3.5.15 *Corolario*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X y $A \subset X$. Entonces son equivalentes:

i) Existe un filtro $\mathcal{F}'$ sobre X con $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $A \in \mathcal{F}'$.

ii) Para todo $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \cap F \neq \varnothing$.

Demostración: Basta considerar $\mathcal{U} := \mathcal{F} \cup \{A\}$ y aplicar 3.5.12 utilizando (F 2). ■

Nota: Si $A \cap F \neq \varnothing$ para todos los elementos F de un filtro $\mathcal{F}$ sobre X, entonces el filtro generado por la subbase $\mathcal{F} \cup \{A\}$ se llama **filtro obtenido por adjunción de** A a $\mathcal{F}$.

3.5.16 *Corolario*

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X y $A \subset X$, entonces puede adjuntarse A ó $\complement A$ a $\mathcal{F}$.

Demostración: Si $A \cap F = \varnothing$ para un $F \in \mathcal{F}$, entonces $\complement A \supset F$, luego $\complement A \cap F' \neq \varnothing$ para toda $F' \in \mathcal{F}$. ■

Hemos visto que $(\mathbb{F}_X, \subset)$ posee siempre un elemento *mínimo* (a saber, el filtro $\{X\}$), pero si X contiene al menos dos diferentes entonces $(\mathbb{F}_X, \subset)$ no posee un elemento *máximo*. Sin embargo sí tiene elementos *maximales*.

3.5.17 *Definición (ultrafiltros)*

Los elementos maximales del conjunto ordenado $(\mathbb{F}_X, \subset)$ se llaman *ultrafiltros* sobre X. O sea que, un filtro $\mathcal{U}$ sobre X es un ultrafiltro si no existe otro filtro sobre X estrictamente más fino que $\mathcal{U}$.

Por el lema de Zorn, en un conjunto inductivamente ordenado $(X, \leq)$ para todo $x \in X$ existe un elemento maximal z en X tal que $x \leq z$. Entonces el corolario 3.5.14 implica:

3.5.18 *Teorema (existencia de ultrafiltros)*

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X más fino que $\mathcal{F}$.

3.5.19 *Proposición*

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto X y sean $A, B \subset X$. Entonces:

$$A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U} \tag{20}$$

Demostración: Si la proposición fuera falsa, existirían subconjuntos A y B de X tales que $A \notin \mathcal{U}$, $B \notin \mathcal{U}$ y $A \cup B \in \mathcal{U}$. Sea

$$\mathcal{F} := \{M \subset X \mid A \cup M \in \mathcal{U}\}.$$

Se puede verificar que $\mathcal{F}$ es un filtro en X y además es estrictamente más fino que $\mathcal{U}$, ya que $B \in \mathcal{F}$; pero esto contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. ■

3.5.20 *Corolario (condición necesaria para ultrafiltros)*

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X y $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia finita de subconjuntos de X, entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, i \in \{1, ..., n\} \text{ tal que } A_i \in \mathcal{U} \tag{21}$$

En particular, si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ es una cubierta de X, entonces al menos uno de los A_i pertenece a $\mathcal{U}$.

Demostración: Se hace por inducción en n basándose en la proposición anterior. ■

La siguiente proposición muestra que en realidad los criterios (20) y (21) son también suficientes.

3.5.21 *Proposición (caracterización de ultrafiltros)*

Sea $\mathcal{U}$ una subbase de filtro sobre un conjunto X. Entonces son equivalentes:

i) Para todo subconjunto $A \subset X$ se tiene

$$A \in \mathcal{U} \vee \complement A \in \mathcal{U} \tag{22}$$

ii) $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X.

Demostración: ii) $\rightarrow$ i) es una consecuencia inmediata de la proposición 3.5.19.

i) $\rightarrow$ ii): Por lo supuesto, existe un filtro sobre X que contiene a $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro arbitrario sobre X con $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Si podemos probar que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U}$ es necesariamente un filtro y no existe ningún filtro más fino que $\mathcal{U}$, lo que implicaría ii). Si existiera $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \mathcal{U}$, entonces $\complement A \in \mathcal{U}$ por i) y como $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ se tendría $\complement A \in \mathcal{F}$, lo cual sería una contradicción. ■

3.5.22 *Corolario (ultrafiltro inducido)*

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X induce un filtro sobre un subconjunto A de X si y sólo si $A \in \mathcal{U}$. En este caso, la traza $\mathcal{U}_A$ es un ultrafiltro sobre A.

Demostración: Ejercicio ■

La proposición 3.5.21 nos da un criterio práctico para verificar si un filtro dado es un ultrafiltro.

3.5.23 *Ejemplo (ultrafiltros)*

Sea X un conjunto. Para todo $x \in X$ el filtro principal $[\{x\}]$ es un ultrafiltro sobre X, ya que para todo subconjunto $A \subset X$ se cumple que $x \in A$ ó $x \in \complement A$. Gracias al teorema 3.5.18 sabemos que existen otro tipo de ultrafiltros, pero es dificil definir explícitamente uno que sea distinto del tipo anterior. La proposición siguiente nos muestra que existen tantos ultrafiltros sobre un conjunto que todo filtro se obtiene como ínfimo de una familia apropiada de ultrafiltros.

3.5.24 *Proposición*

Todo filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es la intersección de todos los ultrafiltros más finos que $\mathcal{F}$; o sea:

$$\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{U} \,|\, \mathcal{U} \text{ ultrafiltro }, \ \mathcal{U} \supset \mathcal{F}\}$$

Demostración: Sea A un subconjunto de X que no pertenece a $\mathcal{F}$. Hay que probar que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ y $A \notin \mathcal{U}$. Ahora bien, A no contiene a ningún elemento de $\mathcal{F}$, o sea que $(\complement A) \cap F \neq \varnothing$ para toda $F \in \mathcal{F}$. Sabemos por el corolario 3.5.15 que existe un filtro $\mathcal{F}'$ más fino que $\mathcal{F}$ y que contiene a $(\complement A)$. Basta tomar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que contenga a $\mathcal{F}'$ (Teorema 3.5.18). ■

§ 3.6 **Límites y puntos adherentes de filtros**

Al inicio de la sección anterior, vimos cómo hay que definir la convergencia de un filtro, para que este concepto corresponda a la convergencia de sucesiones y más generalmente al de redes cualesquiera.

3.6.1 *Definición (filtro y base de filtro convergentes)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\mathcal{L}$ una base de $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$, (resp. $\mathcal{L}$) se llama **convergente a** $x \in X$ si $\mathcal{F}$ (resp. $[\mathcal{L}]$) es más fino que el filtro de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de x (notación: $\mathcal{F} \underset{\mathcal{X}}{\to} x$, resp. $\mathcal{L} \underset{\mathcal{X}}{\to} x$, omitimos el $\mathcal{X}$ si no hay confusión). Si existe un solo punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F} \longrightarrow x$, x se llama el **límite** de $\mathcal{F}$, (resp. de $\mathcal{L}$) y se denota por $\operatorname{lím} \mathcal{F}$ (resp. $\operatorname{lím} \mathcal{L}$).

Sabemos que una base de filtro $\mathcal{L}$ sobre X converge a $x \in X$, si y sólo si para un sistema fundamental $\mathcal{F}(x)$ de vecindades de x se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{F}(x) \ \exists B \in \mathcal{L} \text{ tal que } B \subset V \tag{23}$$

(Proposición 3.5.2).
Comparando este criterio con (17) vemos que el filtro asociado a una red es convergente si y sólo si la red es convergente, y que ambos convergen entonces a los mismos puntos. En particular, una sucesión converge a un punto x si y sólo si el filtro elemental asociado converge a x.

En análisis clásico se demuestra que toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite. La generalización de esta proposición para los filtros es trivial, (3.6.1).

$$\text{Si un filtro } \mathcal{F} \text{ sobre } X \text{ converge a } x \in X$$

$$\text{entonces todo filtro } \mathcal{F}' \text{ más fino que } \mathcal{F} \text{ también converge } a\ x \tag{24}$$

Pregunta: ¿Cuál es el filtro más grueso que converge a un punto x en $(X, \mathcal{X})$?

De la misma forma la convergencia se mantiene si sustituimos el filtro de vecindades $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}(x)$ por otro filtro de vecindades $\mathcal{V}_{\mathcal{X}'}(x)$ más grueso, lo cual es posible si se considera sobre X una topología más gruesa $\mathcal{X}'$ en lugar de $\mathcal{X}$. O sea:

$$\mathcal{X} \supset \mathcal{X}' \wedge \mathcal{F} \underset{\mathcal{X}}{\longrightarrow} x \Rightarrow \mathcal{F} \underset{\mathcal{X}'}{\longrightarrow} x \tag{25}$$

En otras palabras: mientras más fina sea la topología menos de sus filtros son convergentes. En particular, en la topología discreta los únicos filtros convergentes son los de vecindades, que coinciden en este caso con los filtros principales sobre X. Inversamente, sobre un espacio topológico indiscreto $(X, \{\varnothing, X\})$ cada filtro converge a todo punto $x \in X$, puesto que $\{X\}$ es el único filtro de vecindades en este espacio. Esto muestra que sin hipótesis adicionales no podemos esperar que un filtro *convergente* en un espacio topológico *cualquiera* tenga también un *límite* (determinado de manera única, según definición). Daremos ahora dos ejemplos para la aplicación del concepto de *filtro convergente* en el análisis.

3.6.2 *Ejemplo (familia sumable)*

Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Se dice que la serie asociada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ converge a $x \in \mathbb{R}$, si la sucesión de las sumas parciales $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)$ converge a x, o sea, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x - \sum_{i=1}^{n} x_i| < \varepsilon \text{ para } \quad \text{todo } n \geq N(\varepsilon) \tag{26}$$

En este caso decimos que la familia (x_n) es numerable.
Esta definición de *La suma* de una familia (x_n) tiene dos desventajas: primero, está restringida a *sucesiones*, segundo que depende del orden de los términos de la sucesión. Superaremos estas dos deficiencias introduciendo el concepto de *familia sumable* mediante un filtro.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia cualquiera de puntos en E. El conjunto $\mathcal{J}$ de los subconjuntos finitos de I es un conjunto dirigido por la inclusión $\subset$. A cada subconjunto finito $K \in \mathcal{J}$ le asociamos la *suma parcial*

$$S_K := \sum_{k \in K} x_k.$$

Decimos que la familia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es **sumable** y que $x \in E$ es la suma de E (en símbolos: $\sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha = x$) si el filtro de secciones asociado a la red $(S_K)_{K \in \mathcal{J}}$ (llamado *filtro de las sumas parciales*) converge a x. Esto significa que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ K_\varepsilon \in \mathcal{J}, K \in \mathcal{J}, \ K \supset K_\varepsilon \Rightarrow \| \sum_{k \in K} x_k - x \| < \varepsilon \tag{27}$$

Evidentemente, la suma de una familia sumable $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es independiente de una relación de orden sobre I. En particular, si (x_n) es una sucesión sumable de números reales, la suma $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ no depende del orden de sus términos.

Puede demostrarse que una familia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en un espacio normado $(E, \| \cdot \|)$ es sumable con suma $x \in E$, si y sólo si el conjunto de los términos $x_\alpha \neq 0$ es numerable y para todo ordenamiento de estos elementos $x_1, x_2, ...$ se cumple que $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$. Además, en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ una sucesión (x_n) es sumable si y sólo si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente. El ejercicio siguiente muestra que esta proposición no es válida en espacios normados cualesquiera.

3.6.3 *Ejercicio*

Constrúyase una sucesión sumable, pero no absolutamente sumable en el espacio vectorial de todas las sucesiones reales acotadas provisto de la norma

$$\|(x_n)\| := \sup\{|x_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\} \tag{28}$$

3.6.4 *Ejemplo (integral de Riemann)*

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Sea (P_n) una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que los diámetros de los subintervalos de P_n convergen a 0 (si $n \to \infty$). Si escogemos para cada subintervalo $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ de cada partición $P_n = (x_0^{(n)}, ..., x_{k(n)}^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$ un número real $\xi_i^{(n)}$, entonces la integral de una función *continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es precisamente el límite de la sucesión convergente (S_n) de las sumas

$$S_n := \sum_{i=1}^{k(n)} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

Sin embargo, este límite no existe necesariamente para funciones no continuas. No existe una caracterización *general* de la integral de Riemann por medio de una *sucesión*. En este caso se necesitan *filtros*. En efecto, sea $P[a, b]$ el conjunto dirigido de todas las particiones de $[a, b]$ (ejemplo 3.3.2). A toda partición $P = (x_0, ..., x_n) \in P[a, b]$ le asociamos el *conjunto* $S(P)$ de todas las sumas reales

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ con } \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i \ \ (i = 1, ..., n)$$

Evidentemente los conjuntos

$$B(P) := \cup\{S(Q) | Q \in P[a, b], Q \supset P\}$$

forman una base de filtro $\mathcal{L}_f$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Riemann, si y sólo si $\mathcal{L}_f$ es convergente y entonces se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \mathcal{L}_f.$$

Demostraremos algunos resultados generales sobre filtros convergentes.

3.6.5 *Proposición*

Sea $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de filtros sobre un espacio topológico $(X,\mathcal{X})$ y $\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$. Entonces se cumple para todo $x \in X$:

$$\mathcal{F} \longrightarrow x \Longleftrightarrow \forall\, \alpha \in I\ \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow x \tag{29}$$

Demostración: Trivialmente se cumple $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha \supset \mathcal{V}(x)$ si y sólo si $\mathcal{F}_\alpha \supset \mathcal{V}(x)$ para todo $\alpha \in I$. ■

Por la proposición 3.5.24 y el ejercicio 3.5.10 todo filtro $\mathcal{F}$ puede representarse como intersección de ultrafiltros y como intersección de los filtros de secciones asociados a redes subordinadas a $\mathcal{F}$. De aquí resultan los criterios siguientes:

3.6.6 *Corolario (criterios de convergencia)*

Un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto x en un espacio topológico $(X,\mathcal{X})$ si y sólo si cumple una de las condiciones equivalentes siguientes:

i) Todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que $\mathcal{F}$ converge a x.

ii) Toda red subordinada a $\mathcal{F}$ converge a x.

Obtendremos más resultados sobre filtros convergentes si generalizamos otro concepto fundamental del Análisis Clásico, relacionado con la convergencia.

Un número complejo z se llama **punto adherente** de una sucesión de números complejos (x_k) si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N};\ k \geq n \wedge |x_k - x| < \varepsilon \tag{30}$$

Esto significa que toda sección final $S_n(z_k)$ intersecta a todo disco de centro z y de radio arbitrario $\varepsilon > 0$, por lo tanto a todas las vecindades de z en $\mathbb{C}$. Resulta claro entonces cómo hay que generalizar este concepto para filtros cualesquiera.

3.6.7 *Definición (puntos adherentes de un filtro)*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio topológico $(X,\mathcal{X})$. Entonces $a \in X$ se llama **punto adherente** del filtro $\mathcal{F}$, si todo elemento $F \in \mathcal{F}$ intersecta a toda vecindad $V \in \mathcal{V}(a)$. Y $a \in X$ se llama **punto adherente de una base de filtro**, si es punto adherente del filtro asociado. Luego un punto a en un espacio topológico

$(X, \mathcal{X})$ es punto adherente de una base de filtro $\mathcal{L}$ si y sólo si para un sistema fundamental de vecindades $\mathcal{F}(a)$, se cumple que:

$$\forall\, B \subset \mathcal{L}\ \forall V \in \mathcal{F}(a)\,;\, V \cap B \neq \varnothing \tag{31}$$

Para los puntos de convergencia resulta, directamente de la definición, que:

Si $\mathcal{X}'$ es una topología sobre X más gruesa que $\mathcal{X}$, entonces todo punto adherente a de un filtro $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{X})$ es también adherente a $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{X}')$ (32)

Inversamente para los puntos de convergencia se cumple que

Si a es un punto adherente de un filtro $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{X})$, entonces a es punto adherente de cualquier filtro $\mathcal{F}'$ mas grueso que $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{X}')$. (33)

(33) generaliza la proposición que nos dice que todo punto adherente de una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ de una sucesión (x_n) es también punto adherente de la sucesión.

Como es bien conocido, un número complejo z es adherente a una sucesión compleja (z_n) si y sólo si existe una *subsucesión* $(z_{\varphi(n)})$ de dicha sucesión que converge a z. Generalizando obtenemos:

3.6.8 *Proposición*

Un punto a en el espacio topológico $(X,\ \mathcal{X})$ es adherente al filtro $\mathcal{F}$ si y sólo si existe un filtro más fino $\mathcal{F}'$ que converga a a. En particular, si $\mathcal{F}$ converge a x, x es punto adherente de $\mathcal{F}$.

Demostración: Si a es punto adherente de $\mathcal{F}$, entonces el filtro más fino

$$\{F \cap V \ \mid\ F \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{V}(a)\} = \sup\{\mathcal{F}, \mathcal{V}(a)\}$$

converge a a, puesto que es también más fino que $\mathcal{V}(a)$. Sea inversamente $\mathcal{F}'$ un filtro más fino que converge a a. Entonces se tiene que $F' \cap V \neq \varnothing$ para todo $F' \in \mathcal{F}'$ y toda vecindad $V \in \mathcal{V}(a)$, ya que $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{F}'$ y por (F 1) y (F 2). Entonces, por (33), a es punto adherente de $\mathcal{F}'$ y, por tanto, de $\mathcal{F}$. ■

3.6.9 *Corolario*

Todo ultrafiltro sobre un espacio topológico converge a cada uno de sus puntos adherentes.

3.6.10 *Ejemplo*

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de números reales convergentes condicionalmente, pero no absolutamente. Entonces el teorema de reordenamiento de Riemann muestra que todo número real es límite de un filtro más fino que el *filtro de las sumas*

parciales (3.6.2). Por lo tanto, por la proposición anterior, todo número real es punto adherente de dicho filtro.

3.6.11 *Ejercicio*

Precisar la demostración indicada en el ejemplo anterior.

3.6.12 *Ejemplo*

Sea f una función real acotada sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Sea $P[a,b]$ el conjunto de las particiones de $[a,b]$ dirigido por la inclusión $\subset$. A toda partición $P = (x_0, ..., x_n)$ se le asocia la *suma superior*

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{con } \overline{f}_i := \sup f(x_{i-1}, x_i)$$

y la suma inferior

$$\underline{S}(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \underline{f_i}(x_i - x_{i-1}) \text{ con } \underline{f_i} := \text{ínf}\, f(x_{i-1}, x_i)$$

Es conocido que las redes $\{(\overline{S}(f,P))|P \in P[a,b]\}$ y $\{(\underline{S}(f,P))|P \in P[a,b]\}$ son convergentes en el espacio topológico $\overline{\mathbb{R}}$. Sus límites se denotan respectivamente por:

$$\overline{\int} f(x)dx \quad \text{(integral superior)}$$

$$\underline{\int} f(x)dx \quad \text{(integral inferior)}$$

Es fácil ver que los filtros de secciones asociados a estas redes son más finos que la base de filtro $\mathcal{L}_f$ construida en el ejemplo 3.6.4. Entonces la integral superior y la integral inferior de f son puntos adherentes de $\mathcal{L}_f$. Puede probarse además que todos los puntos adherentes de $\mathcal{L}_f$ están comprendidos entre $\overline{\int} f(x)dx$ y $\underline{\int} f(x)dx$.

3.6.13 *Ejercicio*

Probar los enunciados del ejemplo anterior.

3.6.14 *Ejercicio*

Si $\mathcal{F}$ es un filtro con una base numerable sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ y a un punto adherente de $\mathcal{F}$, probar que: si a posee un sistema fundamental de vecindades numerable en $(X, \mathcal{X})$, entonces existe una sucesión (x_n) subordinada a $\mathcal{F}$ que converge a a.

§ 3.7 Convergencia y continuidad

Antes de aplicar los filtros convergentes para caracterizar las funciones continuas en un punto, hay que anunciar una serie de resultados elementales concernientes a las imágenes directas e inversas de filtros.

Supongamos que X, $X^{'}$ son dos conjuntos, $f : X \to X^{'}$ es una aplicación y $\mathcal{L}$ es una base de filtro sobre X. Entonces la colección

$$f\{\mathcal{L}\} := \{f[B] | B \in \mathcal{L}\} \tag{34}$$

es una base de filtro, puesto que $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$ para todos los subconjuntos A y $B \in X$ y además, si $A \neq \varnothing$, entonces $f[A] \neq \varnothing$.

$f\{\mathcal{L}\}$ se llama **imagen de la base de filtro** por f. Si $\mathcal{F}$ es un filtro, $f\{\mathcal{F}\}$ no es necesariamente un filtro; pues en general $f[X\} \neq X^{'}$; entonces $X^{'} \notin f\{\mathcal{F}\}$, si f no es sobreyectiva.

3.7.1 *Ejemplo*

Las secciones finales $S_\alpha(I) = \{\beta \,|\, \alpha \leq \beta\}$ del conjunto dirigido $(I, \leq)$, forman una base de filtro (3.4.7). Su imagen bajo la red $\varphi : \alpha \to x_\alpha$ en X, es precisamente la base de las secciónes finales de la red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ formada por los conjuntos $\{x_\beta | \alpha \leq \beta\}$.

3.7.2 *Ejemplo*

Si $\mathcal{L}$ es una base de filtro sobre la inyección canónica de $A \subset X$, entonces $i_A\{\mathcal{L}\}$ es una base de filtro sobre X. El filtro sobre X generado por $i_A\{\mathcal{L}\}$, se llama **filtro generado por $\mathcal{L}$ cuando $\mathcal{L}$ se considera como base de filtro sobre** X.

En cambio, si $\mathcal{L}^{'}$ es una base de filtro sobre $X^{'}$, la imagen inversa de una función $f : X \to X^{'}$:

$$f^{-1}\{\mathcal{L}^{'}\} := \{f^{-1}[B^{'}] | B^{'} \in \mathcal{L}^{'}\} \tag{35}$$

en general no es una base de filtro. Es verdad que $f^{-1}\{\mathcal{L}^{'}\}$ cumple (B 2), pues $f^{-1}[A^{'} \cap B^{'}] = f^{-1}[A^{'}] \cap f^{-1}[B^{'}]$ para todos los $A^{'}, B^{'} \in \mathcal{P}(X^{'})$. Pero (B 1), ya que, $f^{-1}[B^{'}] \neq \varnothing$ para todo $B^{'} \in \mathcal{L}^{'}$ si y sólo si

$$\text{todo } B^{'} \in \mathcal{L}^{'} \text{ intersecta a } f[X]. \tag{36}$$

En este caso $f^{-1}[\mathcal{L}^{'}\}$ se llama imagen inversa de la base de filtro $\mathcal{L}^{'}$. Evidentemente, si f es sobreyectiva, toda base de filtro sobre $X^{'}$ tiene una imagen inversa que es una base de filtro.

3.7.3 *Ejemplo*

Sea A un subconjunto de un conjunto X, i_A la inyección canónica $A \to X$ y $\mathcal{L}$ una base de filtro sobre X. Entonces $i_A^{-1}\{\mathcal{L}\} = \{i_A^{-1}[B] | B \in \mathcal{L}\}$ es precisamente

la traza $\mathcal{L}_A$ de $\mathcal{L}$ sobre A. Por las consideraciones anteriores $i_A^{-1}\{\mathcal{L}\}$ es una base de filtro si y sólo si $\mathcal{L}$ cumple (36) con respecto a i_A, o sea, si

$$i_A[A] \cap B \neq \varnothing \text{ para todo } B \in \mathcal{L}.$$

Recobramos de esta forma el enunciado del ejercicio 3.4.12.

En la proposición siguiente, veremos que la relación de orden entre filtros es invariante bajo aplicaciones.

3.7.4 *Proposición*

Sea $f : X \to X'$ una aplicación.

i) Si $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ son bases de filtro sobre X, tales que $\mathcal{L}_1 \dashv \mathcal{L}_2$, entonces $f\{\mathcal{L}_1\}$ y $f\{\mathcal{L}_2\}$ son bases de filtro sobre X' y

$$f\{\mathcal{L}_1\} \dashv f\{\mathcal{L}_2\} \tag{37}$$

ii) Si $\mathcal{L}_1', \mathcal{L}_2'$ son dos bases de filtro sobre X' que cumplen (36) y tales que $\mathcal{L}_2'$ es más fina que $\mathcal{L}_1'$, entonces $f^{-1}\{\mathcal{L}_1'\}$ y $f^{-1}\{\mathcal{L}_2'\}$ son bases de filtro y $f^{-1}\{\mathcal{L}_1'\} \dashv f^{-1}\{\mathcal{L}_2'\}$.

iii) Si $\mathcal{L}$ es una base de filtro sobre X, entonces $f^{-1}\{f\{\mathcal{L}\}\}$ es una base de filtro con $f^{-1}\{f\{\mathcal{L}\}\} \dashv \mathcal{L}$.

iv) Si $\mathcal{L}'$ es una base de filtro sobre X' que cumple (36), entonces la base de filtro $f\{f^{-1}\{\mathcal{L}'\}\}$ es más fina que $\mathcal{L}'$.

Demostración: Ejercicio. ■

3.7.5 *Proposición (imagen directa de un ultrafiltro)*

Si $\mathcal{L}$ es una base de ultrafiltro sobre un conjunto X y si f es una aplicación de X en un conjunto Y, entonces $f\{\mathcal{L}\}$ es una base de ultrafiltro sobre Y.

Demostración: Sea $M' \subset Y$. Si $f^{-1}[M']$ contiene un conjunto M de $\mathcal{L}$, entonces M' contiene a $f[M]$ y, por lo tanto, $M' \in [f\{\mathcal{L}\}]$; si no ocurre esto, entonces $\complement f^{-1}[M'] = f^{-1}[\complement M']$ contiene un conjunto B de $\mathcal{L}$ (3.5.21), y por lo tanto $\complement M'$ contiene a $f[B]$. Por lo tanto $|f\{\mathcal{L}\}|$ verifica la caracterización de ultrafiltros dada en la proposición 3.5.21. ■

Consideremos en particular la inyección canónica i_A de un subconjunto A en X. La proposición anterior nos muestra que una base de ultrafiltro sobre A es también una base de ultrafiltro sobre X (3.7.2).

A partir de los resultados anteriores podemos ahora definir el *límite funcional con respecto a un filtro*, y caracterizar las funciones continuas en un punto por medio de filtros.

3.7.6 *Definición (límite funcional)*

Sea f una aplicación de un conjunto X en un espacio topológico $(Y, \mathcal{D})$ y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Se dice que f *converge a* $b \in Y$ *bajo* $\mathcal{F}$ si $f\{\mathcal{F}\} \longrightarrow b$. Si hay un único punto de convergencia de f bajo $\mathcal{F}$ se dice que b es el límite de f bajo $\mathcal{F}$ y se denota por $b = \lim_{\mathcal{F}} f$.

De esta definición y la proposición 3.5.2 se concluye el siguiente criterio:

3.7.7 *Proposición*

$f : X \to Y$ converge a $b \in Y$ bajo el filtro $\mathcal{F}$ en X, si y sólo si, para cada vecindad V de un sistema fundamental arbitrario de vecindades de b en $(Y, \mathcal{D})$, existe un conjunto $F \in \mathcal{F}$ tal que $f[F] \subset V$ (o sea $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$ para cada vecindad $V \in \mathcal{V}(b)$ con $f^{-1}\{\mathcal{V}(b)\} \subset \mathcal{F}$).

Demostración: Ejercicio. ■

3.7.8 *Corolario*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{D})$ espacios topológicos y sea $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de filtros sobre X. Si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D})$ converge a $b \in Y$ bajo $\mathcal{F}_\alpha (\alpha \in I)$, entonces f converge a b bajo el filtro $\mathcal{F} = \inf\limits_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$.

Demostración: Para todo $b \in \mathcal{V}(b)$ se tiene $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}_\alpha (\alpha \in I)$; luego $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$. ■

En análisis elemental el límite funcional $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se define solamente según el filtro de vecindades del punto a. En cambio, la definición 3.7.6 introduce de manera más general el límite funcional según un filtro arbitrario. Esto permite analizar el *límite de una sucesión como un límite funcional.* Los dos conceptos *límite de sucesión y límite funcional*, que están separados en análisis elemental se unifican mediante el concepto de filtro.

3.7.9 *Ejemplo*

Una sucesión $\varphi : n \mapsto x_n$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ converge a un punto x si y sólo si la aplicación φ converge a x bajo el filtro de Fréchet sobre $\mathbb{N}$. Un resultado análogo puede enunciarse si consideramos una *red* cualquiera $\alpha \mapsto x_\alpha$ en lugar de una sucesión. Mediante la definición anterior podemos enunciar la definición de la continuidad puntual 3.2.6 de manera más condensada.

3.7.10 *Proposición*

Una aplicación f de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en otro $(Y, \mathcal{D})$ es continua en $a \in X$ si y sólo si $f\{\mathcal{V}(a)\} \longrightarrow f(a)$.

Con esta versión de la definición 3.2.6 obtenemos inmediatamente el análogo del segundo criterio de continuidad puntual (9), cuya traducción a espacios

topológicos en general nos ha conducido a la introducción de los filtros.

3.7.11 *Teorema*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{D})$ dos espacios topológicos. Una aplicación f de X en Y es continua en $a \in X$ si y sólo si $\lim_{\mathcal{L}} f = f(a)$, para toda base de filtro $\mathcal{L}$ en X que converja al punto a.

Demostración: La condición es suficiente por la proposición anterior. Es necesaria por la proposición 3.7.4 y (24). ■

Combinando el teorema anterior con el corolario 3.7.8 obtenemos el siguiente resultado: si el filtro de vecindades $\mathcal{V}(a)$ se representa como intersección de una familia de filtros $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$, entonces $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D})$ es continua en $a \in X$, si y sólo si $f\{\mathcal{F}_\alpha\} \longrightarrow f(a)$ para todo $\alpha \in I$.

Por ejemplo, por la proposición 3.5.24, f es continua en a si y sólo si $f\{\mathcal{U}\} \longrightarrow f(a)$ para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $(X, \mathcal{X})$ que converge a a. Si $(X, \mathcal{X})$ en un AN 1-espacio, recobramos la proposición 3.2.12. Por 3.5.8, f es continua en $a \in X$, si y sólo si para toda sucesión (x_n) convergente a a se cumple $(f(x_n)) \to f(a)$.

3.7.12 *Ejercicio*

Sea $f : X \to Y$ *sobreyectiva* y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Probar que $f\{\mathcal{F}\}$ es un *filtro* sobre Y.

3.7.13 *Ejercicio*

Sea $f : X \to Y$ inyectiva y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre Y que cumple (36) con respecto a f. Probar que $f^{-1}\{\mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro. Recobrar de aquí el corolario 3.5.22.

3.7.14 *Ejercicio*

¿Mediante qué filtros se pueden definir los límites unilaterales

$$\lim_{x \to a_-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a_+} f(x)$$

de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

¿Por qué la proposición elemental conocida : f es continua en a si y sólo si los dos límites unilaterales existen y son iguales, es un caso particular del corolario 3.7.8?

CAPITULO 4 Conjuntos abiertos y cerrados

Los capítulos anteriores establecen y desarrollan las definiciones fundamentales de convergencia y continuidad bajo la base operativa de los conceptos de abierto, vecindad y filtro. En este capítulo desarrollaremos algunas nociones elementales para analizar los subconjuntos de un espacio topológico en general.

Intuitivamente, un punto x es adherente de un conjunto C si no puede separarse de C por una vecindad. Formalizaremos este concepto para subconjuntos de un espacio topológico cualquiera y veremos, en la sección 1, que un punto x es adherente de C si y sólo si es un punto de convergencia de una base de filtro sobre C.

De aquí resulta la importancia especial de los subconjuntos que contienen a todos sus puntos adherentes. Estos conjuntos se llaman *cerrados*, puesto que son cerrados al pasar al límite. Veremos en la sección 2 que los cerrados son precisamente los complementarios de los abiertos en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$.

Todo subconjunto C de $(X, \mathcal{X})$ define una partición de X, formada por su interior, su exterior y su frontera. Estudiaremos estas nociones en la sección 3.

Los *operadores topológicos* que asocian a todo subconjunto C de $(X, \mathcal{X})$ su adherencia, respectivamente su interior, caracterizan la topología de todo el espacio de tal manera, que puede reconstruirse a partir de estos operadores (método de Kuratowski).

Un subconjunto C de $(X, \mathcal{X})$ se llama "denso si ocupa todo el espacio", de modo que su adherencia sea igual a X. De interés especial son los espacios que contienen un subconjunto denso *numerable*. Estos espacios se llaman separables. Verificaremos en la sección 4 que algunos espacios clásicos del análisis funcional son separables.

La sección 5 contiene, entre los resultados expuestos en este capítulo, los más utilizados en la práctica. Plantea las relaciones elementales entre la continuidad, los cerrados y la adherencia de un conjunto e introduce dos conceptos duales de la continuidad: la *aplicación abierta* y la *aplicación cerrada*.

El capítulo finaliza con una sección en la que se definen algunas colecciones de subconjuntos de un espacio topológico de interés especial para la teoría de

integración de Lebesgue.

§ 4.1 Puntos adherentes y cerradura de un conjunto

En análisis elemental un punto a se llama *adherente* a un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si puede aproximarse tanto como se quiera por puntos del conjunto A, o sea, si a es límite de una sucesión convergente (x_k) de elementos $x_k \in A$.

4.1.1 *Ejemplo*

Los extremos $a, b \in \mathbb{R}$ son puntos adherentes del intervalo abierto (a, b) $(a < b)$, puesto que son límites de las sucesiones convergentes $(a + 1/n)$ (resp.$(b - 1/n)$), cuyos elementos pertenecen desde cierto n al intervalo (a, b). El conjunto de todos los puntos adherentes de $(a, b) \in \mathbb{R}$, provisto de su topología usual, es el intervalo cerrado $[a, b]$. Se demuestra que $a \in \mathbb{R}^n$ es punto adherente de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si todo entorno V de a intersecta a A (fig. 37).

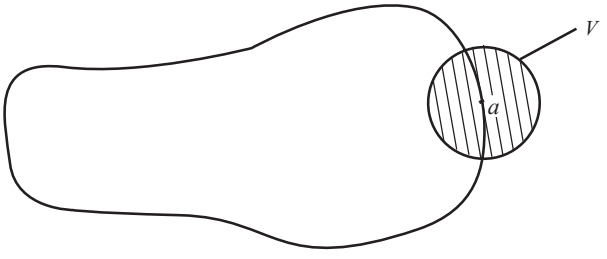


Figura 37. Punto de adherencia a un conjunto

Esta caracterización se generaliza inmediatamente a espacios topológicos. Sin embargo tenemos que ser cautelosos con una generalización directa de la *caracterización de los puntos adherentes por sucesiones*, recordando la insuficiencia de las *sucesiones* para una teoría de convergencia en espacios topológicos cualesquiera.

4.1.2 *Definición (punto adherente, adherencia)*

Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. $a \in X$ se llama *punto adherente* de A si toda vecindad $V \in \mathcal{V}(a)$ tiene una intersección no vacía con A, es decir,:

$$V \in \mathcal{V}(a) \Longrightarrow V \cap A \neq \varnothing \tag{1}$$

El conjunto de todos los puntos adherentes de A se dice **adherencia (o clausura)** de A y se denota $\overline{A}$. Un punto $a \in X$ no es adherente si puede *separarse* de A por una vecindad:

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \;\; (V \cap A = \varnothing) \tag{2}$$

El criterio intuitivo de que un punto a es adherente a A, si puede aproximarse tanto como se quiera por puntos de A, se formula en espacios topológicos generales mediante *filtros* y no por sucesiones.

4.1.3 *Proposición (caracterización de los puntos adherentes por filtros)*

En un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$, un punto a es adherente a un conjunto $A \subset X$ si y sólo si existe una base de filtro formada por subconjuntos de A que converge a a en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Si (1) se cumple, entonces la traza $\mathcal{V}_A(a)$ es una base de filtro formada por subconjuntos de A que converge a a.

Si (2) se cumple, no puede existir tal base de filtro, pues el filtro generado debería contener a A y a $V \in \mathcal{V}(a)$ y se tiene que $A \cap V = \varnothing$.■

Es de esperar que en los AN 1-espacios los *filtros* puedan sustituirse por *sucesiones.*

4.1.4 *Ejercicio (caracterización de los puntos adherentes en AN 1-espacios y en espacios seudométricos)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un AN 1-espacio y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

$i) a \in \overline{A}$
$ii) V \in \mathcal{V}(a) \Longrightarrow V \cap A \neq \varnothing$
$iii)$ Existe una sucesión (x_n) en A con $x_n \longrightarrow a$
Además $i), ii), iii)$ son equivalentes a :
(iv) $d(a, A) = 0$ para espacios seudométricos (X, d).

4.1.5 *Ejemplo*

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^n$ provisto de su topología usual. Sea A una bola abierta de centro z y de radio ρ. Entonces todo punto a de la esfera $E(z, \rho)$ es adherente de A. En efecto, la aplicación $\varphi : \alpha \mapsto z + \alpha(a - z)$ de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}^n$ es continua y aplica el intervalo $[0, 1]$ sobre el segmento $[z, a) \subset A$. Puesto que $\varphi(1) = a$, existe para todo $V \in V(a)$, $\alpha_V \in [0, 1)$ tal que $\varphi(\alpha) \in V$ para todo $\alpha \in [\alpha_V, 1)$. Por lo tanto

$$\varphi\left(\frac{\alpha_V + 1}{2}\right) \in V \cap [z, a) \subset V \cap A, \text{ o sea}, V \cap A \neq \varnothing.$$

Concluimos que *en el espacio* $\mathbb{R}^n$ la adherencia de una bola abierta es la bola cerrada correspondiente, o sea

$$\overline{B(a, \rho)} = B'(a, \rho) \ \ en \ \ \mathbb{R}^n \tag{6}$$

$\rightsquigarrow$ ¡Atención! Esto no se cumple en espacios métricos cualesquiera, como muestran las bolas $B(a, 1) = \{a\}$ en un espacio métrico discreto (X, d) que son iguales a su adherencia y diferentes de las bolas cerradas

4.1.6 *Ejemplo*

Consideremos en el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ la gráfica de la función $f : x \mapsto sen(1/x)$ sobre $(0, 1/\pi]$. $A = \{(x, sen(1/x)|\ 0 < x \leq 1/\pi\}$.

Entonces, todo punto $(0, y)$ sobre el eje y tal que $-1 \leq y \leq 1$ es un punto adherente de A (fig. 38).

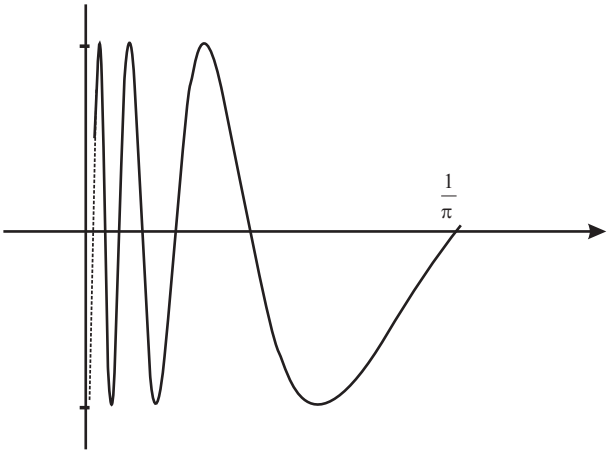


Figura 38. Gráfica de sen $1/x$

4.1.7 *Ejemplo*

En un espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ un punto $a \in X$ es adherente a un subconjunto $A \subset X$ si y sólo si $a \in A$. Para ver eso, basta aplicar el criterio (1) a la vecindad $\{a\}$ de a:

$$A \subset X \Longrightarrow A = \overline{A} \text{ en todo espacio discreto } (X, \mathcal{P}(X)) \tag{7}$$

En cambio, en un espacio indiscreto $(X, \{X, \varnothing\})$ todo punto $a \in X$ es adherente a cualquier conjunto no vacío $A \subset X$:

$$\varnothing \neq A \subset X \Rightarrow \overline{A} = X \text{ en todo espacio indiscreto} \tag{8}$$

Pregunta: ¿Todo punto adherente de *una sucesión* (x_n) en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es punto adherente del conjunto de sus términos $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$? ¿Se cumple también el inverso?

El siguiente ejemplo muestra la insuficiencia de las sucesiones para caracterizar los puntos adherentes de un conjunto en un espacio topológico en general.

4.1.8 *Ejemplo*

Proveamos a la recta real $\mathbb{R}$ de la topología de los complementos numerables $\mathcal{X}$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $A = [a, b]$. Entonces todo punto $x \in \mathbb{R}$ es punto adherente de A; pues todo complemento de un conjunto numerable en $\mathbb{R}$ tiene una intersección no vacía con A. Sin embargo *ningún* $x \in \mathbb{R} \backslash A$ *puede representarse como límite de una sucesión convergente de puntos de* A. En efecto, ya en el

ejemplo 3.2.5 hemos probado que toda sucesión (x_n) convergente en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ a un punto x tiene casi todos sus términos iguales a x.

Consideremos un conjunto finito $A = \{x_i \mid i = 1, ...m\}$ en el espacio $\mathbb{R}^2$. Todo punto en el plano que no pertenece a A tiene una vecindad que no contiene a ningún punto de A; luego los únicos puntos adherentes de A son los x_i. Además, todo punto x_i posee una vecindad V_i que excluye a todos los demás puntos de A (fig. 39).

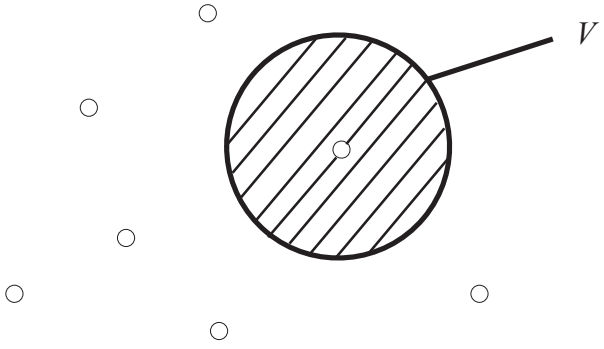


Figura 39. Conjunto formado por punto aislados

Tales puntos se llaman *puntos aislados* de A. Un conjunto finito A en $\mathbb{R}^2$ posee solamente puntos aislados. Los puntos de A no se acumulan en ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

4.1.9 *Definición (punto de acumulación, punto aislado)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Un punto $x \in X$ se llama **punto de acumulación o punto límite de** A, si toda vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ contiene un punto de A distinto de x:

$$V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow A \cap (V \setminus \{x\}) = V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing \tag{9}$$

$x \in X$ se llama **punto aislado** de A, si existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$V \cap A = \{x\} \tag{10}$$

El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama **conjunto derivado** de A y se denota A'.

Luego, distinguimos dos clases de puntos de adherencia: los puntos de acumulación y los puntos aislados. Los puntos aislados de A pertenecen necesariamente a A; los puntos de acumulación pueden pertenecer o no a A:

$$x \in A' \Longleftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \tag{11}$$

Todo punto adherente que no pertenece a A es un punto de acumulación. $\overline{A}$ se obtiene por adjunción de los puntos de acumulación al conjunto A:

$$\overline{A} = A \cup A' \tag{12}$$

4.1.10 *Ejemplo (conjunto de puntos aislados que posee un punto de acumulación)*

Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en el espacio topológico $\overline{\mathbb{R}}$ (2.1.9). $\mathbb{N}$ contiene solamente puntos aislados. Sin embargo, posee un punto de acumulación, a saber ∞. El conjunto $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ tiene propiedades análogas en $\mathbb{R}$.

4.1.11 *Ejemplo*

Sea (x_n) una sucesión convergente a x en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Si (x_n) posee un número infinito de términos diferentes, entonces x es el único punto de acumulación del conjunto de sus términos $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4.1.12 *Ejercicio*

Probar que en un espacio métrico (X, d) un punto $x \in X$ es punto de acumulación de $A \subset X$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) de términos diferentes se A que converge a x. (Esta proposición explica la terminología que llama *puntos límite* a los puntos de acumulación). El ejercicio siguiente aclara la relación entre los puntos adherentes de un filtro (3.6.7) y los puntos adherentes de un conjunto.

4.1.13 *Ejercicio*

Sea Γ una base de filtro. Probar que x es un punto adherente de Γ si y sólo si es punto adherente de todo conjunto $B \in \Gamma$. En particular, un punto x es adherente a una sucesión (x_k) si y sólo si x es adherente a toda sección final:

$$x \in \overline{S_n(x_k)} = \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

en particular, x es punto adherente de un conjunto A si y sólo si es adherente al filtro principal generado por $\{A\}$.

4.1.14 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que todo punto aislado de $\overline{A}$ es también punto aislado de A. ¿Se cumple el inverso?

4.1.15 *Ejercicio*

Constrúyase un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que

$$A \neq A' \neq (A')' = \{0\}.$$

4.1.16 *Ejercicio*

Sean $A_1, ..., A_n$ subconjuntos de un espacio métrico (X, d). Probar:

$$(A_1 \cup ... \cup A_n)' = A_1' \cup ... \cup A_n'$$

§ 4.2 Conjuntos cerrados

Evidentemente, para problemas de convergencia y de continuidad, los conjuntos que contienen a todos sus puntos límites deben tener importancia especial.

4.2.1 *Definición (conjunto cerrado)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ se llama **cerrado** si $A = \overline{A}$. El conjunto de todos los cerrados en $(X, \mathcal{X})$ se denota por $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$ o más sencillamente por $\mathbf{C}$.

Para comprobar que un subconjunto A de $(X, \mathcal{X})$ es cerrado hay que verificar que contiene a todos sus puntos de acumulación. En particular, un subconjunto A de un espacio métrico es cerrado si contiene a todos los límites de sucesiones convergentes (x_n) con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2 *Ejemplo*

Toda bola cerrada $B'(a, \rho)$ en un espacio métrico (X, d) es cerrada, pues, si una sucesión (x_n) de puntos $x_n \in B'(a, \rho)$ converge a $x \in X$, se tiene que $d(x, a) = \lim\limits_{n\to\infty} (d(x_n, a)) \leq \rho$, por la continuidad de $z \mapsto d(z, a)$.

4.2.3 *Ejemplo*

Sea (x_n) una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d). Entonces el conjunto

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \lim_{n\to\infty} x_n$$

es cerrado en $(X, \mathcal{X}_d)$.

4.2.4 *Ejercicio*

Probar que la adherencia de un subconjunto A de $(X, \mathcal{X})$ es cerrado. Más precisamente que es el menor cerrado que contiene a A.

4.2.5 *Ejercicio*

Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to Y$ una aplicación continua. Probar que la gráfica de f

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

es cerrada en el espacio producto $X \times Y$ provisto de una de las métricas canónicas (1.4.7).

El siguiente teorema nos suministra una gran variedad de nuevos ejemplos y, otro criterio para probar que un conjunto dado es cerrado.

4.2.6 *Teorema (caracterización de los cerrados)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $\complement A$ es abierto.

Demostración: Si A es cerrado, entonces ningún punto $x \in \complement A$ es adherente de A; luego existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $A \cap V = \varnothing$ o sea $V \subset \complement A$. Esto nos muestra que $\complement A$ es abierto.

Supongamos que $\complement A$ es abierto. Entonces ningun punto $x \in \complement A$ puede ser límite de A, puesto que la vecindad $\complement A \in \mathcal{V}(x)$ tiene intersección vacía con A.

Por lo tanto, A contiene a todos sus puntos adherentes. ■

$\rightsquigarrow$ *Nota:* ¡Atención! conjunto abierto y conjunto cerrado no son conceptos que se excluyen mutuamente. Existen conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados, por ejemplo el $\varnothing$ y X en todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. En un espacio *discreto* todo subconjunto es a la vez abierto y cerrado. Tampoco estos dos conceptos son exhaustivos. Existen subconjuntos $A \subset (X, \mathcal{X})$ que no son ni abiertos ni cerrados, como muestran los intervalos semiabiertos en $\mathbb{R}$. En un espacio indiscreto $(X, \mathcal{X})$ ningún subconjunto diferente del $\varnothing$ o de X es abierto o cerrado.

El teorema anterior establece una dualidad entre los abiertos y los cerrados de un espacio topológico. De todo enunciado sobre conjuntos abiertos se deduce un enunciado dual sobre los conjuntos cerrados. Por ejemplo, partiendo de los axiomas (A1)-(A3) (2.1.1) se obtienen las siguientes propiedades fundamentales de los cerrados.

4.2.7 *Corolario (propiedades fundamentales de los cerrados)*

En todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se cumple para la colección $\mathbf{C}$ de los ce-rrados:

(C1) $\varnothing \in \mathbf{C}$ *y* $X \in \mathbf{C}$.
(C2) $C, C' \in \mathbf{C} \Longrightarrow C \cup C' \in \mathbf{C}$.
(C3) $\forall \alpha \in I, (C_\alpha \in \mathbf{C}) \Longrightarrow \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \in \mathbf{C}$.

Demostración:

(C1) $\varnothing \in \mathbf{C}$ pues $\complement\varnothing = X \in \mathcal{X}$ por $(A1)$.
$X \in \mathbf{C}$ pues $\complement\mathcal{X} = \varnothing \in \mathcal{X}$ por $(A1)$.
(C2) $X \backslash C, X \backslash C'$ son abiertos; luego $X \backslash (C \cup C') = (X \backslash C) \cap C(X \backslash C')$ es abierto y por lo tanto $C \cup C'$ es cerrado.
(C3) como para todo $\alpha \in I, X \backslash C_\alpha$ es abierto, por $(A3)$

$$X \backslash \left(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (X \backslash C_\alpha) \in \mathcal{X}$$

y por tanto

$$\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \in \mathbf{C}. \blacksquare$$

Inversamente, partiendo de las propiedades $(C1) - (C3)$ de los cerrados, pueden deducirse las propiedades $(A1) - (A3)$ de los abiertos. Esto nos conduce a un nuevo método de definir un espacio topológico mediante la *axiomatización del concepto de conjunto cerrado.*

4.2.8 *Ejercicio*

Sea X un conjunto y $\mathbf{C} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X que cumple $(C1) - (C3)$. Probar que existe una única topología $\mathcal{X}$ sobre X tal que $\mathbf{C}$ es el conjunto de los cerrados de $(X, \mathcal{X})$.

Sea X un conjunto finito. Entonces los axiomas $(A1) - (A3)$ equivalen a los axiomas $(C1) - (C3)$ directamente. Más precisamente, si una colección $\mathbf{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumple $(A1) - (A3)$, entonces cumple tambien $(C1) - (C3)$ y viceversa, pues toda unión, resp. intersección, infinita se reduce aquí a una unión, resp. intersección, finita por ser X finito. Luego toda familia $\mathbf{C} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple $(A1) - (A3)$ puede interpretarse como familia de abiertos o como familia de cerrados.

4.2.9 *Ejemplo*

En el espacio de Sierpinski $(X, \mathcal{X})$ (2.1.2). El punto 1 es aislado en X, o sea, $\{1\}$ es abierto, mientras que 2 no posee más vecindad que X, y constituye un conjunto unitario cerrado. Si tomamos $\mathcal{X}$ como conjunto de cerrados, tenemos la situación inversa: $\{1\}$ es cerrado y $\{2\}$ es abierto. Evidentemente, los dos espacios topológicos que obtenemos de tal manera a partir de $\mathcal{X}$ son *diferentes* pero *homeomorfos.*

En general, los cerrados forman una colección de conjuntos de igual importancia que la colección de los abiertos. En vez de empezar por una axiomatización de los abiertos habríamos podido desarrollar la topología general sobre la base de una axiomatización de los cerrados.

4.2.10 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, (Y, d) un espacio (seudo)métrico, $\mathfrak{C}(X, Y)$ el espacio de todas las aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en (Y, d). Probar que:

i) $(f, g) \mapsto d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ es una seudométrica sobre el conjunto Y^X de todas las aplicaciones de X en Y.

ii) $\mathfrak{C}(X, Y)$ es cerrado en el espacio seudométrico (Y^X, d_∞), o sea: si una sucesión (f_n) de aplicaciones continuas $f_n : X \longrightarrow Y$, converge uniformemente a una función $f : X \longrightarrow Y$, entonces f es continua.

§ 4.3 **Interior, exterior y frontera**

Consideremos un subconjunto arbitrario A de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ (fig. 40).

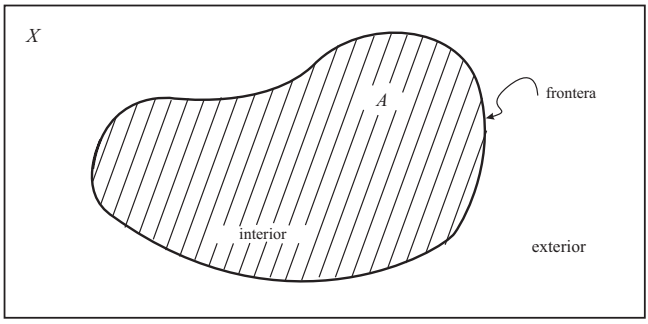


Figura 40.

Intuitivamente distinguimos los puntos interiores de A, los puntos exteriores de A y los puntos frontera de A que no son interiores ni exteriores. ¿Cómo podemos formalizar estos conceptos intuitivos?

4.3.1 *Definición (punto exterior, interior, frontera)*

Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$.

i) Decimos que $x \in X$ es **punto interior** de A si existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subset A$.
ii) Decimos que $x \in X$ es **punto exterior** de A si existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subset \complement A$.
iii) Decimos que $x \in X$ es **punto frontera** de A si no es exterior ni interior de A, o sea, si cumple:

$$V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap A \neq \varnothing \tag{14}$$

y

$$V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V \cap \complement A \neq \varnothing \tag{15}$$

El conjunto de los puntos interiores de A se llama interior de A y se denota por $\overset{\circ}{A}$ o por int A.

El conjunto de los puntos exteriores se llama *exterior* de A y se denota por ext A.

El conjunto de los puntos frontera se llama *frontera* de A y se denota por ∂A o por $fr\, A$.

Utilizando la propiedad fundamental $(V\,1)$ de las vecindades es evidente que:

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(x); \tag{16}$$

$$x \in \operatorname{ext} A \Longleftrightarrow \complement A \in \mathcal{V}(x) \Longleftrightarrow x \in \operatorname{int} \complement A. \tag{17}$$

Resulta que

$$int\, A = \operatorname{ext} \complement A \quad y \quad \operatorname{ext} A = \operatorname{int} \complement A. \tag{18}$$

Utilizando la definición de clausura obtenemos, comparado (14), (15) con (1):

$$x \in \partial A \Longleftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{\complement A}. \tag{19}$$

luego

$$\partial A = \partial(\complement A) \tag{20}$$

Un punto $x \in X$ pertenece necesariamente a uno de estos tres conjuntos: int A, ext A o $fr\,A$ (4.3.1). Y sólo puede pertenecer a *uno* de ellos.

4.3.2 *Proposición*

Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces la colección $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$, ∂A forma una partición de X, en el sentido de que estos tres conjuntos son mutuamente disjuntos y recubren a X:

$$\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A = X \tag{21}$$

Un punto adherente $a \in A \subset (X, \mathcal{X})$ no puede pertenecer al exterior de A, porque cada una de sus vecindades intersecta a A, luego $\overline{A} \subset \complement(\operatorname{ext} A)$. Al inverso, es trivial que todo punto interior y todo punto frontera de A son puntos adherentes de A. Concluimos que

$$\overline{A} = \complement \operatorname{ext} A \tag{22}$$

Si sustituimos A por $\complement A$, obtenermos el siguiente corolario que expone la relación dual entre los conceptos de adherencia y de *interior,* reflejando la dualidad entre abiertos y cerrados.

4.3.3 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\complement \operatorname{int} A = \operatorname{adh} \complement A \ \ o \ \ sea \ \ \mathring{A} = \complement(\overline{\complement A}) \tag{23}$$

$$\overline{\complement \mathring{A}} = \operatorname{ext} A \ \ o \ \ sea \ \ \overline{A} = \complement(\overline{\complement A})^{\circ}. \tag{24}$$

Puesto que la adherencia de todo conjunto es cerrada, las fórmulas (23) y (24) implican que el interior y el exterior de cualquier conjunto A son abiertos, mientras que por (19) la frontera es un conjunto cerrado.

Fue probado en el ejercicio 4.2.4 que la cerradura $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene A. Como caracterización dual se tiene:

4.3.4 *Corolario (caracterización del interior)*

Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces $\mathring{A}$ es el mayor abierto de $\mathcal{X}$ contenido en A.

Demostración : Ya sabemos que $\overset{\circ}{A}$ es abierto. Puesto que el operador int: $A \mapsto \mathring{A}$ es creciente por la definición 4.3.1, tenemos para todo abierto U

$$U \subset A \Longrightarrow U = \overset{\circ}{U} \subset \mathring{A}.$$

Nota. Partiendo de las propiedades fundamentales (A3) de los abiertos y (C3) de los cerrados, habríamos podido *introducir*, por definición, el interior y la adherencia de un conjunto A como el mayor abierto contenido en A, resp. como el menor cerrado que contiene a A; pues estos axiomas implican que $\cup\{U \mid U \in \mathcal{X} \wedge U \subset A\}$ es abierto y $\cap\{W|W \in \mathbf{C} \wedge W \supset A\}$ es cerrado. A continuación habríamos podido *deducir* de estas definiciones los enunciados de nuestras definiciones 4.1.2 y 4.3.1. Este procedimiento, que permite resaltar todavía más la dualidad conceptual entre el *interior* y la *adherencia*, es más 'elegante' pero también muy formal y poco intuitivo. No se entiende por qué es necesario introducir el cerrado o la adherencia si sus propiedades son reflejos fieles de las propiedades ya estudiadas de los abiertos, resp. del interior. Parece ser una duplicidad superflua. Pero esto es solamente una consecuencia de una exposición *artificial*, que sacrifica el sentido intuitivo a una elegancia que sin embargo puede traernos confusión. No se tiene interés en los cerrados por la dualidad con los abiertos, sino por su propiedad de ser 'cerrados' con respecto a la operación de límite, y se descubre sólo *a posteriori* que los cerrados son los complementos de los abiertos.

4.3.5 *Ejemplo*

Sea A una bola cerrada $B'(a, \rho)$ de centro a y de radio ρ en un *espacio normado*, $(E, \|\cdot\|)$. Entonces el interior de A es la bola abierta correspondiente $B(a, \rho)$, el exterior de A es el conjunto $\{y \in E \mid d(a, y) > \rho\}$ y la frontera de A es la esfera $E(x, \rho)$. (Repetimos que esto no es el caso en un espacio métrico cualquiera.)

No siempre tenemos una situación tan cerca de nuestra intuición como en el caso de una bola. Existen, por ejemplo, conjuntos sin ningún punto exterior y a la vez sin ningún punto interior, o sea, cuya frontera es todo el espacio.

4.3.6 *Ejemplo*

Sean $(X, \mathcal{X})$ la recta real $\mathbb{R}$ con su topología usual y sea $A = \mathbb{Q}$. Ningún intervalo abierto no vacío esta contenido enteramente en $\mathbb{Q}$, luego $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$. Tampoco existe un intervalo abierto no vacío enteramente incluido en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Por lo tanto, ext $\mathbb{Q} = \varnothing$. Esto implica $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ por (21).

4.3.7 *Ejercicio*

i) Dar un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ tal que

$$A \subset X,\ A \neq \varnothing,\ A \neq X \Longrightarrow \partial A = X$$

ii) Dar un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ tal que

$$A \subset X \Longrightarrow \partial A = \varnothing$$

4.3.8 *Ejercicio*

Probar las siguientes caracterizaciones:

$$\begin{array}{ll} i) & A \text{ es abierto } \Longleftrightarrow A \cap \partial A = \varnothing \\ ii) & A \text{ es cerrado} \Longleftrightarrow \partial A \subset A \Longleftrightarrow A' \subset A \\ iii) & A \text{ es abierto y cerrado} \Longleftrightarrow \partial A = \varnothing \end{array}$$

4.3.9 *Ejercicio*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ dos topologías diferentes.

i) Sea $\mathcal{X}$ la topología de los complementos finitos. Determinar adherencia, interior, exterior y frontera de $\mathbb{Q}$.

ii) Sea $\mathcal{X}$ la topología de los complementos numerables. Determinar adherencias, interior, exterior y frontera de $\mathbb{Q}$ y de $[a, b]$ $(a < b)$.

La asociación del interior o de la adherencia a todo subconjunto A de $(X, \mathcal{X})$ nos define dos operadores: int: $A \mapsto \overset{\circ}{A}$ y adh: $A \mapsto \overline{A}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$.

Deduciremos ahora por dualidad, algunas propiedades fundamentales de estos operadores.

4.3.10 *Proposición (propiedades fundamentales de int y adh)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $A, B \subset X$. Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{adh} \varnothing &= \varnothing && (28) \\ A &\subset \operatorname{adh} A && (29) \\ \operatorname{adh}(A \cup B) &= \operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B && (30) \\ \operatorname{adh}(\operatorname{adh} A) &= \operatorname{adh} A && (31) \\ \operatorname{int} X &= X && (32) \\ \operatorname{int} A &\subset A && (33) \\ \operatorname{int}(A \cap B) &= \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B && (34) \\ \operatorname{int}(\operatorname{int} \mathrm{A}) &= \operatorname{int} A && (35) \end{aligned}$$

Demostración: Es suficiente probar las propiedades fundamentales del interior, puesto que las propiedades correspondientes de la cerradura se obtienen por 4.3.3.

El corolario 4.3.4 implica inmediatamente las propiedades (32), (33) y (35).

Probemos que $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. La inclusión $\subset$ es evidente. Inversamente, sea x punto interior de A y de B. Entonces $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ es una vecindad abierta de x contenida en $A \cap B$; luego $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$.■

La monotonía de los operadores int y adh:

$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B \tag{36}$$

$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{adh} A \subset \operatorname{adh} B \tag{37}$$

parece ser también una propiedad fundamental de ellos, pero no es lógicamente independiente de las propiedades enumeradas en 4.3.10. Por ejemplo, (36) se deduce de (34), puesto que:

$$A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}\ .$$

En la nota de 4.3.4 hemos visto que los operadores int y adh pueden definirse directamente por medio de la colección de los abiertos (resp.de los cerrados). Ahora vemos que el inverso también se cumple. Si conocemos los operadores topológicos int y adh sobre $\mathcal{P}(x)$, podemos caracterizar los abiertos de $(X, \mathcal{X})$ como los *puntos fijos* de la aplicación int $(A \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow \operatorname{int} A = A)$ y los cerrados como puntos fijos de la aplicación adh $B \in \mathbf{C}_{\mathcal{X}} \Longleftrightarrow \operatorname{adh} B = B)$. Esto nos sugiere un nuevo método de definir un espacio topológico a partir de los operadores topológicos. Más precisamente, nos preguntamos, si dado un operador $L : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que cumple las propiedades (28)-(31). ¿Existe entonces una topología $\mathcal{X}$ sobre X tal que $L(A)$ es precisamente la adherencia de A con respecto a $\mathcal{X}$ para todo $A \subset X$? Fue Kuratowski [99] quien introdujo este método de definir un espacio topológico.

4.3.11 *Proposición (método de Kuratowski)*

Sea X un conjunto y $L : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operador de Kuratowski, o sea, que cumple que para todos los $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

i) $L(\varnothing) = \varnothing$.

ii) $A \subset L(A)$.

iii) $L(A \cup B) = L(A) \cup L(B)$.

iv) $L(L(A)) = L(A)$

Entonces existe una única topología $\mathcal{X}$ sobre X tal que L es el operador adherencia en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: La unicidad de la topología $\mathcal{X}$ es evidente, pues $\mathcal{X}$ está determinada de manera única por la colección de los cerrados $\mathbf{C}_{\mathcal{X}}$ dada por $\{\mathbf{C} \in \mathcal{P}(X) \mid L(\mathbf{C}) = \mathbf{C}\}$.

Para probar la existencia de $\mathcal{X}$, definimos

$$\mathbf{C}_X := \{\mathbf{C} \in \mathcal{P}(X) \mid L(\mathbf{C}) = \mathbf{C}\} \tag{38}$$

y comprobamos que $\mathbf{C}_X$ cumple (C1)-(C3).

(C1) $\varnothing \in \mathbf{C}_X$ por i) y $X \in \mathbf{C}_X$ por ii)

(C2) Si $A, B \in \mathbf{C}_X$, entonces $L(A \cup B) = L(A) \cup L(B) = A \cup B$, entonces $A \cup B \in \mathbf{C}_X$

(C 3) Si $A_\alpha \in \mathbf{C}_X$ para todo $\alpha \in I$,entonces

$$L(\bigcap_{\beta \in I} A_\beta) \subset L(A_\alpha) = A_\alpha$$

para todo $\alpha \in I$, por (37). entonces:

$$L(\bigcap_{\beta \in I} A_\beta) \subset \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ que por ii) implica}$$

$$L(\bigcap_{\beta \in I} A_\beta) = \bigcap_{\alpha} A_\alpha, \text{ o sea, } \bigcap_{\beta} A_\beta \in \mathbf{C}_X$$

Todavia falta demostrar que la cerradura $\overline{B}$ coincide con $L(B)$ en $(X, \mathcal{X})$ para todo $B \subset X$. Basta para ello probar que $L(B)$ es el mínimo elemento de $\mathbf{C}_X$ que contiene a B. Y esto es inmediato, pues $L(B) \in \mathbf{C}_X$ por iv) y si $C \in \mathbf{C}_X$ y $B \subset C$, entonces, por iii) y por (37), $L(B) \subset L(C)$, con lo cual $L(B) = \overline{B}$.■

4.3.12 *Ejercicio*

Enunciar y demostrar el dual de la proposición anterior para el operador int.

4.3.13 *Ejercicio*

Probar las siguientes inclusiones en un espacio topológico cualquiera:

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{A} \tag{39}$$

$$\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{A} \tag{40}$$

Mostrar con contraejemplos que en general no se tiene igualdad entre estos conjuntos.

4.3.14 *Ejercicio*

Supongamos que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $C \subset E$ convexo (E.1.13). Probar que:

i) La cerradura de C es convexa.

ii) Si $x \in \overset{\circ}{C}$ y $z \in \overline{C}$, entonces el segmento semiabierto $[x, z)$ está contenido en $\overset{\circ}{C}$.

iii) $\overset{o}{C}$ es convexo (utilizar (ii))

iv) Si $\overset{\circ}{C} \neq \varnothing$, entonces $\overline{C} = \overline{\overset{\circ}{C}}$ y $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{\overline{C}}$ (utilizar ii).

§ 4.4 **Conjuntos densos y espacios separables**

Los puntos de $\mathbb{Q}$ son densos en la recta real en el sentido intuitivo de que no existe un segmento (no reducido a un punto) que no contenga a un número racional. Esto significa topológicamente que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Los conjuntos con esta propiedad juegan un papel importante en topología general, así como en análisis funcional.

4.4.1 *Definición (subconjunto denso)*

Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama *denso* en X si $\overline{A} = X$.

Es claro que las caracterizaciones generales de la cerradura (§ 4.1) se aplican aquí. Por 4.1.2, $A \subset X$ es denso en X si y sólo si $A \cap V \neq \varnothing$ para toda vecindad V de cualquier punto $x \in X$. Más sencillamente:

$$A \text{ es denso en } (X, \mathcal{X}) \Longleftrightarrow \forall\, U \in \mathcal{X} \ \ (U \neq \varnothing \Longrightarrow U \cap A \neq \varnothing). \tag{42}$$

Si $(X, \mathcal{X})$ es un AN 1-espacio, A es denso en X si y sólo si

$$\text{para todo } x \in X \text{ existe una sucesión } (x_n) \text{ en } A \text{ tal que } x_n \longrightarrow x. \tag{43}$$

En un espacio métrico (X, d) un subconjunto A es denso si y sólo si

$$x \in X \Longrightarrow d(x, A) = 0 \tag{44}$$

4.4.2 *Ejemplo*

En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_D)$ (2.1.9) el conjunto $\mathbb{Z}$ es denso.

4.4.3 *Ejemplo*

El conjunto $\mathbb{Q}^n$ de los puntos con coordenadas racionales es denso en $\mathbb{R}^n$ con respecto a la topología usual.

4.4.4. *Ejemplo*

En análisis funcional un conjunto M de vectores en un espacio normado $(E, \| \cdot \|)$ se llama *completo*, (o total) si el subespacio lineal generado por M es denso en $(E, \| \cdot \|)$. Esto significa que cualquier vector $x \in E$ puede aproximarse tanto como se quiera por una combinación lineal de vectores de M, o sea:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists \ x_1, ..., x_n \in M \ \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \mid \ \| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| < \varepsilon.$$

Un teorema de Weierstrass, que probaremos en el capitulo 11, dice que sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ toda función continua es límite uniforme de una sucesión de polinomios. Todo polinomio es combinación lineal de las funciones potencia $p_n : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Luego en el espacio normado $\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$ provisto de la norma $\| f \|_\infty := \sup\{| f(x) | \mid a \leq x \leq b\}$ (1.1.4), el conjunto numerable de las funciones potenciales p_n $(n \in \mathbb{N})$ es total, o sea, el subespacio lineal formado por los polinomios sobre $[a, b]$ es denso en $(\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$.

Pregunta: Si A es un subconjunto denso de$(X, \mathcal{X})$, entonces ¿es también denso para toda topología más gruesa que $\mathcal{X}$? ¿Qué topologías se caracterizan por la propiedad de que todo subconjunto unitario es denso con respecto a ellas?

Los ejemplos 4.4.2. y 4.4.3 muestran espacios topológicos que contienen subconjuntos densos *numerables*.

4.4.5. *Definición (separable)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **separable** si existe un subconjunto denso numerable en X.

4.4.6 *Ejemplo*

Un espacio topológico discreto $(X, \mathcal{X})$ es separable si y sólo si X es numerable.

4.4.7 *Ejemplo*

El espacio $l^2(\mathbb{N})$ es separable (1.2.6). Un subconjunto denso numerable de $l^2(\mathbb{N})$ se construye de la manera siguiente. Sea D_n el conjunto de todas las sucesiones racionales cuyos términos se anulan a partir del índice n:

$$D_n := \{(x_k) \in l^2(\mathbb{N}) \mid \forall k \in \mathbb{N} \ (x_k \in \mathbb{Q}) \wedge k \geq n \Longrightarrow x_k = 0\} \tag{45}$$

D_n tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{Q}^n$, por lo tanto es numerable. Veamos que el conjunto numerable $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso en $l^2(\mathbb{N})$. En efecto, sea $z = (z_k) \in l^2(\mathbb{N})$ arbitrario y sea $\varepsilon > 0$ dado. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2$ es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N+1}^{\infty} z_k^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Para todo $p = 1, ..., N$ podemos hallar un número racional r_p tal que

$$\mid r_p - z_p \mid^2 < \frac{\varepsilon}{2N}$$

Si definimos $r := (r_1, r_2, ..., r_N, 0, 0...) \in D$ entonces

$$\| z - r \|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \mid z_k - r_k \mid^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} z_k^2 \leq \frac{N\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Entonces D es denso en $l^2(\mathbb{N})$.

4.4.8 *Ejemplo*

Consideremos un espacio normado $(E, \| \cdot \|)$ que contenga un conjunto numerable total de vectores M, por ejemplo $(\mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ (4.4.4).

En este caso, es fácil comprobar que el conjunto numerable D de todas las combinaciones racionales de vectores de M:

$$D := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in M, r_i \in \mathbb{Q} \text{ para i =1,...,n}\}$$

es denso en E. Sea $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ una combinación lineal arbitraria de vectores $x_i \neq 0$ de M y sea $\varepsilon > 0$ dado. Para $i = 1, ..., n$ existen números racionales x_i tales que $\mid \alpha_i - r_i \mid < \varepsilon / n \| x_i \|$.

Entonces

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} \mid \alpha_i - r_i \| \| x_i \| < \varepsilon$$

Entonces la cerradura $\overline{D}$ contiene al subespacio lineal $L(M)$ de todas las combinaciones lineales de vectores de M. Puesto que este subespacio es denso en E, tenemos $\overline{D} = \overline{\overline{D}} = E$.

Si reconsideramos el ejemplo 4.4.8, observamos que esencialmente se probó que el sistema numerable de los vectores de base:

$$e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} = (0, ..., 0, 1_i, 0, 0, ...) \tag{46}$$

forma un sistema total de vectores en $E = l^2(\mathbb{N})$.

4.4.9 *Ejemplo*

Denotaremos por l^∞ al espacio vectorial de todas las sucesiones reales acotadas provisto de la norma

$$\| (x_n) \|_\infty := \sup\{\mid x_n \mid \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{47}$$

Puede probarse que l^∞ no es separable.

Todo AN 2-espacio $(X, \mathcal{X})$ es separable. En efecto, sea $B = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de $\mathcal{X}$. Escogemos de todo $B_n \neq \varnothing$ un punto arbitrario $x_n \in B_n$.

El conjunto $D := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}, B_n \neq \varnothing\}$ es un conjunto denso numerable en $(X, \mathcal{X})$; pues todo abierto no vacío $U \in \mathcal{X}$ contiene a un $B_n \neq \varnothing$; entonces $x_n \in U \cap D \neq \varnothing$. Para espacios métricos se cumple también el inverso.

4.4.10.*Proposición*

Un espacio (seudo)métrico cumple AN 2 si y sólo si es separable.

Demostración: Sólo tenemos que probar que todo espacio métrico separable cumple AN 2. Sea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de (X, d). Probaremos que la colección numerable de bolas abiertas

$$\beta := \{B(x_n, 1/m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*\}$$

forma una base de la topología $\mathcal{X}_d$. Sea $U \in \mathcal{X}_d$ y $x \in U$. Hay que demostrar que existe un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$. Ahora bien, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $B(x, 1/m) \subset U$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, 1/2m)$. Concluimos que

$$x \in B(x_n, 1/2m) \subset B(x, 1/m) \subset U.$$

Pregunta: ¿Existen espacios métricos no separables? La proposición anterior nos suministra una condición necesaria para la metrizabilidad de un espacio topológico separable.

4.4.11. *Ejercicio*

Proveamos a $\mathbb{R}$ de la topología τ de los complementos finitos. Probar que:

i) Todo subconjunto infinito $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $(\mathbb{R}, \tau)$. En particular $(\mathbb{R}, \tau)$ es separable.

ii) $(\mathbb{R}, \tau)$ no cumple AN 2. (Indicación: Si β es una base de τ, entonces todo abierto $A \in \tau$ puede representarse como unión de una familia finita de conjuntos de β; luego $Card\ \beta = Card\ \tau$).

iii) Deducir de i) y ii) que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es metrizable.

4.4.12 *Ejercicio*

Un subconjunto S en $(X, \mathcal{X})$ se llama **denso en ningún lugar** si $\overset{\circ}{\overline{S}} = \varnothing$.

i) Probar que la frontera de todo abierto A es denso en ningún lugar.

ii) ¿Ocurre lo mismo con los conjuntos cerrados?

iii) Dar un ejemplo donde i) no se cumple para todo subconjunto $A \subset X$.

iv) Probar la siguiente proposición o mostrar con un contraejemplo que no es correcta: un conjunto S es denso en ningún lugar si y sólo si el complemento de su adherencia es denso.

4.4.13 *Ejercicio*

Probar que $(\mathfrak{C}[a.b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es separable, utilizando una aproximación de las funciones continuas, por funciones lineales continuas lineales por pedazos con valores racionales en los puntos vértice x_i (fig. 41).

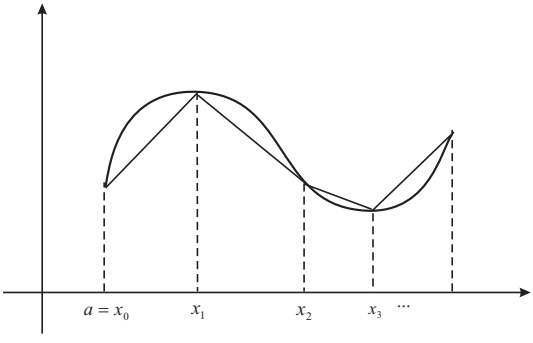


Figura 41. Aproximación uniforme por funciones lineales a trozos

§ 4.5 **Funciones continuas, abiertas y cerradas**

En el § 4.3 hemos probado que la topología puede basarse en una *axiomatización* de los *cerrados* o del *operador clausura* en vez de los *abiertos*. Para que sea satisfactoria tal transformación de la base axiomática, debe extenderse también a la definición de los *morfismos*. Más correctamente, hay que caracterizar las *funciones continuas* por medio de los cerrados, resp. mediante el operador de cerradura.

4.5.1 *Teorema (caracterización de las funciones continuas)*

Una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua si y sólo si cumple una de las condiciones equivalentes siguientes:

$$i)\ \ U \in \mathcal{Y} \Longrightarrow f^{-1}[U] \in \mathcal{X}. \tag{48}$$

$$ii)\ \ C \in \mathbf{C}_{\mathcal{Y}} \Longrightarrow f^{-1}[C] \in \mathbf{C}_{\mathcal{X}}. \tag{49}$$

$$iii)\ f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]} \text{ para todo} A \subset X. \tag{50}$$

Demostración: i) es equivalente a la continuidad de f según la definición 2.4.15.

$i) \Longrightarrow ii)$: se tiene por dualidad

$$C \in \mathbf{C}_{\mathcal{Y}} \Longrightarrow \complement C \in \mathcal{Y} \Longrightarrow \complement f^{-1}[C] = f^{-1}[\complement C] \in \mathcal{X} \Longrightarrow f^{-1}[C] \in \mathbf{C}_{\mathcal{X}}.$$

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* : $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ es cerrado por *ii)* y contiene a A, por lo tanto contiene a $\overline{A}$. entonces: $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.

iii) $\Longrightarrow$ *i)*: Sea $U \in \mathcal{Y}$. Supongamos por reducción al absurdo que $A := f^{-1}[U] \notin \mathcal{X}$. Entonces existe $a \in A$ que es punto adherente de $\complement A$, por *iii)*, $f(a)$ es punto adherente de $f[\complement A] = f[\complement f^{-1}[U]] = f[f^{-1}[\complement U]] \subset \complement U$. Luego $f(a)$ sería también punto adherente de $\mathrm{C}U$, en contradicción con que $U \in \mathcal{Y}$. Entonces $f^{-1}[U] \in \mathcal{X}$, si *iii)* se cumple. ■

4.5.2 *Corolario*

Sean f, g aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(E, \|\cdot\|)$. Entonces el **conjunto de coincidencia**:

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Ejercicio. ■

4.5.3 *Corolario (prolongación de igualdad)*

Sean f, g aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(E, \|\cdot\|)$ y supongamos que $A \subset X$ denso en $(X, \mathcal{X})$. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, entonces $f = g$.

Demostración: Ejercicio. ■

El teorema 4.5.1 es uno de los instrumentos más eficientes para comprobar que un conjunto dado $C \subset (X, \mathcal{X})$ es cerrado.

4.5.4 *Ejemplo (semiespacios, hiperplanos)*

Sea f una forma lineal no nula continua sobre un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Los conjuntos de la forma

$$[f \leq \alpha] := \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha] \ (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{51}$$

se llaman *semiespacios cerrados* y son efectivamente cerrados como imágenes inversas de los intervalos cerrados $(\infty, \alpha]$. Los conjuntos de la forma

$$[f = \alpha] := \{x \in E \mid f(x) = \alpha\} = f^{-1}[\{\alpha\}] \tag{52}$$

se llaman hiperplanos en E. En virtud de 4.5.1 son también cerrados.

4.5.5 *Ejemplo*

Sea

$$p : (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{j_1,...,j_n=0}^{n} c_{j_1,...,j_n} x^{j_1} ... x^{j_n}$$

una función polinomial sobre $\mathbb{R}^n$. El conjunto de los ceros de esta función

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x_1, ..., x_n) = 0\} = p^{-1}[\{0\}]$$

es una superficie en $\mathbb{R}^n$ que es cerrada, puesto que $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua; luego la preimagen del conjunto cerrado $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado. Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ definidos de esta manera por polinomios en n variables se llaman **variedades algebraicas** (resp.*curvas algebraicas* si $n = 2$) . Ejemplo: la hipérbola

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 - 1 = 0\} \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Más generalmente, toda *variedad continua* S en $\mathbb{R}^n$, definida como conjunto de los ceros de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cerrada.

Pregunta: Sean f, g funciones reales continuas sobre $(X, \mathcal{X})$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados, resp. abiertos?

$$\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}, \ \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}, \ \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}.$$

4.5.6 *Ejercicio*

Probar mediante 4.5.1. que toda bola cerrada en un espacio métrico es un conjunto cerrado.

$\rightsquigarrow$ La imagen *directa* de un conjunto abierto bajo una función continua no es necesariamente abierta.

4.5.7 *Ejemplo*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología discreta $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y la topología usual r. Entonces, la aplicación identidad $\mathbb{1}_{\mathbb{N}} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, r)$ es continua, pero la imagen del abierto $\{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ no es abierta en $(\mathbb{R}, r)$.

4.5.8 *Definición (aplicación abierta, cerrada)*

Sean $(X, \mathcal{X})$ $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *abierta* (resp. *cerrada*), si

$$f[\mathcal{X}] \subset \mathcal{Y} \tag{53}$$

$$\text{resp.} \quad f\{\mathbf{C}_{\mathcal{X}}\} \subset \mathbf{C}_{\mathcal{Y}} \tag{54}$$

Es fácil comprobar que los espacios topológicos con las aplicaciones abiertas (resp. cerradas) como morfismos forman categorías (que son diferentes de la categoría de los espacios topológicos); pues es evidente que la composición de dos funciones abiertas (o cerradas) es abierta (0 cerradas).

Una función *biyectiva* $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es abierta (resp. cerrada) si y sólo si su inversa es continua, puesto que las imágenes directas bajo f son preimágenes bajo f^{-1}

$$f \text{ es abierta} \iff f^{-1} \text{ es continua} \iff f \text{ es cerrada.} \tag{55}$$

$$\text{Una biyección continua } f:(X,\mathcal{X})\to(Y,\mathcal{Y}) \text{ es un homeomorfismo si y sólo si es abierta o cerrada.} \tag{56}$$

Para demostrar que una aplicación dada es abierta no es necesario comprobar que todo abierto tiene una imagen abierta. Es suficiente comprobarlo para los abiertos de una base de la topología $\mathcal{X}$.

4.5.9 *Proposición*

Sean $(X,\mathcal{X})$, $(Y,\mathcal{Y})$ espacios topológicos y sea β una base de la topología $\mathcal{X}$. Entonces una aplicación $f:X\to Y$ es abierta si y sólo si cumple:

$$B\in\beta \Longrightarrow f[B]\in\mathcal{Y} \tag{57}$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la fórmula

$$f[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha]=\bigcup_{\alpha\in I} f[A_\alpha].\blacksquare$$

Puesto que la igualdad correspondiente para *intersecciones no* es válida, *no* tenemos un criterio análogo para las aplicaciones cerradas.

Otro criterio útil para aplicaciones abiertas es el siguiente *criterio local,* cuya demostración se deja al lector.

4.5.10 *Proposición*

Una aplicación $f:(X,\mathcal{X})\to(Y,\mathcal{Y})$ es abierta si y sólo si aplica toda vecindad $V\in\mathcal{V}(x)$ de cualquier punto $x\in X$ en una vecindad $f[V]$ de $f(x)$ en $(Y,\mathcal{Y})$.

Demostración: Ejercicio. ■

Mientras que las propiedades de ser abierta y de ser cerrada son equivalentes para biyecciones (55), esto no se cumple para funciones cualesquiera; pues no tenemos en general que $f[\complement A]=\complement f[A]$.

4.5.11. *Ejemplo*

Denotaremos por π_1 a la proyección vertical $(x_1,x_2)\mapsto x_1$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Esta aplicación π_1 transforma toda vecindad de un punto x en el plano, en una vecindad de su proyección sobre el eje x. Por lo tanto es abierta. Sin embargo, π_1 no es cerrada.

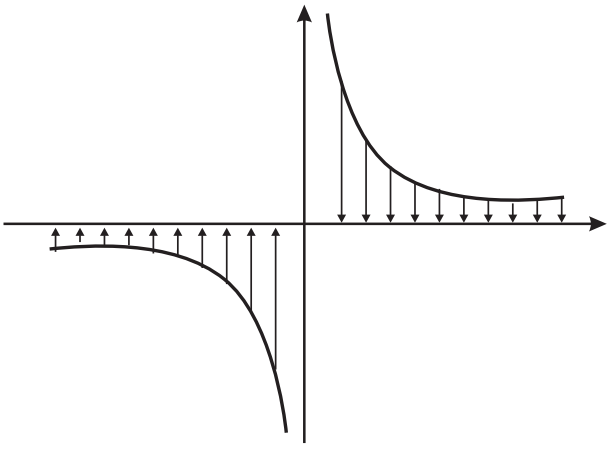


Figura 42.

En efecto, si consideramos la hipérbola $H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$, H es cerrado en $\mathbb{R}^2$ (4.5.2), pero $\pi_1[H] = \mathbb{R}^*$ no es cerrado en $\mathbb{R}$. (fig. 42).

Inversamente una aplicación cerrada no es necesariamente abierta.

4.5.12 *Ejemplo*

Consideremos la función continua $f : x \mapsto sen\ x$ de $[0, 2\pi]$ en $\mathbb{R}$. Del análisis elemental es conocido que f posee una inversa continua sobre cada uno de los intervalos $[0, \pi/2], [\pi/2, 3\pi/2]$ o $[3\pi/2, 2\pi]$. Por lo tanto su restricción a cada uno de estos intervalos es cerrada. Si $C \subset [0, 2\pi]$ es cerrado, entonces sus intersecciones C_1, C_2, C_3 con cada intervalo, son conjuntos cerrados.

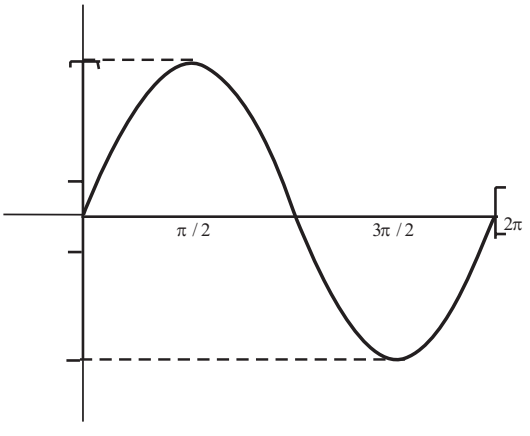


Figura 43. Gráfica de la función seno

Entonces $f[C] = f[C_1] \cup f[C_2] \cup f[C_3]$ es cerrado para todo cerrado $C \subset [0, 2\pi]$, o sea, la aplicación f es cerrada. En cambio, f no es abierta. Por ejemplo, $A := (0, 2\pi]$ es abierto en $[0, 2\pi]$, pero $f[A] = [-1, 1]$ no es abierto en $\mathbb{R}$ (fig. 43).

4.5.13 *Ejercicio*

Sea f una función abierta de $(X, \mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$ o en un intervalo real de la forma$[\alpha, \beta)$. Probar que f no alcanza el máximo sobre $(X, \mathcal{X})$.

4.5.14 *Ejercicio*

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

i) Probar que la norma $\|\cdot\|: x \mapsto \| x \|$ es una aplicación abierta de E en $\mathbb{R}_+$.

ii) Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (E, \|\cdot\|)$ abierta y $A \subset X$ abierto.

Probar que la aplicación $x \mapsto \| f(x) \|$ sobre A no alcanza su supremo. Análogamente, si f es abierta y no se anula, entonces $x \mapsto \| f(x) \|$ no alcanza su ínfimo sobre los abiertos.

iii) Deducir de ii) que si f no alcanza su máximo sobre $\overline{A}$ en un punto $a \in \overline{A}$, entonces $a \in \partial A$.

Nota: Los principos del máximo y del mínimo para las funciones armónicas (partes real e imaginaria de funciones diferenciables de variable compleja), provienen precisamente del hecho de que una función analítica no constante es una aplicación abierta.

4.5.15 *Ejercicio*

Probar que una forma lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es abierta si no se anula sobre todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

4.5.16 *Ejercicio (caracterización por aperadores)*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación. Probar que f es abierta si y sólo si para todo $A \subset X$:

$$f[\operatorname{int} A] \subset \operatorname{int} f[A] \tag{58}$$

y f es cerrada si y sólo si para todo $A \in X$:

$$f[\overline{A}] \supset \overline{f[A]} \tag{59}$$

(Observe el sentido de las inclusiones y compárelas con 4.5.1.)

§ 4.6 G_δ, F_σ-conjuntos y conjuntos de Borel

El axioma (A2) garantiza que la intersección de una familia finita de abiertos es abierto. Aunque existen espacios topológicos en los cuales la intersección de una familia numerable de abiertos es abierto, esto no se cumple en general. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ la intersección numerable

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b)$$

no es abierta. Sin embargo, tales intersecciones (de una familia numerable de abiertos) constituyen una clase muy importante (p. ej., en teoría de la medida) y, merecen una distinción de nomenclatura para ellos y sus duales.

4.6.1 *Definición (G_δ y F_σ-conjuntos)*

Un subconjunto de un subespacio topológico $A \subset X$ se llama $G_\delta-$*conjunto* (resp.F_σ $-$ *conjunto*) si puede representarse como intersección (resp. unión) de una familia numerable de abiertos (resp. de cerrados).

Todo *abierto* en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es un G_δ y todo *cerrado* un $F_\sigma-$*conjunto*. Es interesante que pueden intercambiarse en este enunciado las palabras *abierto y cerrado*, si el espacio es metrizable. Por brevedad omitiremos la palabra conjunto de estas definiciones.

4.6.2 *Proposición*

En un espacio métrico (X, d) todo cerrado C es G_δ.

Demostración: Definamos, para todo $\rho > 0$,

$$B(C, \rho) := \{x \in X \mid d(x, C) < \rho\} \tag{60}$$

Entonces se cumple

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(C, 1/n) \tag{61}$$

puesto que

$$\forall \ n \in \mathbb{N}^*, \, x \in B(C, 1/n) \Longleftrightarrow d(x, C) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{C} = C.$$

El enunciado dual de que todo abierto en un espacio métrico es un $F_\sigma-$conjunto resulta inmediatamente de la proposición siguiente que manifiesta la *dualidad* entre los conceptos G_δ y $F_\sigma-$*conjuntos*.

4.6.3 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces:

i) $A \subset X$ es un G_δ si y sólo si $\complement A$ es un F_σ.

ii) La colección de los G_δ en $(X, \mathcal{X})$ es invariante bajo intersecciones numerables y uniones finitas.

iii) La colección de los F_σ en $(X, \mathcal{X})$ es invariante bajo uniones numerables e intersecciones finitas.

Demostración:

i) Resulta de la equivalencia siguiente:

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \ \text{ con } \ A_n \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow \complement \mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \ \text{ con}$$

$$B_n = \complement A_n \in \mathrm{C}_{\mathcal{X}}$$

ii) Si $G_n = \bigcap_{m=0}^{\infty} G_{nm}$ con $G_{nm} \in \mathcal{X}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ entonces (por asociatividad)

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} G_{nm} = \bigcap_{m,n=0}^{\infty} G_{nm}$$

es un $G_\delta-$conjunto. Similarmente si $G_k = \bigcap_{m=0}^{\infty} G_{km}$ para $k = 1, ..., n$, entonces

(por distributividad)

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_k = \bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} G_{km} \right) = \bigcap_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} (G_{1m_1} \cup ... \cup G_{nm_n})$$

es un G_δ porque $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ es numerable y

$$G_{1m_1} \cup ... \cup G_{nm_n} \in \mathcal{X} \quad \text{para todo } (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n.$$

(Nótese que esta última conclusión ya no es válida, para una unión numerable $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$, puesto que $\mathbb{N}^\infty$ no es numerable.)

iii) es el enunciado dual de ii), por lo tanto resulta de i) y ii); si por ejemplo $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$ es unión numerable de los $F_\sigma-$conjuntos F_k $(k \in \mathbb{N})$ entonces $\complement F = \bigcap_{k=0}^{\infty} \complement F_k$ es intersección numerable de los $F_\sigma-$conjuntos $\complement F_k$ y, por lo tanto, G_δ o sea F es un $F_\sigma-$conjunto i). Similarmente para la intersección finita. ■

4.6.4 *Ejemplo*

Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es un $F_\sigma-$conjunto, porque es numerable y todo conjunto unitario en $\mathbb{R}$ es cerrado.

Luego $\mathbb{I} = \complement\mathbb{Q}$: el conjunto de los números irracionales es un $G_\sigma-$conjunto.

Puede probarse que $\mathbb{Q}$ no es $G_\delta-$conjunto y que $\mathbb{I}$ no es un $F_\sigma-$conjunto. A veces es útil tener una representación estandar de los conjuntos F_σ y G_δ. Dejamos al lector la demostración del siguiente enunciado.

4.6.5*Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Probar que:

i) Para todo $G_\delta-$conjunto G existe una sucesión decreciente $G_1 \supset G_2 \supset ...$ de abiertos tales que $\bigcap_{k=0}^{\infty} G_k = G$.

ii) Para todo $F_\sigma-$conjunto F existe una sucesión creciente $F_1 \subset F_2 \subset ...$ de cerrados tales que $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k = F$.

Como indica la proposición 4.6.3 no podemos esperar que la colección de los $G_\delta-$conjuntos o la colección de los $F_\delta-$conjuntos sean invariantes a la vez *bajo uniones e intersecciones numerables.* Para eso se introduce un sistema más amplio de conjuntos.

4.6.6 *Definición ($\sigma-$álgebra de conjuntos)*

Sea X un conjunto. Una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X se llama $\sigma-$álgebra, si cumple:

i) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \complement A \in \mathcal{A}$.

ii) $A_k \in \mathcal{A}$ para todo $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra, toda intersección numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$, pues el complementario de tal intersección es unión numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$. Además, si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \backslash B = A \cap \complement B \in \mathcal{A}$, $\varnothing = A \cap \complement A$ y $X = A \cup \complement A$, pertenecen a $\mathcal{A}$.

Es evidente que el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ es una $\sigma-$álgebra. Toda intersección de una familia de $\sigma-$álgebras es una $\sigma-$álgebra. Luego para toda colección $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ existe una $\sigma-$álgebra menor, que contiene a $\mathcal{U}$. Esta $\sigma-$álgebra menor $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \supset \mathcal{U}$ se dice que es la **generada** por $\mathcal{U}$.

4.6.7 *Definición (conjuntos de Borel)*

Los elementos de la $\sigma-$álgebra generada por el conjunto $\mathcal{X}$ de los abiertos de un espacio topológico se llaman **conjuntos de Borel**, o también **borelianos**.

4.6.8 *Ejemplo*

Consideremos en el espacio Euclidiano $(\mathbb{R}^n, \tau^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, los intervalos (cubos) abiertos:

$$(a, b) \ := \ \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < x < b\}$$

por el ejemplo 2.3.12, se demuestra que los cubos abiertos de centro racional y de radio racional:

$$K(a, \rho) = \ (a_1 - \rho, \, a + \rho(\times \cdots \times (a_n - \rho, \, a_n + \rho) \tag{59}$$

forman una base numerable de la topología τ^n. Luego todo abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ se representa como unión numerable de cubos abiertos. Puesto que, al inverso, todo intervalo (a,b) es abierto, la $\sigma-$álgebra B de los conjuntos borelianos en $\mathbb{R}^n$ está generada por los cubos abiertos. Este resultado es fundamental para la construcción de la medida de Lebesgue sobre el espacio $\mathbb{R}^n$. A todo cubo

$$C = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

se asocia intuitivamente su volumen $\mu(C) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

En teoría de la medida se demuestra que la aplicación $C \to \mu(C)$ puede prolongarse a la $\sigma-$álgebra B conservando las propiedades fundamentales que se exigen de una medida del volumen de un conjunto en $\mathbb{R}^n$.

Todo G_δ y todo F_σ conjunto es boreliano. Por lo tanto puede definirse el volumen de tales conjuntos. La teoría de Lebesgue muestra que existen en $\mathbb{R}^n$ conjuntos no borelianos, para los cuales no puede definirse el volumen de manera razonable.

4.6.9 *Proposición*

Sea f una aplicación continua de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en un espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces la imagen inversa de todo conjunto de Borel en Y es un conjunto de Borel en X.

Demostración: En efecto, sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos $B \subset Y$ tales que $f^{-1}[B]$ es de Borel en $(X, \mathcal{X})$. Puesto que

$$B \in \mathcal{Y} \Longrightarrow f^{-1}[B] \in \mathcal{X}$$

y

$$f^{-1}[\complement B] = \complement(f^{-1}[B]) \quad \text{y} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n] = f^{-1}[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n] \tag{60}$$

$\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra que contiene a los abiertos de $(Y, \mathcal{Y})$ por lo tanto todo conjunto de Borel en $\mathcal{Y}$ pertenece a $\mathcal{A}$. ■

$\rightsquigarrow$ ¡Atención! No se cumple, en general, una proposición análoga para la imagen *directa* de un conjunto de Borel: las igualdades (60) *no* son verdaderas para las imágenes *directas*. A pesar de todo, para ciertas clases de espacios metrizables (de Souslin) el análogo es cierto (véase Bourbaki [30]).

CAPÍTULO 5 Topologías iniciales y finales

Para construir nuevas estructuras a partir de estructuras dadas disponemos de cuatro métodos canónicos ampliamente utilizados en la teoría de diversas categorías: formar *subestructuras, estructuras producto, estructuras cociente o estructuras suma.* Por ejemplo, si consideramos la categoría de los conjuntos, podemos formar subconjuntos, el producto de conjuntos, conjuntos cociente y la suma de conjuntos. Los mismos métodos se aplican también a la categoría de los espacios topológicos.

En las dos secciones siguientes estudiaremos *subespacios* y *espacios producto* de espacios topológicos. Veremos que en ambos casos se aplica el mismo método abstracto para construir una topología. Las topologías de los subespacios y de los espacios producto son *topologías iniciales* definidas por familias de aplicaciones que tienen los espacios respectivos como *dominios.* Analizaremos las topologías iniciales en abstracto en 5.3 y veremos que los resultados obtenidos en las secciones anteriores son casos especiales de teoremas más abstractos sobre topologías iniciales en general.

A partir del nivel abstracto del la sección 5.3, parece natural proceder a analizar el método dual de definir topologías sobre un conjunto X partiendo de una familia de aplicaciones que tienen a X como *codominio*, o sea, las llamadas topologías finales. En las secciones 5.4 y 5.5 aplicaremos este método para definir las topologías canónicas sobre los *cocientes* y las *sumas* de espacios topológicos.

Procederemos en este capítulo según el siguiente esquema: *casos concretos* (subespacio, espacio producto), *abstracción* (topología inicial), *teoría abstracta* (teoría de las topologías iniciales y finales), *concretización* (espacios cocientes y espacios suma).

§ 5.1 **Subespacios**

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subespacio. Mediante d se induce de manera natural una métrica d_A (1.3.1). La topología correspondiente $\mathcal{X}_{d_A}$ consiste de todas las trazas de los abiertos $U \in \mathcal{X}_d$ sobre A:

$$\mathcal{X}_{d_A} = \{U \cap A | U \in \mathcal{X}_d\}$$

Generalizando, se verifica inmediatamente que las trazas de todos los abiertos sobre un conjunto A en un espacio topológico cualquiera $(X, \mathcal{X})$ forman una topología sobre A.

5.1.1 *Definición (subespacio, topología inducida)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces la topología

$$\mathcal{X}_A = \{U \cap A | U \in \mathcal{X}\} \tag{1}$$

se llama **topología inducida** por $\mathcal{X}$ en A. El conjunto A provisto de esta topología se llama **subespacio de** $(X, \mathcal{X})$. Notación: $(A, \mathcal{X}_A)$ o más sencillamente A si no existe confusión.

Nota: Si $(A, \mathcal{X}_A)$ es un subespacio de $(X, \mathcal{X})$ es esencial distinguir, en todos los problemas que envuelvan elementos o subconjuntos de A, entre sus propiedades como puntos (resp. como subconjuntos) de X y sus propiedades como puntos (resp. subconjuntos) del subespacio A. Haremos esta distinción utilizando las frases en A o relativo a A o con respecto a A al referirnos a propiedades inherentes a puntos o subconjuntos de A.

Si $B \subset A \subset X$, entonces podemos considerar B como subespacio de $(A, \mathcal{X}_A)$ o como subespacio de $(X, \mathcal{X})$. Pero esta diferencia no importa, porque ambas topologías inducidas son iguales:

$$\mathcal{X}_B = (\mathcal{X}_A)_B$$

Esta *transitividad de las topologías inducidas* resulta de que $(U \cap A) \cap B = U \cap B$ para todo $U \in \mathcal{X}$.

Como los abiertos en un subespacio A de $(X, \mathcal{X})$ son las trazas sobre A de los abiertos en X, se tiene:

$$U_A \in \mathcal{X}_A \Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{X} \text{ tal que } \quad U \cap A = U_A \tag{2}$$

y, por lo tanto, los cerrados en $(A, \mathcal{X}_A)$ son precisamente las trazas de los cerrados de $(X, \mathcal{X})$ en A, o sea:

$$C_A \in \mathcal{C}_A \Longleftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}} \ (\mathcal{C}_A = C \cap A) \ \text{(fig.44)} \tag{3}$$

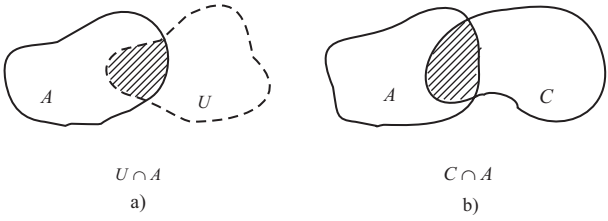


Figura 44. *a*) Traza de un abierto *b*) traza de un cerrado

5.1.2 *Ejemplo*

Consideremos la topología usual r sobre $\mathbb{R}$ y $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$. El conjunto $[1/2, 1)$ es cerrado en el subespacio A; pues, por ejemplo, $[1/2, 1) = [1/2, 2] \cap (0, 1)$ y $[1/2, 2] \in \tau_r$. De la misma forma $(0, 1] = [0, 1] \cap (0, 2)$ es abierto en$[0, 1]$.

5.1.3 *Ejemplo*

Sea $A = B(a, \rho)$ una bola abierta y $C = B^{'}(b, \rho)$ una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ tales que $A \cap C \neq \varnothing$. Entonces $B = A \cap C$ es abierto en C y cerrado en A, pero B no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}^n$.

5.1.4 *Ejemplo*

Consideremos el subespacio $A = \mathbb{Q}_+$ de $\mathbb{R}$ con la topología usual.
$B = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid 0 \leq x^2 < 2\}$ es abierto y cerrado a la vez en A, puesto que

$$B = A \cap [\,-1, \sqrt{2}\,] = A \cap (\,-1, \sqrt{2}\,)$$

Pregunta: ¿Cuál es la topología inducida sobre el subespacio $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$?

Estos ejemplos ya nos muestran que un subconjunto abierto (resp. cerrado) en un subespacio no tiene por qué ser abierto (resp. cerrado) en todo el espacio. Lo mismo ocurre con las vecindades. Si denotamos por $\mathcal{V}_A(a)$ al sistema de todas las vecindades de $a \in A$ en el subespacio $(A, \mathcal{X}_A)$ tenemos:

$$V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V \cap A \in \mathcal{V}_A(a),$$

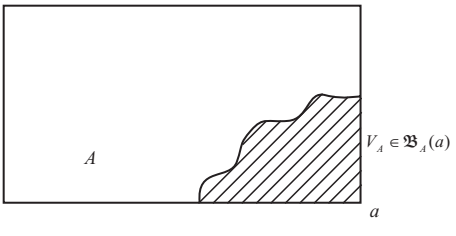


Figura 54. $V_A \neq \mathcal{V}(a)$

pero no siempre una vecindad $V_A \in \mathcal{V}_A(a)$ es también vecindad de a en $(X, \mathcal{X})$ (fig. 45). Sin embargo, se tiene para un subespacio $(A, \mathcal{X}_A)$ de $(X, \mathcal{X})$:

$$A \text{ abierto en } X \Leftrightarrow \text{todo abierto en } A \text{ es abierto en } X; \tag{4}$$

$$A \text{ cerrado en } X \Leftrightarrow \text{todo cerrado en } A \text{ es cerrado en } X; \tag{5}$$

$$a \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \text{toda vecindad de } a \text{ en } A \text{ es vecindad de } a \text{ en } X; \tag{6}$$

(4) y (5) resultan de (2) y (3) respectivamente. (6) resulta de la equivalencia siguiente que se cumple para todos los subespacios $(A, \mathcal{X}_A)$ de $(X, \mathcal{X})$ y todos los subconjuntos $W \subset A$:

$$W \in \mathcal{V}_A(a) \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a) \;\; V \cap A = W \tag{7}$$

Los abiertos, los cerrados y las vecindades en A son trazas sobre A de los abiertos, de los cerrados y de las vecindades en $(X, \mathcal{X})$ respectivamente, esto ocurre también para la *cerradura* de un subconjunto en A.

5.1.5 *Proposición (adherencia en un subespacio)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Entonces la cerradura $\overline{B}_A$ de B en $(A, \mathcal{X}_A)$ satisface que:

$$\overline{B}_A = \overline{B} \cap A \tag{8}$$

Demostración: Puesto que todo cerrado en A es la traza de un cerrado en X, la traza $\overline{B} \cap A$ del menor cerrado $\overline{B}$ en X que contiene B es el menor cerrado en A que contiene a B. ■

5.1.6 *Corolario*

Sea A un subconjunto del espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces se cumple para todo $B \subset A$:

$$B \text{ es denso en } (A, \mathcal{X}_A) \Leftrightarrow \bar{B} \supset A \tag{9}$$

5.1.7 *Ejercicio*

Probar que si $A \subset (X, \mathcal{X})$ es denso y $V \in \mathcal{V}_A(a)$ para $a \in A$, entonces $\overline{V}$ es una vecindad de a en $(X, \mathcal{X})$.

Decimos que una propiedad topológica **es hereditaria (a los subespacios)**, si en caso de cumplirse para un espacio topológico se cumple también para cada

uno de sus subespacios. Evidentemente las propiedades AN 1, AN 2 y la metrizabilidad son heredadas por los subespacios. Sin embargo, esto no es evidente para la separabilidad.

A veces se identifican las aplicaciones $f : X \to A$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en un subespacio $(A, \mathcal{Y})$ de $(Y, \mathcal{Y})$ con las aplicaciones $i_A \circ f : x \mapsto f(x)$ de X en Y, porque tienen la misma gráfica y sólo difieren en el codominio. En análisis elemental, por ejemplo, es común no hacer distinción entre tales funciones. En topología general esto parece ser también permisible, puesto que se cumple:

$$\begin{array}{l} f : x \mapsto f(x) \text{ de } (X, \mathcal{X}) \text{ en } (A, \mathcal{Y}_A) \text{ es continua } \Leftrightarrow, \\ i_A \circ f : x \mapsto f(x) \text{ de } (X, \mathcal{X}) \text{ en } (Y, \mathcal{Y}) \text{ es continua.} \end{array} \tag{10}$$

Dejemos al lector comprobar que la topología inducida sobre $A \subset (Y, \mathcal{Y})$ se caracteriza por el enunciado (10):

5.1.8 *Proposición (caracterización de la topología inducida)*

La topología inducida $\mathcal{Y}_A$ de un subespacio $A \subset (Y, \mathcal{Y})$ es la topología más gruesa sobre A que hace continua a la inyección canónica $i_A : A \to (Y, \mathcal{Y})$. Además es la única topología que tiene la propiedad (10) para todos los espacios topológicos $(X, \mathcal{X})$ y todas las aplicaciones $f : X \to Y$ con imagen contenida en A.

Así que, la continuidad no depende de la especificación del codominio. Sin embargo, *no se cumple* un enunciado análogo para las funciones *abiertas* (resp. *cerradas*). Contraejemplos triviales son las inyecciones canónicas.

5.1.9 *Ejemplo*

Sean $X = B = [0, 1]$; $Y = \mathbb{R}$; y $\mathbb{1} : X \to B$ la aplicación identidad.
Entonces $\mathbb{1}$ es abierta, mientras que la inyección canónica $i_B = i_B \circ \mathbb{1} : x \mapsto x$ de X en $\mathbb{R}$ no es abierta , puesto que $B = i_B[X]$ no es abierto en $\mathbb{R}$. *Resulta que debemos precisar bien el codominio al hablar de aplicaciones abiertas o cerradas.*

5.1.10 *Definición (inmersión)*

Una aplicación $f : X \mapsto Y$ de un espacio topológico en otro se llama **inmersión**, si la aplicación correspondiente $x \mapsto f(x)$ de X sobre el subespacio $f[X]$ de $(Y, \mathcal{Y})$ es un homeomorfismo. Al subespacio $f[X]$ se le llama entonces **inmersión de** X en $(Y, \mathcal{Y})$ y se dice que X es **sumergible** en Y.

Una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \mapsto (Y, \mathcal{Y})$ es una inmersión, si es inyectiva, continua y aplica todo abierto U en X sobre un abierto $f[U]$ en el subespacio $f[X] \subset (Y, \mathcal{Y})$.

En topología general no necesitamos distinguir entre un espacio y sus inmersiones, porque tienen las mismas propiedades topológicas.

Una inmersión no es, en general, una aplicación abierta:

5.1.11 *Ejemplo*

La aplicación $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, 0)$ es una inmersión de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

5.1.12 *Ejemplo*

Sea $E^n_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la semiesfera unitaria positiva:

$$E^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$$

y sea $\pi : E^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección

$$(x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, ..., x_n)$$

Es fácil comprobar que π es una inmersión de la semiesfera E^n_+ sobre la bola cerrada n-dimensional $B'_n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ (fig. 46).

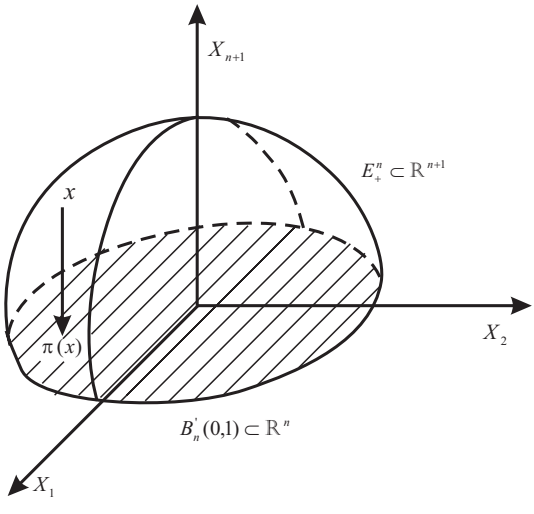


Figura 46.

Analicemos ahora qué pasa si cambiamos el dominio de una función continua en lugar de cambiar su codominio. Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y $f : X \mapsto Y$ una aplicación. Para todo $A \subset X$, $a \in A$ y $V \in \mathcal{V}(f(a))$ se cumple:

$$A \cap f^{-1}[V] = (f|A)^{-1}[V] \tag{11}$$

($f|A$ es la restricción de f en A)

Por (11):

$$f \text{ es continua en } a \in A \Rightarrow f|A \text{ es continua en } a \tag{12}$$

$\rightsquigarrow$ El inverso no se cumple: Una función, cuya restricción a un subespacio $A \subset (X, \mathcal{X})$ es continua, no tiene por qué ser continua sobre A. Hay que distinguir entre las funciónes *continuas sobre* A (o sea, continuas en todos los puntos de A) y las funciones *cuyas restricciones sobre* A *son continuas.*

5.1.13 *Ejemplo*

Sea $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. La función característica $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que aplica todos los números racionales a 1 y todos los números irracionales a 0, es *discontinua en todo punto. Sin embargo, su restricción a* $\mathbb{Q}$ *es constante, luego continua en todo punto* $a \in \mathbb{Q}$.

Inversamente si A es un subconjunto de $(X, \mathcal{X})$, podemos preguntarnos bajo qué condiciones una aplicación continua $g : (A, \mathcal{X}_A) \to (Y, \mathcal{Y})$ es restricción de una aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$. Esto es el llamado problema de *prolongación continua de una función.*

5.1.14 *Definición (prolongación continua)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos $A \subset X$ y $g : A \longrightarrow Y$ una aplicación (continua). Entonces cada aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f|A = g$ se llama **prolongación continua** de g a X.

Este problema será tratado en las próximas secciones; por ahora nos contentaremos con la solución de un problema vecino, que es el de la construcción de una aplicación continua sobre X, a partir de una familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de aplicaciones continuas cada una de ellas definidas sobre un subespacio A_α de X y tal que los $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ forman un cubrimiento de X.

Consideremos la situación siguiente:

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de X y sean f_α aplicaciones de A_α en $Y (\alpha \in I)$. Para tener una prolongación común de todas las f_α a X, es evidentemente necesario que coincidan sobre las intersecciones de sus dominios:

$$f_\alpha | A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta | A_\alpha \cap A_\beta \tag{13}$$

Si esta condición de compatibilidad se verifica, entonces existe una única aplicación $f : X \to Y$ tal que $f/A_\alpha = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, a saber la aplicación que asocia a todo $x \in X$ el punto $f_\alpha(x)$ si $x \in A_\alpha$, ¿Cuándo esta función obtenida uniendo las funciones f_α pedazo por pedazo será continua? Para formular criterios suficientes necesitamos el siguiente concepto:

5.1.15 *Definición (cubierta puntual y localmente finita)*

Si $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de partes de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces:

i) $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ se llama **puntualmente finita**, si para cada $x \in X$ el conjunto de índices $I_x := \{\alpha \in I \mid x \in A_\alpha\}$ es finito.

ii) $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ se llama **localmente finita**, si para cada $x \in X$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que el conjunto de índices $I_V := \{\alpha \in I | V \cap A_\alpha \neq \varnothing\}$ es finito.

Es evidente que toda familia localmente finita es puntualmente finita, pero el recíproco no tiene que cumplirse (considérese por ejemplo la cubierta de $\mathbb{R}$ formada por todos sus subconjuntos unitarios).

5.1.16 *Ejemplo*

Consideremos la reja $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, .., x_n)|x_i \in \mathbb{Z}\}$ como parte de $\mathbb{R}^n$. Las bolas abiertas de centro $z \in \mathbb{Z}^n$ y de radio $\sqrt{n}$, (resp. las bolas cerradas de radio $\sqrt{n/2}$) forman un cubierta abierta (resp. cerrada) de $\mathbb{R}^n$. Ambas son localmente finitas (fig. 47).

Para analizar la continuidad de una función definida al unir una familia de funciones pedazo por pedazo, verifiquemos antes que la topología del dominio puede, bajo ciertas condiciones, reconstruirse a partir de las topologías de los subespacios correspondientes.

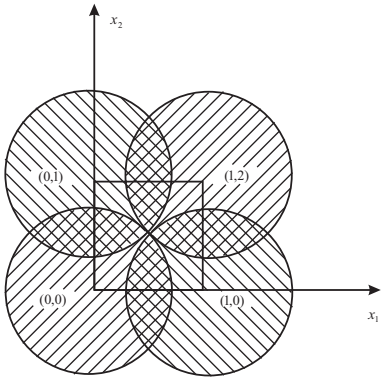


Figura 47. Cubierta formada con bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$

5.1.17 *Proposición*

Sea $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ que cumpla una de las siguientes condiciones:

a) Los conjuntos $(\overset{\circ}{A}_\alpha)_{\alpha\in I}$ cubren X.

b) $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una cubierta cerrada y localmente finita de X. Entonces, para todo subconjunto $B \subset X$ se cumple que:

$$\text{i) } B \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, B \cap A_\alpha \in \mathcal{X}_{A_\alpha} \tag{14}$$

$$\text{ii) } B \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I, B \cap A_\alpha \in \mathcal{C}_{A_\alpha} \tag{15}$$

Demostración: Dejamos al lector comprobar que (14) y (15) son equivalentes por dualidad.

Demostraremos que a) $\Rightarrow$ i) y que b) $\Rightarrow$ ii).

Supongamos que se cumple a). Si $B \in \mathcal{X}$ es evidente que $B \cap A_\alpha \in \mathcal{X}_{A\alpha}$ para toda $\alpha \in I$ (5.1.1). Inversamente, supongamos que $B \cap A_\alpha \in \mathcal{X}_{A\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Entonces $B \cap \overset{\circ}{A}_\alpha = (B \cap A_\alpha) \cap \overset{\circ}{A}_\alpha \in \mathcal{X}_{\overset{\circ}{A}_\alpha}$ por (1). Puesto que $\overset{\circ}{A}_\alpha$ es abierto, tenemos $B \cap \overset{\circ}{A}_\alpha \in \mathcal{X}$ por (2). De aquí concluimos que $B = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap \overset{\circ}{A}_\alpha) \in \mathcal{X}$.

Supongamos que se cumple b) queremos probar ii). La implicación $\Longrightarrow$ en ii) es trivial. Inversamente, supongamos $B \cap A_\alpha \in \mathrm{C}_{A\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Debemos demostrar que todo punto adherente de B pertenece a B. Sea $b \in \overline{B}$ y W una vecindad de b en $(X, \mathcal{X})$ tal que $W \cap A_\alpha \neq \varnothing$ se cumple solamente para $\alpha \in \{\alpha_1, .., \alpha_m\}$. Entonces $W \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_{\alpha_k}$.

El conjunto $B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{\alpha k} \right) = \bigcup_{k=1}^{m} (B \cap A_{\alpha k})$ es cerrado por hipótesis. Concluimos que

$$b \in B^- \cap W \subseteq (B \cap W)^- \subseteq B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{\alpha_k} \right). \blacksquare$$

Por lo tanto, $b \in B$.

En particular, la proposición anterior se aplica si $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una cubierta *abierta* o si es una cubierta cerrada y finita.

5.1.18 *Corolario (combinación de funciones continuas)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y sea $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de $(X, \mathcal{X})$ que cumple a) o b) de 5.1.17. Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de aplicaciones continuas $f_\alpha : A_\alpha \to (Y, \mathcal{Y})$ que sea compatible (o sea, que cumpla que $f_\alpha | A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta | A_\alpha \cap A_\beta$ para todos los $\alpha, \beta \in I$). Entonces la aplicación obtenida uniendo las aplicaciones $f_\alpha (\alpha \in I)$ pedazo a pedazo es continua.

Demostración: Ejercicio. $\blacksquare$

5.1.19 *Ejemplo*

Consideremos la cubierta cerrada finita de $\mathbb{R}$ que consiste de tres intervalos $A_1 = (-\infty, a], A_2 = [a, b]$ y $A_3 = [b, +\infty)$ $(a < b)$ y analicemos las tres funciones $h_1 : x \mapsto 0$ sobre A_1, $h_2 : x \mapsto (x-a)^2(x-b)^2$ sobre A_2 y $h_3 : x \mapsto 0$ sobre A_3. Estas funciones son compatibles: $h_1(a) = h_2(a) = 0$ y $h_2(b) = h_3(b) = 0$. Por lo tanto la aplicación obtenida uniendo las tres funciones pedazo por pedazo:

$$h : x \mapsto \begin{cases} (x-a)^2(x-b^2) & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ x \leq a \quad \text{o} \quad x \geq b \end{cases}$$

es continua sobre $\mathbb{R}$. Puede probarse que h es incluso diferenciable (fig. 48).

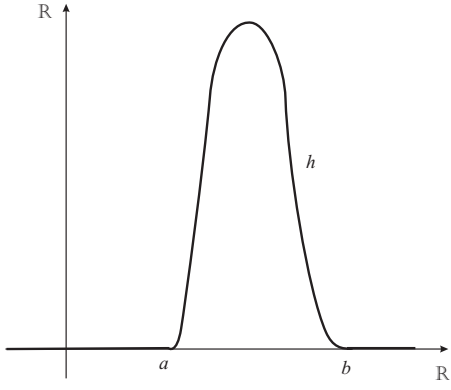


Figura 48. Grafica de la función h

Pregunta: ¿Se cumple el corolario anterior para cubiertas *finitas* cualesquiera $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$?

§5.2 **Espacios producto**

A continuación utilizaremos algunas propiedades relativas al producto Cartesiano de una familia de conjuntos (remitimos al lector al apéndice).

Por el axioma de elección $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha \neq 0$ si $E_\alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in I$. En este caso las proyecciones $\pi_\alpha : \prod E_\alpha \to E_\alpha$ son aplicaciones sobreyectivas.

¿Cómo podremos introducir una topología sobre el producto Cartesiono de espacios topológicos E_α de manera natural? Consideremos la topología usual sobre el producto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ y las n proyecciones $\pi_i : x \mapsto x_i$ de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Sabemos que el conjunto $\mathcal{H} = \{\pi_i^{-1}[U] | U \subset \mathbb{R}, U \text{ abierto}, i = 1, 2, ..., n\}$ forma una subbase de la topología r^n (fig. 49).

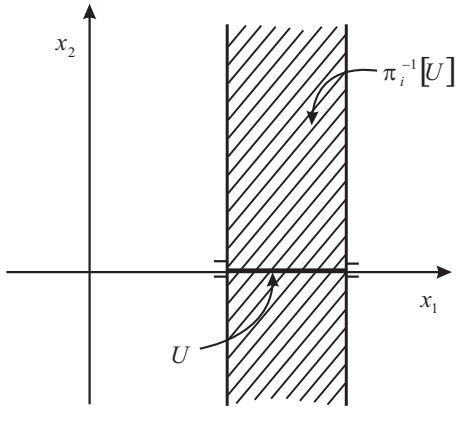


Figura 49.

Para generalizar este hecho damos la siguiente definición:

5.2.1 *Definición (espacio producto)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y π_α la α-ésima proyección de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ sobre X_α. Entonces la topología $\mathcal{X}$ generada por la familia

$$\mathcal{H} := \{\pi_\alpha^{-1}[U] | U \in \mathcal{X}_\alpha, \alpha \in I\} = \bigcup_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}\{\mathcal{X}_\alpha\} \tag{16}$$

se llama **topología producto** (Tychonoff) de las topologías $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha\in I}$. El espacio topológico $(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha, \mathcal{X})$ se llama **espacio producto** de la familia $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ y se denota por $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Según esta definición, una base de la topología producto está dada por la colección

$$\beta = \{\pi_{\alpha 1}^{-1}[U_{\alpha 1}] \cap ... \cap \pi_{\alpha n}^{-1}[U_{\alpha n}] \,|\, n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in I, U_{\alpha j} \in \mathcal{X}_{\alpha j} \\ \text{para } j = 1, ..., n\} \tag{17}$$

Los conjuntos de β no son más que productos $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ donde U_α es abierto en $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ y $U_\alpha = X_\alpha$ *excepto para un número finito de índices* α. Estos conjuntos se llaman **conjuntos elementales**.

Si para cada $\alpha \in I$, β_α es una base de la topología $\mathcal{X}_\alpha$, es claro que si consideramos los conjuntos elementales con $U_\alpha \in \beta_\alpha$ tendremos una nueva base de la topología producto. Los conjuntos elementales de este tipo que contienen a un punto dado $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ forman un sistema fundamental de vecindades de x en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Si $I = \{1, ..., n\}$ es un conjunto finito, la construcción de una base de la topología producto es más simple, ya que en ella los conjuntos elementales son del tipo $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$, donde U_α es cualquier abierto en X_α.

5.2.2 *Ejemplo (producto de espacios métricos)*

Si $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ son espacios métricos, entonces la topología producto en $X := X_1 \times ... \times X_n$ es precisamente la topología asociada a la distancia producto

$$d(x, y) = \operatorname*{máx}_{1\le i\le n} d_i(x_i, y_i) \quad (x, y \in X).$$

Basta notar que para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in X$

$$B_d(x, r) = B_{d1}(x_1, r) \times ... \times B_{dn}(x_n, r) \tag{18}$$

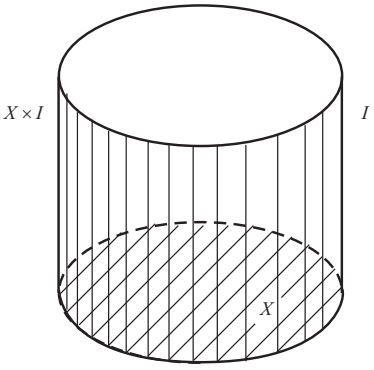


Figura 50. $S' \times I$

5.2.3 *Ejemplo (cilindros)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, I el intervalo $[0, 1]$ provisto de la topología inducida por r. Entonces $X \times I$ con la topología producto se llama **cilindro de altura 1 sobre la base** $(X, \mathcal{X})$. Por ejemplo si S' es el círculo unitario, entonces $S? \times I$ es un cilindro (fig. 50)

Si X es una esfera $E(a, \rho)$ en $\mathbb{R}^2$, entonces el producto de $X \times I$ es homeomorfo a todo anillo circular:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b\}$$

con $0 < a < b$ (fig. 51)

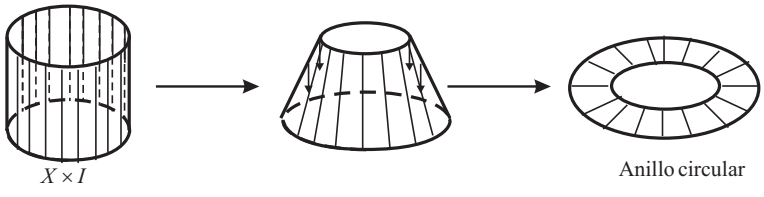


Figura 51. Transformación homeomorfa de un cilindro en un anillo

5.2.4 *Ejemplo (convergencia puntual)*

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^A$ de todas las funciones de un conjunto A en $\mathbb{R}$. La topología producto sobre $\mathbb{R}^A$ se llama **topología de la convergencia puntual** sobre $\mathbb{R}^A$. En efecto, el lector puede probar fácilmente que una sucesión (f_n) en $\mathbb{R}^A$ converge a $f \in \mathbb{R}^A$ si y sólo si $\lim(f_n(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$. (Esto será un corolario inmediato del teorema (5.2.6) sobre filtros convergentes en un espacio producto).

Con esto vemos que la topología general es una teoría que cumple las expectativas planteadas al final del capítulo 1. Es suficientemente amplia para incluir la topología de la convergencia puntual de espacios funcionales. Además, podemos ahora demostrar rigurosamente que $\mathbb{R}^A$ no es metrizable si A es infinito y no numerable.

Supongamos por reducción al absurdo que $\mathbb{R}^A$ sea metrizable aunque A sea no numerable. Consideremos $x = 0 \in \mathbb{R}^A$. Entonces x posee un sistema fundamental numerable de vecindades (V_n). Puesto que toda vecindad V_n contiene a un conjunto elemental, se tiene $\pi_a[V_n] = \mathbb{R}$ para todos los $a \in A$ con excepción de un conjunto finito F_n de puntos de A. La unión de todos estos puntos excepcionales $(n \in \mathbb{N})$ es numerable, entonces existe $a \in A$ tal que $\pi_a[V_n] = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que no existe ningún V_n $(n \in \mathbb{N})$ contenido en la vecindad

$$V = (-1, 1) \ \times \ \mathbb{R}^{A-\{a\}} \in \mathcal{V}(0).$$

Por lo tanto (V_n) *no* es un sistema fundamental de vecindades de 0, lo cual es una contradicción.

Pregunta: Supongamos que tenemos una familia $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ de espacios topológicos discretos, con I infinito. ¿Es el espacio $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ discreto?

5.2.5 *Proposición*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, las proyecciones $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha \, (\alpha \in I)$ son sobreyecciones continuas y abiertas. La topología producto es la topología más gruesa que hace continuas a todas las proyecciones $\pi_\alpha \, (\alpha \in I)$.

Demostración: Por la definición 5.2.1, las proyecciones son continuas. Para probar que son abiertas, es suficiente (por 4.5.9) demostrar que la imagen $\pi_\alpha[U]$ de todo conjunto elemental $U = \prod U_\alpha \, (U_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$ y casi todos los $U_\alpha = X_\alpha)$ es abierto. Pero esto es evidente, puesto que $\pi_\alpha[U] = U_\alpha$. Si $\mathcal{X}$ es una topología sobre $\prod X_\alpha$ que hace continuas a todas las proyecciones π_α, entonces contiene necesariamente a la subbase $\mathcal{H}$ de la topología producto (16) y por lo tanto es más fina que ésta. ■

Nota: en general, las proyecciones no son aplicaciones cerradas (4.5.11).

Después de la proposición 5.2.5 el lector no tendrá dificultades en probar la siguiente *caracterización de los filtros convergentes en un espacio producto*, que será demostrado en forma más general para topologías iniciales en la próxima sección.

5.2.6 *Proposición*

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio producto $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ converge a $x = (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ si y sólo si todas sus proyecciones $\pi_\alpha[\mathcal{F}]$ convergen a las coordenadas respectivas x_α de x $(\alpha \in I)$.

Demostración: Ejercicio. ■

No tenemos una visión general de *todos* los abiertos en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Sin embargo conocemos los abiertos de la forma $\prod U_\alpha$. Son precisamennte los conjuntos elementales con $U_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$ y $U_\alpha = X_\alpha$ para casi todos los índices $\alpha \in I$. Tampoco tenemos una visión general de todos los cerrados. Pero la proposición que sigue nos permite caracterizar los cerrados de la forma producto $\prod \mathcal{C}_\alpha$.

5.2.7 *Proposición*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos $C_\alpha \subset X_\alpha$. Entonces la cerradura de $C = \prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es $\prod_{\alpha\in I} \overline{C}_\alpha$ y satisface:

$$\prod_{\alpha\in I} \overline{C_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in I} C_\alpha} \tag{19}$$

Demostración:

Sea $x \in \prod \overline{C_\alpha}$ y $U = \pi_{\alpha 1}^{-1}[U_{\alpha 1}] \cap ... \cap \pi_{\alpha n}^{-1}[U_{\alpha n}]$ un conjunto elemental arbitrario que contiene a x. Entonces los $U_{\alpha k}$ son vecindades de $x_{\alpha k}$ en $(X_{\alpha k}, \mathcal{X}_{\alpha k})$ y tienen por lo tanto una intersección no vacía con $C_{\alpha k}$. Sea $c_{\alpha k} \in C_{\alpha k} \cap U_{\alpha k}$ y escojamos $c_\alpha \in C_\alpha$ para $\alpha \in I \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Entonces $c := (c_\alpha)_{\alpha\in I} \in C \cap U$. Entonces $U \cap C \neq \varnothing$, o sea, $x \in \overline{C}$. Esto demuestra que $\prod \overline{C}_\alpha \subset \overline{\prod C_\alpha}$.

El inverso es evidente, pues, por continuidad de π_α:

$$\pi_\alpha[\overline{C}] \subset \overline{\pi_\alpha[C]} = \overline{C_\alpha} \quad \text{para todo } \alpha \in I. \blacksquare$$

5.2.8 *Corolario*

Un conjunto de la forma $C = \prod C_\alpha$ en un espacio producto $\prod X_\alpha$ es cerrado si y sólo si las proyecciones $\pi_\alpha[C] = C_\alpha$ son cerradas en $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$

5.2.9 *Ejercicio*

Probar las siguientes caracterizaciones del interior y de la frontera de conjuntos producto en un producto finito $\prod_{i=1}^{n} X_i$ de espacios topológicos:

$$\overset{\circ}{\left(\prod_{i=1}^{n}\right)} A_i = \prod_{i=1}^{n} \overset{\circ}{A}_i \tag{20}$$

$$fr(\prod_{i=1}^{n} A_i) = (frA_1 \times \overline{A}_2 \times ... \times \overline{A}_n) \cup (\overline{A}_1 \times frA_2 \times ... \times \overline{A}_n) \cup ... \cup (\overline{A}_1 \times ... \times frA_n) \tag{21}$$

Ilustrar la fórmula (21) mediante una gráfica en $\mathbb{R}^2$.

Sobre un subconjunto $\prod_{\alpha\in I} C_\alpha \subset \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ podemos considerar dos topologías: La topología inducida por la topología producto sobre $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y la topología producto de las topologías inducidas $\mathcal{X}_{C\alpha}$. Probaremos que ambas son iguales:

5.2.10 *Proposición (transitividad de la topología producto)*

Sean $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y $((C_\alpha, \mathcal{X}_{C\alpha}))_{\alpha\in I}$ una familia de subespacios $(C_\alpha, \mathcal{X}_{C\alpha}) \subset (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$.

Entonces la topología producto de $\prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ es igual a la topología inducida en $C = \prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ por la topología producto de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

Demostración: Una subbase de la topología producto en C está formada por los conjuntos $(\pi_\alpha|C)^{-1}[U_\alpha \cap C_\alpha]$ $(\alpha \in I)$, donde $U_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$, o sea, $U_\alpha \cap C_\alpha \in \mathcal{X}_{C\alpha}$ y $\pi_\alpha|C$ es la restricción de la α-ésima proyección $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$ a C.

Una subbase de la topología inducida en $\prod C_\alpha$ por la topología de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ está formada por las intersecciones

$$C \cap \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] = C \cap \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha \cap C_\alpha] = (\pi_\alpha|C)^{-1}[U_\alpha \cap C_\alpha]$$

En fin, ambas subbases son iguales. ■

Para analizar la relación entre ciertas propiedades topológicas de los espacios producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y de sus espacios coordenados X_α $(\alpha \in I)$, remarquemos primeramente que existen inmersiones de X_α en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ $(\alpha \in I)$. Más precisamente, si $a = (a_\alpha) \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\beta \in I$, llamaremos **corte paralelo a** X_β **por** a en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ al conjunto.

$$C_{a,\beta} := \{(x_\beta, (a_\alpha)_{\alpha\neq\beta}) \mid x_\beta \in X_\beta\} = X_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} \{a_\alpha\} \tag{22}$$

(fig. 52)

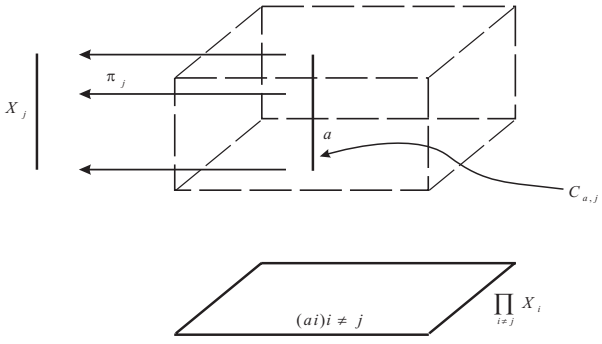


Figura 52. Corte paralelo de X_j por a

Evidentemente, la aplicación

$$x_\beta \mapsto (x_\beta, (a_\alpha)_{\alpha \neq \beta})$$

de X_β sobre $C_{a,\beta}$ es una biyección continua, cuya función inversa es la restricción de la proyección π_β a $C_{a,\beta}$. Por lo tanto:

5.2.11 *Proposición*

Sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ un espacio producto y $a \in X$. Entonces, todo espacio coordenado $X_\beta\,(\beta \in I)$ es homeomorfo al corte paralelo de X_β por a en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$:

$$X_\beta \cong C_{a,\beta} = X_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} \{a_\alpha\}$$

Concluimos que toda propiedad topológica de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ que se transmite por herencia a subespacios se verifica también en los espacios coordenados. Por ejemplo, si $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es metrizable (o AN 1-espacio o AN 2-espacio) entonces $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ lo es también.

Estudiaremos más tarde una serie de propiedades que se transmiten por herencia desde los espacios coordenados a los espacios producto. Las tres propiedades que acabamos de mencionar se transmiten por herencia solamente a productos *numerables*, lo cual parece natural por los axiomas de numerabilidad. Siguiendo la idea de la demostración en el ejemplo 5.2.4, el lector podrá probar los siguientes enunciados:

5.2.12 *Ejercicio*

Sea $X = \prod X_\alpha$ un espacio producto no vacío. Probar que X cumple AN 2 (resp. AN 1) si y sólo si todos los X_α lo cumplen también, y además todos los X_α con excepción de una subfamilia numerable tienen la topología indiscreta.

5.2.13 *Ejercicio*

Sea $((X_\alpha, d_\alpha))_{\alpha\in I}$ una familia infinita, no numerable de espacios métricos. Probar que el espacio producto $\prod X_\alpha$ no puede ser metrizable salvo quizás si todos los (X_α, d_α), con excepción de una subfamilia numerable, son triviales (no contienen más que un punto). En el capítulo 9 demostraremos el inverso de este enunciado.

Consideremos ahora *aplicaciones con valores en espacios producto.* El lector ya estará familiarizado con que una aplicación $f : A \to \mathbb{R}^n$ se represente por sus *funciones coordenadas* $(f_1, ..., f_n)$, donde $f_i = \pi_i \circ f$. Por ejemplo, toda aplicación $f : A \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ se describe completamente por sus coordenadas $Ref = \pi_1 \circ, f$ e $Imf = \pi_2$ o f. La definición siguiente generaliza esta noción a espacios producto cualesquiera:

5.2.14 *Definición (función coordenada)*

Sea f una aplicación de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en un espacio producto $\prod\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$, y sean π_α las proyecciones de $\prod\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$ sobre $Y_\alpha (\alpha \in I)$. Entonces, la función $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$ se llama **α-ésima aplicación coordenada de** f.

Puesto que toda aplicación $f : X \to \prod Y_\alpha$ define de tal manera una única familia $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, e inversamente a toda familia de aplicaciones $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ le corresponde una única función $f : X \to \prod Y_\alpha$ con $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$, la aplicación f se denota a veces por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$.

5.2.15 *Teorema.*

Una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to \prod\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en un espacio producto de una familia $((Y_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ de espacios topológicos es continua si y sólo si sus coordenadas $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ son continuas para toda $\alpha \in I$.

Demostración: Ejercicio. ■

Este teorema es un caso especial de otro más general sobre topologías iniciales que demostraremos en la próxima sección. También se pondrá de manifiesto la estrecha relación que se tiene con la proposición 5.1.17.

5.2.16 *Corolario*

Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ entre espacios topológicos. Entonces la aplicación $f : \prod\limits_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$ definida por

$$f : (x_\alpha) \mapsto (f_\alpha(x_\alpha)) \tag{23}$$

es continua si y sólo si todas las f_α $(\alpha \in I)$ son continuas.

Demostración: Para cada $\alpha \in I$ sea π_α^X (resp. π_α^Y) la α-ésima proyección de

$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ sobre X_α (resp. de $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ sobre Y_α). Remarquemos primeramente que si la composición $f_\alpha \circ \pi_\alpha^X$ es continua, entonces f_α es continua; pues π_α^X es abierta y sobreyectiva y por lo tanto para todo $U \in \mathcal{Y}_\alpha$:

$$\pi_\alpha^X(\pi_\alpha^X)^{-1}[f_\alpha^{-1}[U]] = f_\alpha^{-1}[U]$$

y

$$f_\alpha^{-1}[U] = \pi_\alpha^X[(f \circ \pi_\alpha^X)^{-1}[U]] \in \mathcal{X}_\alpha \tag{24}$$

Ahora el corolario resulta inmediatamente del teorema anterior según el diagrama conmutativo (fig. 53).

$$\pi_\alpha^Y \circ f = f_\alpha \circ \pi_\alpha^X \tag{7}$$

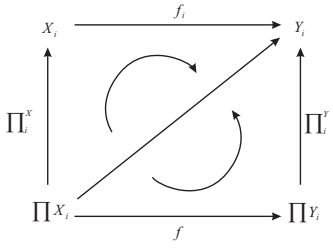


Figura 53.

Nota: Un razonamiento análogo muestra que si las f_α son sobreyectivas, $f = \prod_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es abierta si y sólo si cada $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ es abierta.

Como aplicación del teorema 5.2.15 probaremos la siguiente:

5.2.17 *Proposición (álgebra de las funciones continuas)*

Si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico y si $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones reales continuas de X en $\mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ es un álgebra real que cumple:

$$f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow |f| \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$$
$$f, g \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \text{ máx } (f, g), \text{ mín } (f, g) \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}).$$

Demostración: Si f y g son funcione continuas de X en $\mathbb{R}$, entonces las funciones $f + g$, resp. $f \cdot g$ son continuas; pues son las composiciones de la aplicación continua (5.2.15) $(f, g) : x \mapsto (f(x), g(x))$ de X en $\mathbb{R}^2$ y de las funciones continuas $(x, y) \mapsto x + y$, resp. $(x, y) \mapsto$ xy de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Además $|f|$ es continua si f lo es porque la función $x \mapsto |x|$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ es continua. De esto deducimos que

$$\text{máx}\ (f,g) = 1/2(f+g+|f-g|) \text{ y } \min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

son continuas si f y g lo son. ■

5.2.18 *Ejercicio*

Sean $(X,\mathcal{X})$, $(Y,\mathcal{Y})$ espacios topológicos. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la aplicación $g : x \mapsto (x, f(x))$ es un homeomorfismo de X sobre la gráfica G de f (considerado como un subespacio del espacio producto $X \times Y$).

5.2.19 *Ejercicio*

i) Probar la siguiente *asociatividad del espacio producto:* Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $(J_\beta)_{\beta\in K}$ una partición de I. Para cada $\beta \in K$ denotamos por X'_β al espacio producto $\prod\limits_{\alpha\in J_\beta} X_\alpha$. Entonces la aplicación canónica del espacio producto $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ sobre $\prod\limits_{\beta\in K} X'_\beta$ es un homeomorfismo.

ii) Deducir de i) la *conmutatividad del espacio producto:*
Sea σ una permutación del conjunto de índices I. Entonces la aplicación $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mapsto (x_{\sigma(\alpha)})_{\alpha\in I}$ es un homeomorfismo de $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ sobre $\prod\limits_{\alpha\in I} X_{\sigma(\alpha)}$.

Consideremos ahora brevemente aplicaciones $f : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \to (Y,\mathcal{Y})$, cuyo *dominio* es un espacio producto.

Sea $a = (a_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\beta \in I$. La aplicación $f_{a,\beta} : X_\beta \to (Y,\mathcal{Y})$ definida por

$$f_{a,\beta}(x_\beta) = f((x_\beta, (a_\alpha)_{\alpha\neq\beta}) \quad (x_\beta \in X_\beta)$$

se llama *β-ésima aplicación parcial definida por f en a.* Evidentemente $f_{a,\beta} = (f \circ h)$ donde h es la inmersión $h : x_\beta \mapsto (x_\beta, (a_\alpha)_{\alpha\neq\beta})$ de X_α en $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ (5.2.11). $h[X_\beta]$ es el corte paralelo a X_β por a en $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. La aplicación parcial $f_{a,\beta}$ es continua precisamente si la restricción de f a este corte es continua (fig. 54).

Se dice que f es **parcialmente continua** en a, si todas las aplicaciones parciales $f_{a,\beta}\,(\beta \in I)$ son continuas en a. Puesto que la restricción $f|h[X_\beta]$ es continua si f es continua, resulta que:

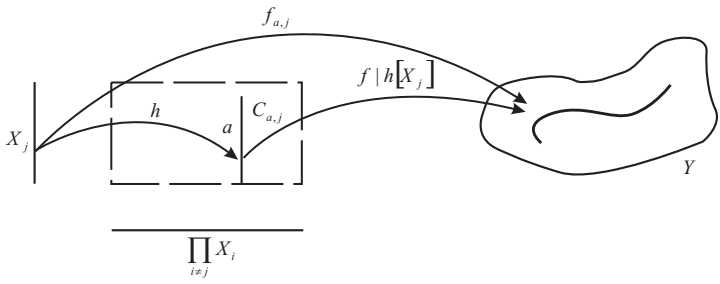


Figura 54. j-ésima función definida por f en a

5.2.20 *Proposición*

Una aplicación f de un espacio producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ en un espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$ que es continua en $a \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es parcialmente continua en a.

Esta proposición naturalmente no permite inversión. Si $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua sobre todo corte $X_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} \{a_\alpha\}$ $(\beta \in I)$ por a, no tiene por que ser continua en a.

5.2.21 *Ejemplo*

$I = \{1, 2\}$, $X_1 = X_2 = Y = \mathbb{R}$. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \end{cases}$$

es parcialmente continua en todo $a \in \mathbb{R}^2$; en particular tenemos $f_{a,1} = f_{a,2} = 0$ para $a = (0, 0)$. Sin embargo, f no es continua en $(0, 0)$; pues siempre que $x_1 = x_2$ se tiene que $f(x_1, x_2) = 1$, luego $\lim_{x_1 \to 0} f((x_1, x_1)) = 1 \neq f((0, 0))$.

Esto significa intuitivamente que la restricción de f a cualquier recta vertical u horizontal en el plano euclidiano es continua, mientras que su restricción a la línea diagonal por $(0, 0)$ no es continua.

§ 5.3 **Topologías iniciales y topologías finales**

En las dos secciones anteriores se han expuesto una serie de propiedades análogas de la *topología inducida y de la topología producto.*

Si $(Y, \mathcal{Y})$ es un espacio topológico $A \subset Y$ e $i_A : A \to Y$ es la inyección canónica, entonces la topología inducida por $\mathcal{Y}$ sobre A es la topología más gruesa sobre A con respecto a la cual i_A es continua. Del mismo modo, la topología producto sobre $\prod Y_\alpha$ es la topología más gruesa con respecto a la cual las proyecciones

$$\pi_\alpha : \prod Y_\alpha \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha) \text{ son continuas } (\alpha \in I).$$

Además se cumple que: una aplicación f de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en $(A, \mathcal{X}_A)$ ($\prod Y_\alpha$ respectivamente), es continua, si y sólo si las funciones i_A o f (resp. π_αo f) $(\alpha \in I)$ lo son. Esta analogía nos conduce a analizar topologías definidas de tal manera por aplicaciones sobre un conjunto Y cualquiera:

Problema de la topología inicial

Sea $((Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de aplicaciones de un conjunto Y en $(Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$. ¿Cuál es la topología más gruesa sobre Ycon respecto a la cual todas las aplicaciones g_α son continuas? (26)

Para una única aplicación g : $Y \to (Y', \mathcal{Y}')$ (I unitario), el problema tiene una solución muy sencilla: el lector ya tendrá suficiente experiencia en el manejo de la preimagen de una colección de conjuntos para comprobar que:

$$g^{-1}\{\mathcal{Y}'\} = \{g^{-1}[U'] \mid U' \in \mathcal{Y}'\} \tag{27}$$

es una topología sobre Y. Se llama **imagen inversa de la topología $\mathcal{Y}'$ *por* g.**

Por la definición, g es continua con respecto a esta topología. Inversamente, toda topología sobre Y con respecto a la cual g es continua contiene a todo $g^{-1}[U'](U' \in \mathcal{Y}')$, por lo tanto a $g^{-1}\{\mathcal{Y}'\}$. Entonces:

$$g^{-1}\{\mathcal{Y}'\} \text{ es la topología más gruesa sobre } Y \text{ que hace a } g \text{ continua} \tag{28}$$

5.3.1 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces la topología inducida sobre A por $\mathcal{X}$ es la topología inversa de $\mathcal{X}$ bajo la inyección canónica $i_a : A \to X$ (5.1.1).

Para tratar el caso general de toda una familia de aplicaciones sobre Y, recordemos que el conjunto $\mathcal{T}(Y)$ de todas las topologías sobre un conjunto Y forma una retícula con respecto a la inclusión (2.2.5). Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(Y)$ es una colección no vacía de topologías sobre Y, entonces $\cap\mathcal{T}$ es el ínfimo de $\mathcal{T}$ y la topología generada por la subbase $\cup\mathcal{T}$ es el supremo de $\mathcal{T}$ en $(\mathcal{T}(Y), \subset)$.

Consideremos una familia de funciones $g_\alpha : Y \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$. Si todas las g_α son continuas con respecto a una topología $\mathcal{Y}'$ sobre Y, entonces $\mathcal{Y}'$ es más fina que toda topología inversa $g_\alpha^{-1}\{\mathcal{Y}_\alpha\}$, luego es más fina que el supremo de todas las topologías $g_\alpha^{-1}\{\mathcal{Y}_\alpha\}$ $(\alpha \in I)$. Inversamente si $\mathcal{Y}$ este supremo, entonces $g_\alpha^{-1}\{\mathcal{Y}_\alpha\} \subset \mathcal{Y}$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, todas las funciones g_α $(\alpha \in I)$ son continuas con respecto a $\mathcal{Y}$. Concluimos que $\mathcal{Y}$ es la topología más gruesa sobre Y, que hace continuas a todas las g_α. En particular, tal topología existe siempre.

5.3.2 *Definición (topología inicial)*

Sea Y un conjunto y $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de funciones g_α que aplican Y en los espacios topológicos $(Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ respectivamente $(\alpha \in I)$. Entonces la topología más gruesa sobre Y con respecto a la cual toda función g_α es continua se llama **topología inicial sobre** Y **definida por** $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ y se denota por $\mathcal{I}(f_\alpha)_I$. Por lo expuesto anteriormente $\mathcal{I}(f_\alpha)_I$ es el supremo de todas la topologías inversas $g_\alpha^{-1}[\mathcal{Y}_\alpha]$ o sea:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha\in I} g_\alpha^{-1}\{\mathcal{Y}_\alpha\} \text{ es una base de la topología inicial definida por } (g_\alpha) \text{ sobre } Y. \tag{29}$$

5.3.3 *Ejercicio*

Sea Y un conjunto, $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de funciones g_α que aplican Y en los espacios topológicos $(Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ respectivamente. Supongamos que para todo $\alpha \in I, \mathcal{H}_\alpha$ es una subbase de la topología $\mathcal{Y}_\alpha$ sobre Y_α. Probar que $\bigcup_{\alpha\in I} g_\alpha^{-1}\{\mathcal{H}_\alpha\}$ es una subbase de la topología inicial definida por $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Analicemos cuándo una aplicación de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en Y es continua con respecto a una topología inicial D sobre Y (fig. 55).

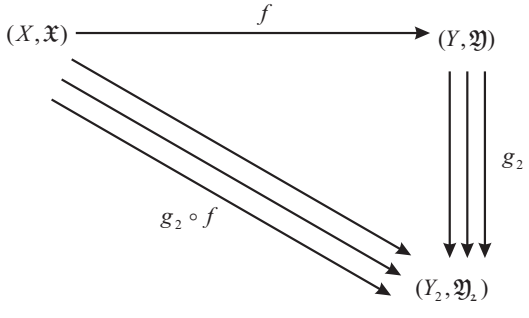


Figura 55.

El teorema siguiente generaliza las proposiciones (10) y 5.2.15.

5.3.4 *Teorema (propiedad universal de la topología inicial)*

Sea Y un conjunto, $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de funciones que aplican Y en los espacios topológicos $(Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ respectivamente $(\alpha \in I)$ y $\mathcal{Y}$ la topología inicial sobre Y definida por $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$. Entonces una aplicación f de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$ es continua si y sólo si todas las aplicaciones $g_\alpha \circ f$ son continuas $(\alpha \in I)$.

Demostración: Si f es continua, las composiciones $g_\alpha \circ f$ lo son por 2.4.23. Supongamos que todas las funciones $g_\alpha \circ f : (X, \mathcal{X}) \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ son continuas.

$\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha \in I} g_\alpha^{-1}\{\mathcal{Y}_\alpha\}$ forma una subbase de $(Y, \mathcal{Y})$. Luego es suficiente probar que toda preimagen de un conjunto $U \in \mathcal{H}$ bajo f es abierto en $(X, \mathcal{X})$. Sea $U = g_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ con $U_\alpha \in \mathcal{Y}_\alpha$ para un $\alpha \in I$. Puesto que $g_\alpha \circ f$ es continua, tenemos:

$$f^{-1}[U] = f^{-1}[g_\alpha^{-1}[U_\alpha]] = (g_\alpha \circ f)^{-1}[U_\alpha] \in \mathcal{X} \quad \blacksquare$$

El teorema anterior explica la relación íntima entre las proposiciones 5.1.7 y (10),

(resp. entre 5.2.5 y 5.2.15). Puesto que la topología inducida y la topología producto son topologías iniciales, tienen las propiedades universales (10) y 5.2.15 respectivamente. Inversamente, la propiedad universal es característica para las topologías iniciales.

5.3.5 *Corolario (Caracterización de la topología inicial)*

Sea Y un conjunto y $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de funciones $g_\alpha : Y \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$. Una topología $\mathcal{Y}$ sobre Y es igual a la topologa inicial $\mathcal{I}(g_\alpha)_I$ si y sólo si tiene la propiedad universal formulada en 5.3.4.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{Y}$ cumpla la propiedad universal. Tomando como $(X, \mathcal{X})$ el espacio $(Y, \mathcal{Y})$ mismo y como f la aplicación $\mathbb{1}_Y : (Y, \mathcal{Y}) \to (Y, \mathcal{I}(g_\alpha)_I)$ vemos que las funciones $g_\alpha = g_\alpha \circ \mathbb{1}_Y$ son continuas. Luego $\mathcal{Y}$ es más fina que la topología inicial $\mathcal{I}(g_\alpha)_I$.

Para probar el inverso tomamos como $(X, \mathcal{X})$ el espacio $(Y, \mathcal{I}(g_\alpha)_I)$ y como f la aplicación $\mathbb{1}_Y : (Y, \mathcal{I}(g_\alpha)_I) \to (Y, \mathcal{Y})$. Puesto que las aplicaciones $g_\alpha = g_\alpha \circ \mathbb{1}_Y : (Y, \mathcal{I}(g_\alpha)_I) \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ son continuas según la definición de la topología inicial $(\alpha \in I)$, $f = \mathbb{1}_Y$ debe ser continua. Luego $\mathcal{Y}$ es más gruesa que $\mathcal{I}(g_\alpha)_I$. Concluimos que $\mathcal{Y} = \mathcal{I}(g_\alpha)_I$.$\blacksquare$

El corolario siguiente generaliza las transitividades de las topologías inducidas y producto (5.2.10).

5.3.6 *Corolario (transitividad de las topologías iniciales)*

Sea Y un conjunto, $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de funciones $g_\alpha : Y \to (Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$ y sea $\mathcal{Y}$ la topología inicial sobre Y definida por $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$. Sea f una aplicación de un conjunto X en Y. Entonces la topología inicial sobre X definida por las funciones $g_\alpha \circ f (\alpha \in I)$ es la imagen inversa de la topología $\mathcal{Y}$ bajo f:

$$\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g_\alpha \circ f)_I \tag{30}$$

Demostración: Puesto que f es continua con respecto a una topología $\mathcal{X}$ sobre X si y sólo si todas las funciones $g_\alpha \circ f$ lo son, la topología más gruesa que hace continua a f es igual a la topología más gruesa que hace continuas a todas las $g_\alpha \circ f (\alpha \in I)$.$\blacksquare$

Estudiaremos ahora unas *topologías iniciales* que no son *topologías inducidas*

ni *topologías producto.*

5.3.7 *Ejemplo (topologías débiles)*

Sea E un espacio vectorial (real o complejo) y sea F un conjunto de formas lineales $u : E \to \mathbb{R}$ (resp. $u : E \to \mathbb{C}$) sobre E. La topología inicial definida por esta colección de funciones sobre E se llama *topología débil definida por el conjunto F de formas lineales.* Puesto que esta topología no se cambia, si sustituimos F por el espacio vectorial $L(F)$ de formas lineales generado por F, en general se supone que F ya es un espacio vectorial.

Por ejemplo, sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y consideremos el espacio vectorial F de todas las formas lineales *continuas* sobre E. Entonces la topología inicial definida por F se llama *topología débil* de E (sin precisar la colección de formas lineales). Una aplicación f de un espacio topológico $(X, \mathcal{X}')$ en E provisto de la topología débil $\mathcal{X}$ es continua si y sólo si $y \circ f$ es continua para toda forma lineal continua $y \in E'$. Si tomamos como $(X, \mathcal{X}')$ el espacio E provisto de la topología $\mathcal{X}_{\|\cdot\|}$ definida por la norma y como f la aplicación identidad $\mathbb{1}_E : (E, \mathcal{X}_{\|\cdot\|}) \to (E, \mathcal{X})$, vemos que $\mathbb{1}_E$ es continua, o sea, la topología débil es más gruesa que la topología definida por la norma. Se puede probar que ambas topologías son iguales si y sólo si E es de dimensión finita.

Pregunta: Proveamos al espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ de su topología débil $\mathcal{X}$. ¿Cuál es el conjunto de todas las formas lineales continuas sobre $(E, \mathcal{X})$?

Pregunta: ¿Es posible interpretar la topología producto de $\mathbb{R}^X$ como topología débil definida por algún espacio vectorial de formas lineales sobre $\mathbb{R}^X$? En caso afirmativo diga cuál sería este espacio vectorial.

5.3.8 *Ejercicio*

Sea $\mathcal{X}$ la topología débil de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Probar que $\mathcal{X}$ es *compatible con la estructura vectorial de E* o sea que cumple:

$(EV1)$ La aplicación $(x, y) \mapsto x+y$ de $(E, \mathcal{X}) \times (E, \mathcal{X})$ en $(E, \mathcal{X})$ es continua.
$(EV2)$ La aplicación $x \mapsto \lambda x$ de $(E, \mathcal{X})$ en $(E, \mathcal{X})$ es continua para todo escalar λ.

Nota: Los espacios vectoriales provistos de una topología compatible con la estructura vectorial de E se llaman **espacios vectoriales topológicos**.

5.3.9 *Ejemplo (espacios enyugados)*

Sea (X, d) un espacio seudométrico. Entonces la topología asociada $\mathcal{X}_d$ es la topología inicial definida por las aplicaciones

$$d_a : x \mapsto d(a, x) \text{ de } X \text{ en } \mathbb{R} \ (a \in X)$$

En efecto, las funciones d_a son continuas con respecto a $\mathcal{X}_\alpha$ (1.5.20). Por lo tanto, $\mathcal{X}_d$ es más fina que $\mathcal{I}(d_a)_X$. Inversamente, todas las bolas $d_a^{-1}[(-\rho,\, \rho)] = B_d(a,\rho)$ $(\rho > 0)$ pertenecen a $\mathcal{I}(d_a)_X$. Concluimos que $\mathcal{X}_d = \mathcal{I}(d_a)_X$. Sea ahora, más generalmente, M una colección arbitraria de seudométricas sobre X. Entonces la topología inicial definida por las funciones

$$d_a : x \mapsto d(a,x) \text{ de } X \text{ en } \mathbb{R} : \ (d \in \mathcal{M}, a \in X)$$

tiene como subbase la colección de bolas

$$\mathcal{B}(M) = \{B_d(a,\rho) \mid d \in \mathcal{M}, a \in X, \rho > 0\} \tag{31}$$

Se dice que $\mathcal{X}_\mathcal{M}$ es la *topología definida por la colección* $\mathcal{M}$ *de seudométricas sobre* X.

Un subconjunto $V \subset X$ es vecindad de a en $(X, \mathcal{X}_\mathcal{M})$ si y sólo si existen $d_1, ..., d_r \in \mathcal{M}$ y $\rho > 0$ tales que

$$B_{d1}(a,\rho) \cap ... \cap B_{dr}(a,\rho) = \{x \in X | \sup(d_1(x,a)..., d_r(x,a)) < \rho\} \subset V.$$

Es evidente que la topología $\mathcal{X}_\mathcal{M}$ no cambia si adjuntamos a $\mathcal{M}$ los supremos sup $(d_1, .., d_r)$ de seudométricas $d_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, .., r)$. Puede suponerse sin pérdida de generalidad que $\mathcal{M}$ contiene, con toda familia finita $(d_1, .., d_r)$, su supremo. Tales colecciones de seudométricas se llaman saturadas. Si $\mathcal{M}$ es una colección saturada de seudométricas, entonces $V \subset X$ es vecindad de $a \in X$ si y sólo si existe una bola $B_d(a,\rho)$ $(\rho > 0, d \in \mathcal{M})$ contenida en V.

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **enyugado**, si existe una colección de seudométricas $\mathcal{M}$ sobre X tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\mathcal{M}$. La clase de los espacios enyugados es más amplia que la clase de los espacios metrizables. Por ejemplo, todo espacio producto $\mathbb{R}^X$ ($X \neq \varnothing$ un conjunto cualquiera) es enyugado (mientras que es metrizable sólo para conjuntos *numerables* X, según veremos en el capítulo 10). Para verlo basta considerar el conjunto $\mathcal{M}$ de todas las seudométricas

$$(f,g) \mapsto |f(x) - g(x)| \quad \text{sobre } \mathbb{R}^X \quad (x \in X)$$

5.3.10 *Ejercicio (espacios localmente convexos)*

Sea E un espacio vectorial real y sea $\mathcal{B}$ una colección de seminormas sobre E.

i) Dar una definición de la topología $\mathcal{X}_\mathcal{B}$ definida sobre E análoga a la de la topología $\mathcal{X}_\mathcal{M}$.

ii) Determinar una subbase de la topología $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$.

iii) Probar que $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ es compatible con la estructura vectorial de E, o sea, que $(E, \mathcal{X}_{\mathcal{B}})$ es un espacio vectorial topológico.

iv) $\mathcal{B}$ se llama **saturado** si contiene junto con seminormas cualesquiera $p_1, .., p_r$ también a las seminormas

$$\sup(p_1, .., p_r) \text{ y } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \, (\lambda_i \geq 0).$$

Probar que $\mathcal{B}$ puede sustituirse por una colección saturada de seminormas sin modificar a $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$.

v) Probar que todo punto $a \in E$ posee un sistema fundamental de vecindades formado por conjuntos convexos en $(E, \mathcal{X}_{\mathcal{B}})$.

Nota: Un espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{X})$ se llama **localmente convexo** si todo punto $a \in E$ posee un sistema fundamental de vecindades formado por conjuntos convexos. La topología de tal espacio siempre puede definirse por una colección de seminormas mediante la manera forma en el ejercicio 5.3.10.

Trataremos ahora las *topologías finales* rápidamente, puesto que los conceptos y resultados serán muy similares a los ya estudiados para topologías iniciales.

Sabemos que una aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ sigue siendo continua si sustituimos $\mathcal{X}$ por una topología más fina y $\mathcal{Y}$ por una topología más gruesa. El problema dual al problema de la topología inicial es el siguiente:

Problema de la topología final

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de aplicaciones de X_α en un conjunto X $(\alpha \in I)$ ¿Cuál es la topología más fina sobre X con respecto a la cual las aplicaciones f_α son todas continuas? (32)

Evidentemente, una topología $\mathcal{X}$ sobre X hace continuas a todas las funciones f_α si y sólo si las preimágenes de cada $U \in \mathcal{X}$ bajo f_α son abiertas en $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$, o sea, si y sólo si

$$\mathcal{X} \subset \{U \in \mathcal{B}(X) | \forall \alpha \in I : f_\alpha^{-1}[U] \in \mathcal{X}_\alpha\}$$

Pero el conjunto del lado derecho es una topología. Con esto ya hemos hallado la respuesta a la pregunta anterior.

5.3.11 *Definición (topología final)*

Sea X un conjunto y $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to X$ aplicaciones de espacios topológicos $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ en X. La topología más fina sobre X con respecto a la cual todas las funciones f_α son continuas se llama *topología final* definida por la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ y se denota por $\Im(f_\alpha)_I$.

Por el razonamiento anterior tenemos la siguiente equivalencia:

$$U \text{ es abierto en } \quad (X, \Im(f_\alpha)_I) \Longleftrightarrow \forall \alpha \in I \quad f_\alpha^{-1}[C] \in \mathcal{X}_\alpha \tag{33}$$

Por dualidad se obtiene:

$$C \text{ es cerrado en } \quad (X, \Im(f_\alpha)_I) \Longleftrightarrow \forall \alpha \in I \quad f_\alpha^{-1}[U] \in \mathrm{C}_\alpha \tag{34}$$

El teorema siguiente y sus corolarios son duales de los resultados 5.3.4, 5.3.5 y 5.3.6.

5.3.12 *Teorema (propiedad universal de la topología final)*

Sea $\mathcal{X}$ una topología final sobre X definida por una famila de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to X \, (\alpha \in I)$. Entonces $(X, \mathcal{X})$ tiene la siguiente propiedad universal:

$$\begin{array}{l} \text{Una aplicación } g \text{ de } (X, \mathcal{X}) \text{ en un espacio topológico} \\ \text{cualquiera } (Y, \mathcal{Y}) \text{ es continua si y sólo si toda aplicación} \\ g \circ f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to (Y, \mathcal{Y}) \text{ es continua } (\alpha \in I) \end{array} \tag{35}$$

Demostración: Ejercicio. ■

5.3.13 *Corolario (caracterización de la topología final)*

Si un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ verifica la propiedad universal (35) con respecto a una familia de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to X$, entonces $\mathcal{X} = \Im(f_\alpha)_I$

Demostración: Ejercicio. ■

5.3.14 *Corolario (transitividad de la topología final)*

Sea $\mathcal{X}$ la topología final sobre un conjunto X definida por una familia de aplicaciones $f_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to X \, (\alpha \in I)$. Sea g una aplicación de X en un conjunto Y. Entonces, la topología final sobre Y definida por $(g \circ f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es igual a la topología final sobre Y definida por la familia unitaria (g):

$$\Im(g \circ f_\alpha)_I = \Im(g) \tag{36}$$

Demostración: Ejercicio. ■

Pregunta: Sea $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de topologías sobre un conjunto X. Sea $\mathbb{1}_\alpha$ la aplicación idéntidad $x \mapsto x$ de $(X, \mathcal{X}_\alpha)$ sobre X. ¿Cuál es la topología final sobre X definida por $(\mathbb{1}_\alpha)_{\alpha\in I}$? ¿Cuál es la topología inicial sobre X definida por $(\mathbb{1}_\alpha^{-1})_{\alpha\in I}$?

Para concretar el concepto de topología final estudiaremos ahora brevemente el caso de una sola función f que aplica un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ en un conjunto Y. Entonces la topología final sobre Y definida por la función f:

$$\mathcal{Y} = \{U \in \mathcal{P}(Y) \mid f^{-1}[U] \in \mathcal{X}\} \tag{37}$$

se llama *imagen directa de la topología $\mathcal{X}$ por f o topología de identificación* (definida por $f : (X, \mathcal{X}) \to Y$). Pero

$\rightsquigarrow$¡Atención! $\mathcal{Y}$ no consiste sencillamente de todas la imágenes directas $f[U]$ de abiertos $U \in \mathcal{X}.f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ no es necesariamente una función abierta, pues es bien posible que $U \in \mathcal{X}$ mientras que $f^{-1}[f[U]] \notin \mathcal{X}$. Sin embargo, si f es *inyectiva*, entonces $f^{-1}[f[U]] = U$ para todo $U \subset X$ y, por tanto, se cumple que $U \in \mathcal{X} \Longrightarrow f[U] \in \mathcal{Y}$. Pero este caso no es muy interesante, porque f es entonces una inmersión de X en Y. El problema interesante es analizar qué pasa con la topología $\mathcal{Y}$ si f identifica diferentes puntos de X aplicándolos a un mismo punto de Y.

Si $x \in Y\backslash f[X]$, entonces $f^{-1}[\{x\}] = \varnothing$, luego $\{x\} \in \mathcal{Y}$. La topología final induce la topología discreta sobre $Y\backslash f[X]$. Por eso se presupone en general que f es sobreyectiva si se considera la topología de identificación definida por f.

5.3.15 *Definición (identificación)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos. Una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ se llama **identificación** si es sobreyectiva, y si $\mathcal{Y}$ es la topología final con respecto a f.

Si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una identificación, entonces una aplicación g de $(Y, \mathcal{Y})$ en otro espacio topológico es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua (5.3.12).

Del mismo modo es fácil caracterizar los abiertos y los cerrados de $(Y, \mathcal{Y})$. Llamaremos f-saturado a todo subconjunto $A \subset X$ tal que $f^{-1}[f[A]] = A$. Un subconjunto $A \subset X$ es precisamente *$f-$saturado* si existe $B \subset Y$ tal que $A = f^{-1}[B]$. De aquí concluimos que:

Los abiertos de $(Y, \mathcal{Y})$ son precisamente las imágenes de los subconjuntos abiertos $f-$saturados de $(X, \mathcal{X})$ por f (análogamente para los cerrados).

Nos preguntamos: ¿Cuándo una aplicación sobreyectiva $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una identificación? Necesariamente debe aplicar todo subconjunto abierto f-saturado de $(X, \mathcal{X})$ sobre un abierto de $(Y, \mathcal{Y})$; pues, si $A = f^{-1}[B] \in \mathcal{X}$, entonces $f[A] = B \in \Im(f)$ por (37). Aplicaciones con esta propiedad las llamaremos **casi abiertas**. Análogamente llamaremos **casi cerradas** a todas las aplicaciones sobreyectivas $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ que aplican todo subconjunto cerrado $f-$saturado de $(X, \mathcal{X})$ sobre un cerrado de $(Y, \mathcal{Y})$.

5.3.16 *Proposición (caracterización de las identificaciones)*

Una aplicación sobreyectiva $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una identificación si y sólo si es continua y casi abierta (resp. casi cerrada).

Demostración: Ejercicio. ■

5.3.17 *Corolario*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces es una identificación.

5.3.18 *Ejemplo*

Sea X un subconjunto *cerrado y acotado* de $\mathbb{R}$, provisto de la topología inducida y sea $f : X \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación continua y sobreyectiva, donde $(Y, \mathcal{Y})$ es un AN 1 espacio. Veremos que f es una aplicación cerrada. En efecto, si $C \subset X$ es cerrado en X, entonces es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Por ser $(Y, \mathcal{Y})$ AN 1, en este espacio se puede caracterizar la cerradura mediante sucesiones. Si $(f(x_n))$ es una sucesión en $f[C]$ que converge a un punto frontera $y \in Y$, entonces existe una subsucesión $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) que converge a un punto $x \in C$. De aquí que

$$y = \lim(f(x_n)) = \lim(f(x_{\phi(n)}) = f(\lim(x_{\phi(n)}) = f(x) \in f[C],$$

o sea, $f[C]$ es cerrado. Concluimos que f es cerrada y, por 5.3.17, y es una identificación.

La terminología introducida (identificación, topología de identificación) y la utilidad de los nuevos conceptos se verá en la próxima sección.

5.3.19 *Ejercicio*

Probar que la composición de dos identificaciones es una identificación.

5.3.20 *Ejercicio*

Probar que la aplicación $f : x \mapsto x/ \parallel x \parallel$ del espacio $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$, sobre la esfera unitaria n-dimensional $E^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una identificación.

5.3.21 *Ejercicio*

Sea $(A, \mathcal{X}_A)$ un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Una aplicación continua $f : X \to A$ se llama una **retracción** de X sobre A, si la restricción $f|A$ es la aplicación identidad sobre A. Probar que toda retracción es una identificación.

5.3.22 *Ejercicio*

Sea $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ la función

$$x \mapsto \begin{cases} \sin 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y sea $\mathcal{X}$ la topología de identificación definida por f sobre $[-1, 1]$. Probar que la única vecindad de $0 \in [-1, 1]$ con respecto a $\mathcal{X}$ es todo [-1, 1].

5.3.23 *Ejercicio*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una identificación y $A \subset X$. Hallar condiciones con las cuales la restricción $g = f|A : x \mapsto f(x)$ de A sobre $f[A]$ sea una identificación.

§ 5.4 **Espacios cociente**

En la sección anterior hemos estudiado las topologías de identificación en abstracto como caso particular de una topología final. Ahora analizaremos su sentido intuitivo. Partiendo de un espacio topológico dado, podemos construir nuevos espacios identificando ciertos de sus puntos.

5.4.1 *Ejemplo*

El círculo E^1 se obtiene partiendo del intervalo $[0, 1]$ por identificación de los puntos 0 y 1 (fig. 56).

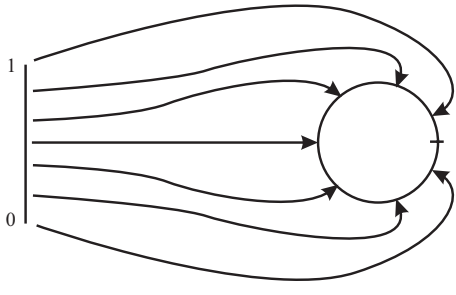


Figura 56.

5.4.2 *Ejemplo*

Si identificamos todos los puntos de la tapa de un cilindro obtenemos un cono (fig. 57).

5.4.3 *Ejemplo*

Partiendo del cuadrado $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, obtenemos dos espacios diferentes por identificación de los puntos de dos lados opuestos (fig. 58): Las flechas indican cuándo identificamos los lados en igual sentido o en sentido opuesto.

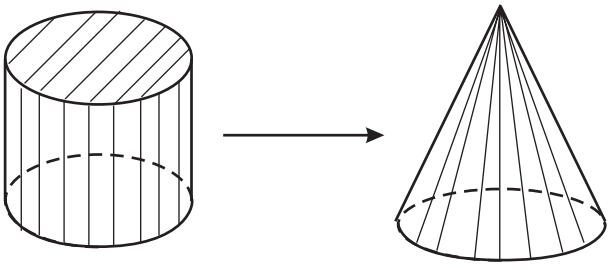


Figura 57.

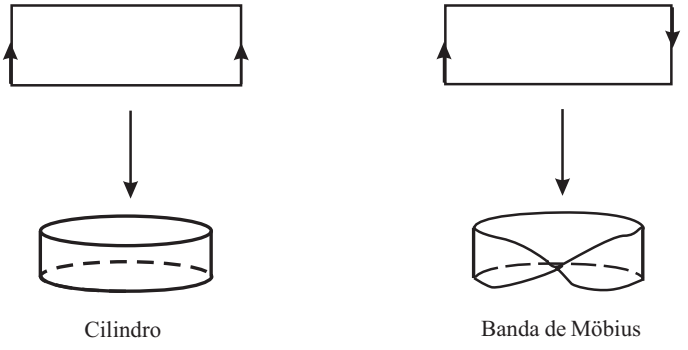


Figura 58.

En el primer caso obtenemos la superficie lateral de un cilindro. En el segundo caso obtenemos la famosa banda de Möbius que tiene un único borde.

5.4.4 *Ejemplo*

Por identificación sucesiva de dos pares de lados opuestos de I^2 (en el mismo sentido), obtenemos un anillo de dimensión 2 (fig. 59).

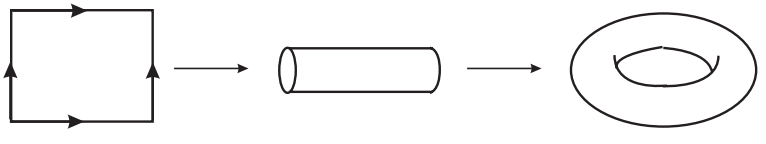


Figura 59.

5.4.5 *Ejemplo*

Trataremos ahora de identificar los lados de I^2 mediante el esquema siguiente (fig. 60).

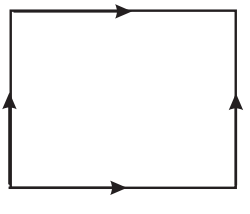


Figura 60.

El resultado (la llamada *botella de Klein*) ya no puede representarse de manera adecuada en $\mathbb{R}^3$. Pero existe un modelo tridimensional que nos sirve para formarnos una idea, aunque tenga autointersecciones que la botella de Klein no tiene (fig. 61).

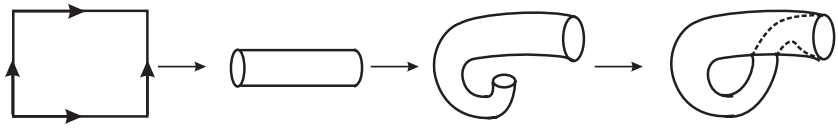


Figura 61. Botella de Klein

Una identificación muy sencilla de puntos como en el ejemplo anterior ya transforma una superficie elemental en un espacio relativamente complejo, tal que nuestros conceptos intuitivos se confunden. Esto nos muestra la necesidad de precisar formalmente la noción de un espacio obtenido por identificación de ciertos puntos de un espacio topológico.

Si identificamos puntos de un espacio X, consideremos a su vez el espacio de las clases de equivalencia definidas por la relación

$$xRy \Longleftrightarrow x \text{ se identifica con } y$$

Inversamente podemos interpretar todo conjunto cociente X/R como conjunto obtenido por identificación de los puntos de X, que pertenecen a la misma clase de equivalencia. Luego, nuestro problema consiste en definir una topología sobre X/R partiendo de una topología $\mathcal{X}$ sobre X.

Parece natural llamar *abierto* a un conjunto $U \subset X/R$ si y sólo si la unión de clases en U es abierta en $(X, \mathcal{X})$. Esto significa que $U \subset X/R$ es abierto si y sólo si su imagen inversa por la aplicación canónica $\varphi : X \to X/R$ es abierta.

5.4.6 *Definición (topología cociente, espacio cociente)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. La topología de identificación definida por la aplicación canónica $\varphi : x \mapsto [x]$ de $(X, \mathcal{X})$ sobre X/R se llama *topología* **cociente** de $\mathcal{X}$ por R y se denota por $\mathcal{X}/R$. Al espacio topológico $(X/R,\ \mathcal{X}/R)$ se le llama **espacio cociente** de $(X, \mathcal{X})$ bajo R (notación X/R cuando no existan dudas).

De la sección anterior tenemos las caracterizaciones siguientes:

$$A \text{ abierto en } X/R \Leftrightarrow \varphi^{-1}[A] \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \bigcup_{[x]\in A} [x] \text{ abierto en } (X, \mathcal{X}) \tag{38}$$

$$C \text{ cerrado en } X/R \Leftrightarrow \varphi^{-1}[C] \in \mathcal{C}_\chi \Leftrightarrow \cup[x] \text{ cerrado en } (X, \mathcal{X}) \tag{39}$$

$$g : X/R \to (Y, \mathcal{Y}) \text{ continua } \Leftrightarrow g \circ \varphi : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y}) \text{ continua} \tag{40}$$

Consideremos ahora una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ que sea *compatible* con la relación $\mathbb{R}$; o sea:

$$xRy \Longrightarrow f(x) = f(y) \text{ para todos los } x, y \in X \tag{41}$$

La teoría de conjuntos nos muestra (ver apéndice) que en este caso existe una única *descomposición canónica* de f:

$$f = \bar{f} \circ \varphi \tag{42}$$

donde $\overline{f} : X/R \to Y$ asocia a toda clase $[x]$ el valor $f(x)$ $(x \in [x])$.

La topología cociente $\mathcal{X}/R$ está caracterizada por la propiedad universal de permitir una descomposición *continua* de toda aplicación continua y R-compatible $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ (fig. 62).

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathfrak{X}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & X/\mathrm{R} \arrow[d, "\overline{f}"] \\
& (Y,\mathfrak{Y})
\end{tikzcd}$$

f continua $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ continua

Figura 62.

La aplicación $f \mapsto \overline{f}$ establece una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones continuas y $R-$compatibles $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$, y las aplicaciones continuas $g : X/R \to (Y, \mathcal{Y})$.

Nota: (problema del levantamiento). Mucho más difícil que la descomposición canónica de una función f con respecto a una relación sobre el espacio de partida es el problema dual siguiente: sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y R una relación de equivalencia *sobre* Y. Entonces, dada una aplicación continua $\overline{g} : X \to Y/R$, se busca una aplicación continua $g : X \to Y$ tal que $\varphi \circ g = \overline{g}$ (fig. 63).

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathfrak{X}) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\overline{g}"'] & (Y,\mathfrak{Y}) \arrow[d, "\varphi"] \\
& X/R
\end{tikzcd}$$

Figura 63.

Este problema de hallar un levantamiento continuo de $\overline{g}$ se puede también caracterizar de la manera siguiente: determinar en cada clase de equivalencia

$\overline{g}(x)$ un elemento $g(x)$ tal que la aplicación $g : X \to Y$ así definida sea continua. No trataremos el problema de levantamiento en este libro.

5.4.7 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos, R y Q relaciones de equivalencia sobre X y Y resp. Supongamos que $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua y compatible con estas relaciones, o sea:

$$xRy \Longrightarrow f(x)Qf(y) \tag{44}$$

i) Probar que $\bar{f} : X/R \to Y/Q$ definida por descomposición canónica de f a partir del esquema (fig. 64), es continua.

ii) Probar que, si φ y ψ son abiertas, entonces se tiene el homeomorfismo

$$(X \times Y)/(R \times Q) \cong X/R \times Y/Q \tag{45}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X/R \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y/Q \end{tikzcd}$$

Figura 64.

donde:

$$((x, y), (x', y')) \in R \times Q \Longleftrightarrow (x, x') \in R \wedge (y, y') \in Q.$$

Consideremos ahora la *descomposición canónica* de una aplicación continua.

A toda aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ le asociamos la relación de equivalencia R_f sobre X, definida por

$$xR_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \tag{46}$$

Está claro que f es compatible con esta relación de equivalencia. La descomposición correspondiente de f se llama *descomposición canónica de* f. Sabemos que (véase apéndice) si $f = \bar{f} \circ \varphi$ es la descomposición canónica de f:

$$\bar{f} \text{ es inyectiva} \tag{47}$$

$$\bar{f} \text{ es biyectiva } \iff f \text{ es sobreyectiva} \tag{48}$$

$\rightsquigarrow$ Imaginémonos por un momento que f sea un morfismo de una categoría *algebraica*, por ejemplo, un homomorfismo sobreyectivo entre dos *grupos* G y H. En este caso sabemos que $\bar{f}$ obtenida por descomposición canónica de f es un *isomorfismo* de grupos (entre G/R_f y H). Podríamos esperar un resultado análogo para las aplicaciones continuas como morfismos de la categoría de los espacios topológicos. *Sin embargo, esto no es cierto.*

5.4.8 *Ejemplo*

Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología discreta, $Y = \mathbb{R}$ provisto de la topología usual y $\mathbb{1} : X \to Y$ la identidad. Entonces la relación de equivalencia asociada es la relación identidad:

$$xRx' \iff x = x'$$

$\varphi : X \to X/R$ es un homeomorfismo pero $\overline{f}$ no puede serlo, ya que f no lo es. Concluimos que $\bar{f}$ es una biyección continua pero no abierta, ni cerrada.

Nos preguntamos cuándo $\bar{f}$ es un homeomorfismo, o sea, un isomorfismo de la categoría de los espacios topológicos.

5.4.9 *Proposición*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos, $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación sobreyectiva. Entonces la función $\bar{f}$ obtenida por descomposición de f es un homeomorfismo de X/R_f sobre $(Y, \mathcal{Y})$ si y sólo si f es continua y casi abierta (o casi cerrada). (Es decir, si y sólo si f es una identificación).

Demostración: f continua y casi abierta $\iff \mathcal{Y} = \Im(f) \iff \mathcal{Y} = \Im(\bar{f}) \iff \bar{f} : X/R_f \to (Y, \mathcal{Y})$ es un homeomorfismo; la primera equivalencia esta dada por la caracterización 5.3.16 de las topologías de identificación; la segunda por la transitividad de la topología final (5.3.14). ■

En particular, si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es sobreyectiva, continua y abierta (o cerrada), entonces la función $\bar{f}$ obtenida por descomposición canónica de f es un homeomorfismo de X/R_f sobre $(Y, \mathcal{Y})$.

Para terminar esta sección consideraremos ahora una serie de ejemplos importantes de espacios cociente.

5.4.10 *Ejemplo (toro)*

Sea $X = \mathbb{R}$ provisto de la topología usual y sea R la relación de equivalencia siguiente sobre $\mathbb{R}$:

$$xRy \iff x = y \pmod{\mathbb{Z}} \iff y - x \in \mathbb{Z}.$$

El espacio cociente $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/R$ se llama *toro unidimensional.* Es homeomorfo al círculo unitario $E^1 = \{x \in \mathbb{C} |\ |x| = 1\}$. En efecto, $f : t \to e^{2\pi i t}$ es una

aplicación continua, sobreyectiva y casi cerrada de $\mathbb{R}$ sobre E^1, entonces, define un homeomorfismo $\overline{f}$ de $\mathbb{R}/R_f = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sobre E^1 (5.4.9). Por (43), las funciones continuas sobre T pueden identificarse con las funciones continuas de período uno sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos ahora análogamente sobre $X = \mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$xRy \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}^n$$

El espacio cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$: $\mathbb{R}^n/R$ se llama **toro n-dimensional** y se denota por T^n. Esta notación no debe causar confusión, puesto que el toro n-dimensional es homeomorfo al producto $T \times ... \times T$ (n veces).

En efecto, por el diagrama (fig. 65), (donde φ es la relación de equivalencia que define T y $\bar{\varphi}$ la que define $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^n$) se desprende que $\overline{f}$ es un homeomorfismo por ser f casi cerrada.

Pregunta: ¿Por qué la aplicación $t \mapsto e^{2\pi i t}$ de $\mathbb{R}$ sobre E^1 es casi cerrada? (Indicación: Utilizar 5.3.18). ¿Es también cerrada?

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[dr, "f = \underbrace{(\varphi,\varphi,...,\varphi)}_{n \text{ veces}}"'] & R^n/Z^n \arrow[d, "\overline{f}"] \\
& (R/Z)^n
\end{tikzcd}$$

Figura 65.

5.4.11 *Ejemplo (espacios encogidos)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espaco topológico, $A \subset X$ un subespacio. A partir de A se define una relación de equivalencia R_A que identifica los puntos de A:

$$xR_Ay \Longleftrightarrow (x, y \in A) \vee (x = y)$$

El espacio cociente $X/A := X/R_A$ se llama **espacio obtenido por identificación de los puntos** *de* A. Con esta noción hemos generalizado el procedimiento de los ejemplos 5.4.1 y 5.4.2.

En efecto E^1 se obtiene por identificación de los puntos de $A = \{0, 1\}$ en el intervalo $I = [0, 1]$:

$$[0, 1]/\{0, 1\} \cong E^1 \cong T^1.$$

De la misma forma, si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico, $X \times I$ el cilindro de base X y de altitud 1, entonces el cono correspondiente $C(X)$ se obtiene por identificación de todos los puntos de

$$A = X \times \{1\} \text{ en } X \times I:$$
$$C(X) := X \times I/X \times \{1\}$$

Nota: Eventualmente el cono $C(X)$ puede tener más abiertos que su representación geométrica. Consideremos por ejemplo el cilindro y el cono de altitud 1 sobre el intervalo $X = [0, 1)$. Sus representaciones geométricas son (fig. 66): El área sombreada del cono es una vecindad del vertice v en $C(X)$,

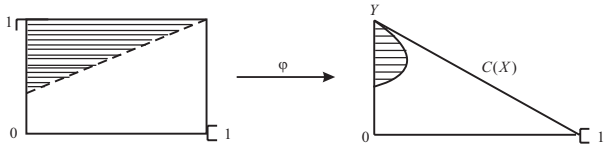


Figura 66.

puesto que su preimagen bajo φ es una vecindad abierta saturada de $X \times \{1\} = \varphi^{-1}[\{v\}]$ en $X \times I$. Sin embargo, no es una vecindad de (0,1) en la representación geométrica de $C(X)$.

5.4.12 *Ejemplo (espacios proyectivos)*

A todo espacio vectorial E se le puede asociar un *espacio proyectivo* $P(E)$ definido como el conjunto de todas sus rectas a través de 0. Más precisamente $P(E)$ es el conjunto cociente $\mathbf{E}^* = E\backslash\{0\}$ con la relación de equivalencia Δ definida de la siguiente manera:

$$x\Delta y \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* \quad y = tx$$

Supongamos ahora que $(E, \mathcal{X})$ sea un espacio vectorial topológico. Entonces se provee al canónicamente al espacio $P(E) = E^*/\Delta$ de la topología cociente asociada. La aplicación canónica $p : x \mapsto [x]$ de E^* sobre $P(E)$ se llama aplicación fundamental y es continua y *abierta*. En efecto, si $A \subset E^*$ es abierto, entonces

$$p^{-1}[p[A]] = \underset{t\in\mathbb{R}^*}{\cup} tA \text{ es abierto, Por lo tanto } \; p[A] \in \mathcal{X}/\Delta$$

En particular si $E = \mathbb{R}^{n+1}$, entonces el espacio $P_n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^*)^{n+1}/\Delta$ se llama *espacio proyectivo de dimensión n (sobre* $\mathbb{R}$). Si

$$[x] = \{(tx_0, ..., tx_n) \mid t \in \mathbb{R}^*\} \in P_n(\mathbb{R}),$$

entonces los $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, .., n)$ se llaman coordenadas homogéneas del punto $[x]$. Veremos ahora que $P_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a espacios cocientes de la esfera unitaria n-dimensional E^n y de la bola unitaria cerrada B^n.

Proveamos a la esfera n-dimensional $E^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \| x \| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de la topología inducida por la topología de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea p_E la restricción de la aplicación

canónica de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ sobre $P_n(\mathbb{R})$ a E^n. Esta aplicación $p_E : E^n \to P_n(\mathbb{R})$ es continua y sobreyectiva. Además, por ser E^n acotado y cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$ se tiene que p_E es cerrada (5.3.18). Resulta de 5.4.9 que $\overline{p_E}$ es un homeomorfismo de E^n/Δ_E sobre $P_n(\mathbb{R})$, donde $\Delta_E := R_{PE}$ es la relación de equivalencia inducida por Δ en E^n. Hemos demostrado que:

$P_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo al espacio E^n/Δ_E, que se obtiene de la esfera E^n por identificación de puntos opuestos (49)

Sea $z = (1, 0, 0, .., 0)$ el Polo Norte de E^n e identifiquemos $\mathbb{R}^n$ con el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0 = -1\}$. Entonces, la proyección estereográfica s de $E^n \backslash \{z\}$ sobre $\mathbb{R}^n$ se define de la manera siguiente: $s(x)$ es el único punto de $H \cong \mathbb{R}^n$ tal que $s(x), x$ y z son colineales (fig. 67). La gráfica muestra que $s(x) = (q(x) \cdot 2)/(1 - < x, z >) = 2q(x)/(1 - \cos\theta)$, donde q es la proyección canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$

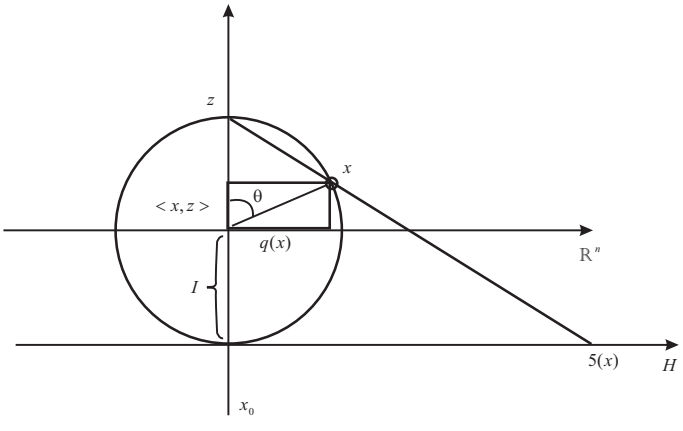


Figura 67.

sobre $\mathbb{R}^n$ y θ es el ángulo entre los vectores x y z. Es fácil comprobar que s es un homeomorfismo de $E^n \backslash \{z\}$ sobre $\mathbb{R}^n$. La restricción de s a la esfera meridional $E = \{x \in E^n | x_0 \leq 0\}$ es un homeomorfismo de E sobre la bola cerrada $B'(0, 2)$ de centro 0 y de radio 2 en $\mathbb{R}^n$. Los únicos puntos opuestos de E están situados sobre el ecuador y son aplicados por s sobre puntos opuestos de la esfera $E(0, 2) \subset \mathbb{R}^n$.

Utilizando ahora el resultado anterior obtenemos la siguiente proposición cuya demostración detallada dejamos al lector:

$P_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a toda bola cerrada $B_n(0, \rho)$ en $\mathbb{R}^n$, si se identifican los puntos opuestos de la esfera correspondiente: (50)
$P_n(\mathbb{R}) \cong B'_n(0, \rho)/\Delta_B$ con $x \Delta_B y \Longleftrightarrow x = y \vee x = -y \in E(0, \rho)$.

5.4.13 *Ejercicio*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una identificación y $A \subset X$. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $g : x \mapsto f(x)$ de A sobre $f[A]$ es una identificación.

ii) Todo conjunto abierto g-saturado de A es la traza de un abierto f-saturado de X sobre A.

iii) Todo conjunto cerrado g-saturado de A es la traza de un cerrado f-saturado de X sobre A.

Probar que las condiciones siguientes son suficientes para que g sea una identificación:

iv) Para todo $U \subset A$, si U es g-saturado y abierto (resp. cerrado) en A, entonces $f^{-1}[f[U]]$ es abierto (resp. cerrado) en X;

v) A es abierto (resp. cerrado) y f-saturado en X;

vi)) Existe una aplicación $u : X \to A$ tal que $f \circ u(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

5.4.14 *Ejercicio (espacio de suspensión)*

Si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico, entonces el espacio cociente $(X \times [-1, 1])/R$, donde $R = \{X \times \{1\}, X \times \{-1\}\}$, se llama **espacio de suspensión** de X y se denota por $S(X)$. Probar que:

i) $S(X) = C(X)/X$ (¿Por qué X puede considerarse como subespacio de $C(X)$?)

ii) $C(X)$ es homeomorfo al subespacio

$$S^+(X) := \{[(x, t)] \in S(X) \mid t \geq 0\} \text{ de } S(X);$$

iii) Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ induce aplicaciones continuas

$$Cf : C(X) \to C(Y) \quad \text{y} \quad Sf : S(X) \to S(Y)$$

Nota: En este caso $(X \times [-1, 1])/R$ denota el espacio cociente cuyas únicas clases de equivalencia no unitarias son $X \times \{1\}$ y $X \times \{-1\}$ (fig. 68).

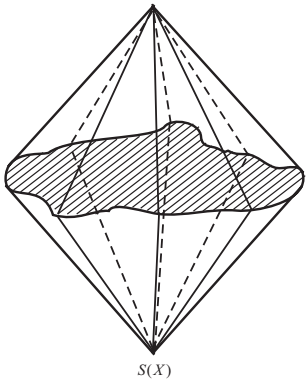


Figura 68.

5.4.15 *Ejercicio*

Probar los siguientes enunciados:

i) Existe un homeomorfismo de $C(E^{n-1})$ sobre la bola unitaria cerrada $B_n^{'} \subset \mathbb{R}^n$ (utilizar el ejemplo 5.3.18).

ii) Existe un homeomorfismo de E^n sobre $S(E^{n-1})$ y de $B_n^{'}/E^{n-1}$ sobre E^n.

§ 5.5 **Espacios Suma**

A continuación utilizaremos algunas propiedades relativas a la suma de una familia de conjuntos (remitimos al lector al apéndice).

Supongamos que tenemos una familia de espacios topológicos $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$. Entonces parece natural definir sobre la suma $X = \cup X_\alpha$ una topología $\mathcal{X}$ mediante una sencilla adición de las topologías $\mathcal{X}_\alpha^{'}$ imágenes de las $\mathcal{X}_\alpha$ por las inyecciones canónicas j_α. Llamaremos *abierto* a todo subconjunto $U \subset X$ si puede representarse como unión $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha^{'}$ de abiertos $U_\alpha^{'} \in \mathcal{X}_\alpha^{'}$. Esto significa que $U \in \mathcal{X}$ si y sólo si $j_\alpha^{-1}[U] \in \mathcal{X}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

5.5.1 *Definición (espacio suma)*

Sea $((X_\alpha\ ,\mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces el espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **espacio suma** de la familia $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ si X es el conjunto suma de la familia $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ y si $\mathcal{X}$ es la topología final definida por la familia de las inyecciones canónicas asociadas $j_\alpha : X_\alpha \to X$ $(\alpha \in I)$.

Notación:

$$(X, \mathcal{X}) := \sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha); \qquad \mathcal{X} = \sum_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$$

Sea $(X, \mathcal{X}) = \sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ y sean $j_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha^{'} \subset X$ las inyecciones

canónicas. Entonces, por (32), se cumple para todo subconjunto $U \subset X$:

$$U \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in I \quad (j_\alpha^{-1}[U] = j_\alpha^{-1}[U \cap X_\alpha^{'}] \in \mathcal{X}_\alpha \tag{51}$$

Si $U \subset X_\alpha^{'}$, entonces $j_\beta^{-1}[U] = \varnothing \in \mathcal{X}_\beta$ para todo $\beta \in I \backslash \{\alpha\}$, por lo tanto:

$$U \in \mathcal{X} \Longleftrightarrow j_\alpha^{-1}[U] \in \mathcal{X}_\alpha \text{ para todo } U \subset X_\alpha^{'} \tag{52}$$

Esto implica que las inyecciones $j_\alpha : X_\alpha \to X$ son de hecho inmersiones de los espacios X_α en el espacio suma X. De aquí deducimos las siguientes caracterizaciones de los abiertos y los cerrados en $(X, \mathcal{X})$:

$$\begin{gathered} U \subset X \text{ es abierto en } (X, \mathcal{X}) \Longleftrightarrow U \cap X_\alpha^{'} \\ \text{es abierto en } (X, \mathcal{X}) \text{ para todo } \alpha \in I. \end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered} C \subset X \text{ es cerrado en } (X, \mathcal{X}) \Longleftrightarrow C \cap X_\alpha^{'} \\ \text{es cerrado en } (X, \mathcal{X}) \text{ para todo } \alpha \in I. \end{gathered} \tag{54}$$

La propiedad universal de las topologías finales nos permite caracterizar las aplicaciones continuas sobre un espacio suma.

5.5.2 *Proposición*

Una aplicación g de un espacio suma $\sum\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ en un espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$ es continua si y sólo si todas las aplicaciones $g \circ j_\alpha : (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \to (Y, \mathcal{Y})$ (resp. las restricciones $g_\alpha : g|X_\alpha^{'}$ de g a $X_\alpha^{'}$) son continuas.

Sabemos que, en general, para una partición cualquiera de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$, esta caracterización de las funciones continuas es falsa. Se cumple precisamente para las particiones cuya suma topológica es todo el espacio. ¿Cómo pueden reconocerse tales particiones?

5.5.3 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una partición de X. Entonces $(X, \mathcal{X})$ es la suma topológica de los subespacios $(X_\alpha, \mathcal{X}_{X\alpha})$ si y sólo si todos los X_α son abiertos en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: La condición es necesaria por (53), tomando $U = X_\alpha$ $(\alpha \in I)$. Inversamente supongamos que todos los X_α son abiertos. Sea j_α la inyección canónica de X_α en X. $U \subset X$ es abierto en $(X, \mathcal{X})$ si y sólo si

$j_\alpha^{-1}[U] = U \cap X_\alpha \in \mathcal{X}_{X\alpha}$ (puesto que $U = \bigcup_{\alpha \in I} U(U \cap X_\alpha$ y $\mathcal{X}_{X\alpha} \subset \mathcal{X})$. Entonces $\mathcal{X}$ es la topología final definida por la familia de inyecciones $(j_\alpha)_{\alpha \in I}$. ■

Pregunta: ¿Podemos sustituir abierto por cerrado en la proposición anterior?

5.5.4 *Ejemplo*

Cada espacio discreto es homeomorfo a la suma de sus puntos.

5.5.5 *Ejemplo*

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ provisto por la topología inducida de la recta real es la suma de los espacios abiertos $(n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Veremos en el próximo capítulo que no existe una representación de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ como suma de espacios más pequeños.

5.5.6 *Ejemplo*

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un número irracional. Entonces $\mathbb{Q}$ es suma de los dos intervalos abiertos $\{x \in \mathbb{Q} | x < \alpha\}$ y $\{x \in \mathbb{Q} | x > \alpha\}$.

La proposición anterior nos muestra que la adición de espacios topológicos consiste simplemente en poner un espacio al lado de otro. El espacio suma no forma un todo sino se descompone en sus espacios sumandos. En cambio, una bola no es simplemente una suma de dos semibolas (fig. 69).

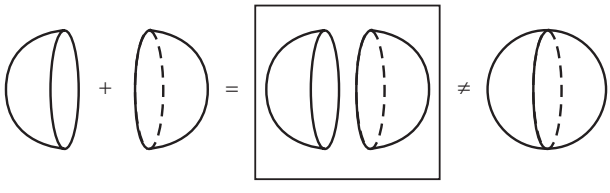


Figura 69.

Similarmente el intervalo $[-1, 1]$ no es la suma del intervalo $[-1, 0]$ y del intervalo $(0, 1]$ (fig. 70).

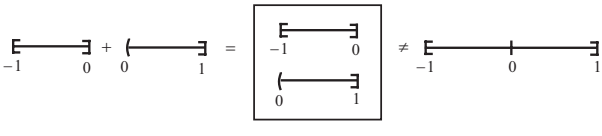


Figura 70.

Esto significa: la topología de estos espacios (bola, intervalo) no puede reconstruirse sin más información de las topologías de los subespacios. Para obtener un 'todo', a partir de los subespacios de una partición hay que pegar un subespacio al otro (y para saber cuáles puntos hay que pegar se necesita más información).

La operación de pegar un espacio al otro se compone de dos operaciones elementales: *adición* de dos espacios e *identificación* de ciertos puntos de la suma.

Por ejemplo, $[-1,1]$ se obtiene formando la suma topológica de $[-1,0]$ y de $[0,1]$ e identificando el 0 del primer intervalo con el del segundo.

Para definir cuáles puntos del primer espacio en una suma de dos espacios deben identificarse con cuáles puntos del segundo se necesita una aplicación. Por ejemplo, identificar en la suma de $[0,1]$ y $[2,3]$ los puntos 0 y 2, 1 y 3 para formar un círculo (fig. 71), la aplicación f de $\{0,1\}$ en $\{2,3\}$ está definida por $f(0)=2$ y $f(1)=3$. Si queremos identificar diferentes puntos $x, x^{'}$ de X

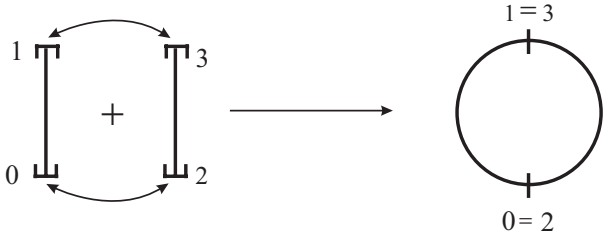


Figura 71.

con el mismo punto de Y, entonces hay que identificar también los puntos x y $x^{'}$ en el primer espacio. La relación de identificación

$$xR^{*}y \Longleftrightarrow y = f(x)$$

no es una relación de equivalencia sobre $X+Y$. Para formar el espacio cociente hay que considerar la relación de equivalencia generada por $\mathbb{R}^{*}$:

$$zRz^{'} \Longleftrightarrow z^{'} = f(z) \vee z = f(z^{'}) \vee f(z) = f(z^{'})$$

5.5.7 *Definición (espacios de adjunción)*

Sean $(X,\mathcal{X})$, $(Y,\mathcal{Y})$ espacios topológicos, $A \subset X$ un subespacio cerrado y $f : A \to Y$ una aplicación. Entonces el espacio cociente de la suma topológica $X+Y$ con la relación de equivalencia

$$zRz^{'} \Longleftrightarrow \begin{cases} z^{'} = f(z) & \text{para } z \in A, z^{'} \in Y \\ z = f(z^{'}) & \text{para } z^{'} \in A, z \in Y \\ f(z) = f(z^{'}) & \text{para } z, z^{'} \in A \\ z = z^{'} & \text{para } z \in (X \backslash A) \cup (Y \backslash f(A)) \end{cases}$$

se llama *espacio obtenido pegando el espacio* $(Y,\mathcal{Y})$ *al espacio* $(X,\mathcal{X})$ *según la aplicación* f, y se denota por $Y \sqcup_f X$.

No vamos a estudiar la teoría de los espacios de adjunción, sino solamente considerar algunos ejemplos que muestran la gran variedad de espacios que se obtienen pegando espacios relativamente elementales.

5.5.8 *Ejemplo*

Si $A \subset (X, \mathcal{X})$ es vacío, entonces $Y \sqcup_f X = Y + X$.
Si $A = X$, entonces $Y \sqcup_f X = Y$.
Si $Y = X$, entonces $Y \sqcup_{1X} X = X$.

5.5.9 *Ejemplo*

Sean Y y B subconjuntos cerrados de $(X, \mathcal{X})$ tales que $X = Y \cup B$ y $A = Y \cap B$. Entonces $X = Y \sqcup_j B$ si $j : A \to Y$ es la inyección canónica. En efecto, la sobreyección canónica $f : Y + B \to X$ es continua y cerrada, por lo tanto es una identificación. Resulta que $(X, \mathcal{X})$ es homeomorfo a $(Y + B) \ / \ R_f = Y \sqcup_j B$. Casos particulares:

i) Si $X =$ bola cerrada en $\mathbb{R}, Y$ y B con dos semibolas cerradas opuestas de X, laLa fórmula $X = Y \sqcup_j B$ significa que la bola X se obtiene por adjunción de B a Y, pegando las caras de las dos semibolas Y y B.

ii) El espacio topológico formado por la cifra 8, se obtiene pegando en un punto los dos círculos que contiene.

5.5.10 *Ejemplo*

Sea $B_n^{'}$ la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}$, E^{n-1} la esfera correspondiente y f una aplicación de E^{n-1} en un espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces el espacio $Y \sqcup_f B_n^{'}$ se llama espacio obtenido por adjunción de una n-célula al espacio $(Y, \mathcal{Y})$. El caso $n = 1$ tiene una interpretación geométrica; puesto que $B_1^{'} = [-1, 1]$ y $E^0 = \{-1, 1\}$, el espacio $Y \sqcup_f B_1^{'}$ tiene una de las siguientes formas (fig. 72): Para $n > 1$, incluso para $n = 2$, en general, no es posible

Figura 72.

representar estos espacios de adjunción geométricamente. Por ejemplo, la aplicación $f \mapsto z^2$ de $E^1 \subset \mathbb{C}$ en E^1, identifica los puntos $\pm z$ de E^1. El espacio $E^1 \sqcup_f B_2^{'}$ es homeomorfo a la esfera E^2 identificando los puntos opuestos de E^2. Concluimos, por 5.4.12, que

$$E^1 \sqcup_f B_2^{'} \cong P_2(\mathbb{R})$$

5.5.11 *Ejercicio*

Sea $\mathbb{1} : E^1 \to E^1$ la aplicación idéntidad. Probar que $B_2^{'} \sqcup_f B_2^{'}$ es homeomorfo a E^2.

5.5.12 *Ejercicio*

Sea $Y = [-1, 1]$ y sea $\pi : E^1 \to Y$ la proyección $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Probar que $Y \sqcup_\pi B_2^{'}$ es homeomorfo a E^2 (fig. 73).

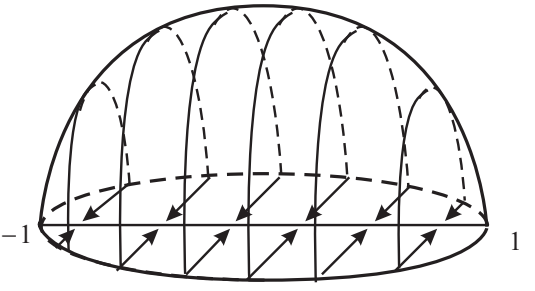


Figura 73.

CAPÍTULO 6 Conexidad y homotopía

Un espacio suma $(X, \mathcal{X}) = \sum(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ consiste de componentes topológicamente separadas. Un análisis de su estructura topológica se reduce de manera trivial al análisis topológico de los espacios componentes $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$.

Es natural preguntar cuándo un espacio topológico es coherente en el sentido de que no permite tal reducción. Tales espacios llamados *conexos* serán estudiados en la primera sección. Analizaremos en esta sección en particular el fundamento topológico del conocido Teorema del Valor Intermedio, y estudiaremos algunas aplicaciones de su generalización a espacios conexos cualesquiera.

De manera natural se plantea el problema de si un espacio no conexo permite siempre una descomposición en partes conexas. Este problema será tratado en la sección 2. Además se describen en esta sección algunas técnicas sencillas para distinguir espacios topológicos diferentes, o sea decidir si son homeomorfos o no.

El concepto 'conexo' es la noción más débil para analizar la coherencia de un espacio topológico. Para muchos problemas del análisis se necesita una propiedad más fuerte: la de ser *conexo por caminos*. Esta noción, que será estudiada en la seeción 3, es importante también porque es el punto de partida para la *teoría de homotopía*.

Esta teoría estudia invariantes más sutiles de los espacios topológicos, asociándoles los llamados *grupos de homotopía*. Dedicaremos las dos últimas secciones de este capítulo a dicha teoría, por un doble motivo: 1°. introducir al lector en una disciplina de la topología algebraica, que se relaciona estrechamente con problemas geométricos intuitivos, sin exigir el desarrolllo de un complejo aparato técnico como la teoría de homología; 2°. tratar sistemáticamente algunas nociones que son básicas en toda la topología y que se aplican también en otras ramas de la matemática, por ejemplo, en análisis complejo.

En la cuarta sección estudiaremos la relación de homotopía entre aplicaciones continuas y espacios topológicos sin entrar en la teoría de los retractos, retractos de deformación, de nudos, etc. La relación de homotopía entre espacios juega un papel importante en la topología, porque la mayoría de los invariantes topológicos conocidos especialmente en topología algebraica, son invariantes con respecto a

esta relación de equivalencia.

En la sección 5 se construyen los grupos de homotopía de primera dimensión, los llamados *grupos fundamentales*. Veremos que estos grupos son invariantes de las clases de espacios homotópicos.

§ 6.1 **Espacios conexos**

Decimos que un espacio topológico es conexo si no puede representarse como suma de dos o más espacios topológicos no vacíos. Equivalentemente por 5.5.3:

6.1.1 *Definición (espacio, conjunto conexo)*

Un espacio topológico se llama **conexo** si no existe una partición de X formada por dos abiertos no vacíos. $A \subset (X, \mathcal{X})$ se dice conexo si el subespacio $(A, \mathcal{X}_A)$ es conexo.

6.1.2 *Ejemplo*

Todo espacio indiscreto es conexo. Ningún espacio discreto de más de un punto es conexo. Si $(X, \mathcal{X})$ es conexo, entonces es conexo para toda topología más gruesa que $\mathcal{X}$.

6.1.3 *Ejemplo*

Consideremos las cuatro distintas topologías sobre un espacio X de dos puntos. La única topología que no lo hace conexo es la discreta. En particular el espacio de Sierpinski (2.1.2) es conexo.

6.1.4 *Ejemplo*

Proveamos al conjunto $\mathbb{N}$ de la topología τ de los complementos finitos.
El lector verificará fácilmente que $(\mathbb{N}, \tau)$ es conexo.

Un cuarto ejemplo, muy importante, se da en la siguiente caracterización de los subconjuntos conexos de la recta real.

6.1.5. *Teorema*

Un subconjunto C de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.

Demostración: Recordemos que $C \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si cumple para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x, y \in C,\ x < z < y \Rightarrow z \in C \tag{1}$$

Supongamos que C no es un intervalo. Entonces existen $x, y \in C$ y $z \in \mathbb{R} \backslash C$ tales que $x < z < y$. Los subconjuntos abiertos no vacíos $A = \{c \in C \mid c < z\}$, $B = \{c \in C \mid c > z\}$ de C forman una partición de C: C no es conexo.

Inversamente supongamos que C es un intervalo. Veamos que es conexo. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos subconjuntos abiertos no vacíos A y B del espacio C tales que $A \cup B = C$ y $A \cap B = \varnothing$. Intercambiando A y B si es necesario, existen $a \in A, b \in B$ tales que $a < b$. Sea $z = \sup(A \cap [a, b])$. $z \in [a, b] \subset C$ es punto adherente de A en C. Puesto que A es cerrado en C (como complemento del abierto B) tenemos que $z \in A$ y por lo tanto $z < b$. Por otra parte A es también abierto en C. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[z, z + \varepsilon] \subset A$ y $z + \varepsilon < b$. Pero esto contradice a la definición $z = \sup(A \cap [a, b])$. Concluimos que C es conexo. ■

En la práctica es conveniente tener algunas caracterizaciones equivalentes de los espacios y subconjuntos conexos. Para esto precisemos primeramente el concepto intuitivo de *separación* (fig. 74).

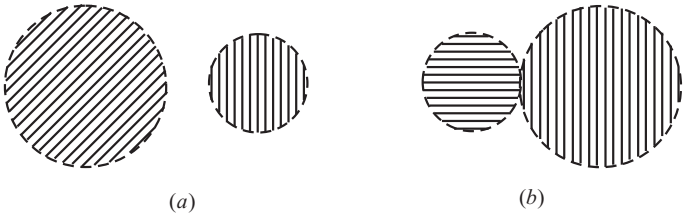


Figura 74. (a) Conjuntos separados, (b) no separados

6.1.6 *Definición (conjuntos separados, separación)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $C \subset X$. Se dice que dos subconjuntos $A, B \subset X$ estan **separados** en $(X, \mathcal{X})$ si

$$\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$$

Se dice que A y B *se tocan* si no están separados.

Un par de subconjuntos separados (A, B) se llama **separación** de C en X, si $C \subset A \cup B$, $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap B \neq \varnothing$.

Si $(X, \mathcal{X})$ tiene una partición (A, B) de abiertos no vacíos, el par (A, B) es una separación de X e inversamente.

6.1.7 *Proposición (caracterizaciones de espacios conexos)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es conexo si y sólo si cumple una de las condiciones equivalentes siguientes:

i) No existe una separación de X en $(X, \mathcal{X})$;

ii) No existe una partición $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ formada por más de un abierto no vacío;

iii) $(X, \mathcal{X}) = \sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha) \Rightarrow \exists \alpha \in I$, tal que $(X, \mathcal{X}) = (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$

iv) No existe una partición de $(X, \mathcal{X})$ formada por un número finito ≥ 2 de cerrados no vacíos;

v) Los únicos subconjutos que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\varnothing$;

vi) No existe una sobreyección continua de $(X, \mathcal{X})$ sobre el espacio discreto $\{1, 2\}$;

vii) Toda aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en un espacio discreto es constante.

Demostración: Ejercicio. ■

Los últimos dos criterios probablemente son los más útiles. Permiten hacer más económicas las demostraciones de diversas proposiciones sobre espacios conexos, como se verá más adelante.

6.1.8 *Ejemplo*

Consideremos el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ de todas las matrices reales de tamaño $n \times n$ como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$, $M_n(\mathbb{R})$ es conexo, pero el subconjunto $O_n(\mathbb{R})$ de todas las matrices ortogonales no es conexo, ya que la aplicación continua

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

que asocia a cada matriz su determinante, aplica $O_n(\mathbb{R})$ *sobre* el espacio discreto $\{-1, 1\}$.

6.1.9 *Ejercicio*

Probar el enunciado siguiente: Si $C \subset (X, \mathcal{X})$ es conexo y si C contiene puntos interiores y puntos exteriores de un conjunto $A \subset X$, entonces contiene también puntos de la frontera de A.

6.1.10 *Ejercicio*

Pruebe que en un espacio topológico conexo $(X, \mathcal{X})$ cada subconjunto propio no vacío tiene frontera no vacía. ¿Por qué en un espacio métrico no acotado conexo ninguna esfera es vacía?

Caractericemos ahora los subconjuntos conexos de un espacio $(X, \mathcal{X})$ por propiedades relativas a todo el espacio. Por la definición 6.1.1, un subconjunto $C \subset X$ es conexo si y sólo si no existen dos abiertos (resp. cerrados) $A, B \subset X$ tales que

$$A \cap C \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing, C \subset A \cup B \text{ y } A \cap B \cap C = \varnothing \tag{2}$$

6.1.11 *Proposición*

Un subconjunto C de $(X, \mathcal{X})$ es conexo si y sólo si no existe una separación de C en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Si (A, B) es una separación de C en $(X, \mathcal{X})$, entonces $(A \cap C, B \cap C)$ forma una separación de C en $(C, \mathcal{X}_C)$. Luego, por 6.1.7 i), C no puede ser conexo si posee una separación en $(X, \mathcal{X})$.

Inversamente supongamos que C no es conexo. Entonces existe una separación (A, B) de C en $(C, \mathcal{X}_C)$. Puesto que A y B son cerrados relativos en C, se tiene que $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (C \cap B) = \overline{A}_C \cap B = A \cap B = \varnothing$ y similarmente $\overline{B} \cap A = \varnothing$; por lo tanto (A, B) es una separación de C en $(X, \mathcal{X})$. ■

6.1.12 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $C \subset X$ y (A, B) una separación de un superconjunto $D \supset C$ en $(X, \mathcal{X})$. Si C es conexo, entonces $C \subset A$ o $C \subset B$.

Demostración: Si $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap B \neq \varnothing$, entonces (A, B) formaría una separación de C. ■

Después de estas caracterizaciones de los espacios y subespacios conexos probaremos una serie de teoremas por medio del criterio vi) en 6.1.7.

6.1.13 *Proposición*

Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces todo subconjunto $B \subset X$, tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, es conexo. En particular, la cerradura $\overline{A}$ es conexa.

Demostración: Sea f una aplicación continua de B en el espacio discreto $\{1, 2\}$. Sabemos que $f[A]$ es unitario, luego $f[B] \subset f[\overline{A}] \subset f[\overline{A}]$ es unitario. Concluimos que f no es sobreyectiva. ■

Pregunta: ¿Si $C \subset (X, \mathcal{X})$ es conexo, entonces $\overset{\circ}{C}$ es necesariamente conexo?

6.1.14 *Proposición*

Sea $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $(X, \mathcal{X})$ que tocan todos al conjunto C_β $(\beta \in I)$. Entonces $C = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ es conexo.

Demostración: Sea (A, B) una separación de C. Por el corolario 6.1.12 tenemos $C_\alpha \subset A$ o $C_\alpha \subset B$ para todo $\alpha \in I$. Supongamos, en particular, que el conjunto C_β que se toca a todos los demás conjuntos C_α $(\alpha \in I)$ está incluido en A. Puesto que $B \cap C \neq \varnothing$, existe $\gamma \in I$ tal que $C_\gamma \subset B$. Pero A y B no se tocan, luego C_β y C_γ no pueden tocarse. ¡Contradicción! Por lo tanto, no existe una separación de C. ■

6.1.15 *Corolario*

Sea $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{X})$ tal que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha \neq \varnothing$. Entonces $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha$ es conexo.

6.1.16 *Corolario*

Sea (C_n) una sucesión de conjuntos conexos en $(X,\mathcal{X})$ tales que C_n toca a C_{n+1} para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces $\bigcup_n C_n$ es conexo.

Demostración: Por inducción se demuestra que los conjuntos $C_n' = \bigcup_{i\leq n} C_n$ son conexos. Ahora sólo hay que aplicar la proposición anterior a la familia (C_n') que tiene la misma unión de los (C_n).

¿Cómo puede generalizarse el enunciado anterior para una familia cualquiera de conexos $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$?

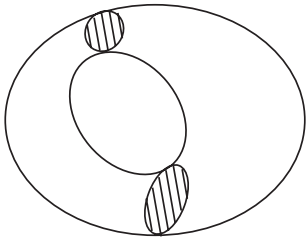


Figura 75.

$\rightsquigarrow$ *Nota:* La intersección de dos conjuntos conexos no es, en general, conexa (fig. 75). Incluso, la intersección de una sucesión *decreciente* de conjuntos conexos no es necesariamente conexo: Un contraejemplo está dado por el espacio $X=[-1,1]^2\backslash\{(0,0)\}$ y los subconjuntos conexos

$$A_n = \{(x,y)\in X \mid |y|\leq 1/n\} \ (n\in\mathbb{N}^*)$$

cuya intersección es el segmento $\{(x,0) \mid 0<|x|\leq 1\}$ (fig. 76).
La propiedad de ser conexo se mantiene bajo aplicaciones continuas.

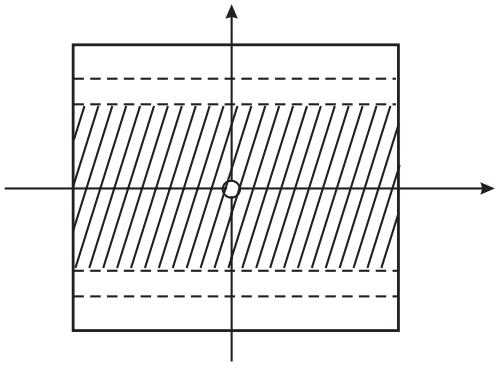


Figura 76.

6.1.17 *Teorema*

Sea f una aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{D})$. Si $(X, \mathcal{X})$ es conexo, entonces $f[X]$ es conexo en $(Y, \mathcal{D})$.

Demostración: Sea g una aplicación continua del subespacio $f[X]$ en el espacio discreto $\{1, 2\}$. Entonces $g \circ f$ es una aplicación continua de X en $\{1, 2\}$, luego g no puede ser sobreyectiva. ■

A pesar de su sencillez, el teorema anterior tiene una importancia fundamental como muestra la siguiente serie de corolarios.

6.1.18 *Corolario*

La conexión es una propiedad topológica.

6.1.19 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio conexo y R una relación de equivalencia sobre X. Entonces el espacio cociente X/R es conexo.

Del análisis matemático se conoce la importancia del teorema del valor intermedio. El teorema anterior permite una generalización de este teorema.

6.1.20 *Corolario (teorema del valor intermedio generalizado)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico conexo y f una función real continua sobre $(X, \mathcal{X})$. Si $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$, entonces existe $z \in X$ con $f(z) = \alpha$.

Demostración: Por 6.1.17 y 6.1.5 $f[X]$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. ■

6.1.21 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios topológicos y sea f una aplicación continua de un subconjunto conexo A de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{D})$. entonces la gráfica:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

es conexa en $X \times Y$; pues la aplicación $F : x \mapsto (x, f(x))$ de A sobre $G_f \subset X \times Y$ es continua. Aplicamos entonces 6.1.17.

6.1.22 *Ejemplo*

La gráfica $G \subset \mathbb{R}^2$ de la función $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ sobre $(0, \infty)$ es conexa (ejemplo anterior). Es fácil comprobar que $\overline{G} = G \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ en $\mathbb{R}^2$. Concluimos que si $G \subset S \subset \{0\} \times [-1, 1] \cup G$, entonces S es conexo (fig. 77). La gráfica G de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ sobre $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *no* es conexa, pues $H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ forman una separación de G en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, si se añade un solo punto de $\{0\} \times [-1, 1]$ a G, obtenemos un subconjunto conexo por 6.1.14.

Daremos ahora tres ejemplos de las múltiples aplicaciones que encuentra el teorema generalizado del valor intermedio.

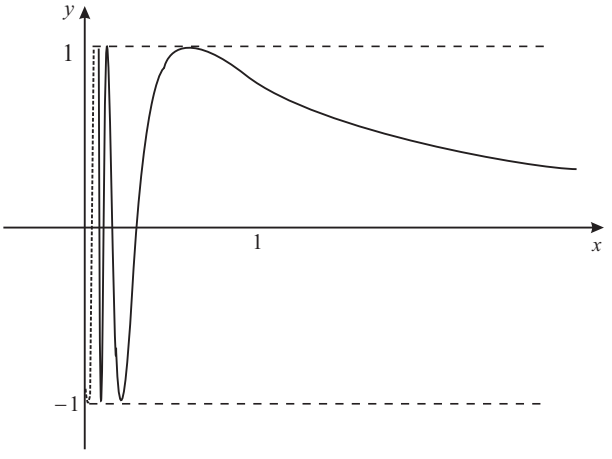


Figura 77. Gráfica de $sen\frac{1}{x}$

6.1.23 *Ejemplo (existencia de soluciones)*

Supongamos que buscamos soluciones de una ecuación

$$f(x) = \alpha \quad (x \in X) \tag{3}$$

donde f es una aplicación real continua sobre un espacio conexo $(X, \mathcal{X})$. Para probar que existe una solución es suficiente, por el corolario anterior, hallar dos puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) \leq \alpha \leq f(x_2)$. Incluso, en este caso puede decirse más: todo subconjunto conexo A de $(X, \mathcal{X})$ que contiene a x_1 y a x_2 debe contener una solución de (3). Por ejemplo, si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio vectorial topológico, entonces se halla una solución de (3) sobre el segmento $[x_1, x_2]$ que conecta x_1, x_2.

6.1.24 *Ejemplo (distinción entre espacios topológicos)*

Una técnica usual para examinar una homeomorfia entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ se basa sobre la observación siguiente: Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para un subconjunto cualquiera A de X los subespacios $X \backslash A$ y $Y \backslash h[A]$ deben ser homeomorfos, luego deben tener los mismos invariantes topológicos. En lo que sigue daremos dos aplicaciones sencillas de esta técnica:

i) En $\mathbb{R}$ ninguno de los tres intervalos $[0,1], [0,1), (0,1)$ es homeomorfo al otro; pues del primero podemos quitar a lo más dos puntos (0 y 1), del segundo uno (0) y del tercero ningún punto sin violar la conexión de estos subespacios.

ii) La recta real no es homeomorfa a ningún $\mathbb{R}^n$ tal que $n > 1$; pues $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sigue siendo conexo si le quitamos un punto, lo cual no ocurre para $\mathbb{R}$.

El teorema general donde se demuestra que $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ para $m \neq n$ es mucho más profundo. Para su demostración se utilizan invariantes topológicos más sofisticados relacionados con las técnicas de la teoría de homología.

6.1.25 *Ejemplo (aplicación a un problema geométrico)*

Probaremos que sobre cada curva cerrada y rectificable en $\mathbb{R}^3$ existen cuatro puntos que están en un mismo plano y que la dividen en partes de igual longitud. Sea $x : s \mapsto x(s)$ una representación paramétrica de la curva que toma la longitud de la curva como parámetro: $0 \leq s \leq 1$ (donde 1 es la longitud total de la curva) y $x(0) = x(1)$. Para $s \in [0, 1/4]$ sea $V(s)$ el volumen orientado del tetraedro con los vértices en $x(s), x(s + 1/4), x(s + 1/2), x(s + 3/4)$. $V : [0, 1/4] \to \mathbb{R}$ es continua. El volumen orientado del tetraedro $[x(0), x(1/4), x(1/2), x(3/4)]$ es el negativo del volumen del tetraedro $[x(1/4), x(1/2), x(3/4), x(1)]$ puesto que $x(1) = x(0)$. Concluimos que $-V(0) = V(1/4)$; por lo tanto existe $s_0 \in [0, 1/4]$ tal que $V(s_0) = 0$. Los puntos $x(s_0), x(s_0 + 1/4), x(s_0 + 1/2), x(s_0 + 3/4)$ están entonces en el mismo plano.

Está claro que la propiedad de ser conexo no se hereda a los subespacios ni a los espacios suma. Sin embargo, hemos visto que se hereda a los espacios cocientes. Queda por aclarar qué pasa con los espacios producto.

6.1.26 *Proposición*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces: $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es conexo $\Longleftrightarrow$ $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ es conexo para todo $\alpha \in I$.

Demostración: La implicación $\Rightarrow$ resulta del teorema 6.1.17, puesto que los X_α son las imágenes continuas de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ bajo las proyecciones $\pi_\alpha (\alpha \in I)$.
$\Leftarrow$: Supongamos que todos los X_α $(\alpha \in I)$ espacios conexos. Demostraremos primero que si el número de espacios es finito su producto es conexo. Para ello sólo tenemos que probar que si $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ son conexos, $X \times Y$ es conexo. Pero esto es evidente (6.1.14), puesto que $X \times Y = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$ para un elemento cualquiera $y_0 \in Y$; $\{x\} \times Y \cong Y (x \in X)$ y $X \times \{y_0\} \cong X$ son conexos por hipótesis y tienen todos una intersección no vacía con $X \times \{y_0\}$.

Consideremos ahora el caso general. Sea $c = (c_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ un elemento fijo y C la unión de todos los subconjuntos conexos en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ que contiene a c. El conjunto C es conexo por 6.1.15 y C contiene a todos los subconjuntos (conexos) de la forma

$$\prod_{j=1}^{r} X_{\alpha j} \times \prod_{\beta \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}} \{c_\beta\} \cong \prod_{j=1}^{r} X_{\alpha j},$$

por lo tanto es denso en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Concluimos, por 6.1.13 que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \overline{C}$ es conexo. ■

Por medio de los teoremas probados es fácil verificar que los siguientes espacios son conexos:

- el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, por 6.1.5 y 6.1.26.
- el espacio $\mathbb{R}^X$ de todas las funciones reales sobre un conjunto $X \neq \varnothing$ provisto de la topología de la convergencia puntual, por 6.1.5 y 6.1.26.
- el toro n-dimensional T^n, por 6.1.9 y 6.1.26.
- el espacio proyectivo n-dimensional $P^n(\mathbb{R})$, por 6.1.9).
- todo cilindro, todo cono y todo espacio de suspensión sobre una base conexa, por 6.1.9 y 6.1.26.

6.1.27 *Ejercicio*

Probar que si $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ son espacios conexos, $A \subset X$ es un cerrado no vacío y $f : A \to Y$ es una aplicación, entonces $Y \sqcup_f X$ es conexo.

6.1.28 *Ejercicio*

Sea $x : t \mapsto x(t)\,(0 \leq t \leq 1)$ una curva cerrada. Entonces existe un cuadrado circunscribiendo la curva x. (Indicación : considerar $a(\varphi) - b(\varphi)$ en la figura 78).

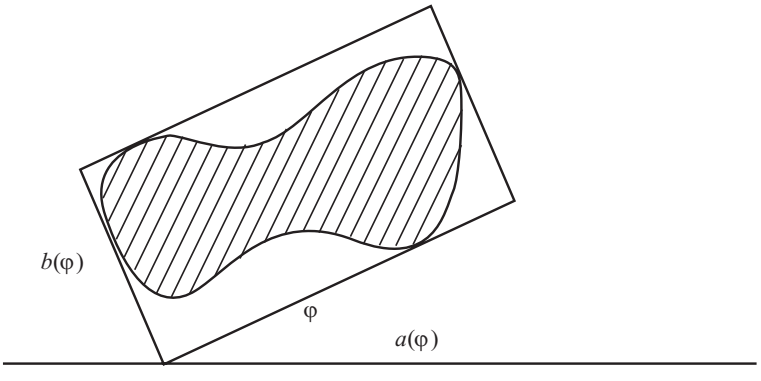


Figura 78. Curva inscrita en un rectángulo

6.1.29 *Ejercicio*

Sea A un subespacio conexo en un espacio conexo $(X, \mathcal{X})$. Sea B abierto y cerrado en $X \backslash A$. Probar que $A \cup B$ es conexo.

6.1.30 *Ejercicio*

Sea C un subconjunto de un espacio métrico (X, d). Probar que C no es conexo si y sólo si existen conjuntos abiertos $A, B \subset X$ tales que

i) $A \cap B = \varnothing$,

ii) $C \subset A \cup B$,

iii) $A \cap C \neq \varnothing$ y $B \cap C \neq \varnothing$.

Probar que esto no se cumple en un espacio topológico cualquiera. (Indicación: considérese el espacio $X = \{0, 1, 2\}$ con la topología $\mathcal{X} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$. En un espacio topológico cualquiera hay que sustituir i) por i$'$): $A \cap B \cap C = \varnothing$).

6.1.31 *Ejercicio*

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. ¿Cuándo X, provisto de la topología de orden, es conexo?

6.1.32 *Ejercicio*

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ numerable. Probar que $\mathbb{R}^n \backslash A$ es conexo si $n \geq 2$.

§ 6.2 **Componentes conexas**

Si un espacio topológico no es conexo, se plantea el problema de si puede descomponerse en sus partes conexas tal que sea homeomorfo a la suma de estos subespacios. Para investigar esta cuestión parece natural considerar los subespacios conexos *maximales* de $(X, \mathcal{X})$. Si $C, D \subset X$ son conexos maximales en $(X, \mathcal{X})$ y $C \cap D \neq \varnothing$, entonces $C = D$ porque $C \cup D$ es conexo. Esto muestra que diferentes conexos maximales en X son disjuntos. Nos preguntamos si existen tales subespacios conexos maximales. Por 6.1.15, para todo $x \in X$, la unión C_x de todos los subconjuntos conexos $C \subset X$ que contienen a x es conexa, por lo tanto es el mayor conexo que contiene a x. Concluimos que para todo $x \in X$ existe un subespacio conexo maximal que le contiene. *Los conexos maximales en* $(X, \mathcal{X})$ *forman una partición de* X.

6.2.1 *Definición (componente conexa)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. El mayor subconjunto conexo en $(X, \mathcal{X})$ que contiene a x se llama **componente conexa de** x **en** $(X, \mathcal{X})$ y se denota por C_x.

Puesto que las componentes conexas forman una partición de X, pueden interpretarse como clases de una relación de equivalencia, a saber:

$$xRy \Leftrightarrow \text{existe un subconjunto conexo } C \subset (X, \mathcal{X}) \text{ que conecta}$$

$$\text{(o sea, contiene) a } x \text{ y } y$$

Evidentemente se tiene:

$$xRy \Longleftrightarrow C_x = C_y \Longleftrightarrow y \in C_x \Longleftrightarrow x \in C_y \tag{5}$$

Tenemos ahora dos nuevos criterios sencillo de conexión:

$$(X,\mathcal{X}) \text{ es conexo} \iff (X,\mathcal{X}) \text{ tiene una única componente conexa} \iff \text{para todos los puntos } x,y \in X \text{ existe un conexo } C \subset X \text{ que conecta } x \text{ y } y. \tag{6}$$

6.2.2 *Proposición*

Sea $(X,\mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces:

i) Toda componente conexa en $(X,\mathcal{X})$ es cerrada.

ii) Dos componentes conexas distintas están separadas.

iii) Si $U \subset X$ es abierto y cerrado y contiene a x, entonces $C_x \subset U$.

Demostración:

i) Si C_x es un conexo maximal, entonces $\overline{C}_x$ es conexo y contiene a C_x, luego $\overline{C}_x = C_x$.

ii) Dos cerrados disjuntos están siempre separados.

iii) $U \cap C_x \neq \varnothing$ es abierto y cerrado en C_x, entonces es igual a C_x por 6.1.7(v). ■

6.2.3 *Ejemplo*

En $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ provisto de la topogía inducida por la topología usual de $\mathbb{R}$, las componentes conexas son los intervalos $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. (Estos intervalos son cerrados en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$).

6.2.4 *Ejercicio*

Probar que la componente conexa de un punto $x = (x_\alpha)$ en un espacio producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es el producto de las componentes conexas de x_α en los espacios coordenados $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$:

$$C_x = \prod_{\alpha\in I} C_{x\alpha} \tag{7}$$

Si $f : (X,\mathcal{X}) \to (Y,\mathcal{Y})$ es una aplicación continua, entonces aplica toda componente conexa C de $(X,\mathcal{X})$ en un conjunto conexo de $(Y,\mathcal{Y})$ porque $f[C]$ es conexo. En particular, todo *homeomorfismo* $h : (X,\mathcal{X}) \to (Y,\mathcal{Y})$ *induce una biyección entre las componentes conexas de* $(X,\mathcal{X})$ *y de* $(Y,\mathcal{Y})$. Por lo tanto el cardinal de las componentes conexas de $(X,\mathcal{X})$ es un invariante topológico de $(X,\mathcal{X})$. Si aplicamos esta observación a ciertos subespacios $X\backslash A$ de $(X,\mathcal{X})$ usando el método explicado en el ejemplo 6.1.24, obtenemos criterios eficientes para

distinguir diferentes espacios topológicos. En el caso más sencillo se considera el complemento de un conjunto unitario en $(X, \mathcal{X})$.

6.2.5 *Definición (punto de intersección)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio conexo. Entonces $x \in X$ se llama **punto de intersección de orden** $k \in \mathbb{N}$ si $X \backslash \{x\}$ tiene k componentes conexas.

Puesto que todo homeomorfismo $h : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ aplica un punto de intersección de orden k en $(X, \mathcal{X})$ a un punto de intersección de orden k en $(Y, \mathcal{Y})$, el cardinal de los puntos de intersección de orden $k\,(k \in \mathbb{N})$ es un invariante topológico de $(X, \mathcal{X})$.

Pregunta: ¿Cómo puede reformularse el razonamiento del ejemplo 6.1.24 ii), mediante el nuevo concepto?

6.2.6 *Ejemplo*

Los espacios uno-dimensionales de la figura tienen puntos de intersección de diferentes ordenes, 1, 2 y 3 (fig. 79).

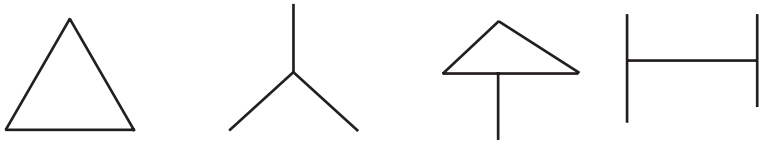


Figura 79.

Por lo tanto no son homeomorfos. Este método de distinguir entre distintos espacios topológicos ya lo hemos utilizado intuitivamente en el capítulo 2.

6.2.7 *Ejemplo*

El método de considerar el número de las componentes conexas de $X \backslash A$ para conjuntos unitarios $A = \{x\}$ no permite distinguir entre los espacios de la (fig. 80)

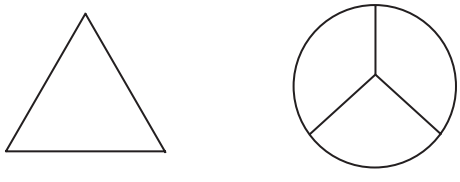


Figura 80.

En este ejemplo es suficiente considerar subconjuntos A de dos puntos.
Quitando dos puntos del primer espacio obtenemos siempre dos componentes conexas, mientras no ocurre lo mismo para el segundo.

Otro método es de limitar el análisis a *vecindades pequeñas* de ciertos puntos. Un punto $x \in (X, \mathcal{X})$ se llama **punto de intersección local de orden** k, si existe una vecindad conexa V de x en $(X, \mathcal{X})$ tal que $V \backslash \{x\}$ tiene k componentes

conexas. Si $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ son homeomorfos, deben tener el mismo cardinal de puntos de intersección local de orden k.

Puesto que el segundo espacio posee, a diferencia del primero, un punto de intersección local de orden 3, no son homeomorfos. La teoría de homología permite generalizar esta técnica a espacios de dimensión superior.

6.2.8 *Ejemplo*

Ya para variedades de dimensión 2 el problema de distinción topológica es mucho más difícil, aunque se utiliza la misma técnica. Por ejemplo, para distiguir entre la esfera 2-dimensional y el toro 2-dimensional (fig. 81) es natural quitar un subespacio ≪de dimensión 1≫. Tomando para A el círculo delineado en T^2

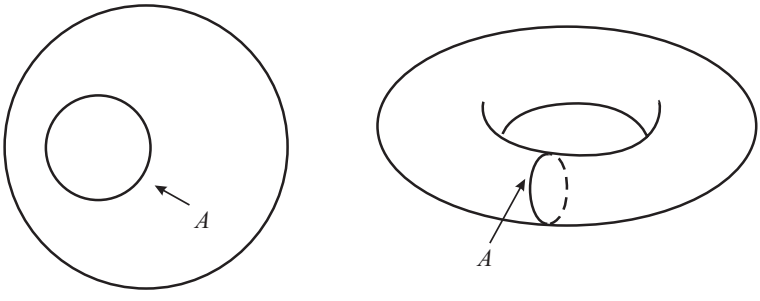


Figura 81. Esfera E^2 Toro T^2

vemos que $T^2 \backslash A$ es conexo, mientras que parece evidente que *todo círculo sobre la esfera E^2 la divida en dos componentes conexas.* En efecto, esto se cumple; pero la demostración es difícil. Equivale a probar el *teorema de Jordan* que dice: Toda curva cerrada y simple Γ en $\mathbb{R}^2$ divide $\mathbb{R}^2$ en dos componentes *conexas* y es su frontera común.

Todavía no hemos resuelto nuestro problema inicial. Hemos obtenido una partición de todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ formado por cerrados conexos y mutuamente separados. Sin embargo, esto no permite en general reconstruir la topología de $(X, \mathcal{X})$ por las topologías de sus componentes conexas, como muestra el ejemplo siguiente.

6.2.9 *Ejemplo*

Consideremos $X = \mathbb{Q}$ provisto de la topología usual. Si $A \subset X$ tiene al menos dos puntos $r, s\,(r < s)$, entonces A no es conexo; pues existe un número irracional z tal que $r < z < s$ y luego los dos conjuntos $\{x \in \mathbb{Q} | x < z\}$ y $\{y \in \mathbb{Q} | y > z\}$ forman una separación de A. Concluimos que las componentes conexas son los puntos unitarios. Por supuesto, la topología usual de $\mathbb{Q}$ no puede reconstruirse partiendo de las topologías de sus subconjuntos unitarios. La topología suma de las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ es la topología discreta.

6.2.10 *Definición (totalmente disconexo)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **totalmente disconexo**, si para cada $x \in X$ las componentes conexas C_x se reducen a $\{x\}$.

Evidentemente todo espacio discreto es totalmente disconexo. En lo siguiente daremos otro ejemplo de un espacio totalmente disconexo no discreto que ha jugado un papel importante en la historia de la topología.

6.2.11 *Ejemplo (Conjunto de Cantor)*

Sea $A_n = \{0, 2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones (x_n), tales que $x_n \in \{0, 2\}$. Se ve fácilmente que la aplicación $g : \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \to [0, 1]$ definida por $g((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n$ es inyectiva. La imagen de g en $[0, 1]$ se llama el conjunto de Cantor, el cual geométricamente puede ser descrito como sigue: Dividamos $[0, 1]$ en tres partes iguales y retiremos el intervalo intermedio $(1/3, 2/3)$; esto elimina todos los números reales en $[0, 1]$, que requieren $x_1 = 1$ en su desarrollo triádico (esto es, x_i es 0, 1 o 2). Como segundo paso retiremos los intervalos intermedios de cada uno de los intervalos restantes $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$, eliminando así todos los números reales en $[0, 1]$ que requieren $x_2 = 1$ en su desarrollo triádico. Procediendo análogamente, retiramos, en el n-ésimo paso, la unión M_n de los intervalos intermedios de los 2^{n-1} intervalos presentes. Entonces $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es el llamado conjunto de Cantor y consiste de todos los números reales en $[0, 1]$, que no requiren el uso de l en su desarrollo triádico.

Como el desarrollo (no utilizando 1) de cada elemento de $[0, 1]$ es único, g es una biyección de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ en C. Más precisamente, poniendo sobre $A_n = \{0, 2\}$ la topología discreta y considerando el espacio producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y C con la topología usual de $\mathbb{R}$ tenemos que g es un homeomorfismo de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sobre C.

Demostración: Ejercicio. ■

Puesto que, por el ejercicio 6.2.4, todo producto de espacios totalmente disconexos es totalmente disconexo, el conjunto de Cantor también lo es.

La importancia histórica del conjunto de Cantor resulta del hecho de que ha permitido probar la existencia de las curvas de Peano. Ya al inicio de la teoría de conjuntos se supo que existen aplicaciones del intervalo $I = [0, 1]$ *sobre* el cuadrado I^2 (Cantor a Dedekind, 1877: Lo veo pero no puedo creerlo). Se planteó entonces el problema topológico de si es posible hallar una sobreyección *continua* de I sobre I^k $(k \geq 2)$. Tales sobreyecciones se llaman curvas de Peano (curvas que llenan todo el espacio).

6.2.12 *Teorema (existencia de las curvas de Peano)*

Para todo cardinal k existe una sobreyección continua de I sobre $I^k (I^\infty := I^{\mathbb{N}}$ es el llamado cubo de Hilbert) .

Demostración:

1. Utilizando la notación del ejemplo anterior, probaremos primero que la aplicación $f : \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \to I$, definida por

$$f : (x_{\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^{n+1}$$

es una sobreyección continua.

Todo $x \in [0,1]$ puede escribirse en la forma $\prod_{n=1}^{\infty} x_n/2^{n+1}$ (representación diádica), por lo tanto f es sobreyectiva. Dado un $\varepsilon > 0$, escogemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2/2^{n+1} < \varepsilon$. Entonces se cumple para la vecindad $U = \{x_1\} \times ... \times \{x_k\} \times \prod_{n=k+1}^{\infty} A_n$ de (x_n) en $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ que:

$$(y_n \in U \Rightarrow |f((y_n)) - f((x_n))| =$$

$$= |\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - x_n)/2^{n+1}| \leq |\sum_{n=k+1}^{\infty} 2/2^{n+1}| < \varepsilon$$

Esto demuestra la continuidad de f.

2. Dado $k \leq \infty$, tomamos una partición de $\mathbb{N} : \{I_j\}_{1\leq j\leq k}$ tal que $Card\, I_j = Card\, \mathbb{N}$ para $j = 1, ..., k$. Por la ley de asociatividad para los espacios producto (5.2.19) sabemos que

$$(\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n)^k \cong \prod_{n\in I} A_n \times \prod_{n\in I_2} A_n \times \prod_{n\in I_3} A_n \times ... \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{8}$$

Sea ahora g^{-1} el homeomorfismo del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y h el homeomorfismo de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sobre $(\prod_{n\in I} A_n)^k$ (por (8)). Entonces la aplicación:

$$F := (\prod_{1}^{k} f) \circ h \circ g^{-1} : \mathcal{C} \to I^k$$

es una sobreyección continua. Sean $\pi_i \circ F : \mathcal{C} \to I (i = 1, ..., k)$ las funciones coordenadas de F.

Recalcamos que $\mathcal{C} \subset I$ se obtiene quitando sucesivamente intervalos intermedios. Extendamos cada $\pi_i \circ F : \mathcal{C} \to I$ a una función continua $F_i : I \to I$

definiendo F_i afín-lineal sobre cada intervalo omitido. Entonces, por la proposición 5.2.16, $\tilde{F} := (F_i)_{1\leq i\leq k} : I \to I^k$ es una aplicación continua y como $\tilde{F}|\mathcal{C} = F$, $\tilde{F}$ también es sobreyectiva.■

Después de esta disgresión volvamos a analizar nuestro problema inicial. Los espacios totalmente disconexos no discretos nos sirven como ejemplos extremos de espacios cuya topología no puede reconstruirse a partir de la topología de sus componentes conexas.

Un espacio topológico es la suma topológica de sus componentes conexas, si y sólo si éstas son todas abiertas. Introduciremos ahora una condición suficiente para que ello suceda.

6.2.13 *Definición (espacios localmente conexos)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **localmente conexo** si para cada $x \in X$ existe un sistema fundamental de vecindades conexas.

6.2.14 *Proposición*

En un espacio localmente conexo toda componente conexa es abierta.
Demostración: Sea C una componente conexa. Para todo $y \in C$ existe una vecindad conexa V. Concluimos que $V \subset C$, o sea, que C es vecindad de cada uno de sus puntos. ■

6.2.15 *Corolario*

Todo espacio localmente conexo es la suma de sus componentes conexas.

Si $(X, \mathcal{X})$ es localmente conexo, evidentemente todo subconjunto abierto $U \subset X$ forma un subespacio localmente conexo. De aquí se concluye la siguiente ampliación de la proposición anterior.

6.2.16 *Corolario*

Para un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ las condiciones siguientes son equivalentes:
$(L\mathcal{C}1)(X, \mathcal{X})$ es localmente conexo.
$(L\mathcal{C}2)$ Las componentes conexas de todo subespacio abierto $(A, \mathcal{X}_A)$ son abier
$(L\mathcal{C}3)$ Los subconjuntos abiertos conexos de $(X, \mathcal{X})$ forman una base de $\mathcal{X}$.

Demostración: $(L\mathcal{C}1) \Rightarrow (L\mathcal{C}2)$ por el razonamiento anterior.
$(L\mathcal{C}2) \Rightarrow (L\mathcal{C}3)$. Todo abierto $A \subset \mathcal{X}$ es la unión de sus componentes conexas.
$(L\mathcal{C}3) \Rightarrow (L\mathcal{C}1)$; inmediato de 2.3.8. ■

6.2.17 *Ejemplo*

Los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ son localmente conexos, puesto que las bolas $B(x, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ son conexas como veremos en la sección siguiente que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *no* son localmente conexos.

6.2.18 *Ejemplo*

Todos los espacios discretos y todos los espacios indiscretos son localmente conexos. Todo espacio discreto con más de un punto da un ejemplo para un espacio que es localmente conexo pero no conexo. El inverso es también posible como mostrarán los ejemplos siguientes:

6.2.19 *Ejemplo*

Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la gráfica de la función

$$g : x \mapsto \begin{cases} \sin 1/x & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

X es conexo (6.1.22). Sin embargo, no es localmente conexo: $(0,0) \in X$ no posee un sistema fundamental de vecindades conexas (fig 82).

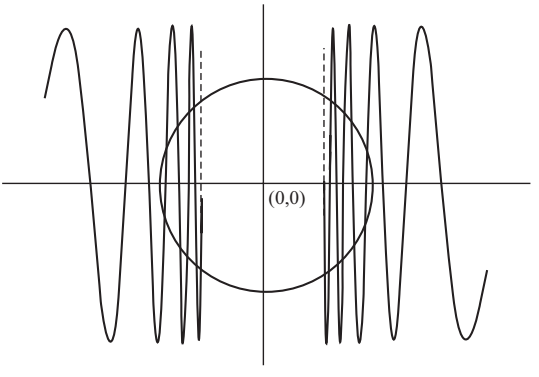


Figura 82. Conjunto no localmente conexo

La imagen de un espacio localmente conexo por una aplicación continua no es localmente conexa en general. Si esto fuese cierto, todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ sería localmente conexo, pues es imagen continua del espacio discreto (luego localmente conexo) $(X, \mathcal{P}(X))$. Veremos en la siguiente proposición que las *identificaciones* mantienen la conexión local.

6.2.20 *Proposición*

Cada espacio cociente X/R de un espacio localmente conexo $(X, \mathcal{X})$ es localmente conexo.

Demostración: Verificaremos que X/R satisface al criterio $(L\mathcal{C}2)$. Sea φ la aplicación canónica de X en X/R y sea $A \subset X/R$ un abierto. Debemos probar que toda componente conexa $C \subset A$ es abierta. Como φ es identificación, bastará probar que $\varphi^{-1}[C]$ es abierto. Si C_x es la componente conexa (abierta) de $x \in \varphi^{-1}[C]$ en $\varphi^{-1}[A] \in \mathcal{X}$, entonces $\varphi[C_x] \subset A$ es conexo y contiene a $\varphi(x) \in C$. Puesto que C es el mayor conexo en A que contiene a $\varphi(x)$, tenemos $\varphi(x) \in \varphi[C_x] \subset C$ y por lo tanto $\varphi^{-1}[C] = \bigcup_{\varphi(x) \in C} C_x \in \mathcal{X}$. Concluimos que C es abierto en X/R. ■

6.2.21 *Ejemplo*

El toro n-dimensional T^n y el espacio proyectivo n-dimensional $P^n(\mathbb{R})$ son localmente conexos.

Un espacio producto de una familia infinita de espacios localmente conexos *no* es necesariamente localmente conexo. Considérese, por ejemplo, el discontinuo de Cantor.

6.2.22 *Proposición*

$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente conexo si todo espacio $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ es localmente conexo y si además casi todos los espacios $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ son conexos $(\alpha \in I)$.

Demostración: Ejercicio. ■

Para analizar la conexión local de *espacios métricos* introduciremos la noción siguiente.

6.2.23 *Definición*

Sea (X, d) un espacio seudométrico. Decimos que una sucesión finita $(A_0, ..., A_k)$ de subconjuntos $A_i \subset X$ es una ε-cadena de longitud k $(\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N})$ si $A_j \cap A_{j-1} \neq \varnothing$ para $j = 1, ..., k$ y si $fr(A_j) < \varepsilon$ para todo $j = 0, ..., k$: Se dice que tal cadena conecta dos puntos x y y de X, si $x \in A_0$ y $y \in A_k$ (fig. 83).

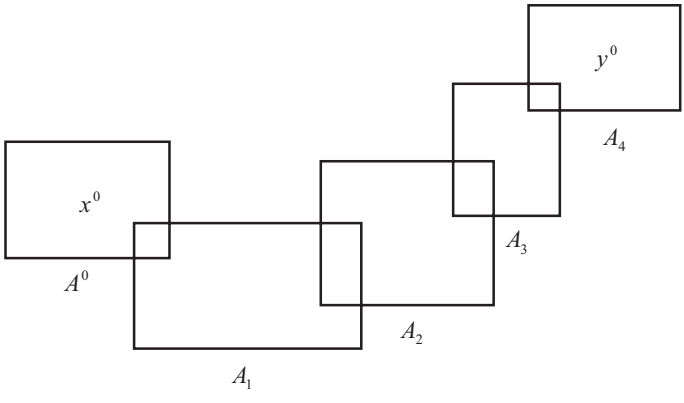


Figura 83. ε-cadena conectando x con y

Un espacio seudométrico localmente conexo (X, d) es conexo si y sólo si dos puntos cualesquiera x, $y \in X$ pueden conectarse por una ε-cadena de conexos (resp. de bolas, si las bolas en (X, d) son conexas).

Demostración: Si $(A_0, ..., A_k)$ es una ε-cadena de conexos, entonces $\bigcup_{j=0}^{k} A_j$ es conexo por 6.1.16. Entonces la condición es suficiente (6).

Inversamente supongamos que (X, d) conexo. Consideremos la relación de equivalencia sobre X : $xRy \Leftrightarrow x$ y y pueden conectarse por una ε-cadena de conexos (resp. de bolas).

Las clases de equivalencias correspondientes son abiertas, puesto que para todo $x \in X$ existe una vecindad conexa V (resp. una bola de centro x) que tiene un diámetro menor que ε. Todos los puntos de V pueden conectarse con x por una ε-cadena de conexos (resp. de bolas) de longitud 1. Por lo tanto, sólo puede existir una única clase de equivalencia. ■

6.2.25 *Ejercicio*

Sea $A \subset (X, \mathcal{X})$ un subconjunto conexo que es a la vez abierto y cerrado. Probar que A es una componente conexa.

6.2.26 *Ejercicio*

Probar que si un espacio topológico tiene sólo un número finito de componentes conexas, entonces es la suma topológica de estas componentes.

6.2.27 *Ejercicio*

Determinar cuáles de los espacios siguientes son homeomorfos (fig. 84).

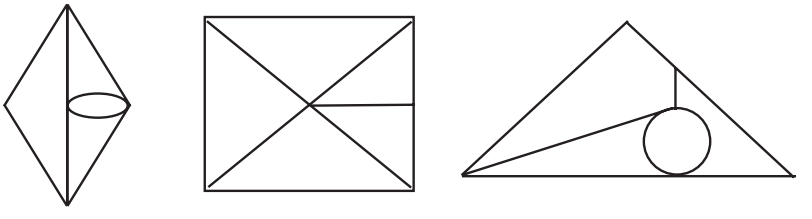


Figura 84.

6.2.28 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ localmente conexo, $A \subset X$ y sea C una componente conexa de A. Probar:

i) $\overset{\circ}{C} = C \cap \mathring{A}$

ii) $fr\ C \subset fr A$

iii) $A = \overline{A} \Rightarrow fr\ C = C \cap fr A$

6.2.29 *Ejercicio*

El conjunto de Cantor es cerrado en $[0, 1]$, no numerable y tiene medida cero.

§ 6.3 Espacios conexos por caminos

Tratemos, por un momento, de definir intuitivamente lo que es un conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^2$ sin utilizar conceptos de la topología general. Parece natural decir que C es conexo si dos puntos cualesquiera pueden conectarse por una curva que no sale del conjunto. En efecto, esta fue la primera definición precisa de un conjunto conexo (C. Weierstrass) (fig. 85).

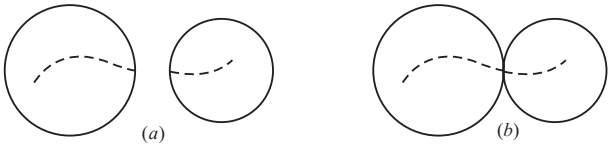


Figura 85. (a) Conjunto no conexo y (b) conexo según Weierstrass

De hecho, este concepto de conexión es más fuerte que el concepto introducido en las secciones anteriores. En efecto, exige que dos puntos cualesquiera del espacio puedan conectarse por un *conjunto conexo especial*, a saber una curva (véase (6)). Para precisar el nuevo concepto empezaremos por distinguir entre unas nociones cercanas.

6.3.1 *Definición (camino, curva)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces una aplicación continua f del intervalo $[0,1]$ en X se llama **camino** en $(X, \mathcal{X})$. $f(0)$ es el *origen* del camino f y $f(1)$ su *extremo*. Se dice que tal aplicación f **conecta** los puntos $f(0)$ y $f(1)$ en $(X, \mathcal{X})$. $C = f[[0,1]] \subset X$ se llama **curva** determinada por f; se dice que f es una **representación paramétrica** de esta curva.

Para una curva C existen diferentes representaciones paramétricas (caminos), por ejemplo, los dos caminos distintos $t \mapsto t$ y $t \mapsto t^2 (0 \leq t \leq 1)$ determinan la misma curva.

Introduciremos dos operaciones para caminos. Si $f : [0,1] \to (X, \mathcal{X})$ es un camino, el *camino inverso*, denotado por f^-, se define por

$$f^- : t \mapsto f(1-t)$$

f^- tiene la misma curva que f, pero $f(1)$ es su origen y $f(0)$ su extremo (fig. 86).

Si $f : t \mapsto a \in X$ es un camino constante, entonces $f^- = f$. Tales caminos se llaman 0-arcos. La curva de un 0-arco se reduce a un punto en X (notación para 0-arcos: $< a >$).

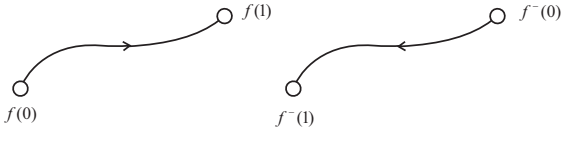


Figura 86. Camino inverso

Si f, g son dos arcos en $(X, \mathcal{X})$ tales que $f(1) = g(0)$, entonces se define la composición $f\mathbf{T}g$ por:

$$f\mathbf{T}g : t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

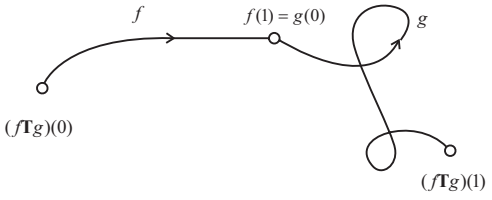


Figura 87. Composición de arcos

La operación $\mathbf{T}$ no es conmutativa: en general, si el camino $g\mathbf{T}f$ está definido, $f\mathbf{T}g$ puede no estar definido.

Por medio de las operaciones introducidas es fácil comprobar que la relación sobre X:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ puede conectarse con } b \text{ por un camino en } (X, \mathcal{X}) \tag{9}$$

es una *relación de equivalencia.*

En efecto: $a \in X$ se conecta consigo mismo por un 0-arco (reflexividad), si a se conecta con b por el arco f, entonces el arco f^- conecta b con a (simetría); si f conecta a con $b \in X$ y si g conecta b con c en $(X, \mathcal{X})$, entonces $f\mathbf{T}g$ conecta a con c (transitividad).

6.3.2 *Definición (componentes conexas por arcos, conexo por arcos)*

Las clases de equivalencia de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ descomponen a X en subconjunto ajenos llamados **componentes por caminos de** $(X, \mathcal{X})$.

$(X, \mathcal{X})$ es conectable por caminos si y sólo si X tiene una sola componente por caminos, o sea si todo $x \in X$ puede conectarse con todo $y \in X$ por un camino.

Un subconjunto $C \subset X$ se dice conexo por arcos, si lo es el subespacio $(C, \mathcal{X}_C)$.

$(X, \mathcal{X})$ se llama localmente *conectable por caminos* si todo punto $x \in X$ posee un sistema fundamental de vecindades, formado por conjuntos conectable por caminos.

Puesto que toda curva es un subconjunto conexo (6.1.17), toda componente por caminos de $(X, \mathcal{X})$ está incluida en una componente conexa de $(X, \mathcal{X})$. En particular.

6.3.3 *Proposición*

Todo espacio conectable por caminos es conexo.

Los ejemplos siguientes muestran que la conexión de muchos espacios topológicos se demuestra fácilmente probando que dos puntos cualesquiera pueden

conectarse por un arco. Antes recordaremos la *versión lineal* de dos conceptos, *curva* y *convexo*, para espacios vectoriales topológicos.

6.3.4 *Definición (segmento, convexo)*

Sea E un espacio vectorial real o complejo y sean x, $y \in E$. El conjunto

$$[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\} \tag{10}$$

se llama **segmento** (cerrado) entre x y y.

Un subconjunto $C \subset E$ se llama **convexo** si cumple

$$x, y \in C \Rightarrow [x, y] \subset C \tag{11}$$

6.3.5 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio vectorial topológico (p. ej., un espacio normado). Entonces para todo par de puntos x, $y \in E$ la aplicación $t \mapsto tx + (1-t)y$ de $[0, 1]$ en $(E, \mathcal{X})$, es continua y se llama *arco lineal* conectando x con y.

Resulta que todo espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{X})$, en particular los espacios $\mathbb{R}^n$, los espacios de Hilbert y los espacios normados, son conectables por caminos. Más precisamente, concluimos que *todo subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico es conexo por arcos.* Por ejemplo, toda bola $B(a, \rho)$ en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es conectable por caminos. De aquí que todo espacio normado y más generalmente, todo espacio localmente convexo (5.3.10) es localmente conectable por caminos.

Si en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ todo punto x puede conectarse por un arco con un punto fijo x_0, $(X, \mathcal{X})$ es conectable por caminos (tiene una única componente conectable por caminos).

6.3.6 *Ejemplo*

Un subconjunto S de un espacio vectorial real o complejo se llama **estrellado**, si tiene la propiedad siguiente: Existe un punto $x_0 \in S$ tal que

$$x \in S \Rightarrow [x_0, x] \subset S \qquad \text{(fig. 88)} \tag{12}$$

El razonamiento anterior muestra que todo subconjunto estrellado en un espacio vectorial topológico es conectable por caminos.

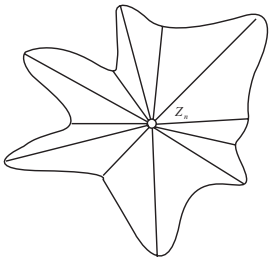


Figura 88. Conjunto estrellado

Si bien un espacio conectable por caminos es conexo (6.3.3), los espacios conexos no son necesariamente conectable por caminos como muestra el siguiente ejemplo.

6.3.7 *Ejemplo*

Sea $J := \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ y X la cerradura $\overline{G} = G \cup J$ de la gráfica G de la función $x \mapsto \operatorname{sen} 1/x$ sobre $\mathbb{R}^*$. Por el ejemplo 6.1.22 sabemos que $\overline{G}$ es conexo. Sin embargo, G no es conectable por caminos. Supongamos por reducción al absurdo que $f = (f_1, f_2) : I = [0,1] \to \overline{G} \subset \mathbb{R}^2$ sea un camino, que conecta $(0,0)$ con $(1/\pi, 0)$. Sea $I_0 = \{t \in I \mid f_1[[t,1]] \subset (0, 1/\pi]\}$ y $t_0 := \operatorname{ínf} I_0$. I_0 es un intervalo abierto en I de la forma $(t_0, 1]$. Necesariamente $f_1(t_0) = 0$, entonces $f_1[(t_0,1]] = (0, 1/\pi]$. Sea (t_n) una sucesión es $(t_0, 1]$ tal que $t_n \longrightarrow t_0$ y $f_1(t_n) = 2/n\pi$ (tal sucesión existe por el teorema del valor intermedio). Entonces se tiene que $f_2(t_0) = \operatorname{lím}\,(\operatorname{sen} 1/f_1(t_n))$; pero la sucesión oscila entre los valores $+1, -1$, luego no tiene límite. ¡Contradicción!

Ahora el lector probará facilmente que $X = \overline{G}$ tiene exactamente tres componentes conexas por arcos, a saber

$$G_+ := \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) | x > 0 \right\}, \quad J \quad \text{y}$$

$$G_- := \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) | x < 0 \right\},$$

Una serie de propiedades de los espacios conectables por caminos se deducen de manera análoga a las de los espacios conexos.

Si f es un camino que conecta los puntos x, y en $(X, \mathcal{X})$ y si $\varphi : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una aplicación continua, entonces el camino $\varphi \circ f$ conecta los puntos $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ en $\varphi[X]$. Concluimos.

6.3.8 *Proposición*

La imagen continua de un espacio conectable por caminos es conectable por caminos.

En particular, ser conectable por caminos es una propiedad topológica.

La proposición siguiente es trivial.

6.3.9 *Proposición*

Sea $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de subespacios conectables por caminos de $(X, \mathcal{X})$ tal que existe un C_β $(\beta \in I)$ que tiene una intersección no vacía con todos los $C_\alpha (\alpha \in I)$.

Entonces $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ es conectable por caminos.

6.3.10 *Proposición*

Todo producto de espacios conectable por caminos es conectable por caminos.

Demostración: Ejercicio. ■

La proposición análoga a la 6.1.13 no se cumple pues como muestra el ejemplo anterior existen subconjuntos conectables por caminos ($G_+ \subset \mathbb{R}^2$) cuya cerradura ($\overline{G}_+ = G_+ \cup J$) *no* es conectable por caminos. El mismo ejemplo muestra también que las componentes conectables por caminos *no* son necesariamente cerradas: G_+ no es cerrada en $G_+ \cup J$.

6.3.11 *Proposición*

i) Para un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es equivalente:

ii) Todas las componentes conectables por caminos en $(X, \mathcal{X})$ son abiertas.

iii) Todo punto $x \in X$ posee una vecindad conectables por caminos en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Ejercicio. ■

6.3.12 *Proposición*

$(X, \mathcal{X})$ es conectables por caminos si y sólo si es conexo y todo punto $x \in X$ posee una vecindad conectables por caminos.

Demostración: Ejercicio. ■

Sabemos que los espacios normados $(E, \|\cdot\|)$, y por lo tanto también sus subconjuntos abiertos, son localmente conectables por caminos. De aquí concluimos el resultado siguiente que es muy importante, por ejemplo, en la teoría de funciones.

6.3.13 *Corolario*

Un abierto U en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ (en particular en $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) es conexo si y sólo si es conectables por caminos.

Los abiertos conexos en un espacio normado pueden caracterizarse de manera más precisa.

6.3.14 *Definición (polígono)*

Sea E un espacio vectorial real o complejo y sean $x_0, .., x_k \in E$. La unión de segmentos $\bigcup_{i=1}^{k} [x_{i-1}, x_i]$ se llama polígono que conecta x_0 y x_k y se denota por $(x_0, .., x_k)$.

Es claro que todo polígono en un espacio vectorial topológico es una curva. Le corresponde canónicamente el camino $f_1 \mathbf{T} f_2 \mathbf{T}, \ldots, \mathbf{T} f_k$ donde las funciones $f_i : I \to [x_{i-1}, x_i]; 1 \leq i \leq k$ son los caminos $t \mapsto t x_{i-1} + (1-t) x_i$.

6.3.15 *Teorema*

Sea A un abierto conexo en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Entonces dos puntos cualesquiera x, y en A pueden conectarse por un polígono situado en A.

Demostración: A es un espacio métrico conexo y localmente conexo. Entonces existe una ε-cadena de bolas $(B(x_0, \rho_0), B(x_1, \rho_1), .., B(x_k, \rho_k))$, contenidas en A, que conecta x y y (6.2.24). Para todo $i = 1, .., k$ existe $y_i \in B(x_{i-1}, \rho_{i-1}) \cap B(x_i, \rho_i)$. El polígono $(x, x_0, y_1, x_1, .., y_k, x_k, y)$ conecta x y y y está situado en $\bigcup_{j=0}^{k} B(x_j, \rho_j) \subset A$. ■

Aplicando el mismo método de demostración a las bolas (*cubos*) de la norma uniforme sobre $\mathbb{R}^n$ se obtiene:

6.3.16 *Proposición*

Sea A un abierto conexo en $\mathbb{R}^n$. Entonces cada par de puntos $x, y \in A$ pueden conectarse por un polígono formado por segmentos paralelos a los ejes coordenados.

Demostración: Ejercicio.■

§ 6.4 **La relación de homotopía**

Consideremos una familia $(h_t)_{t \in T}$ de aplicaciones $h_t : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ que tienen todas el mismo dominio y el mismo codominio. La definición de tal familia es equivalente a definir una función $h : (x, t) \mapsto h(x, t) = h_t(x)$ de $X \times T$ en Y. Hasta ahora siempre hemos considerado familias $(h_t)_{t \in T}$ con un conjunto de índices de T *sin topología*. Si $(T, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y si $h : X \times T \to Y$ es continua, entonces se dice que $(h_t)_{t \in T}$ es una **familia parametrizada** por aplicaciones continuas. En este caso, las aplicaciones parciales

$$h_t : x \mapsto h_t(x) := h(x,\, t) \text{ de } X \text{ en } Y \ (t \in T)$$

$$h_x : t \mapsto h_x(t) := h(x, t) \text{ de } T \text{ en } Y \ (t \in X)$$

son todas continuas. Tales familias parametrizadas de aplicaciones continuas se estudian, por ejemplo, en la teoría de los espacios fibrados.

Nosotros vamos a tratar ahora familias con una parametrización especial. Se dice que $h : X \times T \mapsto Y$ es una **familia de** n **parámetros** si $T = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ es

un intervalo n-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Nos interesan especialmente las familias de un parámetro con $T = [0,1] = I$. Estas familias h tienen una interpretación intuitiva: h define una *deformación continua* de $f := h_0 : x \mapsto h(x,0)$ en $g := h_1 : x \mapsto h(x,1)$. Si interpretamos t $(0 \leq t \leq 1)$ como parámetro de tiempo, podemos decir: $f = h_0$ puede deformarse continuamente en $g = h_1$ dentro de una unidad de tiempo. Las aplicacones $h_t : x \mapsto h(x,t)$ definen el estado de esta deformación continua al tiempo t (fig. 89).

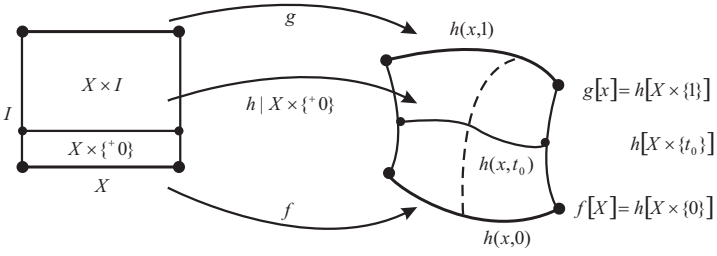


Figura 89. Deformación continua

Para todo $x \in X$, la aplicación parcial $h_x : t \mapsto h(x,t)$ de I en Y es un camino que conecta $f(x)$ con $g(x)$ en Y, h_x se llama *camino de deformación* $(x \in X)$. Luego la familia parametrizada $h : X \times I \to Y$ asocia a cada $x \in X$ un camino de deformación en Y. Resulta en particular que para todo $x \in X$, $f(x)$ permanece, durante la deformación, en la misma componente conexa por caminos.

6.4.1 *Definición (homotopía entre aplicaciones, aplicaciones inesenciales)*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos e $I = [0,1]$. Entonces dos aplicaciones continuas f, g de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$ se llaman *homotópicas* (en símbolos $f \simeq g$), si existe una aplicación continua $h : X \times I \to Y$ tal que

$$h(x,0) = f(x) \text{ y } h(x,1) = g(x) \text{ , para todo } x \in X \tag{13}$$

En este caso h se llama una **homotopía** entre f y g (en símbolos $h : f \simeq g$). Una aplicación $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ se llama **inesencial** (en símbolos $f \simeq 0$), si es homotópica a una función constante $g : x \mapsto y_0$ de X en Y.

6.4.2 *Nota*

El problema de ver si existe una homotopía entre dos aplicaciones dadas $f, g : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ puede ser muy difícil. Su solución depende de ambas funciones f, g así como de los dos espacios $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$. Notemos que puede presentarse como caso especial de un problema de prolongación continua. En efecto, si denotamos por $\mathcal{C}$ al subespacio cerrado $X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ en $X \times I$, entonces equivale al problema de prolongar la función $h : \mathcal{C} \to Y$ definida por (13) a todo el espacio $X \times I$. Esto nos hace ver también que se debe especificar bien el espacio

$(Y, \mathcal{Y})$. El problema de homotopía siempre tiene solución si extiende el codominio convenientemente. Basta tomar el espacio de adjunción $\tilde{Y} = Y \sqcup_h (X \times I)$. Entonces la restricción de la aplicación canónica $\varphi : (X \times I) + Y \to \tilde{Y}$ a $X \times I$ es una homotopía entre f y g en $\tilde{Y}$ (fig. 90).

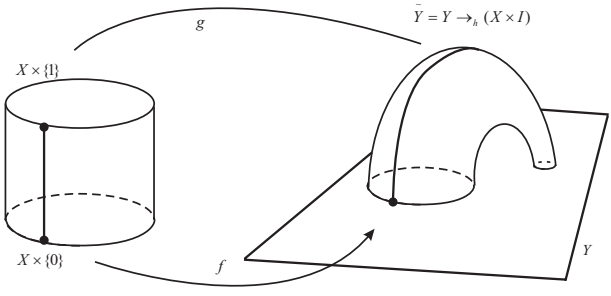


Figura 90.

La relación $\simeq$ está definida sobre el espacio $\mathfrak{C}(X, Y)$ de las aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$. Más precisamente.

6.4.3 *Proposición*

La homotopía define una relación de equivalencia sobre el espacio $\mathfrak{C}(X, Y)$.

Demostración: Sean e, f, g aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$. La relación es reflexiva: la homotopía $h : (x, t) \mapsto e(x)$ $(x \in X, t \in I)$ muestra que $e \simeq e$. Es simétrica: si $h : e \simeq f$, entonces la homotopía

$$(x, t) \mapsto h(x, 1 - t) \quad (x \in X, t \in I) \text{ muestra que } f \simeq e.$$

Finalmente es también transitiva: si $h : e \simeq f$ y $\tilde{h} : f \simeq g$, entonces obtenemos una homotopía $k : e \simeq g$ efectuando las deformaciones h y $\tilde{h}$ una después de la otra con velocidad doble, o sea, definiendo (fig. 91)

$$k(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \blacksquare$$

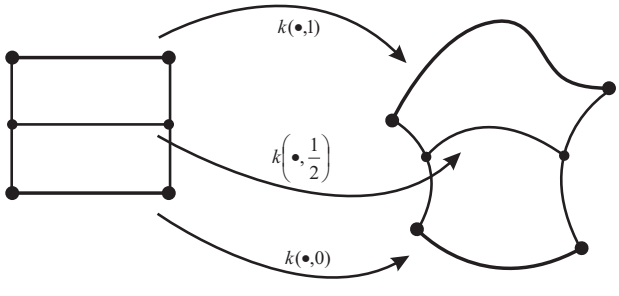


Figura 91. Transitividad de la homotopía

Veamos ahora que la homotopía es compatible con la composición de aplicaciones.

6.4.4 *Proposición*

Sean f_0, f_1 aplicaciones homotópicas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$ y sean g_0, g_1 aplicaciones homotópicas de $(Y, \mathcal{Y})$ en $(Z, \mathcal{Z})$. Entonces $g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1$, son aplicaciones homotópicas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Z, \mathcal{Z})$.

Demostración: Sea $h : f_0 \simeq f_1$ y $k : g_0 \simeq g_1$. Entonces la aplicación $g_0 \circ h : X \times I \to Z$ es una homotopía entre $g_0 \circ f_0$ y $g_0 \circ f_1$. La aplicación $F : (x, t) \mapsto (f_1(x), t)$ de $X \times I$ en $Y \times I$ es continua. Luego $k \circ F$ es una homotopía entre $(k \circ F)_0 = g_0 \circ f_1$ y $(k \circ F)_1 = g_1 \circ f_1$. Por la transitividad de la relación $\simeq$ concluimos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.■

Antes de introducir de homotopía entre *espacios*, consideremos algunos ejemplos de aplicaciones homotópicas.

6.4.5 *Ejemplo*

Dos aplicaciones constantes $f, g : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ son homotópicas si y sólo si sus puntos imágenes pertenecen a la misma componente por caminos en $(Y, \mathcal{Y})$. En efecto, si $f[X] = \{y_0\}, g[X] = \{y_1\}$ y $h : f \simeq g$ entonces, para todo $x \in X$, $h_x : t \mapsto h(x, t)$ es un camino que conecta $f(x) = y_0$ y $g(x) = y_1$, Inversamente, si $t \mapsto y(t)$ es un camino que conecta y_0 y y_1 entonces $h : (x, t) \mapsto y(t)$ es una homotopía entre f y g.

6.4.6 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(Y, \mathcal{Y})$ un subespacio *estrellado* en un espacio vectorial topológico $(\mathbf{E}, \mathcal{X}')$. Entonces toda aplicación continua $f : X \to Y$ es inesencial. En efecto si $c \in Y$ es un punto central de Y, entonces la aplicación continua

$$h : (x, t) \mapsto tc + (1 - t)f(x) \text{ de } X \times I \text{ en } Y$$

es una homotopía entre f y la función constante $g : x \mapsto c$. Hablando intuitivamente, h contrae $f(x)$ al centro c (fig. 92).

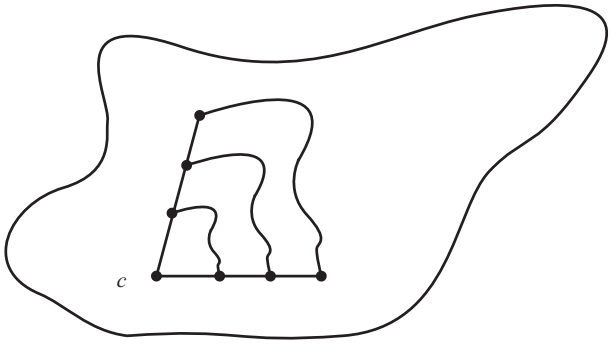


Figura 92.

En particular, toda aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en un subespacio convexo de $(\mathbf{E}, \mathcal{X}')$ es inesencial.

6.4.7 *Ejemplo*

Del ejemplo anterior se concluye que toda aplicación continua de un espacio topológico en el *cubo* $I^n = [0,1]^n$ o en una *bola* $B'(0,\rho) \subset \mathbb{R}^n$ es inesencial. En cambio, esto no se cumple para aplicaciones en las *esferas* $\mathbf{E^n} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}} \mid \| \mathbf{x} \| = \mathbf{1}\}$. Esto es evidente para $n = 0$, pero difícil de probar para $n > 0$ (teorema de Brouwer). Sin embargo, tenemos el resultado positivo siguiente: sean f, g dos aplicaciones continuas de un espacio $(X, \mathcal{X})$ en $\mathbf{E}^n$ tal que para ningún punto $x \in X, f(x)$ sea antipolo de $g(x)$. Entonces f y g son homotópicas. En efecto, la aplicación $h : X \times I \to \mathbf{E}^n$ definida por

$$h(x,t) = \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{\| tg(x) + (1-t)f(x) \|}$$

es una homotopía entre f y g (el denominador es siempre distinto de cero por hipótesis). Los arcos de deformación de esta homotopía son precisamente las líneas geodésicas entre $f(x)$ y $g(x)$ (fig. 93).

En particular, toda aplicación continua no *sobreyectiva* de $(X, \mathcal{X})$ en $\mathbf{E}^n$ es inesencial (basta tomar $g(x) = y_0$ con $-y_0 \in \mathbf{E}^n \backslash f[X]$).

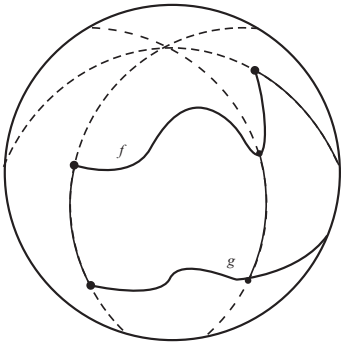


Figura 93. Aplicaciones homotópicas sobre una esfera

6.4.8 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y $C(X)$ el cono de base $(X, \mathcal{X})$. Entonces una aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es inesencial si y sólo si tiene una prolongación continua $F : C(X) \to Y$ (fig. 94).

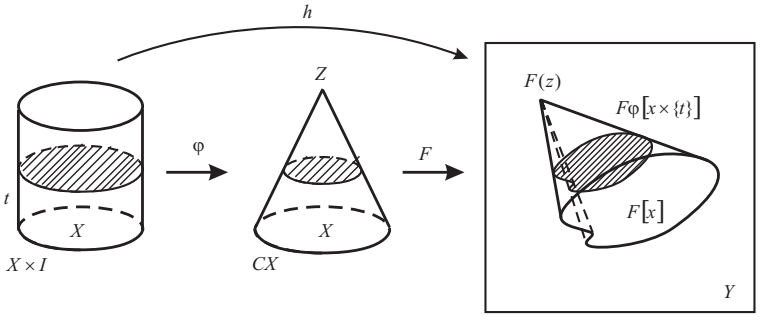


Figura 94.

6.4.9 *Ejercicio*

Sea $(Y, \mathcal{Y})$ un espacio topológico y $f : \mathbf{E}^n \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación continua. Entonces $f \simeq 0$ si y sólo si f tiene una prolongación continua F a $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \parallel x \parallel \leq 1\}$.

6.4.10 *Definición (espacios homotópicos)*

Dos espacios $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ se llaman **homotópicos o del mismo tipo de homotopía** si existe un par de aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ (en símbolos: $f, g : X \simeq Y$).

Para ver que la homotopía constituye una relación de equivalencia entre los espacios topológicos sólo es necesario comprobar la transitividad, que es una consecuencia inmediata de la proposición 6.4.4. Si $f_1, g_1 : X \simeq Y$ y $f_2, g_2 : Y \simeq Z$ entonces $(g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \simeq g_1 \circ \mathbb{1}_Y \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \simeq \mathbb{1}_X$, y de manera análoga $(f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) \simeq \mathbb{1}_Z$, luego $f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2 : X \simeq Z$.

Muchas propiedades topológicas, particularmente las estudiadas en Topología Algebraica, son invariantes del tipo de homotopía. Daremos aquí un primer ejemplo.

6.4.11 *Ejemplo*

Para todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ sea $\pi_0(X)$ el conjunto de las componentes por caminos de $(X, \mathcal{X})$. Veamos que la cardinalidad de $\pi_0(X)$ es un invariante del tipo de homotopía. Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ dos espacios topológicos y $f, g : X \cong Y$. Sabemos que f y g aplican toda componente por caminos de X (resp. Y) en una componente por caminos de Y (resp. X). Si $g \circ f : X \to X$ se deforma continuamente en $\mathbb{1}_X$, entonces como $\mathbb{1}_X(x) = x, g \circ f(x)$ permanece en la misma componente por caminos. Esto significa que $g \circ f$ aplica toda componente por caminos de $(X, \mathcal{X})$ en sí misma.

Concluimos que f aplica diferentes componentes de $(X, \mathcal{X})$ en diferentes componentes de $(Y, \mathcal{Y})$. Luego $Card\,(\pi_0(Y)) \geq Card\ (\pi_0(X))$. Aplicando el mismo razonamiento a $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ se obtiene la desigualdad inversa.

Por la definición, dos espacios homeomorfos son trivialmente homotópicos. Por lo tanto el tipo de homotopía es una propiedad topológica.

$\rightsquigarrow$ Veremos en los ejemplos siguientes que el inverso no se cumple: *en general dos espacios homotópicos no son homeomorfos.*

6.4.12 *Ejemplo*

Todo conjunto estrellado C (en particular todo convexo) en un espacio vectorial topológico es homotópico a un espacio topológico que tiene un único punto. En efecto, sea c un punto central de C y sea $g : C \to \{c\}$ la función constante $g[C] = \{c\}$. Entonces el ejemplo 6.4.6 muestra que la función identidad $f := \mathbb{1}_C : C \to C$ es homotópica a g. Si denotamos por i la inyección canónica del subespacio unitario $\{c\}$ en C entonces $i \circ g = g \simeq \mathbb{1}_c$ y

$g \circ i = \mathbb{1}_{\{C\}}$, luego $i, g : \{c\} \simeq C$.

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **contraíble a un punto** $c \in X$, si la aplicación identidad $\mathbb{1}_X$ es homotópica a la aplicación constante $g : X \to \{c\}$. Hemos comprobado que *todo subespacio estrellado de un espacio vectorial topológico es contraible a cada uno de sus puntos centrales.* En particular, en $\mathbb{R}^n$, toda bola y todo cubo son espacios contraibles. Mencionemos, sin demostración, que las esferas $\mathbf{E}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no son contraibles. Este es precisamente el enunciado del teorema de Brouwer (veáse DUGUNDJI [51]).

6.4.13 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $C \subset X$ cerrado, $i : C \to X$ la inyección canónica. Una aplicación continua $r : X \to C$ tal que $r|C = \mathbb{1}_C$ se llama retracción. $C \subset X$ se llama *retracto de* $(X, \mathcal{X})$ si existe una retracción de X sobre C. C se llama *retracto de deformación* de $(X, \mathcal{X})$ si existe una retracción $r : X \to C$ y una homotopía $h : X \times I \to X$ entre $i \circ r$ y $\mathbb{1}_X$ que deja los puntos de C fijos. Esto significa que:

$h(x, 0) = x$ para todo $x \in X$
$h(x, 1) = r(x)$ para todo $x \in X$
$h(x, t) = x$ para todo $x \in C$ y todo $t \in [0, 1]$

En este caso $h : i \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ y $r \circ i = \mathbb{1}_C$; luego $i, r : C \simeq X$: cada retracto de deformación de un espacio $(X, \mathcal{X})$ es homotópico a $(X, \mathcal{X})$.
Para concretar este resultado consideremos dos retractos de deformación en $\mathbb{R}^n$.

a) La bola unitaria cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$ es un retracto de deformación del espacio $\mathbb{R}^n$. En efecto, la aplicación continua $r : \mathbb{R}^n \to B^n$, definida por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \| x \| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{si} \quad \| x \| > 1 \end{cases}$$

que deja correr los puntos fuera de B^n radialmente a la esfera E^{n-1}, es evidentemente una retracción. La homotopía: $h(x, t) = x/\text{máx}\{1, t \| x \|\}$ $(x \in \mathbb{R}^n, t \in I)$ es una homotopía entre $i \circ r$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ que deja los puntos de B^n fijos (fig. 95).

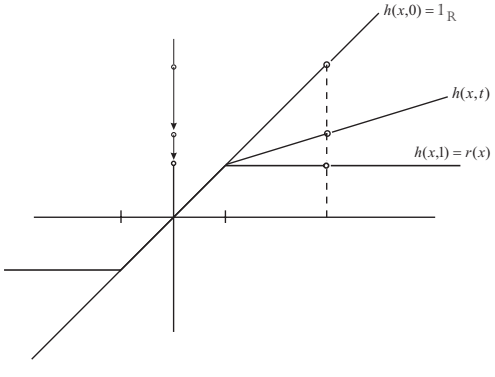


Figura 95. Gráficas de las funciones $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, r y $h(\cdot, t)$

b) De manera análoga se demuestra que E^{n-1} es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Concluimos que B^n y $\mathbb{R}^n$ (resp. E^{n-1} y $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) tienen el mismo tipo de homotopía (fig. 96).

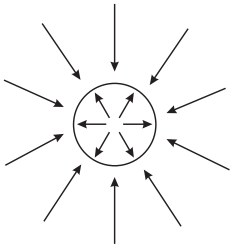


Figura 96.

6.4.14 *Ejercicio*

Sea C un subespacio cerrado de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Probar que C es un retracto de $(X, \mathcal{X})$ si y sólo si, para todo espacio $(Y, \mathcal{Y})$, toda aplicación continua $f : C \to Y$ tiene una prolongación continua a X.

6.4.15 *Ejercicio*

Sea $(Y, \mathcal{Y})$ un espacio contraible. Probar que toda aplicación continua que tiene $(Y, \mathcal{Y})$ como codominio o como dominio es inesencial. Dos aplicaciones cualesquiera de un espacio $(X, \mathcal{X})$ en el espacio contraible $(Y, \mathcal{Y})$ son homotópicas.

El ejercicio siguiente da un método general para generar espacios homotópicos.

6.4.16 *Ejercicio*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ continua y $F : X \times \{1\} \to Y$ la aplicación continua definida por $F(x, 1) = f(x)$. Probar que el llamado *cilindro de la aplicación* f

$$Z_f := Y \sqcup_F (X \times I)$$

es homotópico a $(Y, \mathcal{Y})$. Más precisamente Y es un retracto de deformación de Z_f (Y identificado con su inmersión canónica en Z_f). Indicación: considerar la restricción $r : Z_f \to Y$ definida por $r(x, t) = f(x)$ para $(x, t) \in X \times I$ y $r(y) = y$ para $y \in Y$.

§ 6.5 **Grupos fundamentales**

Los invariantes topológicos considerados en las secciones 1-3 no son instrumentos muy finos de caracterización topológica: el número de componentes por caminos, los órdenes de los eventuales puntos de intersección, etc., estas características son simples *números* que no pueden reflejar sutilmente la compleja estructura de un espacio. En esta sección veremos brevemente cómo pueden utilizarse grupos como instrumentos más finos de caracterización topológica. Se llaman *grupos de homotopía de primera dimensión o grupos fundamentales.*

Si recordamos que dos caminos u, v en $(X, \mathcal{X})$ con $u(1) = v(0)$ pueden componerse, parece natural intentar construir grupos a partir de los caminos y su composición. Sin embargo, la composición $\mathbf{T}$ no es asociativa. Debemos introducir una relación de equivalencia entre los caminos que permita identificar los caminos $(u\mathbf{T}v)w$ y $u\mathbf{T}(v\mathbf{T}w)$. La primera idea fue la de identificar dos caminos $u : I \to X$ y $v : I \to X$ si son homotópicos (como aplicaciones). Pero I es contraíble y por tanto (6.4.15) dos caminos cualesquiera en $(X, \mathcal{X})$ son homotópicos (como aplicaciones). Por eso introduciremos un concepto de homotopía más estricto para los caminos.

6.5.1 *Definición (arcos homotópicos)*

Dos caminos u, v en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ que tienen el mismo origen $u(0) = v(0)$ y el mismo extremo $v(1) = u(1)$ se llaman **homotópicos** si existe una homotopía h entre u y v que deja fijo el punto origen $u(0) = v(0)$ y el punto extremo $u(1) = v(1)$ (en símbolos $h : u \dot{\simeq} v$).

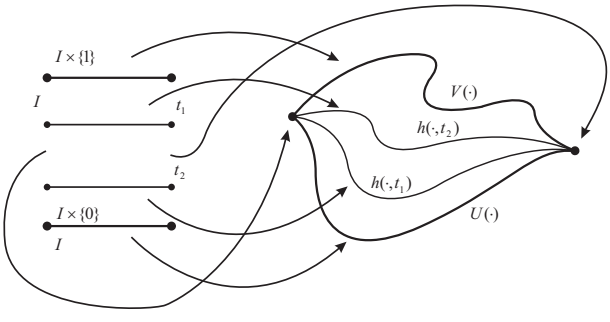


Figura 97. Homotopía entre caminos

De la definición se sigue que, dos caminos $u : I \to X, v : I \to X$ con $u(0) = v(0)$ y $u(1) = v(1)$, son homotópicos si existe una aplicación continua $h : I \times I \to X$ tal que

$h(x, 0) = u(x)$ para todo $x \in I$
$h(x, 1) = v(x)$ para todo $x \in I$
$h(0, t) = u(0) = v(0)$ y $h(1, t) = u(1) = v(1)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Nota: La última condición que expresa que h es constante sobre $\{0\} \times I$ y $\{1\} \times I$ es esencial para el concepto de homotopía entre caminos y lo distingue

del concepto de homotopía entre aplicaciones (fig. 97).

Para captar mejor el sentido intuitivo de la homotopía entre dos caminos daremos algunos ejemplos gráficos.

6.5.2 *Ejemplo*

Sobre una esfera y también en el plano todo par de caminos u, v que tienen el mismo origen y el mismo extremo son homotópicos (fig. 98).

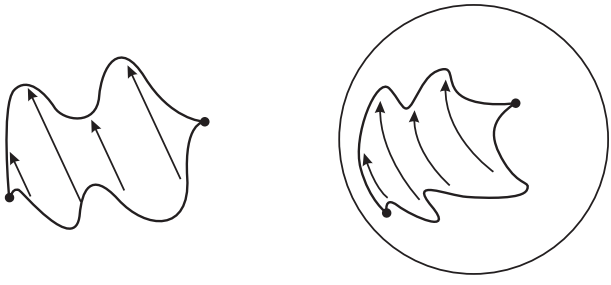


Figura 98.

6.5.3 *Ejemplo*

En una esfera de un asa, dos caminos u, v que tienen el mismo origen y el mismo extremo, de los cuales uno (v) pasa por el asa y el otro (u) no, no son homotópicos (aunque sean homotópicos como aplicaciones). Fijando origen y extremo del caminos no es posible 'sacarlo' del asa sin romperlo (fig. 99).

Figura 99.

6.5.4 *Ejemplo*

En el plano con dos huecos, los 5 caminos cerrados $u, v, \bar{v}, w, \bar{w}$, dibujados en la figura siguiente, no son homotópicos entre sí (fig. 100).

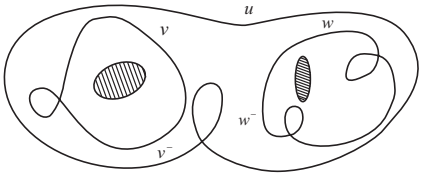


Figura 100.

Una homotopía entre ellos debe dejar fijo el punto x_0, pero entonces no podría contraer, por ejemplo el caminos w al caminos constante $< x_0 >$ sin romperlo.

De la misma forma que para la relación de homotopía entre aplicaciones, se demuestra que la homotopía entre caminos es una relación de equivalencia.

6.5.5 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Entonces la relación $\dot{\simeq}$ es de equivalencia sobre el conjunto $\mathfrak{C}(I, X)$ de los caminos en $(X, \mathcal{X})$.

6.5.6 *Nota*

La clase de equivalencia de un camino $u : I \to X$ se denota por $[u]$ y se llama también **clase de homotopía** del camino u.

Veamos primeramente que toda u-parametrización de un camino $u : I \times X$ que conserva origen y extremo, define la misma clase de homotopía. Más precisamente:

6.5.7 *Proposición*

Sea $u : I \to X$ un camino en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ y sea $\varphi : I \to I$ continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Entonces el camino $u \circ \varphi : I \to X$ es homotópico al camino u.

Demostración: La aplicación continua $h : I^2 \to (X, \mathcal{X})$ definida por

$$h(s,t) = u(s(1-t) + t\varphi(s)) \ \ (s, t \in I)$$

es una homotopía entre los caminos u y $u \circ \varphi : h(s, 0) = u(s)$ y $h(s, 1) = u \circ \varphi(s)$ para todo $s \in I, h(0, t) = u(0)$ y $h(1, t) = u(1)$ para todo $t \in I$.■

Si queremos introducir una composición entre las clases de homotopía por medio de la composición $\mathbf{T}$ entre los caminos, es necesario que ésta sea compatible con la relación de homotopía. En efecto tenemos:

6.5.8 *Proposición*

Sean $u_1, v_1, u_2, v_2 : I \to X$ arcos en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ tales que $u_1(1) = u_2(0)$ y $v_1(1) = v_2(0)$. Entonces $u_1 \dot{\cong} v_1$ y $u_2 \dot{\cong} v_2$ implican que

$$u_1^- \dot{\simeq} v_1^- \tag{14}$$

$$u_1 \mathbf{T} u_2 \dot{\simeq} v_1 \mathbf{T} v_2 \tag{15}$$

Demostración: Sea $h_1(s, t)$ (resp. $h_2(s, t)$) una homotopía entre los caminos u_1 y v_1 (resp. u_2 y v_2). Entonces:

$$h_1^-(s,t) := h_1(1-s, t)$$

es una homotopía entre los caminos inversos u_1^- y v_1^- lo que demuestra (14). La aplicación continua $h_3 : I^2 \to X$ definida por

$$h_3(s,t) = \begin{cases} h_1(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ h_2(2s-1,t) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre los caminos $u_1 \mathbf{T} u_2$ y $v_1 \mathbf{T} v_2$ lo que demuestra (15) (fig. 101). ■

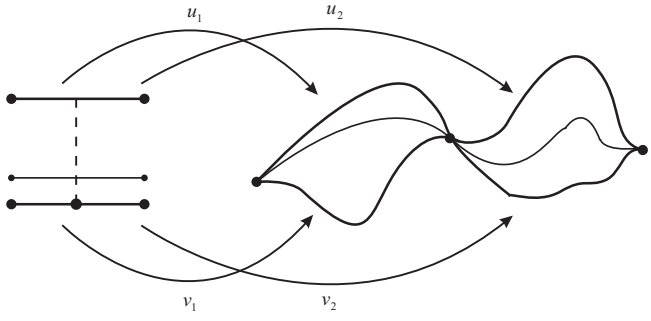


Figura 101. Homotopía entre $u_1 \mathbf{T} u_2$ y $v_1 \mathbf{T} v_2$

Si u, v son dos caminos componibles en $(X, \mathcal{X})$, entonces puede definirse un producto de las dos clases de homotopía $[u]$ y $[v]$ por

$$[u][v] = [u \mathbf{T} v] \tag{16}$$

puesto que, por la proposición anterior, esta definición no depende de los dos representantes escogidos $u \in [u]$ y $v \in [v]$. La proposición siguiente reune las propiedades elementales de esta ley de composición.

6.5.9 *Proposición*

Sean u, v, w en este orden, caminos componibles en $(X, \mathcal{X})$. Entonces se cumple

$$[u]([v][w]) = ([u][v])[w] \tag{17}$$

$$[< u(0) >][u] = [u] = [u][< u(1) >] \tag{18}$$

$$[u][u^-] = [< u(0) >] \text{ y } [u^-][u] = [< u(1) >] \tag{19}$$

Demostración: Los dos caminos obtenidos por composición de u, v, w:

$$[(u \mathbf{T} v) \mathbf{T} w](s) = \begin{cases} u(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ v(4s-1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ w(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$[u \mathbf{T} (v \mathbf{T} w)](s) = \begin{cases} u(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ v(4s-2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ w(4s-3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

en general son desiguales, pero son homotópicos porque se obtienen uno a partir del otro por reparametrización. Esto muestra (17). La demostración de (18) se deja al lector. Para probar (19), es suficiente probar que, para todo camino u, se tiene que $u\mathbf{T}u^- \dot{\simeq} < u(0) >$. Una homotopía entre los caminos $u\mathbf{T}u^-$ y $< u(0) >$ está dada, por ejemplo, por la aplicación continua (fig. 102).

$$[h(s,t) = \begin{cases} u[2s(1-t)] & \text{si } \ 0 \leq s \leq 1/2 \\ u[2(1-s)(1-t)] & \text{si } \ 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

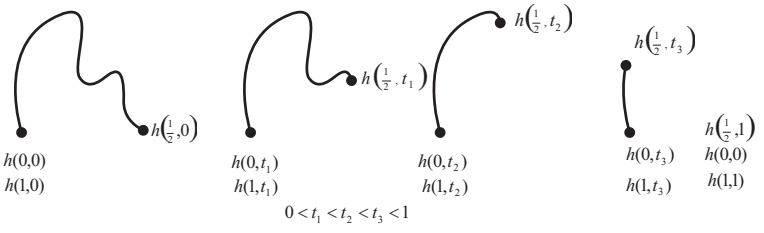


Figura 102.

Las propiedades (17), (18), (19) de la composición de clases de homotopía nos recuerdan las condiciones satisfechas por la ley de composición en un grupo (asociatividad, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso). Sin embargo, las clases de homotopía en su totalidad no forman un grupo porque no siempre son componibles. Para obtener un grupo de clases de homotopía, es en particular necesario que las clases escogidas puedan componerse consigo mismas. Esto presupone que los caminos respectivos tengan el mismo punto como origen y extremo.

6.5.10 *Definición: (camino cerrado, 0-homotópico)*

Un camino $u : I \to X$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama cerrado si $u(0) = u(1)$. El conjunto de los caminos cerrados de origen $x_0 \in X$ se denota por $A(X, x_0)$. Un camino cerrado u se llama 0-homotópico si es homotópico al camino constante $< u(0) >=< u(1) >$.

Veremos en seguida, como corolario de la proposición anterior, que se pueden reconstruir todas las clases de homotopía a partir de las clases de homotopía asociadas a los caminos cerrados. Más precisamente, sean x_0, x_1 dos puntos en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$; si denotamos por $\pi_1(X; x_0, x_1)$ al conjunto de las clases de homotopía cuyos caminos representantes tienen x_0 como origen y x_1 como extremo y por $\pi_1(X, x_0)$ el conjunto de las clases de homotopía $[u]$ cuyos caminos representantes u son cerrados tales que $u(0) = u(1) = x_0$, entonces se tiene:

6.5.11 *Corolario*

Sea u un camino en $(X, \mathcal{X})$ de origen x_0 y de extremo x_1. Entonces la aplicación $\cup^- : [v] \mapsto [v][u^-]$ de $\pi_1(X; x_0, x_1)$ en $\pi_1(X, x_0)$ es una biyección.

Demostración: La aplicación $\cup : [w] \mapsto [w][u]$ de $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X; x_0, x_1)$ es la inversa de $\cup^-$, por (17), (18) y (19). ■

Además la *homotopía* entre caminos puede reducirse a la 0-homotopía de caminos cerrados:

6.5.12 *Corolario*

Dos caminos u, v del mismo origen y del mismo extremo en un espacio $(X, \mathcal{X})$ son homotópicos si y sólo si el camino $u\mathbf{T}v^-$ es 0-homotópico (fig. 103).

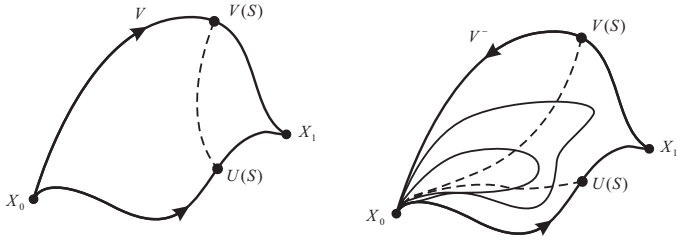


Figura 103.

Demostración: $u \dot{\simeq} v \Longleftrightarrow [u] = [v] \Longleftrightarrow$

$$[u][v^-] = [< u(0) >] \Longleftrightarrow u\mathbf{T}v^- \dot{\simeq} < u(0) > . \blacksquare$$

Los dos corolarios anteriores muestran que para estudiar las clases de homotopía en un espacio, es suficiente analizar los conjuntos $\pi_1(X.x_0)$ de clases de homotopía correspondientes a caminos cerrados $u : I \to X$ con $u(0) = x_0 (x_0 \in X)$. Como tercer corolario de la proposición podemos constar que $\pi_1(X, x_0)$ tiene la estructura algebraica de un grupo.

6.5.13 *Corolario*

Con respecto al producto de clases de homotopía, definida en (16), los conjuntos $\pi_1(X, x_0)$ forman un grupo con elemento neutro $< x_0 >$.

Demostración: Dos clases de homotopía cualesquiera en $\pi_1(X, x_0)$ se pueden componer. Por tanto el corolario resulta inmediatamente de (17), (18) y (19). ■

6.5.14 *Definición: (grupo fundamental, espacio simplemente conexo)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $x_0 \in X$. Entonces el conjunto $\pi_1(X, x_0)$ provisto de la multiplicación definida en (16) se llama **grupo fundamental o grupo de homotopía de primera dimensión** de $(X, \mathcal{X})$ asociado al *punto de base* x_0.

Nos preguntamos qué relaciones existen entre los grupos fundamentales de un mismo espacio. La proposición siguiente nos da una respuesta satisfactoria.

6.5.15 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sea $u : I \to X$ un camino con $u(0) = x_0$, $u(1) = x_1$. Entonces la aplicación

$$\lambda_u : [v] \mapsto [u][v][u^-] \text{ de } \pi_1(X, x_1) \text{ en } \pi_1(X, x_0)$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración: λ_u es un homomorfismo, puesto que

$$\lambda_u([v_1])\lambda_u([v_2]) = [u][v_1][u^-][u][v_2][u^-] = [u][v_1][v_2][u^-]$$

para todos los $[v_1]$, $[v_2] \in \pi_1(X, x_1)$, por (17), (18) y (19). La aplicación

$$\lambda_{u^-} : [w] \mapsto [u^-][w^-][u] \text{ de } \pi_1(X, x_0) \text{ en } \pi_1(X, x_1)$$

es el homomorfismo inverso de λ_u; entonces λ_u es un isomorfismo de grupos (fig. 104). ■

Por la proposición anterior, los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ asociados a puntos de base de una componente por caminos son todos isomorfos, por lo tanto se puede hablar de los *grupos fundamentales de estas componentes*. En particular:

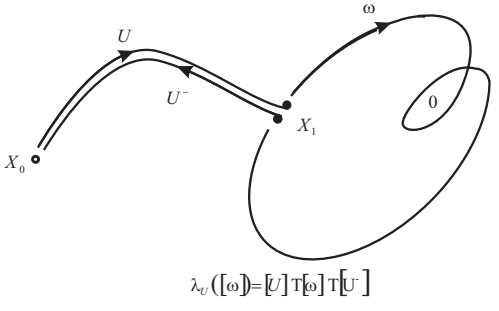


Figura 104.

6.5.16 *Corolario*

Si $(X, \mathcal{X})$ es conectable por caminos, entonces todos los grupos fundamentales de $(X, \mathcal{X})$ son isomorfos.

Nota: Cuando no dé lugar a confusión, identificaremos los grupos isomorfos de homotopía de un espacio conectable por caminos y los denotaremos por $\pi_1(X)$.

En el estudio de los grupos fundamentales en general se presupone que el espacio $(X, \mathcal{X})$ es conectable por caminos. Esto puede hacerse porque si un punto $x_0 \in X$ pertenece a una componente conexa X' en $(X, \mathcal{X})$ entonces $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X', x_0)$; entonces el grupo fundamental puede considerarse en el subespacio conectable por caminos X'. Los grupos fundamentales de diferentes

componentes conectables por caminos en $(X, \mathcal{X})$ no tienen relación alguna entre sí.

6.5.17 *Definición*

(Simplemente conexo). Un espacio conectable por caminos $(X, \mathcal{X})$ se llama **simplemente conexo** si su grupo fundamental es trivial, es decir, si contiene sólo al elemento neutro.

Por 6.5.12, $(X, \mathcal{X})$ es simplemente conexo si y sólo si dos caminos cualesquiera en $(X, \mathcal{X})$, que tienen el mismo origen y el mismo extremo son homotópicos.

Los dominios simplemente conexos considerados en Análisis Complejo están caracterizados por tener un grupo fundamental trivial. Tales dominios no pueden tener huecos. Más generalmente, el grupo fundamental de un espacio refleja su estructura de conexidad. Ilustremos esto con unos ejemplos sin dar demostraciones (que serían difíciles en algunos casos).

6.5.18 *Ejemplo*

Son *simplemente conexos*, o sea tienen un grupo fundamental trivial los espacios siguientes:

i) Todo espacio contráctil.

ii) Los espacios punteados $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ si $\mathcal{N} \geq 3$.

iii) Las esferas $\mathbf{E}^n$ para $n \geq 2$ (6.4.13(b)).

iv) Toda esfera punteada $\mathbf{E}^n \backslash \{P\}$ (¿por qué?).

6.5.19 *Ejemplo*

Tienen un grupo fundamental infinito cíclico (isomorfo a $\mathbb{Z}$) los siguientes espacios:

i) El círculo $\mathbf{E}^1$.

ii) El plano punteado $\mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$

iii) Toda región anular $\{x \in \mathbb{R}^2 | \alpha \leq \| x \| \leq \beta\}$ $(0 < \alpha < \beta)$ en el plano.

iv) Todo complemento de una recta en $\mathbb{R}^3$

6.5.20 *Ejemplo*

Los grupos fundamentales con dos generadores pueden tener dos estructuras muy diferentes.

a) El toro T^2 tiene un grupo fundamental abeliano que es la suma directa de dos grupos infinitos cíclicos; entonces $\pi_1(T^2) \cong Z \oplus Z$. Dos caminos generadores de $\pi_1(T^2, x_0)$ $(x_0 \in T^2)$ se presentan en la figura siguiente (fig. 105).

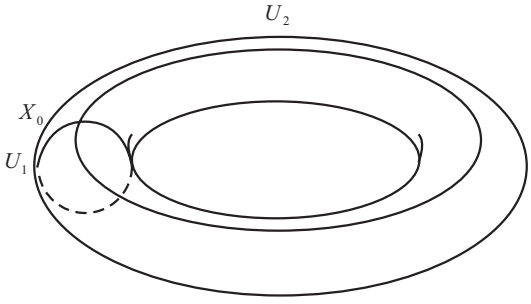


Figura 105. Caminos generadores de $\pi_1(T^2,\, x_0)$ $(x_0, \in T^2)$

b) El plano dos veces punteado $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)\}$ tiene como grupo fundamental al *grupo libre* de dos generadores que consiste de todas las 'palabras'

$$[u]^{m_1}[v]^{n_1}[u]^{m_2}[v]^{n_2}...$$

$$...[u]^{m_k}[v]^{n_k}(m_i,\, n_i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N})$$

donde $[u]$ y $[v]$ son las clases de homotopía de dos caminos cerrados u y v que circunscriben x_1 y x_2, respectivamente, una sola vez (fig. 106).

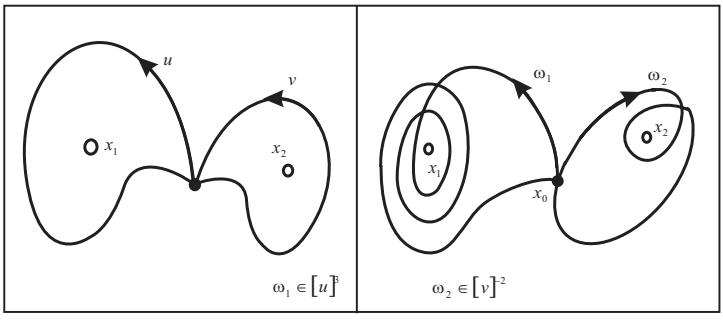


Figura 106.

La composición definida sobre este grupo es sencillamente la yuxtaposición de palabras. Es un grupo no abeliano.

Introduciremos ahora un método que es constitutivo para la Topología Algebraica. Esta teoría no sólo asocia ciertas estructuras algebraicas a los espacios topológicos, sino también morfismos de estas estructuras a los morfismos de la *categoría de los espacios topológicos*. Procederemos ahora a definir para cada aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ un homomorfismo de los grupos fundamentales respectivos. Más precisamente, sea x_0 (resp. y_0) un punto de

$(X, \mathcal{X})$, (resp. $(Y, \mathcal{Y})$); decimos que f es una aplicación del par (X, x_0) en el par (Y, y_0), (en símbolos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua y aplica x_0 sobre y_0). Denotamos al conjunto de todas estas aplicaciones por $\mathfrak{C}((X, x_0), (Y, y_0))$. A todo $f \in \mathfrak{C}((X, x_0), (Y, y_0))$ se asocia un homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(Y, y_0)$ de la manera siguiente: la aplicación

$$u \mapsto f \circ u$$

asocia a todo camino $u \in A(X, x_0)$ un camino $f \circ u \in A(Y, y_0)$. Si u' es un camino homotópico a u entonces $f \circ u'$ es un camino homotópico a $f \circ u$. Por lo tanto, f induce una aplicación $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ de las clases de homotopía, definida por

$$f_*([u]) = [f \circ u] \ \ ([u] \in \pi_1(X, x_0)) \tag{20}$$

Más precisamente:

6.5.21 *Teorema*

i) Toda aplicación $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce (por (20)) un homomorfismo f_* del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en el grupo $\pi_1(Y, y_0)$.

ii) $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1}(X, x_0)$ (para todo $x_0 \in X$)

iii) Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Demostración

i) se concluye inmediatamente de la igualdad

$$f \circ (u \mathbf{T} v) = (f \circ u) \mathbf{T} (f \circ v) (u, v \in A(X, x_0))$$

que se deriva de la definición de $\mathbf{T}$.

ii) es evidente por (20).

iii) se cumple, porque para todo arco $u \in A(X, x_0)$ se tiene que

$$(g \circ f)_*(u) = (g \circ f) \circ u = g \circ (f \circ u) = g_*(f_*(u)). \blacksquare$$

Para resaltar la importancia metodológica de las correspondencias establecidas entre espacios topológicos y grupos de homotopía, resp. entre aplicaciones continuas y homomorfismos de grupos, las analizaremos ahora en el lenguaje de la Teoría de Categorías. Estamos trabajando con la *categoría* $\Im_P$ *de los espacios topológicos con punto fijo* que tiene como objetos los pares (X, x), donde X es un espacio topológico y x es un punto cualquiera fijo de X, y que tiene por morfismos $f \in \mathfrak{C}(X, x), (Y, y))$: las aplicaciones continuas f de X en Y tales que $f(x) = y$.

Si denotamos por $\mathcal{G}$ la categoría de los grupos, entonces hemos construido dos funciones

$$\begin{array}{rcccl} \pi_1 & : & \mathrm{Ob}(\Im_P) & \to & \mathrm{Ob}(\mathcal{G}) \\ & & (X,x) & \mapsto & \pi_1(X,x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} {}^* & : & \mathcal{C}((X,x),(Y,y)) & \to & \mathrm{Hom}(\pi_1(X,x),\ \pi_1(Y,y)) \\ & & f & \mapsto & f_* \end{array}$$

que constituyen lo que se llama un **funtor**:

6.5.22 *Definición (funtor)*

Sean $(\wp_1, \wp_2)$ dos categorías. Se llama un *funtor (covariante)* de $\wp_1$ en $\wp_2$ y se denota por $(F_1, F_2) : \wp_1 \to \wp_2$ a todo par de funciones

$$\begin{array}{rcccl} F_1 : & \mathrm{Ob}(\wp_1) & \to & \mathrm{Ob}(\wp_2) \\ F_2 : & M(A,B) & \to & M(F_1(A), F_1(B)) \end{array}$$

$$(\text{para todo par } A, B \in \ \mathrm{Ob}(\wp_1))$$

tales que
(F_1) Para todo $A \in \ \mathrm{Ob}(\wp_1)$ se tiene $F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$
(F_2) Para todos los $f \in M(A,B), g \in M(B,C)$, se tiene $F_2(g \circ f) = F_2(g) \circ F_2(f)$.

Un funtor viene a constituir una especie de homomorfismo entre categorías. La propiedad (F_1) significa que F_2 preserva las identidades, (F_2) significa que F_2 preserva la composición de los morfismos. Los enunciados ii) y iii) del teorema anterior (6.5.21) corresponden precisamente a (F_1) y (F_2). Por lo tanto, pueden formularse también de la manera siguiente.

6.5.23 *Corolario*

El par $(\pi_1, {}^*) : \Im_P \to \mathcal{G}$ es un funtor.

La teoría de homotopía es la teoría del funtor $(\pi_1, {}^*)$. De manera más general podemos definir la topología algebraica como teoría de los funtores de la categoría de los espacios topológicos en las diversas categorías algebraicas (grupos, grupoides, anillos, etc.)

Concluimos esta sección deduciendo el resultado importante siguiente: *Los grupos fundamentales son invariantes homotópicos.*

6.5.24 *Lema*

Sean $f, g : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ aplicaciones homotópicas y $x_0 \in X$. Entonces existe un isomorfismo

$$\lambda_w : \pi_1(Y, g(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

tal que $f_* = \lambda_w \circ q_*$.

Demostración: Sea $h : f \simeq g$. El camino de deformación

$$w : t \mapsto h(x_0, t) \text{ en } (Y, \mathcal{Y})$$

conecta el punto $h(x_0, 0) = f(x_0)$ con $h(x_0, 1) = g(x_0)$. Para todo camino cerrado $u \in A(X, x_0)$ la aplicación $h(u(s), t))$ muestra la homotopía de aplicaciones $f \circ u \simeq g \circ u$, pero no la *homotopía de caminos* $f \circ u \dot{\simeq} q \circ u$ (lo que implicaría $f_* = g_*$), porque no deja fijo el punto $f(u(0))$. Modificaremos h para obtener una homotopía de caminos. Sea $u \in A(X, x_0)$ y

$$\tilde{h}(s,t) = \begin{cases} h(x_0, 4st) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ h[u(4s-1), t)] & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ h[x_0, t(2-2s)] & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esta homotopía representada en la figura 107 muestra que

$$f \circ u \dot{\simeq} (w\mathbf{T}(g \circ u))\mathbf{T}w^-$$

En efecto, $\tilde{h}|I \times \{0\}$ es sencillamente otra parametrización de $f \circ u$, $\tilde{h}|I \times \{1\}$ es precisamente el camino $(w\mathbf{T}(g \circ u))\mathbf{T}w^-$ y $\tilde{h}(0,t) = \tilde{h}(1,t) = h(x_0, 0) = f(x_0)$ para todo $t \in I$. Concluimos que

$$[f \circ u] = [w][g \circ u][w^-] \text{ para todo } u \in A(x, x_0) \tag{22}$$

Si denotamos por λ_w la aplicación $[v] \mapsto [w][v][w^-]$, que es un isomorfismo del grupo $\pi_1(Y, g(x_0))$ sobre $\pi_1(Y, f(x_0))$ por 6.4.15, entonces (22) se escribe también

$$f_* = \lambda_w \circ g_* \blacksquare$$

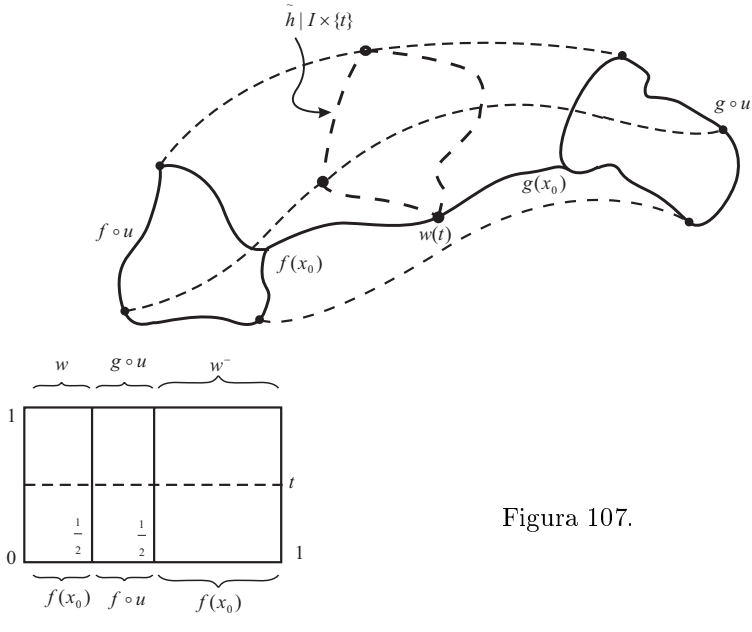


Figura 107.

6.5.25 *Teorema*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ dos espacios conectables por caminos. Si son homótopos, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

Demostración: Supongamos que $f, g : X \simeq Y$. Concluimos que $g \circ f : X \to X$ es homotópica a $\mathbb{1}_X$. Por el lema anterior existe un isomorfismo $\lambda_w : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ tal que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \lambda_w \circ (\mathbb{1}_X)_* = \lambda_w \circ \mathbb{1}_{\pi 1}(x) = \lambda_w$. De la misma manera se demuestra que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ es un isomorfismo. Concluimos que g_* y f_* deben ambas ser inyectivas y sobreyectivas, por lo tanto son isomorfismos (6.4.21). ■

Como simple consecuencia de este teorema obtenemos ahora una confirmación del ejemplo 6.5.18 i): todo espacio contráctil es simplemente conexo.

Dejamos al lector la demostración del siguiente resultado importante, para la obtención de grupos fundamentales concretos:

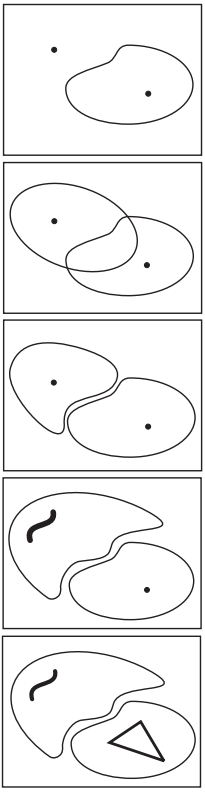
6.5.26 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos, $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Probar: El grupo fundamental $\pi_1(X \times Y,\ (x_0, y_0))$ es isomorfo al producto directo de los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

CAPÍTULO 7 Axiomas de separación

§ 7.1 Introducción a los axiomas de separación

Para describir la separación mediante vecindades en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se introducen los axiomas siguientes:



T_0. Dados dos puntos diferentes $x,\ y \in X,\ x \neq y$, al menos uno de ellos posee una vecindad que no incluye al otro.

(T_1). Dados $x,\ y \in X,\ x \neq y$, cada uno posee una vecindad que no incluye al otro. (Notar que las vecindades no tienen que ser disjuntas.)

(T_2) (Espacio de Hausdorff). Para dos puntos diferentes $x,\ y \in X$ siempre existen vecindades $V_x \in \mathcal{V}(x)$ y $V_y \in \mathcal{V}(y)$ que son disjuntas.

(T_3). Para cada subconjunto cerrado $A \subset X$ y cada $x \notin A$ existe una vecindad $U_A \in \mathcal{V}(A)$ y una vecindad $V_x \in \mathcal{V}(x)$ que cumplen: $U_A \cap V_x = \varnothing$

(T_4). Para dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B existen siempre vecindades $U_A \in \mathcal{V}(A)$ y $U_B \in \mathcal{V}(B)$ que son disjuntas.

Figura 108.

Puede parecer que estos axiomas constituyen una jerarquía de condiciones cada vez más fuertes. Sin embargo, esto no es verdad como veremos a continuación. Dejamos al lector la comprobación de las siguientes implicaciones:

$$(T_4) \wedge (T_1) \Rightarrow (T_3) \wedge (T_1) \Rightarrow (T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0) \tag{1}$$

El axioma (T_1) significa precisamente que todo subconjunto unitario del espacio es cerrado. Por eso las combinaciones $(T_4) \wedge (T_1)$ (resp.$(T_3 \wedge (T_1))$ implican

inmediatamente el axioma (T_2). En cambio, existen espacios topológicos que cumplen (T_3) o (T_4) y sin embargo contienen subconjuntos unitarios no cerrados. Por ejemplo, todo espacio indiscreto verifica trivialmente (T_3) y (T_4); pero no verifica (T_1), ni siquiera (T_0) si tiene más de un punto.

Los ejemplos y ejercicios siguientes están destinados a demostrar que las implicaciones (1) no pueden invertirse.

7.1.1 *Ejemplo* $(T_0 \not\Rightarrow T_1)$.

El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_I)$ definido en el capítulo 2, (2.1.9), cumple (T_0) pero no (T_1).

7.1.2 *Ejemplo* $(T_1 \not\Rightarrow T_2)$.

El espacio $\mathbb{R}$ provisto de la topología de los complementos finitos (o numerables) cumple T_1 pero no T_2.

7.1.3 *Ejemplo* $(T_2 \not\Rightarrow T_3)$.

Sea r la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{X}$ la topología generada por la subbase $r \cup \{\mathbb{Q}\}$. $\mathcal{X}$ cumple (T_2) porque es más fina que r. Sin embargo, no cumple (T_3): El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ pero no puede separarse del punto $x = 0$, puesto que los abiertos de $\mathcal{X}$ son uniones de abiertos de r con ciertos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ (2.3.2) y cada unión que contenga a $\mathbb{I}$, es igual a todo el espacio $\mathbb{R}$.

7.1.4 *Ejercicio*

Probar que todo T_1-espacio *finito* es discreto. En particular, para un espacio finito el axioma (T_1) implica (T_3) y (T_4).

7.1.5 *Ejercicio*

Definir distintas topologías sobre $X = \{1, 2, 3\}$ que muestren que:

i) $(T_3) \not\Rightarrow (T_2)$

ii) $(T_4) \not\Rightarrow (T_3)$

Los axiomas (T_0) y (T_1) son demasiado débiles para servirnos en el desarrollo ulterior de la teoría. En las secciones siguientes de este capítulo trataremos sólo las implicaciones de los axiomas (T_k) $(k \geq 2)$. Más precisamente estudiaremos las siguientes clases de espacios topológicos:

7.1.6 *Definición (espacio de Hausdorff, espacio regular, espacio normal)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama:

i) *de Hausdorff*, si cumple (T_2)
ii) *regular*, si cumple (T_2) y (T_3)
iii) *normal*, si cumple (T_2) y (T_4)

Por las implicaciones (1) tenemos:
$(X, \mathcal{X})$ normal $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{X})$ regular $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{X})$ Hausdorff. Empezaremos por la más amplia de estas tres clases.

§ 7.2 **Espacios de Hausdorff**

Una teoría de convergencia capaz de satisfacernos puede desarrollarse sólo para los espacios de Hausdorff. La razón se indica en el teorema siguiente:

7.2.1 *Teorema (caracterizaciones de un espacio de Hausdorff)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff si y sólo si verifica algunos de los criterios equivalentes siguientes:

$(T_2^{'})$ Ningún filtro sobre $(X, \mathcal{X})$ converge a dos puntos diferentes.

$(T_2^{''})$ Cada $x \in X$ es la intersección de sus vecindades cerradas.

$(T_2^{'''})$ La diagonal $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ es cerrada en el espacio producto $X \times X$.

Demostración: $(T_2) \Rightarrow (T_2^{'})$: la unicidad del límite en un espacio de Hausdorff, se demuestra por el método conocido del análisis. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x, y \in X$ dos puntos diferentes. Por (T_2) existen dos vecindades disjuntas $V_x \in \mathcal{V}(x)$ y $V_y \in \mathcal{V}(y)$. Si $\mathcal{F}$ converge a x, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V_x$. Por lo tanto no puede existir $F^{'} \in \mathcal{F}$ incluido en V_y (por $(F1)$ y $(F3)$).

$(T_2^{'}) \Rightarrow (T_2^{''})$: Sean $x \in X$ y $y \in \cap \left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\right\}$. Entonces $V \cap W \neq \varnothing$ para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ y toda $W \in \mathcal{V}(y)$; por lo tanto $\mathcal{F} = \{V \cap W | V \in \mathcal{V}(x) \wedge W \in \mathcal{V}(y)\}$ es un filtro que converge a x y y. Concluimos que x es el único punto en $\cap \left\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}(x)\right\}$ si se cumple $(T_2^{'})$.

$(T_2^{''}) \Rightarrow (T_2^{'''})$: Consideremos un par $(x, y) \notin \Delta$. Por $(T_2^{''})$ existe una vecindad cerrada $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $y \notin V$. Entonces, $V \times \complement V$ es una vecindad de (x, y) que es disjunta a Δ. Concluimos que $\complement\Delta$ es abierto en $X \times X$.

$T_2^{'''} \Rightarrow T_2$ Sean $x, y \in X$ dos puntos diferentes. Por $T_2^{'''}$ existe una vecindad $V_x \in \mathcal{V}(x)$ y una vecindad $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tales que $(V_x \times V_y) \cap \Delta = \varnothing$; entonces $V_x \cap V_y = \varnothing$ ■

7.2.2 *Ejemplo*

Todo espacio métrico (X, d) es de Hausdorff, puesto que todo punto $x \in X$ es la intersección de todas las bolas cerradas de centro x.

Reencontramos aquí un resultado que se demostró en el ejercicio (1.5.3): El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

Pregunta. ¿Cuándo un espacio seudométrico (X, d) es un espacio de Hausdorff?.

La propiedad $(T2)$ es fundamentalmente para la 'unicidad del límite', por el

teorema anterior.

Los corolarios siguientes son herramienta básica para otros resultados conocidos del análisis.

7.2.3 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico cualquiera, $(Y, \mathcal{Y})$ un T_2-espacio y f una aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$.

Entonces la gráfica de f:

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

es cerrada en el espacio producto $X \times Y$.

Demostración: La aplicación $q : (x, y) \mapsto (f(x), y)$ de $X \times Y$ en $Y \times Y$ es continua, ya que es el producto de las aplicaciones continuas f y $\mathbb{1}_Y$ (5.2.18). Entonces $G_f = \{(x, y) | x \in X, y = f(x)\} = q^{-1}[\Delta]$ es cerrada en $X \times Y$ por (T_2'''). ■

7.2.4 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico cualquiera, $(Y, \mathcal{Y})$ un espacio de Hausdorff y f, g dos aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces el conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración: La aplicación $q : x \mapsto (f(x), g(x))$ de X en $Y \times Y$ es continua por 5.2.18. Por lo tanto $\{x | f(x) = g(x)\} = q^{-1}[\Delta]$ es cerrado en $(X, \mathcal{X})$ por (T_2'''). ■

El resultado anterior se establece en análisis para funciones reales, utilizando para la demostración la función $h = g - f$ de manera que $\{x | f(x) = g(x)\} = h^{-1}[\{0\}]$. Aquí tal operación no tiene sentido ya que sobre Y no está definida una estructura aditiva. (Compárese también con la solución del ejercicio 4.2.5.) Como consecuencia inmediata del corolario anterior se obtiene además:

7.2.5 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico cualquiera, $(Y, \mathcal{Y})$ un espacio de Hausdorff y f, g dos aplicaciones continuas de $(X, \mathcal{X})$ en $(Y, \mathcal{Y})$ que coinciden sobre un subconjunto denso A en $(X, \mathcal{X})$. Entonces $f = g$.

Si una aplicación continua sobre un subespacio denso A de $(X, \mathcal{X})$ puede prolongarse continuamente a todo el espacio, entonces su prolongación está determinada de manera única por el corolario anterior, siempre que el espacio imagen sea de Hausdorff. Veremos en la siguiente sección, bajo qué condiciones puede demostrarse la *existencia* de tal prolongación continua.

7.2.6 *Ejemplo*

Sea $(E, \| \cdot \|_E)$ un espacio normado y $\mathcal{E}$ un sistema total de vectores en E (4.4.4). Entonces una aplicación *lineal* continua $\mathbf{L}$ de E en un espacio normado $(F, \| \cdot \|_F)$ está determinada de manera única por sus valores en $\mathcal{E}$. En efecto, F es un espacio de Hausdorff. Por linealidad se determinan los valores de $\mathbf{L}$ sobre el subespacio lineal $[\mathcal{E}]$ generado por $\mathcal{E}$ y este subespacio es denso en E por suposición. Tomemos, por ejemplo, el espacio normado $E = \mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R})$ provisto de la norma uniforme $\| f \|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$. Toda forma lineal continua $\mu : E \to \mathbb{R}$ se llama una **medida de Radon** sobre $[a,b]$ y sus valores $\mu(f)$ se denotan por $\int_a^b f(t)d\mu(t)$ (BOURBAKI)[27], cap. III, § 1). Sabemos que las funciones polinomiales $P_n : t \mapsto t^n$ $(n \in \mathbb{N})$ forman un sistema total de vectores en $\mathfrak{C}([a,b], \mathbb{R})$. Entonces toda medida de Radon está determinada de manera única por los valores $\int_a^b t^n d\mu(t)$ $(n \in \mathbb{N})$

Si μ cumple $\int_a^b t^n d\mu(t) = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$
para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces μ es necesariamente la medida de Lebesgue (para funciones continuas).

7.2.7 *Ejercicio*

Consideremos sobre el espacio vectorial $E = \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la seminorma

$$P_S(f) = \sup\{|f(t)| : t \in S\}$$

de la convergencia uniforme sobre un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ (1.4.6). Probar que (E, P_s) es de Hausdorff (o sea, P_s es una norma) si y sólo si S es denso en $\mathbb{R}$.

Por la importancia de la propiedad (T_2) nos interesa saber si es heredada o no por los subespacios, espacios productos, etc. La respuesta es parcialmente afirmativa.

7.2.8 *Proposición (hereditabilidad de (T_2))*

i) Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff

ii) Todo producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff

iii) Toda suma de espacios de Hausdorff es Hausdorff

Demostración: La demostración de los enunciados i) y iii) se deja al lector como ejercicio.

ii) Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un producto de T_2-espacios $(X_i, \mathcal{X}_i)$ y sean $x = (x_i)$, y $y = (y_i)$ dos puntos diferentes en X. Entonces se tiene que $x_i \neq y_i$ para algún $i \in I$. Puesto que $(X_i, \mathcal{X}_i)$ es un espacio de Hausdorff, existen dos vecindades disjuntas $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ y $W_i \in \mathcal{V}(y_i)$. Si $\pi_i : X \to X_i$ es la i -ésima proyección del producto sobre X_i, entonces $\pi_i^{-1}[V_i]$ y $\pi_i^{-1}[W_i]$ son vecindades disjuntas de x e y en X respectivamente. ■

Nota: El inverso de ii) y de iii) es una consecuencia inmediata de i): Si $\prod_{i\in I} X_i$ (respectivamente $\sum_{i\in I} X_i$) son espacios de Hausdorff, todo espacio $(X_i, \mathcal{X}_i)$ debe ser espacio de Hausdorff porque es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{i\in I} X_i$ (5.2.11) (resp. $\sum_{i\in I} X_i$) ((52) cap. 5).

$\rightsquigarrow$ No vamos a esperar que la propiedad (T_2) se conserve cuando se pasa al cociente, pues (T_2) expresa la *separación de puntos* mientras que la formación del espacio cociente significa lo contrario: la *identificación de puntos.*

Más precisamente, si $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, R es una relación de equivalencia sobre X y $\varphi : X \to X/R$ es la aplicación canónica. Entonces toda separación de *puntos* en X/R significa la separación de *clases* de equivalencia en $(X, \mathcal{X})$.

Por ejemplo, X/R es un T_1-espacio (puntualmente cerrado) si y sólo si las clases de equivalencia en $(X, \mathcal{X})$ son cerradas. Dos puntos $\bar{x}$, $\bar{y} \in X/R$ pueden separarse por dos vecindades disjuntas $V_{\bar{x}} \in \mathcal{V}(\bar{x})$ y $V_{\bar{y}} \in \mathcal{V}(\bar{y})$ si y sólo si las *clases* de equivalencia $\varphi^{-1}(\bar{x})$ y $\varphi^{-1}(\bar{y})$ pueden separase por dos vecindades disjuntas *saturadas* (fig. 109).

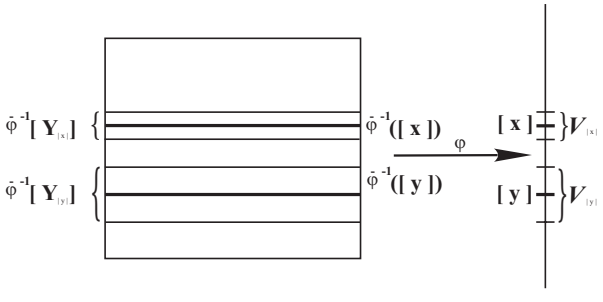


Figura 109. Espacio cociente de Hausdorff

El ejercicio siguiente precisa una condición necesaria para que X/R sea de Hausdorff.

7.2.9 *Ejercicio*

Probar que:

i) La diagonal Δ/R de $X/R \times X/R$ es la imagen directa de $R \subset X \times X$ bajo la aplicación (φ, φ), e inversamente R es la preimagen de Δ/R.

ii) Si X/R es Hausdorff, R es cerrado en $X \times X$.

Añadiendo una condición suplementaria a ii) obtenemos una condición suficiente.

7.2.10 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X.

Si $R \subset X \times X$ es cerrado y $\varphi : X \to X/R$ es abierta, entonces X/R es de Hausdorff.

Demostración: La aplicación $q = (\varphi, \varphi) : (x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ es coninua y abierta, por 5.2.16 y la nota del mismo. Por lo tanto $q(\complement R) = \complement(\Delta/R)$ es abierto, entonces la diagonal Δ/R en $X/R \times X/R$ es cerrada. ■

Otro criterio suficiente está contenido en el siguiente:

7.2.11 *Ejercicio*

Probar que si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una inyección continua y $(Y, \mathcal{Y})$ es de Hausdorff, entonces $(X, \mathcal{X})$ es tambien de Hausdorff. Más generalmente, si $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua y $(Y, \mathcal{Y})$ de Hausdorff, entonces el espacio cociente X/R_f es de Hausdorff.

Terminamos la sección con un ejercicio que nos servirá más adelante (§4) como contraejemplo. Este ejercicio nos muestra un *espacio de Hausdorff sobre el cual las únicas funciones continuas son las constantes.*

7.2.12 *Ejercicio (ejemplo de un espacio de Hausdorff numerable y convexo)*

Para cada par de números $x, y \in \mathbb{N}^*$ tales que x y y no tienen un divisor común diferente de 1 en símbolos: $(x, y) = 1$), sea

$$U(x, y) = \{x + ny | n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^* = \{z \in \mathbb{N}^* | x \equiv z \mod y\}$$

Probar:

i) La colección $\{U(x, y) | x, y \in \mathbb{N}^*, (x, y) = 1\}$ es base de una topología $\mathcal{X}$ sobre $\mathbb{N}^*$.

ii) $(\mathbb{N}^*, \mathcal{X})$ es un espacio de Hausdorff.

iii) $(\mathbb{N}^*, \mathcal{X})$ es conexo (Indicación : $W \in \mathcal{X} \wedge W \cap U(x, y) = \varnothing \Rightarrow ny \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por el teorema del máximo común divisor).

iv) Las únicas funciones reales continuas sobre $(\mathbb{N}^*, \mathcal{X})$ son las constantes.

§ 7.3 **Espacios regulares y espacios normales**

Empecemos por una caracterización de los T_3-espacios.

7.3.1 *Proposición (caracterización de los T_3-espacios)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ verifica (T_3) si y sólo si cumple $(T_3^{'})$: Para todo $x \in X$ las vecindades cerradas de x forman un sistema fundamental de vecindades de x.

Demostración: $(T_3) \Rightarrow (T_3^{'})$: Es suficiente probar que toda vecindad abierta V de $x \in X$, contiene una vecindad cerrada. Por T_3 el cerrado $\complement V$ puede separarse de x mediante dos vecindads disjuntas $W \in \mathcal{V}(\complement\mathcal{V}\ )$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Pero esto implica que $\bar{U} \subset \complement\ \overset{o}{W} \subset \complement(\complement V) = V$.

$(T_3^{'}) \Rightarrow (T_3)$: si $C \subset X$ es cerrado y $x \notin C$ entonces $\complement C \in \mathcal{V}(x)$. Por $(T_3^{'})$ existe una vecindad cerrada $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subset \complement C$, por lo tanto $W = \complement V$ es abierta y contiene a C, entonces $W \in \mathcal{V}(C)$ y $V \cap W = \varnothing$. ■

7.3.2 *Ejemplo*

Todo espacio seudométrico cumple (T_3) puesto que, para todo $x \in X$, las bolas cerradas $B^{'}(x, \rho)$ $(\rho > 0)$ forman un sistema fundamental de vecindades cerradas de x en $(X, \mathcal{X}_d)$.

En particular todo espacio métrico es regular.

Esta caracterización de los T_3-espacios implica un criterio local de regularidad que es muy útil en la práctica.

7.3.3 *Corolario (caracterización local de los espacios regulares)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es regular si y sólo si todo punto $x \in X$ posee una vecindad cerrada que es regular (como subespacio de $(X, \mathcal{X})$).

Demostración: La necesidad de la condición es evidente. Supongamos inversamente que $(X, \mathcal{X})$ cumple esta condición. Dejemos al lector verificar (T_1). Para probar $(T_3^{'})$, sea $x \in X$ y sea V una vecindad cerrada regular de x. Por hipótesis existe un sistema fundamental $\mathcal{F}(x)$ de vecindades cerradas de x en $(V, \mathcal{X}_V)$. Por ser V una vecindad cerrada de x, $\mathcal{F}(x)$ es también un sistema fundamental de vecindades cerradas de x en $(X, \mathcal{X})$ (3.1.10).■

7.3.4 *Ejemplo*

Todo espacio discreto es regular.

Podría pensarse que la propiedad (T_3) se conserva, análogamente como las propiedades $(T_0), (T_1)$ y (T_2), si se sustituye una topología (regular) por otra más fina. Sin embargo, sabemos que la topología indiscreta verifica (T_3), lo cual implicaría que cada topología tendría esta propiedad.

El ejemplo 7.1.3 muestra que sobre $\mathbb{R}$ exise una topología más fina que la topología usual que *no* es regular. Este fenómeno se explica observando que una topología más fina, a la vez que aumenta el número de conjuntos abiertos, aumenta también el número de conjuntos que deben separarse de los puntos por (T_3).

Estudiaremos a continuación la hereditabilidad del axioma (T_3).

7.3.5 *Proposición*

i) Todo subespacio de un espacio regular es regular.

ii) Todo espacio producto de espacios regulares es regular.

iii) Toda suma de espacios regulares es regular.

Demostración:

i) Sea $A \subset (X, \mathcal{X})$ y $x \in A$. Si $\mathcal{F}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades cerradas de x en $(X, \mathcal{X})$, entonces $\mathcal{F}_A(x) = \{V \cap A | V \in \mathcal{F}(x)\}$ es un sistema fundamental de vecindades cerradas de x en $(A, \mathcal{X}_A)$.

ii) Sea $X = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{X}_i)$ un producto de espacios regulares. Por 7.2.8 , X es de Hausdorff. Además, para todo $x = (x_i) \in X$, los conjuntos

$$\pi_{i1}^{-1}[\mathcal{V}_{i1}] \cap ... \cap \pi_{in}^{-1}[\mathcal{V}_{in}] \in \mathcal{B}(x)$$

donde las $V_{ik} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_{ik})$, $(k = 1, ..., n; n \in \mathbb{N})$ recorren todas las vecindades cerradas de x_{ik} en $(X_{ik}, \mathcal{X}_{ik})$, forman un sistema fundamental de vecindades cerradas de x en $(X, \mathcal{X})$.

iii) Es trivial. ■

Nota: Los enunciados i) e ii) se generalizan fácilmente para topologías iniciales cualesquiera.

Además se deduce de i) que los enunciados ii) y iii) pueden invertirse: si $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{X}_i)$ (resp. $\sum_{i \in I}(X_i, \mathcal{X}_i)$ son espacios regulares, entonces todos los espacios $(X_i, \mathcal{X}_i)$ deben ser regulares por ser homeomorfos a subespacios de $\prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{X}_i)$ y $\sum_{i \in I}(X_i, \mathcal{X}_i)$ respectivamente.

Como los demás axiomas de separación, (T_3) no es heredado por los espacios cocientes.

La proposición siguiente enuncia una relación interesante entre las propiedades (T_2) y (T_3).

7.3.6 *Proposición*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es regular si y sólo si para todo subconjunto cerrado $C \subset X$, el espacio cociente X/C es de Hausdorff.

Demostración: *Ejercicio.* ■

Volveremos ahora al problema (discutido en la sección anterior) de prolongar una función continua f, definida sobre un subespacio denso A de $(X, \mathcal{X})$, a todo

el espacio. Sabemos que existe a lo sumo *una* prolongación continua $\overline{f}$, si el codominio $(Y, \mathcal{Y})$ es de Hausdorff. Consideremos el valor de $\overline{f}$ en un punto arbitrario $z \in X$. Puesto que A es denso en $(X, \mathcal{X})$, la traza $B := \{V \cap A | V \in \mathcal{V}(z)\}$ es una base de filtro en X que converge a z. Si existe una prolongación continua $\overline{f} : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$, entonces tenemos necesariamente:

$$\overline{f}(z) = \lim_{\beta} f(x) =: \lim_{\substack{x \to z \\ z \in A}} f(x)$$

Luego el valor de la prolongación $\overline{f}$ en $z \in X$ puede calcularse por medio de los valores de f en los puntos de A que son cercanos a z.

Veremos ahora que, inversamente, mediante (2), se define una prolongación continua de f si $(Y, \mathcal{Y})$ es *regular*.

7.3.7 *Teorema*

Sea A un subconjunto denso de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ y f una aplicación continua de $(A, \mathcal{X}_A)$ en un espacio regular $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces existe una única prolongación continua $\bar{f}$ de f a $(X, \mathcal{X})$ si y sólo si para todo $z \in X$ existe $\lim\limits_{\substack{x \to z \\ z \in A}} f(x)$ en $(Y, \mathcal{Y})$.

Demostración: El razonamiento anterior muestra que la condición es necesaria. Supongamos ahora que $\lim\limits_{\substack{x \to z \\ z \in A}} f(x)$ existe para todo $z \in X$. Tomemos $\overline{f}(z) = \lim\limits_{\substack{x \to z \\ z \in A}} f(x)$ y probemos que $\overline{f}$ es continua.

Sea W una vecindad de $\overline{f}(z)$ en $(Y, \mathcal{Y})$. Como $(Y, \mathcal{Y})$ es regular, existe una vecindad cerrada V de $\overline{f}(z)$ tal que $V \subset W$. Por suposición, existe una vecindad $U \in \overset{o}{\mathcal{V}}(z)$ tal que $f\ [U \cap A] \subset V$. Es fácil ver que $\overline{U \cap A} = \overline{U}$ (E. 4.3); entonces $\overline{f}\,[U] \subset \overline{f}\left[\overline{U}\right] \subset \overline{f}\left[\overline{U \cap A}\right] \subset V$. Esto muestra la continuidad de$\overline{f}$ en X.

Como aplicación de este teorema continuaremos estudiando el problema de la prolongación continua de una forma lineal definida sobre un subespacio lineal denso de un espacio normado, tratado ya en el ejemplo 7.2.6. Después de la unicidad, demostraremos ahora la existencia de tal prolongación.

7.3.8 *Ejemplo (Prolongación de una forma lineal)*

Sea E un subespacio lineal denso de un espacio normado real $(F, \|\cdot\|)$.

Sabemos que una forma lineal $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es acotada, o sea, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \|x\|$ para todo $x \in E$. Veremos que f posee una (única) prolongación continua a F que es lineal.

En efecto, $\mathbb{R}$ es regular. Para probar que el $\lim\limits_{\substack{x \to z \\ z \in F}} f(x)$ existe para todo $z \in F$, es suficiente demostrar la existencia del $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n)$ para toda sucesión (x_n) de puntos en E que converge a z en $(F, \|\cdot\|)$ (1.6.7). Pero $(f(x_m))$ es una sucesión de

Cauchy en $\mathbb{R}$ puesto que $|f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n - x_m)| \leq M \parallel x_n - x_m \parallel$. Por lo tanto existe $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n))$. Concluimos que f posee una prolongación continua $\overline{f}$ a F. Para comprobar que $\bar{f}$ es lineal tomamos dos vectores cualesquiera x, $y \in F$ y dos sucesiones $(x_n), (y_n)$ de elementos de $\mathbf{E}$ que converjan a x y y respectivamente. Entonces

$$\overline{f}(x+y) = \lim_{n\to\infty} f((x_n) + (y_n)) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + f(y_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \overline{f}(x) + \overline{f}(y)$$

Similarmente se demuestra que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in F$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como en el ejemplo 7.2.6 aplicaremos ahora el resultado general del ejemplo anterior a la teoría de integración.

7.3.9 *Ejemplo (construcción de la integral de Cauchy)*

Consideremos sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ el espacio vectorial real de todas las funciones escalonadas

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; h[[a, b]] \text{ finito (fig. 110).}$$

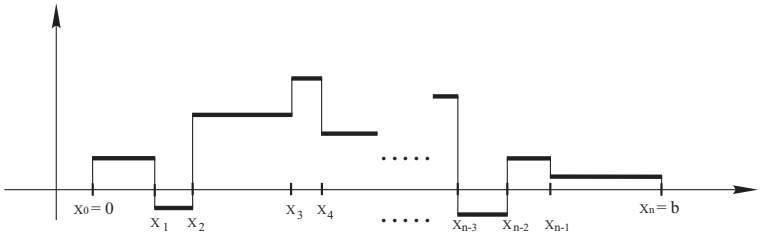


Figura 110. Función escalonada

A estas funciones se les asigna de manera natural una integral

$$\int_a^b h(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - x_{i-1}) \text{ con } \{h_i\} = h[(x_{i-1}, x_i]]$$

El problema de la construcción de las integrales de Riemann, de Cauchy o de Lebesgue, consiste en generalizar esta integral *natural* a una clase más amplia de funciones. Consideremos aquí sólo la integral de Cauchy, cuya construcción es elemental. Sea F el espacio vectorial de todas las funciones arregladas sobre $[a, b]$, o sea, el espacio de todas las funciones que pueden aproximarse uniformemente sobre $[a, b]$ por funciones escalonadas. F, provisto de la norma uniforme, es un espacio normado que contiene a E como subespacio lineal denso.

La aplicación $I : h \mapsto I(h) = \int\limits_a^b h(x)dx$ es una forma lineal sobre E y cumple

$$|I(h)| \leq (b - a)\|h\|_\infty \text{ para todo } h \in E.$$

Por lo tanto existe una prolongación lineal continua $\bar{I}$ de I a F, por el ejemplo 7.3.8, cuyos valores denotaremos también por $\int_a^b f(x)dx$ $(f \in F)$.

$\bar{I}(f)$ se llama integral (de Cauchy) de la función arreglada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Es fácil probar que las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pertenecen a F y que la integral de Cauchy y la integral de Riemann (definida mediante las sumas superiores y sumas inferiores) coinciden sobre $\mathfrak{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Para terminar la sección presentaremos ahora algunos resultados elementales sobre la propiedad (T_4) y los espacios normales cuyas demostraciones en su mayor parte pueden dejarse al lector que ya se ha acostumbrado a este tipo de razonamiento. Veremos que, en algunos aspectos, los T_4-espacios se comportan muy diferente a los T_3-espacios.

Empezaremos por una reformulación equivalente del axioma (T_4) que será fundamental en la próxima sección; $(T_4^{'})$: Si C es un cerrado en $(X, \mathcal{X})$ y U es una vecindad (abierta) de C, entonces existe una vecindad V de C tal que

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U \tag{3}$$

7.3.10 *Proposición*

Los axiomas (T_4) y $(T_4^{'})$ son equivalentes.

Demostración: $(T_4) \Rightarrow (T_4^{'})$: Si C es un cerrado y U es un abierto en $(X, \mathcal{X})$ tales que $C \subset U$, entonces C y $\complement U$ son cerrados disjuntos. Por (T_4) existen vecindades disjuntas $V \in \mathcal{V}(C)$ y $W \in \mathcal{V}(\complement U)$ que podemos suponer abiertas. Resulta que $C \subset V$ y $V \subset \complement W$, entonces $\overline{V} \subset \complement W \subset U$, puesto que $\complement W$ es cerrado.

$(T_4^{'}) \Rightarrow (T_4)$. Si C y $C^{'}$ son dos cerrados disjuntos en $(X, \mathcal{X})$, entonces tenemos para $U := \complement C^{'}$ que $C \subset U \in \mathcal{X}$. Por $(T_4^{'})$ existe una vecindad V de C tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Concluimos que V y $\complement \bar{V} \supset C^{'}$ son vecindades disjuntas de C y $C^{'}$ respectivamente. ■

$\rightsquigarrow$ Al inicio del capítulo vimos que cada espacio normal es regular y de Hausdorff. A diferencia con estos espacios, la propiedad característica de los espacios normales (T_4) no es heredada por los subespacios ni por los espacios producto.

El lector interesado hallará contraejemplos en KELLEY [93] cap. IV problemas F y G y en el ejemplo 10.1.13.

Dejamos como ejercicio las demostraciones de las siguientes proposiciones que enuncian la hereditabilidad de (T_4) para ciertos subespacios, imágenes continuas y espacios cocientes.

7.3.11 *Proposición*

Cada subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

Demostración: Ejercicio. ■

7.3.12 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ normal y $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una sobreyección continua y cerrada. Entonces $(Y, \mathcal{Y})$ es normal.

Demostración: Ejercicio.

(Indicación: Utilizar la caracterización 3 de las aplicaciones cerradas). ■

7.3.13 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ normal y $C \subset X$ cerrado. Entonces X/C es normal.

Demostración: Ejercicio. ■

7.3.14 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$, espacios normales, sea $C \subset X$ cerrado y $f : C \to Y$ continua. Probar que el espacio de adjunción $X \sqcup_f Y$ es normal.

§ 7.4 **Separación de conjuntos por funciones**

Del ejercicio 7.2.11 se desprende que todo espacio sobre el cual existe una función real continua inyectiva es necesariamente de Hausdorff. Más generalmente si para dos puntos distintos cualesquiera x, y de un espacio $(X, \mathcal{X})$ existe una función real continua f con $f(x) \neq f(y)$, entonces $(X, \mathcal{X})$ cumple evidentemente (T_2). En este caso se dice que las funciones (reales) continuas sobre $(X, \mathcal{X})$ separan los puntos de $(X, \mathcal{X})$. Introduzcamos esta definición para subconjuntos cualesquiera de X.

7.4.1 *Definición (función separante)*

Sea f una función real sobre un conjunto X. Se dice que f **separa dos subconjuntos** A y B de X, si

$$\sup f[A] < \inf f[B] \text{ o } \sup f[B] < \inf f[A] \tag{4}$$

Intercambiando eventualmente A y B, una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ separa dos subconjuntos A, B de X si y sólo si existen números reales α, β tales que se cumple:

$$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow f(x) \leq \alpha < \beta \leq f(y) \tag{5}$$

Esto significa intuitivamente que A y B estan separados por dos curvas (resp. superficies) de nivel de f(fig. 111)

Nos interesaremos especialmente por la pregunta, ¿cuándo dos conjuntos cerrados disjuntos de un espacio topológico pueden separarse por una función con-

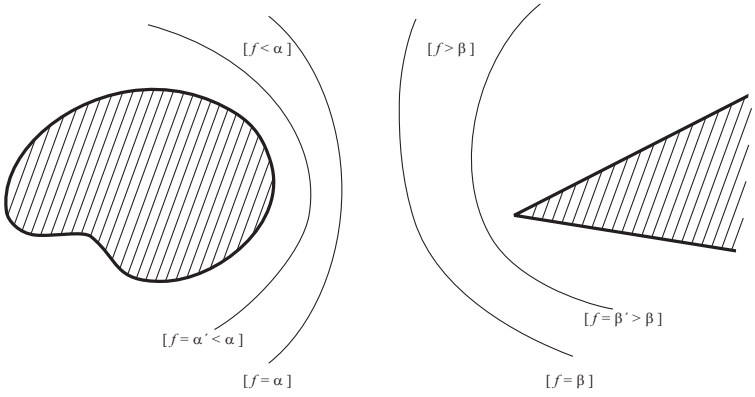


Figura 111. Conjuntos separados por la función f

tinua? Para analizar esta cuestión, será útil considerar un tipo particular de funciones:

7.4.2 *Definición (función de Urysohn)*

Sean A y B dos subconjuntos disjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Una función real continua f sobre $(X, \mathcal{X})$ se llama **función de Urysohn** para los conjuntos A y B, si cumple:

$$f[A] = \{0\} \wedge f[B] = \{1\} \wedge f[X] \subset [0, 1] \tag{6}$$

Está claro que toda función de Urysohn para A, B separa estos dos subconjuntos de $(X, \mathcal{X})$. Pero se cumple también el inverso: toda función continua que separa A y B puede transformarse en una función de Urysohn para A, B. En efecto, si una función continua $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ cumple (4), entonces la función continua (5.2.19) $\tilde{f} = \text{máx}(\alpha, \text{mín}(\beta, f)) : x \mapsto \text{máx}(\alpha, \text{mín}(\beta, f(x))$ toma el valor α sobre A y el valor constante β sobre B. Luego la función $\overset{\approx}{f} = (\tilde{f} - \alpha)/(\beta - \alpha)$ es una función de Urysohn para A y B en $(X, \mathcal{X})$.

Por lo tanto, si dos conjuntos A, B en un espacio topológico pueden separarse por una función continua, entonces pueden también separarse por una función de Urysohn para A, B.

La gráfica anterior ya nos indica que dos conjuntos A, B en $(X, \mathcal{X})$, que pueden separase por una función continua, también pueden separarse mediante vecindades.

7.4.3 *Proposición*

Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Si existe una función real continua sobre $(X, \mathcal{X})$ que separa A y B, entonces existen dos vecindades $U_A \in \mathcal{V}(A)$ y $U_B \in \mathcal{V}(B)$ que son disjuntas.

Demostración. Supongamos que una función continua $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ cumple (4). Si $\gamma := \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, entonces $U_A := f^{-1}[(-\infty, \gamma)]$ y $U_B := f^{-1}[(\gamma, \infty)]$ son

vecindades abiertas disjuntas de A *y* B respectivamente. ■

Por esta proposición, un espacio $(X, \mathcal{X})$ es normal, si para dos cerrados disjuntos cualesquiera A *y* B en $(X, \mathcal{X})$ existe siempre una función de Urysohn. Este criterio suficiente es a veces útil para demostrar la normalidad de un espacio. Como ejemplo, probaremos por este método que cada espacio métrico es normal.

7.4.4 *Ejemplo*

Sea (X, d) un espacio métrico. Si A y B son dos cerrados disjuntos en (X, d) que están separados por una distancia estrictamente positiva $\varepsilon = d(A, B) > 0$, entonces es inmediato cómo pueden separarse mediante vecindades: $V(A, \varepsilon/2) = \{x \in X | d(x, A) < \varepsilon/2\}$ y $V(B, \varepsilon/2) = \{x \in X | d(x, B) < \varepsilon/2\}$ las cuales forman dos vecindades disjuntas de A y B respectivamente. Sin embargo, sabemos que dos cerrados disjuntos en un espacio métrico no tienen necesariamente una distancia estrictamente positiva: basta considerar $A = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(x, 1/x) | x > 0\}$ en $\mathbb{R}^2$ (fig. 112).

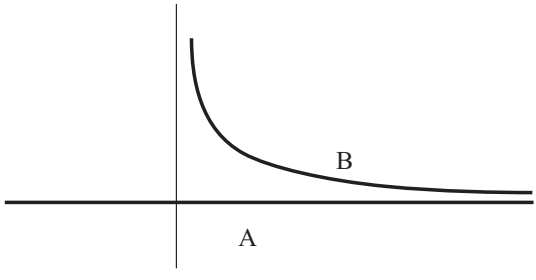


Figura 112. Cerrados disjuntos con distancia cero

En este caso parece natural separar los cerrados A y B por una función continua sobre $\mathbb{R}^2$, que tenga una curva de nivel que se quede estrictamente por encima de A y por debajo de B. Es fácil comprobar que, para dos cerrados disjuntos A y B cualesquiera en (X, d), la función continua (1.5.20):

$$f : x \mapsto \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

es una función de Urysohn para A, B. Luego (X, d) es normal. Concluimos que los espacios métricos forman una subclase de los espacios normales. Ellos tienen la propiedad especial de que todos sus subespacios también son normales (por ser metrizables).

Por la proposición anterior, la separación por funciones es más fuerte que la separación por vecindades. Se plantea el problema de si son equivalentes. Más precisamente, ¿podemos sustituir en los axiomas (T_2), (T_3), (T_4) la separación por vecindades por la separación por funciones continuas? Este problema tiene gran importancia, porque relaciona los axiomas de separación con la existencia de ciertas funciones reales continuas sobre el espacio de base.

Para los axiomas (T_2) y (T_3) la pregunta tiene una respuesta negativa. Dos puntos distintos en un espacio de Hausdorff no siempre pueden separarse por una función real continua.

Por ejemplo en el ejercicio 7.2.12 hemos construido un espacio de Hausdorff conexo numerable. Puesto que toda imagen continua de tal espacio en $\mathbb{R}$ es conexo y numerable, es necesariamente unitaria, o sea toda función real continua sobre este espacio de Hausdorff es constante (i.e. $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$).

En este caso las funciones reales continuas no separan ningún par de puntos del espacio. Lo mismo ocurre con ciertos espacios regulares.

7.4.5 *Definición: (espacio completamente regular)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **completamente regular** si para todo cerrado $C \subset (X, \mathcal{X})$ y todo punto $x \notin C$, existe una función continua $f : (X, \mathcal{X}) \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[C] = \{1\}$ (fig. 113).

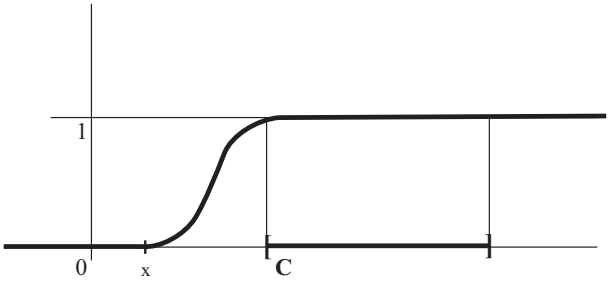


Figura 113.

Los T_1-espacios completamente regulares se llaman de Tikhonof o Tychonov, y juegan un papel fundamental en la teoría de los espacios uniformes, porque se tiene el resultado fundamental siguiente, el cual demostraremos en el capítulo 10 (véase nota de 10.1.28)

7.4.6 *Teorema*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular si y sólo si su topología viene definida por una familia de seudométricas (o sea, si es enyugado (5.3.9)).

El teorema 7.4.5 nos brinda inmediatamente una gran variedad de ejemplos de espacios completamente regulares. Veremos más adelante que, en particular, todos los subespacios de espacios normales son completamente regulares. Como preparación probaremos dos propiedades importantes de hereditabilidad que nos muestran que la clase de los espacios completamente regulares, no puede coincidir con la clase de los espacios normales (véase §3).

7.4.7 *Proposición*

i) Todo subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.

ii) Todo producto de espacios completamente regulares es completamente regular.

iii) Toda suma de espacios completamente regulares es completamente regular.

Demostración:

i) Sopongamos que $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular y sea $A \subset X$. Si C_A es cerrado en A, entonces existe un cerrado C en $(X, \mathcal{X})$ tal que $C_A = C \cap A$.

Sea $x \in A$ tal que $x \notin C_A$. Por lo tanto existe una función real continua f sobre $(X, \mathcal{X})$ tal que $f(x) = 0$ y $f[C] = \{1\}$. La restricción de f a A es una función de Urysohn para $\{x\}$ y C en $(A, \mathcal{X}_A)$.

ii) Sea $x = (x_i) \notin C$ y C cerrado en ΠX_i. Existe un abierto elemental $U_{i_j} := \pi_{i_1}^{-1}[U_1] \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}[U_n]$ tal que $x \in U \subset \complement C$. Por hipótesis existen además funciones continuas $f_j : (X_{i_j}, \mathcal{X}_{i_j}) \to [0, 1]$ tales que $f_j(x_{i_j}) = 0$ y $f_j[\complement U_j] = \{1\}$ para $j = 1, ..., n$. Basta entonces definir:

$$f : y \mapsto \text{máx}\{f_j \circ \pi_{ij}(y) | j = 1, ..., n\} \ (y \in \Pi X_i)$$

para obtener una función de Urysohn para $\{x\}$ y $\complement U \supset C$.

iii) La demostración se deja al lector. ■

El significado particular de los espacios normales resulta del hecho de que el axioma (T_4) es el único de los axiomas de separación, para el cual la separación por vecindades y la separación por funciones continuas son equivalentes.
Más precisamente:

7.4.8 *Lema (de Urysohn)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ cumple (T_4) si y sólo si para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos A, B de $(X, \mathcal{X})$ existe una función de Urysohn.

Demostración: Después de la proposición 7.4.3 solamente queda por probar la necesidad.

Sean A, B dos subconjuntos cerrados disjuntos de $(X, \mathcal{X})$. Para construir una función de Urysohn asociada f seguimos la idea intuitiva siguiente: intercalamos entre A y $\complement B$ una colección de abiertos $U(r)$ $(r \in \Delta \subset [0, 1])$ y definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) := \text{ínf}\{r | x \in U(r)\} \text{ para } x \in X \tag{8}$$

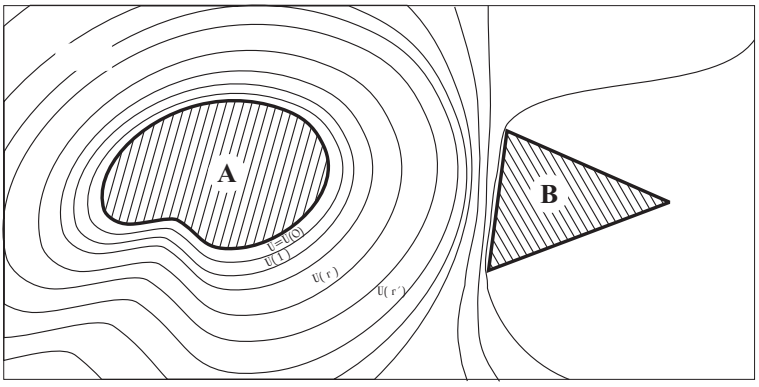


Figura 114.

Para precisar esta idea de construcción tomamos como Δ el conjunto de todos los racionales de la forma $k/2^n (n \in \mathbb{N},\ k = 0, ...2^n)$. Por inducción demostraremos que para todo $r \in \Delta$ puede asociarse un abierto $U(r)$ tal que

i) $A \subset U(r) \subset \complement B$ para $r \in \Delta$, $r < 1$

ii) $r < r' \Rightarrow \overline{U(r)} \subset U(r')$ para r, $r' \in \Delta$

Si $n = 0$, existe, por (T_4') un abierto U tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset \complement B$. Entonces basta poner $U(0/2^o) = U(0) = U$ y $U(1^o/2^o) = U(1) = X$.

Supongamos valido para n, es decir, supongamos que para $i \leq n$ y $k = 0, ..., 2^i$ ya han sido construidos abiertos $U(k/2^i)$ que cumplen i) y ii). Resta probar para $n+1$. Queda por definir sólo los abiertos $U(k/2^{n+1})$ para los $k = 2i+1$ impares. Para cada $k = 2i+1$ existe por (T_4') un abierto U que cumple.

$$U\left(\frac{2i}{2^{n+1}}\right) \subset U \subset \bar{U} \subset U\left(\frac{2(i+1)}{2^{n+1}}\right) \subset \complement B$$

Poniendo $U\left(\dfrac{2i}{2^{n+1}}\right) = U$, los abiertos $U(k/2^{n+1})(k = 0, ..., 2^{n+1})$ satisfacen evidentemente a i) y ii).

Ahora definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ por (8). Entonces f cumple las siguientes propiedades:

$0 \leq f(x) \leq 1$ porque $A \subset [0.1]$ y $U(1) = X$
$f[A] = \{0\}$ porque $\Delta \subset U(0)$
$f[B] = \{1\}$ porque $U(r) \subset \complement B$ para todo $r < 1$.

Mostraremos que f es continua. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Si $f(x_0)$ es diferente de $0\, y\, 1$, entonces existen r_1, $r_2 \in \Delta$ tales que $f(x_0) - \varepsilon < r_1 < f(x_0) < r_2 < f(x_0) + \varepsilon$. Entonces el abierto $V = U(r_2) \backslash \overline{U(r_1)}$ es una vecindad de x_0 y $f[V] \subset [r_1, r_2] \subset (f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$. Si $f(x_0) = 0$ o $f(x_0) = 1$, se consideran vecindades unilaterales de $f(x_0) \in r$ y se toman como V, $U(r_2)$ o $\complement(\overline{U(\mathbb{R}_1)})$ respectivamente. Concluimos que f es una función de Urysohn para A, B. ■

En un espacio normal todo conjunto unitario es cerrado. Aplicando el teorema

anterior a $A = \{x\}$ vemos que todo espacio normal es completamente regular. Mediante la proposición 7.4.7 (i) obtenemos el siguiente corolario.

7.4.9 *Corolario*

Todo subespacio de un espacio normal es completamente regular.

Una función de Urysohn para A, B cumple $A \subset f^{-1}[\{0\}]$, pero no necesariamente $A = f^{-1}[\{0\}]$. Analizaremos cuándo existe una función de Urysohn con esta propiedad más fuerte.

7.4.10 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio y sean A, B subconjuntos cerrados de $(X, \mathcal{X})$. Existe una función de Urysohn para A, B tal que $A = f^{-1}[\{0\}]$ si y sólo si A es un $G_\delta-$conjunto.

Demostración: Si $A = f^{-1}[\{0\}]$, entonces $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}\left[\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right]$ es un $G_\delta-$conjunto. Inversamente, sea $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ un $G_\delta-$conjunto ($U_n \in \mathcal{X}$). Sustituyendo eventualmente U_n por $U_n \cap \complement B$ podemos suponer $U_n \subset \complement B$ ($n \in \mathbb{N}$).

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, sea f_n una función de Urysohn para A y $B_n = \complement U_n$. Entonces la función $f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n f_n$ es continua como límite de una serie uniformemente convergente de funciones continuas. Si $x \in A$, entonces $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n f_n(x) = 0$. Si $x \in B$, entonces $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Si $x \notin A$, entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in B_n = \complement U_n$, por lo tanto $f(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n f_n(x) > 0$. ■

7.4.11 *Ejercicio*

A y B son $G_\delta-$conjuntos en un espacio normal $(X, \mathcal{X})$, entonces existe una función de Urysohn f para A, B tal que $A = f^{-1}(0)$ y $B = f^{-1}(1)$.

Para terminar esta sección proponemos al lector el siguiente ejercicio, que vuelve a tratar el problema central de construir una función real continua por medio de una familia de subconjuntos sobre el espacio $(X, \mathcal{X})$.

Este ejercicio generaliza el método que hemos empleado en la demostración del teorema de Urysohn.

7.4.12 *Ejercicio*

Sea X un conjunto, $\Delta \subset \mathbb{R}$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$ y $(A_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ una familia de subconjuntos de X tal que:

i) $A_\alpha = \varnothing$ y $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = X$

ii) $\alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \subset A_\beta$ para $\alpha, \beta \in \Delta$.

Probar:

1. Mediante $f(x) := \text{ínf}\{\alpha \in \Delta | x \in A_\alpha\}(x \in X)$ se define una función real sobre X.

2. $f(x) < r \iff x \in \bigcup_{\alpha<r} A_\alpha$ para $r \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \leq r \iff x \in \bigcap_{\alpha>r} A_\alpha \text{ para } r \in \mathbb{R}.$$

3. Si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico tal que para todo $\alpha \in \Delta$, A_α es abierto y si en lugar de ii) se cumple: ii$'$): $\alpha < \beta \Rightarrow \bar{A}_\alpha \subset A_\beta$ para α, $\beta \in \Delta$, entonces f es continua.

§ 7.5 **Prolongación de funciones reales continuas**

Las proposiciónes anteriores sobre la separación de cerrados por funciones continuas implican la existencia de funciones reales continuas con ciertas propiedades. Por lo tanto, es de suponer que sobre un espacio normal podremos obtener algunos nuevos resultados referentes al prolongamiento continuo de funciones reales.

Veremos primeramente que el teorema de Urysohn puede interpretarse como un teorema de prolongación. Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Definamos una función $f : A \cup B \to [0, 1]$ poniendo $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$. Esta función definida sobre el subespacio $A \cup B$ es continua, puesto que A y B son a la vez abiertos y cerrados en $A \cup B$. Las funciones de Urysohn para A, B son precisamente las prolongaciones continuas. $\bar{f} : X \to [0, 1]$ de f. El teorema de Urysohn nos asegura que existen tales prolongaciones continuas.

Notemos que $A \cup B$ es cerrado en $(X, \mathcal{X})$ y que f es una función muy especial sobre el cerrado $A \cup B$. Luego el teorema de Urysohn es un teorema de prolongación para una clase muy especial de funciones definidas sobre un cerrado en un espacio normal. Pero veremos que este resultado puede generalizarse a la clase de todas las funciones reales continuas definidas sobre un cerrado en un espacio normal.

7.5.1 *Teorema (Tietze)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es un T_4-espacio si y sólo si cumple:

(T_4'') Si $C \subset X$ es cerrado, entonces, para cada aplicación continua f de C en un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, existe una prolongación continua $\bar{f} : X \to [a, b]$ de f a X.

Demostración: Ya vimos que $(T_4'') \Rightarrow (T_4)$. Para probar la implicación inversa podemos suponer sin restricción de la generalidad, que $[a, b] = [-1, 1]$.

Construiremos la prolongación continua de $f : C \to [-1, 1]$ por aproximación sucesiva de f sobre C por restricciones de funciones continuas $g_n : X \to [-1, 1]$, basándonos en el siguiente:

7.5.2 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio, $C \subset X$ cerrado y $f : C \to [-1, 1]$ una función continua. Entonces existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $-1/3 \leq g(x) \leq 1/3$ para $x \in X$

ii) $|f(x) - g(x)| \leq 2/3$ para $x \in C$.

Demostración: $A = f^{-1}[[1/3, 1]]$ y $B = f^{-1}[[-1, -1/3]]$ son dos cerrados disjuntos en C, por lo tanto son cerrados en $(X; \mathcal{X})$ ya que C es cerrado. Por el teorema de Urysohn existe una función $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g[A] = \{1/3\}$, $g[B] = \{-1/3\}$ y $-1/3 \leq g(x) \leq 1/3$ para $x \in X$, lo cual prueba i). Como $-1 \leq f(x) \leq 1$ para $x \in C$ se obtiene sucesivamente, considerando los tres casos posibles $x \in A$, $x \in B, x \notin A \cup B$, que $|f(x) - g(x)| \leq 2/3$, o sea ii). ■

Construiremos por inducción, funciones continuas $g_n : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ tales que:

a) $-1 + (2/3)^n \leq g_n(x) \leq 1 - (2/3)^n$ para $x \in X$.

b) $|f(x) - g_n(x)| \leq (2/3)^n$ para $x \in C$.

c) $g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq 1/3\ (2/3)^n$ para $x \in X$.

Para $n = 0$ definamos $g_0(x) \equiv 0$ sobre X. Supongamos que ya definimos las funciones $g_0, ..., g_n$ que cumplen las condiciones a), b) y c). Sea

$$f_n(x) = (3/2)^n (f(x) - g_n(x)) \ \ (x \in C)$$

La función $f_n : C \to [-1, 1]$ es continua. Por el lema anterior, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $-1/3 \leq g(x) \leq 1/3$ sobre X y $|f_n(x) - g(x)| \leq 2/3$ sobre C.

Para la función continua $g_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + (2/3)^n g(x)$$

se cumplen las tres propiedades a), b), c):

a) porque $|g_{n+1}(x)| \leq 1 - (2/3)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ para $x \in X$

b) porque $|f(x) - g_{n+1}(x)| = |f(x) - g_n(x) - \left(\frac{2}{3}\right)^n g(x)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |f_n(x) - g(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ para $x \in C$

c) porque $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |g(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ para $x \in X$.

La sucesión de funciones (g_n) así definida es uniformemente convergente sobre X, porque

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_{m+1}(x) - g_m(x)| + |g_{m+2}(x) - g_{m+1}(x)| + \ldots + |g_n(x) - g_{n-1}(x)|$$
$$\leq 1/3(2/3)^m \sum_{i=0}^{n-m-1} (2/3)^i \leq (2/3)^m \text{ para } n > m.$$

Por lo tanto $\overline{f} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, como límite uniforme de (g_n), es continua sobre $(X, \mathcal{X})$ (esto se demuestra por el mismo razonamiento, que para el caso clásico $X = \mathbb{R}$). Por a) y b) $\bar{f}$ coincide con f sobre C y aplica X en $[-1, 1]$. ■

Si f es una función real continua sobre un cerrado C en un espacio normal $(X, \mathcal{X})$ tal que

$$|f(x)| \leq \alpha \text{ para todo } x \in C, \text{ o sea, } \|f\|_\infty \leq \alpha \text{ para un } \alpha > 0 \tag{9}$$

entonces existe, según el teorema anterior, una prolongación continua $\bar{f}$ de f a $(X, \mathcal{X})$ tal que

$$|\bar{f}(x)| \leq \alpha \text{ para todo } x \in X, \text{ o sea, } \|\bar{f}\|_\infty \leq \alpha \tag{9'}$$

Veremos ahora que un resultado análogo a $(9')$ puede deducirse para la desigualdad estricta.

7.5.3 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio y $C \subset X$ cerrado. Si $f : C \to \mathbb{R}$ es continua tal que $|f(x)| < \alpha$ para todo $x \in C$, entonces existe una prolongación continua

$$\bar{f} : X \to \mathbb{R} \text{ de } f \text{ tal que } |\bar{f}(x)| < \alpha \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración: Existe una prolongación continua g de f a X tal que $\|g\|_\infty \leq \alpha$. El conjunto $B = \{x \in X \mid |g(x)| = \alpha\}$ es cerrado en $(X, \mathcal{X})$ y disjunto de C. Sea h una función de Urysohn para B, C : $h[B] = \{0\}$ y $h[C] = \{1\}$. Tomando $\bar{f} = h \cdot g$ se tiene la prolongación pedida, ya que $\bar{f}(x) = g(x) = f(x)$ sobre C y

$$|\bar{f}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ |h(x)g(x)| \leq |g(x)| < \alpha & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

7.5.4 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio y $C \subset X$ un $G_\delta-$conjunto. Probar que si $f : C \to [a, b]$ es una aplicación continua entonces existe una prolongación continua $\bar{f}$ de f a X tal que $f(x) \in (a, b)$ para todo $x \notin C$.

Hasta ahora hemos considerado solamente la prolongación de funciones continuas *acotadas*. Pero es fácil ver que los resultados obtenidos se aplican también a funciones no acotadas.

$$\text{Sea } h \text{ el homeomorfismo } x \mapsto \begin{cases} x/(1+|x|) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & \text{si } x = \pm\infty \end{cases}$$

de $\overline{\mathbb{R}}$ sobre $[-1,1]$. Si $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función continua, entonces $h \circ f : C \to [-1,1]$ es una función continua y acotada. Si g es una prolongación continua de $h \circ f$, entonces $\overline{f} = h^{-1} \circ g$ es evidentemente una prolongación continua de $h^{-1} \circ h \circ f = f$. Además, si f es real, o sea si $(h \circ f)[C] \subset (-1,1)$, entonces existe una prolongación g de $h \circ f$ tal que $g[C] \subset]-1,1[$ o sea $\bar{f}\,[X] \subset \mathbb{R}$. De tal manera, los resultados 7.5.1, 7.5.3 y el ejercicio 7.5.4 implican el siguiente:

7.5.5 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio y $C \subset X$ cerrado. Entonces

i) Cada función numérica continua $f : C \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ tiene una prolongación numérica continua $\bar{f}$ de X en $\overline{\mathbb{R}}$.

ii) Cada función real continua $f : C \to \mathbb{R}$ tiene una prolongación real continua $\bar{f}$ de X en $\mathbb{R}$ tal que $\|\bar{f}\|_\infty = \| f\|_\infty$.

iii) Si C es un $G_\delta-$conjunto entonces cada función continua $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ tiene una prolongación $\overline{f}$ de X en $\overline{\mathbb{R}}$ que es real sobre C.

¿Cuándo una aplicación continua sobre un subespacio de un espacio topológico puede prolongarse continuamente a todo el espacio, *manteniendo el mismo codominio*?, este es uno de los problemas fundamentales de la topología.

El corolario anterior nos da una respuesta satisfactoria para las funciones *reales* sobre un subconjunto cerrado en un T_4-espacio.

$\rightsquigarrow$ Hay que resaltar que para codominios diferentes de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ o de intervalos reales $[a,b]$, el problema puede complicarse mucho más.

7.5.6 *Ejemplo*

Sea X el disco unitario $B^2 \subset R^2$, $C \subset X$ el círculo unitario E^1 y Y el mismo círculo E^1. Entonces puede probarse que la aplicación identidad de E^1 sobre E^1 no puede extenderse continuamente a todo el disco B^2 manteniendo E^1 como codominio. Este resultado no es fácil de obtener. Es equivalente al teorema del punto fijo de Brouwer para dimensión 2. La razón intuitiva es que toda aplicación del disco en su frontera que sea la identidad en su frontera rompe necesariamente el disco, luego no es continua. Para una demostración rigurosa necesitaríamos las técnicas de la topología algebraica (veáse I. M. SINGER [139], p. 96).

El ejemplo anterior plantea el siguiente problema: para qué codominios en vez de $[a,b]$ se cumple el enunciado del lema de Tietze.

Dejamos al lector probar que en este lema el codominio $[a,b]$ puede sustituirse por cualquier potencia de $\mathbb{R}$ o de $I = [0,1]$

7.5.7 *Ejercicio*

Sea C un cerrado en un T_4-espacio $(X, \mathcal{X})$ y f una aplicación continua de C en $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces existe una prolongación continua $\overline{f}$: $(X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ de f, si $(Y, \mathcal{Y})$ es de la forma $\mathbb{R}^Z$ o I^Z (Z conjunto).

Para las esferas E^n como espacios de llegada existe al menos una prolongación parcial.

7.5.8 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio, $C \subset X$ cerrado y $f : C \to E^n$ continua. Probar que existe una vecindad U de C en $(X, \mathcal{X})$ y una prolongación continua $\overline{f} : U \to E^n$ de f.

(Indicación: Considerar $U = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$).

Al problema de separar dos subconjuntos cerrados disjuntos en un espacio topológico, por una función real continua le corresponde, en un espacio *vectorial* topológico el siguiente problema *lineal: separar dos conjuntos cerrados conexos disjuntos por una funcion lineal continua* (fig 115).

Este problema juega un papel fundamental en diversas teorías de optimización y en análisis funcional en general. Lo trataremos aquí aunque intervengan estructuras algebráicas, porque los teoremas se establecen, principalmente, por razonamientos topológicos.

Para la separación de conjuntos *convexos* por funciones lineales se utilizan métodos completamente diferentes del método que se emplea para la construcción de las funciones de Urysohn. Es interesante, pero no nos sorprende, que en la demostración del teorema central (de Hahn Banach) intervengan argumentos de *conexión.*

Antes de empezar la exposición de los teoremas enumeraremos algunas definiciones y unas propiedades sencillas de los conjuntos convexos que son puramente algebraicas y fáciles de comprobar.

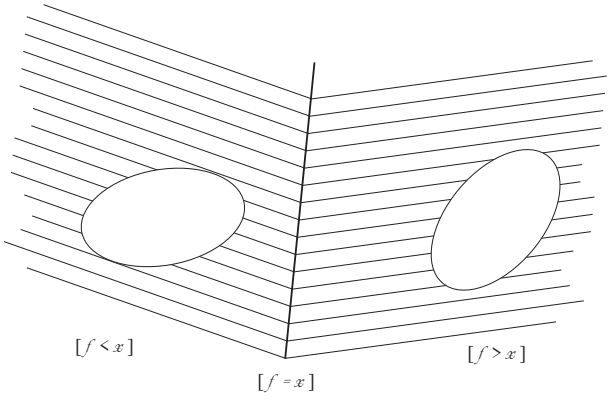


Figura 115.

Sea E un espacio vectorial real.

1. $C \subset E$ es convexo si y sólo si cumple:

$$x_1, ..., x_n \in C \wedge \lambda_1, ..., \lambda_n \geqq 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C \tag{10}$$

2. Si $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de convexos en E, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es convexo.

3. La unión de convexos en general no es convexa (fig. 116).

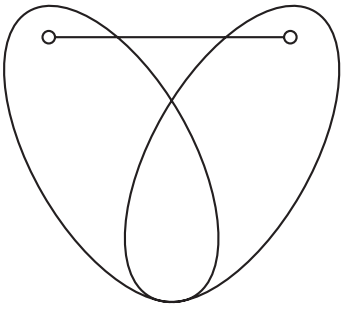


Figura 116.

4. Para todo conjunto $A \subset E$, la intersección de todos los convexos C que lo contienen se llama **envoltura convexa** de A y se denota por $c(A)$. $c(A)$ es el convexo más pequeño que contiene a A (fig. 117).

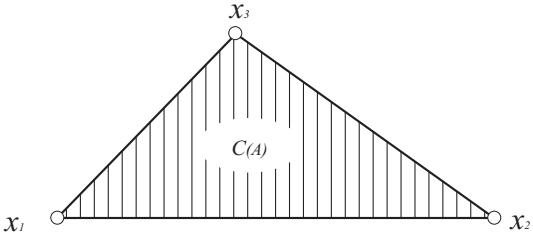


Figura 117. Envoltura convexa de $A = \{x_1, x_2, x_3\}$

5. Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal de E en un espacio vectorial F y si $C \subset E$ es convexo, entonces $f[C]$ es convexo.

6. Si $A, B \subset E$ son convexos y α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha x + \beta y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

es convexo. En particular $A + B$ y αA son convexos.

7. $C \subset E$ se llama **cono** si cumple

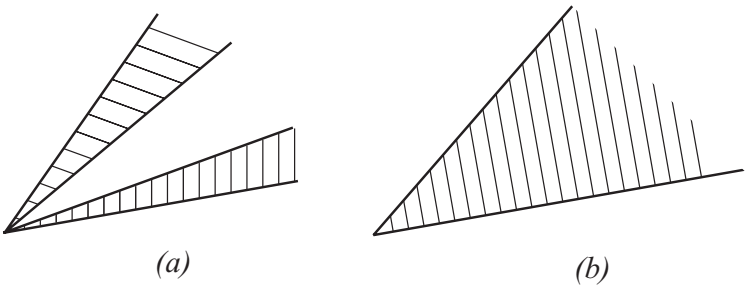


Figura 118. (a) Cono (b) Cono convexo

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda C \subset C$$

Un cono $C \subset E$ es convexo si y sólo si cumple $C + C \subset C$ (fig. 118).

8. Un subespacio afín $H \subset E$ ($H \neq E$) se llama **hiperplano** si es maximal, es decir, si para todo subespacio afín L que contiene H se cumple $L = H$ o $L = E$.

Para todo hiperpiano $H \subset E$ existe una forma lineal $f : E \to \mathbb{R}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$.

(Si $(E, \mathcal{X})$ es un espacio vectorial *topológico*, entonces el hiperplano $H = [f = \alpha] = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ es cerrado si y sólo si f es continua).

9. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una forma lineal diferente de 0 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$[f = \alpha] = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$$

es un hiperplano.

Los conjuntos convexos

$$[f \geqq \alpha] := \{x \in E \mid f(x) \geqq \alpha\}$$

$$[f \leqq \alpha] := \{x \in E \mid f(x) \leqq \alpha\}$$

se llaman semiespacio positivo (resp. negativo) determinado por $H = [f = \alpha]$. Si un conjunto está incluido en $[f \leqq \alpha]$ o $[f \geqq \alpha]$, entonces se dice que **está a un lado de** H. Es inmediato que un convexo C que no corta a H debe estar a un lado de H.

En las secciones anteriores vimos que el problema de separación por funciones está muy relacionado con el problema de prolongación de funciones. Lo mismo se cumple aquí. El teorema fundamental siguiente no es otro que un teorema de prolongación lineal continua en forma geométrica.

7.5.9 *Teorema de Mazur (teorema de Hahn-Banach en forma geométrica)*

Sea A un subconjunto abierto convexo no vacío de un espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{X})$ y sea M un subespacio afín en E tal que $A \cap M = \varnothing$. Entonces existe un hiperplano cerrado H en E tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \varnothing$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \in M$, o sea, que M es un subespacio lineal. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los subespacios lineales M' de E tal que $M \subset M'$ y $M' \cap A = \varnothing$. $\mathcal{M}$ está inductivamente ordenado por la inclusión $\subset$: Si $\mathcal{U}$ es una colección totalmente ordenada de subespacios lineales de E, entonces evidentemente $M_0 : \cup\mathcal{U} \in \mathcal{M}$. Por el lema de Zorn, existe un subespacio maximal H en $\mathcal{M}$. Puesto que

$$M' \in \mathcal{M} \Rightarrow \overline{M}' \in \mathcal{M}$$

H es cerrado. Falta probar que H es un hiperplano. Supongamos por reducción al absurdo que H no es un hiperplano. Entonces el espacio vectorial cociente $F := E/H$ tiene dimensión $\geqq 2$. Provisto de la topología cociente, F es un espacio vectorial topológico. Sea $\varphi : E \to F$ la aplicación canónica y $B := \varphi[A]$. B es un abierto en F y $0 \notin B$.

$$\{0\} \text{ es el único subespacio lineal } L \text{ de } F \text{ tal que } L \cap B = \varnothing. \tag{11}$$

$C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$ es un cono convexo abierto que no contiene 0. $\{0\}$ es cerrado en F, porque $\varphi^{-1}(0) = H \subset E$ es cerrado; por lo tanto $G := F \backslash \{0\}$ es abierto. G es conectable por caminos por ser $\dim F \geqq 2$. Pero G no es convexo y, por lo tanto, G es diferente de C. Por el ejercicio 6.1.9 existe un punto frontera $x \in (\overline{C} \backslash C) \cap G$ de C en G. Si $-x \in \overset{\circ}{C} = C$, entonces $0 \in (-x, x) \subset \overset{\circ}{C}$ (¿Por qué?). Entonces $x, -x \notin C$. Concluimos que el subespacio unidimensional generado por x no corta B, lo que contradice (11). Por tanto, $dim\, F = 1$, H es hiperplano.■

7.5.10 *Definición (hiperplano de apoyo)*

Sea C un subconjunto convexo en un espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{X})$. Un hiperplano cerrado H en E se llama *hiperplano de apoyo* de C si $C \cap H \neq \varnothing$ y si C está de un lado de H (fig. 119).

7.5.11 *Corolario (teorema del hiperplano de apoyo)*

Sea $C \subset (E, \mathcal{X})$ un convexo que contiene puntos interiores. Entonces todo punto frontera $x \in fr\, C$ está contenido en un hiperplano de apoyo de C.

Demostración: Probaremos más generalmente que todo $x \notin \overset{\circ}{C}$ está contenido en un hiperplano cerrado H tal que C está situado a un lado de H. Para eso basta aplicar el teorema anterior a $A = \overset{\circ}{C}$ y $M = [x]$ teniendo en cuenta que si $\overset{\circ}{C} \subset [f \leqq \alpha]$ entonces $\overline{C} \subset [f \leqq \alpha]$ por ser $\overline{C} = \overline{\overset{\circ}{C}}$ ■

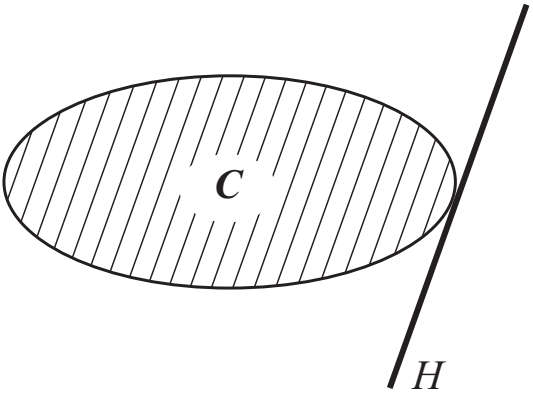


Figura 119. Hiperplano de apoyo

7.5.12 *Corolario (teorema de separación)*

Sean A, B conjuntos convexos en E tales que $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$ y $\overset{\circ}{A} \cap B = \varnothing$. Entonces existe un hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ que separa A y B; i.e. A y B están situados en diferentes semiespacios definidos por H:

$$\sup\{f(x) \mid x \in A\} \leqq \alpha \leqq \inf\{f(x) \mid x \in B\} \tag{12}$$

(fig. 120)

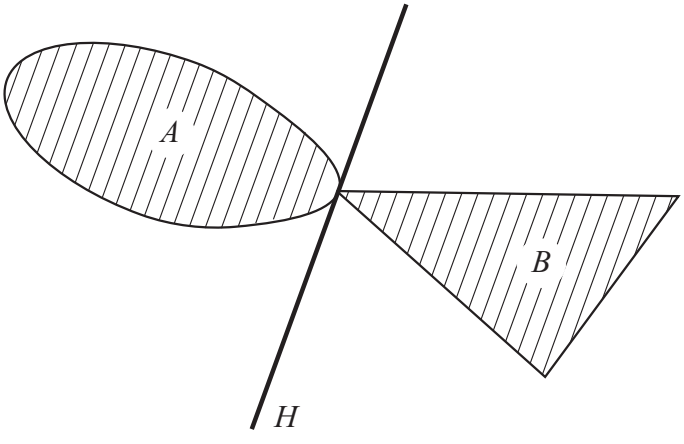


Figura 120.

Demostración: Pongamos $C = A - B$. Entonces C contiene un punto interior, pero $0 \notin \overset{\circ}{C}$. Por la demostración anterior, existe un hiperplano cerrado H tal que $0 \in H$ y C está situado en el semiespacio negativo de H. En otras palabras, existe una forma lineal continua f sobre E tal que $f(x) \leqq 0$ para todos los $x \in C$. Esto implica:

$$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow f(x) \leqq f(y)$$

Tomando $\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ resulta (12).■

Si $(E, \mathcal{X})$ es un espacio localmente convexo (p. ej., normado), entonces puede enunciarse un segundo teorema de separación.

7.5.13 *Corolario (teorema de separación estricta)*

Si B es un convexo cerrado en un espacio localmente convexo $(E, \mathcal{X})$ y $x \notin B$, entonces existe un semiespacio cerrado que contiene a B pero no a x.

Demostración: Sea A una vecindad abierta convexa de x tal que $A \cap B = \varnothing$. Por el corolario anterior existe una forma lineal continua f sobre E y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset [f \leqq \alpha]$ y $B \subset [f \geqq \alpha]$. Porque A es abierto, tenemos $A \subset [f < \alpha]$. Luego $x \in [f < \alpha]$■

El corolario anterior podemos también formularlo de la manera siguiente:

7.5.14 *Corolario (caracterización de los cerrados convexos)*

Todo subconjunto convexo cerrado en un espacio localmente convexo es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.

7.5.15 *Ejercicio (teorema de Hahn-Banach en forma analítica)*

1.) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que p una aplicación de E en $\mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{array}{l} p(x+y) \leqq p(x) + p(y) \quad \text{para todo } x,\, y \in E \text{ y} \\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{para todo } x \in E \text{ y } \lambda > 0 \end{array}$$

si f es una forma lineal definida en un subespacio F de E tal que

$$f(x) \leq p(x) \qquad \text{para todo } x \in F,$$

entonces f se puede prolongar a una forma lineal g en E tal que

$$g(x) \leq p(x) \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Indicación

i) Si f es una forma lineal en E tal que $f(x) \leqq p(x)$ para todo $x \in F$; probar que para todo $a \in E$ y todos los $u, v \in F$ se tiene

$$f(u) - p(u-a) \leqq f(a) \leqq p(v+a) - f(v)$$

ii) Más generalmente, si f es una forma lineal definida únicamente en F y tal que $f(x) \leqq p(x)$, entonces si para todo $x \in F$. Para todo $a \in E$, se define

$$N_a = \sup_{u \in F} \, (f(u) - p(u-a)); \; M_a = \inf_{v \in F} \, (p(v+a) - f(v))$$

Probar que N_a y M_a son finitos y que $N_a \leqq M_a$

iii) Conservando las mismas hipótesis que en ii), supongamos que $a \notin F$, y sea $k \in [N_a, M_a]$ arbitrario. Para todo $x \in F$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, sea

$$g(x + \lambda a) = f(x) + \lambda k$$

Probar que g es una forma lineal en el subespacio vectorial $F_a = F + \mathbb{R}_a$ de E generado por F y a, que g es idéntica a f en F y que $g(y) \leqq p(y)$ para todo $y \in F_a$.

2.) Sean $\mathfrak{F}$ el conjunto de los pares (F, f), donde F es un subespacio vectorial de E y f una forma lineal en F, tal que $f \leqq p$ en F. Diremos que:

$$(F_1, , f_1) \leqq (F_2, , f_2)$$

o que $(F_2, , f_2)$ es una prolongación de $(F_1, , f_1)$ si $F_1 \subset F_2$, y si f_1 es la restricción de f_2 a F_1.

i) Probar que esta relación es un orden inductivo sobre $\mathfrak{F}$

ii) Deducir de i) que todo elemento maximal de $\mathfrak{F}$ es de la forma (E, f).

iii) Probar que todo $(E, f) \in \mathfrak{F}$ posee una prolongación (E, g). Probar en particular que existe siempre una forma lineal f en E tal que $f \leqq p$ en E.

iv) Probar que la condición necesaria y suficiente para que la prolongación (E, g) de (E, f) sea única es que, para todo $a \in E$, se tenga que $N_a = M_a$.

7.5.16 *Ejercicio (aplicación del teorema de Hahn-Banach en forma analítica)*

i) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con una topología $\mathcal{X}_{\mathfrak{B}}$ definida por una familia de seminormas $\mathfrak{B}$ (5.3.10). Probar que para todo $x \neq 0$ en E, existe una forma lineal f continua en E tal que $f(x) \neq 0$.

ii) Sea B la bola unitaria cerrada de un espacio normado E sobre $\mathbb{R}$. Probar que para todo $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$, existe una forma lineal f en E tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = 1$.

§ 7.6 **Cubiertas y particiones de la unidad sobre un espacio normal**

Existe una clase muy importante de espacios topológicos que tienen localmente la estructura de un espacio euclideano $\mathbb{R}^n$, o sea, en dichos espacios, cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (las llamadas variedades topológicas). Sobre tales espacios no es dificil definir lo que son funciones diferenciables, puesto que la diferenciabilidad es, como la continuidad, una *noción local.* En cambio, la *integral* de una función depende del comportamiento de la función sobre *todo el espacio*, la integral es una *noción global.* Para introducir conceptos globales sobre

espacios localmente euclideanos se necesitan técnicas que vinculen las nociones y propiedades *globales* con las nociones y propiedades *locales*.

Estudiaremos en esta sección uno de estos métodos estrechamente ligado al axioma (T_4): la partición de unidad.

Empecemos por analizar las cubiertas abiertas de un espacio normal. La propiedad (T_4) puede interpretarse como un axioma que asegura que para toda cubierta (U_1, U_2) de X uno de sus elementos, por ejemplo U_1, puede sustituirse por un abierto más pequeño W_1 tal que

$$\overline{W_1} \subset U_1 \tag{13}$$

En efecto, si $U_1 \cup U_2 = X$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{X}$, entonces $C = \complement U_2 \subset U_1$ es cerrado. Por lo tanto existe, por (T_4'), un abierto V tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$. Basta tomar $W_1 = V$, para obtener una cubierta abierta (W_1, U_2) de $(X, \mathcal{X})$ tal que $\overline{W_1} \subset U_1$.

Aplicando este método sucesivamente a todos los abiertos de una cubierta abierta finita $(U_1, ..., U_n)$ se obtiene una cubierta abierta 'más fina' $(W_1, ..., W_n)$ tal que $\overline{W_i} \subset U_i$ $(i = 1, ..., n)$.

7.6.1 *Definición (refinamiento, encogimiento)*

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$.

Una cubierta $(W_\beta)_{\beta \in J}$ de X se dice que es más *fina* o que es un *refinamiento* de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si

$$\forall \beta \in J \; \exists \alpha \in I \text{ tal que } W_\beta \subset U_\alpha \tag{14}$$

$(W_\alpha)_{\alpha \in I}$ se llama **encogimiento** de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si

$$\overline{W}_\alpha \subset U_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I. \tag{13'}$$

Nos interesa saber qué cubiertas abiertas poseen un encogimiento. El método de encogimiento sucesivo explicado anteriormente se generaliza a todos las cubiertas abiertas puntualmente finitas en un T_4-espacio:

7.6.2 *Teorema*

Toda cubierta abierta puntualmente finita de un T_4-espacio posee un encogimiento.

Demostración: Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta puntualmente finita del T_4-espacio $(X, \mathcal{X})$.

Sobre el conjunto $\mathfrak{C}$ de todas las cubiertas abiertas de $(X, \mathcal{X})$ de la forma

$$\mathfrak{B}_J = (W_\beta)_{\beta \in J} \cup (U_\alpha)_{\alpha \in I \setminus J} \;\; (\overline{W}_\beta \subset U_\beta \text{ para } \beta \in J \subset I) \tag{15}$$

introducimos una relación de orden $\prec$ por:

$$\mathfrak{B}_J \prec \mathfrak{B}'_J \Longleftrightarrow J \subset J' \;\; \wedge \;\; W_\beta = W'_\beta \text{ para } \beta \in J \tag{16}$$

Probemos que $(\mathfrak{C}, \prec)$ es un conjunto inductivamente ordenado. Sea $(\mathfrak{B}^s_{Js})_{s\in S}$ una familia totalmente ordenada de cubrimientos en $\mathfrak{C}$. Debemos hallar una cota superior de esta familia. Sea $J = \underset{s\in S}{\cup} J_s$ y

$$\mathfrak{B}_J = (W_\beta)_{\beta\in J} \cup (U_\alpha)_{\alpha\in I\setminus J} \text{ con } W_\beta = W^s_{\beta s} \text{ para } \beta \in J_s$$

Esta colección de abiertos está bien definida, puesto que $W^s_{\beta s} = W^{s'}_{\beta s'}$ si $\beta \in J_s$, y $\beta \in J_{s'}$. Evidentemente, si logramos demostrar que $\mathfrak{B}_J$ es una cubierta de X entonces $\mathfrak{B}_J$ será una cota superior de $(\mathfrak{B}^s_{J_s})_{s\in S}$ en $(\mathfrak{C}, \prec)$.

Sea $x \in X$, por hipótesis tenemos $x \in U_\alpha$ sólo para un número finito de índices $\alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Si uno de estos subíndices α_i pertenece a $I\setminus J$, entonces se cumple $x \in U_{\alpha_i} \subset \cup\mathfrak{B}_J$. En cambio, si $\alpha_i \in J$ para $i = 1, ..., n$, entonces existe $J_{s_0}(s_0 \in S)$ tal que $\alpha_i \in J_{s_0}$ para $i = 1, ..., n$ por ser $(J_s)_{s\in S}$ totalmente ordenado. Pero $\mathfrak{B}_{J_{s_0}}$ es una cubierta de X, entonces existe $\beta \in J_{s_0}$ con $x \in W_\beta$. Por definición, $J_{s0} \subset J$ y $x \in W_\beta \subset \cup\mathfrak{B}_J$. Por lo tanto $\mathfrak{B}_J$ recubre X.

Por el lema de Zorn existe un recubrimiento maximal $\mathfrak{B}_{J_0}$ en $(\mathfrak{C}, \prec)$. Supongamos por dedección al absurdo que $J_0 \neq I$. Tomamos $\alpha \in I\setminus J_0$. Por el razonamiento anterior, el abierto U_α en $\mathfrak{B}_{J_0}$ puede sustituirse por un abierto W_α tal que $\bar{W}_\alpha \subset U_\alpha$.

El recubrimiento $\mathfrak{B}_{J_0} \cup_{\{\alpha-\}}$ así definido es posterior a $\mathfrak{B}_{J_0}$ en $(\mathfrak{C}, \prec)$ lo cual implica una contradicción. Concluimos que toda cubierta maximal en $(\mathfrak{C}, \prec)$ es un encogimiento de $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ ■

Por lo expuesto anteriormente, está claro que el teorema 7.6.2 formula una propiedad característica de los espacios T_4

7.6.3 *Ejercicio*

Probar que si en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ toda cubierta abierta (puntualmente) finita posee un encogimiento, entonces $(X, \mathcal{X})$ cumple (T_4)

No es difícil deducir una caracterización análoga de los espacios T_3. Para eso se introduce el concepto de casi-encogimiento, que es más débil que encogimiento y más fuerte que refinamiento

7.6.4 *Ejercicio*

Probar que un T_1-espacio $(X, \mathcal{X})$ es regular si y sólo si toda cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ de $(X, \mathcal{X})$ posee un casi-encogimiento $(W_\beta)_{\beta\in J}$, o sea, un refinamiento $(W_\beta)_{\beta\in J}$ tal que para todo $\beta \in J$ existe un $\alpha \in I$ que cumple

$$\overline{W}_\beta \subset U_\alpha \tag{14}$$

Combinemos ahora los resultados de la sección anterior con el enunciado del teorema 7.6.2.

Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta localmente finita de un T_4-espacio $(X, \mathcal{X})$ y sea $(W_\alpha)_{\alpha\in I}$ un encogimiento de dicho cubierta. Por el teorema de Urysohn existe para todo $\alpha \in I$ una función continua $f_\alpha : X \to [0, 1]$ que es igual a 1 sobre $\overline{W}_\alpha$

y que se anula fuera de U_α. Estas funciones nos servirán para descomponer toda función real continua sobre X en una familia de funciones que sólo localmente son diferentes de 0.

7.6.5 *Definición (soporte de una función)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces el conjunto cerrado

$$sop(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \tag{15}$$

se llama **soporte** de f.

Sop (f) es el cerrado más pequeño fuera del cual f se anula.

Los soportes de las funciones de Urysohn f_α construidas anteriormente no están necesariamente contenidos en U_α. Pero sí existen funciones de Urysohn para $\overline{W}_\alpha, \complement U_\alpha$ con esta propiedad:

7.6.6 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_4-espacio, $C \subset X$ cerrado y $A \in \mathcal{V}(C)$. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[C] = \{1\}$ y sop $f \subset A$.

Demostración: Ejercicio (indicación : utilizar $(T_4^{'})$.■)

Si $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de funciones reales continuas sobre $(X, \mathcal{X})$ tal que la familia de sus soportes $(sopf_\alpha)_{\alpha \in I}$ es puntualmente finita, entonces la función suma

$$f = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha : x \mapsto \sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) \quad (x \in X) \tag{16}$$

está bien definida, puesto que para todo $x \in X$ sólo un número finito de valores $f_\alpha(x)$ $(\alpha \in I)$ es diferente de 0. Queremos saber bajo qué condiciones f será continua.

7.6.7 Lema

Si $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de funciones reales continuas sobre $(X, \mathcal{X})$ tal que la familia de sus soportes $(sopf_\alpha)_{\alpha \in I}$ es localmente finita, entonces la función suma $f = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ es continua.

Demostración: Para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x de x tal que $U_x \cap sopf_\alpha \neq \varnothing$ sólo para un número finito de índices $\alpha \in I$. Pero $f|U_x$ es suma finita de funciones continuas, por lo tanto es continua. Por 5.1.17, concluimos que f es continua.■

7.6.8 *Definición (partición de la unidad)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Una familia $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ de funciones continuas $\varphi_\alpha : X \to [0,1]$ se llama partición de la unidad sobre $(X, \mathcal{X})$ si cumple:

i) La familia $(sop\, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ es localmente finita

ii) $\sum\limits_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$

7.6.9 *Definición (partición de la unidad subordinada a una cubierta)*

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de $(X, \mathcal{X})$. Entonces una partición de la unidad $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ se llama subordinada a la cubierta $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ si para todo $\alpha \in I$ se tiene $sop \varphi_\alpha \subset U_\alpha$.

La importancia del teorema 7.6.2 consiste principalmente en el corolario siguiente.

7.6.10 *Corolario*

En un T_4-espacio $(X, \mathcal{X})$, toda cubierta abierta, localmente finita, posee una partición de la unidad subordinada.

Demostración: Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta localmente finita de $(X, \mathcal{X})$. Existe un encogimiento $(W_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$. Sabemos además por el lema 7.6.6 que existen funciones continuas $f_\alpha : X \to [0,1]$ tales que $f_\alpha[\overline{W}_\alpha] = \{1\}$ y *sop* $f_\alpha \subset U_\alpha$. Como $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ es localmente finita, también lo es $(sop\ f_\alpha)_{\alpha \in I}$ y por esta razón la función suma $f = \sum\limits_{\alpha \in I} f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ es continua (7.6.7). Para $x \in X$ se tiene que $f(x) \geq 1$ ya que x tiene que estar en algún $\overline{W}_\alpha$.

Definamos ahora $\varphi_\alpha = f_\alpha / f$. $\varphi_\alpha : X \to [0,1]$ es continua y cumple sop $\varphi_\alpha = sop f_\alpha \subset U_\alpha (\alpha \in I)$. Por definición, tenemos $\sum\limits_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(x) = (1/f(x)) \sum\limits_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una partición de unidad subordinada a $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$.■

7.6.11 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sean A, B dos cerrados disjuntos de $(X, \mathcal{X})$. Entonces $(\complement A, \complement B)$ es una cubierta abierta localmente finita de $(X, \mathcal{X})$. Supongamos que (φ_1, φ_2) es una partición de la unidad subordinada a la cubierta $(\complement A, \complement B)$. Entonces *sop* $\varphi_1 \subset \complement A$ y *sop* $\varphi_2 \subset \complement B$, o sea $\varphi_1[A] = \varphi_2[B] = 0$. Como $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$ para todo $x \in X$, concluimos que $\varphi_2[A] = \varphi_1[B] = 1$. Vemos que φ_1 es una función de Urysohn para el par (A, B) y φ_2 una función de Urysohn para el par (B, A). Esto nos muestra que si un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ cumple el enunciado del corolario anterior (para toda cubierta de dos abiertos (U_1, U_2)), entonces es necesariamente un T_4-espacio. Por lo tanto, el corolario 7.6.10 formula una propiedad característica de los T_4-espacios.

En el capítulo siguiente consideraremos una clase de espacios topológicos en

los cuales toda cubierta abierta posee un refinamiento abierto localmente finito (los llamados espacios paracompactos). En tales espacios, todos los cubrimientos (no sólo los localmente finitos) poseen una partición de la unidad subordinada.

7.6.12 Ejercicio

Sea $(W_\beta)_{\beta\in J}$ un refinamiento abierto localmente finito de una cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ de un espacio topológico $(X,\mathcal{X})$. Probar que si $(W_\beta)_{\beta\in J}$ posee una partición de unidad subordinada, entonces $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ también la posee.

Como ya mencionamos al comienzo de esta sección, sobre ciertos espacios topológicos está definida una estructura diferenciable (véase el anexo siguiente). Sobre tales espacios se necesitan particiones de la unidad $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ cuyas funciones no sean solamente continuas sino diferenciables.

El ejercicio siguiente indica cómo construir tales particiones de la unidad diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$.

7.6.13 Ejercicio

Probar que:

i) La función

$$g : x \to \begin{cases} exp(-x^{-2}) = e^{-1/x^2} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

es infinitamente diferenciable sobre $\mathbb{R}$ (fig. 121).

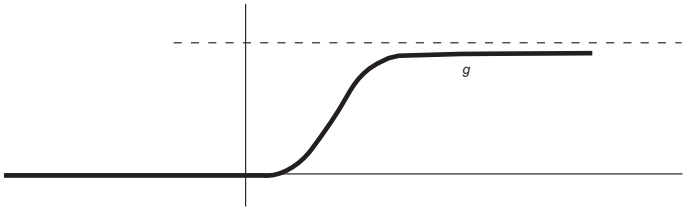


Figura 121.

ii) La función infinitamente diferenciable $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por

$$h(x) = g(1+x)g(1-x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

es estrictamente positiva sobre $(-1,1)$ y se anula fuera de $(-1,1)$.

iii) Sea $C = \{x \in \mathbb{R} | |x_i - a_i| < \varepsilon_i\}$ para $i = 1,..,n$ un cubo abierto de centro $a = (a_1,..,a_n)$ $(a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon_i > 0)$. Entonces existe una función infinitamente diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ que es estrictamente positiva sobre C y se anula fuera de C.

iv) Sean B y C dos cerrados en $\mathbb{R}$ tales que $d_\infty(B,C) > 0$. Entonces existe una función de Urysohn infinitamente diferenciable para el par (B,C). (Indicación: considerar la cubierta abierta localmente finita de $\mathbb{R}^n$ formada por

los cubos

$$K(\varepsilon a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1,\cdots,n} |x_i - \varepsilon a_i| < \varepsilon\}$$

con $\varepsilon = 1/3\ d(B, C), a \in \mathbb{Z}^n$ y aplicar iii).

v) Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta localmente finita de $\mathbb{R}^n$ formada por abiertos acotados $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

Entonces existe una partición de la unidad subordinada $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ formada por funciones infinitamente diferenciables φ_α. (Indicación: utilizar el resultado conocido de que $d(B, C) > 0$ si B y C son dos cerrados disjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ de los cuales uno es acotado.)

§ 7.7 Anexo: utilización de las particiones de la unidad en topología diferencial

Mostraremos ahora mediante un ejemplo cómo las particiones de la unidad pueden aplicarse para obtener soluciones globales partiendo de soluciones locales. Tales problemas de sintetización se plantean particularmente en la teoría de las llamadas variedades diferenciables y variedades de Riemann que forman el objeto de la topología diferencial (resp. geometría diferencial). Estas variedades forman probablemente, después de los espacios funcionales, la segunda clase de espacios topológicos concretos de mayor importancia tanto en la teoría como en la práctica.

Vamos a introducir aquí algunas nociones básicas de la topología diferencial para que el lector obtenga una primera impresión de esta teoría que podrá profundizar en la literatura (véase M. SPIVAK [146], S. LANG[102]). Lo haremos de manera condensada porque no queremos entrar en los detalles técnicos de la topología diferencial.

Consideremos el toro T^2 que se presenta como la superficie de un anillo en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$. Intuitivamente diremos que T^2 posee dimensión 2; pero no existe un sistema global de dos coordenadas para T^2 : T^2 no es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En cambio, todo punto $a \in T^2$ posee una vecindad abierta U que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$ (fig. 122).

Si $\varphi : x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ es un homeomorfismo de $U \subset T^2$ en $\mathbb{R}^2$, entonces las coordenadas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ de $\varphi(x)$ en $\mathbb{R}^2$ pueden interpretarse como *coordenadas locales* de los puntos vecinos x de a. Estas coordenadas permiten considerar toda función $f : T^2 \to \mathbb{R}$ *localmente* como función de dos variables identificando $f|U$ con $f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U] \to \mathbb{R}$. Con respecto a estas coordenadas

tiene sentido decir que f es diferenciable en $a \in T^2$. De tal manera las coordenadas locales introducen una estructura diferencial sobre el espacio topológico T^2.

Sin embargo, persiste una dificultad: un punto $a \in T^2$ pertenece en general a dominios de diferentes sistemas de coordenadas locales $\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^2$ y $\psi : U_\psi \to \mathbb{R}^2$. Para que el concepto de diferenciabilidad no dependa de las coordenadas locales particulares debemos exigir que $\psi \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ \psi^{-1}$ sean biyecciones

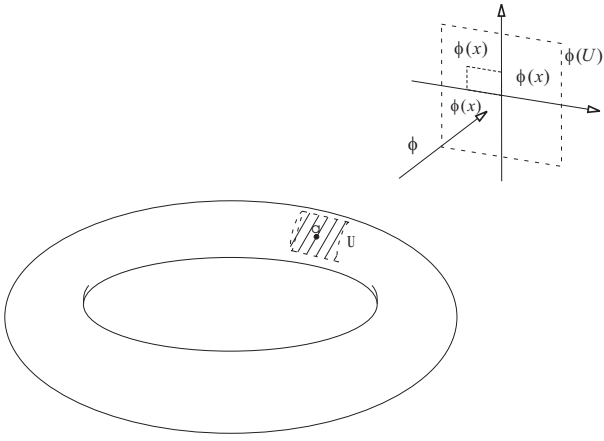


Figura 122.

diferenciables sobre sus dominios $\phi[U_\phi \cap U_\psi]$ y $\psi[U_\phi \cap U_\psi]$ respectivamente. En este caso $f \circ \psi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(a) \in \phi[U_\phi \cap U_\phi]$ si y sólo si $f \circ \psi^{-1}$ lo es en $\psi(a)$ (fig. 123).

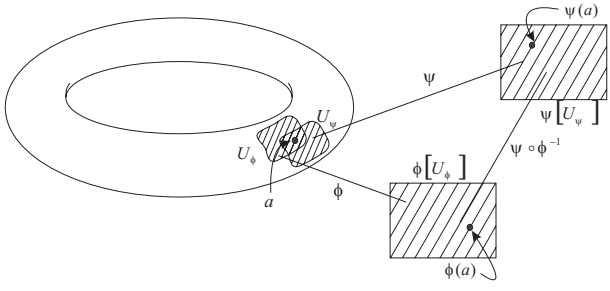


Figura 123.

Generalizaremos ahora estas ideas para conjuntos cualesquiera. Para abreviar, diremos que una función es de clase Ck $(k = 0, 1, ..., \infty)$ si f es continua $(k = 0)$, resp. k veces continuamente diferenciable $(k \in \mathbb{N})$, resp. infinitamente diferenciable $(k = \infty)$. Si f es biyectiva y si f, f^{-1} son de clase C^k, entonces se dice que f es un **difeomorfismo** de clase C^k.

7.7.1 *Definición (carta, cartas compatibles)*

Sea X un conjunto. Toda biyección φ de un subconjunto no vacío $U \subset X$ sobre un abierto en $\mathbb{R}^n$ se llama una **carta n-dimensional** de X.

Dos cartas n-dimensionales $\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : U_\psi \to \mathbb{R}^n$ se llaman C^k-compatibles $(k = 0, 1, 2, ..., \infty)$ si las aplicaciones mutuamente inversas $\psi \circ \phi^{-1} : \phi[U_\phi \cap U_\psi] \to \psi[U_\phi \cap U_\psi]$ y $\phi \circ \psi^{-1} : \psi[U_\phi \cap U_\psi] \to \phi[U_\phi \cap U_\psi]$ son de clase C^k.

7.7.2 *Ejemplo*

Sea $X = \mathbb{R}^n$. Todo homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre un abierto en $\mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathbb{R}^n$ que tiene todo el espacio como dominio. Dos homeomorfismos cualesquiera

$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : W \to \mathbb{R}^n (U, W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos) son cartas n-dimensionales C^0-compatibles sobre $X = \mathbb{R}^n$. Si φ, ψ son además difeomorfismos de clase C^k, entonces son cartas C^k-compatibles.

7.7.3 *Ejemplo*

Sea $X = E^n$ la esfera n-dimensional y $z \in E^n$. Entonces la proyección estereográfica ϕ_z de $E^n \backslash \{z\}$ sobre $\mathbb{R}^n$ es una carta n-dimensional de E^n con el dominio $U_{\phi z} = E^n \backslash \{z\}$. No es difícil comprobar que dos proyecciones estereográficas cualesquiera son cartas C^∞ -compatibles (fig. 124).

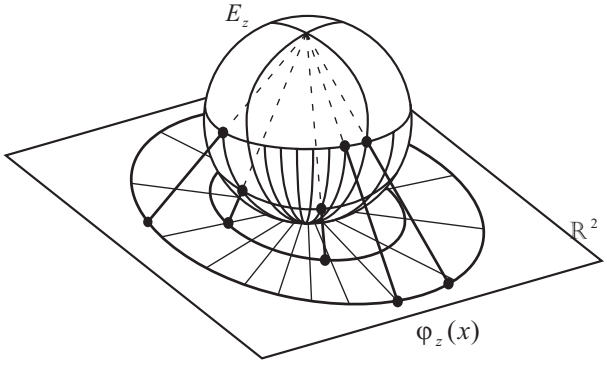


Figura 124. Proyección estereográfica

7.7.4 *Definición (atlas, atlas compatibles)*

Sea X un conjunto. Una colección Φ de cartas n-dimensionales C^k-compatibles $\phi : U_\phi \to \mathbb{R}^n$ de X se llama C^k-atlas sobre X, si los dominios $U_\phi (\phi \in \mathbf{\Phi})$ recubren X. Dos C^k-atlas Φ y Ψ se llaman compatibles (como C^k-atlas) si $\Phi \cup \Psi$ es un C^k-atlas sobre X.

Dejamos al lector como ejercicio probar que sobre X existe una única topología $\mathcal{X}$ tal que todos los U_ϕ $(\phi \in \mathbf{\Phi})$ son abiertos y toda carta $\phi \in \mathbf{\Phi}$ es un homeomorfismo de U_ϕ sobre $\phi[U_\phi] \subset \mathbb{R}^n$. Dos C^k-atlas compatibles $(k \geq 0)$ definen la misma topología sobre X.

7.7.5 *Ejemplo*

Sea $X = E^n$. La colección Φ de todas las cartas estereográficas φ_z $(z \in E^n)$ es un C^∞-atlas sobre E^n.

Pregunta: ¿Cómo puede definirse un C^∞-atlas sobre el espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R}) = E^n/\Delta_E$ (5.4.12) partiendo de las cartas estereográficas sobre E^n?.

Es inmediato que la compatibilidad es una relación de equivalencia entre los C^k-atlas sobre X. Toda clase de equivalencia $[\mathbf{\Phi}]$ de C^k-atlas sobre X se llama una estructura diferenciable de clase C^k sobre X.

Uno de los problemas fundamentales de la topología diferencial es saber sobre qué espacios topológicos X pueden introducir estructuras diferenciables de clase C^k $(k \geq 0)$ que sean compatibles con la topología dada. Puesto que de todas formas hay que presuponer que $(X, \mathcal{X})$ es localmente euclideano, este problema

de existencia se enuncia más específicamente de la manera siguiente: ¿Cuándo, una estructura diferencial de clase C^0 sobre X, contiene un C^k-atlas ($k \geq 1$)?.

Otra pregunta fundamental es el problema de unicidad. Más precisamente ¿cuándo existen sobre $(X, \mathcal{X})$ dos estructuras diferenciables de clase C^k: $[\Phi]$ y $[\Psi]$ ($k \geq 1$) compatibles con la topología dada, tales que no existe ningún difeomorfismo de clase C^k de $(X, [\mathbf{\Phi}])$ sobre $(X, [\mathbf{\Psi}])$. En otras palabras : ¿Existen diferentes estructuras diferenciables sobre X que definan la misma topología $\mathcal{X}$?.

7.7.6 *Definición (variedad diferenciable de clase C^k)*

Todo par $(X, [\mathbf{\Phi}])$, formado por un conjunto X y una clase de equivalencia de C^k-atlas sobre X, tal que la topología definida por $[\Phi]$ es de Hausdorff, se llama **variedad diferenciable de clase** C^k, o sencillamente, C^k**-variedad**.

Nota: A toda clase $[\Phi]$ de C^k-atlas equivalentes sobre X se asocia de manera única el mayor atlas $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ en $[\Phi]$ que es la unión de todos los C^k-atlas compatibles con Φ. $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ contiene a toda carta n-dimensional φ sobre X que sea C^k-compatible con todas las cartas de Φ. Algunos autores llaman variedad diferenciable de clase C^k al par $(X, \tilde{\mathbf{\Phi}})$ en lugar de al par $(X, [\mathbf{\Phi}])$. Las cartas φ que pertenecen a $(X, \tilde{\mathbf{\Phi}})$ se llaman cartas de $(X, [\mathbf{\Phi}])$.

Ya conocemos, al menos intuitivamente, algunos ejemplos concretos de variedades diferenciables : los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$, las esferas E^n, los toros T^n y los espacios proyectivos $P^n(\mathbb{R})$. Consideremos ahora algunos métodos elementales para construir nuevas variedades a partir de variedades dadas.

7.7.7 *Ejemplo (estructura diferenciable inducida)*

Sea $(X, [\mathbf{\Phi}])$ una C^k-variedad y U un subconjunto abierto de X. Entonces es fácil introducir sobre U una estructura diferenciable de clase C^k tomando como C^k-atlas

$$\Phi_U = \{\phi|(U_\phi \cap U)|\phi \in \Phi\} \tag{17}$$

Φ_U se llama **estructura diferenciable inducida** por $[\Phi]$ sobre U. La variedad $(U, [\Phi_U])$ tiene la misma dimensión que $(X, [\mathbf{\Phi}])$.

7.7.8 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X. Supongamos dada, sobre todo U_α, una estructura diferenciable n-dimensional $[\Phi_\alpha]$ de clase C^k tal que $[\Phi_\alpha]$ y $[\Phi_\beta]$ introducen la misma estructura diferenciable sobre $U_\alpha \cap U_\beta$, siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Entonces la unión de todos los atlas $(U_\alpha, [\Phi_\alpha])$ ($\alpha \in I$) define una estructura diferenciable n-dimensional $[\Phi]$ de clase C^k sobre X, que es compatible con la topología dada $\mathcal{X}$. Se dice que la variedad $(X, [\mathbf{\Phi}])$ se obtiene *pegando* las variedades $(U_\alpha, [\Phi_\alpha])$.

7.7.9 *Ejemplo (producto de variedades)*

Sean $(X, [\mathbf{\Phi}])$ y $(Y, [\Psi])$ dos C^k-variedades de dimensiones n y m respectiva-

mente. Entonces las cartas $(n+m)$-dimensionales

$$\phi \times \psi : U_\phi \times V_\psi \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (\phi \in \Phi, \psi \in \Psi)$$

forman evidentemente un C^k-atlas $(\phi \times \psi)$ sobre $(X, \mathcal{X})$. Si ϕ' y ψ' son dos C^k-atras compatibles con Φ y Ψ respectivamente, entonces $\Phi \times \Psi$ es C^k-compatible con Φ' y Ψ'. Resulta que los atlas producto $\Phi \times \Psi$ definen una estructura diferenciable $(n+m)$-dimensional de clase C^k sobre $X \times Y$.

Sean $(X, [\mathbf{\Phi}])$ y $(Y, [\Psi])$ dos variedades diferenciables de clase C^k. Una aplicación $f : F \to Y$ se llama C^k**-diferenciable** o un C^k-morfismo si para toda carta ψ de $(Y, [\Psi])$ existe una carta ϕ de $(X, [\mathbf{\Phi}])$ tal que $\phi[U_\phi] \subset U_\psi$ y $\psi \circ f \circ \pi^{-1}$ es una aplicación de clase C^k de $\phi[U_\phi]$ en $\psi[U_\psi]$.

Evidentemente la composición de dos aplicaciones C^k-diferenciables es C^k-diferenciable. Por lo tanto, las variedades diferenciables de clase C^k, junto con las aplicaciones C^k-diferenciables como morfismos forman una categoría $(k \geq 0)$.

La noción de isomorfía correspondiente nos permite precisar qué es la topología diferencial. Es la investigación de las propiedades de las variedades C^k-diferenciables que se mantienen invariantes con respecto a C^k-isomorfismos.

Las particiones de la unidad constituyen un instrumento particularmente apropiado para analizar las variedades diferenciables.

Veremos ahora cómo se utilizan para definir medidas globales sobre una variedad diferenciable a partir de medidas locales. Antes hay que precisar brevemente el concepto de medida.

Para una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la integral $\int f(x)dx$, en general no está definida. Pero sí está definida si f además tiene un soporte acotado $K \subset \mathbb{R}^n$.

K es cerrado y acotado; por lo tanto cumple el teorema de Heine-Borel: it Para toda cubierta abierta de K existe un número finito de abiertos que cubren K. En el próximo capítulo estudiaremos la clase de espacios topológicos, compactos, que cumplen esta misma propiedad. Aquí solamente utilizaremos su propiedad característica. Si denotamos por $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones reales continuas con soporte compacto sobre $\mathbb{R}^n$, entonces la aplicación

$$\lambda : f \mapsto \int f(x)dx \quad (f \in C_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

es una funcional lineal sobre $\mathfrak{C}_k(r^n, r)$. Además λ es positivo en el sentido de que $\int f d\lambda = \lambda(f) = \int f(x)dx \geq 0$ para toda función positiva $f \in \mathfrak{C}_k(r^n, r)$.

Sea ahora $(X, [\Phi])$ una variedad diferenciable de clase C^k. No existe una integral natural sobre X como la integral de Riemann o de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, que se derivan de un concepto natural de volumen de cubos $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Por eso se introduce una noción más general de integración, definida por una medida positiva. Se llama medida positiva a toda forma lineal positiva sobre el espacio vectorial $\mathfrak{C}_k(X) := \mathfrak{C}_k(X, \mathbb{R})$.

Una idea (demasiado) sencilla para construir medidas sobre X sería la siguiente: hallar una partición de X en subconjuntos U_α que puedan describirse por cartas particulares φ_α, integrar las restricciones $f|U_\alpha$ $(f \in \mathfrak{C}_k(X))$ por medio de los sistemas de coordenadas locales y sumar estas integrales. Sin embargo, en

general es muy difícil construir una partición de este tipo para X. Por lo tanto, se parte de una cubierta abierta cualquiera de X y se trata de sintetizar medidas locales sobre los U_α, mediante una partición de unidad subordinada a (U_α). Más precisamente.

7.7.10 *Teorema (de localización)*

Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta de $(X,[\Phi])$ y sea $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de medidas positivas μ_α sobre U_α tales que μ_α y μ_β coinciden sobre $\mathfrak{C}_k$ $(U_\alpha \cap U_\beta)(\alpha,\beta\in I)$. Entonces existe una única medida positiva μ sobre X que coincide, para todo $\alpha\in I$, con μ_α sobre $\mathfrak{C}_k(U_\alpha)$.

Demostración: Sea $f\in\mathfrak{C}_k(X)$ y sea K el soporte de f. Por definición de $\mathfrak{C}_k(X)$, existe una cubierta finita $(U_i)_{i\in J}$ de K. Veremos en el próximo capítulo que K, provisto de la topología inducida, es normal. Por lo tanto existe una partición de la unidad subordinada $(\varphi_i)_{i\in J}$ de $(U_i)_{i\in J}$ sobre K:
$\sum\limits_{i\in J}\phi_i(x)=1$ para todo $x\in K(\phi_i : X\to[0,1]$ continua).
El soporte de $f_{\phi i}$ está contenido en U_i y es compacto (como subconjunto cerrado de K). Entonces $f_{\phi i}\in\mathfrak{C}_k(U_i)$. Definamos :

$$\mu(f):=\sum_{i\in J}\mu_i(f_{\phi i}) \tag{18}$$

Si podemos demostrar que esta definición es independiente de la cubierta finita $(U_i)_{i\in J}$ y de la partición de unidad subordinada, entonces es claro que la función así definida (18) es lineal y positiva sobre $\mathfrak{C}_k(X)$ y coincide sobre $\mathfrak{C}_k(U_i)$ con μ_i.
Sea $(U_i)_{i\in J'}$ otra cubierta finita de K y $(\psi_i)_{i\in J'}$ una partición subordinada de la unidad sobre K. Entonces

$$f_{\phi i}=\sum_{i\in J'}(f_{\phi_i,\psi_j})$$

luego

$$\sum_{i\in J}\mu_i(f_{\phi i})=\sum_{i\in J}\sum_{j\in J'}\mu_i(f_{\phi_i,\psi_j}) \tag{19}$$

Similarmente

$$\sum_{j\in J'}\mu_j(f_{\psi j})=\sum_{j\in J'}\sum_{i\in J}\mu_j(f_{\phi_i,\psi_j}) \tag{20}$$

Puesto que $\mu_i(f_{\phi_i,\psi_j})=\mu_j(f_{\phi_i,\psi_j})$ por hipótesis, resulta

$$\sum_{i\in J}\mu_i(f_{\phi i})=\sum_{j\in J'}\mu_j(f_{\psi j})$$

Si $(X,[\Phi])$ es una variedad diferenciable de clase C^k que permite C^k-particiones de la unidad $(k\geq 1)$ (vease el ejercicio 7.6.12), entonces la familia de medidas locales (μ_i) se contruyen por medio de *densidades* de la manera siguiente :

Se considera la cubierta $(U_\phi)_{\phi\in\Phi}$ de X. Una **densidad** sobre $(X,[\Phi])$ es una familia $(g_\phi)_{\phi\in\Phi}$ de funciones integrables $g_\phi : \phi[U_\phi] \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$g_\phi = g_\phi(\phi\circ\psi^{-1})\,|\,det\,(\phi,\,\psi^{-1})\,|\text{ sobre }\psi[U_\phi\subset U_\psi] \tag{21}$$

para $\phi,\psi\in\Phi$. A esta densidad se asocia canónicamente la familia $(\mu_\phi)_{\phi\in\Phi}$ de medidas locales μ_ϕ sobre U_ϕ definidas por

$$\mu_\phi(h) = \int_{\phi[\cup_\phi]} ho\phi^{-1}(x)g_\phi(x)dx,\;\; h\in\mathfrak{C}_k(U) \tag{22}$$

La fórmula para el cambio de variable de integración es:

$$\int g(x)dx = \int g\circ f\,detf^{'}(x)dx$$

muestra entonces que μ_ϕ y μ_ψ así definidas sobre $\mathfrak{C}_k(U_\phi\cap U_\psi)$ cumple (21). Concluimos del el teorema anterior, que toda densidad $(g_\phi)_{\phi\in\Phi}$ determina de manera única una medida sobre $(X,[\Phi])$.

CAPÍTULO 8 **Compacidad**

Los subconjuntos acotados y cerrados C de $\mathbb{R}^n$ tienen dos propiedades principales, sobre las cuales se basan algunos de los teoremas más importantes del análisis:

1. Propiedad I: Toda cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de C contiene una subcubierta finita $(U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_r})$ de C.

2. Propiedad II: Toda sucesión (x_n) de puntos de C tiene un punto adherente en C.

Los pioneros del análisis funcional como ASCOLI [10] y VOLTERRA [164] reconocieron la importancia fundamental que tienen estas dos propiedades para la investigación de *conjuntos de funciones*. En efecto, el descubrimiento de que toda una serie de teoremas clásicos sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ puedan trasladarse a conjuntos de funciones que verifican estas dos propiedades, fue uno de los motivos centrales para el desarrollo del Análisis Funcional.

Teniendo en cuenta la gran utilidad de las propiedades I y II en Análisis y en Análisis Funcional, es natural que los topólogos hayan tenido un interés vivo en estudiar la clase de los espacios topológicos que verifican estas propiedades. Estos espacios se llaman compactos.

En las primeras tres secciones se expone la teoría de los espacios compactos. La §8.1 presenta las propiedades básicas de esta clase de espacios. La §8.2 analiza las funciones continuas sobre espacios compactos y generaliza toda una serie de teoremas conocidos del Análisis. En la §8.3 se demuestra el célebre teorema de Tikhonov y se discuten sus consecuencias. Este teorema es fundamental para las aplicaciones en Análisis Funcional.

Históricamente, el desarrollo de la noción 'compacto' se complicó por la equivalencia de criterios en los espacios $\mathbb{R}^n$, que no son equivalentes en un espacio topológico cualquiera. La §8.4 trata las variaciones correspondientes del concepto

de compacidad: la *compacidad numerable* y la *sucesional*, dejando al lector casi todas las demostraciones. Aparte del estudio de los nuevos conceptos, esta sección tiene la función didáctica de consolidar y precisar los conocimientos y habilidades adquiridas hasta entonces en el manejo de la compacidad.

Los espacios clásicos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ no son compactos, pero cada uno de sus puntos posee un sistema fundamental de vecindades compactas. La §8.5 se dedica al estudio de los espacios, llamados *localmente* compactos.

La §8.6 muestra cómo amplias clases de espacios topológicos pueden extenderse por diversos métodos a espacios compactos y ofrece una exposición sistemática de tales 'compactificaciones', especialmente para los espacios localmente compactos.

Concluimos el capítulo con una *sección* de aplicaciones (§ 8.7) que ilustran la importancia de la teoría desarrollada en las secciones anteriores, con la deducción de una serie de teoremas clásicos de diversas áreas mediante argumentos de compacidad.

§ 8.1 Espacios y subconjuntos compactos

Para espacios topológicos en general las dos propiedades I y II, mencionadas en la introducción, son equivalentes *si en II se sustituye sucesión por filtro.* Más detalladamente podemos demostrar:

8.1.1 *Teorema (criterios de compacidad)*

En todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ las siguientes propiedades son equivalentes:

(C^1) Toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita.
(C^2) Toda familia de cerrados de X de intersección vacía contiene una subfamilia finita, también con intersección vacía.
(C^3) Toda familia de cerrados de X en la que cualquier subfamilia finita es de intersección no vacía, es a su vez de intersección no vacía.
(C^4) Todo filtro sobre X posee un punto adherente.
(C^5) Para todo filtro sobre X hay uno más fino convergente.
(C^6) Todo ultrafiltro es convergente.

Para entender mejor el teorema en su conjunto notemos que los tres primeros enunciados que hablan de *familias* de subconjuntos, forman un grupo de propiedades correspondientes a (I). De manera análoga los tres últimos enunciados que hablan de *filtros*, forman un grupo de propiedades correspondientes a (II).

Demostración: $(C^1) \iff (C^2)$: (C^1) y (C^2) son enunciados duales y por lo tanto equivalentes. Si $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta de X, entonces $(\complement U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia de cerrados de intersección vacía e inversamente: si $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia de cerrados en $(X, \mathcal{X})$ de intersección vacía, entonces $(\complement C_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia de abiertos que recubre X.

$(C^2) \iff (C^3)$: (C^3) es simplemente la versión negativa de (C^2).

$(C^4) \iff (C^5)$ se concluye inmediatamente de la proposición 3.6.8.

$(C^5) \Longleftrightarrow (C^6)$ es una conclusión inmediata de 3.5.18 y 3.6.9.
Queda por probar la equivalencia entre los dos grupos de propiedades

$$(C^1), (C^2), (C^3) \text{ y } (C^4), (C^5), (C^6).$$

$(C^3) \Longrightarrow (C^4)$. Debemos probar que todo filtro $\mathcal{F}$ tiene puntos adherentes, o sea, que

$$\cap\{\overline{F} | F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing \tag{1}$$

Pero esto es la intersección de una familia de cerrados. De acuerdo con la axiomática de filtro, toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía, en particular, se cumple para la familia de los cerrados $\overline{F} \supset F \in \mathcal{F}$. Así, aplicando (C^3) se tiene (1).

$(C^4) \Longrightarrow (C^3)$. Sea $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de cerrados tal que toda subfamilia finita sea de intersección no vacía. $\mathcal{U} = \{C_\alpha | \alpha \in I\}$ es, entonces, una subbase de filtro. Sea $\pounds(\mathcal{U})$ su filtro asociado. $\pounds(\mathcal{U})$ tiene, por hipótesis, un punto adherente, entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in I} C_\alpha \supset \cap\{\bar{F} | F \in F\} \neq \varnothing$, pues trivialmente todo $C_\alpha = \overline{C}_\alpha \in \pounds(\mathcal{U})$.■

Nota: Es usual decir que una familia posee la *propiedad de intersección finita*, para expresar que toda subfamilia finita tiene intersección no vacía. Con tal convenio, (C^3) se escribe: *toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

8.1.2 *Definición (espacio compacto, subconjunto compacto)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se lama **compacto** cuando cumple las propiedades equivalentes $(C^1) - (C^6)$. Decimos que un subconjunto C de $(X, \mathcal{X})$ es compacto si lo es como subespacio de $(X, \mathcal{X})$.

Con toda seguridad el lector acaba de leer una de las definiciones más importantes de toda la topología general.

Nota: Al referirnos a un T_i-espacio compacto, diremos un T_i-compacto $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Bourbaki [29] y otros emplean la palabra *casi compacto* en lugar de *compacto* para designar este concepto, y reservan *compacto* para los espacios que según nuestro vocabulario son compactos de Hausdorff o sea T_2-compactos, por ser éstos los más frecuentes en las aplicaciones. Cuando el lector consulte la literatura topológica debe cerciorarse en cada caso de la nomenclatura empleada por el autor.

Es conveniente tener presente las caracterizaciones $(C^1) - (C^6)$ de los compactos y usar la más conveniente. Por la misma razón es conveniente reescribir la definición de *subconjunto compacto.* De acuerdo con el concepto de subespacio topológico, C en $(X, \mathcal{X})$ es compacto si y sólo si para toda familia de abiertos $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $(X, \mathcal{X})$ tal que

$$C \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \ \ (\Longleftrightarrow C = \bigcup_{\alpha \in I} (C \cap A_\alpha))$$

existe una subfamilia finita $(A_{\alpha_k})_{1\leq k\leq n}$ para la cual también

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{\alpha_k} \quad (\Longleftrightarrow C = \bigcup_{k=1}^{n} (C \cap A_{\alpha_k}))$$

Esta forma es más manejable y por lo tanto más usada.

Pregunta: ¿De qué manera se reescriben $(C^2) - (C^4)$?

Obsérvese que la definición de subconjunto compacto se establece de tal modo que resulta invariante para subespacios, es decir, si $(X, \mathcal{X})$ es un subespacio topológico de $(Y, \mathcal{Y})$, se tiene que C es un subconjunto compacto de $(X, \mathcal{X})$ si y sólo si $C \subset X$ es un subconjunto compacto de $(Y, \mathcal{Y})$, lo que es claro pues $(C, \mathcal{Y}_C) = (C, \mathcal{X}_C)$ (5.1.1).

8.1.3 *Ejemplo*

Todo espacio indiscreto es compacto. Más generalmente, todo espacio que tiene sólo un número finito de abiertos es compacto. En particular, todo espacio finito es compacto.

8.1.4 *Ejemplo*

Un espacio discreto es compacto si y sólo si es finito.

8.1.5 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sea (x_n) una sucesión en $(X, \mathcal{X})$ que converge a un punto $x \in X$. Entonces el subconjunto $C = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto en $(X, \mathcal{X})$; pues, si (U_α) es una cubierta abierta de C y si $x \in U_\beta$ para un cierto $\beta \in I$, entonces casi todos los x_n están contenidos en U_β y los puntos x_n que se quedan fuera pueden cubrirse por un número finito de U_α.

8.1.6 *Ejemplo*

La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues al cubierta abierta $\{(-n, n) | n \in \mathbb{N}^*\}$ no contiene una subcubierta finita de $\mathbb{R}$. Sin embargo, como ya sabemos, todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es compacto. Indicaremos brevemente la demostración utilizando el criterio (C^1): Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ y sea s el supremo de todos los números $r \in [a, b]$ tales que los subintervalos $[a, r]$ pueden cubrirse por un número finito de los $U_\alpha (\alpha \in I)$. Obviamente s está contenido en algún $U_\alpha (\alpha \in I)$ y $s > a$. Puesto que U_α es abierto en $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < s - a$ tal que $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset U_\alpha$. El subintervalo $[a, s - \varepsilon]$ puede cubrirse por una subfamilia $(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$ de abiertos. Por lo tanto la subfamilia $(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}, U_\alpha)$ de $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ recubre $[a, s + \varepsilon]$. Esto significa una contradicción si $s < b$. Concluimos que $s = b$ y que $[a, b]$ puede cubrirse por un número finito de $U_\alpha (\alpha \in I)$.

Pregunta: ¿Si proveemos a $\mathbb{R}$ de la topología $\mathcal{X}_I = \{(-\infty, r) | r \in \mathbb{R}\}$ de la

continuidad superior, ¿cuáles son los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_I)$?

8.1.7 *Ejemplo*

Sea (X, d) un espacio seudométrico compacto. Para todo real $\varepsilon > 0$, las bolas abiertas de radio ε recubren X. Por lo tanto, existe un número finito de centros $x_i \in X (i = 1, \ldots, n)$ tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \tag{2}$$

Esto significa que todo punto $x \in X$ tiene una distancia menor que ε a al menos uno de los puntos x_i:

$$d(x, \{x_1, \ldots, x_n\}) < \varepsilon \quad (\forall x \in X) \tag{3}$$

De manera intuitiva podemos decir: *el compacto X puede aproximarse tanto como se quiera por un subconjunto finito.* Un subconjunto finito F de un espacio seudométrico X se llama una ε-**red** si $d(x, F) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ $(\varepsilon > 0)$ (fig. 125).

Luego hemos comprobado que un espacio seudométrico compacto posee una ε-red para todo $\varepsilon > 0$. (fig. 125)

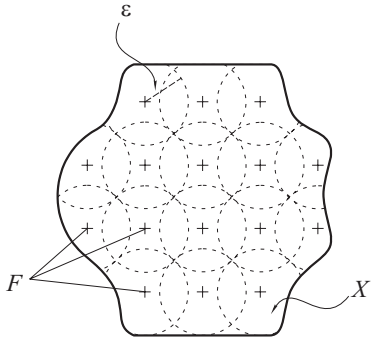


Figura 125. ε-red sobre X

Como consecuencia de la inclusión (2) notamos además que *todo espacio seudométrico compacto (resp. todo subconjunto compacto de un espacio seudométrico) necesariamente es acotado.*

Si queremos verificar el criterio (C^1) podemos limitarnos a cubiertas formadas por los abiertos de una *subbase.* Esto facilita en muchos casos la verificación de la compacidad. Indicaremos brevemente la demostración los detalles al lector.

8.1.8 *Teorema (de Alexander)*

Sea $\flat$ una subbase del espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Entonces $(X, \mathcal{X})$ es compacto si toda cubierta de X por elementos de $\flat$ contiene una subcubierta finita.

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que $(X, \mathcal{X})$ no es compacto. Entonces existe un ultrafiltro U sobre X que no es convergente. Para todo

$x \in X$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U_x \notin$ U. Un número finito de estos abiertos recubren X. Pero esto nos lleva a una contradicción: U necesariamente contiene a $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ como elemento mientras que no contiene ninguno de los U_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$.■

Se deja al lector como ejercicio la elaboración detallada de la demostración.

En lo siguiente estudiaremos algunas propiedades elementales de los *subconjuntos* compactos.

8.1.9 *Ejemplo*

Si se saca del compacto $[0, 1]$ el punto 1 se obtiene un subespacio que no es compacto; la sucesión $(1 - 1/n)$ no tiene un punto de adherencia en $[0, 1)$.

Este ejemplo ya nos muestra que la compacidad no se hereda a subespacios cualesquiera. Sin embargo, tenemos:

8.1.10 *Proposición*

En un espacio compacto todo cerrado es compacto.

Demostración: Sea C un subconjunto cerrado de un espacio compacto $(X, \mathcal{X})$. Utilizaremos el criterio (C^4). Sea $\mathcal{F}$ un filtro en C. Por ser $(X, \mathcal{X})$ compacto $\mathcal{F}$ tiene un punto adherente x en X. Como en particular $C \in \mathcal{F}$, por ser C cerrado, el punto x pertenece a C. Por lo tanto C cumple el criterio (C^4).■

8.1.11 *Ejemplo*

Todo subconjunto acotado y cerrado C en $\mathbb{R}$ es compacto, puesto que es un subconjunto cerrado del intervalo compacto $[\inf C,\ \sup C]$. En particular, el *conjunto de Cantor* (6.2.11) es compacto.

$\rightsquigarrow$ Sin hipótesis adicional la proposición 8.1.10 no puede invertirse. Como ya se ve para el caso de un subconjunto propio de un espacio indiscreto, en un espacio topológico *cualquiera* un subconjunto compacto no es necesariamente cerrado. Incluso existen espacios topológicos que no contienen ningún subconjunto no vacío que sea a la vez compacto y cerrado.

8.1.12 *Ejemplo*

Proveamos a $\mathbb{R}$ de la topología de la continuidad superior $\mathcal{X}_{\mathcal{I}} = \{(-\infty, r) | r \in \mathbb{R}\}$ que hemos considerado en una pregunta anterior de esta sección. Los únicos cerrados no vacíos en $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_I)$ son los intervalos del tipo $[r, \infty]$. Pero ninguno de ellos es compacto. La cubierta abierta $((-\infty, n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $[r, \infty)$ no contiene una subcubierta finita.

A pesar de eso sabemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_I)$ tiene subconjuntos compactos no vacíos

(por ejemplo los finitos), que no son cerrados.

Reexaminaremos la argumentación del ejemplo 8.1.9 para ver qué hipótesis adicionales necesitamos para invertir la proposición 8.1.10. Cuando decíamos que la sucesión $(1 - 1/n)$ no tiene punto de adherencia en $[0, 1)$ hemos utilizado el resultado de que *en un espacio de Hausdorff* siempre el límite de un filtro es su *único* punto de adherencia. Si queremos generalizar esta argumentación debemos suponer que el espacio de base es de Hausdorff. En efecto, obtenemos el siguiente corolario.

8.1.13 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio compacto y $C \subset X$. Entonces C es compacto si y sólo si C es cerrado.

Demostración: Ejercicio. ■

8.1.14 *Ejemplo*

Por medio de los resultados obtenidos ahora ya podemos caracterizar los compactos en $\mathbb{R}$ y reestablecer un teorema conocido del análisis. Por el ejemplo 8.1.11, todo subconjunto acotado y cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto. Inversamente, todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ tiene que ser acotado, por la argumentación del ejemplo 8.1.7, y cerrado por la prop. 8.1.10. Concluimos que para los subespacios $C \subset \mathbb{R}$ se cumple

$$C \text{ compacto} \Longleftrightarrow C \text{ cerrado y acotado} \tag{4}$$

De 8.1.10 y 8.1.13 se deduce que *en un T_2-espacio la intersección de una familia cualquiera de compactos es compacta.* Aquí se ve una analogía formal con la propiedad básica $(C3)$ de los cerrados. El análogo de la propiedad $(C2)$ se cumple también para los compactos (en cualquier espacio topológico).

8.1.15 *Proposición*

En todo espacio topológico la unión finita de subconjuntos compactos es compacta.

Demostración: Ejercicio. ■

En resumen, en todo T_2-espacio, la colección de los subconjuntos compactos es estable para la intersección (finita o infinita) y la unión finita.

Consideremos ahora una propiedad de las familias de compactos que no se cumple para familias de cerrados en general.

8.1.16 Proposición

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Hausdorff y sea $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos compactos no vacíos que es filtrante con respecto a la inclusión $\supset$. Entonces se cumple para la intersección $C = \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ que:

i) C es un compacto no vacío.

ii) Si U es una vecindad de C entonces existe $\alpha \in I$ tal que

$$C_\alpha \subset U$$

Demostración:

i) Tomemos un conjunto cualquiera C_{α_0} de la familia y consideremos las trazas de los C_α sobre C_{α_0}. Toda subfamilia finita $(C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_0}, \ldots, C_{\alpha_n} \cap C_{\alpha_0})$ tiene una intersección no vacía porque $\bigcap_{k=0}^{n} C_{\alpha_k}$ contiene a cierto C_α no vacío por hipótesis. Por (C^3) tenemos que $C = \bigcap_{\alpha \in I} (C_\alpha \cap C_{\alpha_0}) \neq \varnothing$.

ii) De $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subset U$ deducimos que los abiertos $\complement C_\alpha$ $(\alpha \in I)$ recubren $\complement U$, por lo tanto también al compacto $C_{\alpha_0} \backslash U \subset \complement U$. Por (C^1) existe una subfamilia finita $(\complement C_{\alpha_1}, \ldots\ldots, \complement C_{\alpha_s})$ que recubre $C_{\alpha_0} \backslash U$. Esto significa que:

$$\bigcap_{k=0}^{s} C_{\alpha_k} \subset U$$

Puesto que (C_α) es filtrante con respecto a $\supset$, existe $\alpha \in I$ tal que $C_\alpha \subset \bigcap_{k=0}^{s} C_{\alpha_k} \subset U$. ■

Para destacar que estas dos propiedades están íntimamente relacionadas con la compacidad, mostraremos con un contraejemplo que no se cumplen para cerrados en general.

8.1.17 *Ejemplo*

i) Consideremos en $\mathbb{R}$ los intervalos cerrados $[n, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Estos intervalos forman una familia monótona, po lo tanto filtrante, con respecto a la inclusión $\supset$. Pero estos conjuntos no compactos 'escapan al infinito', su intersección es vacía.

ii) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los conos cerrados (fig. 126).

$$C_n = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ |x_2| \leq (1/n)|x_1|\},\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

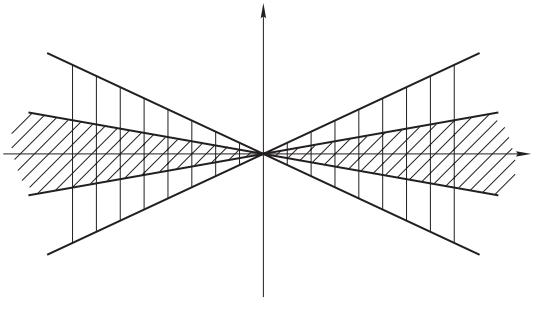


Figura 126.

Estos conos forman una familia monótona, por lo tanto filtrante con respecto a $\supset$. Su intersección es la recta real C= $\{(x_1, 0)|x_1 \in \mathbb{R}\}$. Sin embargo, ninguna vecindad de C del tipo $\mathbb{R} \times (-\rho, \rho)$ $(\rho > 0)$ contiene algún C_n $(n \in \mathbb{N})$.

Analicemos ahora la relación entre compacidad y los axiomas de separación. Con respecto a la separación, *los subconjuntos compactos se 'comportan como los puntos'*. Más precisamente:

8.1.18 *Proposición*

Sean B y C dos subconjuntos compactos disjuntos en un espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{X})$. Entonces existen dos vecindades disjuntas de B y C respectivamente.

Demostración: Primero probaremos que B puede separarse de todo punto $y \notin B$ por dos vecindades disjuntas. En efecto, para todo $x \in B$, existen dos vecindades abiertas disjuntas U_x y V_x de x y de y respectivamente. Tenemos que $B \subset \cup_{x \in B} U_x$. Entonces existe una subfamilia finita (U_{x_i}) tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Si ponemos $U_y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y $V_y = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ entonces obtenemos dos vecindades abiertas disjuntas $U_y \in B(B)$ y $V_y \in B(y)$. En el segundo paso volvemos a aplicar el mismo razonamiento, pero esta vez al compacto C. Por el primer paso, para todo $y \in C$ existen dos vecindades abiertas disjuntas $U_y \in \mathcal{V}(B)$ y $V_y \in \mathcal{V}(y)$. Por la compacidad de C un número finito de las vecindades V_y recubren C:

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_{y_i}$$

Definiendo $U = \bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}$ y $V = \cup_{i=1}^{r} V_{y_i}$, obtenemos dos vecindades abiertas disjuntas de B y de C respactivamente. ■

8.1.19 *Corolario*

Todo T_2-espacio compacto $(X, \mathcal{X})$ es normal.

Demostración: Por 7.1.10, todo subconjunto cerrado de $(X, \mathcal{X})$ es compacto. ■

Las dos proposiciones 8.1.8 y 8.1.10 manifiestan que en cierta forma se complementan la compacidad y el axioma de Hausdorff. En cierto sentido, la compacidad es la contrapartida del axioma (T_2). En un T_2-espacio, si un filtro converge, tiene un único punto de adherencia. Por otro lado:

8.1.20 *Proposición*

En un espacio compacto todo filtro que tiene un único punto de adherencia

converge a este punto.

Demostración: Ejercicio. ■

Para terminar esta sección sólo nos queda introducir una noción técnica que no presenta ninguna dificultad conceptual: los *subconjuntos relativamente compactos.*

En $\mathbb{R}$ la cerradura de un acotado es compacto. *Toda sucesión acotada en* $\mathbb{R}$ *tiene un punto de adherencia en* $\mathbb{R}$. Esta propiedad de los acotados en $\mathbb{R}$ puede generalizarse a espacios topológicos cualesquiera.

8.1.21 *Definición (subconjunto relativamente compacto)*

Un subconjunto C en un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **relativamente compacto** si su cerradura en $(X, \mathcal{X})$ es compacta.

Nota: Esta noción depende esencialmente de la topología del subespacio, no sólo de la topología inducida: $(0, 1)$ es relativamente compacto en $[0, 1]$ pero no en $[0, 1)$. Por lo tanto es necesario expresar siempre claramente cuál es el espacio respecto al cual se toma la cerradura.

En un espacio compacto todo subconjunto es relativamente compacto (8.1.8).

$\rightsquigarrow$*En un espacio de Hausdorff*, todo compacto es cerrado y por lo tanto es relativamente compacto. Sin embargo, en un espacio que no es de Hausdorff, *un compacto no es necesariamente relativamente compacto.* Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ provisto de la topología de la continuidad superior, todo subconjunto $\{x\}$ es compacto, mientras que su cerradura $\overline{\{x\}} = [x, \infty)$ no es compacta.

La analogía *formal* entre los subconjutos acotados de un espacio métrico y los subconjuntos relativamente compactos en un espacio topológico general, puede expresarse diciendo que ambos forman una bornología. Este concepto ha sido introducido para tratar axiomáticamente los acotados prescindiendo de una métrica. Nosotros no vamos a estudiarlo, sólo vamos a dar su definición.

8.1.22 *Definición (bornología)*

Sea X un conjunto, $B \subset \mathcal{P}(X)$. Decimos que B es una **bornología** sobre X cuando cumple:

(B^1) La unión finita de elementos de B está en B.
(B^2) Todo subconjunto de un elemento de B está en B.
(B^3) Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ está en B.

Llamamos **espacio bornológico** al par (X, B).
Llamamos *acotados* de (X, B) a los elementos de B.

Evidentemente los subconjuntos acotados de un espacio métrico forman una bornología. Lo mismo ocurre con los subconjuntos relativamente compactos, en

un T_1-espacio.

8.1.23 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_1-espacio. Entonces los subconjuntos relativamente compactos de $(X, \mathcal{X})$ forman una bornología.

Demostración: (B^1) y (B^2) son conclusiones directas de las proposiciones 8.1.10 y 8.1.15. El axioma (T_1) implica (B^3).

Finalmente generalizaremos el teorema clásico que dice que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene un punto de adherencia.

8.1.24 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Si $\mathcal{F}$ contiene un conjunto relativamente compacto C (como elemento) entonces $\mathcal{F}$ posee un punto de adherencia en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: La traza $F_{\overline{C}} = \{\overline{C} \cap F | F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro sobre $\overline{C}$, po lo tanto tiene un punto de adherencia x_0 en $\overline{C} \subset X$. x_0 es también punto adherente del filtro $\mathcal{F}$.■

§ 8.2 **Compactos y aplicaciones continuas**

Es inmediato, del criterio (C^1), que la compacidad es una propiedad topológica, o sea, es una propiedad invariante mediante homeomorfismos. Es más: la compacidad es invariante bajo aplicaciones continuas.

8.2.1 *Teorema*

Toda imagen continua de un espacio compacto es compacto.

Demostración: Supongamos que $(X, \mathcal{X})$ es un espacio compacto y que f una aplicación continua de $(X, \mathcal{X})$ en un espacio topológico $(Y, \mathcal{Y})$. Verificaremos que $f[X] \subset Y$ cumple el criterio (C^1). Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta de $f[X]$ en $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces $(f^{-1}[U_\alpha]_{\alpha \in I})$ es una cubierta abierta del compacto X. Por (C^1) existe una subcubierta finita

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{r} f^{-1}[U_{\alpha_k}] = f^{-1}[\bigcup_{k=1}^{r} U_{\alpha_k}],$$

de lo que podemos concluir

$$f[X] \subset \bigcup_{k=1}^{r} U_{\alpha_k}.$$

Por lo tanto$f[X]$ cumple el criterio (C^1).■

$\rightsquigarrow$*Nota*: ¡Atención! La preimagen de un compacto por una aplicación continua en general no es compacta, como muestra aplicación constante definida sobre un

espacio no compacto.

8.2.2 *Ejemplo*

La recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es compacta porque es homeomorfa al intervalo compacto $[-1, 1]$.

8.2.3 *Ejemplo*

El toro $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es compacto puesto que es la imagen continua del compacto $[0, 1]$ bajo la sobreyección canónica $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Además de ser un medio frecuentemente utilizado para probar la compacidad de un espacio dado, el teorema anterior es fundamental por los numerosos corolarios de gran importancia que tiene, tanto en la teoría como en las aplicaciones.

8.2.4 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $\mathbb{R}$ una relación de equivalencia sobre X. Si X es compacto, entonces X/R lo es también.

8.2.5 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto, $(Y, \mathcal{Y})$ un T_2-espacio y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces:

i) f es una aplicación cerrada.

ii) Si f es sobreyectiva, entonces $\mathcal{Y}$ es la topología de identificación definida por f sobre Y.

iii) Si f es inyectiva, entonces f es una inmersión: $f[X]$ es homeomorfo a X.

Demostración: i) Sea C cerrado en $(X, \mathcal{X})$. Por 8.1.8, C es compacto. Por tanto $f[C]$ también lo es. Como $(Y, \mathcal{Y})$ es de Hausdorff, $f[C]$ es cerrado.

ii) se deduce de i) por 5.3.16.

iii) si consideramos f como aplicación de X sobre $f[X]$, entonces es una biyección continua y cerrada, por lo tanto es un homeomorfismo. ■

Veremos a continuación con un contraejemplo que el inciso iii) no se generaliza a aplicaciones continuas sobre espacios topológicos cualesquiera.

8.2.6 *Ejemplo*

La función $f : t \mapsto f(t) = e^{i2\pi t}$ del intervalo $[0, 1)$ en $\mathbb{C}$ es una biyección continua de $[0, 1)$ sobre el círculo unitario T en $\mathbb{C}$ (el toro). Pero f no es un

homeomorfismo: T no puede ser homeomorfo a $[0,1)$ pues es compacto mientras que $[0,1)$ no lo es.

Daremos ahora dos ejemplos que muestran aplicaciones del corolario anterior en el análisis.

8.2.7 *Ejemplo*

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Del análisis sabemos que una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona (creciente o decreciente). $I^{'} := f[I] \subset \mathbb{R}$ es conexo (6.1.17) y compacto (8.2.1), por lo tanto es un intervalo cerrado y acotado (8.1.14). Aplicando el corolario anterior, obtenemos el resultado siguiente: *Si $f : I \to E$ es una función continua estrictamente monótona sobre un intervalo acotado y cerrado, entonces su imágen $I^{'} = f[I]$ es un intervalo acotado y cerrado y la función inversa $f^{-1} : I^{'} \to I$ es también continua.* Este resultado se utiliza en el análisis por ejemplo para demostrar (por pedazos) la continuidad de la función arcsen a partir de la continuidad de la función sen.

8.2.8 *Ejemplo*

La existencia de las curvas de Peano muestra que el intervalo $[0,1]$ puede aplicarse continuamente sobre el rectángulo $[0,1]^2$. ¿Es posible hacer eso mediante una aplicación inyectiva? Un subconjunto C$\subset \mathbb{R}^2$ se llama *curva de Jordan* si es imagen de $[0,1]$ bajo una *inyección* continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Por el corolario anterior, la inyección f es un homeomorfismo de $[0,1]$ sobre la curva de Jordan. Concluimos que no existe una curva de Jordan que llene todo el rectángulo $[0,1]^2$ puesto que éste no es homeomorfo a $[0,1]$ (compárese con 5.1.16). Si aplicamos el corolario anterior a la biyección identidad sobre un espacio provisto de varias topologías, obtenemos el siguiente:

8.2.9 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio compacto. Entonces se tiene que

i) $\mathcal{X}$ es minimal en el conjunto parcialmente ordenado de las T_2-topologías sobre X o sea: si $\mathcal{X}^{'}$ es una topología de Hausdorff más gruesa que $\mathcal{X}$ entonces $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{'}$

ii) $\mathcal{X}$ es maximal en el conjunto parcialmente ordenado de las topologías compactas sobre X, o sea: si $\mathcal{X}^{'}$ es una topología compacta más fina que $\mathcal{X}$ entonces $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{'}$.

Demostración: i) Si $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff y $\mathcal{X}^{'} \subset \mathcal{X}$ entonces $1_X : (X, \mathcal{X}) \to (X, \mathcal{X}^{'})$ es continua sobre el compacto $(X, \mathcal{X})$, por lo tanto es un homeomorfismo.

ii) Se demuestra de manera análoga. ■

Esto es un resultado realmente inesperado y muy importante en las aplicaciones para probar la identidad entre dos topologías.

Consideremos ahora especialmente funciones continuas *con valores reales* sobre un compacto. Obtenemos el resultado fundamental siguiente que es el prototipo de los numerosos teoremas de existencia, que se prueban utilizando un 'argumento de compacidad.

8.2.10 *Corolario (teorema del máximo y del mínimo)*

Una aplicación real continua sobre un compacto alcanza su mínimo y su máximo.

Demostración: La imágen de una aplicación es compacta en $\mathbb{R}$, por lo tanto es cerrada y acotada; por lo que contiene sus extremos. ■

En la práctica a veces es importante tener un teorema similar para funciones reales semicontinuas.

8.2.11 *Teorema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto. Entonces toda función numérica $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinua superiormente (resp. inferiormente) alcanza su máximo (resp. mínimo) sobre X.

Demostración: Sea f semicontinua superiormente y sea $s = \sup f[X] \in \overline{\mathbb{R}}$. Definamos $S_n := [s - 1/n, \infty)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*, f^{-1}[S_n]$ es cerrado en $(X, \mathcal{X})$ por ser f semicontinua superiormente. Entonces $(f^{-1}[S_n])$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos en $(X, \mathcal{X})$. Por 8.1.16, la intersección $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[S_n]$ no es vacía. Todo $x \in C$ es un punto máximo de f sobre X. La demostración para las funciones semicontinuas inferiormente es análoga. ■

Como aplicación del corolario anterior analizaremos la *separación de subconjuntos compactos en un espacio métrico.*

8.2.12 *Ejemplo*

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Recordamos que la distancia de un punto $x \in X$ a un subconjunto C está definida por

$$d(x, C) := \inf\{d(x, z) | z \in C\}$$

Veremos ahora que si C es un compacto existe un punto y en C 'más cerca' de x o sea tal que (fig. 127)

$$d(x, y) = d(x, C) = d$$

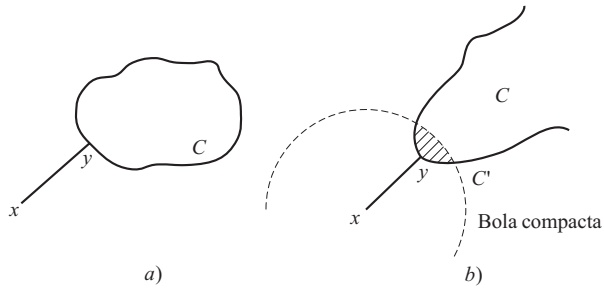


Figura 127. *a*) Distancia de un punto a un compacto y *b*) a un cerrado

En efecto, la función real $z \mapsto d(x,z)$ es continua sobre C (1.6.2), entonces alcanza su mínimo d en un punto $y \in C$. El mismo razonamiento puede aplicarse a *cerrados cualesquiera* C *en* (X,d) *si todas las bolas cerradas de* (X,d) *son compactas.* (Como sabemos, y probaremos en la sección siguiente, esto ocurre por ejemplo en los espacios euclideanos de dimensión finita.) Sea x un punto, C un cerrado en tal espacio y $d = d(x,C)$. $C' := C \cap B'(x, d+1)$ es compacto según hipótesis, luego existe un $y \in C'$ tal que $d(x,y) = d(x,C')$. El punto y también un punto más cerca de x en todo C; pues para todo $z \in C \backslash C'$ se cumple $d(x,z) \geq d+1 > d(x,y)$.

ii) Sabemos que existen cerrados disjuntos K y C en $\mathbb{R}^2$ tales que $d(K,C) = 0$. Esto implica que en $K \times C$ *no* existe un par de puntos de distancia minimal tales que $d(x,y) = d(K,C)$.

Probaremos ahora que dos compactos disjuntos cualesquiera K y C en (X,d) siempre tienen una distancia *estrictamente positiva*, y contienen un par de puntos de distancia minimal.

La función real $x \mapsto d(x,C)$ es continua sobre el compacto K, luego alcanza su mínimo $d = \text{mín}\{d(x,C) | x \in K\} = d(K,C)$ en un punto x_0. Puesto que $x_0 \notin C$ y C es cerrado tenemos que $d = d(x_0,C) > 0$. Por i), existe $y_0 \in C$ tal que

$$d(x_0, y_0) = d(K,C) > 0 \tag{5}$$

Si todas las bolas cerradas de (X,d) son compactas, el mismo resultado puede probarse para el caso más general en que K es compacto y C cerrado. Esta situación ocurre en las aplicaciones, a veces en la forma siguiente: $K \subset X$ es un compacto y U es una vecindad abierta de K. Entonces necesariamente $d = d(K, \complement U) > 0$ (siempre que las bolas cerradas de (X,d) sean compactas) (fig. 128).

Concluimos esta sección con un ejercicio cuyo enunciado principal ya hemos citado, sin demotración, en el capítulo 1: *Todas las normas posibles sobre un espacio vectorial de dimensión finita* E *son equivalentes; en particular, todas definen la misma topología sobre* E.

8.2.13 *Ejercicio*

Sea $f : \mathbb{R}^n \to E$ una biyección lineal de $\mathbb{R}^n$ sobre un espacio vectorial real

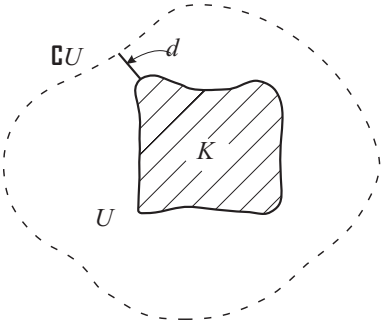


Figura 128.

normado E. Probar que:

i) La función $g : x \mapsto \|f(x)\|$ de la esfera $E^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ en E es continua.

ii) Existe un número real $\delta > 0$ tal que $g(x) \geq \delta$ para todo $x \in E^{n-1}$. Para todo $y \in E$ se cumple $\|f^{-1}(y)\| \leq \delta^{-1}\|y\|$. Por lo tanto f es un homeomorfismo.

iii) Todas las normas sobre un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

iv) Todo subespacio vectorial E de dimensión finita en un espacio normado $(F, \|\cdot\|)$ es cerrado.

§ 8.3 **Producto de compactos**

En 1935 Tikhonov publicó el célebre teorema de que la compacidad es invariante para productos. Su demostración era muy ingeniosa, pero un tanto complicada. Daremos aquí una demostración alternativa de gran sencillez, obtenida posteriormente con el empleo de los ultrafiltros. En su tiempo, este fue un hecho que contribuyó fuertemente a la aceptación general de los filtros, pues evidencía de modo elocuente su utilidad como instrumento de investigación.

8.3.1 *Teorema (Tikhonov)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si lo es cada espacio $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$.

Demostración: $\Rightarrow$: por el axioma de elección $X = \prod X_\alpha \neq \varnothing$. Como las proyecciones $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ son sobreyectivas y continuas, la compacidad de $\prod X_\alpha$ implica la de cada espacio $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ $(\alpha \in I)$ $\Leftarrow$: Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\prod X_\alpha$. Para todo $\alpha \in I$, $\pi_\alpha\{\ \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro sobre X_α. Por el criterio (C^6)cada ultrafiltro $\pi_\alpha\{\ \mathcal{U}\}$ es convergente. Concluimos, según 5.2.6, que $\mathcal{U}$ a su vez es convergente. ■

Nota: Utilizando la misma idea de demostración, el teorema de Tikhonov puede probarse para todas las topologías iniciales que son definidas por sobreyecciones. Más precisamente, si $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios topológicos,

X un conjunto y $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ familia de sobreyecciones $f_\alpha : X \to X_\alpha$, entonces X provisto de la topología inicial definida por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ es compacto si y sólo si todos los espacios $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ son compactos $(\alpha \in I)$.

Demostración: Ejercicio. ■

El teorema de Tikhonov es uno de los medios más poderosos para verificar la compacidad de ciertos espacios (especialmente espacios funcionales). Para ilustrar esto daremos unos ejemplos.

8.3.2 *Ejemplo (caracterización de los compactos en $\mathbb{R}^n$)*

Por 8.1.13 y por el ejemplo 8.1.7, todo subconjunto compacto en un espacio métrico es necesariamente cerrado y acotado. Veremos ahora que en el espacio métrico $\mathbb{R}^n$ se cumple también el inverso.

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ acotado y cerrado. Entonces C está contenido en un producto de intervalos cerrados y acotados $I_1 \times \ldots \times I_n$ (fig. 129).

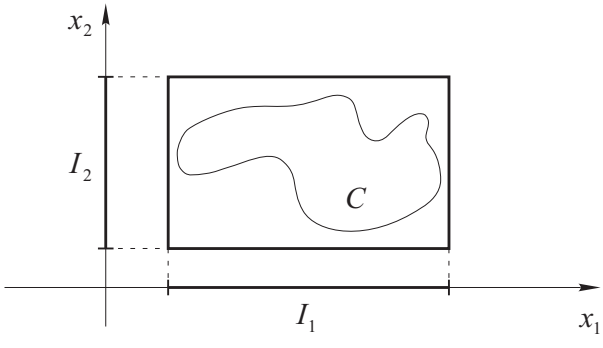


Figura 129.

Por el teorema de Tikhonov, el producto $I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Concluimos por 8.1.10 que el subconjunto cerrado C también lo es. Con eso hemos vuelto a demostrar un teorema fundamental del análisis. *Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es acotado y cerrado.*

8.3.3 *Ejemplo*

Todo cubo I^T (potencia finita o infinita del intervalo compacto $I = [0, 1]$) es compacto.

El *cubo de Hilbert* $I := \prod_{n\in\mathbb{N}^*} [-1/n, 1/n] \cong I^{\mathbb{N}^*}$ es compacto.

8.3.4 *Ejemplo*

Sea T un conjunto no vacío cualquiera y consideremos el espacio $X = \mathbb{R}^T$ de todas las funciones reales sobre T, provisto de la topología de la convergencia puntual (topología producto). Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^T$ se llama *débilmente acotado* si para todo $t \in T$ la proyección

$$\pi_t[C] = \{x(t) | x \in C\} \subset \mathbb{R}$$

es acotada (en $\mathbb{R}$). Por tanto, si C es débilmente acotado existen intervalos compactos $I_t = [a_t, b_t] \subset \mathbb{R}$ $(t \in T)$ tales que

$$C \subset \prod_{t \in T} [a_t, b_t]$$

En este caso C es subespacio del subconjunto compacto $\prod_{t \in T} I_t \subset \mathbb{R}^T$. Concluimos que *todo subconjunto cerrado débilmente acotado en* $\mathbb{R}^T$ *es compacto.*

El inverso se cumple trivialmente. Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^T$ es cerrado, por ser $\mathbb{R}^T$ de Hausdorff, y es débilmente acotado puesto que las proyecciones son continuas. Vemos que la caracterización de los compactos expuesta en el ejemplo 8.3.2 se generaliza a espacios potencias $\mathbb{R}^T$ de dimensión infinita si se sustituye 'acotado' por 'débilmente acotado'.

No obstante hay que destacar una diferencia esencial entre los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^T$ (T infinito): En $\mathbb{R}^n$ toda bola abierta es un ejemplo de un abierto acotado no vacío, mientras que *en* $\mathbb{R}^T$ *no existe un abierto no vacío que sea débilmente acotado* (por la definición de la topología producto); por tanto

$\rightsquigarrow$*todos los compactos en* $\mathbb{R}^T$ *tienen interior vacío.*

Por el ejemplo 8.3.2 todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ es relativamente compacto.

$\rightsquigarrow$Pero ¡atención! Esto no se cumple en espacios métricos cualesquiera. Incluso probaremos en la última sección de este capítulo, que un espacio normado que contiene una bola relativamente compacta es de dimensión finita. Aquí sólo daremos un ejemplo de un espacio normado cuya bola unitaria (cerrada) *no* es compacta.

8.3.5 *Ejemplo*

Consideremos el espacio normado $X = \mathfrak{C}([0,1])$ de las funciones reales continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| \; |0 \leq t \leq 1\} \quad (x \in X)$$

El funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^{x} x(t)dt$$

es continuo (por el criterio (53), cap. 1) puesto que $|f(x)| \leq \|x\|_\infty$ para todo $x \in X$. Se verifica fácilmente que el supremo de f sobre la bola unitaria C$= \{x \in X | \; \|x\|_\infty \leq 1\}$ es 1. Sencillamente hay que aproximar la función constante por pedazos

$$t \mapsto \mathrm{sig}(1/2 - t) \;\; (0 \leq t \leq 1)$$

sucesivamente por funciones continuas x de norma $\|x\|_\infty \leq 1$ (fig. 130).

Sin embargo, evidentemente para toda función $x \in C$ se tiene que $|f(x)| < 1$. Por lo tanto f no alcanza su supremo en C. La bola unitaria de $\mathfrak{C}([0,1])$ no es compacta.

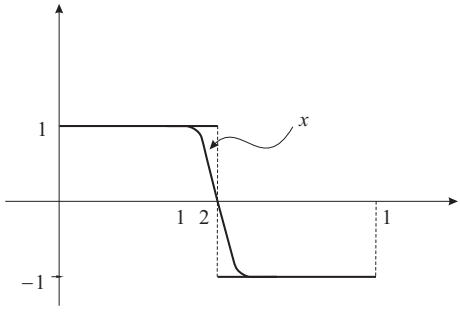


Figura 130.

Restrinjamos ahora f al subespacio lineal P_n de todas las funciones polinomiales $x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ de grado $\leq n$ sobre $[0,1]$. Entonces la bola unitaria $\{x \in P_n | \ \|x\|_\infty \leq 1\} = C \cap P_n$ es compacta por ser P_n homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$ (8.2.13). Concluimos que f alcanza su máximo sobre $C \cap P_n$.

Para terminar esta sección analizaremos las vecindades de un producto compacto contenido en un espacio producto con un número finito de espacios coordenados. Volveremos a ver que aquí también que los compactos se comportan como puntos.

En un espacio producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ todo punto $x = (x_i)$ tiene como sistema fundamental de vecindades la familia

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} V_i | V_i \in \mathcal{V} \ \ (x_i) i = 1, \ldots, n \right\}$$

Sin embargo, en general, *no es cierto* que la familia

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} V_i | V_i \in \mathcal{V} \ \ (\pi_i[A]) i = 1, \ldots, n \right\}$$

$\rightsquigarrow$ sea una base de vecindades de $A \subset \prod_{i=1}^{n} X_i$ (ver ejemplo. fig. 131), ni siquiera cuando A es un cubo (fig. 132).

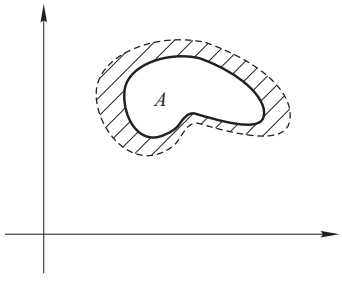


Figura 132

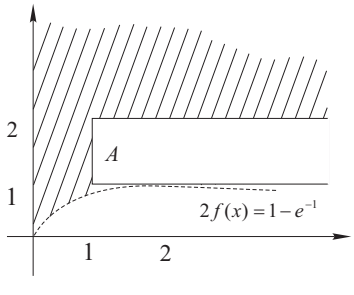


Figura 132

Esto es un error de cuidado. Sin embargo, tenemos para los cubos *compactos* el teorema de Wallace, cuya demostración en forma de ejercicio orientado recomen-

damos al lector, para tener práctica en el manejo de la noción de compacidad en espacios producto.

8.3.6 *Teorema (de Wallace)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{i=1,\ldots n}$ una familia finita de espacios topológicos. Si para todo $i = 1, \ldots n,\ C_i$ es un subconjunto compacto de X_i, entonces

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} V_i | V_i \in B(C_i) i = 1, \ldots, n \right\}$$

forman una base de vecindades del cubo $\prod_{i=1}^{n} C_i$.

Demostración: Ejercicio, indicaciones:

La demostración se hace por inducción. Supongamos que $n = 2$. Sea W una vecindad de $C_1 \times C_2$. Para todo $(x, y) \in C_1 \times C_2$ existen vecindades $R_{x,y} \in B(x), S_{x,y} \in B(y)$ tales que $R_{x,y} \times S_{x,y} \subset W$. El proceso de la demostración se indica a continuación:

Primer paso: Probar que existe una familia finita de puntos $y_i \in C_2$ tal que:

$$C_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} S_{x,y_i} = P_x$$

$$Q_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} R_{x,y_i} \in B(x)$$

$$Q_x \times P_x \subset W$$

(ver fig. 133 y 134).

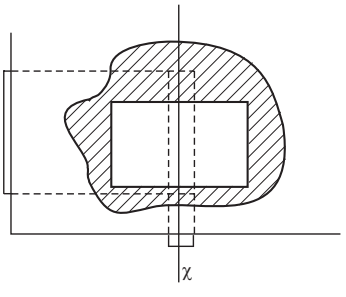


Figura 133

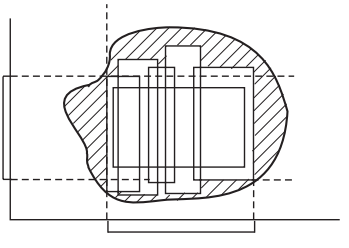


Figura 134

Segundo paso: Probar que existe una familia finita de puntos $x_i \in C_1$ tal que

$$C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_{x_i} = Q \in B(C_1)$$

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} P_{xi} \in B(C_2)$$

$$P \times Q \subset W$$

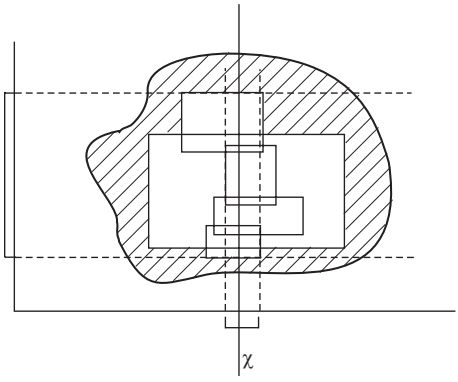


Figura 135

(ver fig. 135). Supongamos que el teorema es válido para n. Resta probar que es válido para $n+1$. ■

Pregunta: ¿Cómo puede derivarse la proposición 8.1.18 del teorema de Wallace?

§ 8.4 **Compacidad y numerabilidad**

En análisis se utilizan diferentes versiones de la propiedad II (que citamos en la §8.1) como propiedad característica de los compactos $X \subset \mathbb{R}$, a saber:

(II) Toda sucesión en X posee un punto de adherencia.
(II') Todo subconjunto infinito de X posee un punto de acumulación en X.
(II'') Toda sucesión en X contiene una subsucesión convergente en X.

$\rightsquigarrow$En general, ninguna de estas propiedades es equivalente a la compacidad e incluso no son equivalentes entre sí. Vamos a estudiar sus características y sus interrelaciones de manera condensada sin entrar en los detalles; pues estos conceptos sólo se utilizan en situaciones especiales, no tienen la importancia básica de la noción de compacidad. Dejaremos casi todas las demostraciones al lector, para que tenga oportunidad de desarrollar su capacidad productiva de analizar y resolver problemas de compacidad, de recubrimiento y de convergencia.

8.4.1 *Definición*

Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es

i) **numerablemente compacto o** $\mathbb{N}$- **compacto** si cumple (II);

ii) **débilmente** $\mathbb{N}$-*compacto o* $B-W$-**compacto** si cumple (II');

iii) **sucesionalmente compacto** si cumple (II'').

Nota: Históricamente, el término compacto fue primeramente utilizado para denotar los sucesionalmente compactos, mientras que los compactos fueron llamados bicompactos.

Dejamos al lector como *ejercicio* probar las implicaciones, compacto o sucesionalmente compacto $\Rightarrow$ numerablemente compacto $\Rightarrow$ débilmente $\mathbb{N}$-compacto. (6)

Daremos ahora dos ejemplos que muestran que estas implicaciones no pueden invertirse.

8.4.2 *Ejemplo (un espacio $\mathbb{N}$-compacto y compacto, pero no sucesionalmente compacto)*

Consideremos el espaccio I^I de todas las funciones $x : [0,1] \to [0,1]$ provisto de la topología de la convergencia puntual. Por el ejemplo 8.3.3, I^I es compacto, por lo tanto también es $\mathbb{N}$-compacto. Pero I^I *no* es sucesionalmente compacto. En efecto, la sucesión de funciones $x_n : t \mapsto x_n\ (t)$ $(n \in \mathbb{N})$ definida por $x_n(t) :=$ n-ésimo término en el desarrollo binario de $t \in [0,1]$, no contiene una subsucesión convergente. Supongamos, por reducción al absurdo que (x_{n_k}) es una subsucesión que converge a $x \in I^I$. Entonces, para todo $t \in I, (x_{n_k}(t))$ converge a $x(t)$. Consideremos un número $t_0 \in I$ tal que el n_k-ésimo término de su desarrollo binario es 0 si k es par y 1 si k es impar. Entonces la sucesión $(x_{n_k})(t_0))$ se escribe también $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, entonces no puede ser convergente. Concluimos que *en un espacio compacto no es necesario que toda sucesión contenga una subsucesión convergente.*

Pregunta: La propiedad (II) es sencillamente la propiedad (C^4) de los compactos, limitada a los filtros de Fréchet. Por lo tanto, todo espacio compacto es numerablemente compacto. ¿Por qué una conclusión análoga no puede establecerse para los espacios sucesionalmente compactos? ¿Por qué la propiedad (II') no es una particularización del criterio (C^5)?

Para analizar bajo qué condiciones adicionales, ciertas de las implicaciones (6) pueden invertirse, necesitamos algunas caracterizaciones de los espacios numerablemente compactos.

8.4.3 *Proposición (caracterización de los espacios numerablemente compactos)*

Para todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ son equivalentes las siguientes proposiciones:

(NC^1) Toda cubierta abierta *numerable* de X contiene una subcubierta finita.

(NC^2) Toda familia *numerable* de cerrados en X que tiene la propiedad de intersección finita es a su vez de intersección no vacía.

(NC^3) Toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos en X tiene intersección no vacía.

(NC^4) Toda sucesión tiene un punto de adherencia.

(NC^5) Todo subconjunto infinito A de X tiene un *punto de densidad* (i.e. un

punto en X cuyas vecindades contienen un número infinito de puntos de A).

Demostración: Ejercicio. ■

Una comparación entre (II') y (NC^5) muestra que la diferencia entre los espacios numerablemente compactos y los espacios débilmente N-compactos se refleja en la diferencia entre 'punto de densidad' y 'punto de acumulación'. Todo punto de densidad es un punto de 'acumulación' pero en general el inverso no se cumple. De todos modos, en un T_1-espacio ambas nociones coinciden como se demuestra fácilmente.

8.4.4 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_1-espacio y $A \subset X$. Entonces $x \in X$ es un punto de densidad de A si y sólo si es un punto de acumulación de A.

Demostración: Ejercicio. ■

Con la ayuda de este lema, se concluye inmediatamente de la proposición anterior una primera equivalencia.

8.4.5 *Corolario*

Un T_1-espacio es $\mathbb{N}$-compacto si y sólo si es débilmente $\mathbb{N}$-compacto.

Como es de esperar, obtenemos otras equivalencias si suponemos adicionalmente uno u otro de los axiomas de numerabilidad. Probaremos primero la siguiente caracterización de los puntos adherentes de una sucesión en un $(AN\ 1)$-espacio.

8.4.6 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un $(AN\ 1)$-espacio. Si una sucesión (x_n) en $(X, \mathcal{X})$ tiene un punto adherente $x \in X$, entonces contiene una subsucesión que converge a x.

Demostración: Ejercicio. (se generaliza la demostración clásica del análisis) ■

8.4.7 *Proposición*

i) Bajo $(AN\ 1)$ la compacidad secuencial y la numerable son equivalentes.

ii) Bajo $(AN\ 2)$ dichas nociones y la propia compacidad son equivalentes.

Demostración: Ejercicio. i) es una consecuencia inmediata del lema precedente; ii) es un corolario del teorema de Alexander. ■

8.4.8 *Ejemplo*

Sabemos que $\mathbb{R}^n$ es un $(AN\ 2)$-espacio de Hausdorff; por lo tanto las nociones

de 'compacidad', 'compacidad secuencial', 'compacidad numerable' y 'compacidad numerable débil' son equivalentes en $\mathbb{R}^n$. Veremos ahora que lo mismo se tiene en todos los espacios métricos. Más precisamente:

8.4.9 *Teorema (caracterización de los espacios métricos compactos)*

Sea (X, d) un espacio métrico numerablemente compacto. Entonces se cumple:

i) Para todo recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe un número real $\delta > 0$ *(número de Lebesgue)* tal que la cubierta $\{B(x, \delta) | x \in X\}$ formado por todas las bolas de radio δ, es más fina que $\mathcal{U}$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red $\mathbb{R}$ de $(X, \mathcal{X}_d)$.

iii) $(X, \mathcal{X}_d)$ es compacto.

iv) $(X, \mathcal{X}_d)$ es secuencialmente compacto.

Demostración:

i) Supongamos por reducción al absurdo que i) es falso, o sea que existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X para la cual no existe un número de Lebesgue. Esto significa que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe un punto $x_n \in X$ tal que la bola $B(x_n, 2^{-n})$ no está contenida en ningún $U \in \mathcal{U}$. Por hipótesis (x_n) tiene un punto de adherencia x. Sea $x \in U \in \mathcal{U}$. Existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $B(x, 2^{-k}) \subset U$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, se cumple para todo $y \in B(x, 2^{-k-1})$

$$B(y, 2^{-k-1}) \subset B(x, 2^{-k}) \subset U$$

Esto implica que $B(y, 2^{-n}) \subset U$ para todo $n \geq k+1$. Entonces, por la definición de (x_n), ninguno de los puntos x_n $(n \geq k+1)$ puede pertenecer a $B(x, 2^{-n-1})$. Pero esto contradice a la suposición de que x es un punto adherente de (x_n).

ii) Supongamos por reducción al absurdo que ii) es falso. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que X no puede cubrirse por un número finito de bolas de radio ε. Por inducción puede seleccionarse una sucesión de puntos $x_n \in X$ tal que $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$. Esto implica que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para $m, n \in N$, $m \neq n$. Concluimos que para todo $x \in X$ la vecindad $B(x, \varepsilon/2)$ contiene a lo sumo *un* punto de la sucesíon (x_n). Por lo tanto (x_n) no tiene un punto de adherencia en X. Contradicción.

iii) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Por i) existe un número de Lebesgue δ para $\mathcal{U}$. Por ii) existe una sucesión finita $x_1, ..., x_r$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_k, \delta)$. Para $k = 1, .., r$ existe $U_{i_k} \in \mathcal{U}$ que contienen las bolas respectivas $B(x_k, \delta)$. Concluimos que $(U_{i_1}, .., U_{i_r})$ es una cubierta finita de $\mathcal{U}$.

iv) Se deduce de iii) por 8.4.7 i). ■

Nota: La demostración muestra que en un espacio métrico se tienen las siguientes equivalencias:

i) $\wedge$ ii) $\Longleftrightarrow$ compacto $\Longleftrightarrow$ secuencialmente compacto $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{N}$-compacto.

Veremos ahora algunas propiedades de los espacios numerablemente compactos y secuencialmente compactos.

8.4.10 *Proposición*

i) La compacidad numerable y la compacidad sucesional se heredan a los subespacios cerrados y a las imágenes continuas.

ii) Toda función real continua definida sobre un espacio secuencialmente o numerablemente compacto $(X, \mathcal{X})$ alcanza sus extremos en X.

Demostración: Ejercicio. ■

Introduzcamos un último concepto en este contexto que no es otra versión de la compacidad sino un nuevo concepto de propia importancia. Lindelöf demostró a finales del siglo XIX que toda cubierta abierta de $\mathbb{R}$ contiene una subcubierta *numerable*. Este resultado sorprendente en su tiempo, ha promovido la introducción de una noción topológica relacionada a la vez a la compacidad y a los axiomas de numerabilidad.

8.4.11 *Definición (espacio de Lindelöf)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se dice que cumple el axioma (L) o que es un espacio de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta numerable.

Esta propiedad viene a ser la complementaria de *numerablemente compacto* respecto a la noción de compacidad, esto es,

8.4.12 *Proposición*

Para todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ son equivalentes las siguientes proposiciones:

i) $(X, \mathcal{X})$ es compacto.

ii) $(X, \mathcal{X})$ es de Lindelöf y numerablemente compacto.

Demostración: Sólo hay que probar que ii) implica i). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por Lindelöf existe una subcubierta numerable $\mathcal{U}'$. Por compacidad numerable existe una subcubierta finita $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$. ■

Si queremos verificar la propiedad de Lindelöf basta considerar sólo las cubierta abiertas formadas por subcolecciones de una base cualquiera.

Esto es lo que nos dice el criterio siguiente, que es una especie de 'teorema de Alexander' débil, para espacios de Lindelöf.

8.4.13 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y B una base de $\mathcal{X}$. $(X, \mathcal{X})$ es de Lindelöf si y sólo si toda cubierta de X por elementos de B contiene una subcubierta numerable.

Demostración: Sólo hay que probar '$\Rightarrow$:'. Sea B una base de $\mathcal{X}$ tal que toda cubierta de X por elementos de B contiene una subcubierta numerable, y sea $\mathcal{U}$ otra cubierta abierta cualquiera de X. Para todo $x \in X$ existe un abierto $U_x \in \mathcal{U}$ y un elemento de la base $B_x \in B$ tal que $x \in B_x \subset U_x$. Puesto que los B_x $(x \in X)$ cubren X, existe una familia numerable (x_n) tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{x_n}$. Entonces (U_{x_n}) es una subcubierta de X. ■

El corolario siguiente expone la propiedad principal de los $(AN\ 2)$-espacios.

8.4.14 *Corolario (primer teorema de Lindelöf)*

Todo AN 2-espacio es de Lindelöf.
En los espacios métricos esta propiedad caracteriza a los AN 2-espacios.

8.4.15 *Teorema*

Todo espacio métrico de Lindelöf es AN 2-espacio.

Demostración: Para el espacio métrico de Lindelöf (X, d) consideremos las cubierta abiertas $\{B(x, 1/k) | x \in X\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ existe una subcubierta finita $\{B(x_n^{(k)}, 1/k) | n \in A_k|\}$, $A_k \subseteq \mathbb{N}$ finito. Veamos que la familia numerable $\{B(x_n^{(k)}, 1/k) | k \in \mathbb{N}^*, n \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\}$ es una base para $\mathcal{X}_d$. Sea $U \in \mathcal{X}_d$ y $x \in U$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Escojamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2/\varepsilon$. Como $\{B(x_n^{(k)}, 1/k) | n \in A_k\}$ es una cubierta de X, existe $n \in A_k$, tal que $x \in B(x_n^{(k)}, 1/k)$. Por otra parte, si $y \in B(x_n^{(k)}, 1/k)$ entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_n^{(k)}) + d(x_n^{(k)}, y) < 2/k < \varepsilon.$$

Entonces

$$x \in B(x_n^{(k)}, 1/k) \subset B(x, \varepsilon) \subset U. \ \blacksquare$$

8.4.16 *Ejemplo*

$\mathbb{R}$ y, más generalmente, todos los espacios $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ son AN 2-espacios, por lo tanto son espacios de Lindelöf. Recuperamos aquí el teorema clásico de Lindelöf: Toda cubierta abierta de $\mathbb{R}$ contiene una subcubierta numerable.

Por aplicación del corolario anterior se obtiene un segundo teorema de Lindelöf.

8.4.17 *Corolario (segundo teorema de Lindelöf)*

En un AN 2-espacio $(X, \mathcal{X})$ toda base de $\mathcal{X}$ contiene una base numerable de $\mathcal{X}$.

Demostración: Sea $\beta = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de $(X, \mathcal{X})$ y β' otra base cualquiera. Todo B_n $(n \in \mathbb{N})$ es cubierto por los abiertos $U \in \beta'$ tales que $U \subset B_n$. B_n, como subespacio, cumple $(AN\ 2)$, por lo tanto es de Lindelöf. Entonces existe una subcubierta numerable $\beta'_n \subset \beta'$ de B_n. Concluimos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta'_n$ es una base numerable de $\mathcal{X}$ contenida en β'. ■

El ejemplo siguiente muestra que no todo espacio de Lindelöf cumple $(AN\ 2)$.

8.4.18 *Ejemplo*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{X}_S$ generada por los intervalos semiabiertos $(a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$. $\mathcal{X}_S$ es más fina que la topología usual pues $(r, s) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (r, s - 1/n]$ para todos $r, s \in \mathbb{R}$. Puede demostrarse que $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ es de Lindelöf (véase DUGUNDJI [51]; pág. 164, ej. 6). Sin embargo, $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ no cumple $(AN\ 2)$. Supongamos por reducción al absurdo que $\beta = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de $\mathcal{X}_S$). Por el corolario 8.4.17 podemos suponer adicionalmente que todo $U_n \in \beta$ tiene la forma $(a_n, b_n]$. Seleccionamos $b \in \mathbb{R} \backslash \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ y un real $a < b$. Entonces es evidente que el abierto $(a, b]$ no puede representarse como unión de una subfamilia de los $(a_n, b_n]$. Esta contradicción muestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ no es un AN 2-espacio. Puesto que es fácil comprobar que $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ es un AN 1-espacio separable, tenemos aquí un ejemplo, muy interesante por la rara combinación de propiedades, de un T_3-*espacio separable,* AN 1 *y de Lindelöf que no cumple* AN 2.

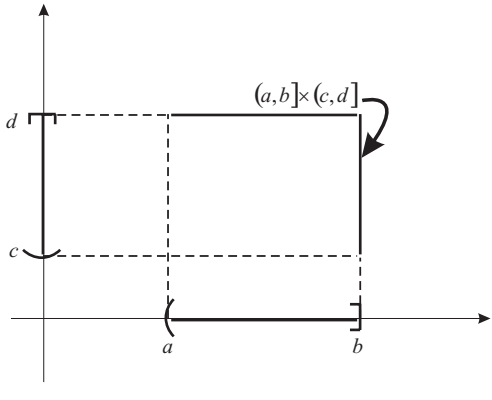


Figura 136.

Mencionamos a continuación dos propiedades de herencia de los espacios de

Lindelöf:

8.4.19 *Proposición*

i) Todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf. Un subespacio cualquiera de un AN 2-espacio es de Lindelöf.

ii) Toda imagen continua de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.

iii) Todo espacio T_3 y de Lindelöff es T_4. Por lo tanto, $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ es normal.

Demostración: Ejercicio. ■

No se cumple un teorema de Tykhonov para los espacios de Lindelöf.
En efecto, concluimos esta sección con un ejemplo en forma de ejercicio que muestra que:

1. el producto de dos espacios de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf.
2. la separabilidad en general no se hereda a los subespacios.

8.4.20 *Ejercicio*

Sea $\mathbb{R}^2$ provisto de la topología producto $\mathcal{X}_S^2 = \mathcal{X}_S \times \mathcal{X}_S$ (véase el ejemplo anterior) que tiene como base los rectángulos semiabiertos $(a, b] \times (c, d]$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ (fig. 136). Probar (sin utilizar los resultados del ejemplo 8.4.18) que:

i) $\mathcal{X}_S^2$ induce en la recta $R = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$ la topología discreta.

ii) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_S^2)$ no es normal y, por lo tanto, no es de Lindelöf (8.4.19 iii)).

iii) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_S^2)$ es un AN 1-espacio separable que no cumple $(AN\ 2)$ y que contiene un subespacio no separable.

iv) El producto de dos espacios normales no es necesariamente normal.

§ 8.5 **Espacios localmente compactos**

Los espacios clásicos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ no son compactos, pero cada uno de sus puntos posee un sistema fundamental de vecindades compactas. *Localmente* son compactos. Espacios con esta propiedad juegan un papel importante en la matamática, por ejemplo en teoría de integración (teoría de Radon; véase Bourbaki [27]).

8.5.1 *Definición (espacio localmente compacto)*

Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es **localmente compacto** si cada uno de sus puntos posee un sistema fundamental formado por vecindades compactas.

Nota: Como en el caso de los compactos, algunos autores exigen además que un espacio localmente compacto sea de Lindelöf–Hausdorff. Otros autores llaman

'localmente compacto' a todo espacio cuyos puntos tengan cada uno al menos una vecindad compacta. Esto no coincide con el uso general de la palabra propiedad local. Una propiedad local debe heredarse a todo subconjunto *abierto*. Veremos más tarde que en todo T_2-espacio ambas definiciones son equivalentes.

8.5.2 *Ejemplo*

Todo espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ es localmente compacto, puesto que el conjunto unitario $\{\{x\}\}$ formado por el compacto $\{x\}$ es un sistema fundamental de vecindades de x para todo $x \in X$. Por otro lado, todo espacio indiscreto es localmente compacto porque es compacto y es la única vecindad de cada uno de sus puntos. Concluimos que sobre un conjunto la topología más gruesa y la topología más fina son ambas localmente compactas.

8.5.3 *Ejemplo*

Todos los espacios $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son localmente compactos.

8.5.4 *Ejemplo*

El subespacio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es localmente compacto.

Demostración: Ejercicio. ■

8.5.5 *Ejemplo*

Todo T_2-espacio compacto $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto, pues $(X, \mathcal{X})$ es normal, por lo tanto regular; entonces las vecindades cerradas de $x \in X$ forman un sistema fundamental de vecindades (compactas) de x.

8.5.6 *Proposición (caracterización de los T_2-espacios localmente compactos)*

En un T_2-espacio $(X, \mathcal{X})$ son equivalentes las proposiciones siguientes:

i) Todo punto posee un sistema fundamental de vecindades compactas.

ii) Todo subconjunto compacto posee un sistema fundamental de vecindades compactas.

iii) Existe una base de la topología formada por abiertos relativamente compactos.

iv) Todo punto posee una vecindad compacta.

Demostración: La equivalencia i) $\Longleftrightarrow$ ii) se cumple en todo espacio topológico. La implicación ii) $\Rightarrow$ i) es trivial; inversamente si C es compacto y $U \supset C$ es abierto, entonces todo $x \in C$ posee una vecindad compacta $V_x \subset U$ como los abiertos V_x recubren C, existe un recubrimiento finito $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Evidentemente $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ es una vecindad compacta de C por 8.1.15.

i) $\Rightarrow$ iii): Si las vecindades compactas de x forman un sistema fundamental de vecindades de x, entonces también las vecindades abiertas relativamente compactas $\overset{\circ}{V}$. Por lo tanto, los abiertos relativamente compactos forman una base de $\mathcal{X}$ (3.1.13) (aquí hemos utilizado al axioma (T_2) para concluir que $\overset{\circ}{V}$ es relativamente compacto si V es compacto).

iii) $\Rightarrow$ iv); es trivial.

iv) $\Rightarrow$ i); sea V una vecindad compacta de $x \in X$. Por el ejemplo 8.5.5, x posee un sistema fundamental de vecindades compactas en el subespacio V, luego también en $(X, \mathcal{X})$. ■

Nota: En un espacio topológico cualquiera se cumplen sólo las implicaciones i) $\Longleftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iv) y iii) $\Rightarrow$ iv).

8.5.7 *Corolario*

Todo AN 2-espacio de Hausdorff que es localmente compacto, posee una base numerable de abiertos relativamente compactos.

Demostración: Se desprende del criterio iii) mediante el segundo teorema de Lindelöf (8.4.17). ■

La demostración de 8.5.6 muestra que un espacio topológico, del cual todos sus puntos poseen una vecindad T_2 compacta, necesariamente es localmente compacto.

8.5.8 *Ejemplo*

Todo espacio localmente euclideano $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto. En particular, todas las variedades de clase C^k $(k \geq 0)$ son localmente compactas.

Podría pensarse que si todos los puntos poseen una vecindad T_2-compacta, entonces el espacio es de Hausdorff. Sin embargo, esto no se cumple, como muestra el ejemplo siguiente.

8.5.9 *Ejemplo*

Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}^* \cup \{\theta_1, \theta_2\}$ obtenido sustituyendo el punto 0 de la recta real por dos nuevos puntos θ_1 y θ_2 (fig. 137).

Es fácil ver que todo punto $x \in X$ posee una vecindad T_2-compacta. Sin embargo, los puntos θ_1 y θ_2 no pueden separase por vecindades disjuntas. X es un T_1-espacio localmente de Hausdorff sin cumplir (T_2) globalmente, pero que es localmente compacto. Por definición, todo subconjunto abierto de un espacio localmente compacto $(X, \mathcal{X})$ es a su vez localmente compacto (como subespacio). Por otro lado es fácil ver que también todo subconjunto cerrado $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto. Nos preguntamos cuál es la forma más general de un subconjunto local-

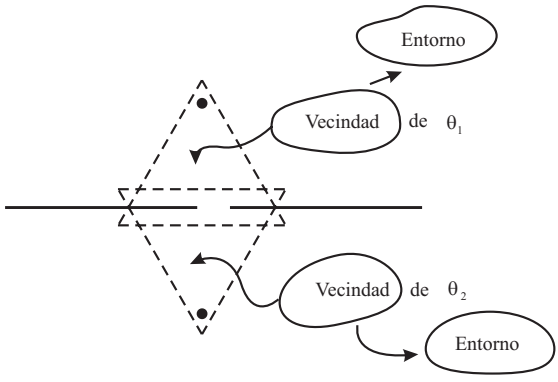


Figura 137. Espacio localmente compacto pero no T_2

mente compacto de $(X, \mathcal{X})$. Obtenemos la siguiente caracterización interesante.

8.5.10 *Proposición (caracterización de los subconjuntos localmente compactos)*

i) Todo subespacio denso y localmente compacto A de un espacio T_2 X es abierto en X.

ii) En un espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{X})$ todo subconjunto localmente compacto A es la intersección de un abierto y de un cerrado.

iii) Si $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto, toda intersección de un cerrado y de un abierto en $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto.

iv) En un T_2-espacio localmente compacto, un subconjunto es localmente compacto si y sólo si puede representarse como intersección de un abierto y de un cerrado en $(X, \mathcal{X})$.

Demostración:

i) Probaremos que A es vecindad de cada uno de sus puntos. Sea $x \in A$. Por hipótesis existe un compacto $K \subseteq A$ y un abierto V en X tales que $x \in V \cap A \subseteq K$. Como A es denso en X, $\overline{V} = \overline{(V \cap A)}$. Por lo tanto, $x \in V \subseteq \overline{V} = \overline{(V \cap A)} \subseteq \overline{K} = K \subseteq A$.

ii) Por i), A es abierto en $\overline{A}$. Por lo tanto, existe V, abierto en X tal que $A = V \cap \overline{A}$

iii) Sea A un abierto y C un cerrado en $(X, \mathcal{X})$, sea $x \in A \cap C$ y U una vecindad abierta de x. Hay que buscar una vecindad compacta de x en el subespacio $A \cap C$ que esté contenida en U. Por hipótesis, existe una vecindad compacta W de x contenida en la vecindad abierta $A \cap U$. $V := W \cap C = W \cap (A \cap C) \subset U$ es una vecindad compacta de x en $A \cap C$.

iv) Es una consecuencia inmediata de ii) y iii). ■

8.5.11 *Ejemplo*

Toda variedad algebraica en $\mathbb{R}^n$ es localmente compacta porque es

cerrada (4.5.5).

8.5.12 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Hausdorff. Entonces la intersección de dos subconjuntos localmente compactos en $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la caracterización iii). ■

En cambio, la unión de dos subconjuntos localmente compactos en un T_2-espacio no es necesariamente localmente compacto.

8.5.13 *Ejercicio*

Dar un ejemplo de dos subconjuntos localmente compactos en $\mathbb{R}^2$ cuya unión no sea localmente compacta.

La compacidad local no se hereda a las imágenes continuas como la compacidad. Ésta es una diferencia importante.

8.5.14 E*jemplo*

Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} (x, \sin 1/x) & si\ 0 < x \leq 1/\pi \\ (2/\pi - x, 0) & si\ 1/\pi \leq x \end{cases}$$

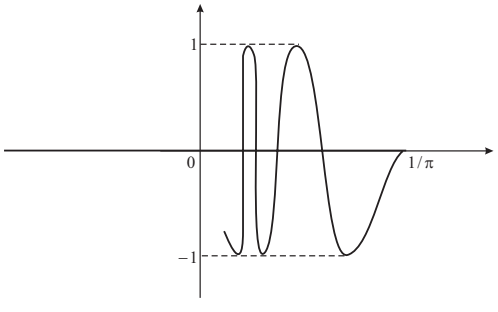


Figura 138. Gráfica de $f(x)$

Es fácil verificar que f es continua, pero $f[(0, \infty)]$ no es localmente compacto aunque $(0, \infty)$ sí lo es. Obsérvese que $(0, 0) \in f[(0, \infty)]$ no posee vecindad compacta pues tendría que ser cerrada en $\mathbb{R}^2$ lo que no es posible porque toda vecindad de $(0, 0)$ en $f[(0.\infty)]$ contiene una sucesión de puntos que converge a un punto $(0, \varepsilon) \notin f[(0, \infty)]$ $(\varepsilon > 0)$. Es de esperar que esto no pueda ocurrir si f es además *abierta*.

8.5.15 *Proposición*

La compacidad local es invariante bajo aplicaciones que sean a la vez continuas y abiertas.

Demostración: Sea $(X, \mathcal{X})$ localmente compacto, $(Y, \mathcal{Y})$ un espacio topológico

y $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta. Debemos mostrar que una vecindad arbitraria W de un punto $y = f(x)$ en $f[X]$ contiene a una vecindad (relativa) compacta de y. Pero esto es evidente, porque $f^{-1}[W]$ es una vecindad de x y contiene, por lo tanto, una vecindad compacta V de x cuya imagen $f[V] \subset W$ es una vecindad compacta de y en $f[X]$ (por ser f abierta). ■

Concluimos que la compacidad local es una propiedad topológica. Incluso podemos deducir más. La compacidad local es invariante bajo homeomorfismos locales, porque todo homeomorfismo local es a la vez abierto y continuo.

Otra diferencia con la compacidad: la compacidad local no se hereda a productos cualesquiera. En efecto, supongamos que V sea una vecindad compacta de un punto $x = (x_\alpha)$ en un espacio producto $\prod X_\alpha$. Entonces las proyecciones $\pi_\alpha[V]$ son todas compactas. Pero sabemos que casi todas estas proyecciones son iguales a los espacios coordenados X_α. Concluimos que si existe, en un espacio producto $\prod X_\alpha$ con al menos una vecindad compacta, entonces casi todos los espacios coordenados excepto un número finito son compactos. Dejamos al lector probar completamente la caracterización siguiente.

8.5.16 *Proposición (caracterización de los espacios productos localmente compactos)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente compacto si y solo si todo espacio coordenado es localmente compacto y casi todos son además compactos.

Demostración: Ejercicio. ■

§ 8.6 **Extensiones y compactificaciones**

El trabajo sobre espacios compactos, y aun más sobre espacios T_2-compactos es muy cómodo dado el gran número de propiedades a las cuales puede recurrirse. Por lo tanto, si queremos investigar un espacio dado $(X, \mathcal{X})$ no compacto, puede ser interesante tener una inmersión de $(X, \mathcal{X})$ en un espacio compacto $(Y, \mathcal{Y})$, tal que podamos trabajar en $(Y, \mathcal{Y})$ para estudiar X. Por ejemplo, podríamos utilizar la propiedad de que todo filtro en X tiene un punto adherente en $(Y, \mathcal{Y})$.

Más generalmente, si tenemos un espacio $(X, \mathcal{X})$ difícil de analizar, es natural buscar una inmersión f en un espacio $(Y, \mathcal{Y})$ que tenga propiedades cómodas o que conozcamos mejor. Este es el *problema de inmersión* que se plantea en las diversas ramas de la Topología Algebraica así como en Topología General. Mencionamos solamente dos ejemplos. 1.° En Topología Diferencial se estudia qué variedades diferenciables pueden considerarse como superficies sumergidas en $\mathbb{R}^n$. 2.° El problema de construcción de los números reales consiste esencialmente en hallar una inmersión de $\mathbb{Q}$, en un campo ordenado más amplio que cumpla el axioma del supremo, resp. el teorema de Cauchy (toda sucesión de Cauchy es convergente).

Ahora bien, sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una inmersión. La topología sobre el abierto $Y \setminus \overline{f[X]}$ es completamente independiente de la topología $\mathcal{X}$. Si cambiamos

la topología $\mathcal{Y}$ por la topología sobre $Y\backslash\overline{f[X]}$, f sigue siendo una inmersión. Por lo tanto, parece natural limitarse al subespacio $Y_0 = \overline{f[X]}$.

8.6.1 *Definición (extensión, compactificación)*

Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una inmersión. El par $(f, (Y, \mathcal{Y}))$ se llama **extensión de** $(X, \mathcal{X})$ si $f[X]$ es denso en $(Y, \mathcal{Y})$. La extensión $(f, (Y, \mathcal{Y}))$ se dice **compactificación** (resp. T_2-**compactificación)** de $(X, \mathcal{X})$ si $(Y, \mathcal{Y})$ es compacto (resp. T_2-compacto).

Nota: No siempre el *problema de extensión* va a sustituir al *problema de inmersión*. Por ejemplo, si queremos utilizar estructuras algebraicas sobre Y, estas estructuras no están eventualmente definidas sobre el subconjunto $\overline{f[X]}$. Otro ejemplo: Al analizar si una variedad diferencial dada $\mathbf{V}$ puede sumergirse como superficie en un $\mathbb{R}^n$, sería, evidentemente absurdo, limitarnos a considerar extensiones de $\mathbf{V}$.

8.6.2 *Ejemplo*

Sea $i_{\mathbb{Q}}$ la inyección canónica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Entonces el par $(i_{\mathbb{Q}}, \mathbb{R})$ es una extensión de $\mathbb{Q}$ que no es una compactificación.

8.6.3 *Ejemplo*

Sea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la recta ampliada con la topología de orden definida en el ejemplo 2.1.9; y sea $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ la inyección canónica. Entonces $(i, \overline{\mathbb{R}})$ es una T_2-compactificación de $\mathbb{R}$. El par $(\arctan, [-\pi/2, \pi/2])$ es otra T_2-compactificación de $\mathbb{R}$.

8.6.4 *Ejemplo*

Consideremos la proyección estereográfica s de la esfera $E^2 \subset \mathbb{R}^3$ con el polo ω sobre el plano $\mathbb{R}^2$, definida en el ejemplo 5.4.12. s aplica la esfera agujerada $E^2\backslash\{\omega\}$ homeomórficamente sobre $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto el par (s^{-1}, E^2) es una T_2- compactificación de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ (fig. 139).

Se dice que E^2 es la bola de números de Riemann obtenida por adjunción del punto infinito ω al plano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Las vecindades abiertas U del punto infinito $\omega \in E^2$ corresponden por el homeomorfismo s a los complementos de los compactos K en $\mathbb{R}^2$. Se dice que una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^2$ converge al infinito si en la compactificación E^2 de $\mathbb{R}^2$ la sucesión correspondiente $(s^{-1}\ (x_n))$ converge al punto infinito ω. Esto significa que para todo compacto K en $\mathbb{R}^2$ casi todos los términos x_n $(n \in \mathbb{N})$ se quedan fuera de K. La idea de compactificar $\mathbb{R}^2$ por adjunción de un punto infinito, cuyas vecindades son los complementos de compactos, puede transladarse a cualquier espacio topológico de Hausdorff:

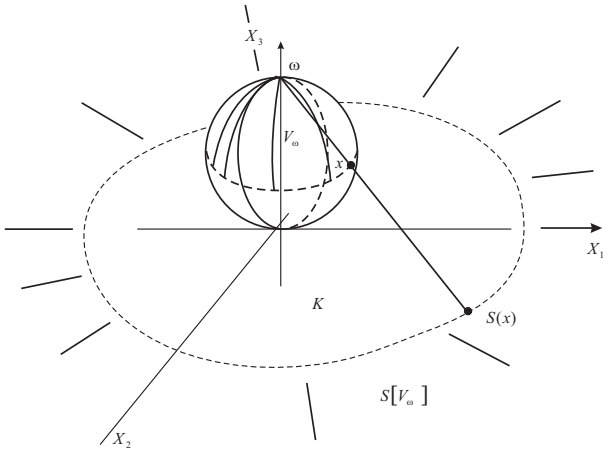


Figura 139. Compactificación de $\mathbb{R}^2$

8.6.5 *Teorema (Aleksandrov)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2 espacio topológico no compacto, X^* el espacio $X \cup \{\omega\}$ obtenido por adjunción de un punto $\omega \notin X, i : X \to X^*$ la inyección canónica y $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \cup \{X^* \backslash K \mid K \subset X, K$ compacto$\}$. Entonces $(i, (X^*, \mathcal{X}^*))$ es una compactificación de $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: 1° Probaremos primero que $\mathcal{X}^*$ es una topología:
$(A1)$ $\varnothing \in \mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$ y $X^* = X^* \backslash \varnothing \in \mathcal{X}^*$

$(A2)$ Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de elementos $U_\alpha \in \mathcal{X}^*$ y sea $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Si todos los U_α pertenecen a $\mathcal{X}$, entonces $U \in \mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$. Si $\omega \in U_\beta$ para un $\beta \in I$, entonces $C := X^* \backslash U_\beta$ es compacto en $(X, \mathcal{X})$ por definición de $\mathcal{X}^*$; entonces $X^* \backslash U = C \backslash \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha \neq \beta}} U_\alpha$ es compacto en $(X, \mathcal{X})$ por 8.1.10, lo que implica que $U = \mathcal{X}^* \backslash (\mathcal{X}^* \backslash U) \in \mathcal{X}^*$.

$(A3)$ Sean $U_1, ..., U_n \in \mathcal{X}^*$. Si $U_j \in \mathcal{X}$, entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap X) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$. Si $\omega \in U_i$ para todo $i = 1, ..., n$, entonces los $\complement U_i$ son compactos en X y por lo tanto $\complement U = \bigcup_{i=1}^{n} \complement U_i$ es compacto en X lo que implica que $U \in \mathcal{X}^*$.

2.° $\mathcal{X}^*$ induce la topología $\mathcal{X}$ sobre X, porque $X \in \mathcal{X} \subset \mathcal{X}^*$ y por lo tanto $\mathcal{X}^*_X = \{U \in \mathcal{X}^* | U \subset X\} = \mathcal{X}$.

3.° Veremos ahora que $(X^*, \mathcal{X}^*)$ es compacto. Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $\mathcal{X}^*$. Entonces existe $\beta \in I$ tal que $\omega \in U_\beta$. $\complement U_\beta$ es compacto en X. Por lo tanto, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que $\complement U_\beta \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$. Los abiertos $(U_\beta, U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n})$ cubren X^*.

4.° Queda por probar que X es denso en X^*. Pero esto es una consecuencia de las equivalencias $\bar{X} = X^* \Longleftrightarrow \{\omega\} \notin \mathcal{X}^* \Longleftrightarrow X$ no es compacto. ■

Nota: Esta claro que el espacio $(X^*, \mathcal{X}^*)$ puede construirse también si $(X, \mathcal{X})$ es compacto. En este caso $(i,\ (X^*, \mathcal{X}^*))$ es una inmersión compacta sin ser una

compactificación; el punto infinito ω está aislado en $(X^*, \mathcal{X}^*)$.

8.6.6 *Ejercicio.*

Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ una aplicación y $(X^*, \mathcal{X}^*)$ una compactificación de Aleksandrov de $(X, \mathcal{X})$. Se dice que $f(x)$ tiende a y_0 cuando x tiende a infinito (en símbolos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$) si $\lim\limits_{\mathcal{V}(x)\cap V} f(x) = y_0$ para el filtro de vecindades $\mathcal{V}(\omega)$ de ω en $(X^*, \mathcal{X}^*)$. Probar que si una función continua $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tiende a ∞ cuando $x \to \infty$, entonces alcanza su mínimo sobre X en algún punto $x_0 \in X$. El resultado de que todo espacio topológico no compacto puede compactificarse por adjunción de un solo punto, ya nos indica que la compactificación de Aleksandrov no siempre se puede adaptar bien a la estructura especial del espacio dado.

8.6.7 E*jemplo*

Sea $\mathbb{Q}^*$ el espacio compacto obtenido por adjunción de un punto ω a $\mathbb{Q}$ por el método de Aleksandrov. Entonces toda sucesión de Cauchy (x_n) en $\mathbb{Q}$ que converge a un número irracional en $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{Q}^*$ al punto infinito ω. En efecto, (x_n) no tiene un punto adherente en $\mathbb{Q}$. Luego tiene ω como único punto de adherencia, lo que implica $\lim(x_n) = \omega$ por 8.1.20. Evidentemente, esta compactificación que identifica todos los límites irracionales con el punto infinito no se adapta bien a la estructura de $\mathbb{Q}$. En particular, en esta compactificación el punto infinito no puede separarse de ningún punto $x \in \mathbb{Q}$ por dos vecindades disjuntas.

Es por tanto importante saber cuándo la compactificación de Aleksandrov es en verdad adecuada. Este es el propósito de la proposición siguiente:

8.6.8 *Proposición*

La compactificación de Aleksandrov es de Hausdorff si y sólo si el espacio es de Hausdorff y es localmente compacto.

Demostración: La suficiencia es trivial. Inversamente, supongamos que la compactificación de Aleksandrov $(X^*, \mathcal{X}^*)$ de $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff. Entonces necesariamente $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff por la herencia de (T_2). Por el criterio iv), prop. 8.5.6 de compacidad local, falta sólo probar que todo punto $x \in X$ posee una vecindad relativamente compacta. Como $(X^*, \mathcal{X}^*)$ es de Hausdorff, x puede separarse del punto infinito ω por dos vecindades abiertas disjuntas V y W respectivamente. Pero esto significa que V está contenida en el compacto $X^* \backslash W$, entonces V es relativamente compacto. ■

El corolario siguiente muestra cómo la extensión de un espacio puede permitir

obtener nuevos resultados sobre la estructura interna del propio espacio.

8.6.9 *Corolario*

Todo T_2-espacio localmente compacto $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular.

Demostración: Por la proposición anterior, $(X, \mathcal{X})$ es homeomorfo a un subespacio de un T_2-espacio, por lo tanto, por heredabilidad, es completamente regular (7.1.10). ■

8.6.10 *Ejemplo (Recta de Bourbaki)*

Si $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, definimos $V(x, \varepsilon) = [x, x+\varepsilon) \cup (-x-\varepsilon, x)$. La familia $B = \{V(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\}$ es una base para una topología $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$.

a) $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ es T_2: sean $x,\ y \in \mathbb{R}$ $x < y$
Caso 1) $0 \leq x$. Si $\varepsilon = y - x$, se tiene $V(x, \varepsilon) \cap V(y, \varepsilon) = \varnothing$
Caso 2) $y \leq 0$. Sea $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$. Por lo tanto, $V(x, \varepsilon) \cap V(y, \varepsilon) = \varnothing$
Caso 3) $x < 0 < y,\ y \leq -x$. Sea $\varepsilon = -x$. De donde, $V(x, \varepsilon) \cap V(y, \varepsilon) = \varnothing$
Caso 4) $x < 0 < y < -x$. Sea $\varepsilon = -\frac{1}{2}(x+y)$. Por lo tanto, $V(x, \varepsilon) \cap V(y, \varepsilon) = \varnothing$.

b) Si $n \in \mathbb{N}$ $I_n = [-n, n]$ es $\mathcal{J}-$compacto. Sea $\mathcal{L}$ una base del filtro en I_n y sea x un $r-$punto de adherencia de $\mathcal{L}$ (r es la topoligía usual en I_n). Bastará probar que al menos uno de los puntos x, $-x$ es un $\mathcal{J}-$punto de adherencia de $\mathcal{L}$. Si no es así, existe $\varepsilon > 0$ y $N_0 \in \mathcal{L}$ tales que $V(x, \varepsilon) \cap N_0 = \varnothing = V(-x, \varepsilon) \cap N_0$. Por lo tanto, el conjunto $V(x, \varepsilon) \cup V(-x, \varepsilon)$ es ajeno a N_0. Pero $V(x, \varepsilon) \cup V(-x, \varepsilon) = (-x-\varepsilon, -x+\varepsilon) \cup (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y $(x\varepsilon, x+\varepsilon) \cap N_0 \neq \varnothing$, una contradicción.

c) El subespacio Y de $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ que consta de los reales positivos es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_{\mathcal{S}})$ (ejemplo 8.4.18).

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ es localmente compacto y $r-$compacto, es decir, $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ es unión numerable de espacios compactos (úsese b)).

e) Si $\mathbb{R}^*$ es la compactación de Alexandrof de $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$, el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ es también localmente compacto y $r-$compacto. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ son ambos normales (úsese 8.4.19 iii)).

f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ es un ejemplo de un espacio normal el cual tiene un subespacio que no es normal, a saber $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0$
$texty\ y > 0\}$ (úsese c) y 8.4.20 ii)).

g) Si un espacio normal tiene un subespacio que no es normal, entonces tiene también un subespacio abierto que no es normal (ejercicio). Por lo tanto, existe un subespacio abierto W de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ el cual no es normal. Esto demuestra que un espacio localmente compacto y T_2 es $T_{3.5}$, pero no necesariamente T_4.

Mediante la compactificación de Aleksandrov sólo es posible T_2-compactificar un espacio si éste,además de T_2, es localmente compacto. Pero ¿puede T_2-compactificarse, por otros medios, una clase más amplia de T_2-espacios?

El argumento de la demostración anterior nos dice que el T_2-espacio debe ser, al menos, completamente regular. Veremos ahora que esta condición ya es suficiente. Antes probaremos un lema que contiene el razonamiento principal de la demostración, y además nos suministra una representacón útil de la topología inicial.

8.6.11 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Hausdorff provisto de una topología inicial definida por una colección Φ de funciones $\phi : X \to (X_\phi, \mathcal{X}_\phi)$. Entonces la aplicación

$$f : x \mapsto (\phi(x))_{\phi\in\Phi} \text{ de } X \text{ en } \prod_{\phi\in\Phi} X_\phi$$

es una inmersión.

Demostración: Los abiertos

$$\phi_1^{-1}[U_{\phi_1}] \cap ... \cap \phi_n^{-1}[U_{\phi_n}] = (\phi_1, ..., \phi_n)^{-1}[U_{\phi_1} \times ... \times U_{\phi_n}] \tag{7}$$

$\phi_i \in \Phi, U_{\phi_i} \in \mathcal{X}_{\phi_i}$ $(n \in \mathbb{N})$ forman una base β de la topología inicial $\mathcal{X}$. Sea $\pi_{\phi_1,\cdots,\phi_n}$ la proyección de $\prod_{\varphi\in\Phi} X_\phi$ sobre el producto finito $\prod_{i=1}^{n} X_{\phi_i}$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo de la fig. 140. f *es continua* por ser producto de aplicaciones continuas. Veamos que f *es inyectiva:* Si x, $y \in X$, $x \neq y$, entonces existe un abierto de la forma (7) que contiene x sin incluir y; pero esto significa que $\phi_i(x) \neq \phi_i(y)$ para algún $i = 1, ..., n$ Luego $f(x) = (\phi(x))_{\phi\in\Phi} \neq (\phi(y))_{\phi\in\Phi} = f(y)$. Falta probar que toda imagen de un abierto de la forma (7) es abierto en $f[X]$ (4.5.9). Pero esto resulta inmediatamente del diagrama precedente que implica que:

$$f[(\phi_1, ..., \phi_n)^{-1}[\prod_{i=1}^{n} U_{\phi_i}] =$$

$$f[(\pi_{\phi_1,...,\phi_n} \circ f)^{-1}[\prod_{i=1}^{n} U_{\phi i}]] =$$

$$f[f^{-1}[\pi^{-1}_{\phi_1,...,\phi_n} \prod_{i=1}^{n} U_{\phi_i}]] =$$

$$\pi^{-1}_{\phi_1,...,\phi_n}[\prod_{i=1}^{n} U_{\phi_i}] \cap f[X],$$

porque $\pi^{-1}_{\phi_1,...,\phi_n}[\prod_{i=1}^{n} U_{\phi_i}]$ es abierto en $\prod_{\phi\in\Phi} X_\phi$. ■

8.6.12 *Teorema (de Tikhonov)*

Un espacio de Hausdorff tiene una T_2-compactificación si y sólo si es completamente regular.

Demostración: De la heredabilidad de la regularidad completa, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(\phi_1 .. \phi_n)"'] & \prod_{\phi\in\Phi} X\phi \arrow[d, "\prod \phi_1 .. \phi_n"] \\
& \prod_{i=1}^{n} X\phi_i
\end{tikzcd}$$

Figura 140

si un espacio es T_2-compactificable, entonces es completamente regular. Inversamente, supongamos que $(X, \mathcal{X})$ es un T_2-espacio completamente regular. Para cada $x \in X$ y cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe una función continua $\varphi_{x,V} : X \to [0,1]$ tal que $\varphi_{x,V}(x) = 0$ y $\varphi_{x,V} \,|\, \complement V = 1$, por lo que $x \in \varphi_{x,V}^{-1}[[0,1)] \subset V$. Por lo tanto $\{\varphi^{-1}[[0,1)] | \varphi \in \mathfrak{C}(X,[0,1])\}$ constituye una base de $(X, \mathcal{X})$: $\mathcal{X}$ es la topología inicial definida por las aplicaciones continuas $\varphi : X \to [0,1]$ $(\varphi \in \Phi := \mathfrak{C}(X,[0,1]))$. Por el lema anterior la aplicación $f : x \to (\phi(x))_{\phi\in\Phi}$ es una inmersión de $(X, \mathcal{X})$ en el cubo compacto $[0,1]^{\Phi}$. $(f, \overline{f[X]})$ es una T_2-compactificación de $(X, \mathcal{X})$. ■

Nota: No se necesitan todas las aplicaciones $\phi \in \mathfrak{C}(X,[0,1])$ para construir la T_2-compactificación del teorema anterior. La demostración muestra que toda colección $\Phi \subset \mathfrak{C}(X,[0,1])$ tal que $\{\varphi^{-1}[[0,1)] | \varphi \in \Phi\}$ constituya una base de $\mathcal{X}$ define una inmersión:

$$x \mapsto (\varphi(x))_{\phi\in\Phi} \text{ de } (X, \mathcal{X}) \text{ en } I^{\Phi}$$

8.6.13 *Definición (compactificación de Stone-Cěch)*

La compactificación construida en el teorema anterior se llama **compactificación de Stone-Cěch** y se denota por $(e, \beta(X))$. STONE [151] y CĚCH [44] fueron los primeros que dieron la caracterización siguiente de la compactificación obtenida por primera vez por Tikhonov. Demostraron que estas compactificaciones son *maximales* en el sentido de una relación de orden entre las extensiones de X.

8.6.14 *Definición (orden entre extensiones)*

Sean $(f, (Y, \mathfrak{Y}))$ y $(g, (Z, \mathfrak{Z}))$ extensiones de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$. Se dice que

$$(f, (Y, \mathfrak{Y})) \geq (g, (Z, \mathfrak{Z}))$$

si existe una sobreyección continua $h : (Y, \mathfrak{Y}) \to (Z, \mathfrak{Z})$ tal que $h \circ f = g$. Si además h es un homeomorfismo, entonces ambas extensiones se llaman *equivalentes* (fig. 141).

Si $(f, (Y, \mathfrak{Y})) \geq (g, (Z, \mathfrak{Z}))$ entonces la extensión $(f, (Y, \mathfrak{Y}))$ añade más puntos al espacio $(X, \mathcal{X})$ que la extensión $(g, (Z, \mathfrak{Z}))$, pues

$$h[Y] = Z \Rightarrow \text{ Card } Y \geq \text{ Card } Z$$

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,\mathfrak{Y}) \arrow[dd, "h"] \\
(X,\mathfrak{X}) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & (Z,\mathfrak{Z})
\end{tikzcd}$$

Figura 141.

8.6.15 *Ejemplo*

Sea $(i_1, \mathbb{R}^\omega)$ una compactificación de Aleksandrov de $\mathbb{R}$ y sea $(i_2, \overline{\mathbb{R}})$ la compactificación por adjunción de los puntos $-\infty, \infty$. Entonces $(i_2, \overline{\mathbb{R}}) \geq (i_2, \mathbb{R}^\omega)$, porque la sobreyección $h : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $h|\mathbb{R} = 1_{\mathbb{R}}$ y $h(\infty) = h(-\infty) = \omega$ es continua y cumple $h \circ i_2 = i_1$. Las dos compactificaciones consideradas en el ejemplo 8.6.3 son equivalentes. En efecto, $h : \overline{\mathbb{R}} \to [-\pi/2, \pi/2]$ definida por $h|\mathbb{R} = \arctan, h(\infty) = \pi/2, h(-\infty) = -\pi/2$ es el homeomorfismo buscado.

Dejamos al lector probar las siguientes propiedades elementales de la relación $\geq$.

8.6.16 *Proposición*

La relación $\geq$ entre las extensiones de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es reflexiva, transitiva y compatible con la sustitución de una extensión por otra equivalente. Si $(X, \mathcal{X})$ es un T_2-espacio entonces $\geq$ define una relación de orden entre las clases de extensiones equivalentes y de T_2 de $(X, \mathcal{X})$.

Demostración: Ejercicio. ■

Veremos ahora que las compactificaciones de Stone-Cĕch son maximales con respecto a esta relación de orden. Incluso podremos probar un resultado más fuerte.

8.6.17 *Teorema (de Stone-Cĕch)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio completamente regular, $(e, \beta(X))$ su compactificación de Stone-Cĕch. Entonces toda aplicación f de $(X, \mathcal{X})$ en un T_2-espacio compacto $(Y, \mathcal{Y})$ puede factorizarse en la forma $f = h \circ e$, donde $h : \beta(X) \to (Y, \mathcal{Y})$ es continua.

Demostración: Sea Φ (resp. $\tilde{\Phi}$) el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X (resp. Y) en $I = [0, 1]$. Sea $(\tilde{e}, \beta(Y)$ la compactificación de Stone-Cĕch de $(Y, \mathcal{Y})$. Entonces $\tilde{e} : Y \to \beta(Y) \subset I^{\tilde{\Phi}}$ es un homeomorfismo.
Tenemos la situación siguiente (fig. 142).

Si podemos hallar una función continua F que haga conmutativo el diagrama

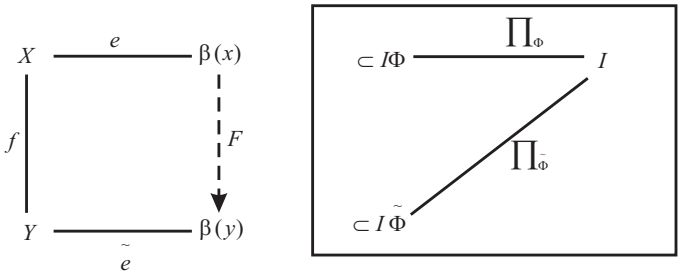


Figura 142

de la izquierda, entonces habremos demostrado el teorema porque en este caso $h : \tilde{e}^{-1} \circ F$ cumple el teorema. Vamos a construir F como restricción de una aplicación continua $F^* : I^{\Phi} \to I^{\tilde{\Phi}}$. La aplicación $f^* : \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi} \circ f$ de $\tilde{\Phi}$ en Φ permite definir una aplicación $F^* : I^{\Phi} \to I^{\tilde{\Phi}}$ mediante $F^*(a) = a \circ f^*$, es decir:

$$F^*((a_\phi)_{\phi\in\Phi}) = (a_{\tilde{\phi}} \circ f)_{\tilde{\phi}\in\tilde{\Phi}} \text{ para } a = (a_\phi) \in I^{\Phi}.$$

Si denotamos por π_ϕ (resp. $\pi_{\tilde{\phi}}$) la ϕ-ésima (resp. $\tilde{\phi}$-ésima) proyección de I^{Φ} (resp. $I^{\tilde{\Phi}}$) sobre I entonces F^* cumple, por definición,

$$\pi_{\tilde{\phi}} \circ F^*(a) = a_{\tilde{\phi}\circ f} = a_{f^*(\tilde{\phi})} = \pi_{f^*(\tilde{\phi})}(a) \ \ (\forall a \in I^{\Phi})$$

Por lo tanto $\pi_{\tilde{\phi}} \circ F^* : I^{\tilde{\Phi}} \to I$ es continua para todo $\tilde{\phi} \in \tilde{\Phi}$ y esto implica que $F^* : I^{\Phi} \to I^{\tilde{\Phi}}$ es continua.

Para todo $x \in X$ tenemos

$$(F^* \circ e)(x) = F^*((\phi(x))_{\phi\in\Phi}) = (\tilde{\phi}(f(x)))_{\tilde{\phi}\in\tilde{\Phi}} = (\tilde{e} \circ f)(x) \tag{8}$$

Por continuidad concluimos que

$$F^*[\beta(X)] = F^*[e\overline{[X]}] \subset \overline{F^*[e[X]]} \subset \overline{\tilde{e}[f[X]]} \subset \overline{\tilde{e}[Y]} = \beta(Y);$$

por lo tanto la restricción $F := F^* \mid \beta(X)$ aplica $\beta(X)$ en $\beta(Y)$. La conmutatividad del diagrama es ahora una consecuencia inmediata de la igualdad (8). ■

8.6.18 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio completamente regular. Entonces la compactificación de Stone-Cĕch $(e, \beta(X))$ es la máxima T_2-compactificación de $(X, \mathcal{X})$. La clase de equivalencia de $(e, \beta(X))$ está determinada de manera única por esta propiedad.

Demostración: Si $(f, (Y, \mathcal{Y}))$ es una T_2-compactificación de $(X, \mathcal{X})$ entonces existe una aplicación continua $h : \beta(X) \to (Y, \mathcal{Y})$ tal que $f = h \circ e$. Como $f[\beta(X)]$ es compacto en $(Y, \mathcal{Y})$ y contiene al subconjunto denso $f[X]$, por lo tanto $f[\beta(X)] = Y$. Con esto queda probada la primera parte del corolario. La segunda parte es ahora una consecuencia directa de 8.6.14. ■

Entre las T_2-compactificaciones de los T_2-espacios *localmente compactos* hay,

por otro lado, una compactificación mínima, que naturalmente no es otra que la de Aleksandrov.

8.6.19 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio localmente compacto, no compacto y sean $(i, (X^*, \mathcal{X}^*))$ una compactificación de Aleksandrov y $(f, (Y, \mathcal{Y}))$ una T_2-compactificación.
Entonces

$$(f, (Y, \mathcal{Y})) \geq (i, (X^*, \mathcal{X}^*)),$$

Es decir, existe una sobreyección continua $h : Y \to X^*$ tal que $h \circ f = i$ (fig. 143).

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathfrak{X}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & (X^*, \mathfrak{X}^*) \\
(Y, \mathfrak{Y}) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 143

Demostración: Ejercicio. Recomendamos proceder en dos pasos:

1. $f[X]$, como todo subconjunto denso y localmente compacto en un espacio de Hausdorff, es abierto en $(Y, \mathcal{Y})$.

2. La aplicación $h : Y \to X^*$, definida por $h|f[X] = i \circ f^{-1}$ y $h[Y \backslash f[X]] = \{\omega\}$ es continua. ■

Nota: En este caso todas las compactificaciones posibles se hallan entre la de Aleksandrov y la de Stone-Cěch. Queremos recalcar que hay compactificaciones diferentes de estas dos. Las necesidades específicas en diversos problemas particulares conducen a la búsqueda de compactificaciones que se adapten idóneamente. En muchos de tales casos son halladas nuevas propiedades universales, que caracterizan las compactificaciones entonces introducidas (compactificación de Wallman, ver KELLEY [93], pág. 167, THRON [153], pág. 140-142).

Para diversas cuestiones de la teoría de integración, para problemas de metrizabilidad, etc., es importante conocer condiciones en las cuales las compactificaciones construidas cumplen los axiomaa de numerabilidad. A tal efecto se da la siguiente definición.

8.6.20 *Definición (numerable al infinito)*

Decimos que un espacio topológico es **numerable al infinito**, cuando en su compactificación de Aleksandrov el punto infinito ω posee una base numerable de vecindades.

La siguiente proposición es inmediata.

8.6.21 *Proposición*

Si $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(X^*, \mathcal{X}^*)$ su compactificación de Aleksandrov. Entonces:

i) $(X^*, \mathcal{X}^*)$ es $AN1$ si y sólo si $(X, \mathcal{X})$ es AN 1 y numerable al infinito;

ii) $(X^*, \mathcal{X}^*)$ es $AN2$ si y sólo si $(X, \mathcal{X})$ es AN 2 y numerable al infinito;

¿Cómo podemos reconocer de la estructura interna de $(X, \mathcal{X})$ si es numerable al infinito?

8.6.22 *Proposición*

Para un T_2-espacio localmente compacto los enunciados siguientes son equivalentes:

i) $(X, \mathcal{X})$ es numerable al infinito.

ii) $(X, \mathcal{X})$ es unión de una familia numerable de compactos.

iii) X es unión de una sucesión numerable de abiertos relativamente compactos (U_n) tales que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii): Sea $(X^*, \mathcal{X}^*)$ la compactificación de Aleksandrov de $(X, \mathcal{X})$ y sea K_n una sucesión de compactos en $(X, \mathcal{X})$ tal que $X^* \backslash K_n$ constituye una base de vecindades de ω en $(X^*, \mathcal{X}^*)$. Se tiene $X = \bigcup_{n \in N} K_n$ pues para todo $x \in X, X^* \backslash \{x\}$ es una vecindad de ω, por lo tanto contiene a algún $X^* \backslash K_{n_0}$. De donde $x \in K_{n_0}$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Definamos $\mathrm{C}_n = \bigcup_{j=0} K_j$. Construiremos (U_i) por inducción. Supongamos construidas $U_1, ..., U_n$. Para cada $x \in \overline{U_n} \cup \mathrm{C}_{n+1}$ existen vecindades abiertas relativamente compactas. Un número finito de ellas cubre al compacto $\overline{U_n} \cup \mathrm{C}_{n+1}$. Pongamos U_{n+1} igual a la unión de estas vecindades. Tal sucesión es la deseada.

iii) $\Rightarrow$ i): Sea(U_n) una sucesión numerable de abiertos relativamente compactos. Entonces $(X^* \backslash \overline{U_n})$ es una base de vecindades de ω, pues para cada compacto $K \subset X, (U_n)$ es una cubierta abierta de K. Por lo tanto K está contenido en una unión finita $\bigcup_{i=1}^{m} U_{n_i}$. Al ser (U_i) creciente se tiene que $K \subset U_{n_0}$ $(n_0 = \sup\{n_i | i = 1, ..., m\})$. Concluimos que $X^* \backslash K \supset X^* \backslash U_{n_0}$. ■

8.6.23 *Ejemplo*

Los espacios $\mathbb{R}^n$ son numerables al infinito, pues están cubiertos por los abiertos relativamente compactos $B(0, n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Consideremos ahora las compactificaciones de Stone-Cěch. En el próximo capítulo veremos que el espacio producto $I^{\mathbb{N}}$ es metrizable. Esto nos conduce al problema de ver cuándo existe una inmersión de $(X, \mathcal{X})$ en $I^{\mathbb{N}}$:

8.6.24 *Teorema (Urysohn)*

Todo AN 2-espacio completamente regular $(X, \mathcal{X})$ tiene una inmersión en $I^{\mathbb{N}}$.

Demostación: Hemos probado en la demostación del teorema de Tychonov (8.6.10) que la colección de abiertos $\mathcal{H} = \{\varphi^{-1}[[0,1)] | \varphi \in \mathrm{C}(X, [0,1])\}$ forma una base de $\mathcal{X}$. Según el 2.° teorema de Lindelöf (8.4.17), $\mathcal{H}$ contiene una base numerable

$$\beta = \{\varphi_n^{-1}[[0,1)] | n \in \mathbb{N}\}$$

Concluimos, según el lema 8.6.9, que la aplicación $x \mapsto (\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de $(X, \mathcal{X})$ en $I^{\mathbb{N}}$ es una inmersión.■

§ 8.7 Aplicaciones

Para mostrar que la compacidad es un concepto de gran utilidad matemáticas, especialmente en Análisis Funcional, daremos en esta sección, algunos ejemplos de aplicación. Probaremos sucesivamente cuatro teoremas fundamentales pertenecientes a diferentes áreas, utilizando argumentos de compacidad.

Primera aplicación; teorema de Riesz: El resultado siguiente es básico en Análisis Funcional y en particular en la Teoría de las Ecuaciones Integrales.

8.7.1 *Teorema (de Riesz)*

Todo espacio normado localmente compacto es de dimensión finita.

Demostración: Si $(E, \|\cdot\|)$ es localmente compacto, entonces existe una bola cerrada $B'(0, \rho') = \{x \in E | \|x\| \leq \rho\}$ que es compacta. Toda bola cerrada $B'(a, \rho')$ es una imagen continua de $B'(0, \rho)$ (por la aplicación $x \mapsto a + (\rho'/\rho)x$). Por tanto toda bola cerrada, en particular la bola unitaria $B_1 := \{x \in E | \|x\| \leq 1\}$, es compacta. Por lo tanto B_1 puede cubrirse con un número finito de bolas abiertas de radio $1/2$: $B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1/2)$. Sea F el subespacio lineal generado por $\{a_1, ..., a_n\}$. F es cerrado porque es de dimensión finita (8.2.13 iv)). Supongamos que existe un $x \in E \backslash F$. Puesto que toda bola cerrada en E es compacta, existe en F un punto y a distancia minimal de x : $d(x, F) = d(x, y)$. Tenemos $F - y = F$, por lo tanto $d(x - y, 0) = \|x - y\| = d(x, F) = d(x - y, F - y) = d(x - y, F)$. Concluimos, por la homogeneidad positiva de la norma, que para

$$z = \|x - y\|^{-1}(x - y) \in B_1 :$$

$$d(z, F) = \|x, y\|^{-1} d(x - y, F) = 1$$

Pero esto es una contradicción, porque $z \in B\ (a_i, 1/2)$ para al menos una $a_i \in F\ (i = 1, ..., n)$ es decir $d(z, F) < 1/2$ (fig. 144). ■

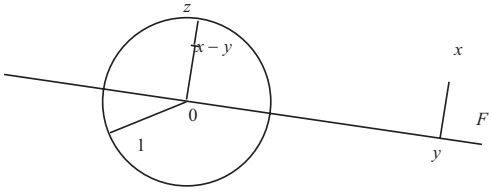


Figura 144.

Nota: Por la demostración anterior, el teorema de Riesz puede también enunciarse en la forma siguiente: *Todo espacio normado que contiene una bola compacta es de dimensión finita.*

Segunda aplicación; (teorema de Alaoglu). Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$ y E' el espacio dual, es decir el espacio vectorial de todas las formas lineales continuas $f : E \to K$. Recordemos que E' es un espacio normado con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in E \ \wedge \ \|x\| \leq 1\}$$

La topología débil $\mathcal{X}$ sobre E' es la topología más débil que hace continua a toda forma lineal $\hat{x} : f \mapsto f(x)$ sobre E' $(x \in E)$. El resultado siguiente es básico para el análisis de los espacios duales.

8.7.2 *Teorema de (Alouglu)*

La bola unitaria $B_1 = \{f \in E' \mid \|f\| \leq 1\}$ en el espacio dual E' es débilmente compacta.

Demostración: E' es un subconjunto del espacio K^E de todas las funciones reales o complejas sobre E.

La topología producto sobre K^E, es decir, la topología de la convergencia puntual, induce la topología débil en el subespacio $E' \subset K^E$. Hay que probar que B_1 es compacto con respecto a la topología producto. Para $f \in B_1$ tenemos $|f(x)| \leq \|x\|$, por lo tanto B_1 es *débilmente acotado* (8.3.4). Por la caracterización del ejemplo 8.3.4 sólo falta probar que B_1 es también *débilmente cerrado.* Sea $h \in K^E$ un punto adherente de B_1 en K^E con respecto a la topología de la convergencia puntual. Veremos que $h : E \to K$ es lineal. En efecto, para todo $x, y \in E$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $f \in B_1$ tal que $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$, $|f(y) - h(y)| < \varepsilon$ y $|f(x+y) - h(x+y)| < \varepsilon$. Puesto que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, concluimos que $|h(x) + h(y) - h(x+y)| < 3\varepsilon$, es decir h es aditiva. De manera similar se demuestra que $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ para todo $\alpha \in K$. Por lo tanto h es lineal.

Como $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $f \in B_1(x \in E)$ se deduce además que $h(x) \leq \|x\| + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $|h(x)| \leq \|x\|$. En suma, h es una forma lineal continua de norma $\|h\| \leq 1; h \in B_1$. Luego, B_1 es débilmente cerrado. ■

Tercer aplicación: teorema de d'Alembert. El teorema siguiente es también conocido como 'Teorema Fundamental del Algebra'.

8.7.3 *Teorema de (d'Alembert)*

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, con coeficientes complejos a_i y de grado $n > 0$, tiene una raíz compleja.

Demostración: $\mathbb{C}$ es localmente compacto. Es fácil ver que la función $f : z \mapsto |p(z)|$ tiende a infinito si $|z| \to \infty$. Por tanto, por 8.6.6 alcanza su mínimo μ en un punto z_0 sobre $\mathbb{C}$. Supongamos por reducción al absurdo que $p(z_0) \neq 0$.
Consideremos el desarrollo de Taylor de la función polinomial p en z_0:

$$p(z) = p(z_0) + c_k(z - z_0)^k + ... + c_n(z - z_0)^n$$

donde $c_k \neq 0$. Existe una circunferencia

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho\}$$

con centro z_0 tal que

$$|c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + ... + c_n(z - z_0)^n| < |c_k(z - z_0)^k| = |c_k|\rho^k.$$

Si z recorre toda la circunferencia C entonces $c_k(z - z_0)^k$ recorre toda la circunferencia de centro 0 y de radio $|c_k|\rho^k$; por lo tanto $p(z_0) + c_k(z - z_0)^k$ recorre toda la circunferencia de centro $p(z_0)$ y radio $|c_k|\rho^k$. Pero entonces existe un punto $z_1 \in C$ tal que $p(z_0) + c_k(z_1 - z_0)^k$ pertenece al segmento $[0, p(z_0)]$ en el plano complejo. Esto significa que:

$$|p(z_0) + c_k(z_1 - z_0)^k| = \mu - |c_k|\rho^k.$$

Por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$|p(z_1)| \leq |p(z_0) + c_k(z_1 - z_0)^k| +$$
$$+|c_{k+1}(z_1 - z_0)^{k+1} + ... + c_n(z_1 - z_0)^n| < (\mu - |c_k|\rho^k) +$$
$$+|c_k|\rho^k = \mu,$$

que contradice a la definición $\mu = \text{mín}\{|p(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ (fig. 145).
En efecto, como la función

$$q(z) = c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^{n-k}$$

tiende a 0 cuando z tiende a z_0, existe $\delta > 0$ tal que $|q(z)| < |c_k|$ para cada z tal que $|z - z_0| < \delta$ tomando $\rho = \frac{\delta}{2}$, obtenemos la desigualdad deseada. ■

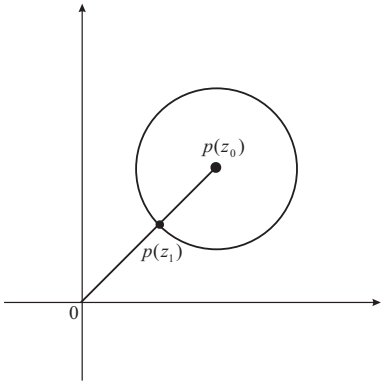


Figura 145.

Nota: Del análisis complejo se sabe que toda función polinomial $p : z \mapsto p(z)$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es abierta. Si presuponemos este resultado (véase Ahlfors [2]) podemos evitar todos los cálculos en la demostración precedente. En efecto, por el ejercicio 8.6.6 la función $z \mapsto |p(z)|$ admite su mínimo en un punto del plano complejo. Por otro lado, el ejercicio 4.5.14 nos dice que una función $z \mapsto |p(z)|$ no puede admitir un mínimo diferente de 0 si la función $z \mapsto p(z)$ es abierta.

Cuarta aplicación: teorema de Kreĭn-Milman: Continuaremos con esta aplicación, nuestra incursión en la teoría de convexidad iniciada en el capítulo anterior.

8.7.4 *Definición (punto extremal, subconjunto extremal)*

Sea C un subconjunto en un espacio vectorial real E. Se dice que $z \in C$ es un **punto extremal** de C si z no es combinación estrictamente convexa de puntos de C, es decir, si para todos los $x, y \in C, \lambda \in (0,1)$, se cumple:

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \;\Rightarrow\; x = y = z$$

Se dice que $K \subset C$ es un *subconjunto extremal en* C si para todos los $x, y \in C$, $\lambda \in (0,1)$ se cumple (fig. 146):

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K \Rightarrow x, y \in K$$

Evidentemente C es un subconjunto extremal en C. Un punto $z \in C$ es extremal en C si y sólo si el subconjunto $\{z\}$ es extremal en C.

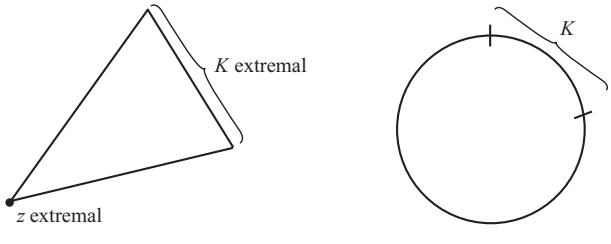


Figura 146.

8.7.5 *Teorema (Kreĭn-Milman)*

Sea $(E, \mathcal{X})$ un T_2-espacio localmente convexo y $C \subset E$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal compacto en C contiene un punto extremal de C.

Demostración: Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos extremales compactos de C. $\mathcal{K}$ está parcialmente ordenado por la inclusión $\supset$ y no es vacío porque contiene a C. Veremos que está *inductivamente* ordenado. En efecto, si $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia totalmente ordenada de subconjuntos extremales en C entonces $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$ es compacta y no vacía, por 8.1.16; además es un subconjunto extremal, porque para $x, y \in C,\ \lambda \in (0,1)$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I\ \ (\lambda x + (1-\lambda)y \in K_\alpha)$$
$$\Rightarrow x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha.$$

Por el lema de Zorn, todo subconjunto extremal compacto K en C contiene un subconjunto compacto extremal minimal. Falta sólo probar que todo elemento minimal K_0 en $\mathcal{K}$ contiene un único punto (que es entonces el punto extremal buscado). Supongamos por reducción al absurdo que K_0 contiene dos puntos diferentes x_1, x_2. Por el teorema de separación estricta (7.5.13), existe una forma lineal continua $f : E \to \mathbb{R}$ que separa x_1 y $x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$. $f|K_0$ admite su valor mínimo $\mu = \text{mín}\ \{f(x)|x \in K_0\}$ en un punto x_0 en el compacto K_0. El conjunto de estos puntos mínimos $K_1 = \{x \in K_0 | f(x) = \mu\}$, es un subconjunto propio no vacío y cerrado de K_0. Supongamos que $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_1$ para $x, y \in C$ y $\lambda \in (0,1)$. Entonces

$$x, y \in K_0\ \ y\ \ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \mu.$$

Entonces $f(x) = f(y) = \mu$. Concluimos que $x, y \in K_1$ y, por tanto, $K_1 \in \mathcal{K}$. Hemos llegado a una contradicción: $\mathcal{K}$ no puede contener un elemento estrictamente más pequeño que K_0. ■

Dejamos al lector probar la siguiente consecuencia importante.

8.7.6 *Corolario*

En un T_2-espacio localmente convexo, todo compacto convexo X es la envoltura convexa cerrada del conjunto X_e de sus puntos extremales:
$X = \overline{\mathfrak{C}(X_e)}$
Demostración: Ejercicio. ■

8.7.7 *Corolario (principio del máximo)*

Sea (E, χ) un T_2-espacio localmente convexo y $C \subset E$ un convexo compacto. Entonces toda función convexa semicontinua superiormente $f : C \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo en un punto extremal de C.

Demostración: Sea $m = \text{máx}\ f[C]$ (8.2.11). Por ser f convexa, el conjunto de todos los máximos: $M := f^{-1}[\{m\}]$ es extremal pues $z = \lambda x + (1-\lambda)\ y \in M$

implica que $m = f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq m$. Por lo tanto $f(x) = f(y) = m$, es decir $x, y \in M$. Por ser f semicontinua superiormente, $M = f^{-1}[[m, \infty)]$ es cerrado, luego compacto. Por el teorema anterior, M contiene un punto extremal. ■

CAPÍTULO 9 Continuos

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. El primero en tratar con esta clase particular de espacios fue G. Cantor, en 1883, aunque él se limitó a estudiar los continuos en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}$, los intervalos $[a, b]$ donde $a < b$, son continuos y son todos homeomorfos entre sí. Si $a = b$, entonces se trata de un conjunto con un sólo punto, el cual es también un continuo. Así que la recta real contiene, topológicamente hablando, solamente dos tipos de continuos.

Para $n \geq 2$, la diversidad de continuos contenidos en $\mathbb{R}^n$ resulta tan grande que una clasificación completa parece imposible. Sin embargo, los continuos poseen propiedades que permiten su estudio sistemático. Por ser métricos y compactos, resultan ser separables. De aquí se sigue que todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. En las secciones 1, 2, 3 y 4 se exponen conceptos básicos y se demuestran algunos de los teoremas que estructuran la Teoría de los Continuos.

Quizá uno de los mayores atractivos de los continuos sea su versatilidad. En efecto, es posible estudiar en ellos una gran diversidad de propiedades topológicas, algunas de las cuales se exponen en las secciones 5 y 6. Estas dos secciones están dedicadas a dos clases particulares de continuos, los localmente conexos y los encadenables. Actualmente la teoría de continuos es un campo de investigación con mucha actividad, de hecho, la creación de nuevas propiedades, ejemplos y contraejemplos, se realiza regularmente.

9.1 El cubo de Hilbert, intersecciones anidadas y conceptos básicos

Una exposición relacionada con espacios métricos, compacidad y conexidad se ha hecho en los capítulos 1, 8 y 6 respectivamente. En esta sección expondremos conceptos y resultados que son de particular importancia para la teoría de los continuos. En particular demostraremos que todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert y que la intersección anidada de continuos es un continuo.

9.1.1 *Definición*

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto y conexo. Un **subcontinuo** es un subespacio de un espacio métrico, el cual (con la topología heredada) es un continuo.

9.1.2 *Ejemplos (continuos y subcontinuos)(Figuras 147 y 148)*

a) Los únicos subcontinuos de la recta real son los intervalos cerrados y acotados (véase el teorema 6.1.5). Por el contrario, si $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ contiene una enorme variedad de continuos, como se observa en los ejemplos que siguen.

b) El *círculo unitario*, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

c) El *disco*, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

d) El continuo $X = \mathcal{C}l\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$ se conoce como la *curva topológica.*

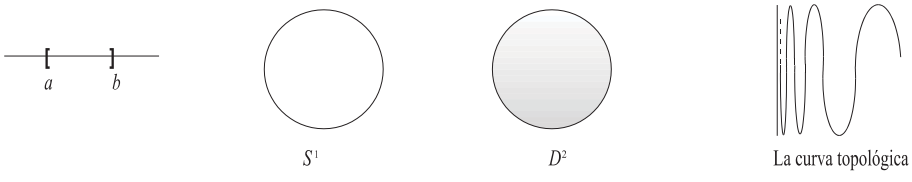


Figura 147

e) $\mathbf{C} = X \cup A$ donde A es un arco que une al punto $p = (1, \operatorname{sen} 1)$ con el punto $q = (0, -1)$, de manera que $X \cap A = \{p, q\}$ el cual se conoce como el *círculo de Varsovia.*

f) Sea $P \subseteq \mathbb{R}^2$ el continuo que consiste de la unión de los siguientes segmentos rectilíneos: Los dos que unen el $(0, 0)$ con el $(1, 0)$ y $(0, 1)$; aquellos que unen el $(\frac{1}{2^n}, 0)$ con $(\frac{1}{2^n}, 1)$, $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. Llamaremos a P **espacio peine**.

g) El *toro* $T = S^1 \times S^1$.

h) El *toro sólido* $T = S^1 \times D^2$.

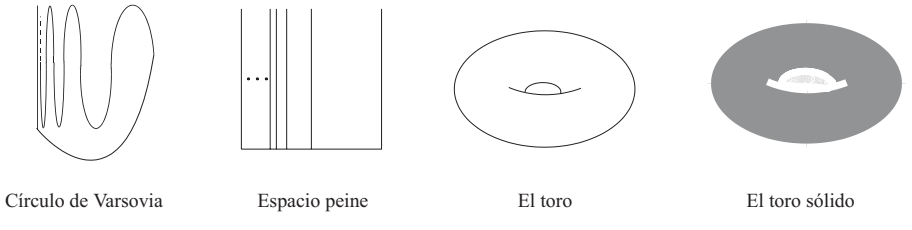


Figura 148

9.1.3 *Ejercicio*

Exprese cada continuo X de los ejemplos anteriores (9.1.2) como $X = H \cup K$, donde H y K son subcontinuos propios de X.

9.1.4 *Notación y observaciones*

Recordemos que los subconjuntos compactos de espacios de Hausdorff, son cerrados (8.1.13). Como todo espacio métrico es de Hausdorff, todo subcontinuo de un espacio métrico es cerrado.

Cuando un espacio X no es conexo (véase Definición 6.1.1), entonces $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos ajenos y cada uno de ellos es un subconjunto abierto y no vacío de X. Para expresar esto utilizaremos la siguiente notación: $X = U \mid V$. Note que si éste es el caso, U y V son también cerrados en X.

Recordemos también (corolario 6.1.12) que si $X = U \mid V$ y C es un subconjunto conexo de X, entonces $C \subseteq U$ ó $C \subseteq V$.
Un **abierto-cerrado** de X es un subconjunto de X que es a la vez abierto y cerrado. Un espacio es conexo si y sólo si los únicos abiertos-cerrados de X son X y el conjunto vacío.

Demostraremos ahora que el *Cubo de Hilbert* $I^{\mathbb{N}}$ (8.3.3) es un "continuo universal", lo cual significa que $I^{\mathbb{N}}$ es un continuo y cualquier otro continuo es homeomorfo a un subcontinuo de $I^{\mathbb{N}}$.

Si X es un espacio métrico con métrica d, $d'(x,y) = \min\{d(x,y);1\}$ define una métrica sobre X, la cual induce la misma topología que la métrica d. Por otra parte, si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un espacio métrico con métrica d_n, entonces la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

define una métrica en el producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, que induce la topología producto (véase 10.2.1). De aquí, de 6.1.26 y de 8.3.1, se deduce que el producto numerable de continuos es un continuo. Así, el cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, donde $I_n = [0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es un continuo.

Para demostrar que $I^{\mathbb{N}}$ es un continuo universal utilizaremos las siguientes proposiciones, que dejamos como ejercicios.

9.1.5 *Ejercicio*

Demuestre que un espacio métrico compacto es separable (contiene un conjunto denso y numerable).

9.1.6 *Ejercicio*

Sea X un espacio métrico y $x_o \in X$. Demuestre que la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x, x_o)$ es continua.

9.1.7 *Teorema(P. Urysohn)*

Sea X un espacio métrico compacto, con métrica d. Entonces existe una inmersión de X en $I^{\mathbb{N}}$, es decir, X es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.

Demostración: Puesto que X es métrico y compacto, se sigue del ejercicio 9.1.5 que X contiene un subconjunto denso y numerable $D = \{x_1, x_2, ...\}$. Definamos $h : X \to I^{\mathbb{N}}$ como sigue: $h(x) = (d(x, x_1), d(x, x_2), ...)$. Recuerde que una función cuyo contradominio es un producto de espacios topológicos, es continua si y sólo si cada función coordenada es continua (5.2.15). Se sigue del ejercicio 9.1.6 que la función $h_i(x) = d(x, x_i)$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$, así h es continua. Por otra parte, sean $x, y \in X$ dos puntos distintos y $r = \frac{d(x,y)}{4}$, entonces, puesto que D es denso, $B_r(x) \cap D \neq \varnothing$. Sea $x_i \in B_r(x) \cap D$, entonces las desigualdades $d(x, x_i) < r < d(x_i, y)$ muestran que $h(x)$ y $h(y)$ tienen distinta coordenada i-ésima y así $h(x) \neq h(y)$. De aquí se sigue que $h : X \to h(X)$ es continua y biyectiva. Luego, se sigue de 8.2.5 i) que h es un homeomorfismo de X en $h(X)$ ■.

El siguiente ejercicio requiere conocimientos de cardinalidad de conjuntos.

9.1.8 *Ejercicio*

Demuestre que un espacio métrico separable contiene a lo más $2^{\aleph_o}$ elementos y un continuo con más de un elemento tiene exactamente $2^{\aleph_o}$ elementos.

El siguiente teorema sobre conexidad nos será de gran utilidad más adelante.

9.1.9 *Teorema*

Sea X un continuo y C un subcontinuo de X. Supongamos que $X \backslash C = U \mid V$. Entonces $C \cup U$ y $C \cup V$ son subcontinuos de X.

Demostración: Puesto que V es abierto en $X \backslash C$, entonces V es abierto en X y, por lo tanto, $X \backslash V = C \cup U$ es cerrado. Análogamente, $C \cup V$ es cerrado.

Demostraremos la conexidad de $C \cup U$.

Supongamos que $C \cup U = M \mid N$. Como C es conexo, podemos suponer que $C \subseteq N$ y, por lo tanto, $M \subseteq U$. Se obtienen las siguientes conclusiones:

i) $X = C \cup U \cup V = M \cup (N \cup V)$.

ii) M y $N \cup V$ son no vacíos puesto que M y N son no vacíos.

iii) $M \cap (N \cup V) = (M \cap N) \cup (M \cap V) = M \cap V \subset U \cap V = \varnothing$.

iv) Como M es cerrado en $C \cup U$ y $C \cup U$ es cerrado en X, se tiene que M es cerrado en X.

v) De la igualdad $X \backslash C = U|V$ se sigue que $\bar{V} \backslash V \subseteq C \subseteq N$. Entonces, como N es cerrado en X, $\overline{N \cup V} = \overline{N} \cup \overline{V} = N \cup V$. Así, $N \cup V$ es cerrado en X.

De (i) - (v), se deduce que $X = M|(N \cup \mathrm{V})$, lo cual contradice la conexidad de X. Por lo tanto, $C \cup U$ es conexo. Similarmente, se demuestra que $C \cup V$ es conexo. ■

El siguiente teorema, de fundamental importancia en las Matemáticas, es utilizado frecuentemente en la Teoría de los Continuos.

9.1.10 *Teorema (de Baire)*

Sea X un espacio compacto y Hausdorff no vacío. Supongamos que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Entonces $\overset{\circ}{\overline{F_n}} \neq \varnothing$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Supongamos que $\overset{\circ}{\overline{F_n}} = \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $X \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Para esto, construiremos una sucesión de cerrados no vacíos de X con la propiedad de la intersección finita. Sea G_0 un abierto no vacío de X. Como $\overset{\circ}{\overline{F_1}} = \varnothing$, entonces $G_0 \backslash \overline{F_1}$ es abierto y no vacío. Por la regularidad de X, existe un abierto G_1, no vacío tal que $\overline{G_1} \subseteq G_0 \backslash \overline{F_1}$. De la misma manera, dado G_n construimos un abierto G_{n+1} tal que $\overline{G_{n+1}} \subset G_n \backslash \overline{F_{n+1}} \subset G_n \subset \overline{G_n}$. Así que la sucesión de cerrados $\{\overline{G_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita y, por la compacidad de X, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{G_n} \neq \varnothing$. De aquí que $X \neq X \backslash \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{G_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \backslash \overline{G_n}) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_n} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Esto contradice que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.■

Una versión equivalente del teorema de Baire se deja como ejercicio al lector (compárese con el teorema 10.4.6).

9.1.11 *Ejercicio*

Sea X un espacio compacto y Hausdorff y sea $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos densos y abiertos de X. Demuestre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \neq \varnothing$.

Vimos anteriormente que el producto numerable de continuos es un continuo y así, con el producto topológico, podemos construir nuevos continuos partiendo de otros ya dados. Presentaremos aquí otra forma de construir continuos: El método de *intersecciones anidadas*.

9.1.12 *Teorema*

Sea K_1 un continuo y $K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$, una sucesión decreciente (anidada) de subcontinuos de K_1. Entonces la intersección $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ es un continuo.

Demostración: Ya que la intersección de cerrados es cerrada, K es cerrado en K_1 y por lo tanto K es compacto. Supongamos que K no es conexo, es decir, $K = G|H$. Como G y H son cerrados en K y K es cerrado en K_1, G y H son cerrados en K_1. Puesto que $G \cap H = \varnothing$ y K_1 es normal, existen U y V abiertos, ajenos, con $G \subset U$ y $H \subset V$. Demostraremos ahora que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $K_n \subset U \cup V$. Supongamos, por el contrario que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \cap (K_1 \backslash (U \cup V)) \neq \varnothing$. Entonces la familia $\{K_n \cap (K_1 \backslash (U \cup V))\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita, lo cual implica que $K \cap (K_1 \backslash (U \cup V)) \neq \varnothing$ y esto contradice que $K \subset U \cup V$. Así, $K_n \subset U \cup V$ para algún $n \in \mathbb{N}$, además $K_n \cap U \supset G \neq \varnothing$ y $K_n \cap V \supset H \neq \varnothing$, lo cual muestra que $K_n = K_n \cap U \mid K_n \cap V$ y contradice la conexidad de K_n.■

9.1.13 *E*jercicio

Dé un ejemplo que ilustre que la hipótesis de compacidad en el teorema 9.1.12 es esencial. Es decir, proporcione un ejemplo de una familia anidada de conexos cuya intersección no es conexa.

9.1.14 *Ejercicio*

Demuestre el teorema 9.1.12 en la siguiente forma, la cual es más general. Sea A una familia de índices y $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de continuos con la propiedad de intersección finita. Entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$ es un continuo.

9.1.15 *Ejemplo*

Sea K_1 un toro sólido contenido en $\mathbb{R}^3$. Es decir, $K_1 = S^1 \times D^2$. Sea K_2 un toro sólido contenido en K_1, con la propiedad de que K_2 le da dos vueltas a K_1 (véase la Figura 149). Continuamos construyendo inductivamente K_n un toro sólido contenido en K_{n-1} de manera que K_n le da dos vueltas a K_{n-1} (K_n le da 2^{n-1} vueltas a K_1). La intersección $\sum = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ se conoce como *solenoide diádico*. En el solenoide diádico la sucesión para números de vueltas está dada por $\{2, 2, 2, 2...\}$. Otros solenoides diferentes se contruyen con diferentes sucesiones.

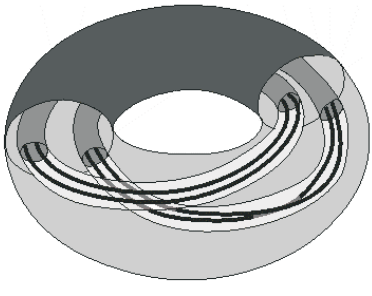


Figura 149

9.2 Cuasicomponentes y teoremas de comportamiento en la frontera

En la sección 6.2 se estudiaron propiedades de las componentes. Se estudiará en esta sección un concepto muy similar, el de cuasicomponente, el cual coincide con el concepto de componente cuando el espacio es compacto. Este concepto nos permitirá también demostrar los teoremas de *comportamiento en la frontera* que constituyen una herramienta muy útil en la teoría de continuos.

9.2.1 *Definición*

Sea X un espacio topológico y $p \in X$. La **cuasicomponente** Q_p de p en X, es la intersección de todos los abiertos-cerrados de X que contienen a p. Es decir,

$$Q_p = \cap\{A : A \text{ es abierto-cerrado en } X \text{ y } p \in A\}.$$

Dado un espacio X y $p \in X$, denotamos por C_p a la componente de X, con $p \in C_p$.

El siguiente lema será utilizado para demostrar la conexidad de las quasicomponentes en espacios compactos.

9.2.2 *Lema*

Sea X un espacio métrico y S un subconjunto no conexo de X. Entonces existe un subconjunto abierto G de X tal que $S \cap G \neq \varnothing \neq S \backslash Cl(G)$ y $S \cap fr(G) = \varnothing$.

Demostración: Como S no es conexo, $S = U|V$. Sea d una métrica para X. El lector podrá verificar (ejercicio 9.2.3) que el conjunto $G = \{x \in X : d(x, U) < d(x, V)\}$ satisface las conclusiones del teorema.

9.2.3 *Ejercicio*

Verifique que el conjunto G en la demostración del lema 9.2.2 satisface las conclusiones requeridas.

Las cuasicomponentes satisfacen las siguientes propiedades. Compárese con las propiedades de las componentes (6.2.1 y 6.2.2).

9.2.4 *Teorema*

Sea X un espacio topológico y $p \in X$.

a) Si X es conexo, entonces $Q_p = X$.

b) La cuasicomponente Q_p es un subconjunto cerrado de X.

c) Un punto $q \in X$ es elemento de Q_p si y sólo si para toda separación $X = U|V$ de X, ó bien $p, q \in U$ ó bien $p, q \in V$. Debido a esta propiedad, decimos que la cuasicomponente de p es el conjunto de puntos que *no pueden separarse de* p.

d) El conjunto de cuasicomponentes es una partición de X.

e) $C_p \subseteq Q_p$. En general no se da la igualdad de estos conjuntos.

f) Si X es métrico y compacto, la cuasicomponente Q_p es un subconjunto conexo de X, y $C_p = Q_p$.

Demostración:

a) Se sigue de que los únicos abiertos-cerrados de un conexo X son X y el conjunto vacío.

b) Las cuasicomponentes son intersecciones de cerrados.

c) Sea $q \in Q_p$ y supongamos que $X = U|V$ y que $p \in U$. Como U es abierto-cerrado, entonces $q \in U$. Inversamente, supongamos que la propiedad de que q *no puede separarse de* p es válida y sea U un abierto-cerrado de X que contiene a p. Entonces la igualdad $X = U|(X \backslash U)$ implica que $q \in Q_p$.

d) Se sigue inmediatamente de c) ya que la relación p *no puede separarse de* q es una relación de equivalencia

e) Sea $q \in C_p$ y supongamos que $X = U|V$ y que $p \in U$. Como C_p es conexo, entonces $C_p \subset U$, así que $q \in U$. De aquí se sigue que $q \in Q_p$.

f) Supongamos que Q_p no es un subconjunto conexo. Por el lema 9.2.2, existe un abierto G de X que satisface $G \cap Q_p \neq \varnothing$, $(X \backslash G) \cap Q_p \neq \varnothing$ y $fr(G) \cap Q_p = \varnothing$. Sea $q \in G \cap Q_p$. Como $fr(G) \cap Q_p = \varnothing$ y $fr(G)$ es un compacto, se tiene que existe un abierto-cerrado F tal que $q \in F$ y $F \cap fr(G) = \varnothing$ (ver ejercicio 9.2.6, más adelante). Sea $r \in Q_p \cap (X \backslash G)$. Entonces $r \in X \backslash (F \cap G)$ y $q \in F \cap G$. Por otra parte $F \cap G$ es abierto. Note que $F \cap G$ también es cerrado, ya que $(\overline{F \cap G} = \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap \overline{G} = (F \cap fr(G)) \cup (F \cap G) = F \cap G$. Esto contradice el inciso c) y demuestra f).■

El siguiente es un ejemplo de un espacio X en el cual la cuasicomponente de un cierto punto contiene propiamente a la componente. (véase la Figura 150).

9.2.5 *Ejemplo*

Sea X la unión de los siguientes conjuntos contenidos en $\mathbb{R}^2$: Las rectas l_1 y l_2 con ecuaciones $y = -1$ y $y = 1$, respectivamente, y los perímetros de los rectángulos R_n con lados paralelos a los ejes y con vértices $(-n, 1 - \frac{1}{n+1})$, $(-n, -1 + \frac{1}{n+1})$, $(n, 1 - \frac{1}{n+1})$, $(n, -1 + \frac{1}{n+1})$. Sea $p \in l_1$. Se deja como ejercicio al lector verificar que $Q_p = l_1 \cup l_2$ mientras que $C_p = l_1$ (fig. 150).

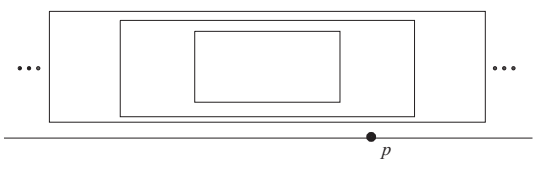


Figura 150

9.2.6 *Ejercicio*

Sea X un espacio métrico y compacto, Q una cuasicomponente de X y C un subconjunto cerrado (compacto) de X tal que $Q \cap C = \varnothing$. Demuestre que existe un abierto-cerrado F de X tal que $Q \subset F$ y $F \cap C = \varnothing$.

9.2.7 *Ejercicio*

Demuestre las afirmaciones que se hacen en relación con el ejemplo presentado en la demostración de 9.2.4 e). Además, construya un nuevo ejemplo de un espacio X y un punto $p \in X$ tal que $C_p \neq Q_p$.

A continuación demostraremos los teoremas de comportamiento en la frontera (9.2.9 y 9.2.10) que son herramientas muy útiles en la teoría de los continuos. En particular, del teorema 9.2.9, se deduce que un continuo contiene una infinidad de subcontinuos propios no degenerados (es decir, con más de un punto).
El siguiente lema es un caso particular del teorema 9.2.10. Sin embargo, utilizaremos este caso particular para demostrar el caso general.

9.2.8 *Lema*

Sea X un continuo, U un subconjunto abierto propio y no vacío de X y K una componente de $\overline{U}$. Entonces $K \cap fr(U) \neq \varnothing$.

Demostración: Supongamos que $K \cap fr(U) = \varnothing$. Entonces $K \subset U$. Por el ejercicio 9.2.6, existe un abierto-cerrado A de $\overline{U}$ tal que $K \subset A \subset U$. Puesto que A es cerrado en $\overline{U}$, A es cerrado en X. También, A es abierto en X, ya que A es abierto en U y U es abierto en X. Como $\varnothing \neq A \neq X$, esto contradice la conexidad de X.■

9.2.9 *Teorema*

Sea X un continuo y A un subcontinuo propio de X contenido en un abierto U. Entonces existe un subcontinuo B de X contenido en U, que contiene propiamente a A.

Demostración: Como X es regular, existe V abierto tal que $A \subseteq \mathrm{V} \subseteq \overline{\mathrm{V}} \subseteq U$. Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A. Entonces B es un subcontinuo de X, que contiene a A y $B \subset U$. Se sigue del lema 9.2.8 que $B \cap fr(V) \neq \varnothing$, lo cual demuestra que $A \neq B$.■

9.2.10 *Teorema*

Sean X un continuo, E un subconjunto propio de X y K una componente de E. Entonces $\overline{K} \cap fr(E) \neq \varnothing$.

Demostración: Como X es conexo, $fr(E) \neq \varnothing$ y si suponemos que $\overline{K} \cap fr(E) = \varnothing$, entonces $\overline{K} \subset \overset{\circ}{E}$. Se sigue del teorema 9.2.9 que existe un continuo B tal que $\overline{K} \subset B \subset \overset{\circ}{E}$ y $\overline{K} \neq B$. Pero esto contradice que K es una

componente de E.■

9.3 Continuos irreducibles y composantes

9.3.1 *Definición*

Sea X un continuo y sea $A \subseteq X$. Se dice que X es **irreducible alrededor de** A, si ningún subcontinuo propio de X contiene a A. Se dice que un continuo X es **irreducible**, si existen puntos $p, q \in X$ tales que X es irreducible alrededor de $\{p, q\}$. En este caso, también se dice que X es **irreducible entre** p y q.

9.3.2 *Ejemplos:*

a) El intervalo $[0, 1]$ es irreducible entre $p = 0$ y $q = 1$.

b) La curva topológica, $\overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = sen\frac{1}{x},\ x \in (0, 1]\}}$, es irreducible entre $p = (0, y)$ y $q = (1, sen1)$, para cualquier $y \in [-1, 1]$.

c) El círculo unitario S^1, no es irreducible.

d) El triodo simple $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$, no es irreducible.

En los ejemplos anteriores, notamos que no todo continuo es irreducible. Sin embargo, como veremos en los resultados siguientes, todo continuo contiene subcontinuos irreducibles. Para demostrar esto, utilizaremos el Lema de Zorn (ver A.10.8).

9.3.3 *Teorema*

Sea X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Entonces X contiene un subcontinuo irreducible alrededor de A.

Demostración: Sea $\mathcal{D} = \{Y : Y$ es subcontinuo de X y $A \subseteq Y\}$. Consideramos sobre $\mathcal{D}$ el siguiente orden parcial. Para $Y, Y' \in \mathcal{D}$, $Y \leq Y'$ si y sólo si $Y \supset Y'$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{D}$. Esto es, para cualesquiera $Y, Y' \in \mathcal{C}$ se tiene que $Y \leq Y'$ o $Y' \leq Y$. Sea $K = \cap\{Y : Y \in \mathcal{C}\}$. Se sigue del ejercicio 9.1.14 que K es un subcontinuo de X. Además, está claro que $A \subset K$. Así, K es una cota superior para $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Entonces, por el Lema de Zorn, $\mathcal{D}$ tiene un elemento maximal. Es decir, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que, si $Y \in \mathcal{D}$ y $D \leq Y$ entonces $D = Y$. Esto significa que ningún elemento de $\mathcal{D}$ está contenido propiamente en D y así D es el continuo irreducible alrededor de A.■

Un concepto de utilidad, para el estudio de los continuos irreducibles, es el de *composante*.

9.3.4 *Definición*

Sea X un continuo no degenerado y $p \in X$. La *composante de p en X*, denotada por $k(p)$, es

$$k(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } A \text{ de } X \text{ con } p, x \in A\}.$$

9.3.5 *Observación*

Para un continuo no degenerado X y $p \in X$, la composante de p en X es un subconjunto conexo de X.

9.3.6 *Ejercicios:*

a) Sea $X = [0,1]$, describa $k(0)$, $k\left(\frac{1}{2}\right)$ y $k(1)$.

b) Sea X el triodo simple ¿Cuántas composantes diferentes existen en X?

c) ¿Cuántas composantes diferentes existen en el círculo unitario S^1.

9.3.7 *Teorema*

Sea X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $k(p)$ de p en X es un conjunto denso en X.

Demostración: Sea U un abierto no vacío en X. Veremos que $U \cap k(p) \neq \varnothing$. Por regularidad, existe un abierto no vacío V en X tal que $\overline{V} \subset U$. Si $p \in \overline{V}$ entonces $p \in U \cap k(p)$ y no hay más que demostrar. Ahora, supóngase que $p \notin \overline{V}$. Denotamos $E = X \backslash \overline{V}$. Sea C la componente de E que contiene a p. Por el teorema 9.2.10, se tiene que $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \varnothing$. Por otra parte, $\overline{C}$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p. Así, $\overline{C} \subset k(p)$. Entonces $k(p) \cap \overline{V} \neq \varnothing$. Como $\overline{V} \subset U$, se concluye que $k(p) \cap U \neq \varnothing$. ■.

9.3.8 *Teorema*

Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es irreducible si y sólo si existen por lo menos dos composantes diferentes en X.

Demostración: Supóngase que X es irreducible. Sean $p, q \in X$ tales que X es irreducible entre p y q. Esto es, no existe un subcontinuo propio de X que contenga al conjunto $\{p, q\}$. Se sigue de la definición 9.3.6 que $p \notin k(q)$ y $q \notin k(p)$. Así, $k(p) \neq k(q)$.

Recíprocamente, supóngase que existen puntos $p, q \in X$ tales que $k(p) \neq k(q)$. Entonces $k(p) \neq X$ o $k(q) \neq X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k(p) \neq X$. Sea $r \in X \backslash k(p)$. Entonces, no existe un subcontinuo propio de X que contenga al conjunto $\{p, r\}$. Por lo tanto, X es irreducible entre p y r.■

Observamos en 9.3.5 que las composantes son conjuntos conexos. En el ejercicio que sigue, el lector demostrará que el complemento de cualquier composante también es un conjunto conexo.

9.3.9 *Ejercicio*

Sea X un continuo no degenerado. Sea $p \in X$. Demuestre que $X \backslash k(p)$ es un subconjunto conexo de X.

9.3.10 *Teorema*

Sea X un continuo no degenerado. Sea $p \in X$. Entonces la composante $k(p)$ de p en X es una unión numerable de subcontinuos propios de X, cada uno de los cuales contiene a p.

Demostración: Sea $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para el subespacio $X \backslash \{p\}$ tal que $U_i \neq \varnothing$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Denotemos por C_i a la componente de $X \backslash U_i$ tal que $p \in C_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como cada U_i es un abierto no-vacío, se tiene que cada $X \backslash U_i$ es un subconjunto cerrado propio de X. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, C_i es un subcontinuo propio de X. Además, como $p \in C_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$, resulta que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \subset k(p)$. Ahora, veamos que $k(p) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Sea $x \in k(p)$. Entonces, por definición de $k(p)$, existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, x \in A$. Como $X \backslash A$ es un abierto no-vacío en $X \backslash \{p\}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $U_j \subset X \backslash A$ es decir, $A \subset X \backslash U_j$. Como C_j es la componente de $X \backslash U_j$ con $p \in C_j$ y como A es un conexo en $X \backslash U_j$ con $p \in A$, se tiene que $A \subseteq C_j$. Por lo tanto, $x \in C_j$ y $k(p) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.■

9.4 Continuos descomponibles y continuos indescomponibles

En el ejercicio 9.1.3, el lector expresó un continuo como la unión de dos de sus subcontinuos propios. Los continuos que admiten tal descomposición se llaman descomponibles. En caso contrario se llaman indescomponibles. Los ejemplos de la sección 9.1, excepto el solenoide (9.1.15), son todos descomponibles. Veremos en esta sección propiedades de los descomponibles y de los indescomponibles. Construiremos un continuo indescomponible.

9.4.1 *Teorema*

Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.

Demostración: Sea H un subcontinuo propio de X y supongamos que $\overset{\circ}{H} \neq \varnothing$. Entonces $K = X \backslash \overset{\circ}{H}$ es un subconjunto propio y cerrado de X. Si K fuera conexo, entonces $X = H \cup K$ es una descomposición de X en dos de sus subcontinuos propios, contradiciendo que es indescomponible. Por lo tanto $K = \overline{X \backslash H}$ no es conexo, se sigue de la proposición 6.1.13 $X \backslash H$ tampoco es conexo. Así que $X \backslash H = U \mid V$. Por el teorema 9.1.9 $H \cup U$ y $H \cup V$ son subcontinuos propios de X y, por lo tanto, la descomposición $X = (H \cup U) \cup (H \cup V)$ muestra que X es descomponible, negando la hipótesis.
Recíprocamente, demostraremos que, si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío, entonces X es indescomponible. Para esto, supóngase que X es

descomponible. Entonces $X = A \cup B$, con A y B son subcontinuos propios de X. Note que $X \backslash B$ es un abierto no-vacío de X contenido en A. Por lo tanto $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$.■

En 9.3.8 se demostró que un continuo X es irreducible si y sólo si X tiene más de una composante. Veremos aquí que los continuos indescomponibles tienen una cantidad no numerable de composantes, lo que muestra, en particular, que son irreducibles.

En los continuos indescomponibles las composantes son ajenas dos a dos. En efecto, sea X un continuo y para $x, y \in X$, definamos la relación $x \equiv y$ si y sólo si existe un subcontinuo propio de X que contiene a x y a y. El lector demostrará que esta relación es de equivalencia (ejercicio 9.4.2) y que las clases de equivalencia correspondientes son las composantes; por lo que son ajenas dos a dos.

9.4.2 *Ejercicio*

Sea X un continuo indescomponible. Demostrar que las composantes de X son ajenas dos a dos.

9.4.3 *Teorema*

El conjunto de composantes de un continuo indescomponible X no es numerable.

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ la familia de composantes de X. Entonces $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Por el teorema 9.3.10, cada $C \in \mathcal{C}$ se puede expresar como $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_i(C)$, donde $K_i(C)$ es un subcontinuo propio de X ($i \in \mathbb{N}$). Si el conjunto $\mathcal{C}$ fuera finito o numerable, entonces X sería la unión de una familia numerable de subcontinuos propios. Por el teorema de Baire (9.1.10), alguno de ellos debe tener interior no vacío. Esto contradice el teorema 9.4.1.■

9.4.4 *Ejercicio*

Demuestre que un continuo descomponible X tiene o bien una o bien tres composantes. Nótese que en el caso descomponible las composantes no forman una partición del continuo.

9.4.5 *Teorema*

Un continuo X es indescomponible si y sólo si existen tres puntos cuyas composantes son, las tres, distintas. Dicho de otro modo, si sólo si existen tres puntos tal que X es irreducible entre cada dos de ellos.

Demostración: Si X es indescomponible, elegimos tres composantes distintas y un punto en cada una de ellas, lo cual demuestra la necesidad en el teorema.

Para demostrar la suficiencia, supongamos que $X = H \cup K$ donde H y K

son subcontinuos propios de X. Sean $a, b, c \in X$. Entonces o bien dos de estos tres puntos están en H o bien dos de estos tres puntos están en K. Digamos que $a, b \in H$. Entonces X no es irreducible entre a y b.■

A continuacion daremos un ejemplo de un continuo indescomponible. Para ello definiremos el concepto de *cadena*.

9.4.6 *Definición*

Una **cadena** en un espacio métrico X es una colección finita $\{U_1, ..., U_n\}$ de abiertos en X tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. La llamamos $\varepsilon-$*cadena* si $diam(U_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., n$

9.4.7 *Ejemplo*

(Figura 151) Sean a, b, c tres puntos distintos del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Definiremos una sucesión de continuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Sea $\mathcal{C}_1 = \{U_1, ..., U_n\}$ una cadena, donde

i) $n \geq 3$ y U_j es una bola abierta con radio r_1 para toda $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

ii) $r_1 < \dfrac{1}{2}\text{mín}\{d(a, b),\ d(a, c),\ d(b, c),\ 1\}$,

iii) $U_1 = B_{r_1}(a)$, $U_n = B_{r_1}(c)$ y $U_j = B_{r_1}(b)$ para alguna $j \in \{2, ..., n-1\}$.
Definimos $K_1 = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} U_j}$.
Sea $\mathcal{C}_2 = \{\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_m\}$ una cadena donde

i) V_j es una bola abierta con radio r_2 para toda $j \in \{1, 2, ..., m\}$,

ii) $r_2 \leq \frac{1}{2}r_1$,

iii) La cerradura de cada V_i está contenida en alguna U_j.
$\mathrm{V}_1 = B_{r_2}(a)$, $\mathrm{V}_m = B_{r_2}(b)$ y $\mathrm{V}_j = B_{r_2}(c)$ para alguna $j \in \{2, ..., m-1\}$,
Definimos $K_2 = \overline{\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j}$.
Sea $\mathcal{C}_3 = \{W_1, ..., W_p\}$ una cadena donde

i) W_j es una bola abierta con radio r_3 para toda $j \in \{1, 2, ..., p\}$,

ii) $r_3 \leq \dfrac{1}{2}r_2$,

iii) La cerradura de cada W_i está contenida en alguna V_j.
$W_1 = B_{r_3}(b)$, $W_p = B_{r_3}(c)$ y $W_j = B_{r_3}(a)$ para alguna $j \in \{2, ..., m-1\}$.
Definimos $K_3 = \overline{\bigcup_{j=1}^{p} W_j}$.
Continuamos con este procedimiento de la siguiente forma:
Si $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, la cadena $\mathcal{C}_n$ tiene el primer elemento con centro en a, el último con centro en c y uno intermedio con centro en b.
Si $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, la cadena $\mathcal{C}_n$ tiene el primer elemento con centro en a, el último con centro en b y uno intermedio con centro en c.
Si $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, la cadena $\mathcal{C}_n$ tiene el primer elemento con centro en b, el último con centro en c y uno intermedio con centro en a.
Cada elemento de la cadena $\mathcal{C}_n$ está contenido en algún elemento de la cadena $\mathcal{C}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, se define K_n como la cerradura de la unión de los elementos de la cadena $\mathcal{C}_n$. Es claro que cada K_n es un continuo y que $K_1 \supseteq K_2 \supseteq ...$, así que por el teorema 9.1.12, la intersección K de estos continuos es un continuo.

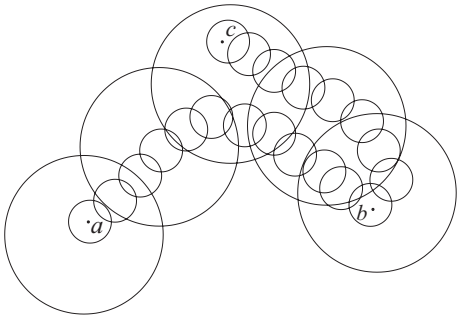


Figura 151

Demostraremos ahora que el continuo K definido en 9.4.7 es indescomponible. Para esto demostraremos que K es irreducible entre a y b, entre b y c y entre a y c y aplicaremos el teorema 9.4.5. Bastará demostrar que K es irreducible entre a y b, ya que los otros dos casos son análogos.

Supongamos que a y b son elementos de un subcontinuo propio H de K. Sea $x \in K \backslash H$. Entonces $d(x, H) > 0$. Por la forma en que se construyó K, existe $n \in \mathbb{N}$ con las siguientes propiedades

i) el primer eslabón de la cadena $\mathcal{C}_n$ contiene a a y el último a b,

ii) el diámetro de los eslabones de $\mathcal{C}_n$ es menor que $d(x, H)$ (ya que el diámetro de los eslabones tiende a 0).
De i) se sigue que todos los eslabones de $\mathcal{C}_n$ intersectan H (ejercicio 9.4.8). Puesto que $x \in K$, x está en alguno de los eslabones de $\mathcal{C}_n$. Esto implica que $d(x, H) < d(x, H)$, lo cual es una contradicción.■

9.4.8 *Ejercicio*

Sea X un continuo y H un subcontinuo de X. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ una cadena en X tal que $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Supóngase que $H \cap U_i \neq \varnothing \neq H \cap U_j$ con $i \leq j$. Demuestre que $H \cap U_k \neq \varnothing$ para todo $i \leq k \leq j$.

9.5 Conexidad local y conexidad por trayectorias

En el capítulo 6 (de 6.2.13 a 6.2.22) se estudió la propiedad de conexidad local en espacios topológicos en general. En el caso en que el espacio topológico es un continuo, tenemos nuevas propiedades.

La conexidad por trayectorias se estudió en 6.3 utilizando la nomenclatura de conectable por caminos. Esta propiedad está relacionada con la conexidad local ya que, como veremos adelante, todo continuo localmente conexo es conexo por trayectorias.

Como se definió en 6.3, un espacio X es conectable por caminos si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. A esta propiedad se le conoce también como conexidad por trayectorias.

9.5.1 *Teorema*

Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, continua y cerrada entre los espacios topológicos X y Y. Supongamos que X es localmente conexo. Entonces Y es localmente conexo.

Demostración: Demostraremos que cada componente de un subconjunto abierto de Y es abierta en Y. El teorema quedará demostrado utilizando 6.2.15.

Sea V un abierto en Y y B una componente de V. Dado que la imagen continua de conexos es conexa, $f^{-1}(B)$ es la unión de algunas de las componentes de $f^{-1}(V)$, las cuales son abiertas por 6.2.15. Esto demuestra que $f^{-1}(B)$ es abierto. Se sigue de aquí que $X \backslash f^{-1}(B)$ es cerrado en X y, por lo tanto, $Y \backslash B = f(X \backslash f^{-1}(B))$ es cerrado en Y y B es abierto en Y.■

Dado que toda función continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es cerrada, obtenemos la siguiente consecuencia del teorema 6.1.

9.5.2 *Corolario*

Sean X y Y continuos. Supóngase que X es localmente conexo y que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Entonces Y es localmente conexo.

Como un caso especial de este último corolario, notamos que una imagen continua y Hausdorff del intervalo $[0, 1]$ será siempre un continuo localmente conexo. El inverso de esta afirmación también es verdadero y es uno de los resultados fundamentales en la Teoría de Continuos.

9.5.3 *Teorema*

Un continuo es localmente conexo si y sólo si es una imagen continua del intervalo $[0,1]$.

La caracterización de los continuos localmente conexos, expresada en 9.5.3 se conoce como teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Varios libros de Topología lo demuestran. Citamos aquí la demostración que aparece en NADLER [172], teorema 8.14, pág. 126.

Los siguientes ejemplos ilustran la existencia de funciones continuas entre el intervalo $[0,1]$ y algunos continuos localmente conexos.

9.5.4 *Ejemplos:*

i) $f:[0,1]\to S^1$ definida por $f(t)=(\cos 2\pi t, sen 2\pi t)$.

ii) Sea $Y=([-1,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])\subseteq\mathbb{R}^2$ y sea $f:[0,1]\to Y$ definida de la siguiente forma

$$f(t)=\begin{cases}(4t-1,0) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{4}],\\ (0,4(t-\frac{1}{4})) & \text{si } t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\\ (0,1-4(t-\frac{1}{2})) & \text{si } t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],\\ (4(t-\frac{3}{4}),0) & \text{si } t\in[\frac{3}{4},1].\end{cases}$$

9.5.5 *Observación*

Como el cuadrado unitario $[0,1]\times[0,1]$ es localmente conexo, el teorema 9.5.3 asegura que existe una función continua y sobreyectiva $f:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$. Este caso particular del teorema 9.5.3 fue demostrado, desde 1890, por Peano. Ahora, después del teorema de Hahn-Mazurkiewicz, conocemos más, por ejemplo sabemos que existe una función continua y sobreyectiva del intervalo $[0,1]$ en el cubo de Hilbert $I^{\mathbb{N}}$, puesto que $I^{\mathbb{N}}$ es localmente conexo.

Combinando el teorema de Hahn-Mazurkiewicz y el teorema de extensión de Tietze (ver 7.5.1), se obtiene un resultado más concreto, el cual expresamos en el teorema que sigue.

9.5.6 *Teorema*

Para cualesquiera dos continuos localmente conexos se tiene que uno es imagen continua del otro. Aún más, si X y Y son continuos localmente conexos, entonces para cualesquiera n puntos $x_1,...,x_n\in X$ y $y_1,...,y_n\in Y$ ($n\in\mathbb{N}$), existe una función continua y sobreyectiva $f:X\to Y$ tal que $f(x_i)=y_i$, $i\in\{1,...,n\}$.

Demostración: Evidentemente, basta demostrar la segunda parte del teorema. Por el teorema de Hahn-Mazurkiewicz, existe una función continua y sobreyectiva $g:[0,1]\to Y$. Sea $t_i\in[0,1]$ tal que $g(t_i)=y_i$ para cada $i\in\{1,...,n\}$. Sean $p,q\in X\backslash\{x_1,...,x_n\}$ con $p\neq q$ y $A=\{p,q,x_1,...,x_n\}$. Definamos $h:A\to[0,1]$, como $h(p)=0$, $h(q)=1$ y $h(x_i)=t_i$, $i\in\{1,...,n\}$. Obsérvese que h es

continua (pues A es un subespacio discreto de X). Además, A es cerrado en X. Entonces, por el teorema de extensión de Tietze (ver 7.5.1), existe una función continua $H : X \to [0,1]$ tal que $H(p) = 0$, $H(q) = 1$ y $H(x_i) = t_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Obsérvese que $H(X)$ es un conexo en $[0,1]$. Como $\{0,1\} \subset H(X)$, se tiene que $H(X) = [0,1]$. Es decir, H es sobreyectiva. Finalmente, sea $f = g \circ H$. Se tiene que f satisface la conclusión del teorema.

Del teorema 9.5.3 se obtiene el siguiente resultado, que nos da mucha información sobre la estructura de los continuos localmente conexos.

9.5.7 *Teorema*

Todo continuo localmente conexo es conexo por trayectorias.

Demostración: Sea X un continuo localmente conexo. Entonces existe una función f continua y suprayectiva del intervalo $[0,1]$ en X (9.5.3). Sean p y q en X y s, t en $[0,1]$ tales que $f(s) = p$ y $f(t) = q$. La función f restringida al intervalo $[s,t]$ es una trayectoria de p a q en X.■

Este teorema se enuncia frecuentemente en una forma más fuerte: Sea X un continuo localmente conexo. Entonces para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un arco (espacio homeomorfo a $[0,1]$) contenido en X con extremos x y y. (véase NADLER [172], teorema 8.23, pág. 128). Por otra parte, nótese que el inverso no es verdadero, por ejemplo el espacio peine (ejemplo 9.1.2 f), es conexo por trayectorias pero no es localmente conexo.

9.5.8 *Ejercicio*

Demuestre que un continuo indescomponible no es localmente conexo en ningún punto.

9.6 Continuos tipo arco o encadenables

En esta sección vamos a estudiar una clase particular de continuos: los continuos tipo-arco. Topológicamente estos pueden considerarse como una generalización natural de los continuos que son arcos (los que son homeomorfos al intervalo $[0,1]$). Estos continuos tienen muchas propiedades comunes al intervalo $[0,1]$ y aquí veremos algunas de ellas. Específicamente, vamos a demostrar que los continuos tipo-arco son *hereditariamente unicoherentes, a-triódicos* y que tienen la *propiedad del punto fijo.* También veremos un teorema de caracterización en términos del concepto de ε-cadena (ver definición 9.4.6)

9.6.1 *Definición*

Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Se dice que f es una *ε-función* si, para cada $x \in X$,

$$\textit{diám } f^{-1}(f(x)) < \varepsilon.$$

Note que si f es sobreyectiva, la condición en la definición puede sustituirse por: $diám\ f^{-1}(y) < \varepsilon$ para todo $y \in Y$.

Por otra parte, si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Así,

$$diám\ f^{-1}(f(x)) = 0.$$

Luego, en este caso, f es ε-función para todo $\varepsilon > 0$.

Intuitivamente, si ε es pequeño, una ε-función puede pensarse como una función que no está muy lejos de ser inyectiva. Con esta interpretración, considerando que las biyecciones continuas entre continuos son homeomorfismos, una ε-función sobreyectiva entre dos continuos es 'casi' un homeomorfismo.

9.6.2 *Definición*

Un continuo X es **tipo-arco** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función sobreyectiva $f_\varepsilon : X \to [0,1]$.

9.6.3 *Ejemplo*

Sea X el continuo que denominamos la curva topológica (ver ejemplo 9.1.2 d)). Esto es,

$$X = \overline{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : sen\frac{1}{x},\ x \in (0,1]\right\}},$$

X es tipo-arco. Para justificar esto, sea $\varepsilon > 0$. Elíjase $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \varepsilon$, $\alpha < 1$ y $sen\dfrac{1}{\alpha} = 1$. Sea $h : [-1,1] \to [0,\alpha]$ un homeomorfismo tal que $h(-1) = 0$ y $h(1) = \alpha$. Definamos $f_\varepsilon : X \to [0,1]$ de la siguiente manera

$$f_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [\alpha,1], \\ h(y) & \text{si } x \in [0,\alpha], \end{cases} \quad \text{para } (x,y) \in X.$$

9.6.4 *Teorema*

Si X es un continuo tipo-arco, entonces todo subcontinuo no-degenerado de X es tipo-arco.

Demostración: Sea X un continuo tipo-arco y Y un subcontinuo no degenerado de X. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \text{mín}\{\varepsilon, diám\, Y\}$. Elíjase $f_\alpha : X \to [0,1]$ una α-función suprayectiva. Se $g = f_\alpha\ |_Y$. Entonces como $g^{-1}(g(y)) = f^{-1}(g(y)) \cap Y$, se tiene que g es una α-función. Así, g es ε-función, porque $\alpha < \varepsilon$. Por otra parte, $g(Y)$ es un conexo en $[0,1]$, por lo tanto $g(Y)$ es un punto o un subintervalo de $[0,1]$. Pero $\alpha < diám\,(Y)$, entonces $g(Y)$ es un subintervalo de $[0,1]$. De aquí se sigue la conclusión del teorema.

9.6.5 *Observación*

Por la definición, una ε-función 'regresa' puntos en conjuntos de diámetro menor que ε. En realidad, se tiene un poco más, una ε-función 'regresa' conjuntos

de diámetro suficientemente pequeño en conjuntos de diámetro menor que ε. Esto se precisa en el ejercicio que sigue.

9.6.6 *Ejercicicio*

Sean X, Y continuos, $\varepsilon > 0$ y $f : X \to Y$ una ε-función. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset Y$ con $diám\, A < \delta$, se tiene que $diám\, f^{-1}(A) < \varepsilon$.

9.6.7 *Ejemplo*

El círculo unitario S^1, no es tipo-arco.

Demostración: Sea $0 < \varepsilon < diám\, S^1$ y supóngase que $f : S^1 \to [0,1]$ es una ε-función suprayectiva. Sean B el semicírculo inferior y A el semicírculo superior que unen los puntos p y q en S^1, como en la figura 152.

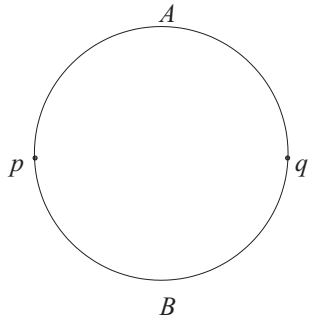


Figura 152

Obsérvese que $f(A) \cup f(B) = [0,1]$ y que $f(A)$ y $f(B)$ son cerrados no vacíos. Por lo tanto $f(A) \cap f(B)$ es un conexo no-vacío en $[0,1]$. Por otra parte, sean H y K arcos suficientemente pequeños en S^1 de tal forma que $p \in H$, $q \in K$ y $dist(H,K) > \varepsilon$. Entonces $f(H) \cap f(K) = \varnothing$.

Además, $f(A) \cap f(B) \cap f(H) \neq \varnothing$ (este conjunto contiene a $f(p)$) y $f(A) \cap f(B) \cap f(K) \neq \varnothing$ (este conjunto contiene a $f(q)$). También $f(A) \cap f(B) \subset f(H) \cup f(K)$. Entonces todo,

$$f(A) \cap f(B) = [f(A) \cap f(B) \cap f(H)] \cup [f(A) \cap f(B) \cap f(K)],$$

por lo que $f(A) \cap f(B)$ es la unión de dos cerrados no-vacíos y disjuntos, lo cual contradice la conexidad de $f(A) \cap f(B)$.

9.6.8 *Nota*

Del teorema 9.5.4 y el ejemplo 9.5.7 se deduce que si X contiene un círculo, entonces X no es tipo-arco.

En el ejemplo 9.5.7, lo esencial fue lo siguiente: S^1 se puede representar como $S^1 = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos tales que $A \cap B$ no es conexo, mientras

que en un intervalo no es posible hacer esto. Esta propiedad del intervalo se retoma en la siguiente definición.

9.6.9 *Definición*

Un continuo X es **unicoherente** si siempre que $X = A \cup B$, con A y B subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexo (y por lo tanto subcontinuo de X). Se dice que X es **hereditariamente unicoherente** si todo subcontinuo de X es unicoherente.

9.6.10 *Ejemplos:*

a) El intervalo $[0,1]$, y en general cualquier arco, es hereditariamente unicoherente.

b) La curva topológica (ver ejemplo 9.1.2 d), es hereditariamente unicoherente.

c) El círculo S^1 y el círculo de Varsovia (ver ejemplo 9.1.2 e), no son unicoherentes.

d) Un triodo simple, esto es un espacio homeomorfo al continuo $X = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$, es hereditariamente unicoherente.

9.6.11 *Ejercicio*

Justifique las afirmaciones en el ejemplo anterior.

9.6.12 *Teorema*

Sean X, Y continuos. Supóngase que Y es unicoherente y que, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función sobreyectiva $f : X \to Y$. Entonces X es unicoherente.

Demostración: Dadas las hipótesis, supóngase, por el contrario, que X no es unicoherente. Entonces existen A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Por lo tanto, existen P, Q cerrados en $A \cap B$, (y cerrados en X) tales que $A \cap B = P \cup Q$, $P \neq \varnothing \neq Q$ y $P \cap Q = \varnothing$. Por normalidad, existen U y V abiertos en X tales que $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$. Pongamos

$$\alpha_1 = dist(\overline{U}; \overline{V}),\ \alpha_2 = dist[A \backslash (U \cup V); B] \text{ y } \alpha_3 = dist[A; B \backslash (U \cup V)].$$

Note que $\alpha_i > 0$, $i \in \{1,2,3\}$. Sea $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \alpha_i$, $i \in \{1,2,3\}$. Por hipótesis, existe una ε-función suprayectiva $f : X \to Y$. Se tiene que $f(A)$ y $f(B)$ son subcontinuos de Y tales que $Y = f(A) \cup f(B)$. Como Y es unicoherente, $f(A) \cap f(B)$ es conexo. Sea

$$W_1 = \{y \in f(A) \cap f(B) : f^{-1}(y) \subseteq U\}$$

y

$$W_2 = \{y \in f(A) \cap f(B) : f^{-1}(y) \subseteq V\}.$$

No es difícil demostrar que W_1 y W_2 son conjuntos abiertos en $f(A) \cap f(B)$. Por otra parte, como $U \cap V = \varnothing$, se tiene que $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Además, si $p \in P$ y $q = f(p)$, entonces

$$q \in f(A) \cap f(B) \quad \text{y} \quad f^{-1}(q) \subseteq U$$

(esto resulta porque $diám\, f^{-1}(q) < \varepsilon$, $f^{-1}(q) \cap U \neq \varnothing$ ya que $P \subset U$ y $dist(\overline{U}; \overline{V}) = \alpha_1 > \varepsilon$). Así, $W_1 \neq \varnothing$. Análogamente se justifica que $W_2 \neq \varnothing$. Finalmente, vamos a demostrar que $f(A) \cap f(B) = W_1 \cup W_2$. Para esto, supóngase que $f(A) \cap f(B) \neq W_1 \cup W_2$. Sea $y \in [f(A) \cap f(B)] \backslash [W_1 \cup W_2]$. Entonces, como $diám\, f^{-1}(y) < \varepsilon$, $f^{-1}(y) \nsubseteq U \cup V$, existe $x \in f^{-1}(y) \backslash (U \cup V)$. Supóngase (sin pérdida de generalidad) que $x \in A \backslash (U \cup V)$. Ahora, como $y \in f(B)$, existe $b \in B$ tal que $f(b) = y$. Por lo tanto, $x, b \in f^{-1}(y)$. Note que, $d(x, b) \leq diám\, f^{-1}(y) < \varepsilon$. Como $x \in A \backslash (U \cup V)$ y $b \in V$, se tiene que $\alpha_2 \leq d(x, b) < \varepsilon$, y esto es una contradicción pues $\varepsilon < \alpha_2$. Hemos demostrado que $f(A) \cap f(B) = W_1 \cup W_2$, W_1, W_2 son abiertos no-vacíos y $W_1 \cap W_2 = \varnothing$, lo cual contradice la conexidad de $f(A) \cap f(B)$.■

9.6.13 *Teorema*

Todo continuo tipo-arco es hereditariamente unicoherente.

Demostración: Por el teorema 9.6.4, basta demostrar que todo continuo tipo-arco es unicoherente. Sea X un continuo tipo-arco. Entonces por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función de X sobre el intervalo $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ es unicoherente, por el teorema 9.6.12 se sigue que X es unicoherente.

9.6.14 *Ejemplo*

El triodo simple (ver ejemplo 9.6.10 d), no es tipo-arco.

Demostración: Sea $0 < \varepsilon < 1$ y supóngase que $f : X \to [0, 1]$ es una ε-función sobreyectiva. Pongamos $A = [-1, 0] \times \{0\}$, $B = [0, 1] \times \{0\}$ y $C = \{0\} \times [0, 1]$. Sean p, q, r los puntos *extremos* del triodo.

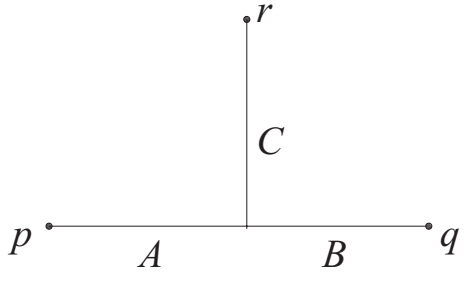


Figura 153

Se tiene que $f(A) \cup f(B) \cup f(C) = [0, 1]$. Además, $f((0, 0)) \in f(A) \cap f(B) \cap f(C)$. $f(A)$, $f(B)$ y $f(C)$ son tres subintervalos en $[0, 1]$ con intersección no vacía. Por lo tanto, uno de los tres debe de estar contenido

en la unión de los otros dos. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $f(A) \subseteq f(B) \cup f(C)$. Entonces existe $x \in B \cup C$ tal que $f(p) = f(x)$. Denotemos por t este valor común, es decir, $f(p) = f(x) = t$. Se tiene que p, $x \in f^{-1}(t)$. Como f es ε-función, $d(p, x) < \varepsilon$. Esto es una contradicción, porque $\varepsilon < 1$ y $d(p, x) \geq 1$ para todo $x \in B \cup C$.■

Lo esencial en este último ejemplo fue que existe un subcontinuo Z de X, a saber $Z = \{(0,0)\}$, tal que $X \backslash Z = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $\overline{A}_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Por otra parte, en el intervalo, cada vez que se tienen tres subintervalos con una intersección común, uno de los tres está contenido en la unión de los otros dos. Retomamos esta propiedad del intervalo en la siguiente definción.

9.6.15 *Definición*

Un continuo X es un **triodo** si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \backslash Z = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_i \neq \varnothing$ y $\overline{A}_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Se dice que X es **atriódico** si no contiene un triodo.

9.6.16 *Ejemplos:*

a) El intervalo $[0, 1]$ es atriódico.

b) La curva topológica (ver ejemplo 9.1.2 d)) es un continuo atriódico.

El cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ no es un continuo atriódico.

9.6.17 *Teorema*

Sean X, Y continuos. Supóngase que Y no es un triodo y que, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función sobreyectiva $f : X \to Y$. Entonces X no es triodo.

Demostración: Supongamos que X es un triodo. Entonces existe un subcontinuo Z de X tal que $X \backslash Z = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, donde $A_i \neq \varnothing$ y $\overline{A}_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Por el teorema 9.1.9, se tiene que $Z \cup A_i$ es un subcontinuo de X, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea $a_i \in A_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea, $\alpha_i = dist(\{a_i\}; X \backslash A_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < a_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Por hipótesis, existe una ε-función sobreyectiva $f : X \to Y$. Sea $B_i = f(Z \cup A_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Note que $f(Z)$ y B_i son subcontinuos de Y, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $Y = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ y $f(Z) \subseteq \bigcap_{i=1}^{3} B_i$. Como Y no es un triodo, alguno de los B_i debe estar contenido en la unión de los otros dos. Supóngase (sin pérdida de generalidad) que $B_1 \subseteq B_2 \cup B_3$. Es decir, $f(Z \cup A_1) \subseteq f(Z \cup A_2) \cup f(Z \cup A_3)$. Luego, existe $x \in Z \cup A_2 \cup A_3$ tal que $f(a_1) = f(x)$. Como f es ε-función, se tiene que $d(a_1, x) < \varepsilon$. Como $a_1 \in A_1$ y $x \in X \backslash A_1$, se tiene que $\alpha_1 \leq d(a_1, x) < \varepsilon$, que es una contradicción, porque $\varepsilon < \alpha_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. ■

9.6.18 *Teorema*

Todo continuo tipo-arco es atriódico.

9.6.19 *Ejercicio*

Demuestre el teorema 9.6.18.

Ahora vamos a presentar una caracterización de los continuos tipo-arco. Para esto, vamos a introducir el concepto de continuo encadenable.

9.6.20 *Definición*

Un continuo X es **encadenable** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena, $\{U_1, ...U_n\}$, en X tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.
En el lema siguiente se establece que, si X es un continuo encadenable, siempre se pueden considerar cadenas que cubren a X, de tal forma que únicamente se intersecten las cerraduras de *eslabones* consecutivos. No incluiremos la demostración de este lema que intuitivamente es claro.

9.6.21 *Lema*

Si X es un continuo encadenable y $\varepsilon > 0$, entonces existe una $\varepsilon-$cadena $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ en X, que cubre a X, tal que $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \varnothing$, siempre que $\mid i-j \mid \geq 2$.

9.6.22 *Teorema*

Sea X un continuo. Se tiene que X es tipo-arco si y sólo si X es encadenable.

Demostración: Supóngase que X es un continuo tipo-arco. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una ε-función sobreyectiva $f : X \to [0, 1]$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, si $A \subseteq [0, 1]$ con $diám\, A < \delta$, entonces $diám\, f^{-1}(A) < \varepsilon$ (ver el ejercicio 9.6.6). Como el intervalo $[0, 1]$ es un continuo encadenable, existe una δ-cadena $\mathcal{D} = \{\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n\}$ que cubre a $[0, 1]$. Sea $U_i = f^{-1}(\mathrm{V}_i)$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$. Claramente $\mathcal{C}$ es una ε-cadena que cubre a X. Por lo tanto, X es encadenable.
Ahora, supóngase que X es un continuo encadenable. Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 9.6.21, existe una $\frac{\varepsilon}{2}$-cadena $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ que cubre a X, tal que $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \varnothing$, siempre que $\mid i - j \mid \geq 2$. Se puede suponer que $n \geq 3$. Sea $m = \max\{i : 2i + 1 \leq n\}$. Note que $m \geq 1$. Para cada $k \in \{1, ..., m\}$, definamos $M_k = \overline{U}_{2k-1} \cup \overline{U}_{2k} \cup \overline{U}_{2k+1}$ y $I_k = [s_k, t_k]$, donde $s_k = \dfrac{k-1}{m}$ y $t_k = \dfrac{k}{m}$. Se tiene que $\overline{U}_{2k-1} \cap \overline{U}_{2k+1} = \varnothing$, $k \in \{1, ..., m\}$. Como todo espacio métrico es completamente normal, para cada $k \in \{1, ..., m\}$, existe una función continua $f_k : M_k \to I_k$ tal que $f_k^{-1}(s_k) = \overline{U}_{2k-1}$ y $f_k^{-1}(t_k) = \overline{U}_{2k+1}$. Definimos $f : X \to [0, 1]$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \in M_k, \\ 1 & \text{si } x \in \overline{U}_n. \end{cases}$$

Por la definición de los conjuntos M_k y como $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \varnothing$, siempre que $\mid i-j \mid \geq 2$, se tiene que f está bien definida y es una función continua. Por otra parte, como $f(X)$ es un conexo en $[0,1]$ y $0,1 \in f(X)$, se tiene que $f(X) = [0,1]$. Por lo tanto, f es una función suprayectiva de X en el intervalo $[0,1]$. Ahora, si $0 \leq t < 1$, entonces $f^{-1}(t) \subseteq U_i$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Como $\mathcal{C}$ es una $\frac{\varepsilon}{2}$-cadena, resulta que $diám\, f^{-1}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, si $n = 2m+1$, se tiene que $f^{-1}(1) = \overline{U}_n$ y si $n \neq 2m+1$, entonces $2m+1 = n-1$, por lo tanto $f^{-1}(1) = \overline{U}_{n-1} \cup \overline{U}_n$. En cualquier caso, resulta que $diám f^{-1}(1) < \varepsilon$. Hemos demostrado que, dado $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f : X \to [0,1]$. ■

En 9.3.2 c) y d) vimos que un círculo y un triodo no son irreducibles.Un teorema fundamental en el estudio de los continuos irreducibles, es el teorema de Sorgenfrey (1944). Su demostración se puede consultar en el libro de NADLER [172], teorema 11.34.

9.6.23 *Teorema (de Sorgenfrey)*

Sea X un continuo no degenerado, unicoherente. Entonces X es irreducible si y sólo si X no es un triodo.

Como una consecuencia directa obtenemos:.

9.6.24 *Teorema*

Todo continuo encadenable es irreducible.

Demostración: Sea X un continuo encadenable. Por el teorema 9.6.13 y el teorema 9.6.22, se tiene que X es unicoherente. Por otra parte, el teorema 9.6.18 y el teorema 9.6.22 garantizan que X no es un triodo. Ahora, la conclusión se sigue por el teorema de Sorgenfrey.■

Para finalizar vamos a demostrar que cada función continua de un continuo tipo-arco en sí mismo deja al menos un punto fijo. La solución de ecuaciones diferenciales está íntimamente relacionada con los problemas del punto fijo. Un teorema clásico en la topología, que tiene aplicaciones en diversas áreas de la matemática, es el de Brouwer: El disco unitario B^2 tiene la propiedad del punto fijo.

9.6.25 *Definición*

Un continuo X tiene la **propiedad del punto fijo** (p.p.f.) si, para cada función continua $f : X \to X$, existe $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

9.6.26 *Ejercicio*

Demuestre que el intervalo $[0,1]$ tiene la p.p.f. Sugerencia: Considere los conjuntos $U = \{t \in [0,1] : f(t) < t\}$ y $V = \{t \in [0,1] : f(t) > t\}$ y use la conexidad de $[0,1]$.

Esquemáticamente, el hecho de que $[0,1]$ tiene la p.p.f., significa que la gráfica de cualquier función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ intersecta a la diagonal del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, es decir, a la gráfica de la función identidad en $[0,1]$. En realidad, la única propiedad de la función identidad que se utiliza en la demostración de este hecho es su sobreyectividad. Considere el siguiente resultado.

9.6.27 *Lema*

Si A es un subcontinuo del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ tal que $\pi_1(A) = [0,1]$, entonces $A \cap \Delta \neq \varnothing$, donde $\Delta = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$ es la diagonal del cuadrado. .

9.6.28 *Ejercicio*

Demuestre el lema 9.6.27 .

9.6.29 *Teorema*

Sean f y g funciones continuas de un continuo X en el intervalo $[0,1]$. Supóngase que f es sobreyectiva. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.

Demostración: Sea $A = \{(f(x), g(x)) : x \in X\}$. Se tiene que A es un subcontinuo del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ tal que $\pi_1(A) = [0,1]$. Se sigue del lema 9.6.27 que, $A \cap \Delta \neq \varnothing$, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.■

9.6.30 *Teorema*

Todo continuo tipo-arco tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración: Sea X un continuo tipo-arco y $f : X \to X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una $\frac{1}{n}$-función suprayectiva $g_n : X \to [0,1]$. Por el teorema 9.6.29, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $g_n(x_n) = g_n(f(x_n))$. Es decir, $x_n,\ f(x_n) \in g_n^{-1}(t_n)$ para algún $t_n \in [0,1]$. Así, $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por compacidad, se puede suponer que x_n converge a un punto $x \in X$. Por continuidad, $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Como $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $d(x, f(x)) = 0$. Por lo tanto, $f(x) = x$.■ .

9.7. Creación de ejemplos

En las secciones anteriores hemos definido varios conceptos: descomponible, unicoherente, irreducible, propiedad del punto fijo, localmente conexo, conexo por trayectorias, atriódico encadenable. Cada una de estas propiedades puede

ser hereditaria. El objetivo de esta sección es que el lector construya ejemplos que tengan varias propiedades juntas o ejemplos que tengan unas propiedades pero no otras. Definiremos también puntos y conjuntos de corte.

Sea X un continuo y $C \subseteq X$. Decimos que C es un **subconjunto de corte** de X si $X \backslash C$ no es conexo. Si C contiene solamente un punto, lo llamamos **punto de corte**.

Ejemplos

a) Todo punto del intervalo abierto $(0, 1)$ es un punto de corte del intervalo cerrado $[0, 1]$.

b) Las curvas cerradas simples (espacios homeomorfas a S^1) no tienen puntos de corte. Sin embargo cualquier subconjunto con dos elementos, es un conjunto de corte.

c) Sea $T \subseteq \mathbb{R}^2$ la unión de los tres segmentos rectilíneos que unen al punto $(0, 0)$ con los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1, 1)$. Excepto estos tres puntos, todos los puntos de T son de corte.

d) En el espacio peine (ejemplo 9.1.2 f)) todos los puntos son de corte excepto los que están contenidos en el eje Y y los de la forma $\left(\frac{1}{2^n}, 1\right)$.

9.7.1 *Ejercicio*

Diga qué propiedades tienen y que propiedades no tienen los ejemplos considerados en 9.1.2.

Construya ejemplos o al menos un ejemplo de continuos, (tal vez no existen):

- con exactamente n puntos que no sean de corte,
- hereditariamente unicoherentes que contengan algún triodo,
- conexos por trayectorias pero no localmente conexos,
- irreducibles sin puntos de corte,
- localmente conexos, hereditariamente unicoherentes sin puntos de corte,
- localmente conexos sin puntos de corte,
- hereditariamente localmente conexos,
- irreducibles pero no hereditariamente irreducibles,
- descomponibles tales que todos sus subcontinuos (que no sean puntos) sean homeomorfos al total,
- indescomponibles tales que todos sus subcontinuos (que no sean puntos) sean homeomorfos al total,

- indescomponibles no unicoherentes,
- homogéneos (un continuo X es homogéneo si para cada par de puntos p, $q \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(p) = q$).
- homogéneo y unicoherente,
- con propiedad del punto fijo,
- homogéneo y con propiedad del punto fijo,
- continuo plano que sea conjunto de corte de $\mathbb{R}^2$.

9.7.2 *Teorema*

Todo continuo contiene al menos dos puntos que no son de corte.

La demostración de este resultado puede verse en NADLER [172], teorema 6.6, pág. 89.

Los siguientes teoremas son ejemplos de caracterizaciones de continuos por medio de sus conjuntos de corte. Sus demostraciones se pueden consultar en NADLER [172], teorema 6.17 y teorema 9.31.

9.7.3 *Teorema*

Un continuo X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ si y sólo si todos los puntos de X, excepto dos de ellos, son de corte.

9.7.4 *Teorema*

Un continuo X es homeomorfo a S^1 si y sólo si todo subconjunto de X con dos elementos es de corte.

9.7.5 *Definición*

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene subcontinuos homeomorfos a S^1.

Las dendritas son continuos que tienen una gran cantidad de propiedades las cuales se encuentran en diversos artículos y libros. Véase por ejemplo NADLER [172], capítulo 10. La siguiente es una de las caracterizaciones más conocidas de las dendritas.

9.7.6 *Teorema*

Un continuo es una dendrita si y sólo si cada uno de sus puntos es o bien de corte o bien extremo de cualquier arco que lo contenga.

9.7.7 *Ejercicio*

Clasificar los puntos de los continuos en el ejemplo 1.2 como puntos de corte y no de corte.

CAPÍTULO 10 Paracompacidad y metrizabilidad

El objetivo de este capítulo es introducir al lector dos temas cuya importancia radica fundamentalmente en sus aplicaciones dentro de la propia topología.

En la primer sección estudiaremos los espacios paracompactos, definidos mediante un axioma de cubrimiento (P) más débil que (C).

Desde un punto de vista sistemático, la teoría de los espacios paracompactos constituye dentro de este libro una síntesis de la teoría de los espacios normales, expuesta en el capitulo 7, y de la teoría de los espacios compactos, presentada en el capitulo 8.

El estudio de estos espacios, que aún hoy en día es de gran interés investigativo, ha contribuido notablemente al desarrollo de las ramas de la topología en las cuales los recubrimientos abiertos y sus refinamientos constituyen una herramienta esencial de trabajo, como por ejemplo en metrizabilidad, teoría de la dimensión, topología diferencial y otros.

Como ya hemos mencionado en el capítulo 2, el problema de hallar criterios generales para la metrizabilidad de los espacios topológicos, fue una de las cuestiones más analizadas en la topología general desde su inicio.

El método utilizado por A.H. Stone en la demostración de su célebre teorema (10.1.11) permitió finalmente en los años 50s a tres matemáticos: Bing, Nagata y Smirnov, dar una solución satisfactoria al problema de metrizabilidad. La presentación de este resultado y de otros criterios necesarios y/o suficientes es el objeto de la § 10.2.

Puesto que las aplicaciones de la teoría desarrollada en este capítulo se quedan, generalmente, en el marco de la topología, nos contentaremos con exponer solamente los resultados fundamentales, en un estilo más denso, sin entrar en los detalles de la teoría y sus aplicaciones.

§ 10.1 Espacios paracompactos

En el capítulo 7 probamos que en un espacio normal toda cubierta *localmente*

finita posee una partición subordinada de la unidad (7.6.10). Se plantea el problema de cuándo este resultado puede generalizarse a *toda cubierta abierta* (no necesariamente localmente finita). Esto es posible precisamente en los espacios *paracompactos*.

10.1.1 *Definición (paracompacto)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **paracompacto** si cumple el axioma (P): toda cubierta abierta de X posee un refinamiento abierto localmente finito.

Un subconjunto A en $(X, \mathcal{X})$ se llama *paracompacto* si el subespacio $(A, \mathcal{X}_A)$ cumple (P).

Un subespacio compacto es evidentemente paracompacto. En 1948, A. H. Stone [151] dio un fuerte impulso a la teoría de los espacios paracompactos probando que todo espacio seudométrico es paracompacto (9.1.11). La clase de los paracompactos incluye así dos tipos clásicos muy importantes de espacios topológicos. Veremos que, a pesar de esta generalidad, tienen una estructura suficientemente concreta para conservar una parte importante de las características propias de los espacios compactos y de los espacios métricos. Analizaremos la relación entre el axioma (P) y los axiomas de separación. El lema siguiente nos recuerda el resultado análogo para los espacios compactos (8.1.18).

10.1.2 *Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio paracompacto y sean B y C dos cerrados disjuntos en $(X, \mathcal{X})$ tales que para todo $x \in B$ existen dos vecindades disjuntas V_x y W_x que separan x y C. Entonces B y C pueden separarse por dos vecindades disjuntas.

Demostración: $Q = \{V_x | x \in B\} \cup \{\complement B\}$ es una cubierta abierta de X. Sea Q' un refinamiento abierto localmente finito de Q y sea $Q_B = \{U \in Q' | U \cap B \neq \varnothing\}$. Entonces $U_B := \cup Q_B$ es una vecindad de B. Para todo $y \in C$ existe una vecindad W_y de y tal que sólo un número finito de conjuntos $U_1, ..., U_n$ de Q'_B intersectan a W_y. Para todo $i = 1, ..., n$ $\exists\, x_i \in B$ tal que $U_i \subset V_{x_i}$. Puesto que $V_{x_i} \cap W_{x_i} = \varnothing$, tenemos $U_i \cap W_{x_i} = \varnothing$ por lo tanto, para $W'_y := W_y \cap W_{x_1} \cap ... \cap W_{x_n} \in B(y)$, también $W'_y \cap U_i = \varnothing$. Si suponemos $U_C := \bigcup_{y \in C} W'_y$ entonces $U_C \in B(C)$, $U_B \in B(B)$ y $U_C \cap U_B = \varnothing$.■

10.1.3 *Proposición*

Todo T_2-espacio paracompacto es normal.

Demostración: Primero veremos que todo T_2-espacio paracompacto $(X, \mathcal{X})$ es regular. Sea $B \subset X$ cerrado y $y \notin B$. Entonces podemos aplicar el lema anterior a los cerrados B y $C := \{y\}$ puesto que todo $x \in B$ puede separarse de y por el axioma (T_2). Concluimos que B y $y \notin B$ pueden separarse por dos vecindades disjuntas.

Sean B y C dos cerrados disjuntos cualesquiera en $(X, \mathcal{X})$. Acabamos de

mostrar que B y C cumplen la hipótesis del lema anterior. Por lo tanto pueden separarse por dos vecindades disjuntas.■

Como consecuencia de esta proposición obtenemos la propiedad de los T_2-espacios paracompactos que fue la motivación principal para su estudio.

10.1.4 *Corolario (teorema de la partición de la unidad)*

Toda cubierta abierta $Q = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ en un T_2-espacio paracompacto tiene una partición subordinada de la unidad.

Demostración: Sea $Q^{'} = \{A_\beta | \beta \in J\}$ un refinamiento abierto localmente finito de Q. Para todo $\beta \in J$ seleccionemos $\alpha = \varphi(\beta) \in I$ tal que $A_\beta \subset U_\alpha$. Por el corolario 7.6.10 y la proposición anterior, existe una partición de la unidad $(g_\beta)_{\beta \in J}$ subordinada a $Q^{'}$. Para todo $\alpha \in I$, las funciones $f_\alpha : X \to [0,1]$ definidas por

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \sum_{\varphi(\beta)=\alpha} g_\beta(x) & \text{si } \alpha \in \varphi[J] \text{ y} \\ 0 & \text{si } \alpha \notin \varphi[J] \end{cases}$$

están bien definidas, son continuas y constituyen una partición de la unidad, pues $\sum\limits_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = \sum\limits_{\beta \in J} g_\beta(x) \equiv 1$ para todo $x \in X$. La familia de los soportes de las g_β forman una colección localmente finita. Por lo tanto (E.5.11) se cumple

$$sop(f_\alpha) \subset \overline{\bigcup_{\varphi(\beta)=\alpha} sop(g_\beta)} = \bigcup_{\varphi(\beta)=\alpha} sop(g_\beta) \subset U_\alpha \tag{1}$$

Concluimos que (f_α) es una partición subordinada de la unidad a Q .■

La caracterización siguiente muestra que para espacios regulares el axioma (P), puede debilitarse variando el tipo de los refinamientos cuya existencia se postula.

10.1.5 *Teorema (criterios de paracompacidad para T_2-espacios)*

Para un T_3-espacio $(X, \mathcal{X})$ son equivalentes los siguientes enunciados:

(P) $(X, \mathcal{X})$ es paracompacto.

$(P^{'})$ Toda cubierta abierta de $(X, \mathcal{X})$ posee un refinamiento abierto σ-localmente finito Q , es decir, un refinamiento abierto de la forma $Q = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n$, donde toda colección Q_n es localmente finita.

$(P^{''})$ Toda cubierta abierta de $(X, \mathcal{X})$ posee un refinamiento localmente finito.

$(P^{'''})$ Toda cubierta abierta de $(X, \mathcal{X})$ posee un refinamiento cerrado localmente finito.

Demostración: $(P) \Rightarrow (P^{'})$ es trivial. $(P^{'}) \Rightarrow (P^{''})$: Basta probar que toda cubierta abierta σ-localmente finita $Q = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ tiene un refinamiento localmente finito. Sea U_n la unión de todos los abiertos $A \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} Q_k$ y sea

$B_n = U_n \backslash U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ($A_{-1} := \varnothing$). Entonces la colección $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ forma un recubrimiento de X por conjuntos mutuamente disjuntos. La colección $Q^{'} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A \cap B_n | A \in Q_n\}$ es evidentemente un refinamiento de Q. Veremos que $Q^{'}$ es localmente finita.

Para todo $x \in X$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$. Por hipótesis existe una vecindad V_x de x que intersecta sólo un número finito de conjuntos $A \in \bigcup_{k=0}^{n} Q_k$. Podemos suponer que $V_x \subset U_n$. Pero entonces la intersección de V_x con todo B_m ($m > n+1$) es vacía. Luego V_x intersecta sólo un número finito de conjuntos $A \cap B_n$ en $Q^{'}$.

$(P^{''}) \Rightarrow (P'''')$: Sea Q un recubrimiento abierto de $(X, \mathcal{X})$. Para todo $x \in X$ existe un $U_x \in Q$ que contiene a x y por (T_3) un abierto W_x tal que

$$x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset U_x \tag{2}$$

Sea $Q^{'}$ un refinamiento localmente finito del recubrimiento abierto $Q^{''} = \{W_x | x \in X\}$. Entonces $\{\bar{A} | A \in Q^{'}\}$ es un refinamiento *cerrado* localmente finito de $\{\overline{W_x} | x \in X\}$ y también de Q, por (2).

$(P''') \Rightarrow (P)$: Sea Q un cubierta abierta de X y sea $Q^{'}$ un refinamiento cerrado localmente finito de Q . Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta W_x que intersecta sólo un número finito de $B \in Q^{'}$. Sea $Q^{''}$ un refinamiento cerrado localmente finito de la cubierta abierta $Q^{'''} = \{W_x | x \in X\}$. Para todo $B \in Q^{'}$ existe un abierto $U_B \in Q$ tal que $B \subset U_B$. Puesto que la colección de cerrados $Q^{''}$ es localmente finita, la unión $C_B = \cup\{C \in Q^{''} | C \cap B = \varnothing\}$ es cerrada (E.5.11). Entonces $A_B = U_B \backslash C_B$ es abierto para todo $B \in Q^{'}$. La colección $Q^* = \{A_B | B \in Q^{'}\}$ es un refinamiento abierto de Q pues $B \subset A_B \subset U_B$ para todo $B \in Q^{'}$. Queda por probar que Q^* es localmente finito. En efecto para todo $x \in X$ existe una vecindad V_x de x que intersecta solamente un número finito de conjuntos $C_1, ..., C_n \in Q^{''}$. Se tiene que $V_x \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ porque $Q^{''}$ es un recubrimiento de X. Por otra parte, por ser $Q^{''}$ un refinamiento de $Q^{'''}$, los C_i intersectan sólo un número finito de conjuntos $B \in Q^{'}$. Seleccionemos $B_1, ..., B_m \in Q^{'}$ tales que $(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cap B = \varnothing$ para todo $B \in Q^{'} \backslash \{B_1, ..., B_m\}$. Entonces se cumple, para dichos conjuntos B, que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset C_B$ y, por tanto, $A_B \cap \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset (U_B \backslash C_B) \cap C_B = \varnothing$. Concluimos que $V_x \cap A_B = \varnothing$ para todo $B \in Q^{'} \backslash \{B_1, ..., B_m\}$, o sea la colección $Q^* = \{A_B | B \in Q^{'}\}$ es localmente finita. ■

Veremos a continuación que los criterios de este teorema son muy efectivos para comprobar la paracompacidad de un espacio. El resultado siguiente nos precisa un teorema de Tikhonov que dice *todo espacio regular de Lindelöf es normal.* Además, muestra que para espacios regulares no sólo el axioma (C) sino también

el axioma (L) de Lindelöf es un axioma de recubrimiento más fuerte que (P).

10.1.6 *Corolario*

Todo espacio regular de Lindelöf es paracompacto.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del criterio (P') porque todo subcubrimiento abierto numerable es trivialmente un recubrimiento abierto σ-localmente finito: $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A_n\}$. ■

10.1.7 *Corolario*

Todo T_2-espacio localmente compacto numerable al infinito es paracompacto.

Demostración: Sabemos que un tal espacio cumple (T_3) (8.6.9) y es de Lindelöf (8.6.20 iii). ■

Nota: Más precisamente puede demostrarse la caracterización siguiente: un T_2-espacio localmente compacto es paracompacto si y sólo si es suma de espacios localmente compactos y numerables al infinito. Para una demostración, véase Bourbaki [30]. ■

10.1.8 *Ejemplo*

Los espacios $\mathbb{R}^n$ son paracompactos porque son espacios regulares de Lindelöff.

10.1.9 *Ejemplo*

Toda variedad diferenciable numerable al infinito es paracompacta.

10.1.10 *Ejemplo*

El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_S)$ definido en el ejemplo 2.3.15 es normal y de Lindelöf. Entonces es paracompacto.

Utilizaremos ahora la caracterización (P') para demostrar el ya anunciado, resultado principal de esta sección.

10.1.11 *Teorema (A. H. Stone)*

Todo espacio seudométrico es paracompacto.

Demostración: Sea (X, d) un espacio seudométrico. Queremos probar que $(X, \mathcal{X}_d)$ cumple (P'). Para ello tomemos una cubierta abierta Q_0 de X. Convendremos en poner: $d(x, \varnothing) = \infty$ y $d(A, \varnothing) = \infty$ para todos los $x \in X, A \subset X$. Definimos

$$U_n = \{x \in X | d(x, \complement U) > 2^{-n}\}$$

para todo abierto $U \in \mathcal{X}_d$ y todo $n \in \mathbb{N}$

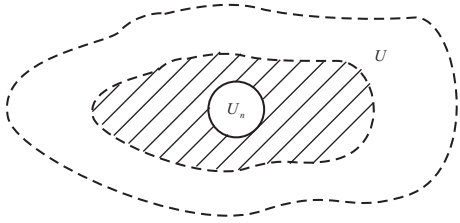


Figura 154.

Evidentemente (U_n) es una sucesión creciente de abiertos (por ser d continua) tal que

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \tag{3}$$

Veremos ahora que:

$$x \in U_n \wedge y \notin U_{n+1} \Rightarrow d(x,y) > 2^{-(n+1)} \tag{4}$$

En efecto, para todo $z \in \complement U$ se tiene que $d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z) > 2^{-n} - d(y,z)$; y $d(y,z)(z \in \complement U)$ se acerca tanto como se quiera a $d(y, \complement U) \leq 2^{-(n+1)}$.

Un refinamiento abierto σ-localmente finito de Q_0 se obtiene ahora escogiendo los conjuntos U_n $(U \in Q_0)$ (para cada n), de tal manera que tengan una distancia estrictamente positiva entre ellos (para $n \in \mathbb{N}$ fijo).

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las subcolecciones $Q \subset Q_0$ que tienen la propiedad siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Para todo } U \in Q \text{ existe una sucesión de subconjuntos abiertos } (U_n^*) \\ \text{tales que} \\ \text{i) } d(U_n^*, V_n^*) \geq 2^{-(n+1)} \text{ para } U, V \in Q \text{ con } U \neq V \\ \text{ii) } \cup Q = \cup\{U_n^* | U \in Q \wedge n \in \mathbb{N}^*\} \end{array} \tag{5}$$

Para todo $U \in Q$, el conjunto unitario $\{U\}$ pertenece a $\mathcal{H}$; pues es suficiente poner $U_n^* = U_n$, por (3) y (4).

Entonces $\mathcal{H} \neq \varnothing$. En lo que sigue supondremos que a toda $Q \in \mathcal{H}$ se asocia una familia fija $(U_n^*)_{n \in \mathbb{N}}, U \in Q$ que cumple (5). Definiendo

$$Q_n^* = \{U_n^* | U \in Q\} (n \in \mathbb{N}) \quad \text{y} \quad Q^* = \cup\{Q_n^* | n \in \mathbb{N}\} \text{ para } Q \in \mathcal{H}$$

se introduce sobre $\mathcal{H}$ una relación de orden definida por:

$$Q \leq Q' \Longleftrightarrow Q \subset Q' \wedge Q^* \subset Q'^*$$

Sea $\mathcal{R}$ un subconjunto totalmente ordenado de $(\mathcal{H}, \leq)$. Entonces es fácil comprobar que $Q_{\mathcal{R}} = \cup\mathcal{R}$ con la familia asociada $\cup\{Q^* | Q \in \mathcal{R}\}$ cumple la propiedad (5) y que $Q \leq Q_{\mathcal{R}}$ para todo $Q \in \mathcal{R}$. Luego $(\mathcal{H}, \leq)$ está inductivamente ordenado. Por el lema de Zorn existe una colección maximal Q_1 en $\mathcal{H}$. Veremos ahora que $Q_1 = Q_0$. Supongamos por reducción al absurdo que existe un $U \in Q_0 \backslash Q_1$. Definamos entonces:

$$U_n^* = \{x \in U_n | d(x, \complement(\cup Q_1)) < 2^{-(n+1)}\}$$

(U_n^*) es una sucesión de subconjuntos abiertos $U_n^* \subset U_n$ que cumple $(i^{'})d(U_n^*, V_n^*) \geq 2^{-(n+1)}$ para todo $V \in Q_1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, pues si $x \in U_n^*$, $y \in V_n^*$ entonces $d(x, \complement V) \leq d(x, \complement \cup Q_1) < 2^{-(n+1)}$. Por lo tanto $x \notin V_{n+1}$, entonces $d(x, y) \geq 2^{-(n+1)}$ por (4).

$$ii^{'})x \in (\cup Q_1) \cup U \Rightarrow x \in \cup\{V_n^* | n \in \mathbb{N} \wedge V \in Q_1\} \cup (\cup\{U_n^* | n \in \mathbb{N}\})$$

pues si $x \in U_n$ y $x \notin U_n^*$, entonces $d(x, \complement(\cup \mathbb{Q}_1)) \geq 2^{-(n+1)}$; por lo que $x \in \cup Q_1$, lo que implica $x \in \cup\{V_n^* | n \in \mathbb{N} \wedge V \in Q_1\}$ (por (ii)) para Q_1. Por otra parte $i^{'})$ e $ii^{'})$ muestran que la colección $Q_1 \cup \{U\}$ con la colección asociada $Q_1^* \cup \{U_n^* | n \in \mathbb{N}\}$ pertenece a $\mathcal{H}$ y es estrictamente mayor que Q_1 en $(\mathcal{H}, \leq)$, lo que es una contradicción. Concluimos que $Q_0 = Q_1 \in \mathcal{H}$. Pero esto significa que la colección asociada $Q_0^* = \cup\{(Q_0)_n^* | n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X (por ii)) más fina que Q_0. Además Q^* es σ-localmente finito porque las colecciones $(Q_0)_n^*$ son localmente finitas ($n \in \mathbb{N}$). En efecto, por i), toda bola $B(x, 2^{-(n+1)})(x \in X;\ n$ arbitrario, prefijado) puede intersectar a lo sumo a un conjunto $U_n^* \in \mathbb{Q}\ _n^*$.

Concluimos que $(X, \mathcal{X}_d)$ verifica a $(P^{'})$ y por tanto es paracompacto, porque todo espacio seudométrico es un T_3-espacio. ■

Veremos en la siguiente sección que el teorema de Stone implica un criterio necesario de metrizabilidad, (también puede probarse que es suficiente). Para concluir esta sección analizaremos ahora brevemente la heredabilidad de (P). No vamos a esperar que la paracompacidad sea heredada por todo subespacio.

Veremos más adelante un contraejemplo (9.1.13). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

10.1.12 *Proposición*

Todo F_σ-conjunto (y en particular todo cerrado) en un T_2-espacio paracompacto es paracompacto.

Demostración: Sea $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, donde todos los F_n son cerrados en un espacio paracompacto $(X, \mathcal{X})$ y sea Q una cubierta abierta de F. Todo $V \in Q$ tiene la forma $V = F \cap U_V$ con $U_V \in \mathcal{X}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \{U_V | V \in Q\} \cup \{\complement F_n\}$ es una cubierta abierta de $(X, \mathcal{X})$. Sea $Q_n^{'}$ un refinamiento abierto, localmente finito de Q_n. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}, Q_n := \{U \cap F | U \in Q_n^{'} \wedge U \cap F_n \neq \varnothing\}$ es una colección localmente finita de abiertos en F y $Q^{'} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n^{'}$ es un refinamiento abierto de Q. Como F es regular, por ser subespacio del espacio regular $(X, \mathcal{X})$, se tiene que es paracompacto, por el criterio $(P^{'})$. ■

Contrariamente a la compacidad y a la compacidad local, la paracompacidad

no se hereda ni siquiera a los productos finitos.

10.1.13 *Ejemplo*

Ya sabemos que el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{X}_s)$ es paracompacto (9.1.10). Veremos ahora que la segunda potencia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_s^2)$ no es paracompacta. Basta probar que este T_2-espacio no es normal. Supongamos por reducción al absurdo que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_s^2)$ es normal. La diagonal $D = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio discreto cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_s^2)$. Todo subconjunto C de la diagonal D es cerrado. Entonces para todo subconjunto $C \subset D$ existen dos vecindades $U(C) \in \mathcal{P}(C)$ y $V(D \backslash C) \in \mathcal{P}(D \backslash C)$ tales que $U(C) \cap V(D \backslash C) = \varnothing$. El conjunto $R = \mathbb{Q}^2$ es denso en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_s^2)$. La aplicación $C \mapsto U(C) \cap R$ de $\mathcal{P}(D)$ en $\mathcal{P}(R)$ es *inyectiva*; pues si $C, C' \in \mathcal{P}(D), C \neq C'$, por ejemplo $C' \backslash C \neq \varnothing$, entonces el abierto $U(C') \backslash V(D \backslash C)$ que contiene a $C' \backslash C$ no es vacío, por lo que tiene una intersección no vacía con el conjunto denso R es decir $(U(C') \backslash V(D \backslash C)) \cap R \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $(U(C') \cap R) \backslash (U(C) \cap R) \neq \varnothing$. Pero la aplicación $C \mapsto U(C)$ no puede ser inyectiva porque $card\, \mathcal{P}(D) = 2^{Card(D)} > Card\, \mathcal{P}(R) = 2^{\mathbb{N}}$. Con esto hemos construido un contraejemplo que muestra:

1. El producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto.

2. El producto de dos espacios normales no es necesariamente normal.

Podemos utilizar este mismo espacio para mostrar que un subespacio de un T_2-espacio compacto (luego paracompacto y normal) no es necesariamente paracompacto ni normal. En efecto, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{X}_s^2)$ es completamente regular como producto de dos espacios completamente regulares, luego tiene una inmersión en un cubo compacto I^ϕ.

Dejamos al lector probar que se cumple al menos la siguiente proposición:

10.1.14 *Proposición*

Todo producto de un espacio paracompacto por un espacio compacto es paracompacto.

Demostración: Ejercicio. ■

Como última propiedad de heredabilidad mencionamos, sin demostración, el resultado siguiente de E. Michael.

10.1.15 *Proposición*

Si $(X, \mathcal{X})$ es paracompacto y $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una sobreyección continua y cerrada, entonces $(Y, \mathcal{Y})$ es paracompacto.

Una demostración se halla, por ejemplo, en DUGUNDJI [51], pág. 165/6 o NAGATA [122], pág. 161/2.

Terminamos la sección con una aplicación del teorema de la partición de la unidad (10.1.4). Recomendamos al lector demostrar este interesante resultado de C. H. Dowker en forma de ejercicio orientado.

10.1.16 *Proposición*

Sea g (resp. G) una función real semicontinua inferiormente (resp. superiormente) sobre un T_2-espacio paracompacto $(X, \mathcal{X})$ tal que $G(x) < g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) < h(x) < g(x) \ \textit{para todo} \ x \in X. \tag{6}$$

Demostración: Ejercicio.

Indicación:
La demostración se efectúa en dos pasos:

1. Los conjuntos $U_r = \{x|G(x) < r\} \cap \{x|g(x) > r\}(r \in \mathbb{Q}\ )$ forman una cubierta abierta de $(X, \mathcal{X})$.

2. Sea $(f_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ una partición subordinada de la unidad. Entonces $h : x \mapsto \sum\limits_{r\in\mathbb{Q}} r f_r(x)$ es la función buscada.

§ 10.2 **Criterios de metrizabilidad**

Comenzaremos esta sección con un sencillo resultado que nos será de amplia utilidad en lo que sigue:

10.2.1 *Proposición*

Sea $\mu = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de seudométricas sobre un conjunto X y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $d_k^{'} = inf(d_k, 1)$. Entonces

i) La seudométrica

$$d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k^{'} \tag{7}$$

define sobre X la misma topología que la familia μ. En particular, $\mathcal{X}_\mu$ es seudometrizable;

ii) d es una métrica si y sólo si

$$(\forall k \in \mathbb{N} : d_k(x, y) = 0) \Rightarrow x = y \tag{8}$$

Demostración:

i) Sabemos que d, así definida, es efectivamente una seudométrica real. Puesto que

$$d_k^{'} \leq 2^k d \quad (k \in \mathbb{N}),$$

la topología $\mathcal{X}_{d_k} = \mathcal{X}_{d_k}^{'}$ es más gruesa que $\mathcal{X}_d$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{X}_\mu = \sup\{\mathcal{X}_{d'k} | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{X}_d$. Para demostrar la inclusión inversa, debemos probar que toda bola $B_d(x, \rho) = \{y \in X | d(x, y) < \rho\}$ definida por d contiene una vecindad de x en $(X, \mathcal{X}_\mu)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^N < \rho$. Tenemos:

$$d \leq \sum_{k=1}^{N} \left(1/2^k d_k^{'}\right) + \sum_{k=N}^{\infty} 1/2^k \leq \text{ máx}\{d_1', ..., d_N'\} + 1/2^N$$

por lo tanto la vecindad $V_x = \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X | d_i(x, y) < (\rho - 1/2^N)\}$ de x en $(X, \mathcal{X}_\mu)$ está contenida en $B_d(x, \rho)$.

ii) se concluye inmediatamente de las equivalencias $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_k^{'}(x, y) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow d_k(x, y) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

De este resultado se deduce fácilmente un criterio de metrizabilidad para espacios producto.

10.2.2 *Corolario (metrizabilidad de espacios producto)*

Un espacio producto $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ de espacios no triviales $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ $(\mathcal{C}ard X_\alpha \geq 2)$ es metrizable si y sólo si todo espacio $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ es metrizable y además I es numerable o finito.

Demostración: Ejercicio. (Indicación: véase 5.2.13.) ■

10.2.3 *Ejemplo*

Los espacios producto $\mathbb{R}^X$ y $[0, 1]^X$ son metrizables si y sólo si X es numerable.

Inversamente, el resultado 8.6.22 de Urysohn expresa que todo AN2-espacio completamente regular puede sumergirse en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto todos estos espacios son metrizables. Resulta entonces que el teorema 8.6.22 de Urysohn es esencialmente un teorema de metrizabilidad. Debilitando un poco sus hipótesis, obtenemos el siguiente resultado.

10.2.4 *Teorema (de metrizabilidad de Urysohn)*

Un AN 2-espacio es metrizable si y sólo si es regular (o normal, o completamente regular).

Demostración: Sólo queda por probar que todo AN 2-espacio regular es metrizable. Pero todo AN2-espacio regular es paracompacto (10.1.6) por lo tanto

completamente regular. Basta aplicar el razonamiento anterior. ■

En particular tenemos los criterios siguientes para la metrizabilidad de espacios compactos, resp. localmente compactos.

10.2.5 *Corolario*

i) Todo T_2-espacio localmente compacto que satisface AN 2-es metrizable.

ii) Un T_2-espacio compacto es metrizable si y sólo si verifica AN 2.

Demostración:

i) Por 8.6.9 todo T_2-espacio localmente compacto es regular.

ii) Sólo queda por probar que todo T_2-compacto metrizable cumple AN 2 y esto se debe a la proposición (8.4.15) ya que estos espacios son metrizables y de Lindelöff.■

Las dos proposiciones anteriores (10.2.4 y 10.2.5) en realidad pertenecen a la teoría de los espacios completamente regulares y de las compactificaciones de Stone-Cěch. Las hemos presentado primeramente, para seguir el orden en que históricamente fueron apareciendo los resultados relacionados con el problema de metrizabilidad. Sin embargo, se podrían también obtener como corolarios directos del resultado fundamental de esta sección que vamos a probar a continuación.

El teorema de Nagata-Smirnov-Bing nos proporciona un criterio general, necesario y suficiente, para la metrizabilidad de cualquier espacio topológico. Este teorema tiene otra base metódica, distinta a la del teorema de metrizabilidad de Urysohn, que pertenece a la teoría de las cubiertas abiertas y sus refinamientos. Especialmente en la demostración de dichos teoremas se utiliza el lenguaje desarrollado por A. H. Stone en su contribución a la teoría de los espacios paracompactos.

10.2.6 *Teorema (Nagata-Smirnov-Bing)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es metrizable si y sólo si es regular y posee una base σ-localmente finita.

Demostración:

Necesidad. Supongamos que $(X, \mathcal{X})$ es metrizable y que d es una métrica tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_d$.

Para cada n sea $B_{d,n}$ la familia de las bolas de radio $\frac{1}{n}$: $\left(B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)_{x \in X}$ y sea $B_d = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{d,n}$. Entonces B_d es una base de $\mathcal{X}$ y todo $B_{d,n} (n \in \mathbb{N})$ es una cubierta abierta de X. Por el teorema de Stone (10.1.11), todo $B_{d,n}$ tiene un refinamiento localmente finito que es una cubierta abierta de X, llamémosle B_n.

La colección $\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es una base de $\mathcal{X}$. En efecto, sea $U \in \mathcal{X}$ y $x \in U$. Existe n tal que $x \in B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U$. Pero B_{2n} es un refinamiento de $B_{d,2n}$ que recubre X y por lo tanto existe $V \in B_{2n}$ tal que $x \in V \subset B_d\left(y, \frac{1}{2n}\right)$ para cierta $y \in X$.

Entonces $d(x,y) < \frac{1}{2n}$ y para todo $z \in V$ tenemos $d(x,z) < \frac{1}{n}$. De aquí que $x \in V \subset U$, con lo que queda demostrada la necesidad de la condición.

Suficiencia: Sea $\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ una base de $\mathcal{X}$ tal que cada B_n es una familia localmente finita. Veremos primeramente que $(X, \mathcal{X})$ tiene que ser paracompacto y por tanto normal. En efecto, si Q es una cubierta abierta de X, entonces existe para todo abierto $A \in Q$ una subcolección $\beta_A \subset \beta$ tal que $\cup\beta_A = A$; entonces la colección $\cup\{\beta_A | A \in Q\}$ es un refinamiento σ-localmente finito de Q . Concluimos por 9.1.5 (P') que $(X, \mathcal{X})$ es paracompacto.

Utilizando la normalidad de $(X, \mathcal{X})$ procederemos ahora a definir una familia de seudométricas en X, mediante funciones de Urysohn. Sean m y n dados. Para cada $U \in B_n$ consideremos los elementos $V \in B_m$ tales que $\overline{V} \subset U$. Denotemos la unión de estos elementos por U^*. Es claro que U^* puede ser vacío para algún m pero no para todos debido a la regularidad de $(X, \mathcal{X})$ (7.3.1).

Por el ejercicio E.5.10 se tiene:

$$\overline{U}^* = \overline{\cup\{V \in B_m \mid \overline{V} \subset U\}} = U\{\overline{V} | V \in B_m \wedge \overline{V} \subset U\} \subset U \tag{9}$$

Para aquellas ternas m, n, U, para las cuales $U^* \neq \varnothing$, existe por (7.4.8) una función de Urysohn tal que

$$f_U(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \complement U \\ 1 & \text{si } x \in \overline{U}^* \end{cases} \tag{10}$$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} d_{m,n,U} : X \times X & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & |f_U(x) - f_U(y)| \end{array}$$

es una seudométrica continua sobre $(X, \mathcal{X})$.

Ahora definamos:

$$d_{m,n}(x,y) = \sum_{U \in B_n} |f_U(x) - f_U(y)| \tag{11}$$

Como B_n es localmente finita, existen vecindades U_x y U_y de x y y respectivamente que tienen intersección no vacía con, a lo más, un número finito de elementos de $B_n : U_1, ..., U_k$ y $U_{k+1}, ..., U_s$. Entonces sobre $U_x \times U_y$ la función $d_{m,n}$ se reduce a una suma finita de funciones continuas

$$d_{m,n}(x,y) = \sum_{n=1}^{s} |f_{Un}(x) - f_{Un}(y)| \tag{12}$$

Luego $d_{m,n}$ es una seudométrica continua en $(X, \mathcal{X})$.

Sea μ la familia numerable de seudométricas $d_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Por ser todas estas seudométricas continuas se tiene, por el ejemplo 5.3.9, que $\mathcal{X}_\mu \subset \mathcal{X}$. Probaremos que $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_\mu$.

Sean $x \in X$ y $U_x \in \overset{\circ}{B}(x)$. Existe n_0 tal que B_{n_0} contiene un elemento U que satisface.

$$x \in U \subset U_x$$

Por otra parte, por la regularidad de $(X, \mathcal{X})$, existe m_0 tal que B_{m_0} contiene un elemento V que cumple

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U$$

Por la definición de d_{m_0,n_0} tenemos $d_{m_0,n_0}(x, y) \geq 1$ para todos los $y \in \complement U_x$. Entonces $U_x \supset B_{d_{m_0,n_0}}(x, 1)$, lo que prueba que toda vecindad de x en $(X, \mathcal{X})$ contiene una bola definida por una seudométrica de μ, o sea, $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_\mu$. Concluimos, por el teorema 10.2.1, que $(X, \mathcal{X}_\mu) = (X, \mathcal{X})$ es seudometrizable y, por ser un espacio de Hausdorff, es metrizable. ■

Introduciremos ahora un nuevo concepto que pone de manifiesto la relación existente entre la metrizabilidad y la paracompacidad, y permite además obtener un resultado de gran utilidad sobre la metrizabilidad de variedades diferenciables.

10.2.7 *Definición*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama **localmente metrizable** si todo punto tiene una vecindad metrizable como subespacio de X.

Dejamos al lector comprobar el siguiente corolario en forma de ejercicio orientado.

10.2.8 *Corolario (Smirnov)*

Un T_2-espacio localmente metrizable es metrizable si y sólo si es paracompacto.

Demostración: Ejercicio.

Indicaciones:

i) Tome una cubierta formada por vecindades metrizables $(V_x)_{x \in X}$ y seleccione un refinamiento localmente finito $(V_{x_\alpha})_{\alpha \in I}$.

ii) Si $B_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,\alpha}$, es una base σ-localmente finita de V_{x_α} demuestre que $\beta = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ es una base de $\mathcal{X}$.

iii) Demuestre que $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, donde para cada n $B_n = \bigcup_{\alpha \in I} B_{n,\alpha}$, es localmente finita. ■

10.2.9 *Ejemplo*

Toda variedad topológica es localmente metrizable por ser localmente homeomorfa a subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Por lo tanto, una variedad topológica es metrizable si y solo sí es paracompacta. De la nota de 9.1.7 y del hecho que toda variedad topológica es la suma topológica de sus componentes conexas (6.2.15) tendremos: Una variedad topológica es metrizable si y sólo si todas sus componentes conexas son numerables al infinito.

CAPÍTULO 11 Espacios uniformes y espacios métricos completos.

Profundizaremos en este capítulo en el estudio de la teoría de los espacios métricos ya comenzado en el primer capítulo de este libro. Procederemos en dos direcciones opuestas. En una primera parte analizaremos la estructura básica, llamada estructura uniforme, que nos permite hablar de la noción de continuidad uniforme y de sucesiones de Cauchy en un espacio métrico y, más generalmente, en todo espacio enyugado. Esta parte tiene por tanto una tendencia hacia la generalización sistemática y la fundamentación axiomática de ciertos conceptos y resultados básicos de la teoría de los espacios métricos. En la segunda parte se exponen algunos resultados más específicos sobre los espacios métricos completos, con vista a su aplicación en otras ramas de la matemática. La mayoría de estos resultados podrían generalizarse a espacios uniformes completos, pero preferimos llegar directamente a los resultados en su forma más útil para las aplicaciones.

No nos proponemos desarrollar los elementos de la teoría axiomática de los espacios uniformes tal y como lo hicimos para los espacios topológicos. Dejamos al lector verificar que muchos de los conceptos y métodos técnicos de la teoría de los espacios topológicos, pueden aplicarse análogamente en la teoría de los espacios uniformes (estructuras uniformes iniciales y finales, etc.). Nos contentaremos con presentar los conceptos y resultados fundamentales para su aplicación a los espacios funcionales (capítulo 12), y a las teorías de las diversas estructuras algebraicas topológicas (grupos topológicos, espacios vectoriales topológicos, etc.).

En la sección 11.1 se expone la definición axiomática de los espacios uniformes y se relaciona su teoría con la teoría de los espacios topológicos caracterizando a los espacios topológicos uniformizables.

Las secciones 11.2 y 11.3 presentan los resultados básicos sobre las aplicaciones uniformemente continuas y los filtros de Cauchy, respectivamente, a espacios uniformes completos, que utilizaremos en el capítulo final al analizar la estructura uniforme de los espacios funcionales. Basándose en estos resultados generales, en la segunda parte se deduce una serie de teoremas importantes sobre los espacios

métricos completos (§11.4), y el completamiento de un espacio métrico (§11.5). Estos resultados son básicos para las teorías de los espacios de Hilbert o de los espacios y álgebras de Banach. Para ilustrar su utilidad en diversas áreas de la matemática, en la última sección se exponen algunas de las aplicaciones al análisis, análisis numérico, teoría de ecuaciones diferenciales, teoría de los espacios de Hilbert y teoría de variable compleja.

§ 11.1 **Espacios uniformes y espacios uniformizables**

Del análisis conocemos dos conceptos fundamentales, aparentemente no topológicos que todavía no hemos generalizado para los espacios topológicos: los conceptos de *sucesión de Cauchy y la continuidad uniforme.* Ambas nociones se generalizan fácilmente a los espacios métricos.

11.1.1 *Definición (sucesión de Cauchy)*

Una sucesión (x_n) en un espacio seudométrico (X, d) se llama de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{1}$$

11.1.2 *Definición (aplicación uniformemente continua)*

Una aplicación f de un espacio seudométrico (X, d) en un espacio seudométrico (Y, d') se llama *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X$:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{2}$$

Si tratamos de formular estas nociones para espacios topológicos en general encontramos un obstáculo. Ambas presuponen que se tiene un concepto de cercanía uniforme entre pares de puntos cualesquiera.

Las vecindades $V \in \mathcal{V}(a)$ resp. $V \in \mathcal{V}(A)$ en un espacio topológico nos definen la cercanía de un punto x cualquiera al punto prefijado a o al conjunto prefijado A.

$\rightsquigarrow$Sin embargo, en un espacio topológico general no podemos comparar las vecindades de diferentes puntos, ya que no tenemos un criterio para determinar el conjunto de todos los pares de puntos x y y que tienen un cierto orden de cercanía. En efecto, mostraremos mediante el siguiente ejemplo que la propiedad de Cauchy no es una propiedad topológica de las sucesiones en un espacio métrico, sino que depende en cierta medida de una estructura adicional que introduce la métrica d.

11.1.3 *Ejemplo*

Consideremos sobre $\mathbb{R}$ las dos distancias

$$d(x,y) = |y - x|$$

$$d^{'}(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

que definen, ambas, la misma topología sobre $\mathbb{R}$. La sucesión (n) es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d^{'})$ pero claramente no es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$.

Por otro lado, la propiedad de Cauchy así como la continuidad uniforme, permanecen invariantes ante la sustitución de una métrica por otra semejante. Tal parece que al pasar por la abstracción de los espacios métricos a los espacios topológicos (en el capítulo 2), nos hemos saltado una estructura intermedia importante.

Para caracterizar axiomáticamente esta estructura intermedia, procederemos como antes, al axiomatizar la estructura topológica. Analizaremos qué conjuntos definen el orden de cercanía entre dos puntos cualesquiera de un espacio seudométrico (X, d) y seleccionaremos algunas de sus propiedades fundamentales como axiomas de una nueva estructura más general, sin utilizar los números reales.

El orden de cercanía entre dos puntos $x_0, y_0 \in X$ se define mediante la seudométrica d por un número real:

$$d(x_0, y_0) < \varepsilon$$

La misma relación puede expresarse utilizando el lenguaje de la teoría de conjuntos:

$$(x_0, y_0) \in U_\varepsilon := \{(x,y) \in X \times X | d(x,y) < \varepsilon\} \tag{3}$$

Si conocemos la colección:

$$\mathfrak{B} = \{U_\varepsilon | \varepsilon > 0\} \tag{4}$$

podemos olvidar que sus elementos se definieron por medio de una distancia y tomar los propios conjuntos $U \in \mathfrak{B}$ para indicar el orden de cercanía entre dos puntos de la siguiente manera:

$$x, y \text{ son vecinos de orden } U \Longleftrightarrow (x,y) \in U \tag{5}$$

Para analizar las propiedades básicas de la colección $\mathfrak{B}$ introducimos las siguientes definiciones.

11.1.4 *Notación*

Si $U, V \subset X \times X, a \in X, A \subset X$, entonces

$$V \circ U := \{(x,y) \in X^2 | \exists\, z \in X : (x,z) \in U \ \wedge \ (z,y) \in V\}$$

$$U^{-1} := \{(x,y) \in X^2 \mid (y,x) \in U\}$$
$$U(a) := \{y \in X \mid (a,y) \in U\}$$
$$U(A) := \{y \in X | \exists\, a \in A : (a,y) \in U\}$$
$$V^n := V \circ ... \circ V \text{ (n veces) para } n \in \mathbb{N}^*$$

(no es necesario poner paréntesis ya que $\circ$ es asociativo). Se dice que U es **simétrico** si $U = U^{-1}$.

La base de filtro $\mathfrak{B}$ definida por (4) cumple tres propiedades básicas, que corresponden precisamente a las tres propiedades características de una seudométrica:

$(BU1)$ $\Delta \subset U$ para todo $U \in \mathfrak{B}$(Δ: diagonal de $X \times X$)

$(BU2)$ Para todo $U \in \mathfrak{B}$ existe un $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V \subset U^{-1}$.

$(BU3)$ Para todo $U \in \mathfrak{B}$ existe $V \in \mathfrak{B}$ tal que $V \circ V \subset U$ (fig.155).

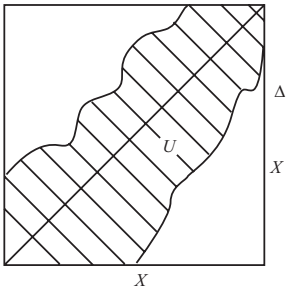


Figura 155.

Las propiedades correspondientes del filtro generado por $\mathfrak{B}$ sirven como axiomas de una nueva estructura.

11.1.5 Definición (estructura uniforme, espacio uniforme)

Sea X un conjunto. Un filtro $\mathcal{U}$ sobre $X \times X$ se llama una **estructura uniforme** si cumple:

$(U1)$ $\Delta \subset U$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

$(U2)$ $U^{-1} \in \mathcal{U}$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

$(U3)$ Para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subset U$.

Al par $(X,\mathcal{U})$ se llama entonces **espacio uniforme**. Los conjuntos $U \in \mathcal{U}$ se llaman **entornos** de X o **entornos uniformes** de X (aunque sean subconjuntos de $X \times X$). Dos puntos $x, y \in X$ se llaman vecinos de orden U si $x, y \in U$ ($U \in \mathcal{U}$). Un subconjunto $A \subset X$ se llama **pequeño de orden** $U \in \mathcal{U}$ si $A \times A \subset U$. Al igual que en la teoría de los espacios topológicos, necesitamos un concepto de base o sistema fundamental de entornos para construir espacios uniformes concretos.

11.1.6 *Definición (sistema fundamental de entornos)*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Una subcolección $\mathfrak{B} \subset \mathcal{U}$ se llama un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$ o base de $\mathcal{U}$ si y sólo si cumple:

$$\forall\, U \in \mathcal{U}\ \exists\, B \in \mathfrak{B} \qquad B \subset U \tag{6}$$

11.1.7 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces tanto los entornos simétricos de $\mathcal{U}$ como las bases de filtro $\mathfrak{B}_n = \{V^n | V \in \mathcal{U}, n \geq 1\}$ con n fijo forman bases de $\mathcal{U}$. La verificación se deja de ejercicio.

La siguiente proposición queda como un sencillo ejemplo.

11.1.8 *Proposición*

Sea X un conjunto. $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ es base de una estructura uniforme sobre X si y sólo si es una base de filtro que cumple $(BU1) - (BU3)$.

Demostración: Ejercicio. ■

11.1.9 *Ejemplo*

Sea X un conjunto. La estructura uniforme más gruesa sobre X, en el sentido del orden $\subset$ sobre $\mathcal{P}(X \times X)$:

$$\mathcal{U}_0 = \{X \times X\} \tag{7}$$

se llama **estructura uniforme indiscreta** sobre X. La más fina es la llamada **estructura uniforme discreta** sobre X:

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(X \times X) \,|\, \Delta \subset U\} \tag{8}$$

11.1.10 *Ejemplo*

A toda seudométrica sobre un conjunto X se asocia canónicamente la estructura uniforme $\mathcal{U}_d$ que tiene como base la base de filtro

$$\mathfrak{B}_d := \{U_\varepsilon | U_\varepsilon = \{(x, y) \in X^2 | \, d(x, y) < \varepsilon\} \wedge \varepsilon > 0\} \tag{9}$$

Más generalmente, si μ es un conjunto saturado de seudométricas sobre X, entonces la base de filtro

$$\mathfrak{B}_\mu := \{U_{d,\varepsilon} | U_{d,\varepsilon} = \{(x, y) \in X^2 | \, d(x, y) < \varepsilon\} \wedge d \in \mu \wedge \varepsilon > 0\} \tag{10}$$

es base de una estructura uniforme $\mathcal{U}_\mu$ sobre X que se asocia canónicamente a μ. Es fácil comprobar que $\mathcal{U}_\mu$ es el supremo de la familia de estructuras uniformes $(\mathcal{U}_d)_{d \in \mu}$ (en el conjunto de todas las estructuras uniformes sobre X ordenado por la inclusión $\subset$). La verificación de los enunciados de este ejemplo se deja como ejercicio.

11.1.11 *Ejemplo*

Sea G un grupo provisto de una topología $\mathcal{X}$. El par $(G, \mathcal{X})$ se llama **grupo topológico** si cumple los axiomas siguientes:

$(GT1)$ La multiplicación $(x, y) \mapsto xy$ de $G \times G$ en G es continua.

$(GT2)$ La inversión $x \mapsto x^{-1}$ de G en G es continua.

Sea $\mathcal{V}(e)$ el filtro de vecindades del elemento neutro $e \in G$. Entonces se tiene que:

i) $e \in U$ para todo $U \in \mathcal{V}(e)$

ii) Para todo $V \in \mathcal{V}(e)$ existe $U \in \mathcal{V}(e)$ tal que $U \subset V^{-1}$ (por $GT2$)

iii) Para todo $V \in \mathcal{V}(e)$ existe $U \in \mathcal{V}(e)$ tal que $U \cdot U \subset V$ (por $GT1$)

De aquí concluimos que la base de filtro

$$\mathfrak{B}_1 = \{U_V | U_V = \{(x,y) | xy^{-1} \in V\} \wedge V \in \mathcal{V}(e)\} \tag{11}$$

cumple $(UB1) - (UB3)$, por lo tanto define una estructura uniforme $\mathcal{U}_1$ sobre G. Otra estructura uniforme $\mathcal{U}_2$ que se asocia canónicamente a G está definida por la base de filtro.

$$\mathfrak{B}_2 = \{W_V | W_V = \{(x,y) | x^{-1}y \in V\} \wedge V \in \mathcal{V}(e)\} \tag{12}$$

En general $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son estructuras uniformes diferentes sobre G. Sin embargo, si G es conmutativo, entonces ambas coinciden evidentemente. Puesto que el grupo aditivo de un espacio vectorial es conmutativo, a todo espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{X})$ se asocia canónicamente una única estructura uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ definida por el filtro de vecindades $\mathcal{V}(0)$. Si la topología $\mathcal{X}$ se define por una norma $\|\cdot\|$ sobre E, entonces es fácil comprobar que la estructura uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ y la estructura uniforme $\mathcal{U}_{\|\cdot\|}$ definida por la norma por el ejemplo 11.1.10 coinciden. La verificación de los enunciados de este ejemplo queda como ejercicio.

11.1.12 *Ejemplo*

Sea X un conjunto y $\mathfrak{Q}$ una cubierta de X. Entonces, para todo $x \in X$, el conjunto

$$S_\tau(x, \mathfrak{Q}) = \cup\{V \in \mathfrak{Q} | x \in V\} \tag{13}$$

se llama la **estrella de x con respecto a $\mathfrak{Q}$**. $\mathfrak{Q}$ se llama refinamiento baricéntrico de una cubierta $\mathfrak{Q}'$ de X, si el recubrimiento

$$S_\tau \mathfrak{Q} := \{S_\tau(x, \mathfrak{Q}) | x \in X\} \tag{14}$$

es una cubierta de $\mathfrak{Q}'$.

Sea $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{Q}_\alpha | \alpha \in I\}$ una colección de cubiertas de X con las dos propiedades siguientes:

$(U1)$ Todo par de cubiertas $\mathfrak{Q}_\alpha, \mathfrak{Q}_\beta \in \mathfrak{U}$ poseen un refinamiento común $\mathfrak{Q}_\nu$.

$(U2)$ Para todo $\mathfrak{Q}_\alpha \in \mathfrak{U}$ existe un refinamiento baricéntrico $\mathfrak{Q}_\beta \in \mathfrak{U}$ de $\mathfrak{Q}_\alpha$.

Tales colecciones de cubiertas se llaman **familias uniformizantes**. Por ejemplo, toda colección de particiones de X que verifica $(U1)$ constituye una familia uniformizante. En particular la colección P_X de todas las particiones finitas de X es

una familia uniformizante. Supongamos que tenemos sobre X una familia uniformizante $\mathfrak{U}$. Entonces $\mathfrak{U}$ define, de manera canónica, una estructura uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{U}}$ sobre X mediante:

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{U}} = \{V \in \mathcal{P}(X \times X) | V = \cup\{U \times U | U \in \mathfrak{Q} \ \wedge \ \mathfrak{Q} \in \mathfrak{U}\} \tag{15}$$

La idea intuitiva que acompaña esta construcción es la de considerar todos los conjuntos de una cubierta $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{U}$ como del mismo orden. $V = \cup\{U \times U | U \in \mathfrak{Q}\}$ reúne entonces todos los pares (x, y) que son vecinos del orden $\mathfrak{Q}$ (fig. 156).

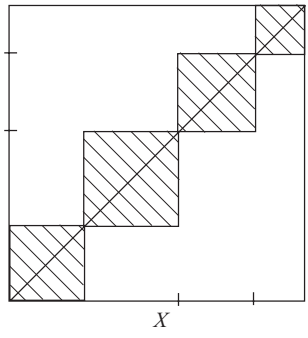


Figura 156. Entorno definido por una partición de X

La estructura uniforme definida de tal manera por la familia uniformizante P_X se llama **estructura uniforme de las particiones finitas**.

Este método de definir una estructura uniforme mediante una colección de cubiertas es completamente equivalente al método dado por la definición, ya que toda estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre X puede definirse de esta manera.

En efecto, para todo $V \in \mathcal{U}$ la colección de las vecindades de orden V:

$$\mathfrak{Q}_V := \{V(x) \,|\, x \in X\} \tag{16}$$

es una cubierta de X y la colección de todas estas cubiertas

$$\mathfrak{U} = \{\mathfrak{Q}_V \,|\, V \in \mathcal{U}\} \tag{17}$$

es una familia uniformizante sobre X tal que

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{U}} = \mathcal{U}$$

La verificación de este resultado se deja como ejercicio.

De una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X se deriva, de manera canónica, una topología sobre X tomando como vecindades los cortes $U(x)$ $(U \in \mathcal{U})$. Más precisamente.

11.1.13 *Proposición*

Sea $\mathcal{U}$ una estructura uniforme sobre un conjunto X. Entonces existe sobre X una única topología que asocia a cada punto $x \in X$ el filtro de vecindades

$$\mathcal{V}(x) := \{V(x) \,|\, V \in \mathcal{U}\} \tag{18}$$

Demostración: Es un ejercicio de rutina verificar que los filtros $\mathcal{V}(x)$ satisfacen los 4 axiomas $(V1)-(V4)$. De 3.1.8 la proposición es, entonces, una consecuencia inmediata. ■

Nota: Si $V \in \mathcal{U}$ es un entorno simétrico, entonces la vecindad $V(x) \in B(x)$ es pequeña de orden V^2, pues $V(x) \times V(x) \subset V \circ V^{-1}$.

Nota: La topología definida en la proposición anterior se llama **topología del espacio uniforme** $(X, \mathcal{U})$ y se denota por $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$.

Dos estructuras diferentes $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ sobre X pueden definir la misma topología, como muestran las dos métricas topológicamente equivalentes d, d' sobre $\mathbb{R}$ (11.1.3) y no definir la misma estructura uniforme sobre $\mathbb{R}$.

Dos estructuras uniformes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ sobre X se llaman (topológicamente) **equivalentes** si $\mathcal{X}_{\mathcal{U}_1} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}_2}$.

11.1.14 *Ejemplo*

Sea $\mathcal{U}$ la estructura uniforme de las particiones finitas sobre un conjunto X. Entonces $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$ es la topología discreta.

11.1.15 *Ejercicio*

Probar las siguientes compatibilidades:

i) Si (X, d) es un espacio seudométrico, entonces $\mathcal{X}_d = \mathcal{X}_{\mathcal{U}_d}$.

ii) Si (X, μ) es un espacio enyugado, entonces $\mathcal{X}_\mu = \mathcal{X}_{\mathcal{U}_\mu}$.

iii) Si $(G, \mathcal{X})$ es un grupo topológico y $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son las dos estructuras uniformes asociadas sobre G, entonces

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}_1} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}_2}$$

11.1.16 *Pregunta*

¿Son necesariamente semejantes dos seudométricas, sobre un conjunto X, que definen la misma estructura uniforme?

En un espacio seudométrico (X, d) se definen, para todo subconjunto $B \subset X$, las vecindades de orden ε:

$$V(B, \varepsilon) = \{x \in X | d(x, B) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

que reúne todos los puntos cuya distancia a B sea menor que ε. Daremos ahora una definición análoga para espacios uniformes.

11.1.17 *Definición (vecindad uniforme de orden V)*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $B \subset X$. Entonces, para todo $U \in \mathcal{U}$, la vecindad $U(B)$ de B en $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ se llama **vecindad uniforme de orden** U de B.

Sabemos que en un espacio seudométrico (X, d) las vecindades $V(B, \varepsilon)$ de un conjunto $B \subset X$ $(\varepsilon > 0)$ no siempre forman un sistema fundamental de vecindades de B.

11.2.18 *Ejemplo*

La vecindad $\mathbb{R}^2_+$ del conjunto:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid xy \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

no contiene ninguna vecindad uniforme de B (fig. 157). Sin embargo, en (X, d) siempre se tiene que

$$\overline{B} = \cap\{V(B, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

Una fórmula análoga se cumple en todo espacio uniforme.

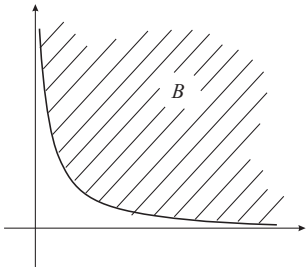


Figura 157.

11.1.19 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $B \subset X$. Entonces se cumple, con respecto a la topología $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$ de $(X, \mathcal{U})$, que

$$\overline{B} = \cap\{V(B) \mid V \in \mathcal{U}\} \tag{19}$$

Demostración: Para probar que $\overline{B} \subset V(B)$ para todo $V \in \mathcal{U}$ basta demostrar que, para todo entorno simétrico W, se tiene $\complement W(B) \subset \complement\overline{B}$, por el ejemplo 11.1.7. Pero esto es evidente, porque

$$x \notin W(B) \Rightarrow W(x) \cap B = \varnothing$$

Queda por probar que para todo $x \notin \overline{B}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin V(B)$. Pero si V es un entorno simétrico tal que $V(x) \cap B = \varnothing$, entonces necesariamente $x \notin V(B)$. ■

Con respecto a los axiomas de separación, veremos más adelante que todo espacio uniforme es completamente regular. Por ahora nos contentaremos con probar el siguiente resultado.

11.1.20 *Proposición*

Todo espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es un T_3-espacio.

Demostración: Sea $C \subset X$ cerrado y $x \notin C$. Entonces existe un entorno $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) \cap C = \varnothing$ y un entorno simétrico W tal que $W \circ W \subset V$. Concluimos que

$$W(x) \cap W(C) = \varnothing. \blacksquare$$

Con este resultado hemos probado que en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ un cerrado C puede separarse de todo punto $x \in \complement C$. Utilizando el axioma (C) es fácil deducir de aquí que C puede separarse de todo compacto disjunto $K \subset X$ por medio de dos vecindades uniformes disjuntas.

11.1.21 *Proposición (separación en un espacio uniforme)*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, $C \subset X$ cerrado y $K \subset X$ compacto tales que $C \cap K = \varnothing$. Entonces existe un entorno $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$V(C) \cap V(K) = \varnothing.$$

Demostración: Ejercicio.■ (Indicación: utilizar 11.1.20).

De este resultado se concluye inmediatamente que para los subconjuntos compactos de $(X,\mathcal{U})$ las vecindades uniformes sí constituyen un sistema fundamental de vecindades.

11.1.22 *Corolario*

Sea K un subconjunto compacto en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{U}(K) = \{V(K) \,|\, V \in \mathcal{U}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de K en $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$.

11.1.23 *Ejercicio*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}}$ su topología.
Probar que las colecciones de los entornos abiertos, y de los cerrados en $X \times X$:

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \left\{ \overset{\circ}{V} \,|\, V \in \mathcal{U} \right\} \ y \ \overline{\mathcal{U}} = \left\{ \overline{V} \,|\, V \in \mathcal{U} \right\}$$

forman sistemas fundamentales de entornos de $\mathcal{U}$. En particular todo entorno $U \in \mathcal{U}$ es una vecindad de la diagonal Δ.

11.1.24 *Ejercicio (caracterización de los espacios uniformes de Hausdorff)*

Probar que para todo espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ son equivalentes:

i) $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ es un T_1-espacio.

ii) $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ es un T_2-espacio.

iii) $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ es un espacio regular.

iv) $\Delta = \cap \mathcal{U}$.

Después de esta breve presentación de algunas propiedades elementales de la topología de un espacio uniforme, procederemos a analizar aquellas topologías que provienen de una estructura uniforme.

11.1.25 *Definición (espacio uniformizable)*

Decimos que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es **uniformizable** si existe una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre X tal que:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}}$$

Ya hemos mencionado que pueden existir más de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ que definan la misma topología dada $\mathcal{X}$ sobre X (ver notas 11.1.13). Por lo tanto no podemos esperar la unicidad de la estructura uniforme buscada.

Daremos ahora una solución completa al problema de existencia, analizando la relación conocida entre espacios uniformes y espacios enyugados.

11.1.26 *Teorema*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme que tiene un sistema fundamental numerable (V_n) de entornos. Entonces $\mathcal{U}$ puede ser definida por una seudométrica real d sobre X, o sea:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$$

Demostración. Para construir tal seudométrica nos serviremos del método de definir una función real por medio de un sistema de conjuntos, ya utilizado para la construcción de las funciones de Urysohn.

Utilizando el método de inducción podemos seleccionar una sucesión de entornos simétricos (U_n) de $\mathcal{U}$ tales que $U_1 \subset V_1$ y $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$ para $n \geq 1$.

Definamos:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \notin U_1 \\ \inf\{2^{-k} \mid (x,y) \in U_k\} & \text{si } (x,y) \in U_1 \end{cases} \qquad 20$$

Para obtener una seudométrica a partir de g debemos hacer que se cumpla la desigualdad triangular. Para todo par $(x, y) \in X \times X$ consideramos el conjunto de todas las sucesiones finitas $x = z_0, z_1, ..., z_n = y$ en X y tomamos el ínfimo:

$$d(x, y) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} g(z_i, z_{i+1}) | z_0 = x, z_n = y, \quad z_i \in X \right\}$$

g es una función simétrica, positiva y se anula sobre la diagonal $\Delta \subset X \times X$. Por lo tanto d tiene las mismas propiedades. Además, es evidente que d cumple la desigualdad triangular. Por lo tanto d es una seudométrica real.

Veremos que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$. Para eso probaremos que:

$$(1/2)g(x, y) \leq d(x, y) \leq g(x, y) \tag{21}$$

La desigualdad derecha es inmediata. La desigualdad izquierda se concluye de que

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq (1/2)g(x, y) \tag{22}$$

se cumple para toda sucesión $x = z_0, z_1, ..., z_n = y$ en X. La desigualdad (22) se prueba por inducción en n. Si $a \geq 1/2$ entonces se deduce (22) inmediatamente del hecho que $g(x, y) \leq 1$ para cualesquiera x, $y \in X$.

Supongamos que $a < 1/2$ y que m es el índice máximo tal que $\sum_{i=0}^{m-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Entonces se tiene que $\sum_{i=0}^{m} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$ y por lo tanto $\sum_{i=m+1}^{n-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Podemos aplicar la hipótesis de inducción a los pares (x, z_m) y (z_{m+1}, y)

$$(1/2)g(x, z_m) \leq \sum_{i=0}^{m-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$$

$$(1/2)g(z_{m+1}, y) \leq \sum_{i=m+1}^{n-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$$

Sea k el número natural más pequeño tal que $2^{-k} \leq a$. Entonces los pares $(x, z_m), (z_m, z_{m+1}), (z_{m+1}, y)$ pertenecen a U_k y, por tanto, $(x, y) \in U_k^3 \subset U_{k-1}$. Concluimos que

$$(1/2)g(x, y) \leq (1/2) \quad 2^{-(k+1)} \leq a$$

Las dos desigualdades (21), que acabamos de probar, implican

$$U_{k+1} \subset d^{-1}[[0, 2^{-k}]] \subset U_{k-1}, \tag{23}$$

pues

$$(x,y) \in U_k \Rightarrow 2^{-k} > g(x,y) \geq d(x,y) \Rightarrow$$
$$(x,y) \in d^{-1}[[0,2^{-k}]] \Rightarrow$$
$$2^{-k} > d(x,y) \geq 1/2g(x,y) \Rightarrow g(x,y) < 2^{-k+1} \Rightarrow$$
$$(x,y) \in U_{k-1}.$$

Las inclusiones (23) significan que la estructura uniforme definida por d, es igual a la estructura uniforme $\mathcal{U}$ que tiene como base la sucesión de entornos (U_n). ■

11.1.27 *Corolario (caracterización de las estructuras uniformes)*

Toda estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X puede definirse mediante una colección μ de seudométricas reales o sea:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mu$$

Demostración: Para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe una sucesión de entornos simétricos (U_n) tal que $U_1 \subset V$ y $U_{n+1}^3 \subset U_n$ $(n \geq 1)$. La sucesión (U_n) genera como base una estructura uniforme $\mathcal{U}_V$ que puede definirse por medio de una seudométrica real d_V, por el teorema anterior. $\mathcal{U}$ es evidentemente el supremo de las estructuras uniformes $\mathcal{U}_V$ $(V \in \mathcal{U})$, por lo tanto coincide con la estructura uniforme definida por el conjunto $\mu = \{d_V | V \in \mathcal{U}\}$ de seudométricas (11.1.10).

11.1.28 *Corolario (caracterización de los espacios uniformizables)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es uniformizable si y sólo si cumple $(T_{3.5})$.

Demostración: Sea $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\mathcal{U}$ y $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mu$. Podemos suponer que μ es saturado. Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Existe un entorno $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) \subset U$ y una seudométrica $d \in \mu$ tal que $d(x,y) > \rho > 0$ para todos los $(x,y) \in X^2 \backslash V$. La función $f(y) = \text{ínf}\{1, (1/\rho)d(x,y)\}$ cumple:

$$f(x) = 0 \quad y \quad f|X\backslash U \equiv 1$$

Inversamente sea $(X, \mathcal{X})$ un $T_{3.5}$ espacio. Para toda vecindad U de un punto $x \in X$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|\complement U = 1$. Sea d_f la seudométrica sobre X definida por $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$ Claramente d_f es continua y $B_{d_f}(x,1) = \{y \in X | d_f(x,y) < 1\} \subset U$. Concluimos que la topología $\mathcal{X}$ se define mediante la colección de seudométricas $\mu_\mathcal{X} = \{d_f | f : X \to [0,1]$ continua$\}$, entonces es uniformizable por el ejemplo 11.1.10. ■

Nota: De la demostración del corolario anterior se desprende que un espacio topológico es $T_{3.5}$ si y sólo si su topología viene definida por una familia de seudométricas.

El corolario anterior constituye una respuesta completa a la pregunta de cuándo una topología dada puede derivarse de una estructura uniforme (pro-

blema de existencia). Dicho corolario implica, en particular, que todo T_2-espacio compacto es uniformizable. Para esta clase de espacios se tiene, además, que su estructura uniforme está determinada de manera única.

Recordemos al lector demostrar el siguiente resultado.

11.1.29 *Ejercicio*

Probar: Para todo T_2-espacio compacto existe una única estructura uniforme $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{X}_{\mathcal{U}} = \mathcal{X}$, a saber el filtro $\mathcal{U} = V(\Delta)$ de todas las vecindades de la diagonal en el espacio producto $X \times X$. Además, $\mathcal{U}$ es igual a la estructura uniforme definida en el sentido del ejemplo 11.1.12 por la colección uniformizante de todos los recubrimientos abiertos finitos de $(X, \mathcal{X})$.

Indicación: Siempre se tiene $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(\Delta)$. Supóngase por reducción al absurdo que $U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}(\Delta) \backslash U$ y considérese el filtro inducido por U sobre el compacto $\complement U \subset X \times X$.

También podemos ahora caracterizar a las estructuras uniformes metrizables. Decimos que un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es metrizable si $\mathcal{U}$ puede definirse por una métrica. Del teorema anterior se obtiene.

11.1.30 *Corolario (caracterización de los espacios uniformes metrizables)*

Un espacio uniforme de Hausdorff $(X, \mathcal{U})$ es metrizable si y sólo si $\mathcal{U}$ posee un sistema fundamental numerable de entornos.

Nota: Está claro que de la metrizabilidad del espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ se concluye la metrizabilidad del espacio topológico $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$. Sin embargo, el inverso no se cumple.

$\rightsquigarrow$Un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ puede ser no metrizable aunque el espacio topológico asociado $(X, \mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ sea metrizable. Por lo tanto no hay que confundir el problema de metrizabilidad para los espacios topológicos, tratado en el capítulo anterior, con el problema de metrizabilidad para los espacios uniformes, para el cual se ha dado una solución en el corolario precedente.

11.1.31 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio discreto infinito. La topología $\mathcal{X}$ es metrizable (por la métrica discreta). Consideremos sobre X la estructura uniforme $\mathcal{U}$ definida por las particiones finitas. Ya hemos visto (11.1.12) que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{U}}$. Sin embargo $\mathcal{U}$ no es metrizable. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $\mathcal{U}$ tenga un sistema fundamental numerable de entornos (11.1.30). Entonces debería existir una sucesión de particiones finitas (P_n) tal que para toda partición finita P de X se cumpliera

$$V_P = \cup\{U \times U \,|U \in P\} \supset V_{P_n} = \cup\{V \times V \,|\, V \in P_n\}$$

para un cierto $n = n_P \in \mathbb{N}$

Pero esto significa, como es fácil comprobar, que todo conjunto en P puede representarse como unión de elementos de P_n. Puesto que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe solamente un número finito de particiones que se obtienen de este modo, el conjunto de todas las particiones finitas sobre X debía ser numerable. Pero Card $\{P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)|P$ partición finita de $X\} \geq$ Card $\mathcal{P}(X) >$ Card $X \geq$ Card $\mathbb{N}$, con lo cual llegamos a una contradicción.

Dejamos al lector comprobar que el criterio de metrizabilidad topológica (11.2.5) enunciado en el capítulo anterior es, en efecto, un criterio de metrizabilidad para la estructura uniforme correspondiente.

11.1.32 *Ejercicio*

Sea $\mu = \{d_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de seudométricas sobre un conjunto X y sea d la seudométrica sobre X definida por

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ínf}\,\{d_k(x,y), 1\}$$

Entonces $\mathcal{U}_\mu = \mathcal{U}_d$.

Concluimos esta sección con otra caracterización interesante de los espacios uniformizables, cuya demostración se deja al lector.

11.1.33 *Ejercicio*

Probar que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es uniformizable si y sólo si cumple la siguiente propiedad:

Toda función semicontinua inferiormente $f : X \to \mathbb{R}$ es supremo de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

(Indicaciones: 1°. Para probar la suficiencia de esta condición, deduzca $(T_{3.5})$ basándose en que las funciones indicadores $\mathcal{X}_U$ $(U \in \mathcal{X})$ son semicontinuas inferiormente; 2°. Para probar la necesidad, supóngase, sin pérdida de generalidad, que $-1 \leq f(x) \leq 1 (x \in X)$ y aplique $(T_{3.5})$).

§ 11.2 **Aplicaciones uniformemente continuas y construcción de espacios uniformes**

La definición 11.1.2 se generaliza de manera natural a espacios uniformes cualesquiera. Diremos que una aplicación f de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ en otro $(Y, \mathcal{U}')$ es uniformemente continua si, para todo $W \in \mathcal{U}'$, existe un entorno $U \in \mathcal{U}$ tal que dos imágenes $f(x)$ y $f(y)$ son vecinas de orden W siempre que x e y sean vecinas de orden U.

11.2.1 *Definición (aplicación uniformemente continua)*

Sean $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{U}')$ espacios uniformes. Una aplicación $f : X \to Y$ se llama **uniformemente continua** si para todo $W \in \mathcal{U}'$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$(f \times f)[U] \subset W \tag{24}$$

Por tanto, f es uniformemente continua si y sólo si la imagen inversa de todo entorno $W \in \mathcal{U}'$ por $f \times f$ es un entorno en $\mathcal{U}$. Esto es:

$$W \in \mathcal{U}' \Rightarrow (f \times f)^{-1}[W] \in \mathcal{U} \tag{25}$$

o sea

$$(f \times f)^{-1}\{\mathcal{U}'\} \subset \mathcal{U} \tag{26}$$

Está claro que para demostrar la continuidad uniforme de una aplicación f es suficiente verificar (24),(25) o (26) para un sistema fundamental de entornos de $(Y, \mathcal{U}')$.

11.2.2 *Ejemplo*

Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios seudométricos.

Entonces una aplicación $f : X \to Y$ es uniformemente continua con respecto a las dos estructuras uniformes $\mathcal{U}_d$ y $\mathcal{U}_{d'}$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Por lo tanto, la definición 11.2.1 generaliza efectivamente la definición 11.1.2.

11.2.3 *Ejemplo*

Sea (X, d) un espacio seudométrico y $A \subset X$. Entonces, por 1.5.20 la aplicación

$$x \mapsto d(x, A) \text{ de } X \text{ en } \mathbb{R}$$

es uniformemente continua.

11.2.4 *Ejemplo*

Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ dos estructuras uniformes sobre un conjunto X. Entonces la aplicación identidad de $(X, \mathcal{U}_1)$ en $(X, \mathcal{U}_2)$ es uniformemente continua si y sólo si $\mathcal{U}_1$ es más fina que $\mathcal{U}_2$.

11.2.5 *Ejemplo*

Sean $(E, \mathcal{X}), (F, \mathcal{X}')$ espacios vectoriales topológicos. Entonces toda aplicación lineal continua $f : E \to F$ es uniformemente continua, con respecto a las estructuras canónicamente asociadas a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$. En efecto, para todo $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}'}(0)$ existe $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}(0)$ tal que

$$y - x \in U \Rightarrow f(y) - f(x) = f(y - x) \in W$$

puesto que f es continua en cero.

11.2.6 *Ejemplo*

Ninguna función polinomial de grado $n > 1$

$$p : x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial una función derivable $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si y sólo si su derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada.

11.2.7 *Proposición*

Toda aplicación uniformemente continua $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}')$ es continua.

Demostración: Para todo $W \in \mathcal{U}'$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f[U(x)] \subset W(f(x))$. ■

En general, esta proposición no puede invertirse. Para ver esto basta considerar la aplicación identidad $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, d') \to (\mathbb{R}, d)$ (11.1.3) que es continua, pero no uniformemente continua.

Sin embargo, para la clase de los T_2-espacios compactos se cumple el inverso de 11.2.7.

11.2.8 *Teorema (continuidad uniforme sobre espacios compactos)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio compacto, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ la estructura uniforme asociada y $(Y, \mathcal{U}')$ un espacio uniforme.

Entonces toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{X}_{u'})$ es uniformemente continua (de $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{X}})$ en $(Y, \mathcal{U}')$).

Demostración: Sea $W \in \mathcal{U}'$. W es una vecindad de Δ en $Y \times Y$. Puesto que $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ es continua, $(f \times f)^{-1}[W]$ es una vecindad de Δ en $X \times X$, por lo tanto es un entorno de $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{X}})$ por el ejercicio 11.1.29. ■

Este teorema puede probarse también directamente sin utilizar el ejercicio 11.1.29. Sencillamente hay que generalizar la demostración conocida del análisis para intervalos compactos a espacios uniformes cualesquiera.

La unicidad de la estructura uniforme de un espacio T_2 compacto es entonces un corolario inmediato del teorema anterior.

La demostración del resultado siguiente es evidente:

11.2.9 *Proposición (composición de aplicaciones uniformemente continuas)*

Si $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}')$ y $g : (Y, \mathcal{U}') \to (Z, \mathcal{U}'')$ son uniformemente continuas, entonces la composición $g \circ f : (X, \mathcal{U}) \to (Z, \mathcal{U}'')$ es uniformemente continua. Esta proposición nos muestra que los espacios uniformes como *objetos*, junto con las aplicaciones uniformemente continuas como morfismos, constituyen una categoría $\mathcal{U}$ llamada **categoría de los espacios uniformes**. Verifiquemos que los

isomorfismos de esta categoría conservan efectivamente las estructuras uniformes. Diremos que una biyección $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{U}')$ conserva la estructura uniforme, si la aplicación

$$U \mapsto (f \times f)[U] \quad (U \in \mathcal{U}) \tag{27}$$

constituye una biyección de $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{U}'$. Por (26) esto se cumple si y sólo si f y $f^{-1} : (Y,\mathcal{U}') \to (X,\mathcal{U})$ son ambas uniformemente continuas. Veremos que los isomorfismos de la categoría $\mathfrak{U}$ son precisamente las biyecciones entre espacios uniformes que conservan la estructura uniforme. A tales aplicaciones les llamaremos **isomorfismos uniformes**.

En la categoría $\mathcal{U}$ de los espacios uniformes podemos utilizar familias de aplicaciones $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ para definir nuevos espacios uniformes a partir de espacios uniformes dados, por el mismo método presentado sistemáticamente para la categoría de los espacios topológicos en el capítulo 5. Recomendamos al lector comprobar los resultados siguientes.

11.2.10 *Ejercicio*

i) Probar: El conjunto de todas las estructuras uniformes sobre un conjunto X ordenado por inclusión es una retícula completa.

ii) Sea X un conjunto y $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de aplicaciones f_α de X en espacios uniformes $(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$. Entonces la estructura uniforme más gruesa sobre X con respecto a la cual todas las aplicaciones f_α son uniformemente continuas se llama estructura uniforme inicial sobre X definida por $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ y se denota por $\mathcal{U}(f_\alpha,(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in I})$. Probar que un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}(f_\alpha,(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in I})$ se obtiene mediante las intersecciones finitas de los conjuntos

$$(f_\alpha \times f_\alpha)^{-1}[V] \quad (\alpha \in I, V \in \mathcal{U}_\alpha)$$

iii) Probar: Una aplicación g de un espacio uniforme $(Z,\mathcal{U})$ en un espacio $\mathcal{U}(f_\alpha,(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in I})$ es uniformemente continua si y sólo si todas las aplicaciones $f_\alpha \circ g : (Z,\mathcal{U}) \to (X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ son uniformemente continuas.

iv) Probar: La topología asociada a la estructura uniforme inicial $\mathcal{U}(f_\alpha,(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha_\in I})$ es la topología inicial $\mathcal{J}(f_\alpha,(X_\alpha,\mathcal{X}_{\mathcal{U}_\alpha})_{\alpha\in I}$. El concepto de estructura uniforme inicial nos sirve para definir subespacios y productos uniformes.

11.2.11 *Definición (subespacio uniforme)*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $A \subset X$. Entonces la estructura uniforme más gruesa sobre A con respecto a la cual la inyección canónica $i_A : A \to X$ es uniformemente continua se llama **estructura uniforme inducidad** en A por $\mathcal{U}$

y se denota por $\mathcal{U}_A$. El espacio uniforme $(A, \mathcal{U}_A)$ se llama **subespacio uniforme** de $(X, \mathcal{U})$.

11.2.12 *Definición (producto de espacios uniformes)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios uniformes. La estructura uniforme más gruesa sobre $X = \times\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ con respecto a la cual todas las proyecciones $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ son uniformemente continuas se llama **producto de las estructuras uniformes** $\mathcal{U}_\alpha$ $(\alpha \in I)$ y se denota por $\prod\limits_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$. El espacio uniforme $(X, \prod\limits_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha)$ se llama producto de la familia $((X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ de espacios uniformes y se denota por $\prod\limits_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$.

Dejamos al lector comprobar las siguientes propiedades elementales de los subespacios y productos uniformes.

11.2.13 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $A \subset X$. Entonces:

i) La estructura uniforme inducida sobre A por $\mathcal{U}$ está determinada por

$$\mathcal{U}_A = \{V \cap (A \times A) | V \in \mathcal{U}\} \tag{28}$$

ii) Si $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}')$ es uniformemente continua, entonces la restricción

$f|A : (A, \mathcal{U}_A) \to (Y, \mathcal{U}')$ es uniformemente continua.

iii) La topología definida por $\mathcal{U}_A$ sobre A es la topología inducida sobre A por

$\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$.

Demostración: Ejercicio. ■

11.2.14 *Proposición*

Sea $\prod\limits_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ el producto de una familia $((X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ de espacios uniformes. Entonces:

i) Un sistema fundamental de entornos sobre $\prod\limits_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ se obtiene mediante

las intersecciones finitas de los conjuntos

$$(\pi_\alpha \times \pi_\alpha)^{-1} [V_\alpha], \tag{29}$$

donde $\alpha \in I$ y los V_α recorren un sistema fundamental arbitrario $\mathcal{V}_\alpha$ de entornos de $\mathcal{U}_\alpha$.

ii) Una aplicación $f = (f_\alpha)$ de un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ en $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ es uniformemente continua si y sólo si todas las aplicaciones $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f : (X,\mathcal{U}) \to (X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ son uniformemente continuas.

iii) La estructura uniforme producto $\prod_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha$ define sobre $\times\{X_\alpha|\alpha\in I\}$ la topología producto $\prod_{\alpha\in I}\mathcal{X}_{\mathcal{U}_\alpha}$.

iv) Sean $(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ espacios uniformes no triviales, i.e. Card $X_\alpha \geq 2$ para $\alpha \in I$. Entonces $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ es metrizable si y sólo si todo $(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ es metrizable $(\alpha \in I)$ e I es numerable.

Demostración: Ejercicio. ■

§ 11.3 **Filtros de Cauchy y espacios uniformes completos**

Hemos introducido los espacios uniformes para generalizar los conceptos de continuidad uniforme y sucesión de Cauchy. Nos queda todavía esta última tarea; definir lo que es un filtro de Cauchy en un espacio uniforme general $(X,\mathcal{U})$. Para ello procederemos de la manera siguiente: formularemos primero lo que significa la propiedad de Cauchy de una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X,d) para el filtro de Fréchet asociado y generalizaremos después esta condición a filtros cualesquiera en $(X,\mathcal{U})$.

(x_n) es una sucesión de Cauchy si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sección final $S_n = \{x_k|k \geq n\}(n \in \mathbb{N})$ tal que S_n es pequeño de orden ε (definición 11.1.1), o sea:

$$\delta(S_n) = \sup\{d(x_k, x_l)|l,k \geq n\} \leq \varepsilon$$

Para el filtro $\mathcal{F}$ generado por $\{S_n|n \in \mathbb{N}\}$ esto quiere decir: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{F}$ pequeño de orden ε, esto es:

$$\delta(F) = \sup\ d[F \times F] \leq \varepsilon \tag{30}$$

generalizando este resultado obtenemos la definición siguiente:

11.3.1 *Definición (filtro de Cauchy)*

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ un filtro (resp. base de filtro) sobre X. $\mathcal{F}$ se llama filtro de Cauchy (resp. base de filtro de Cauchy) si y sólo si para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$ de orden V, o sea tal que:

$$F \times F \subset V \tag{31}$$

11.3.2 *Ejemplo*

De nuestro procedimiento de definición está claro que 11.3.1 generaliza 11.1.1. Un filtro de Fréchet $\mathcal{F}$ asociado a una sucesión (x_n) en un espacio seudométrico (X, d) es de Cauchy si y sólo si la sucesión (x_n) es de Cauchy.

11.3.3 *Ejemplo*

Sea (X, μ) un espacio enyugado. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es de Cauchy en $(X, \mathcal{U}_\mu)$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y todo subconjunto finito de seudométricas $\{d_1, ..., d_m\} \subset \mu$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\sup \ \left\{d_i(x, y) | (x, y) \in F^2 \wedge i = 1, ..., m\right\} \leq \varepsilon \tag{32}$$

Si μ es saturado entonces esta condición es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall d \in \mu \ \exists F \in \mathcal{F} : d\left[F \times F\right] \leq \varepsilon \tag{33}$$

11.3.4 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{V}(x)$ el filtro de vecindades de x en $(X, \mathcal{X}_\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{V}(x)$ es un filtro de Cauchy, pues para todo $V \in \mathcal{U}$ existe un entorno simétrico $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset V$ y, por tanto:

$$W(x) \times W(x) \subset W \circ W \subset V$$

Puesto que, todo filtro más fino que un filtro de Cauchy es de Cauchy, se concluye del ejemplo anterior, el siguiente resultado.

11.3.5 *Proposición*

En un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ todo filtro convergente es de Cauchy.

El inverso de esta proposición no se cumple. Por ejemplo, en el espacio métrico $\mathbb{Q}$, toda sucesión que converge a un número irracional en $\mathbb{R}$, es de Cauchy sin tener límite en $\mathbb{Q}$. Sin embargo tenemos la siguiente proposición.

11.3.6 *Proposición*

Todo filtro de Cauchy en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ converge a cada uno de sus puntos adherentes.

Demostración. Sea x punto adherente del filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $(X, \mathcal{U})$. Sea $W \in \mathcal{U}$ un entorno cualquiera. Debemos probar que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset W(x)$. Sea $V \in \mathcal{U}$ un entorno simétrico tal que $V \circ V \subset W$ y sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$. Sea además $y \in F \cap V(x)$. Entonces

$$F \subset V(y) \subset (V \circ V)(x) \subset W(x). \blacksquare$$

La definición de la continuidad uniforme implica que las imágenes de conjuntos suficientemente pequeños bajo una aplicación uniformemente continua son

pequeñas. Dejamos al lector el precisar esta idea de demostración para la proposición siguiente.

11.3.7 *Proposición*

Sea $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{U}')$ una aplicación uniformemente continua. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy sobre X, entonces la base de filtro $f\{\mathcal{F}\}$ es de Cauchy en Y.

$\rightsquigarrow$*Nota:* Sabemos por (11.1.3) que la imagen continua de un filtro de Cauchy, en general, no es de Cauchy. Podría pensarse que una aplicación continua que aplica a todo filtro de Cauchy en una base de filtro de Cauchy tiene que ser uniformemente continua. Pero esto es falso, como muestra toda aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua sin ser uniformemente continua (p. ej., $f(x) = e^x$). En efecto, sobre $\mathbb{R}$ todo filtro de Cauchy es convergente, luego su imagen continua es un filtro convergente.

El importante papel que juega el criterio de convergencia de Cauchy en el cálculo (sobre $\mathbb{R}$) nos induce a pensar que la clase de los espacios uniformes, para los cuales se cumple el mismo criterio, es importante para la generalización de los métodos del análisis a espacios más generales (análisis funcional). Estudiaremos ahora esta clase de espacios uniformes.

11.3.8 *Definición (espacio uniforme completo)*

Un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ se llama **completo** si todo filtro de Cauchy sobre X es convergente. Un espacio enyugado se llama completo si el espacio uniforme asociado es completo.

Entonces los espacios completos son precisamente aquellos para los cuales puede invertirse la proposición 11.3.5.

11.3.9 *Ejemplo*

$\mathbb{R}^n$ es completo ($n \geq 1$) pues si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy sobre $\mathbb{R}^n$, entonces contiene un subconjunto acotado, luego también un subconjunto compacto lo cual implica (8.1.1) que tiene un punto de adherencia en $\mathbb{R}^n$. Ahora basta aplicar la proposición 11.3.6.

11.3.10 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio compacto, $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}$ la estructura uniforme correspondiente. Entonces $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{X}})$ es completo, puesto que todo filtro de Cauchy sobre X tiene un punto adherente en X.

Está claro que no todo espacio completo es compacto (ver por ejemplo $\mathbb{R}$). Analizaremos brevemente qué condición debe cumplir un espacio completo $(X, \mathcal{U})$ para ser compacto.

Decimos que un espacio uniforme es precompacto si puede aproximarse uniformemente tanto como se quiera por un conjunto finito.

11.3.11 *Definición (espacio precompacto)*

Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se llama **precompacto** si para todo entorno $U \in \mathcal{U}$ existe una cubierta finita de X, formada por conjuntos pequeños de orden U. Un subconjunto $A \subset (X,\mathcal{U})$ se llama **precompacto** si es precompacto como subespacio uniforme.

Por tanto $(X,\mathcal{U})$ es precompacto si para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe una familia finita $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ en X tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) \tag{34}$$

11.3.12 *Ejemplo*

Todo espacio compacto es precompacto con respecto a su estructura uniforme.

11.3.13 *Ejemplo*

Un espacio métrico (X,d) es precompacto si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ posee una ε-*red* $\{x_1,\ldots,x_n\}$ (8.1.7). En particular, todo espacio métrico precompacto es acotado. Sin embargo, un espacio métrico acotado no es necesariamente precompacto como muestra el espacio métrico $\mathbb{R}$ provisto de la métrica $d'(x,y) = \inf\{1, |x-y|\}$.

11.3.14 *Ejemplo*

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es precompacto si y sólo si es acotado.

Un subespacio X del espacio uniforme $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Si expresamos esta caracterización a partir de propiedades intrínsecas del subespacio uniforme X, vemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es completo y precompacto. Probaremos que esta caracterización es válida para cualquier espacio uniforme.

11.3.15 *Proposición*

Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es compacto si y sólo si es completo y precompacto.

Demostración. Sólo queda probar que estas condiciones son suficientes. Sea $(X,\mathcal{U})$ completo y precompacto. Verificaremos que $(X,\mathcal{X}_{\mathcal{U}})$ cumple el criterio (C^6) de compacidad. Sea $\mathcal{Q}$ un ultrafiltro sobre X. Por ser $(X,\mathcal{U})$ completo, basta demostrar que $\mathcal{Q}$ es un filtro de Cauchy. En efecto para todo $U \in \mathcal{U}$ existe una cubierta finita $(A_1,\ldots,A_n)$ de X tal que los conjuntos A_i son todos pequeños de orden V. Por ser $\mathcal{Q}$ un ultrafiltro, uno de estos conjuntos debe pertenecer a $\mathcal{Q}$ (3.5.20). Por lo tanto, para todo $V \in \mathcal{U}$, $\mathcal{Q}$ contiene un elemento pequeño de orden V, de donde se concluye que $\mathcal{Q}$ es de Cauchy. ■

En particular, obtenemos un nuevo criterio de compacidad para los espacios métricos (compárese con 8.1.7).

11.3.16 *Corolario*

Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y posee, para todo $\varepsilon > 0$, una ε-*Red*.

Mencionemos otro corolario.

11.3.17 *Corolario*

En un espacio completo un subconjunto es precompacto si y sólo si es relativamente compacto.

11.3.18 *Ejercicio*

Probar que para un espacio uniforme son equivalentes las proposiciones siguientes:

i) $(X,\mathcal{U})$ es precompacto.

ii) Todo ultrafiltro sobre X es de Cauchy.

Después de aclarar la relación existente entre espacios completos y espacios compactos mediante el concepto de precompacto, analizaremos ahora la hereditabilidad de la completitud.

El subespacio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ muestra que un subespacio de un espacio completo en general no es completo. Sin embargo, tenemos:

11.3.19 *Proposición (subespacios completos)*

Todo subespacio cerrado de un espacio completo es completo. Recíprocamente todo subespacio completo de un espacio uniforme de Hausdorff es cerrado.

Demostración. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $C \subset X$. Supongamos que $(X,\mathcal{U})$ es completo y C cerrado. Puesto que todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre C es una base de filtro de Cauchy sobre X, $\mathcal{F}$ converge a un punto $x_0 \in X$, que debe pertenecer a C por ser C cerrado (4.1.3).

Supongamos ahora que $(X,\mathcal{U})$ es de Hausdorff y C completo. Si $x_0 \in \overline{C}$ entonces la traza $\mathcal{F}_C = \{C \cap F | F \in \mathcal{F}\}$ es un filtro de Cauchy sobre C, entonces converge a un punto $x_1 \in C$. Además, $\mathcal{F}_C$ evidentemente converge en $(X,\mathcal{U})$ al punto x_0. Por ser $(X,\mathcal{U})$ de Hausdorff, tenemos la unicidad del límite. Luego $x_1 = x_0 \in C$. ■

Añadamos otra propiedad de herencia.

11.3.20 *Proposición (caracterización de los productos completos)*

Sea $((X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de espacios uniformes. $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ es completo si y sólo si todos los espacios $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ son completos.

Demostración: Supongamos que todos los $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ son completos ($\alpha \in I$). Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy sobre X, entonces todo filtro $\pi_\alpha\{\mathcal{F}\}$ es de Cauchy, luego convergente en X_α. Por 5.2.6, $\mathcal{F}$ es convergente en X. Si inversamente X es completo entonces todo $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ es completo por ser isomorfo a un subespacio cerrado en X. ■

11.3.21 *Ejemplo*

El espacio $\mathbb{R}^X$ de todas las funciones reales sobre un conjunto X es completo respecto a la estructura uniforme producto.

La importancia de los espacios completos se verá acentuada mucho más en las secciones siguientes. Nos contentamos por ahora con aplicar este concepto al problema de prolongación continua que ya se trató en diversos capítulos anteriores. El resultado siguiente es básico para muchas aplicaciones.

11.3.22 *Teorema (prolongación de una función uniformemente continua)*

Sea A un subespacio de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{U}')$ un T_2-espacio completo. Entonces toda aplicación uniformemente continua $f : (A, \mathcal{U}_A) \to (Y, \mathcal{U}')$ tiene una única prolongación continua $\overline{f} : \overline{A} \to Y$. Además, $\overline{f}$ es uniformemente continua.

Demostración: La prolongación, si existe, es única, por 7.2.5. Puesto que $(Y, \mathcal{X}_{\mathcal{U}'})$ es un espacio regular, para probar la existencia es suficiente probar que la imagen de toda traza $\mathcal{V}_A(x)$ de un filtro de vecindades $\mathcal{V}(x)$ ($x \in \overline{A}$) sobre A es convergente. Pero esto es evidente, porque $\mathcal{V}_A(x)$ es un filtro de Cauchy sobre A y $f : A \to Y$ es uniformemente continua; de donde $f\{\mathcal{V}_A(x)\}$ es un filtro de Cauchy en el espacio completo $(Y, \mathcal{U}')$. Queda sólo por probar que la prolongación continua $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ es uniformemente continua. Para ello, sea W un entorno cerrado cualquiera de $(Y, \mathcal{U}')$. Por hipótesis y 11.1.23, existe un entorno abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$(f \times f)[U \cap (A \times A)] \subset W;$$

luego

$$(\overline{f} \times \overline{f})[\overline{U \cap (A \times A)}] \subset \overline{W} = W$$

Puesto que U es abierto, tenemos $\overline{U \cap (A \times A)} \supset U \cap (\overline{A} \times \overline{A})$, lo cual implica que $\overline{U \cap (A \times A)}$ es un entorno sobre $\overline{A}$. Por lo tanto, $\overline{f}$ verifica el criterio (24) para el sistema fundamental de los entornos cerrados en $(Y, \mathcal{U}')$. ■

11.3.23 *Corolario (prolongación de isomorfismos uniformes)*

Sean X y Y subespacios densos de T_2-espacios completos $(\hat{X},\hat{\mathcal{U}})$ y $(\hat{Y},\hat{\mathcal{U}}')$. Entonces todo isomorfismo uniforme $f : X \to Y$ se prolonga de manera única en un isomorfismo uniforme $\overline{f}$ de $\hat{X}$ sobre $\hat{Y}$.

Demostración: Sea $g = f^{-1} \cdot f$ y g poseen prolongaciones uniformemente continuas $\overline{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ y $\overline{g} : \hat{Y} \to \hat{X}$. Evidentemente $\overline{g} \circ \overline{f}$ y $\overline{f} \circ \overline{g}$ son prolongaciones continuas de las aplicaciones identidad $\mathbb{1}_X$ y $\mathbb{1}_Y$ de $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ respectivamente. Por la unicidad de estas prolongaciones, tenemos $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathbb{1}_{\hat{X}}$ y $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathbb{1}_{\hat{Y}}$. Luego $\overline{f}^{-1} = \overline{g}$. Por ser ambas aplicaciones uniformemente continuas, $\overline{f}$ es un isomorfismo uniforme. ■

Diversas aplicaciones de los dos resultados anteriores serán estudiados en las próximas secciones.

§ 11.4 **Espacios métricos completos**

Estamos acostumbrados a decir que un espacio métrico es competo si en él toda sucesión de Cauchy es convergente. Esta definición es consecuente con la dada anteriormente para espacios uniformes según nos muestra la siguiente:

11.4.1 *Proposición*

Sea (X, d) un espacio seudométrico. Entonces son equivalentes:

i) $(X,\mathcal{U}_d)$ es completo.

ii) Toda sucesión de Cauchy en (X, d) es convergente.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) es trivial.
ii) $\Rightarrow$ i): Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$A_n \times A_n \subset U_{1/n} \tag{35}$$

donde

$$U_{1/n} = \left\{(x, y) \in X^2 \,|\, d(x, y) < 1/n\right\} \quad (11.1.10)$$

El filtro $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ generado por $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es evidentemente de Cauchy. Además $\mathcal{F}$ tiene base numerable y, por lo tanto, puede expresarse como la intersección de todos los filtros elementales más finos que él (3.5.8).
Si $\mathcal{F}''$ es un filtro elemental más fino que $\mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}''$ es de Cauchy y, por tanto convergente a un punto $x \in X$ (por i)). Evidentemente, x es punto adherente del filtro más grueso $\mathcal{F}'$; por lo tanto es un punto de convergencia de

$\mathcal{F}'$, por 11.3.6. Por ser $\mathcal{F}$ más fino que $\mathcal{F}'$, se tiene que $\mathcal{F}$ converge a x, de lo que se desprende i). ■

Los espacios métricos completos utilizados en la práctica poseen generalmente una estructura vectorial. De especial importancia son la clase de los espacios normados completos llamados Espacios de Banach y de los espacios prehilbertianos completos llamados Espacios de Hilbert.

Veremos ahora un ejemplo importante para cada una de estas clases de espacios métricos completos.

11.4.2 *Ejemplo*

El espacio $l_2(\mathbb{N})$ de las sucesiones (x_n) de números reales tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ es de Hilbert.

Sabemos que dicho espacio es prehilbertiano (1.2.6). Demostremos que $l_2(\mathbb{N})$ es también completo. En efecto, sea $(x^{(m)}) = (x_n^{(m)})$ una sucesión de Cauchy en $l_2(\mathbb{N})$. Esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un m_0 tal que:

$$p, q \geq m_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| x_n^{(p)} - x_n^{(q)} \right|^2 \leq \varepsilon \tag{36}$$

Para cada n fijo esto implica, en primer lugar, que la sucesión $(x_n^{(m)})$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, por tanto, converge hacia un límite x_n.

En segundo lugar, dejando $p \geq m_0$ fijo y haciendo tender q a ∞ en $\sum_{n=0}^{n} \left| x_n^{(p)} - x_n^{(q)} \right|^2$ $(n \in \mathbb{N})$ obtenemos, por la continuidad del módulo que $\sum_{n=0}^{n} \left| x_n^{(p)} - x_n \right|^2 \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \left| x_n^{(p)} - x_n \right|^2 \leq \varepsilon$ para $p \geq m_0$. Esto demuestra que la sucesión $(x_n^{(p)} - x_n)$ pertenece a $l_2(\mathbb{N})$; por tanto, $x = (x_n)$ pertenece también a $l_2(\mathbb{N})$ y se tiene que $x^{(m)} \to x$ en $l_2(\mathbb{N})$.

11.4.3 *Ejemplo*

Dado un conjunto A y un espacio métrico (X, d), el espacio

$$B(A, X) = \{f | f : A \to X \text{ acotada}\} \tag{37}$$

provisto de la métrica de la convergencia uniforme.

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in A} \; d\left(f(x), g(x)\right) \tag{38}$$

es completo si (X, d) es completo. En efecto, supongamos que (X, d) es completo y sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $B(A, X)$. Es claro que (f_n) es también una sucesión de Cauchy en X^A. Por la proposición (11.3.20) tenemos que la sucesión (f_n) converge puntualmente a una cierta función f. Demostremos que f_n converge a f uniformemente.

En efecto, por ser (f_n) de Cauchy en $B(A,X)$, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m, n \geq n_0$, entonces

$$\forall x \in A \; d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \tag{39}$$

Dejando n fijo y haciendo tender $m \to \infty$ en (39), se obtiene para $n \geq n_0$:

$$\forall x \in A \; d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \tag{40}$$

Concluimos que (f_n) converge a f uniformemente y que $f \in B(A,X)$.

En particular, si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces el espacio vectorial $B(A,E)$ provisto de la norma de la convergencia uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

es un espacio de Banach.

11.4.4 *Ejercicio*

Demostrar que para todo espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ su dual topológico $(E', |||\cdot|||)$ es completo donde:

$$|||u||| = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)|$$

El siguiente teorema nos muestra, dentro de las caracterizaciones teóricas de un espacio métrico completo, una de las más usadas (11.6.4).

11.4.5 *Proposición (Cantor)*

Un espacio métrico (X,d) es completo si y sólo si toda sucesión decreciente (F_n) de subconjuntos cerrados no vacíos con $(\delta(F_n)) \longrightarrow 0$ tiene intersección no vacía. Más exactamente $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ se reduce a un punto.

Demostración: Supongamos que (X,d) es completo. Evidentemente la condición de que el diámetro de que los F_n tiende a cero implica que el filtro generado por la base (F_n) es de Cauchy y, por tanto, convergente a un cierto punto x_0 en (X,d). Por ser x_0 un punto adherente a dicho filtro, se tiene que $x_0 \in \overline{F_n} = F_n$ para todo n, o sea $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$

Si $y_0 \in F_n$ para todo n, entonces:

$$d(x_0, y_0) \leq \delta(F_n); n \in \mathbb{N}$$

y, por tanto, $x_0 = y_0$.

Recíprocamente supongamos que se cumple la condición expuesta en el teorema. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X,d). Si (S_n) es la sucesión de secciones finales asociadas a (x_n), entonces la familia $(\overline{S}_n)$ satisface dichas condiciones y,

por tanto, existe $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n$. Esto significa que x_0 es un punto adherente a la sucesión (x_n) y, por 11.3.6, se tiene: $\lim_n x_n = x_0$. ■

Nota: Los espacios compactos cumplen que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ para toda sucesión (F_n) decreciente de cerrados no vacíos, sin ninguna hipótesis adicional. La diferencia entre ambas clases de espacios, los compactos y los completos se refleja en el teorema anterior mediante la hipótesis complementaria de que $\delta(F_n) \to 0$, necesaria para los espacios métricos completos. El hecho de que ser completo sea una propiedad uniforme y no topológica, se manifiesta en esta hipótesis que depende esencialmente de la estructura uniforme definida por la métrica d.

La siguiente condición necesaria para que un espacio métrico sea completo es un resultado muy usado en topología, y tiene una gran aplicación en análisis, sobre todo en la demostración de teoremas de existencia (11.6.5).

11.4.6 *Teorema (de Baire)*

En un espacio métrico completo la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos abiertos densos es densa.

Demostración: Sea (X, d) un espacio métrico completo y (D_n) una sucesión de conjuntos densos y abiertos en (X, d).

Probaremos que $U \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n) \neq \varnothing$ para todo abierto no vacío U en (X, d). En efecto, por ser $U \cap D_1 \neq \varnothing$, existe una bola abierta B_1 tal que $\overline{B}_1 \subset U \cap D_1$ y $\delta(\overline{B}_1) \leq 1$. Procediendo por inducción, se puede construir una sucesión (B_n) de bolas abiertas tales que:

$$\overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap D_n \;\; y \;\; \delta(\overline{B}_n) \leq 1/n \tag{41}$$

Entonces:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \subset (U \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n)); \tag{42}$$

pero las $\overline{B}_n$ satisfacen las condiciones del teorema de Cantor y, por tanto,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \neq \varnothing$$

con lo cual queda probado el teorema. ■

Debido a la importancia del corolario anterior, introduciremos la siguiente:

11.4.7 *Definición (espacio de Baire)*

Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es de **Baire** si para cualquier familia numerable (U_n) de conjuntos abiertos densos en X, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es densa en X.

11.4.8 *Ejercicio*

Probar que todo espacio localmente compacto y $T2$ es de Baire.

Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico es denso en ninguna parte si $\overset{o}{\overline{A}}= \varnothing$. Por ejemplo, todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es denso en ninguna parte. El siguiente ejercicio nos muestra algunas propiedades de los espacios de Baire en los cuales utilizaremos los conjuntos densos en ninguna parte.

11.4.9 *Ejercicio*

1. Probar que si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio de Baire entonces se cumple:

   i) La unión de cualquier familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $(X, \mathcal{X})$ tiene interior vacío.

   ii) Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es cerrado, entonces al menos uno de ellos tiene interior no vacío.

   iii) X no se puede poner como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

   iv) Toda unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

2. Decir cuál de estas proposiciones es también suficiente para que un espacio sea de Baire.

11.4.10 *Ejemplo*

Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es topológicamente completo si existe una métrica d sobre X tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_d$ y $(X, \mathcal{U}_d)$ es completo. Según el teorema de Baire, todo espacio topológicamente completo es de Baire. La propiedad de Baire puede por lo tanto utilizarse como una condición necesaria para que un espacio sea topológicamente completo. Veremos en lo siguiente que, según este criterio, el espacio $\mathbb{Q}$ no es topológicamente completo. En efecto, basta observar que $\mathbb{Q}$ es la unión numerable de sus conjuntos unitarios que son conjuntos cerrados para ver que $\mathbb{Q}$ no es de Baire.

§ 11.5 **Completamiento de un espacio métrico**

Evidentemente no todo espacio métrico es completo. En el ejemplo 11.4.10 vimos que $\mathbb{Q}$ no es completo para ninguna distancia topológicamente equvalente a la usual. Sin embargo, es por todos conocido el proceso de completamiento de $\mathbb{Q}$ que da lugar a los números reales. $\mathbb{R}$ es, en cierto sentido, el menor espacio métrico completo que contiene a $\mathbb{Q}$. Este proceso, mediante el cual obtenemos $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, no es más que de un tipo particular de extensión (8.6.1) la

cual conserva no sólo las propiedades topológicas, sino también las propiedades uniformes de $\mathbb{Q}$. Hay que destacar esta propiedad porque existen otras extensiones topológicas que no se comportan de la misma forma. En el ejemplo 8.6.7, vimos una extensión (compactificación) de $\mathbb{Q}$ que no conserva sus propiedades uniformes, ya que identifica puntos irracionales arbitrariamente lejanos. Introduzcamos por lo tanto el concepto de extensión uniforme.

11.5.1 *Definición (inmersión y extensión uniformes)*

Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{U}')$ dos espacios uniformes:

i) $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{U}')$ se llama inmersión uniforme de $(X,\mathcal{U})$ si $f : (X,\mathcal{U}) \to (f[X],\mathcal{U}'_{f[X]})$ es un isomorfismo uniforme.

ii) El par $(f,(Y,\mathcal{U}'))$ se llama extensión uniforme de $(X,\mathcal{U})$ si $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{U}')$ es una inmersión uniforme y $f[X]$ es denso en $(Y,\mathcal{X}_{\mathcal{U}'})$.

En esta sección nos interesan solamente aquellas extensiones uniformes que son completas.

11.5.2 *Definición (completamiento)*

Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se dice que la extensión $(f,(Y,\mathcal{U}'))$ es un **completamiento** de $(X,\mathcal{U})$ si $(Y,\mathcal{U}')$ es un espacio completo.

Nota: Para facilitar el lenguaje en determinadas ocasiones convendremos en llamar completamiento de $(X,\mathcal{U})$ solamente al espacio $(Y,\mathcal{U}')$.

Un resultado teórico importante nos dice que todo espacio uniforme separado posee un completamiento único salvo isomorfismo uniforme. No daremos aquí la demostración en el caso general, sino solamente en el caso de un espacio métrico, pues es éste en realidad el único resultado que utilizaremos. No obstante, invitamos al lector a probar el enunciado general en forma de ejercicio orientado (E.11.19).

Exigiremos del completamiento de un espacio métrico que conserve no sólo las propiedades uniformes sino tambén las propiedades métricas del mismo. En efecto, tenemos el siguiente:

11.5.3 *Teorema (completamiento de un espacio métrico)*

Todo espacio métrico (X,d) tiene un completamiento $(i,(Y,\overline{d}))$, donde $(Y,\overline{d})$ es un espacio métrico completo e $i : X \to i[X]$ es una isometría. Además, el completamiento de un espacio métrico es único salvo isometrías.

Demostración: Demostraremos primero la unicidad del completamiento. Sean $(i_1,(Y_1,d_1))$ y $(i_2,(Y_2,d_2))$ dos completamientos de (X,d) (fig. 158).

Evidentemente $i = i_2 \circ i_1^{-1} : i_1[X] \to i_2[X]$ es una isometría y, por tanto, un isomorfismo uniforme. Por el corolario 11.3.16, i puede extenderse a un iso-

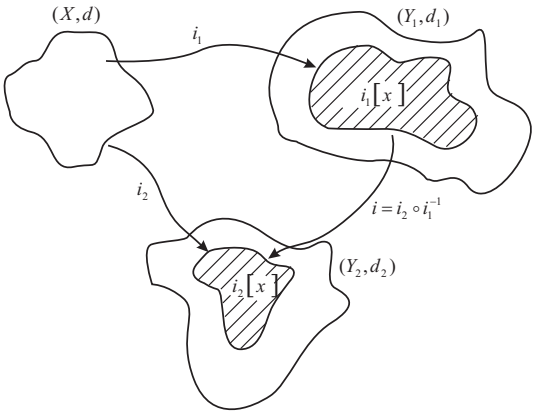


Figura 158.

morfismo uniforme $\overline{i} : (Y_1, d_1) \to (Y_2, d_2)$ que por continuidad, es claramente una isometría.

Pasemos ahora a probar la existencia del completamiento. Sea $x_0 \in X$ fijo y definamos la aplicación:

$$i : X \to B(X, \mathbb{R}) \quad (11.4.3) \tag{43}$$

que asocia a todo $x \in X$ la función g_x definida por:

$$g_x(y) = d\,(y, x) - d(y, x_0) \tag{44}$$

Es claro que $g_x \in B(X, \mathbb{R})$ pues

$$\sup_{y \in X} |g_x(y)\ | = \sup_{y \in X} |\ d\,(y, x) - d\,(y, x_0)| \leq d\,(x, x_0) \tag{45}$$

Además, i es una isometría de X sobre $i[X]$, pues

$$d_\infty(g_x, g_{x'}) = \sup_{y \in X} |d(y, x) - d(y, x^{'})| = d(x, x^{'}) \tag{46}$$

Por lo tanto, el par $(i, \overline{i\,[X]})$ es un completamiento de (X, d). ■

Podemos caracterizar ahora los espacios métricos para los cuales su completamiento es una compactificación.

11.5.4 *Proposición*

Un espacio métrico es precompacto si y sólo si su completamiento es compacto.

Demostración: Se desprende de 11.3.17. ■

Nota: Hemos visto en la demostración constructiva del teorema 11.5.3, que todo espacio métrico (X, d) tiene un completamiento que es un subespacio de un espacio normado. En el caso en que la métrica d venga definida por una norma o un producto escalar, podemos precisar aún más este resultado, como veremos en el siguiente ejemplo.

11.5.5 *Ejemplo.*

Para cada espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ y cada espacio prehilbertiano $(H, <\cdot>)$, existen completamientos $(\tilde{E}, \|\cdot\|_c)$ y $(\tilde{H}, <\cdot>_c)$ que son, respectivamente, un espacio de Banach y un espacio de Hilbert tales que $\|\cdot\|_c$ y $<\cdot>_c$ son prolongaciones continuas de $\|\cdot\|$ y $<\cdot>$.

En efecto, siguiendo la demostración del teorema 11.5.3, considerando $(E, \|\cdot\|)$ en vez de (X, d) y $x_0 = 0$, tendremos que E se identifica con el subespacio vectorial $i[E]$ de $B(E, \mathbb{R})$ formado por las funciones g_x definidas en (44). De (45) se desprende que $\|g_x\|_\infty = \|x\|$. Luego, la restricción de la norma de $\overline{i[E]} = \tilde{E}$ a $i[E]$ coincide con la norma de E. Pero $\|\cdot\| : i[E] \to \mathbb{R}$ es una aplicación uniformemente continua y, por el teorema 11.3.15, tiene una prolongación continua a $\tilde{E}$, que por unicidad tiene que coincidir con la norma $\|\cdot\|_c$ de dicho completamiento.

De lo anterior se desprende que todo espacio prehilbertiano $(H, <\cdot>)$ tiene un completamiento que es un espacio de Banach, cuya norma es una extensión de la norma definida por el producto escalar $<\cdot>$. Por ser dicho producto escalar una aplicación uniformemente continua de $H \times H$ en $\mathbb{R}$ puede prolongarse continuamente a $\tilde{H} \times \tilde{H}$, donde $\tilde{H}$ es el completamiento de H. Está claro que esta extensión es un producto escalar $<\cdot>_c$ en $\tilde{H}$ y, por continuidad de la norma definida por $<\cdot>_c$, es pecisamente la norma de $\tilde{H}$.

11.5.6 *Ejemplo*

Consideremos el espacio $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R})$ provisto del producto escalar

$$< f, g >_2 = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \tag{47}$$

Es fácil probar (ejercicio E.1.4) que $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}) <\cdot>_2)$ es un espacio prehilbertiano. Probaremos que no es completo. Para ello definamos la sucesión de funciones (f_n) donde (fig. 159):

$$f_n(x) = \text{ínf}\{(2x)^n, 1\} \tag{48}$$

La sucesión (f_n) es de Cauchy en $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R})$ ya que si definimos f mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1/2; \\ 1 & \text{si } 1/2 \le x < 1 \end{cases} \tag{49}$$

entonces

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^{1/2} (2x)^{2n} dx = \frac{1}{2(2n+1)} \to 0,$$

de donde se obtiene:

$$\|f_n - f_m\|_2 \le \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |f_m(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= 1/2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1}\right) \to 0$$

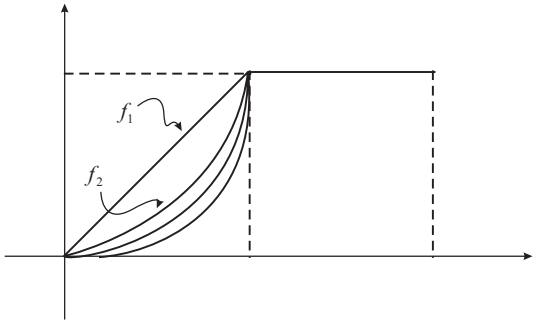


Figura 159. Gráficas de $f_n(x) = \text{ínf}\{(2x)^n, 1$

Supongamos que existe una función continua g tal que:

$$\|f_n - g\|_2 \to 0$$

La desigualdad

$$\left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_0^1 |f_n(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

prueba que:

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx = 0$$

Por ser el integrando una función continua salvo en $x = 1/2$ se obtiene que f y g pueden diferir solamente para $x = 1/2$, lo cual contradice la continuidad de g en dicho punto.

El espacio prehilbertiano $\mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}), < \cdot >_2)$ admite un completamiento que denotaremos por $L_2[0,1]$ y que es un espacio de Hilbert.

Un resultado interesante es que el producto escalar en $L_2[0,1]$ puede expresarse mediante una integral más general llamada integral de Lebesgue, que coincide para las funciones continuas con la integral de Cauchy, a partir de la cual se define $< \cdot >_2$.

§ 11.6 **Aplicaciones**

Daremos ahora algunas aplicaciones importantes de la noción de completitud a diversas ramas de la matemática.

Aplicación 1. Teorema del punto fijo

Comenzaremos esta sección con un teorema de gran importancia en análisis numérico; pero para ello necesitamos introducir algunos conceptos. Una aplicación f de un espacio métrico (X, d) se dice que es **contractante de razón** k, si $k < 1$ y

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Claramente una tal aplicación es uniformemente continua.

Dada una aplicación $g : (X, d) \to (X, d)$, a cada punto $x \in X$ tal que $g(x) = x$ se llama un punto fijo de g.

11.6.1 *Teorema (del punto fijo)*

Cada aplicación contractante f de razón k definida en un espacio métrico completo (X, d), tiene un punto fijo único x_0, caracterizado por la siguiente propiedad:

Para cada punto $x \in X$ la sucesión de valores iterados

$$[f^n(x)] = f \circ f ... \circ f(x) \quad n\text{-veces}$$

converge al punto x_0 con el error de aproximación:

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d[x_0, f(x_0)] \tag{50}$$

Demostración: Dividiremos la demostración en tres partes:

i) Para todo $x \in X$, $(f^n(x))$ converge a un cierto punto x_0 con el error de aproximación (50).

En efecto, del hecho que

$$d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

se deduce sucesivamente:

$$d(f(x), f^2(x)) \leq k\, d(x, f(x))$$

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq k^n d(x, f(x))$$

y por tanto de la desigualdad triangular se obtiene:

$$d(f^n(x), f^{n+p}(x)) \leq k^n(1 + k + k^2 + ... + k^{p-1})\; d(x, f(x))$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} d\,[x, f(x)] \tag{51}$$

Esto prueba que $(f^n(x))$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente a un cierto punto $x_0 \in X$ para el cual, por (51), se cumple:

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d[x, f(x)]$$

ii) $f(x_0) = x_0$.

Si sustituimos x por x_0 en la estimación del error tendremos:

$$d[f^{n+1}(x_0), f(x_0)] \leq kd(f^n(x_0), x_0) \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} d[x_0, f(x_0)]$$

lo que implica que la sucesión $(f^n(x_0))$ converge a x_0 y $f(x_0)$, o sea $x_0 = f(x_0)$.

iii) Unicidad del punto fijo.

Si y_0 fuera otro punto fijo de f, entonces:

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq k\, d(x_0, y_0) < d(x_{0,} y_0)$$

que es una contradicción. ■

Aplicación 2. Existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales de primer orden

Expondremos ahora un teorema clásico relativo a la existencia de solución única para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. El teorema que demostraremos no es más que una aplicación del teorema del punto fijo desarrollado anteriormente.

11.6.2 *Teorema*

Sea f una función continua con valores reales definida sobre un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que existe un número positivo M tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M\, |y_1 - y_2|\,.$$

Dado $(x_0, y_0) \in U$, sean b, c y K tales que

$$S = [x_0 - c, x_0 + c] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset U$$

$$K = \sup\, \{|f(x, y)| \mid (x, y) \in S\} + 1.$$

Entonces, para todo $0 < a <$mín $\{c, 1/M, b/K\}$, existe una función

$$y : [x_o - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$y(x_0) = y_0 \tag{52}$$

$$y^{'}(x) = f(x, y(x)) \;\; ; \;\; \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] \tag{53}$$

Además, y es la única función que satisface (52) y (53) sobre el intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Demostración: Haremos algunas observaciones preliminares.

Para probar este teorema, consideraremos la solución de la siguiente ecuación integral para y

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{54}$$

El lector puede fácilmente comprobar que una función y satisface (54) si y sólo si satisface (52) y (53).

Nuestra estrategia será hallar un espacio completo $\mathcal{G}$ de funciones y una aplicación contractante $\psi, \psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ que tenga la siguiente propiedad: si existe una solución y de (54), entonces $y \in \mathcal{G}$ y, además, y es solución de (54) si y sólo si $\psi(y) = y$. Para complementar esto notemos que cualquier solución y debe ser tal que $(x, y(x)) \in U$ para todo x en el dominio de y de manera que $f(x, y(x))$ esté definido.

Otras consideraciones relativas a la elección del espacio $\mathcal{G}$ quedarán claras al lector en el desarrollo de la demostración.

Sea $(x_0, y_0) \in U$. Por ser U abierto existen b y c tales que el rectángulo:

$$S = [x_0 - c, x_0 + c] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset U$$

Sea a un número cualquiera tal que:

$$0 < a < \text{mín} \left\{ c, \frac{1}{M}, \frac{b}{K} \right\}$$

Notemos que (figura 160)

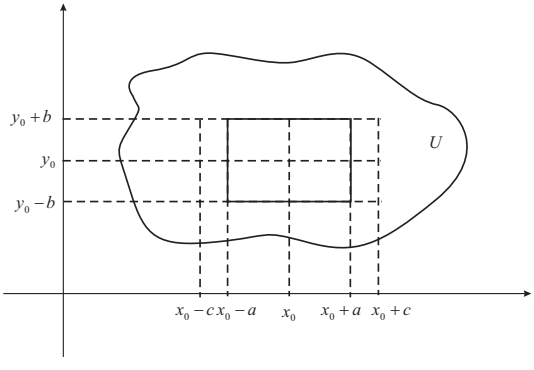


Figura 160.

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset U$$

El espacio $(\mathfrak{C}([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R}), d_\infty)$ es completo por ser cerrado en $b([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R})$, pero este no es el espacio adecuado para nuestros propósitos.

Definamos $\mathcal{G}$ como el subespacio de $\mathfrak{C}([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R}))$ formado por todos los elementos y tales que:

$$y(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]; \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Evidentemente $\mathcal{G}$ es completo por ser cerrado en:

$$\mathfrak{C}([x_0 - a, x_0 + a], \mathbb{R}) \text{ y } si \ y \in \mathcal{G} \text{ entonces } (x, y(x)) \in U$$

$$\text{para todo } x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Definiremos ψ sobre $\mathcal{G}$ de la siguiente forma:

$$\psi(g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt \tag{55}$$

El lector puede comprobar que $\psi[\mathcal{G}] \subset \mathcal{G}$. Por otra parte $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ es una contracción.

En efecto, si g_1, $g_2 \in \mathcal{G}$

$$|\psi(g_1)(x) - \psi(g_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t)))dt \right|$$

$$\leq M \int_{x_0}^{x} |g_1(t) - g_2(t)| \, dt$$

$$\leq M a d_\infty(g_1, g_2).$$

Como la desigualdad se cumple independientemente de $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, se obtiene:

$$d_\infty(\psi(g_1), \psi(g_2)) \leq M a d_\infty(g_1, g_2)$$

lo que implica, que ψ es contractante pues de la definición de a, $Ma = k < 1$. Por el teorema del punto fijo existe una función y única en $\mathcal{G}$ que cumple

$$\psi(y) = y$$

o sea y satisface (52) y (53).

Si y_1 es otra función sobre $[x_0 - a, x_0 + a]$ que satisface (52) y (53) entonces:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

y por tanto:

$$|y_1(x) - y(x)| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt| \leq$$

$$\leq M a d_\infty(y_1, y_2) \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

de donde

$$d_\infty(y_1, y_2) < d_\infty(y_1, y_2)$$

que es una contradicción. ■

Aplicación 3. Teorema del vector minimizante

El siguiente teorema es una herramienta fundamental en el estudio de los problemas de la mejor aproximación en espacios de Hilbert.

11.6.3 *Teorema*

Sea x un vector en un espacio de Hilbert H y sea K un subconjunto cerrado y convexo de H.

Entonces existe un único vector $k_0 \in K$ tal que

$$\|x - k_0\| \leq \|x - k\|$$

para todo $k \in K$. Más aún la condición necesaria y suficiente para que k_0 sea el único vector minimizante es que $< x - k_0, k - k_0 > \leq 0$ para todo $k \in K$.

Demostración (fig. 161)

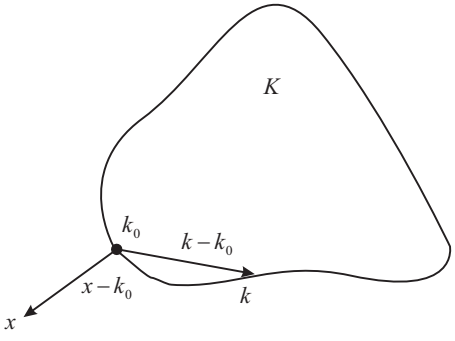


Figura 161. Distancia mínima a un cerrado convexo

Para probar la existencia sea (k_n) una sucesión en K tal que:

$$\|x - k_n\| \to \delta = \inf_{k \in K} \|x - k\|$$

Por la ley del paralelogramo se tiene:

$$\|k_i - k_j\|^2 = 2\|k_i - x\|^2 + 2\|k_j - x\|^2 - 4\left\|x - \frac{k_i + k_j}{2}\right\|^2$$

Por la convexidad de $K, \dfrac{k_i + k_j}{2}$ está en K y por tanto:

$$\left\|x - \frac{k_i + k_j}{2}\right\| \geq \delta$$

de donde

$$\|k_i - k_j\|^2 \leq 2\|k_i - x\|^2 + 2\|k_j - x\|^2 - 4\delta^2 \to 0$$

En fin, la sucesión (k_n) es de Cauchy y por tanto convergente a un elemento $k_0 \in K$.

Por continuidad, $\|x - k_0\| = \delta$.

Para probar la unicidad supongamos que existe $k_1 \in K$ tal que $\|x - k_1\| = \delta$.

La sucesión:

$$k_n = \begin{cases} k_0 & \text{si } n \text{ es par} \\ k_1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

cumple $\|x - k_n\| \to \delta$, por el argumento anterior (k_n) es de Cauchy y por lo tanto convergente. Esto sólo puede ocurrir si $k_0 = k_1$. Probaremos que si k_0 es el único vector minimizante entonces:

$$< x - k_0, k - k_0 > \leq 0$$

para todo $k \in K$. Supongamos por el contrario que existe un vector $k_1 \in K$ tal que $< x - k_0, k_1 - k_0 >= \varepsilon > 0$. Consideremos el vector $k_\alpha = (1-\alpha)k_0 + \alpha k_1, (0 \leq \alpha \leq 1)$.

Por ser K convexo, $k_\alpha \in K$, para $0 \leq \alpha \leq 1$. Además:

$$\|x - k_\alpha\|^2 = \|(1-\alpha)(x - k_0) + \alpha(x - k_1)\|^2$$

$$= (1-\alpha)^2\|x - k_0\|^2 + 2\alpha(1-\alpha) < x - k_0, x - k_1 >$$
$$+\alpha^2\|x - k_1\|^2$$

$\alpha \mapsto \|x - k_\alpha\|^2$ es una función diferenciable de α con derivada en $\alpha = 0$ igual a

$$\frac{d}{d\alpha}\|x - k_\alpha\|^2|_{\alpha=0} = -2\|x - k_0\|^2 + 2 < x - k_0, x - k_1 >=$$

$$= -2 < x - k_0, k_1 - k_0 >= -2\varepsilon < 0$$

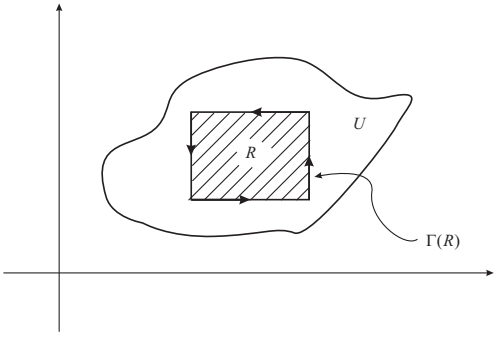


Figura 162.

Entonces para algún α positivo pequeño $\|x - k_\alpha\| < \|x - k_0\|$ lo cual contradice la propiedad minimizante de k_0. Inversamente supongamos que $k_0 \in K$ es tal que $< x - k_0, k - k_0 > \leq 0$ para todo $k \in K$. Entonces para cualquier $k \in K, k \neq k_0$ tenemos:

$$\|x - k\|^2 = \|x - k_0 + k_0 - k\|^2 = \|x - k_0\|^2 +$$

$$2 < x - k_0, k_0 - k > + \|k_0 - k\|^2 \geq \|x - k_0\|^2$$

de donde k_0 es el único vector minimizante. ■

Aplicación 4. Teorema de Goursat

El teorema que expondremos a continuación es de gran importancia en el desarrollo de la teoría de las funciones holomorfas de una variable compleja. La demostración se basa en el teorema de Cantor.

11.6.4 *Teorema (de Goursat)*

Si f es holomorfa en un abierto U de $\mathbb{C}$, entonces la forma diferencial $f(z)\,dz$ es localmente exacta en U.

Demostración. Para probar el teorema basta demostrar que la integral de $f(z)\,dz$ a lo largo del borde de cada rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados es nula (fig. 163).

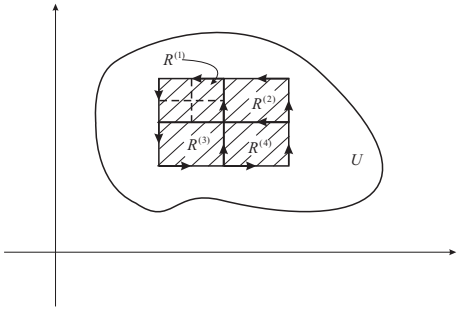


Figura 163.

Sea R un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados y sea $\Gamma(\mathbb{R})$ el camino en U formado recorriendo los lados de R en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$\text{Sea } \alpha(R) = \int_{\Gamma(R)} f(z)dz. \text{ Debemos probar que } \alpha(R) = 0$$

Dividiendo R en cuatro rectángulos tales que

$$\Gamma(R) = \Gamma(R^{(1)}) + \Gamma(R^{(2)}) + \Gamma(R^{(3)}) + \Gamma(R^{(4)})$$

deducimos que existe al menos uno de ellos, llamémosle $R^{(i)}$ tal que $|\alpha(R^{(i)})| \geq 1/4|\alpha(R)|$. Repitiendo este procedimiento se construye una sucesión (R_n) de rectángulos encajados en U con lados paralelos a los ejes tales que $|\alpha(R_n)| \geq 1/4^n|\alpha(R)|$ (fig. 161).

Por el teorema de Cantor existe un punto z_0 único común a todos los rectángulos R_n.

De la derivabilidad de f en z_0 se deduce que dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $V(z_0)$ de z_0 tal que:

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon\, |z - z_0|\ \forall z \in V(z_0)$$

Para n suficientemente grande $R_n \subset V(z_0)$. Las formas diferenciales dz y $zdz = d(z^2/2)$, siendo exactas en U tienen integral nula sobre $\Gamma(R_n)$, entonces

$$|\alpha(R)| = \left|\int_{\Gamma(R_n)} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \left|\int_{\Gamma(R_n)} |z - z_0|dz\right| \leq \varepsilon\, L_n \sup_{z\in\Gamma(R_n)} |z - z_0|$$

donde $L_{\Gamma(R_n)}$ es la longitud de $\Gamma(R_n)$.

Pero si d y P son las longitudes de la diagonal y el perímetro de $\Gamma(Rn)$ entonces $L_n = 2^{-n}P$ y $\sup\limits_{z\in\Gamma(Rn)} |z - z_0|$ es menor que la diagonal de R_n cuya longitud es $2^{-n}d$.

Finalmente $|\alpha(R_n)| \leq \varepsilon 4^{-n}Pd$. Pero por construcción de los rectángulos $\mathbb{R}_n : |\alpha(R_n)| \geq 4^{-n}|\alpha(R)|$ de lo cual se deduce $|\alpha(R)| \leq \varepsilon\ Pd$. Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario el teorema queda probado. ■

Aplicación 5. Existencia de funciones en $\mathfrak{C}$ $([0,1],\mathbb{R})$ que no son derivables en ningún punto

Como ejemplo de aplicación al Análisis del teorema de Baire veremos el siguiente teorema de existencia.

11.6.5 *Teorema*

Existen funciones reales y continuas sobre $[0,1]$ que no son derivables en ningún punto de $[0,1]$.

Demostración. Para cada $n = 1, 2, ...$ definamos $N_n \subset \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ mediante:

$$N_n := \{f \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) | \exists\, x \in [0, 1 - 1/n],$$

$$\forall h \in [0, 1/n], \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n\} \tag{56}$$

Las únicas funciones de $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ que tienen derivada en algún punto son aquellas que pertenecen a algún N_n. Nosotros probaremos que

$$\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_n \neq \varnothing$$

y para ello nos basaremos en el ejercicio 11.4.10.

Es decir, probaremos que cada N_n es denso en ninguna parte y como $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ es completo no podrá ser igual a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n$.

1. Cada $\mathbb{N}_n$ es cerrado

Es fácil comprobar que la función evaluación $W : \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) \times I \to \mathbb{R}$ es continua (E.11.6).

Para cada punto fijo $h_0 \in (0, \frac{1}{n}]$ se tiene que las aplicaciones de

$$\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$$

dadas por

$$(f,x) \mapsto \frac{1}{h} \cdot f(x+h_0)$$

$$(f,x) \mapsto \frac{1}{h} f(x)$$

son también continuas, luego también lo será

$$(f,x) \mapsto \left| \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} \right|$$

y por tanto

$$\left\{ (f,x) \left| \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} \right| \leq n \right\}$$

es cerrado en $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

La proyección de este conjunto paralela al eje compacto $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ es entonces cerrada en $\mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})$ (E.8.10) y es precisamente

$$N(h_0) = \left\{ f \left| \exists\, x \in [0, 1 - 1/n] : \left| \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} \right| \leq n \right. \right\} \tag{57}$$

Como $\mathbb{N}_n = \cap\{N(h_0) \mid h_0 \in (0, 1/n]\}$ esto prueba 1.

2. Cada $\mathbb{N}_n$ tiene interior vacío

Si $f \in \mathbb{N}_n$ probaremos que en cada bola $B(f,\varepsilon)$ (tomando las bolas con respecto a la distancia d_∞) existe $g \in \mathfrak{C}([0,1],\mathbb{R})\ \mathbb{N})_n$; esto es, existe g tal que

i) $d_\infty(f,g) < \varepsilon$

ii) $\forall x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]\ \ \exists h_x \in]0, 1/n]$:

$$\left| \frac{g(x+h_x) - g(x)}{h_x} \right| > n$$

Por el teorema de Weierstrass de aproximación por polinomios que el lector puede encontrar detallado en el último capítulo existe un polinomio p tal que $d_\infty(f,p) < \varepsilon/3$; de esta manera necesitamos una función que esté a una distancia menor que $\varepsilon/3$ de p y teniendo la propiedad ii).

Como la derivada p' es continua sobre I tenemos:

$$M = \text{máx}\{|\, p'(x) \,\|\, 0 \leq x \leq 1\} \tag{58}$$

y definamos $S(x)$ como una función continua no negativa sobre I cuya gráfica consta de segmentos de recta, siendo el valor absoluto de la pendiente de cada segmento $M + n + 1$. La gráfica nunca se eleva más de $\varepsilon/3$ unidades por encima del eje x.

Entonces: $d_\infty(p + s, p) < \varepsilon/3$ y $p + s$ es la función buscada ya que

$$\left| \frac{p(x+h) + s(x+h) - s(x) - p(x)}{h} \right| \geq$$

$$\geq \left\| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \,|\, - \,|\, \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right\|$$

y para cada $x \in [0, 1 - 1/n]$ podemos evidentemente hallar $h \in [0, 1/n]$ tal que el lado derecho sea mayor o igual que $M + n + 1 - M = n + 1$. ■

CAPÍTULO 12 Espacios funcionales

De acuerdo con nuestra motivación inicial para el estudio de los espacios métricos, y los espacios topológicos y con el carácter de las aplicaciones dadas hasta el momento, concluimos este libro con un capítulo dedicado completamente a la aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores a los espacios funcionales.

De esta forma volvemos también al origen histórico del Análisis Funcional.

La idea de considerar las funciones como puntos de un espacio topológico constituyó el punto de partida para el Análisis Funcional, así como el paso intermedio esencial para la definicón abstracta de los espacios métricos y más tarde de los espacios topológicos. Esta idea surgió como resultado de un largo proceso histórico de abstracción. Aún a principios del siglo XIX solamente era conocida la noción de una función arbitraria. Los diferentes conceptos de convergencia (puntual y uniforme) no se distinguieron con precisión antes de los años 1840/50. El estudio formal de la convergencia uniforme (encabezado por la escuela italiana: Dini, Arzela, Ascoli) comenzó en el último tercio del siglo XIX y no fué hasta finales de siglo que utilizaron sistemáticamente topologías sobre conjuntos de funciones.

En la sección 12.1 veremos que los conceptos de convergencia uniforme y convergencia puntual se derivan de estructuras uniformes sobre el espacio funcional $\Im(X, Y) = Y^X$.

Estudiaremos un método general para introducir estructuras uniformes sobre tales espacios, las llamadas estructuras uniformes de la σ-convergencia, que comprenden toda una serie de estructuras uniformes importantes en Análisis Funcional (de convergencia puntual, convergencia compacta, convergencia acotada, convergencia uniforme). Expondremos sus propiedades elementales y aplicaremos enseguida los resultados obtenidos a los subespacios de Y^X formados por las funciones acotadas, las funciones continuas y las funciones multiliniales.

En la sección 12.2 analizaremos una topología sobre $\Im(X, Y)$ llamada *topología compacta-abierta* que no presupone una estructura uniforme sobre el codominio Y sino solamente una topología. En comparación con las estructuras uniformes de la sección 12.1 que se estudiaron implícitamente desde que se inició en análisis

la investigación de los sucesiones y series de funciones, la topología compacta abierta es un concepto relativamente reciente. Su importancia en la topología (p. ej., para la teoría de homotopía) ha crecido considerablemente desde que FOX [56] descubrió las propiedades básicas que la caracterizan. La topología compacta-abierta en general no se deriva de una estructura uniforme, pero en el caso de que el codominio sea un espacio uniforme coincide con la topología de la convergencia compacta.

Los resultados expuestos en la sección 12.2 profundizan a la vez nuestros conocimientos sobre esta topología.

Continuaremos el estudio de la topología de la convergencia compacta en la sección 12.3 donde deduciremos los resultados clásicos de Ascoli sobre los conjuntos de funciones que son compactos en esta topología. Presentaremos además en la sección 12.3 dos aplicaciones del teorema de Ascoli, una en análisis complejo y otra en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, a saber: la caracterización de las familias normales de Montel y el teorema de existencia de Peano.

La última sección (§11.4) expone el tratamiento sistemático de M.H. Stone, sobre la aproximación uniforme de funciones reales continuas definidas sobre un espacio compacto. Esta exposición culmina con el teorema de Stone-Weierstrass que generaliza el teorema de Weierstrass sobre la aproximación uniforme de una función real continua por polinomios en un intervalo compacto $[a, b]$. Aplicaremos este teorema para estudiar la relación entre la estructura algebraica del anillo $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y la estructura topológica del espacio $(X, \mathcal{X})$. El método presentado en esta parte constituye una herramienta básica de dos ramas del Análisis Funcional: la teoría de los anillos de funciones reales continuas y la teoría de las álgebras uniformes (complejas).

§ 12.1 **Estructuras uniformes sobre espacios funcionales**

Sean X un conjunto y (Y, d) un espacio seudométrico. Hasta el momento conocemos dos conceptos de convergencia sobre el espacio $\Im(X, Y) = Y^X$, la convergencia uniforme y la convergencia puntual que no sólo corresponden a dos topologías diferentes (véase cap. 1), sino también a dos estructuras uniformes diferentes sobre $\Im(X, Y)$. Analizaremos ahora detalladamente el proceso de definición de ambas estructuras uniformes con vista a desarrollar un método general para la introducción de estructuras uniformes en los espacios funcionales $\Im(X, Y)$ que comprenda a ambas estructuras uniformes como casos particulares.

Si (Y, d) es un espacio métrico entonces la topología de la convergencia uniforme sobre un subconjunto $A \subset X$ (1.4.6) está definida por una estructura uniforme sobre $\Im(X, Y)$.

12.1.1 *Ejemplo*

Sea (Y, d) un espacio (seudo)métrico y $A \subset X$. Decimos que f y g son **vecinos de orden** ε $(\varepsilon > 0)$ sobre A si

$$d_A(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in A\} \leq \varepsilon \tag{1}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, los pares (f, g) con esta propiedad forman un entorno

$$W(A, \varepsilon) := \{(f, g) \mid f, g \in \Im(X, Y) \ \wedge \ d_A(f, g) \leq \varepsilon\} \tag{2}$$

La colección de estos entornos

$$\mathfrak{B}_{u/A} := \{W(A, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

es un sistema fundamental de entornos para una estructura uniforme $\mathcal{U}_{u/A}$ que se llama estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre A. El espacio $\Im(X, Y)$ provisto de esta estructura uniforme se denota por $\Im_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

La topología de $\Im_{\mathcal{A}}(X, Y)$ es precisamente la topología de la convergencia uniforme sobre A definida por la seudométrica d_A (1.4.6) (fig. 164)

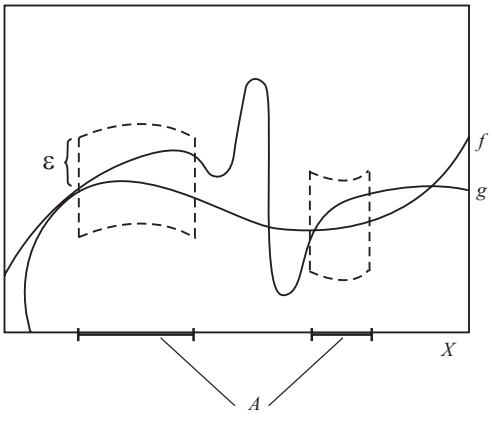


Figura 164. $(f, g) \in W(A, \varepsilon)$

Tenemos $f_n \longrightarrow f$ en $\Im_{\mathcal{A}}(X, Y)$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} : (f_n, f) \in W(A, \varepsilon) \text{ para } n \geq N \tag{3}$$

Es evidente cómo hay que generalizar la definición de la estructura uniforme $\mathcal{U}_{u/A}$ si tenemos como codominio un *espacio uniforme* $(Y, \mathcal{U})$ en vez de un *espacio métrico* (Y, d). Se verifica fácilmente que la colección de todos los entornos

$$W(A, V) := \{(f, g) \in \Im(X, Y))^2 \mid \forall x \in A : (f(x), g(x) \in V\} \tag{4}$$

donde V recorre $\mathcal{U}$, verifica las condiciones BU 1-BU 3 para un sistema fundamental de entornos. Por lo tanto podemos hacer la siguiente definición (ver 11.1.8).

12.1.2 *Definición (estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre A)*

Sea X un conjunto, $A \subset X$ y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces la estructura uniforme $\mathcal{U}_{u/A}$ sobre $\Im(X, Y)$ definida por el sistema fundamental

$$\{W(A, V) \mid V \in \mathcal{U}\} \tag{5}$$

se llama **estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre** A. El espacio $\Im(X, Y)$ provisto de esta estructura uniforme se denota por $\Im_{\mathcal{A}}(X, Y)$ y

la topología correspondiente se llama **toplogía de la convergencia uniforme sobre** A. Se dice que una base de filtro $\mathcal{L}$ sobre $\Im(X,Y)$ converge uniformemente sobre A a $f \in \Im(X,Y)$ (notación: $\mathcal{L} \underset{u/A}{\rightarrow} f$) si $\mathcal{L}$ converge a f con respecto a esta topología.

Nota: Si $A = X$ se habla de *convergencia uniforme* sin especificar que es sobre X. En este caso se utilizan las notaciones siguientes $\Im_u(X,Y)$, $\mathcal{X}_u/X$, $\mathcal{U}_u$ y $\mathcal{L} \underset{u}{\rightarrow} f$ en vez de $\Im_X(X,Y)$, $\mathcal{X}_{u/X}$ y $\mathcal{L} \underset{u/X}{\rightarrow} f$.

Consideremos ahora, brevemente, la estructura uniforme asociada al segundo concepto clásico de convergencia, la convergencia puntual. Este concepto viene a estar definido por la *estructura uniforme producto* sobre $\Im(X,Y) = Y^X$. Con vista a hallar un enfoque unificado para ambas estructuras uniformes analizaremos ahora la estructura uniforme producto en el lenguaje del ejemplo y la definición anterior.

12.1.3 *Ejemplo*

Sea X un conjunto y $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. La estructura uniforme producto $\mathcal{U}_p$ sobre $\Im(X,Y) = Y^X$ es la más gruesa con respecto a la cual todas las aplicaciones evaluación $f \mapsto f(x)$ de $\Im(X,Y)$ en $(Y,\mathcal{U})$ son uniformemente continuas ($x \in X$). Los entornos:

$$W(\{x\},V) = \{(f,g) \in (\Im(X,Y))^2 \mid (f(x),g(x)) \in V\} \tag{6}$$

($x \in X, V \in \mathcal{U}$) constituyen una subbase de $\mathcal{U}_p$, que se llama **estructura uniforme de la convergencia puntual**.

Obtenemos un sistema fundamental de entornos para $\mathcal{U}_p$ si formamos todas las intersecciones finitas

$$\bigcap_{i=1}^{n} W(\{x_i\},V) = W(\{x_1,...,x_n\},V) \tag{7}$$

$$V \in \mathcal{U}; n \in \mathbb{N}; x_1,...,x_n \in X$$

Si fijamos el subconjunto finito $F = \{x_1,...,x_n\} \subset X$ y dejamos variar V en $\mathcal{U}$, los entornos (7) definen precisamente la estructura uniforme $\mathcal{U}_{u/F}$ de la convergencia uniforme sobre F en $\Im(X,Y)$. Resulta que podemos caracterizar $\mathcal{U}_p$ también como la *estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos finitos de* X, o sea, como el *supremo de todas las estructuras uniformes* $\mathcal{U}_{u/F}$ donde F recorre todos los subconjuntos finitos de X. Esto es:

$$\mathcal{U}_p = \sup\{\mathcal{U}_x \mid x \in X\} = \sup\{\mathcal{U}_{u/F} \mid F \subset X \text{finito}\} \tag{8}$$

y se tiene:

$$\mathcal{F} \longrightarrow f \text{ en } \Im_p(X,Y) \Longleftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{F}(x) \longrightarrow f(x) \tag{9}$$

$$\Longleftrightarrow \forall F \subset X \text{ finito} : \mathcal{F} \mid F \underset{u}{\longrightarrow} f \mid F$$

Ahora esta claro cómo se puede generalizar el procedimiento anterior para definir $\mathcal{U}_p$ de tal manera que el método obtenido comprenda también la definición de $\mathcal{U}_u$.

En vez de considerar sólo la convergencia uniforme sobre subconjuntos finitos F de X podemos estudiar la convergencia uniforme sobre los conjuntos de *cualquier colección dada* $\sigma \subset \beta(X)$. La estructura, $\mathcal{U}_{u/A}$ de convergencia uniforme sobre $A \subset X$ se obtiene poniendo sencillamente $\sigma = \{A\}$.

12.1.4 *Definición (estructura uniforme de la σ-convergencia)*

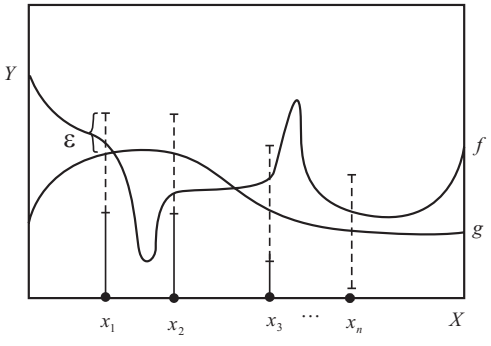


Figura 165. $f\,g \in W(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \varepsilon)$

Sea X un conjunto, $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces la estructura uniforme suprema de todas las estructuras uniformes $\mathcal{U}_{u/A}(A \in \sigma)$ se llama estructura uniforme de la σ-convergencia sobre $\Im(X, Y)$ (notación $\mathcal{U}_\sigma$). La topología asociada se llama σ-topología (notación: $\mathcal{X}_\sigma$). Se dice que una base de filtro $\mathcal{L}$ sobre $\Im(X, Y)$ converge uniformemente sobre los conjuntos de σ a una función $f : X \longrightarrow Y$, si $\mathcal{L}$ converge a f en el espacio uniforme $\Im_\sigma(X, Y) := (\Im(X, Y), \mathcal{U}_\sigma)$ (notación: $\mathcal{L} \underset{\sigma}{\longrightarrow} f$).

De esta definición, se obtiene un sistema fundamental de entornos para $\mathcal{U}_\sigma$ tomando todas las intersecciones

$$\bigcap_{i=1}^{n} W(A_i, V) = W\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, V\right) \tag{10}$$

donde V recorre un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$ y $\{A_1, ..., A_n\}$ es una subcolección finita de σ (11.2.10).

Si denotamos por $rest_A$ la aplicación $f \to f \mid A$ de $\Im(X, Y)$ en $\Im_A(A, Y)$ entonces $\mathcal{U}_\sigma$ es la estructura uniforme más gruesa sobre $\Im(X, Y)$ tal que todas las aplicaciones $rest_A(A \in \sigma)$ son uniformemente continuas, o sea $\mathcal{U}_\sigma$ es la estructura uniforme inicial sobre $\Im(X, Y)$ definida por la familia $(rest_A)_{A \in \sigma}$:

$$\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}(rest_A, \Im_A(X, Y))_{A \in \sigma} \tag{11}$$

De aquí resulta, por 11.2.10, que $\mathcal{U}_\sigma$ define efectivamente la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de σ:

$$\mathcal{F} \longrightarrow f \text{ en } \Im_A(X, Y) \Longleftrightarrow \forall A \in \sigma\ \mathcal{F} \mid A \underset{u}{\longrightarrow} f \mid A \tag{12}$$

Por (10), $\mathcal{U}_\sigma$ no cambia si añadimos a σ todas las uniones finitas de conjuntos de σ (saturación por uniones finitas), o si añadimos todos los subconjuntos de conjuntos de σ (saturación por subconjuntos):

$$\overline{\sigma} = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists A_1, ..., A_n \in \sigma : S \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i\} \Longrightarrow \mathcal{U}_{\bar{\sigma}} = \mathcal{U}_\sigma \tag{13}$$

En el caso de que σ sea saturada, ya los entornos

$$W(A, \mathcal{V}) \;\; (A \in \sigma, \mathcal{V} \in \mathcal{U}) \tag{14}$$

forman un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}_\sigma$.

Si (Y, d) es un espacio seudométrico entonces la estructura uniforme $\mathcal{U}_\sigma$ sobre $\Im(X, Y)$ se define mediante la colección de seudométricas.

$$\mu_\sigma = \{d_A \mid d_A = \sup\{d_x \mid x \in A\} \wedge A \in \sigma\} \tag{15}$$

Veremos ahora, como ejemplo, los cuatro tipos de σ-convergencia que más se utilizan en las aplicaciones.

12.1.5 *Ejemplo (estructura uniforme de la convergencia uniforme)*

Sea $\sigma = \{X\}$. Entonces $\Im_\sigma(X, Y) = \Im_u(X, Y)$ está provisto de la estructura uniforme de σ-convergencia más fina que existe sobre $\Im(X, Y)$. Hemos visto que $\Im_u(X, Y)$ es seudometrizable si lo es $(Y, \mathcal{U})$ (ejemplo 12.1.1).

12.1.6 *Ejemplo (estructura uniforme de la convergencia puntual)*

Sea $\sigma = \{\{x\} \mid x \in X\}$ la colección de todos los subconjuntos unitarios de X. Entonces, por el ejemplo 12.1.3, $\Im_\sigma(X, Y) = Y^X$. Por (12) y (13) $\mathcal{U}_\sigma$ es la más gruesa de las estructuras uniformes de σ-convergencia tal que σ es una cubierta de X. La saturación $\bar{\sigma}$ de σ es la colección de todos los subconjuntos finitos de X, luego la caracterización (8) de $\mathcal{U}_p$ es sólo un caso particular de (13).

12.1.7 *Ejemplo (estructura uniforme de la convergencia compacta)*

Supongamos ahora que $(X, \mathcal{X})$ es un espacio topológico. Si σ es la colección de todos los subconjuntos compactos de $(X, \mathcal{X})$, $\mathcal{U}_\sigma$ (resp. $\mathcal{X}_\sigma$) se llama **estructura uniforme** (resp. **topología**) **de la convergencia compacta** sobre $\Im(X, Y)$ (notación $\mathcal{U}_c$; $\Im_c(X, Y)$; $\mathcal{X}_c$). Puesto que σ es saturado por uniones finitas (8.1.15), los entornos $W(C, V)$ con $(C \subset X)$ compacto y $(V \in \mathcal{U})$ forman un sistema fundamental de entornos para $\mathcal{U}_c$. Por lo tanto, si $(Y, \mathcal{U})$ es seudometrizable y si $(X, \mathcal{X})$ es σ-compacto, entonces $\Im_c(X, Y)$ es seudometrizable. La estructura uniforme $\mathcal{U}_c$ es más fina que $\mathcal{U}_p$ pero más débil que $\mathcal{U}_u$. La convergencia compacta se caracteriza por:

$$\mathcal{F} \underset{c}{\longrightarrow} f \Longleftrightarrow \forall\, C \subset (X, \mathcal{X}) \text{ compacto: } \mathcal{F} \mid C \underset{u}{\longrightarrow} f \mid C \tag{16}$$

12.1.8 *Ejemplo (estructura uniforme de la convergencia acotada)*

Supongamos ahora, más especificamente, que (X, d) es un espacio seudométrico (para mayor generalidad podríamos considerar un espacio bornológico $(X, \mathcal{L})$). Entonces se emplea a veces sobre $\Im(X, Y)$ la estructura uniforme de la convergencia acotada $\mathcal{U}_a$ definida por la colección $\sigma = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \delta(A) < \infty\}$ de todos los subconjuntos acotados de (X, d).
Esta estructura uniforme depende no sólo de la topología sino también de la seudométrica específica sobre X.

Sea $x_0 \in X$ fijo y $B_n := B(x_0, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. La sucesión de bolas (B_n) recubre X de tal manera que todo subconjunto acotado $B \subset (X, d)$ está contenido en alguna bola B_n. Concluimos que los entornos

$$W(B_n, V) \ (n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{U}) \tag{17}$$

contituye un sistema fundamental para $\mathcal{U}_a$. Por lo tanto $\Im_a(X, Y) := (\Im(X, Y), \mathcal{U}_a)$ es seudometrizable siempre que $(Y, \mathcal{U})$ lo sea.

Para todo espacio seudométrico (X, d) tenemos sobre $\Im(X, Y)$

$$\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_c \subset \mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_u \tag{18}$$

La convergencia acotada se caracteriza por

$$\mathcal{F} \underset{a}{\longrightarrow} f \Longleftrightarrow \forall B \subset X, \delta(B) < \infty : \mathcal{F} \mid B \underset{u}{\longrightarrow} f \mid B \tag{19}$$

Nota: Observemos que las estructuras uniformes $\mathcal{U}_\sigma$ constituyen únicamente una clase de estructura uniformes sobre $\Im(X, Y)$. *Existen otras estructuras uniformes diferentes y son importantes especialmente para subespacios de* $\Im(X, Y)$. Por ejemplo, las estructuras uniformes definidas por la convergencia en media o en media cuadrática consideradas en la § 1.1.

La importancia de la definición de las estructuras uniformes de σ-convergencia, se basa en su papel unificador que permite encontrar propiedades comunes de diversas estructuras uniformes sobre $\Im(X, Y)$, sin reparar en las exigencias particulares que cada una efectúe sobre X. Deduciremos en lo que sigue una serie de resultados, excluyendo los casos triviales donde $\cup\sigma = \varnothing$ o card $Y \leq 1$.

12.1.9 *Proposición*

El espacio $\Im_\sigma(X, Y)$ es de Hausdorff si y sólo si $(Y, \mathcal{X}_u)$ es de Hausdorff y $X = \cup\sigma$ (suponiendo que card $Y \geq 2$).

Demostración : Sea $\langle Y \rangle$ el subespacio de todas las aplicaciones constantes $\langle y \rangle : x \mapsto y$ de X en Y. La biyección $\varphi : y \to \langle y \rangle$ de $(Y, \mathcal{U})$ sobre $\langle Y \rangle$ es uniformemente bicontinua. Luego $(Y, \mathcal{U})$ es isomorfo a $\langle Y \rangle$ como espacio uniforme. De aquí se concluye que $(Y, \mathcal{X}_u)$ es de Hausdorff si $\Im_\sigma(X, Y)$ lo es.

Supongamos ahora que $(Y, \mathcal{X}_u)$ es de Hausdorff. Si $X \neq \cup\sigma$ entonces $\mathcal{X}_\sigma \supset \mathcal{X}_p$, entonces $\Im_\sigma(X, Y)$ es de Hauusdorff, por 7.2.8. Inversamente, si existe

$x_0 \in X \setminus \cup\sigma$, entonces dos funciones $f, g : X \to Y$ que no coincidan en x_0 sobre $U\sigma$ no pueden separarse en $\Im_\sigma(X,Y)$. ■

12.1.10 *Teorema*

Para un filtro (resp. base de filtro) $\mathcal{F}$ sobre $\Im_\sigma(X,Y)$ son equivalentes los siguientes enunciados:

i) $\mathcal{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} f$.

ii) $\mathcal{F}$ es de Cauchy y para toda $x \in \cup\sigma$: $\mathcal{F}(x) \longrightarrow f(x)$. Esta caracterización permite reducir la σ-convergencia a la convergencia puntual en $\cup\sigma$, si sabemos de antemano que $\mathcal{F}$ es de Cauchy.

Demostración. i) $\Longrightarrow$ ii): Si $\mathcal{F} \underset{\sigma}{\to} f$, entonces $\mathcal{F}$ es de Cauchy por 11.3.5 y $\mathcal{F}(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in \cup\sigma$ por ser $e_x : u \mapsto u(x)$ de $\Im_\sigma(X,Y)$ en (Y,U) continuas para todo $x \in \cup\sigma$.
ii) $\Longrightarrow$ i): Sea $V \in \mathcal{U}$ cerrado y $A \in \sigma$. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset W(A,V)$ o sea:

$$(u(x), v(x)) \in V \text{ para todos } u, v \in F \ \wedge \ x \in A$$

Puesto que $\mathcal{F}(x) \longrightarrow f(x)$, $f(x)$ es punto adherente de $F(x) = \{v(x) \mid v \in F\}$ para todo $x \in A$. Pero V es un entorno cerrado. Luego $(u(x), f(x)) \in V$ para todo $u \in F$ y todo $x \in A$. Esto significa que $F \subset W(A,V)(f)$. Concluimos que para todo entorno $W = W(A,V)$ de $\mathcal{U}_\sigma$ existe $F \in \mathcal{F}$ contenido en $W(f)$, o sea $\mathcal{F} \longrightarrow f$. ■

12.1.11. *Corolario*

Si $(Y,\mathcal{U})$ es completo entonces $\Im_\sigma(X,Y)$ es completo.

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre $\Im_\sigma(X,Y)$. Para todo $x \in \cup\sigma$ la base de filtro de Cauchy $\mathcal{F}(x) = e_x\{\mathcal{F}\}$ converge a un punto $y = y(x)$ en $(Y,\mathcal{U})$ por ser éste completo. Definamos $f : X \to Y$ mediante $f(x) = y(x)$ para $x \in \cup\sigma$ y $f(x) = y_0 \in Y$ arbitrario fijo si $x \in X \setminus (\cup\sigma)$. Entonces $\mathcal{F}(x) \longrightarrow f(x)$ sobre $\cup\sigma$. Entonces $\mathcal{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} f$ por el teorema anterior. ■

Dejamos al lector comprobar que la hipótesis del corolario anterior es también necesaria en el caso de que $\Im_\sigma(X,Y)$ sea de Hausdorff.

12.1.12 *Ejercicio*

Sea $\langle Y \rangle$ el subespacio de las funciones constantes en $\Im(X,Y)$ y σ una cubierta de X. Probar que $\langle Y \rangle$ es cerrado en $\Im_\sigma(X,Y)$ si y sólo si $(Y,\mathcal{U})$ es de Hausdorff. Concluir de aquí que el espacio $\Im_\sigma(X,Y)$ es T_2-completo si y sólo si $(Y,\mathcal{U})$ es T_2-completo. Aplicaremos ahora estos resultados a algunos subespacios importantes de $\Im(X,Y)$.

Aplicación 1. Subespacio $B(X,Y)$ de aplicaciones acotadas.
Supongamos que (Y,d) es un espacio seudométrico. Entonces denotamos por

$B(X,Y)$ al espacio de todas las aplicaciones acotadas $f : X \to (Y,d)$. En lo que sigue consideraremos solamente la estructura uniforme $\mathcal{U}_u$ de la convergencia uniforme en $B(X,Y)$.

12.1.13 *Proposición*

$B(X,Y)$ es a la vez abierto y cerrado en $\Im_u(X,Y)$.

Demostración: Sea $f \in \Im(X,Y)$. Entonces la bola abierta

$$B(f,1) = \{u \in \Im(X,Y) \mid d_\infty(u,f) < 1\}$$

contiene solamente funciones acotadas si f es acotada y solamente funciones no acotadas si f no es acotada. Por lo tanto, $B(X,Y) \subset \Im_u(X,Y)$ y $\complement B(X,Y) \subset F_u(X,Y)$ son abiertos. ■

Como aplicación del corolario 12.1.11 obtenemos el siguiente corolario.

12.1.14 *Corolario*

El espacio $B(X,Y)$ provisto de la estructura uniforme inducida por $\mathcal{U}_u$ (notación $B_u(X,Y)$) es completo, si $(Y,\mathcal{U})$ es completo.

La estructura uniforme de $B_u(X,Y)$ coincide con la estructura uniforme definida por la seudométrica canónica sobre $B_u(X,Y)$:

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\} \tag{20}$$

(Este supremo es siempre un número real, pues f y g son acotadas). d_∞ es una métrica en $B_u(X,Y)$ siempre que d sea una métrica sobre Y. Si Y es un espacio normado $(E, \| \cdot \|)$, entonces d_∞ se deriva de la norma canónica $\| \cdot \|_\infty$ sobre $B_u(X,E)$ definida por

$$\| f \|_\infty = \sup\{\| f(x) \| \mid x \in X\} \tag{21}$$

$(B(X,E), \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio normado que tiene la misma estructura uniforme que $B_u(X,E)$. Recuperamos entonces, mediante el corolario 12.1.14, el siguiente resultado de que $(B(X,Y), \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach (11.4.3).

Consideremos ahora el caso particular en que $E = \mathbb{R}$ ó $E = \mathbb{C}$. Entonces $B(X,E)$ es un álgebra conmutativa unitaria (con respecto al producto $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$) cuya norma cumple la propiedad característica de un *álgebra normada.*

$$\| f \cdot g \|_\infty \leq \| f \|_\infty \cdot \| g \|_\infty \tag{22}$$

Además, $(B(X,E), \| \cdot \|_\infty)$ es completo, o sea es un álgebra de Banach.

Aplicación 2. Subespacio $\mathfrak{C}(X,Y)$ de aplicaciones continuas

Supongamos ahora que $(X,\mathcal{X})$ es un espacio topológico, $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces denotamos por $\mathfrak{C}_\sigma(X,Y)$ al subespacio de todas las funciones continuas $u : X \to Y$ en $\Im_\sigma(X,Y)$. El conocido teorema del Análisis que dice que todo límite uniforme de una sucesión de funciones continuas, es continua, se enuncia a continuación en forma más general.

12.1.15 *Teorema*

$\mathfrak{C}(X,Y)$ es cerrado en $\Im_u(X,Y)$.

Demostración. Copiaremos sencillamente la demostración conocida del análisis. Sea $g \in \overline{\mathfrak{C}(X,Y)}$ en $\Im_u(X,Y)$ y $x_0 \in X$. Basta probar que g es continua en x_0. Sea V un entorno cualquiera de $\mathcal{U}$. Existe $f \in \mathfrak{C}(X,Y)$ tal que $(f(x), g(x)) \in V$ para todo $x \in X$. Por ser f continua, existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que $(f(x), f(x_0)) \in V$ para todo $x \in U$. De aquí se concluye que

$$(g(x_0), f(x_0)) \in V \ \wedge \ (f(x_0), f(x)) \in V \ \wedge \ (f(x), g(x)) \in V$$

entonces $(g(x_0), g(x)) \in \overset{3}{V}$. Puesto que los entornos $\overset{3}{V}$ $(V \in \mathcal{U})$ en $(Y,\mathcal{U})$ forman un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$ (11.1), tenemos que $g \in \mathfrak{C}(X,Y)$. ■

Este resultado no se generaliza para $\sigma-$topologías $\mathcal{X}_\sigma$ cualesquiera. De hecho sabemos que $\mathfrak{C}(X,Y)$ en general no es cerrado en $\Im_p(X,Y)$, puesto que el límite puntual de una sucesión (f_n) de funciones continuas no es necesariamente continua. Sin embargo, si $g \in \mathfrak{C}(X,Y)$ en $\Im_p(X,Y)$ entonces g es continua en todo punto x_0 contenido en el interior $\overset{\circ}{A}$ de cualquier conjunto $A \in \sigma$. En efecto, basta aplicar el teorema anterior al espacio $\mathfrak{C}(\overset{\circ}{A},Y)$ en $\Im_u(A,Y)$ para ver que $g\,|_{\overset{\circ}{A}} \in \overline{\mathfrak{C}(\overset{\circ}{A},Y)} = \mathfrak{C}(\mathcal{F},Y)$. En particular se tiene el siguiente resultado.

12.1.16 *Corolario*

Sea $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\cup\{\overset{\circ}{A} |\ A \in \sigma\} = X$. Entonces $\mathfrak{C}(X,Y)$ es cerrado en $\Im_\sigma(X,Y)$

De aquí se deduce inmediamente.

12.1.17 *Corolario*

Sea $(X,\mathcal{X})$ localmente compacto. Entonces $\mathfrak{C}(X,Y)$ es cerrado en $\Im_c(X,Y)$. Además $\mathfrak{C}_c(X,Y)$ es completo si $(Y,\mathcal{U})$ es completo.

12.1.18 *Corolario*

Sea (X,d) un espacio seudométrico. Entonces $\mathfrak{C}(X,Y)$ es cerrado en $\Im_a(X,Y)$. Además $\Im_a(X,Y)$ es completo si $(Y,\mathcal{U})$ es completo.

12.1.19 *Ejemplo*

Sobre el álgebra $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ las estructuras uniformes $\mathcal{U}_c$ y $\mathcal{U}_a$ coinciden (ejemplo 12.1.8). Y

$$\mathfrak{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathfrak{C}_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ es metrizable.}$$

Concluimos, a partir del corolario anterior, que $\mathfrak{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es un espacio completo metrizable. En particular, es un espacio de Baire.

Aplicación 3. Subespacio de las funciones multilineales continuas

Sean $(E, \|\cdot\|)$, $(E_i, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, ..., n)$ espacios normados sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una aplicación

$$f : (x_1, ..., x_n) \to f(x_1, ..., x_n) \text{ de } E_1 \times ... \times E_n \text{ en } E$$

se llama n-lineal si es lineal con respecto a cada una de las coordenadas x_j. Denotemos por $L(X, E)$ al espacio de las aplicaciones n-lineales continuas de

$$X = E_1 \times ... \times E_n \text{ en } E.$$

En este espacio, contrariamente a los anteriores, la estructura uniforme fundamental es la de la convergencia acotada.

Las tres proposiciones que siguen son ejercicios sencillos de aplicación de los conceptos estudiados en esta sección.

12.1.20 *Proposición*

La norma canónica sobre $L(X, E)$:

$$\| f \|_L = \sup \{\| f(x_1, ..., x_n) \| \ : \ \| x_i \|_i \leq 1 \text{ para } i = 1, ..., n\} \tag{23}$$

define sobre $L(X, E)$ la estructura uniforme de la convergencia acotada.

Demostración. Ejercicio. ■

12.1.21 *Proposición*

$L(X, E)$ es cerrado en $\Im(X, E)$ para la topología de la convergencia acotada.

Demostación. Ejercicio. ■

12.1.22 *Corolario*

$(L(X, E), \|\cdot\|_L)$ es de Banach si y sólo si $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach.

12.1.23 *Ejemplo*

Sea $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces el espacio dual $F' = L(F, \mathbb{R})$ provisto de la norma canónica

$$\| y \| = \sup \{| y(x) | : \| x \| \leq 1\} \ (y \in F')$$

es un espacio de Banach.

§ 12.2 La topología compacta abierta

En la sección anterior hemos introducido toda una serie de estructuras uniformes diferentes sobre $\Im(X,Y)$. En esta sección cambiaremos nuestro enfoque, No analizaremos *estructuras uniformes* sino una *topología* sobre $\mathfrak{C}(X,Y)$ que en cierto sentido es una generalización de la topología de la convergencia compacta.

Partimos del problema siguiente. Sean $(X,\mathcal{X}),(Y,\mathcal{Y}),(Z,\mathcal{Z})$ espacios topológicos y $(f_y)_{y\in Y}$ una familia indicada de aplicaciones continuas $f_y : X \to Z$. Tal familia puede representarse por medio de una aplicación $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = f_y(x)$ de $X \times Y$ en Z o de forma equivalente por una aplicación $\tilde{f} : y \mapsto f_y$ *de* Y *en* $\Im(X,Z)$. Si f es continua decimos que $(f_y)_{y\in Y}$ es una familia (continuamente) parametrizada (p.ej.,las homotopías, véase 6.5 y 6.6). Nos planteamos el problema de ver si es posible proveer a $\Im(X,Y)$ de una topología con respecto a la cual la continuidad de f se exprese equivalentemente por la continuidad de $\tilde{f}$.

Veremos que este problema se resuelve, para espacios localmente compactos $(X,\mathcal{X})$, definiendo la topología siguiente sobre $\Im(X,Y)$.

12.2.1 *Definición (topología compacta-abierta)*

Sean $(X,\mathcal{X})$, $(Y,\mathcal{Y})$ espacios topológicos. Entonces la topología $\mathcal{X}_{ca}$ sobre $\Im(X,Y)$ generada por la subbase de todos los conjuntos

$$F(K,U) := \{f \in \Im(X,Y) \mid f[K] \subset U\}(K \subset X \text{ compacto } ,U \in \mathcal{Y}) \tag{24}$$

se llama topología **compacta-abierta** sobre $\Im(X,Y)$. (Notación : $\Im_{ca}(X,Y)$.

Para todo subconjunto $H \subset \Im(X,Y)$ la topología inducida por $\mathcal{X}_{ca}$ se llama **topología compacta-abierta** sobre H y se denotará también por $\mathcal{X}_{ca}$ cuando no haya lugar a dudas.

$\rightsquigarrow$*Nota:* A pesar de la similitud existente en la notación entre los entornos $W(A,V)$ de las σ-topologías y los conjuntos $F(K,U)$, estos últimos son solamente abiertos en la topología $\mathcal{X}_{ca}$. En general no constituyen una base sino una subbase de $\mathcal{X}_{ca}$.

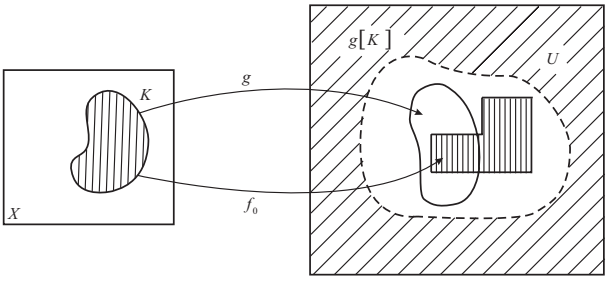


Figura 166. $g \in F(k,U)$ con $V(f_0[K])$

La idea intuitiva, precisada en la definición anterior, es la de considerar una aplicación $g : X \to Y$ 'cerca' de $f : X \to Y$ (sobre un compacto $K \subset X$) si $g[K]$ se mantiene dentro de una vecindad dada U de $f[K]$ (fig. 166).

Resulta instructivo comparar $\mathcal{X}_{ca}$ sobre $\Im(X,Y) = Y^X$ con la topología producto $\mathcal{X}_p$. Un sistema fundamental de vecindades de una función $f_0 : X \to Y$ en el espacio $\Im_p(X,Y) = Y^X$ está formado por los conjuntos:

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(\{x_i\}, U_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}[U_i] \quad (x_i \in X, U_i \in Y) \tag{25}$$

Estos conjuntos contienen todas las funciones $f : X \to Y$ que 'pasan por las puertas U_i en los puntos x_i' según nos muestra la figura 164.

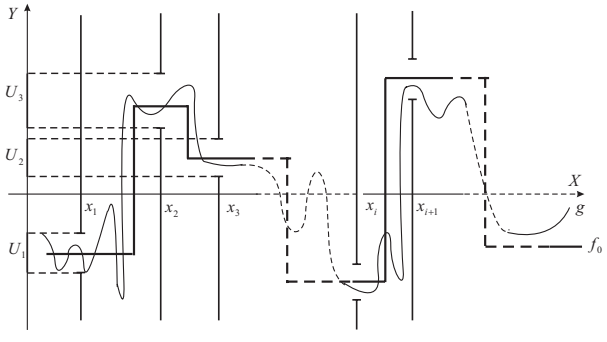


Figura 167. Función g de una vecindad de f_0 en $\mathfrak{F}_p(X,Y)$

En cambio, un sistema fundamental de vecindades de f_0 en $\Im_{ca}(X,Y)$ viene dado por los conjuntos

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(K_i, U_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{K_i \in \mathcal{X}} \pi_{K_i}^{-1}[U_i] \quad (K_i \subset X \text{ compacto})$$

$$U_i \in B_0(f[K_i]) \tag{26}$$

Como veremos en la siguiente figura, estos conjuntos contienen todas las funciones que pasan por los túneles en U_i a lo largo de los compactos K_i (fig.168).

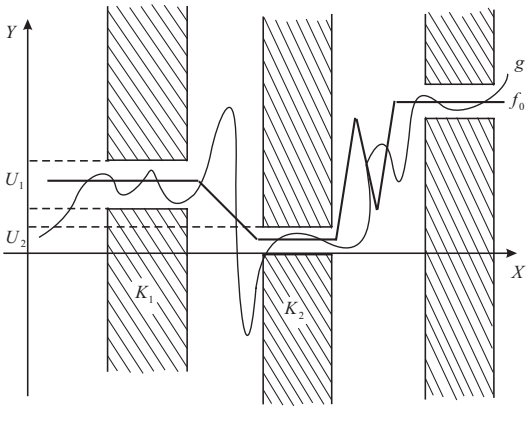


Figura 168. Función g de una vecindad de f_0 en $\mathfrak{F}_{ca}(X,Y)$

Si $(X, \mathcal{X})$ es un espacio indiscreto, entonces las topologías $\mathcal{X}_p$ y $\mathcal{X}_{ca}$ coinciden evidentemente sobre $\Im(X, Y)$.

12.2.2 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos. Entonces la aplicación $y \mapsto \langle y \rangle$ que asocia a todo $y \in Y$ la función constante $\langle y \rangle : x \mapsto y$ de X en Y es una inmersión de $(Y, \mathcal{Y})$ en $\Im_{ca}(X, Y)$.

12.2.3 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X})$ *y* $(Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos. Probar que

i) $\Im_{ca}(X, Y)$ es de Hausdorff si y sólo si $(Y, \mathcal{Y})$ es de Hausdorff.

ii) $\mathcal{F}_{ca}(X, Y)$ es regular si y sólo si $(Y, \mathcal{Y})$ es regular.
(Indicación: probar que $\overline{F(K, U)} \subset F(K, \overline{U})$)

iii) Ninguno de los axiomas T_4, AN 1, AN 2 ni la compacidad ni la conexidad se heredan de $(Y, \mathcal{Y})$ a $\Im_{ca}(X, Y)$.

12.2.4 *Teorema (de Fox)*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ *y* $(Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos y sea f una aplicación de $X \times Y$ en Z.

i) Si f es continua entonces la aplicación $\tilde{f} : y \mapsto f_y$ de $(X, \mathcal{X})$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ que asocia a cada $y \in Y$ la función parcial (continua) $f_y : x \mapsto f(x, y)$ es continua.

ii) Si $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto, entonces se tiene la equivalencia:
$f : X \times Y \to Z$ continua $\Longleftrightarrow \tilde{f} : Y \to \mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ continua.

Demostración. i) Sea f continua. Entonces $f_y \in \mathfrak{C}(X, Z)$ para todo $y \in Y$. Para probar la continuidad de $\tilde{f} : y \mapsto f_y$ en un punto $y_0 \in Y$ basta demostrar que toda vecindad de f_{y_0} en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ de la forma $F(K, U)$ contiene a una imagen $\tilde{f}[W]$ $(W \in \mathcal{V}(y_0))$. Notemos que $f_{y_0} \in F(K, U)$ significa que $K \times \{y_0\} \subset f^{-1}[U] \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Podemos entonces aplicar el teorema de Wallace (8.3.6) para afirmar que existe $W \in \mathcal{V}(y_0)$ tal que $K \times W \subset f^{-1}[U]$; entonces $\tilde{f}[W] \subset F(K, U)$.

ii) Sea $\tilde{f}$ continua y $(X, \mathcal{X})$ localmente compacto. Sean $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y U una vecindad abierta de $f(x_0, y_0)$ en $(Z, \mathcal{Z})$. Como $f_{y_0} \in \mathfrak{C}(X, Y)$, existe una vecindad compacta $K \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que $f[K \times \{y_0\}] \subset U$. Por ser $\tilde{f}$ continua existe $W \in \mathcal{V}(y_0)$ tal que $\tilde{f}[W] \subset F(K, U)$; por lo tanto $f[X \times W] \subset U$, de donde concluimos que f es continua.■

En el caso de que $(X, \mathcal{X})$ sea localmente compacto, el teorema anterior permite caracterizar la topología compacta-abierta como la topología más gruesa para la cual la aplicación evaluación es continua.

12.2.5 *Corolario (caracterización de la topología compacta abierta)*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos.

i) Toda topología $\mathcal{X}'$ sobre un subespacio $H \subset \mathfrak{C}(X, Z)$ para la cual la evaluación:
$$e : (x, u) \mapsto u(x) \text{ de } X \times H \ \ en \ \ Z$$
sea continua, es más fina que $\mathcal{X}_{ca}$.

ii) Si $(X, \mathcal{X})$ es localmente compacto, entonces $\mathcal{X}_{ca}$ es la topología más gruesa sobre H para la cual la evaluación e es continua.

Demostración.

i) Por el teorema anterior, aplicado a los espacios $(X, \mathcal{X}), (H, \mathcal{X}')$ y $(Z, \mathcal{Z})$, la continuidad de $e : X \times H \mapsto Z$ implica la continuidad de $\tilde{e} : u \mapsto e_u$ de H en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$. Pero $e_u : x \mapsto u(x)$ es igual a u. Por lo tanto, la inyección canónica $\tilde{e} : u \mapsto u$ de $(X, \mathcal{X}')$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ es continua, lo que muestra i).

ii) Sólo queda por probar que e es continua si $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{ca}$. En este caso, $\tilde{e} : u \mapsto u$ de $(H, \mathcal{X}_{ca}(X, Z))$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ es continua. Por lo tanto e también lo es (teorema 12.2.4). ■

Recomendamos al lector resolver el ejercicio siguiente, cuyo tercer enunciado puede considerarse una generalización de la caracterización ii) del corolario anterior.

12.2.6 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}), (Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos. Supongamos que para todo $f \in \Im(X, Y)$ y todo $g \in \Im(Y, Z)$ la composición $g \circ f \in \Im(X, Z)$ está definida. Probar que:

i) $g \mapsto g \circ f_0$ es una aplicación continua de $\Im_{ca}(Y, Z)$ en $\Im_{ca}(X, Z)$ para toda función $f_0 \in \Im(X, Y)$ fija.

ii) $f \mapsto g_0 \circ f$ es una aplicación continua de $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y)$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ para toda función $g_0 \in \mathfrak{C}(Y, Z)$ fija.

iii) Si $(X, \mathcal{X}), (Z, \mathcal{Z})$ son de Hausdorff e $(Y, \mathcal{Y})$ es localmente compacto entonces la aplicación $(f, g) \mapsto g \circ f$ de $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y) \times \mathfrak{C}_{ca}(Y, Z)$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ es continua.

iv) Tomando como X un conjunto unitario deducir 12.2.5 ii) de iii).

v) Dados dos espacios uniformes de Hausdorff $(X, \mathcal{U})$ $(Z, \mathcal{U}'')$ y un espacio uniforme localmente compacto $(Y, \mathcal{U}')$, son uniformemente continuas las aplicaciones definidas en i), ii) y iii), con respecto a la estructura uniforme $\mathcal{U}_c$ sobre $\Im(X, Y), \Im(Y, Z)$ y $\Im(X, Z)$.

Veremos a continuación, mediante un ejemplo, cómo el teorema 12.2.4 se aplica en la teoría de homotopía.

12.2.7 *Ejemplo*

Sean $(X, \mathcal{X})$ y $(Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos. Dos aplicaiones $f, g : X \to Z$ son homótopas si existe una aplicación continua $h : X \times [0,1] \to (Z, \mathcal{Z})$ tal que $f = h_0$ y $g = h_1$. Esto significa que existe una aplicación continua $\tilde{h} : [0,1] \to \mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$ tal que $\tilde{h}(0) = f$ y $\tilde{h}(1) = g$ (Teorema 12.2.4). Concluimos que f y g son homótopas si y sólo si pertenecen a la misma componente conexa por caminos en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Z)$.

Si Y no sólo tiene una topología sino también una estructura uniforme, entonces, además de $\mathcal{X}_{ca}$, puede definirse sobre $\Im(X, Y)$ la topología $\mathcal{X}_c$ de la convergencia uniforme sobre cada compacto. Veremos finalmente que sobre $\mathfrak{C}(X, Y)$ ambas topologías coinciden (Aunque son diferentes en general, sobre $\Im(X, Y)$). De esta forma los resultados anteriores nos proporcionan a la vez caracterizaciones y propiedades importantes para la topología $\mathcal{X}_c$.

12.2.8 *Teorema*

Sean $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces la topología compacta-abierta $\mathcal{X}_{ca}$ y la topología de la convergencia compacta $\mathcal{X}_c$ coinciden sobre $\mathfrak{C}(X, Y)$.

Demostración. Probaremos primero que toda vecindad W de una función f_0 en $\mathfrak{C}_c(X, Y)$ es una vecindad de f_0 en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y)$. Existe un compacto $K \subset X$ y un entorno simétrico $V \in \mathcal{U}$ tal que $\{f \in \mathfrak{C}(X, Y) \mid (f(x), f_0(x)) \in V. \forall\, x \in K\} \subset W$ entonces podemos suponer que W tenga esta forma. Además, existe un entorno abierto simétrico $U \in \mathcal{U}$ tal que $\overset{3}{U} \subset V$. Por ser $f_0 \mid K : K \to Y$ uniformemente continua, existe una cubierta finita de K por compactos K_i $(i = 1, ..., n)$ tal que $f[K_i]$ es pequeño de orden U para todo $i = 1, ..., n$. Los abiertos $U_i = U(f_0[K_i]) \in \mathcal{V}(f_0[K_i])$ son pequeños de orden $\overset{3}{U}$. Por otra parte $\bigcap_{i=1}^{n} F(K_i, U_i)$ es una vecindad de f_0 en $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y)$. Si $f \in \bigcap_{i=1}^{n} F(K_i, U_i)$, entonces $(f_0(x), f(x)) \in U_i \times U_i \subset \overset{3}{U} \subset V$ para todo $x \in K_i$ $(i = i, ..., n)$. Puesto que los K_i recubren K, concluimos que $f \in W(f_0)$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} F(K_i, U_i) \subset W(f_0)$.

Veremos ahora que toda vecindad de la forma $F(K, U) \in \mathcal{V}(f_0)(K \subset X)$ compacto $U \in \mathcal{X}_u)$ en $\mathfrak{C}_{ca}(X.Y)$ es vecindad de f_0 en $\mathfrak{C}_c(X.Y)$. Sabemos que existe un entorno simétrico $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(f_0[K]) \subset U$. Sea $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ tal que $(f, f_0) \in W(K, V)$. Entonces $(f(x), f_0(x)) \in \mathcal{V}$ para todo $x \in K$. Entonces $f[K] \subset V(F_0[K]) \subset U$. Esto prueba que $W(K, V)(f_0) \cap \mathfrak{C}(X, Y) \subset F(K, U)$.■

Del teorema anterior y del ejemplo 12.1.7 se deduce inmediatamente el siguiente criterio de metrizabilidad para $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y)$.

12.2.9 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio localmente compacto numerable al infinito y sea (Y, d) un espacio métrico. Entonces $\mathfrak{C}_{ca}(X, Y)$ es metrizable.

La siguiente figura nos muestra gráficamente el método de demostración utilizado en el teorema 12.2.8, además, de una manera significativa, nos pone de manifiesto la relación existente entre las topologías $\mathcal{X}_{ca}$ y $\mathcal{X}_c$.

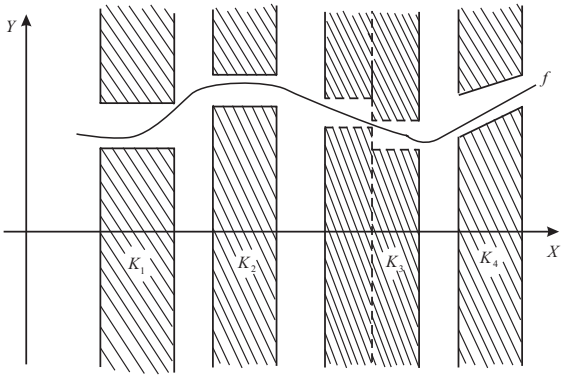


Figura 169.

Los túneles paralelos 1 y 2 representan vecindades de $f \in \mathcal{X}_{ca}$, mientras que en $\mathcal{X}_c$ también puede haber túneles inclinados (3 y 4), por los cuales pasan funciones que se acercan uniformemente a f sobre K_3 y K_4.
Para probar que $\mathcal{X}_c \subset \mathcal{X}_{ca}$ se construyen los K_i del teorema 12.2.8 siguiendo el procedimiento dibujado en el túnel 3, de manera que f pase también por una sucesión de túneles consecutivos con lados paralelos a X.

§ 12.3 **Subconjuntos compactos en $\mathfrak{C}(X, Y)$**

El teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual describe los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$, es uno de los teoremas topológicos fundamentales del Análisis elemental. En general, siempre que se quieren aplicar los resultados de la topología general a espacios topológicos concretos, se necesitan caracterizaciones específicas de sus subconjuntos compactos. El objetivo fundamental de esta sección es el de caracterizar a los subconjuntos compactos de $\mathfrak{C}_c(X, Y)$.

El criterio que estableceremos se basa en la noción de equicontinuidad.

12.3.1 *Definición (conjunto equicontinuo)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un subconjunto $H \subset \Im(X, Y)$ se llama **equicontinuo** en $x \in X$ si para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe una vecindad $U_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que para todo $f \in H$ se cumple

$$y \in U_x \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V \tag{27}$$

H se llama **equicontinuo** si es equicontinuo en todo $x \in X$.

$\rightsquigarrow$ La definición muestra que todas las funciones de un conjunto equicontinuo $H \subset \Im(X, Y)$ son continuas. Pero el inverso no se cumple. Los subconjuntos $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ en general no son equicontinuos. Si $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$, entonces existe, para toda función $f \in H$ individualmente, una vecindad $U_f \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que se cumple (31). Sin embargo las vecindades en general no contienen una vecindad común $U \subset U_f$ $(f \in H)$.

12.3.2 *Ejemplo*

Todo conjunto finito $G \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ es equicontinuo.

12.3.3 *Ejemplo*

Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios seudométricos. Una función $f : X \to Y$ se llama **lipschitziana de razón** $k > 0$ si $d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Todo conjunto de funciones lipschitzianas de razón $k > 0$ es equicontinuo. Las gráficas siguientes de subconjuntos $\mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ilustran bien la diferencia entre conjuntos equicontinuos, y conjuntos de aplicaciones continuas que no son equicontinuos.

12.3.4 *Ejemplo*

i) $H = \{f_b \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f_b(x) = ax+b, b \in \mathbb{R}\}$ para a prefijado, es equicontinuo.

ii) $H = \{f_a \mid f_a(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}\}$ para b prefijado, no es equicontinuo.

iii) $H = \{f_a \mid f_a(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}|a| \leq M\}$ para cualquier número fijo $M > 0$, es equicontinuo.

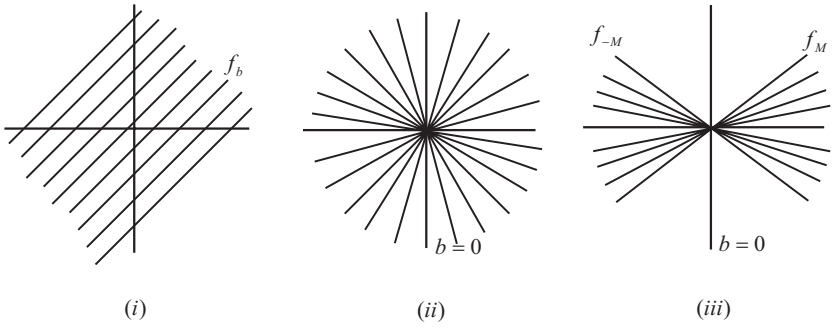


Figura 170.

Con la orientación gráfica del ejemplo anterior, será fácil para el lector resolver el siguiente ejercicio.

12.3.5 *Ejercicio*

Probar que:

i) $H = \{f_\alpha \in \mathfrak{C}([1, \infty), \mathbb{R}) \mid f_\alpha(x) = x^\alpha; \alpha \leq 1\}$ es equicontinuo.

ii) $H = \{f_\alpha \in \mathfrak{C}([1, \infty), \mathbb{R}) \mid f_\alpha(x) = x^\alpha; \alpha > 1\}$ no es equicontinuo.

Observemos que la equicontinuidad es una propiedad definida independientemente de la topología sobre H y sólo depende de la topología de X y de la estructura uniforme de Y. Pero como las topologías de uso práctico sobre H están comúnmente relacionadas de alguna manera con las de X y Y, existe de hecho una relación entre la equicontinuidad y dichas topologías que se pone de manifiesto para la topología $\mathcal{X}_c$, como nos muestran los resultados siguientes.

12.3.6 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y sea $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Si $H \subset \Im(X, Y)$ es equicontinuo en $x_0 \in X$, entonces la adherencia $\overline{H^p}$ de H en $\Im_p(X, Y)$ es también equicontinua en x_0.

Demostración. Sea W un entorno cerrado simétrico de $(Y, \mathcal{U})$ y $g \in \overline{H^p}$. Por ser H equicontinuo existe una vecindad $U \in \mathcal{V}(x_0)$ en $(X, \mathcal{X})$ tal que $(f(x), f(x_0)) \in W$ para todo $x \in U$ y todo $f \in H$; en particular para toda $f \in (f(x), f(x_0)) \in \mathcal{V}_p(g) \cap H$. Pasando al límite puntual en este filtro se tiene que $f(x_0) \to g(x_0)$ y $f(x) \to g(x)$ donde $x \in U$ arbitrario, pero fijo. Entonces $(f(x), g(x_0)) \in W$ por ser W cerrado.■

Aplicando la proposición anterior, obtenemos conjuntos equicontinuos más amplios a partir de un conjunto equicontinuo dado.

12.3.7 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normado y $H \subset \Im(X, E)$ un conjunto equicontinuo. Entonces la envoltura convexa cerrada $\overline{c(H)}$ en el espacio vectorial topológico $\Im_\rho(X, E)$ es equicontinua.

12.3.8 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $H \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ un conjunto equicontinuo. Entonces el conjunto formado por todos los supremos e ínfimos finitos de funciones de H y todos los límites puntuales finitos de filtros sobre H es también equicontinuo.

12.3.9 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ equicontinuo. Entonces:

i) La aplicación $e : (x, f) \mapsto f(x)$ de $X \times H$ en Y es continua si proveemos a H de la topología $\mathcal{X}_p$.

ii) $\mathcal{X}_p$ y $\mathcal{X}_c$ coinciden sobre H.

Demostración. ii) se concluye de i) por 12.2.5 y 12.2.8, puesto que $\mathcal{X}_p \subset \mathcal{X}_c$.

i) Sea $f_0 \in H, x_0 \in X$ y $W \in \mathcal{U}$ arbitrario. Existe $\tilde{W} \in \mathcal{U}$ simétrico tal que $\tilde{W} \circ \tilde{W} \subset W$. Por definición de $\mathcal{X}_p$ existe una vecindad V de f_0 en $(H, \mathcal{X}_p)$ tal que $f(x_0) \in \tilde{W}(f_0(x_0))$ para todo $f \in V$. Por la equicontinuidad de H existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que

$$(f(x), f(x_0)) \in \tilde{W} \text{ para todo } f \in H.$$

Concluimos que

$$(f(x), f_0(x_0)) = (f(x),\ f(x_0)) \circ (f(x_0), f_0(x_0)) \in \tilde{W} \circ \tilde{W} \subset W \tag{28}$$

o sea

$$e(x, f) = f(x) \in W(f_0(x_0))$$

para todo $f \in V$ y $x \in U$. Entonces existen, para todo $W \in \mathcal{U}$, vecindades $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}_p(f_0)$, tales que $e[U \times V] \subset W((x_0, f_0))$.■

12.3.10 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ equicontinuo. Entonces la adherencia de H en $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}(X, Y)$ respecto a la topología de la convergencia puntual es igual a la adherencia de H en $\mathfrak{C}_c(X, Y)$ con respecto a la topología de la convergencia compacta.

Demostración. Sea $\overline{H^p}$ la adherencia de H en $\Im_p(X, Y)$. $\overline{H^p}$ es equicontinuo por 11.3.6 La adherencian $\overline{H^c}$ de H en $\mathfrak{C}_c(X, Y)$ está contenida en $\overline{H^p}$. Por otro lado, por la proposición anterior, la topología $\mathcal{X}_c$ coincide con $\mathcal{X}_p$ sobre $\overline{H^p}$. Entonces $\overline{H^p} = \overline{H^c}$.■

De los resultados anteriores se deduce, mediante el teorema de Tikhonov, un primer criterio suficiente para la compacidad de $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$.

12.3.11 *Corolario (Ascoli)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ equicontinuo. Entonces, si $H(x)$ es relativamente compacto en $(Y, \mathcal{X}_U)$ para cada $x \in X$, se tiene que H es relativamente compacto en $\mathfrak{C}_c(X, Y)$.

Demostración. H como subespacio de $\Im(X, Y) = Y^X$, está contenido en $\prod\{\overline{H(x)} \mid x \in X\} \subset Y^X$. Por el teorema de Tikhonov, el subespacio producto $\prod\{\overline{H(x)} \mid x \in X\}$ en $\Im_{\mathcal{P}}(X, Y)$ es compacto (con respecto a la topología $\mathcal{X}_P$). Por lo tanto, la adherencia $\overline{H^P}$ de H en $\Im_{\mathcal{P}}(X, Y)$ es compacta. De los dos resultados anteriores se desprende que $\overline{H^c} = \overline{H^P}$ es compacta con respecto a $\mathcal{X}_c$.■

Bajo una hipótesis más fuerte sobre $(X, \mathcal{X})$, obtenemos una caracterización completa de los subconjuntos relativamente compactos de $\mathfrak{C}_c(X, Y)$.

12.3.12 *Teorema (de Ascoli)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio localmente compacto y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme de Hausdorff. Entonces, para $H \subset \mathfrak{C}(X, Y)$, son equivalentes las propiedades siguientes:

i) H es relativamente compacto en $\mathfrak{C}_c(X,Y)$.

ii) H es equicontinuo y, para todo $x \in X$, el conjunto $H(x) \subset Y$ es relativamente compacto.

Demostración. ii) $\Longrightarrow$ i) es una consecuencia inmediata de 12.3.11.
i) $\Longrightarrow$ ii). Sea $H \subset \mathfrak{C}_c(X,Y)$ relativamente compacto y $\overline{H}$ su adherencia compacta. $\overline{H}(x)$ es la imagen del compacto $\overline{H}$ por la aplicación continua $f \mapsto f(x)$ de $\mathfrak{C}_c(X,Y)$ en Y, luego es compacto (y cerrado). Por tanto $\overline{H(x)} \subset \overline{H}(x)$ es compacto.

Queda por probar que H es equicontinuo en cualquier punto $x_0 \in X$. Sea $V \in \mathcal{U}$ un entorno simétrico cualquiera y sea K una vecindad compacta de x_0. Por ser H relativamente compacto existe una cubierta finita $(H_1, ..., H_n)$ de H formada por partes pequeñas de orden $W(K,V)$. De cada H_i seleccionamos una función $f_i \in H_i$ $(i = 1, ..., n)$. Existe una vecindad U de x_0 en $(X, \mathcal{X})$ tal que $(f_i(x), f_i(x_0)) \in V$ para todo $x \in U$, por ser el conjunto finito $\{f_1, ..., fn\} \subset \mathfrak{C}(X,Y)$ equicontinuo. Para todo $h \in H$ existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $(f_i(x), h(x)) \in V$ sobre K. Entonces se cumple que:

$$(h(x_0), h(x)) = (h(x_0), f_i(x_0)) \circ (f_i(x_0), f_i(x)) \circ (f_i(x), h(x)) \in \overset{3}{V} \qquad (29)$$

para todo $x \in U$. Puesto que los conjuntos $\overset{3}{V}$ $(V = V^{-1} \in \mathcal{U})$ forman un sistema fundamental de entornos de $\mathcal{U}$, (29) significa que H es equicontinuo sobre x_0.■

En forma de ejemplos, daremos ahora algunos casos particulares para la aplicación del teorema de Ascoli.

12.3.13 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ localmente compacto e $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme de Hausdorff. Entonces, sobre todo subconjunto equicontinuo $H \subset \mathfrak{C}(X,Y)$, todas las topologías de σ-convergencia más finas que $\mathcal{X}_p$ son iguales. O sea H es relativamente compacto en $\mathfrak{C}_u(X,Y)$, con respecto a la topología de la convergencia uniforme, si y sólo si H es equicontinuo y $H(x) \subset Y$ es relativamente compacto para todo $x \in X$.

12.3.14 *Ejemplo*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto e (Y, U) un espacio uniforme T_2-compacto. Entonces los subconjuntos relativamente compactos en $\mathfrak{C}_c(X,Y)$ coinciden con los subconjuntos equicontinuos.

12.3.15 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio localmente compacto, numerable al infinito. Probar que si H es un subconjunto *equicontinuo y puntualmente acotado* de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ (es decir, $H(x) \subset \mathbb{R}$ acotado para todo $x \in X$), entonces toda sucesión (f_n) de funciones $f_n \in H$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre

todo compacto a una función continua $f : X \to Y$ (es decir: $\overline{H}$ es compacto y sucesionalmente compacto con respecto a $\mathcal{X}_c$).

Si $(X, \mathcal{X})$ es además conexo, basta que para un punto $x_0 \in X$, $H(x_0)$ sea acotado:

12.3.16 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio localmente compacto conexo. Probar que $H \subset \mathfrak{C}_c(X, \mathbb{R})$ es relativamente compacto si y sólo si H es equicontinuo y existe un punto $x_0 \in X$ tal que $H(x_0) \subset Y$ es acotado.

Concluimos esta sección con dos aplicaciones del teorema de Ascoli al análisis complejo y a la teoría de ecuaciones diferenciales.

Aplicación 1: Caracterización de las familias normales

Sea U un abierto en el plano complejo y $\mathcal{H}_c(U)$ el espacio vectorial complejo de todas las funciones holomorfas $h : U \to \mathbb{C}$ provisto de la topología de la convergencia compacta. Por 12.1.7., $\mathcal{H}_c(U)$ es metrizable.

Un subconjunto $A \subset \mathcal{H}_c(U)$ se llama **acotado**, si es uniformemente acotado sobre todo compacto K contenido en U, o sea $\cup\{A(x) \mid x \in K\}$ es acotado en $\mathbb{C}$ para todo compacto $K \subset U$.

Un subconjunto $H \subset H_c(U)$ se llama **familia normal** (de **Martel**) si toda sucesión de funciones de H contiene una subsucesión que converge uniformemente sobre todo compacto $K \subset U$ a una función holomorfa $h \in H$. Es decir, H es una familia normal si y sólo si H es compacta. La caracterización siguiente es el teorema fundamental de la teoría de las familias normales.

12.3.17 *Teorema*

$H \subset H_c(U)$ es normal si y sólo si es cerrado y acotado con respecto a la topología de la convergencia compacta.

Demostración. Las condiciones impuestas son evidentemente necesarias ya que si H es normal la evaluación $e : (x, f) \mapsto f(x)$ de $U \times H$ en $\mathbb{C}$ es continua (por 12.3.9). Entonces la imagen $e[K \times H] = \cup\{H(x) \mid x \in K\}$ es compacta para todo compacto $K \subset U$.
Inversamente, sea $H \subset \mathcal{H}_c(U)$ acotado. Por el teorema de Ascoli, basta probar que H es equicontinuo para completar la demostración.

Sea z_0 un punto cualquiera de U y sea $K = K(z_0, r)$ un cuadrado de centro z_0 y de lado $4r > 0$ tal que $K \subset U$. Entonces para dos puntos $z', z'' \in \overset{\circ}{K}$ y para toda función $f \in H$, se cumple, por la fórmula de Cauchy,

$$f(z'') - f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{\xi - z''} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi$$

Si $M = \sup\{| \ f(z) \ | \ | z \in \partial K \wedge f \in H\}$ y si $z\prime$, z" varían en el disco $D = \{z \in \mathbb{C}| \ | z - z_0 \ | \leq r\}$ entonces $| \ \xi - z' \ | \geq r$ y $| \ \xi - z'' \ | \geq r$ para todo $\xi \in \partial K$, entonces

$$| \ f(z'') - f(z') \ | \leq \frac{16M}{\pi r} \ | \ z'' - z' \ |,$$

de donde se concluye la equicontinuidad de H (fig. 171).

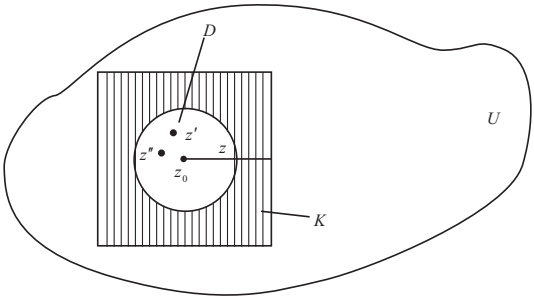


Figura 171.

Aplicación 2. Teorema de existencia de Peano

En el capítulo anterior demostramos el teorema fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, que afirma la *existencia* y *unicidad* de la solución para el caso en que la función f en la ecuación

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

sea lipschitziana.

La existencia puede probarse también bajo la hipótesis más débil de que f solamente es continua. Este resultado constituye un segundo teorema fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

12.3.18 *Teorema (Peano)*

Sea:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \tag{30}$$

una ecuación diferencial dada.

Si la función f es continua en un abierto $G \subset \mathbb{R}^2$, entonces existe para cada punto $(x_0, y_0) \in G$ un intervalo $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ y una función derivable $\varphi : J \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) \text{ para todo x} \in J \text{ y } \varphi(x_0) = y_0 \tag{31}$$

Demostración. Podemos suponer que $| \ f(x, y) \ | < M$ para $(x, y) \in G$ (si no, consideramos f definida solamente sobre una bola de centro (x_0, y_0) cuya cerradura esté contenida en G).

Tracemos por el punto (x_0, y_0) las rectas con pendiente M y $-M$. Tracemos, además, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ de manera que los dos triángulos

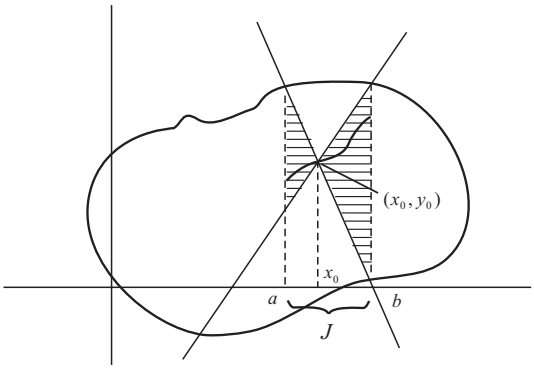


Figura 172.

con vértice común en (x_0, y_0) que ellas producen pertenezcan íntegramente a la región G.

Construyamos ahora para la ecuación dada los llamados **polígonos de Euler** del siguiente modo: tracemos por el punto (x_0, y_0) la recta de pendiente $f(x_0, y_0)$. Tomemos en esta recta un punto (x_1, y_1) y tracemos a través de él una recta de pendiente $f(x_1, y_1)$. En esta recta tomemos un punto (x_2, y_2) y tracemos una recta de pendiente $f(x_2, y_2)$, etc. Consideremos ahora una sucesión de polígonos de Euler L_k que pasen por el punto (x_0, y_0) y tales que la longitud del mayor de los eslabones de la curva poligonal L_k tienda a cero cuando $k \to \infty$. Sea φ_k la función cuya gráfica es la curva L_k. Las funciones φ_k $(k \in \mathbb{N})$ cumplen:

1. Están definidas en un mismo segmento $[a, b]$.

2. Tienen una cota superior y una cota inferior común.

3. Forman un conjunto equicontinuo $H \subset \mathfrak{C}_a([a, b], \mathbb{R})$.

Por el ejerccicio 12.3.15, $\overline{H}$ es sucesionalmente compacto con respecto a la topología de la convergencia uniforme. Por lo tanto existe una subsucesión (φ_{nk}) de (φ_k) uniformemente convergente. Un cálculo un poco complicado aunque rutinario muestra que el límite uniforme.

$$\varphi = \lim(\varphi_{nk})$$

verifica la ecuación diferencial (30) y la condición inicial $\varphi(x_0) = y_0$.

Diferentes subsucesiones de (φ_k) pueden converger a diferentes soluciones de la ecuación (30). Por eso la solución no está determinada de manera única. ■

§ 12.4 **Aproximación de funciones reales continuas**

Daremos en esta sección una primera introducción a problemas de aproximación exponiendo una serie de resultados básicos sobre la aproximación de funciones reales continuas, junto con algunas aplicaciones al problema de aproximación de funciones complejas continuas. Estudiaremos solamente problemas de aproximación *uniforme* sobre un espacio *compacto* dado $(X, \mathcal{X})$, es decir, limitaremos nuestras consideraciones al espacio $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{C}_w(X, \mathbb{C})$, de las

funciones reales (resp. complejas) continuas sobre el compacto $(X, \mathcal{X})$ provisto de la norma $\| f \| = \| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in X\}$.

Veremos que el problema propiamente topológico de la aproximación en $(\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ está fuertemente ligado a la estructura algebraica y al orden de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$, lo cual no es más que un reflejo de las correspondientes estructuras en $\mathbb{R}$.

Como consecuencia de la proposición y de la aplicaciones 2 y 3 en la § 12.1, se obtienen los resultados siguientes:

12.4.1 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto. Entonces $(\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ (resp. $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$ es un álgebra real (resp. compleja) completa bajo las siguientes definiciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) || x \in X\}$$

(Obsérvese que $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \subset B(X, \mathbb{R})$ y que $\| \cdot \|_\infty$ define la estructura uniforme de la convergencia uniforme sobre X).

12.4.2 *Proposición*

$\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ es una retícula para el orden inducido por el orden producto.

$$f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$$

Para $f, g \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ se tiene en $(\mathfrak{C}(X, \mathbb{R}), \leq)$ que $\text{ínf}(f, g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ y

$$\sup(f, g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}; \forall x \in X.$$

Para estructurar mejor la materia, bastante compleja, de esta sección, subdividimos lo que sigue en secciones cuyo contenido se señala en sus propio subtítulos.

Envolturas superiores e inferiores de funciones reales continuas

El teorema que expondremos a continuación es una muestra de la relación que existe entre el orden y la aproximación sobre $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

Sabemos que en general la envoltura superior $h = \sup H$ de funciones reales continuas sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es una función solamente semicontinua inferiormente (2.4.22) con valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Sabemos además que h es continua siempre que sea límite uniforme de funciones de H. El *inverso* se mantiene si $(X, \mathcal{X})$ es *compacto y H es filtrante superiormente.*

12.4.3 *Teorema (Dini)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto y $H \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ filtrante superiormente (resp. inferiormente). Si $f = \sup H$ (resp. $f =$ínf H) entonces puede aproximarse uniformemente por funciones de H.

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in X$ existe $u_x \in H$ tal que

$$f(x) - \varepsilon < u_x(x)$$

Para cada $x \in X$ sea Vx una vecindad abierta de x tal que la desigualdad se cumpla para todo $y \in U_x$. Un número finito de V_{x_i} $(i = 1, ..., n)$ recubre el compacto X. Por ser H filtrante superiormente existe $h \in H$ tal que $u_{x_i} \leq h$ para $i = 1, ..., n$. Tenemos:

$$f(y) - \varepsilon < u_{x_i}(y) \leq h(y) \leq f(y)$$

$\forall\ y \in V_{x_i}$ $(i = 1, ..., n)$. Puesto que los V_{x_i} recubren X, se concluye que $\| \sup H - h \|_\infty < \varepsilon$ con lo que queda probado el teorema. ■

En particular para sucesiones se tiene el siguiente corolario.

12.4.4 *Corolario*

Sea (h_n) una sucesión creciente (resp. decreciente) de funciones continuas de un compacto $(X, \mathcal{X})$ en $\mathbb{R}$. Si la envoltura $f = \sup(h_n)$ (resp.$f =$ínf(h_n)) es finita y continua sobre X entonces (h_n) converge uniformemente a f sobre X.

El contraejemplo siguiente muestra que las condiciones de que $(X, \mathcal{X})$ sea compacto y de que f sea continua son ambas indispensables para que se cumpla la conclusión del teorema de Dini.

12.4.5 *Contraejemplo*

i) La sucesión (h_n) de las funciones $h_n : x \mapsto x^{1/n}$ de $[1, \infty)$ en $\mathbb{R}$ decrece puntualmente a la función constante (luego continua) $\langle 1 \rangle =$ ínf(h_n), pero no uniformemene. El intervalo $[1, \infty)$ no es compacto.

ii) La sucesión (h_n) de las funciones $h_n : x \mapsto x^n$ sobre el intervalo compacto $[0, 1]$ decrece puntualmente a la función $f =$ ínf(hn) : $x \mapsto 0$ si $x \neq 1$ $(1 \mapsto 1)$, pero no uniformemente pues f es semicontinua superiormente, pero no es continua (fig.173).

El teorema de Dini es un teorema con un enfoque completamente del análisis, pues nos sirve para determinar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones *dada*, a una cierta función límite. Cambiaremos ahora de enfoque.

Adoptando el punto de vista característico del *análisis funcional* estudiaremos todos los límites uniformes de sucesiones de un *conjunto* dado H de funciones

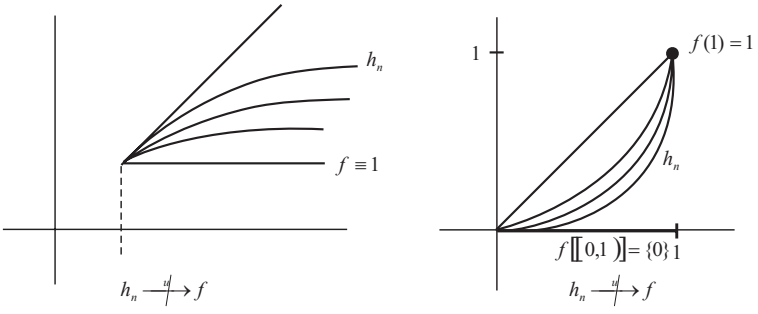


Figura 173.

reales continuas sobre $(X, \mathcal{X})$, o sea estudiaremos la cerradura de H en $(\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$.

Tres problemas de aproximación uniforme

Comenzaremos precisando los tipos de problemas que vamos a analizar. Sea $H \subset (\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

Primer problema: ¿Cuándo es posible aproximar uniformemente una función continua f por funciones pertenecientes al conjunto H? Es decir, ¿Cuándo $f \in \overline{H}$ en $(\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$? .

Segundo problema: ¿Cuándo es posible aproximar uniformemente una función continua f por combinaciones lineales de funciones de H? Es decir ¿Cuándo $f \in \overline{L(H)}$ en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ donde $L(H)$ es el subespacio lineal de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ generado por H? .

Tercer problema: ¿Cuándo es posible aproximar uniformemente una función f por polinomios de funciones de H ? Es decir ¿Cuándo $f \in \overline{A(H)}$ en $(\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ donde $A(H)$ es el álgebra generada por H en $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$?.

Para resolver estos problemas son importantes los siguientes conceptos que establecen un vocabulario descriptivo de conjuntos de funciones. Estos conceptos no están expresamente construidos para funciones continuas, aunque son éstas las que nos ocupan de momento.

12.4.6 *Definición (ceros de un conjunto de funciones)*

Sea X un conjunto y $H \subset \Im(X, \mathbb{R})$. Decimos que $x \in X$ es un **cero del conjunto** H si $h(x) = 0$ para todo $h \in H$. El conjunto de todos los ceros de H se denota por Z_H.

12.4.7 *Definición (conjunto separante)*

Sean X, Y dos conjunots y $H \subset \Im(X, Y)$. Decimos que H **separa al par** $(x, y) \in X^2$ cuando existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Denotamos por R_H al conjunto de todos los pares $(x, y) \in X^2$ que no son separados por H.

$$R_H = \{(x, y) \in X^2 \mid \forall h \in H : h(x) = h(y)\} \tag{32}$$

H se llama separante si $R_H = \triangle_X$ o sea para todo par $(x, y) \in X^2, x \neq y$ existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$.

Resulta evidente que $R_H \subset X^2$ es una relación de equivalencia sobre X:

$$xR_H y \Longleftrightarrow \forall h \in H : h(x) = h(y) \tag{33}$$

H es separante si y sólo si R_H es la relación identidad.

12.4.8 *Ejemplo*

Un conjunto unitario $\{f\} \subset \Im(X, \mathbb{R})$ es separante si y sólo si f es inyectiva.

12.4.9 *Ejemplo*

Si $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular entonces el conjunto $\mathfrak{C}(X, [0, 1]) \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ es separante.

Una noción más fuerte que separante es la siguiente:

12.4.10 *Definición (arbitrariamente separante)*

$H \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, se llama **arbitrariamente separante** si para todo par $(x_1, x_2) \in X^2 \backslash \triangle_X$ y todo par $(y_1, y_2) \in Y^2 \backslash \triangle_Y$ existe $h \in H$ tal que $h(x_1) = y_1$ y $h(x_2) = y_2$.

12.4.11 *Ejemplos*

i) El conjunto $P \subset \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones polinomiales de una variable es arbitrariamente separante.

ii) El conjunto de las funciones afines $x \mapsto ax + b$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $\mid a \mid \leq k$ ($k > 0$ fijo) y $b \in \mathbb{R}$ es separante, pero no es arbitrariamente separante.

En las secciones siguientes se confirmará de nuevo la importancia que tiene el concepto de separación para la existencia de funciones reales continuas (compárese con cap.7), en este caso para la existencia de aproximaciones uniformes de una función dada f por funciones $h \in H$.

Resultados relacionados con el primer problema

La *demostración* del teorema de Dini nos sugiere el siguiente resultado.

12.4.12 *Lema (fundamental)*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto, H una subretícula de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada par $(x, y) \in X^2$ existe una función $h_{x,y} \in H$ tal que

$$h_{x,y}(y) < f(y) + \varepsilon \ \wedge \ f(x) - \varepsilon < h_{x,y}(x) \tag{34}$$

entonces f puede aproximarse uniformemente por funciones de H, es decir $f \in \overline{H^u}$ en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos primeramente $x \in X$. Para cada $y \in X$:

$$U_y := \{z \in X \mid f(z) - \varepsilon < h_{x,y}(z)\}$$

es una vecindad de $y \in X$. Por la compacidad de $(X, \mathcal{X})$ existe una familia finita de $U_{y_i} (i = 1, ..., n)$ que recubre X.

Pongamos $h_x = \sup \{h_{x,y_i} \mid i = 1, ..., n\}$. Claramente h_x está en H por ser H una subretícula de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$, además cumple que:

$$f(z) - \varepsilon < h_x(z) \text{ para todo } z \in X$$

Ahora bien, nuestra x fijo también satisface $h_x(x) < f(x) + \varepsilon$ pues para cada h_{x,y_i} se tiene $h_{x,y_i}(x) < f(x) + \varepsilon$. Podemos por tanto repetir el procedimiento anterior. De esta forma para cada $x \in X$ existe un h_x tal que $h_x(x) < f(x) + \varepsilon$ y además $f(z) - \varepsilon < h_x(z)$ para todo $z \in X$. Sea U_x el abierto $\{z \in X \mid h_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Por la compacidad de $(X, \mathcal{X})$ existe una subcubierta finita $\{U_{x_i} \mid i = 1, ..., m\}$ de X.

Poniendo $h = \text{ínf}\{h_{x_i,} \mid i = 1, ..., m\}$ obtenemos simultaneamente $f(z) - \varepsilon < h(z) < f(z) + \varepsilon$ para toda $z \in X$.■

La condición encontrada aquí es núcleo de todos los resultados restantes. De inmediato es posible obtener los dos siguientes corolarios. El primero de ellos nos identifica completamente la cerradura de H en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ en términos de la convergencia puntual.

12.4.13 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto. Para toda subretícula H de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ la cerradura $\overline{H^u}$ en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ y la cerradura $\overline{H^p}$ en $\mathfrak{C}_p(X, \mathbb{R})$ coinciden. Es decir, toda función real continua sobre X que pueda aproximarse puntualmente por funciones de H, puede también aproximarse uniformemente por funciones de H.

Demostración. Si $f \in \overline{H^p}$ entonces existe, para todo $\varepsilon > 0$ y todo par $(x, y) \in X^2$, una función $h_{x,y} \in H$ que aproxima a f en los puntos x y y con un error de aproximación menor que ε. Entonces f y h cumplen la hipótesis del lema anterior.■

$\rightsquigarrow$Esta proposición tiene cierta similitud con el resultado 12.3.10 que conduce al teorema de Ascoli. Sin embargo, hay que destacar una diferencia esencial. La cerradura $\overline{H^p}$ de H con respecto a la topología de la convergencia puntual se toma aqui dentro del espacio $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y no en el espacio más amplio $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ como sucede en 12.3.10. Esto es necesario, porque puede ser que H no sea equicontinuo.

Como segundo corolario del lema fundamental obtenemos un criterio suficiente para que toda función real continua sobre $(X, \mathcal{X})$ pueda aproximarse uniformemente por funciones de H.

12.4.14 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto. Entonces toda subretícula arbitrariamente separante de $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ es denso en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$.

Más explícitamente, esto significa que si H tiene las dos propiedades siguientes:

i) $f, g \in H \Rightarrow \text{ínf}(f, g) \in H \ \wedge \ \sup(f, g) \in H$.

ii) Para todo par $(x, y) \in X^2$ y todo par de números $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ existe $h_{x,y} \in H$ tal que
$$h_{x,y}(x) = \alpha \ \wedge \ h_{x,y}(y) = \beta,$$
entonce toda función $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ puede aproximarse uniformemente por funciones de H. En las secciones siguientes estudiaremos condiciones más sencillas de comprobar, que implican i) y ii) y permiten aplicar este resultado a muchos espacios funcionales concretos.

Resultados relacionados con el problema segundo

Si H es un subespacio lineal de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ la condición de 'ser una subretícula' adquiere una expresión más operativa gracias al lema siguiente.

12.4.15.*Lema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y H un subespacio vectorial de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Entonces H es una subretícula si y sólo si para todo $h \in H$ se tiene $\mid h \mid \in H$.

Demostración: Si H es una subretícula, entonces $\mid h \mid = \sup\ (h, -h)$ está en H.
Inversamente, sean $f, g \in H$, entonces

$$\sup(f, g) = 1/2(f + g + \mid f - g \mid)$$
$$\text{ínf}(f, g) = 1/2(f + g - \mid f - g \mid)$$

se encuentran en H.■

De la misma forma la propiedad de ser *arbitrariamente separante* se reduce a la propiedad de ser *separante* si $H \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial que contiene las constantes. Esto es la idea básica en la demostración del siguiente:

12.4.16 *Teorema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto, $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y H un subespacio vectorial de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ que contiene las constantes y es cerrado para la aplicación $h \mapsto \mid h \mid$. Entonces

$$f \in \overline{H^u} \Longleftrightarrow R_H \subset R_f \tag{35}$$

Es decir: $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ puede aproximarse uniformemente por funciones de H si y sólo si todo par $(x, y) \in X^2$ separado por f es también separado por H.

Demostración. la implicación $\Rightarrow$ es evidente.
$\Longleftarrow$: Supongamos que $R_H \subset R_f$ para $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Según el lema anterior

H es una subretícula de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$. Verifiquemos la hipótesis (34) del lema fundamental. Sea $(x,y) \in R_H$, o sea tal que $f(x) = f(y)$. Entonces la función $h_{x,y} = f(x)\langle 1\rangle = f(y)\langle 1\rangle$ cumple (34) idénticamente para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $(x,y) \in X^2 \setminus R_H$. Entonces existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Definiendo $h_{x,y} \in H$ por

$$h_{x,y}(z) = \frac{f(y)}{h(y)-h(x)}[h(z)-h(x)] + \frac{f(x)}{h(y)-h(x)}[h(y)-h(z)] \tag{36}$$

se cumple $h_{x,y}(x) = f(x)$ y $h_{x,y}(y) = f(y)$, entonces $h_{x,y}$ cumple (34) igualmente para todo $\varepsilon > 0$. Con esto quedan probadas las hipótesis del lema fundamental para f y H de donde concluimos que $f \in \overline{H^u}$.■

12.4.17 *Corolario (teorema de Stone)*

Sea $(X,\mathcal{X})$ compacto y sea H un subespacio vectorial de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ tal que:

i) Las funciones constantes pertenecen a H.

ii) Si $h \in H$ entonces $\mid h \mid \in H$.

H separa los puntos de X.
Entonces cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ puede aproximarse uniformemente por funciones de H.

Resultados relacionados con el tercer problema

En muchas ocasiones la hipótesis ii) del teorema de Stone obstaculiza su aplicación directa en problemas concretos de aproximación uniforme. Por ejemplo, el espacio vectorial $P[a,b]$ de todas las funciones polinomiales sobre el compacto $[a,b]$ no verifica esta hipótesis. Por suerte, $P[a,b]$ es un álgebra y veremos que se puede prescindir de la hipótesis ii) en el caso de que $H \subset \mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ sea un álgebra. Para comprobar esto necesitamos los dos lemas siguientes:

12.4.18. *Lema*

Existe una sucesión de polinomios $(p_n(t))$ sin término constante (es decir $p_n(0) = 0$) que converge uniformemente sobre $[0,1]$ a la función $t \mapsto \sqrt{t}$.

Demostración: Definamos por inducción

$$p_0(t) = 0$$

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + 1/2(t - p_n(t))$$

Probaremos que se cumple

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \tag{37}$$

y que bastará para probar la convergencia uniforme, pues sobre $[0,1]$ se tiene

$$\frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leq \frac{2}{2+n}$$

Las desigualdades (37) son ciertas para $n = 0$. Supongámos que son ciertas también para n y probémos que lo son para $n+1$. En primer lugar, si para $0 \leq k \leq n$, se cumple $0 \leq \sqrt{t} - p_k(t)$ entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - p_n(t) - 1/2(t - p_n^2(t)) \\ &= (\sqrt{t} - p_n(t))[1 - 1/2(\sqrt{t} + p_n(t))]\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se tiene $0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t}$, entonces $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ y por tanto $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0$. En segundo lugar:

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - p_n(t) - 1/2[t - p_n^2(t)] \\ &= (\sqrt{t} - p_n(t))\left[1 - 1/2(\sqrt{t} + p_n(t))\right] \\ &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}\end{aligned}$$

con lo cual queda probado el lema.■

12.4.19 *Lema*

Para cada $\alpha > 0$ existe una sucesión de polinomios sin término constante, que converge uniformemente sobre $[-\alpha, \alpha]$ a la función $t \mapsto |\, t \,|$.

Demostración. Utilizando la sucesión de polinomios construida en el lema anterior definamos los polinomios $\tilde{p}_n$ por $\tilde{p}_n(t) = \alpha p_n\left(\frac{t^2}{a^2}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$. Entonces tenemos por (37)

$$0 \leq \ |\, t \,| - \tilde{p}_n(t) = a\left(\sqrt{\frac{t^2}{a^2}} - p_n\left(\frac{t^2}{a^2}\right)\right) \leq \frac{2a\sqrt{\frac{t^2}{a^2}}}{2+n\sqrt{\frac{t^2}{a^2}}} \leq \frac{2a}{2a+n}.\blacksquare$$

Veremos ahora que podemos prescindir de las suposiciones : $h \in H \Rightarrow |\, h \,| \in H$ y $\langle 1 \rangle \in H$, en el teorema de Stone, si H es un álgebra.

12.4.20 *Teorema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto y A una subálgebra de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Entonces:

$$f \in \overline{A^u} \Longleftrightarrow (Z_A \subset Z_f \ \wedge \ R_A \subset R_f) \tag{38}$$

Demostración. Queda por probar la condición suficiente. Nos inspiraremos en el método de la demostración de 11.4.16. Probemos ante todo que $\bar{A} := \overline{A^u}$ es una subretícula de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. En efecto, si $h \in \overline{A}$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $h[X] \subset [-\alpha, \alpha]$; entonces existe una sucesión de polinomios sin término constante (p_n) tal que $(p_n \circ h)$ converge uniformemente a $|h|$. Las funciones $p_n \circ h : t \mapsto p_n(h(t))$ pertenecen a $\overline{A}$ porque no tienen término constante y $\overline{A}$ es una subálgebra de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$. Resulta que $|h| \in \overline{A}$ de donde (11.4.15) $\overline{A}$ es una subretícula.
Apliquemos ahora el lema fundamental.

Caso 1 : $x, y \in Z_A$.

En este caso cualquier $h \in A$ sirve como el $h_{x,y}$ del lema pues para todas se tiene $h(x) = 0 = f(x)$ y $h(y) = 0 = f(y)$, por (38).

Caso 2 : $x \notin Z_A, y \in Z_A$.

Sea $h \in A$ tal que $h(x) \neq 0$. Forzosamente $h(y) = 0$. Definiendo $h_{x,y} = h(x)^{-1} f(x) h$ se tiene, por (38)

$$h_{x,y}(x) = f(x) \ \ y \ \ h_{x,y}(y) = 0 = f(y)$$

Caso 3: $x, y \notin Z_A, (x, y) \notin R_A$

Aunque A no contenga las constantes podemos encontrar h tal que $h(x) = h(y) = 1$ pues como existe $h_1 \in A$ tal que $h_1(x) \neq 0$ entonces definimos $h_x = h_1(x)^{-1} h_1$.

Análogamente podemos encontrar h_y tal que $h_y(y) = 1$. La función h deseada es entonces:

$$h = h_x + h_y - h_x h_y \in A.$$

Por otro lado existe $\overline{h} \in A$ tal que $\bar{h}(x) \neq \overline{h}(y)$ y definiendo

$$h_{x,y} = \frac{f(y)\overline{h}(x) - f(x)\overline{h}(y)}{\overline{h}(x) - \overline{h}(y)} h + \frac{f(x) - f(y)}{\overline{h}(x) - \overline{h}(y)} \overline{h}$$

obtenemos: $h_{x,y}(x) = f(x)$ y $h_{x,y}(y) = f(y)$.

Caso 4: $x, y \notin Z_A \ \ y \ \ (x, y) \in R_A$.

Por (38) se tiene que $f(x) = f(y)$. Como existe $h \in A$ tal que $h(x) = h(y) = 1$ (por el caso 3) podemos definir $h_{x,y} = f(x)h = f(y)h$ para obtener una función $h_{x,y} \in A$ que cumpla $h_{x,y}(x) = f(x)$ y $h_{x,y}(y) = f(y)$.

Con esto queda probado que para toda $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ que satisfaga (38) y para cada par de puntos $(x, y) \in X^2 \setminus \triangle$ puede hallarse una función $h_{x,y} \in A \subset \overline{A}$ que verifique (34) igualmente para todo $\varepsilon > 0$. Por ser $\overline{A}$ una subretícula de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ concluimos por el lema fundamental que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ■

Nota : Hemos utilizado en la demostración anterior que la cerradura de una subálgebra A en $\mathfrak{C}_u(X,\mathbb{R})$ es un álgebra. La deducción de este resultado es trivial (E.12.3).

El teorema anterior es un resultado muy satisfactorio porque nos permite determinar completamente la cerradura uniforme de cualquier subálgebra A en $\mathfrak{C}_u(X,\mathbb{R})$. Como consecuencia inmediata obtenemos la siguiente combinación del teorema de Stone (12.4.17) con el clásico teorema de Weierstrass sobre la aproximación de funciones continuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ por polinomios:

12.4.21 *Corolario (teorema de Stone-Weierstrass)*

Sea $(X,\mathcal{X})$ un compacto y A una subálgebra de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ que separa los puntos de X y contiene para todo $x\in X$ una función que no se anula en x.
Entonces A es denso en $\mathfrak{C}_u(X,\mathbb{R})$.

Notemos que si $H\subset\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ entonces existe una *única subálgebra menor (resp. subálgebra unitaria)* $A(H)$ (resp. $A_1(H)$) de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ que contiene a H. En efecto, $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ es un álgebra unitaria y $A(H)$ (resp. $A_1(H)$) es la intersección de todas las subálgebras (resp. subálgebras unitarias) de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ que contienen a H.
$A(H)$ (resp. $A_1(H)$) se llama **subálgebra** (resp. **subálgebra unitaria**) **generada** por H.

Dejamos al lector comprobar las siguientes caracterizaciones de $A(H)$ y $A_1(H)$ en términos de H.

12.4.22 *Lema*

$A(H)$ es el subconjunto de $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$ formado por todas las funciones de la forma

$$p(f_1,...,f_n):x\mapsto p(f_1(x),...,f_n(x))\ \ (x\in X) \tag{39}$$

donde

$$n\in\mathbb{N}, f_1,...,f_n\in H\ \ y\ \ p(x_1,...,x_n)=\sum_{finita} a_{i_1},...,ai_nx^{i1},...,x^{in}$$

es un polinomio real de n variables sin término constante. Si se admiten en (39) también polinomios con término constante, se obtiene el álgebra unitaria $A_1(H)$ generada por H.

Ahora, podemos dar al corolario anterior una forma más cercana al teorema clásico de Weierstrass.

12.4.23 *Corolario : (2 ª versión del teorema de Stone-Weierstrass)*

Sea $(X,\mathcal{X})$ un espacio compacto y H un subconjunto separante en $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$. Entonces cada función continua $f:X\to\mathbb{R}$ puede aproximarse uniformemente por polinomios de funciones de H.

Demostración. Por el lema anterior los polinomios de funciones de H:

$$x\mapsto p(f_1(x),...,f_n(x))\ \ (x\in X)$$

($N \in \mathbb{N}, f_1 \in H, p$ polinoomio de n variables), constituyen el álgebra unitaria separante $A_1(H)$.■

Nota: Todos los teoremas de aproximación uniforme sobre el espacio compacto $(X, \mathcal{X})$ pueden trivialmente traducirrse a espacios topológicos cualesquiera $(X, \mathcal{X})$ si se considera sobre $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ la estructura uniforme $\mathcal{U}_u$.

En efecto las hipótesis se cumplen entonces para las restricciones de H y de f a cada subconjunto compacto K de $(X, \mathcal{X})$ de donde se concluye que $f \mid K \in \overline{H \mid K}^u$ por los teoremas obtenidos, lo que implica que $f \in \overline{H}^c$.

Aproximación compleja:

Sabemos que $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ es un álgebra de Banach unitaria compleja con la norma del supremo si $(X, \mathcal{X})$ es compacto (12.4.1).
$\rightsquigarrow$ Sin embargo, el teorema de Stone-Weierstrass no se cumple para las subálgebras de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$. A primera vista esto puede parecer sorprendente, pero hay que recordar que en la dedución de los teoremas de aproximación expuestos en párrafos anteriores, la relación de orden sobre $\mathbb{R}$ ha jugado un papel fundamental y tal orden no lo tenemos sobre $\mathbb{C}$.

Veremos ahora un ejemplo de subálgebra A de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ que es separante y continene las constante sin ser densa en $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$.

12.4.24 *Ejemplo*

Sea $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid \leq 1\}$ el disco cerrado unitario en el plano complejo. Sea $\mathcal{H}(U)$ el álgebra de todas las funciones analíticas sobre el interior $U = \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid < 1\}$ de X. El álgebra $A := \{h \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{C}) : h \mid U \in \mathcal{H}(U)\}$ es cerrada en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{C})$, porque el límite uniforme de funciones analíticas es a su vez analítica. Por otro lado, A contiene las constantes y es separante, porque contiene la aplicación identidad 1_X. Por lo tanto A cumple la hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass en el caso complejo sin ser densa en $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$; al contrario $\overline{A} = A$ es solamente una parte *muy reducida* del ágebra $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$.

Este ejemplo ya nos indica que la teoría de aproximación para los espacios complejos $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$, tiene un carácter muy diferente de la teoría de aproximación real que hemos desarrollado en esta sección. Los resultados anteriores pueden aplicarse aquí solamente en el caso relativamente trivial de un álgebra $A \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ que contenga un álgebra de funciones *reales* que tenga las propiedades requeridas. Explicaremoss brevemente este caso.

12.4.25 *Definición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, A una subálgebra de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$. Llamamos **álgebra de las funciones reales** de A al álgebra real

$$A_r = \{f \in A \mid Imf = 0\}$$

12.4.26 *Proposición*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y A una subálgebra compleja $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$. Entonces:

$$(\forall h \in A : \overline{h} \in A) \Longleftrightarrow A = A_r + iA_r \tag{40}$$

En caso de cumplirse estas condiciones se tiene además:

$$Z_A = Z_{A_r} \ \ y \ \ R_A = R_{A_r} \tag{41}$$

Demostración:$\Rightarrow$: Sea $f : f_1 + if_2$ $(f_1 \ f_2 \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}))$.
como $f_1 = 1/2(f + \overline{f}) \in A$ y $f_2 = 1/2i(f - \overline{f}) \in A$ entonces $f_1, f_2 \in A_r$. Así $A \subset A_r + iA_r$, entonces $A = A_r + iA_r$, pues la otra inclusión es siempre válida.

$$\Longleftarrow: S_i \ f = f_1 + if_2 \in A_r + iA_r$$

entonces

$$\overline{f} = f_1 + i(-(f_2)) \in A_r + iA_r$$

Finalmente $Z_{A_r} \supset Z_A, R_{A_r} \supset R_A$ son inclusiones evidentes. Por otro lado si $x \in Z_{A_r}$ tenemos $h_{\mathrm{x}} = h_1(x) + ih_2(x) = 0$ para todo $h \in A$, entonces $x \in Z_A$.
De la misma forma se prueba que $R_{A_r} \subset R_A$.■

La proposición anterior permite trasladar los resultados de la sección previa (12.4.20-12.4.23) a las álgebras complejas $A \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ que cumplen $h \in A \Longrightarrow \overline{h} \in A$.

12.4.27 *Teorema*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ y $A \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ una subálgebra tal que $\overline{h} \in A$ para todo $h \in A$. En tal caso :

$$f \in \overline{A} \Longleftrightarrow (Z_A \subset Z_f \wedge R_A \subset R_f)$$

Demostración. Sólo queda probar la implicación $\Longleftarrow$: Sea $f = f_1 + if_2$ $(f_1, f_2 \in A_r)$. Como $Z_{A_r} = Z_A \subset Z_f \subset Z_f \subset Z_{f_1}$ y $R_{A_r} = R_A \subset R_f \subset R_{f_1}$ se tiene que $f_1 \in \overline{A}_r \subset \overline{A}$, análogamente $f_2 \in \overline{A}$, por lo tanto $f = f_1 + if_2 \in \overline{A}$.■

12.4.28 *Corolario*

Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto y $A \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$ una subálgebra compleja que cumple:

i) $h \in A \Longrightarrow \overline{h} \in A$

ii) A es separante.

iii) Para todo $x \in X$ existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq 0$.

Entonces toda aplicación continua $f : X \to \mathbb{C}$ puede aproximarse uniformemente por funciones de A.

Pregunta: ¿Cuál de las suposiciones del corolario anterior no se cumple para el álgebra A definida en el ejemplo 12.4.24?

12.4.29 *Ejercicio*

Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio localmente compacto, no compacto. Sea $\mathfrak{C}^0(X, \mathbb{C}) = \{f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{C}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ y A una subálgebra $\mathfrak{C}^0(X, \mathbb{C})$ con las propiedades siguientes:

i) $h \in A \Longrightarrow \overline{h} \in A$

ii) A es separante.

Para todo $x \in X$ existe $h \in H$ tal que $h(x) \neq 0$.
Probar que cada función $f \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ puede aproximarse uniformemente sobre X por funciones de A. (Aqui ∞ denota el punto que se adjunta a X en su compactificación de Alexandrof).

Aplicaciones: Consideremos primeramente algunos casos clásicos del teorema de Stone-Weierstrass y después una aplicación de los resultados obtenidos en la *teoría de los anillos de funciones reales continuas.*

Aplicación 1: Aproximación de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sea $P[x]$ el álgebra de todas las funciones polinomiales

$$p : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_x x^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

$(N \in \mathbb{N}; a_k \in \mathbb{R}).P[x] = A(\{\langle 1\rangle, 1_{\mathbb{R}}\})$ contiene las constantes y es separante porque $1_{\mathbb{R}}$ separa los puntos de $\mathbb{R}$. Por 11.4.23 $P[x]$ es denso en $\mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
En particular, tenemos sobre el intervalo compacto $I = [0, 1]$ el siguiente resultado clásico.

12.4.30 *Teorema (de Weierstrass)*

Para toda función continua $f : I \to \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una función polinomial P_ε tal que $\mid f(t) - P_\varepsilon(t) \mid \leq \varepsilon$ para todo $t \in I$.

12.4.31 *Ejercicicio*

Probar que para toda función continua $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ existe una sucesión (h_n) de funciones de la forma :

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_x e^{-kx} \qquad m(x \in [0, \infty))$$

que converge a f uniformemente sobre cada compacto $K \subset [0, \infty)$.

Aplicación 2 : Aproximación de funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sea $P[x_1, ..., x_n]$ el álgebra de todas las funciones polinomiales reales sobre $\mathbb{R}^n$.

$$P(x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{finita} a_{i_1}, ..., i_n, x_1^{i_1} ... x_n^{i_1}; (a_{i_1}, ... i_n \in \mathbb{R})$$

Esta álgebra generada por la función constante $\langle 1 \rangle$ y la n proyecciones $\phi_i : x \mapsto x_i$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Puesto que estas proyecciones separan los puntos de $\mathbb{R}^n$, $P[x_1, ..., x_n]$ verifica las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Por lo tanto es denso en $\mathfrak{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. En otras palabras:

12.4.32 *Teorema (forma n-dimensional del teorema de Weierstrass)*

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces existe para toda función $f \in \mathfrak{C}(K, \mathbb{R})$ y todo $\varepsilon > 0$ una función polinomial $p_\varepsilon \in P[x_1, ..., x_n]$ tal que

$$\mid f(x_1, ..., x_n) - p_\varepsilon(x_1, ..., x_n) \mid \leq \varepsilon \ \ para \ \ todo (x_1, ..., x_n) \in K.$$

Aplicación 3: Aproximación de funciones continuas periódicas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Si $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es periódica en cada variable, entonces puede aproximarse uniformemente por los llamados *polinomios trigonométricos reales.*

12.4.33 *Proposición*

Toda función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con período 2π en cada variable puede aproximarse uniformemente por funciones de la forma

$$x \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}^n finita} \alpha_j \cos(j \cdot x) + \beta_j \text{sen}\,(j \cdot x) \ \ (x \in \mathbb{R}^n) \tag{42}$$

donde

$$j \cdot x := \sum_{k=1}^{n} j_k x_k \tag{43}$$

Demostración. El conjunto de todas las funcioned (42) es una subálgebra A de funciones continuas de período 2π pues:
$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 1/2(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$.
$\text{sen}\,\alpha\, cos\beta = 1/2(\text{sen}\,(\alpha + \beta) - \text{sen}\,(\alpha - \beta))$.
$\cos\alpha\,\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

Apliquemos 12.4.20. Evidentemente $N_A = \varnothing \subset N_f$; para toda $f \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pues $\langle 1 \rangle \in A$.

Además si $(x, y) \in R_A$, es decir si $h(x) = h(y)$ para todo $h \in A$ entonces $\cos x_i = \cos y_i$ y $\text{sen}\, x_i = \text{sen}\, y_i$ para $(i = 1, ..., n)$ entonces $x - y = 2\pi j$ donde $j \in \mathbb{Z}^n$ y por lo tanto $f(x) = f(y)$ pues f es de periodo 2π.

Concluimos por 12.4.20, que f puede aproximarse por funciones de la forma (42) uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces especialmente sobre $K = [0, 2\pi]^n$. Pero una aproximación uniforme sobre $[0, 2\pi]^n$ implica, por la periodicidad una aproximación uniforme sobre todo $\mathbb{R}^n$.

Aplicación 4 : Aproximación de funciones reales continuas sobre un producto

Las funciones reales continuas $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sobre un producto de espacios compactos (no necesariamente de Hausdorff), pueden aproximarse uniformemente por combinaciones lineales de productos de dos funciones, que dependen cada una sólo de una coordenada x o y.

12.4.34 *Proposición*

Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios compactos. Entonces toda función $h \in \mathfrak{C}(X \times Y, \mathbb{R})$ puede aproximarse uniformemente por funciones de la forma

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(y) \ \ ((x, y) \in X \times Y) \tag{44}$$

$$(k \in \mathbb{N}, f_i \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}); \ g_i \in \mathfrak{C}(Y, \mathbb{R}))$$

Demostración. Ejercicio.

(Indicación: Probar primeramente que $R_{\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})} \times R_{\mathfrak{C}(Y,\mathbb{R})} = R_{\mathfrak{C}(X \times Y,\mathbb{R})}$.)
Pregunta: ¿Cómo puede generalizarse esta proposición a productos cualesquiera ?

Aplicación 5: Los anillos $\mathfrak{C}(X,\mathbb{R})$

Resulta fácil comprobar que las álgebras $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{C}(Y, \mathbb{R})$ son algebraicamente isomorfas si los dos espacios topológicos $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ son homeomorfos. En efecto, si $f : X \to Y$ es un homeorfismo entonces $f^* : \mathfrak{C}(Y, \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$, definido por $f^*(g) = g \circ f$ $(g \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}))$, es un isomorfismo.

Aplicando el teorema 12.4.20 probaremos en este párrafo el resultado inverso cuando $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ son compactos. O sea, en este caso, si $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{C}(Y, \mathbb{R})$ son algebraicamente isomorfas, entonces $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{Y})$ son homeomorfos.
Más generalmente, analizaremos la estrecha relación existente entre la estructura algebraica del anillo $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y la estructra topológica del espacio $(X, \mathcal{X})$.

Supongamos en lo que sigue que $(X, \mathcal{X})$ es un T_2-espacio compacto. Antes de comenzar la presentación de los resultados recordaremos algunas definiciones algebraicas.

Un subconjunto $\mathcal{J}$ de un anillo conmutativo A se llama un **ideal propio** de A si cumple:

$$\mathcal{J} \neq \mathcal{A} \tag{45}$$

$$(a \in A \ \wedge \ x \in \mathcal{J}) \Longrightarrow ax \in \mathcal{J} \tag{46}$$

Tal ideal no puede contener un elemento inversible en A ya que en este caso:

$$a^{-1} \in \mathcal{J} \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}aa^{-1} \subset \mathcal{J} \tag{47}$$

lo que contradice (45).

Un ideal propio $M \subset A$ se llama **maximal** si no existe otro ideal propio $\mathcal{J}$ de A tal que $M \subset \mathcal{J}$ y $M \neq \mathcal{J}$. Por el lema de Zorn, todo ideal propio $\mathcal{J}$ de A está contenido en algún ideal maximal M de A.

Si A es un álgebra real conmutativa y unitaria, entonces todo ideal $\mathcal{J}$ de A es a la vez una subálgebra de A.

En lo que sigue estudiaremos especialmente la correspondencia entre los ideales $\mathcal{J}$ del álgebra $\mathfrak{C}(X) := \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ y los conjuntos $Z_{\mathcal{J}}$ de sus ceros.

12.4.35 *Proposición*

Si $\mathcal{J}$ es un ideal de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ y $Z_{\mathcal{J}} = \varnothing$, entonces $\mathcal{J} = \mathfrak{C}(X)$.

Demostración: Tomemos para todo $x \in X$, un $h_x \in \mathcal{J}$ tal que $h_x(x) > 0$. Los abiertos $U_x = \{y \in X \mid h_x(y) > 0\}(x \in X)$ cubren X. Entonces existen puntos $x_1, ..., x_n \in X(N \in \mathbb{N})$ tales que $X = \cup\{U_{x_i} \mid i = 1, ..., n\}$. La función $h = \sum_{i=1}^{n} h_{xi}^2 \in \mathcal{J}$ es etrictamente positiva sobre X. Puesto que h tiene un inverso en $\mathfrak{C}(X)$ concluimos que $\mathcal{J} = \mathcal{C}(X)$ por (47).■

Esta proposición puede considerarse como un resultado más preciso del teorema 12.4.20 para *ideales* en vez de *subálgebras* en general. Esto ya nos indica que la relación $R_{\mathcal{J}}$ puede obviarse si analizamos la aproximación uniforme de $f \in \mathfrak{C}(X)$ por funciones de un ideal $\mathcal{J} \subset \mathfrak{C}(X)$. En efecto, en este caso, $R_{\mathcal{J}}$ adquiere una expresión trivial según nos muestra el siguiente resultado.

12.4.36 *Proposición*

Sea $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathfrak{C}(X)$ y sea $\overline{\mathcal{J}}$ su cerradura en $\mathfrak{C}_u(\mathcal{X})$. Entonces:

$$R_{\mathcal{J}} = \triangle x \cup (Z_{\mathcal{J}} \times Z_{\mathcal{J}}) \tag{48}$$

$$\overline{\mathcal{J}} = \{f \in \mathfrak{C}(X) \mid f \mid Z_{\mathcal{J}} \equiv 0\} \tag{49}$$

Demostración: La afirmación (49) es una consecuencia de (48), por el teorema 10.4.20. Queda por probar (48) donde la inclusión $\supset$ se cumple siempre. Inversamente sean $x, y \in X$ tales que ni x ni y pertenecen $Z_{\mathcal{J}}$, se tiene que $(x, y) \notin R_{\mathcal{J}}$. Supongamos que $x \neq y$ y $x \in X \backslash Z_{\mathcal{J}}$. En este caso existen funciones h_x y h_y en $\mathcal{J}$ tales que $h_x(x) \neq 0$, $h_y(y) \neq 0$. Sean $h = h_x^2 + h_y^2 \in \mathcal{J}$ y $f : X \to [0, 1]$ una función continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ que existe por ser $(X, \mathcal{X})$ normal. Entonces $g = fh \in \mathcal{J}$ cumple $g(x) = 0 \neq g(y)$, lo que contradice $(x, y) \in R_{\mathcal{J}}$. En fin concluimos que $R_{\mathcal{J}} \subset \triangle_x \cup (Z_{\mathcal{J}} \times Z_{\mathcal{J}})$.■

Sea $\mathcal{H}$ la colección de todos los ideales de $\mathfrak{C}(X)$. La aplicación $\mathcal{J} \mapsto Z_{\mathcal{J}}$ envia a todo $\mathcal{J} \in \mathcal{H}$ un conjunto cerrado. Inversamente podemos asociar a todo conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las funciones que se anulan sobre A.

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}} := \{f \in \mathfrak{C}(X) \mid f \mid A = 0\}$$

$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ es un ideal cerrado en $\mathfrak{C}_u(X)$.

12.4.37 *Proposición*

Las aplicaciones $i : A \mapsto \mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{H}$ y $v : \mathcal{J} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{P}(X)$ cumplen las propiedades siguientes:

$$i)\ i \circ v\ (A) = \overline{A} \text{ para } \mathcal{J} \in \mathcal{H}. \tag{50}$$

$$ii)\ v \circ i\ (A) = \overline{A} \text{ para } A \in \mathcal{P}(X) \tag{51}$$

iii) Las aplicaciones $\mathcal{J} \mapsto v[\mathcal{J}]$ y $C \mapsto i[C]$ son biyecciones inversas del conjunto $\overline{\mathcal{H}}$ de los ideales cerrados en $\mathfrak{C}(X)$ sobre el conjunto de los cerrados en $(X, \mathcal{X})$, resp. de $\mathcal{L}$ sobre $\overline{\mathcal{H}}$.

iv) i y v son decrecientes con respecto a la relación de orden $\subset$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{H}$.

v) La aplicación $x \mapsto I_x := \mathcal{J}_{\{x\}}$ es una biyección de X sobre el conjunto M de los ideales maximales en $\mathfrak{C}(X)$. Luego los ideales maximales en $\mathfrak{C}(X)$ son cerrados. Un ideal $\mathcal{J} \in \mathcal{H}$ es cerrado si y sólo si es la intersección de los ideales maximales que lo contienen.

Demostración : Ejercicio.
(*Indicación*: $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular, luego las funciones $f \in \mathfrak{C}(X)$ separan los puntos de X.)

De esta proposición se deduce que la estructura topológica de X puede determinarse completamente a partir de la estructura algebraica de $\mathfrak{C}(X)$. En efecto, tenemos

$$x \in Z_f \Longleftrightarrow f \in I_x \tag{52}$$

y en general

$$x \in Z_{\mathcal{J}} \Longleftrightarrow \mathcal{J} \subset \mathcal{I}_x. \tag{53}$$

Puesto que todos los cerrados $C \in \mathcal{L}$ tiene la forma $Z_{\mathcal{J}}$ ($\mathcal{J} \in \mathcal{H}$), los cerrados C en $(X, \mathcal{X})$ están determinados de manera única por las subcolecciones

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} := \{M \in \mathcal{M} \mid \mathcal{J} \subset M\}$$

de $\mathcal{M}$ definidas por los ideales $\mathcal{J} \in \mathcal{H}$. Más formalmente, esta correspondencia se describe como sigue: Tomando $\{\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \mid \mathcal{J} \in \mathcal{H}\}$ como colección de cerrados se define de manera puramente algebraica sobre el espacio $\mathcal{M}$ de los ideales maximales de $\mathfrak{C}(X)$ una topología $\mathcal{X}$, llamada la **topología de Stone**. $\mathcal{X}$ está ahora determinada de manera única como la preimagen de $\mathcal{X}$ por la biyección $x \mapsto I_x$ de X sobre $\mathcal{M}$
Se obtienen así los siguientes resultados:

12.4.38 *Teorema*

Sean $(X, \mathcal{X}), (\tilde{X}, \widetilde{\mathcal{X}})$ T_2-espacios compactos. Si $\mathfrak{C}(X)$ y $\mathfrak{C}(\tilde{X})$ son algebraicamente isomorfos, entonces $(X, \mathcal{X})$ y $(\tilde{X}, \widetilde{\mathcal{X}})$ son homeomorfos.

Demostración. Basta mencionar que el isomorfismo algebraico entre $\mathfrak{C}(X)$ y $\mathfrak{C}(\tilde{X})$ implica evidentemente la homeomorfía de los 'espacios de Stone' correspondientes $(\mathcal{M},\mathrm{X}) \simeq (\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}})$.■

Nota: Aunque nos hemos limitado en esta aplicación al anillo $\mathfrak{C}(X)$ de las funciones *reales* continuas pueden probarse resultados análogos para los anillos $\mathfrak{C}(X, \mathbb{C})$, (E.12.18). Así, la exposición anterior puede servir como una introducción a dos áreas del análisis funcional estrechamente vinculadas con problemas de aproximación : la teoría de los anillos de funciones reales continuas y la teoría de las álgebras uniformes (complejas).

Dejamos al lector comprobar que el método desarrollado en esta sección se extiende a espacios topológicos y a anillos más generales.

12.4.39 *Ejercicio*

Sea R un anillo conmutativo con elemento neutro 1. Denotemos por $\mathcal{H}$ al conjunto de todos los ideales de R y por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los ideales maximales de R. Probar:

i) Sobre $\mathcal{M}$ existe una única topología $\mathcal{X}$ (llamada de Stone) tal que los cerrados de (M,X) son precisamente los conjuntos

$$C_{\mathcal{J}} : \{M \in \mathcal{M} \mid \mathcal{J} \subset M\} \quad (\mathcal{J} \in \mathcal{H}) \tag{54}$$

ii) La cerradura de un subconjunto $\mathcal{Q}$ en $(\mathcal{M},\mathrm{X})$ se determina por

$$\overline{\mathcal{Q}} = \{M \in \mathcal{M} \mid M \supset (\cap \mathcal{Q})\} \tag{55}$$

(El ideal $\mathcal{J} = \cap\, \overline{\mathcal{Q}}$ se llama **núcleo** de $\mathcal{Q}$, inversamente, para todo ideal $\mathcal{J} \in \mathcal{H}$ el conjunto (54) se llama **envoltura** de $\mathcal{J}$, por tanto la topología de Stone se llama también **topología de envoltura-núcleo**.)

iii) $(\mathcal{M}, \mathcal{X})$ es un T_1-espacio.

iv) $(\mathcal{M}, \mathcal{X})$ es de Hausdorff si y sólo si para dos ideales maximales distintos M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ existen elementos a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 \notin M_1$, $a_2 \notin M_2$ y a_1, $a_2 \in \cap\mathcal{M}$. Si $R = \mathbb{Z}$ entonces $\mathcal{M}$ no es de Hausdorff.

v) $(\mathcal{M}, \mathcal{X})$ es compacto

12.4.40 *Ejercicio*

Probar que un espacio topologico $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular si y sólo si la colección $\{N_f \mid f \in C(X, \mathbb{R})\}$ es una base de conjuntos cerrados en $(X, \mathcal{X})$, puede representarse como intersección de una colección de conjuntos N_f $(f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}))$.

12.4.41 *Ejercicio*

Sean $(X, \mathcal{X})$ un espacio completamente regular y $\mathcal{M}$ el espacio de los ideales maximales de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ provisto de la topología de Stone. Probar:

i) $\mathcal{M}$ es T_2-compacto

ii) La aplicaición $\varphi : x \mapsto I_x = \{f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$ es un homeomorfismo de $(X, \mathcal{X}')$ sobre un subconjunto denso de $(\mathcal{M}, \mathcal{X}_S)$, entonces $(\varphi, \mathcal{M}, \mathcal{X}_S)$es una compactificación de $(X, \mathcal{X})$.

Ejercicios finales

CAPÍTULO 1.

Los ejercicios siguientes tienen como fin introducir al lector a algunos problemas métricos elementales del Análisis Funcional.

*E.1.1 Una métrica d sobre un conjunto no vacío X se llama *ultramétrica* si verifica la propiedad:

$$x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \Rightarrow d(x,z) \leq \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\}$$

Muestre que si d es ultramétrica:

i) $d(x,y) \neq d(y,z) \Longrightarrow d(x,y) = \text{máx}\{d(x,y), d(y,z)\}$.

ii) Toda bola es a la vez abierta y cerrada.

iii) Todo punto de una bola es centro de la misma.

iv) Si dos bolas no son disjuntas, una está incluida en la otra.

v) La distancia p-ádica sobre $\mathbb{Q}(1,2,7)$ es una ultramétrica.

E.1.2 Probar que para una aplicación bilineal $\omega \in L(E,F;G), E, F, G$ espacios normados son equivalentes:

i) ω es continua.

ii) ω es continua en un punto.

iii) Existe $M > 0$, tal que

$$x \in E \wedge y \in F \Longrightarrow \| \omega(x,y) \| \leq M \| x \| \ \| y \|$$

E.1.3 Sean E, F y G espacios normados. Probar:

i) Sobre el espacio vectorial $L(E,F)$ de las aplicaciones lineales continuas de E en F

$$\| f \| := \sup\{\| f(x) \| \mid x \in E, \| x \| \leq 1\}$$

define una norma ($L(E,F)$ se provee canónicamente de esta norma).

ii) Sobre el espacio vectorial $L(E,F;G)$ de las aplicaciones bilineales continuas de $E \times F$ en G.

$$\| \omega \| := \sup\{\| \omega(x,y) \| \mid x \in E, y \in F, \| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1\}$$

define una norma ($L(E,F;G)$ se provee canónicamente de esta norma).

iii) Según el ejemplo 1.4.6 pueden considerarse sobre $L(E,F)$ las seudométricas de convergencia uniforme sobre subconjuntos $B \subset E$. ¿Para qué subconjunto $B \subset E$ tenemos:

$$\| g - f \| = d_B(f,g)$$

para todas las $f, g \in L(E,F)$?

E.1.4 Probar que el espacio $\mathfrak{C}([a,b],\mathbb{C})$ de todas las funciones complejas continuas sobre $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es un espacio prehilbertiano con respecto al producto interior:

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\overline{g}(t) \ dt$$

¿Cuál es la norma correspondiente?

E.1.5 Sobre $\mathfrak{C}([0,1];\mathbb{R})$ se tienen las siguientes normas:

$$\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | \ x \in [0,1]\}$$

$$\| f \|_1 = \int_0^1 | f(x) | \ dx$$

$$\| f \|_2 = (\int_0^1 | f(x) |^2 \ dx)^{1/2}$$

Probar:

i) $\| f \|_1 \leq \| f \|_2$; $\| f \|_2 \leq \| f \|_\infty$

ii) $\| \cdot \|_1$ no es equivalente a $\| \cdot \|_\infty$, ni $\| \cdot \|_2$ es equivalente a $\| \cdot \|_\infty$.

E.1.6 Sea E el espacio de las funciones reales definidas sobre $I = [0,1]$ y lipschitzianas, es decir que

$$\sup\left\{\frac{\mid f(x) - f(y) \mid}{\mid x - y \mid} \mid (x,y) \in I \times I; x \neq y\right\} = K_f < +\infty.$$

Probar las siguientes afirmaciones.

i) E es un espacio vectorial de $\mathfrak{C}(I, \mathbb{R})$.

ii) $\mathbb{N}(f) := \| f \|_\infty + K_f$ define una norma sobre E.

iii) Las normas $\| \cdot \|_\infty$ y N no son equivalentes. (Indicación: constrúyase una sucesión de funciones f_n tal que K_f sea constante para todo n y $\| f_n \|_\infty \to 0$) .

E.1.7 Probar la desigualdad de Cauchy-Schwartz para un espacio prehilbertiano H:

$$x \in H \wedge y \in H \Longrightarrow \mid \langle x, y \rangle \mid \leq \| x \| \| y \|$$

E.1.8 Sea H un espacio prehilbertiano y (x_n) y (y_n) sucesiones en H. Probar que:

$$x_n \to x \ \wedge \ y_n \to y \Longrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$$

E.1.9 Sea E un espacio normado. Probar que la norma sobre E proviene de un producto escalar si y sólo si dicha norma cumple la ley del paralelogramo :

$$x \in E \ \wedge \ y \in E \Longrightarrow \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

Indicación : definir

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2) +$$

$$\frac{i}{4}(\| x + iy \|^2 - \| x - iy \|^2)$$

E.1.10 Sea H un espacio prehilbertiano. Se dice que dos elementos $x, y \in H$ son *ortogonales* (notación: $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.

Probar la siguiente ley de Pitágoras :

$$x \perp y \Longrightarrow \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

para todo x, y de H.

* E.1.11 Dos subconjuntos A, B de un espacio pre-hilbertiano H se llaman ortogonales, si verifican:

$$a \in A \wedge b \in B \Longrightarrow a \perp b$$

Sean M un subespacio vectorial de H y $x \in H$. Probar que un punto m_0 es el punto más cercano a x en M si y sólo si $x - m_0$ es ortogonal a M:

$$d(x, M) = \| x - m_0 \| \Longleftrightarrow (x - m_0) \perp M$$

E.1.12 Sea H un espacio pre-hilbertiano. A todo $y \in H$ podemos asociar la forma lineal $\hat{y} : x \mapsto \langle x, y \rangle$ sobre H. El espacio vectorial de todas estas formas lineales lo denotaremos por $\hat{H}$. Probar que:

i) Las formas lineales $\hat{y}$ son continuas.

ii) Si proveemos a $\hat{H}$ de la norma canónica inducida por la norma canónica de $L(H, \mathbb{R})$
$$\| \hat{y} \| := \sup\{ | \hat{y}(x) | \mid x \in H, \| x \| \leq 1\} \ \ (y \in \hat{H})$$
entonces la aplicación lineal $y \mapsto \hat{y}$ es una isometría de H sobre su imagen.

E.1.13 Un conjunto C de un espacio vectorial real o complejo se llama *conexo* si

$$x \in C \ \wedge \ y \in C \ \wedge \ 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow tx + (1-t)y \in C$$

Probar:

i) Si P es una seminorma sobre E, entonces toda bola abierta o cerrada, definida por P, es convexa.

ii) Si C es un subconjunto convexo de E, entonces la función $P_C : E \to [0, +\infty]$ definida por
$$P_C(x) = \begin{cases} \inf\{\alpha \mid \alpha > 0, x \in \alpha C\} & \text{si } x \in \alpha C \\ +\infty & \text{si } x \notin \alpha C \text{ para ningún } \alpha. \end{cases}$$

- Cumple:

a) $P_C(x) \geq 0$ para todo $x \in E$ y $P_C(0) = 0$.

b) $P_C(\lambda x) = \lambda P_C(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\lambda > 0$.

c) $P_C(x + y) \leq P_C(x) + P_C(y)$.

- P_C se llama funcional de Minkowski para C.

iii) Si C es convexo y simétrico ($x \in C \Longrightarrow -x \in C$) entonces P_C es una seminorma.

iv) Si C es un subconjunto convexo, simétrico de un espacio normado E, que contiene al 0 en su interior, entonces P_C es una seminorma real continua sobre E y se cumple que $\overset{\circ}{C} = \{x \in E \mid P_C(x) < 1\}$.

v) Si C es además acotado, entonces P es una norma sobre E.

CAPÍTULO 2

E.2.1 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ dos espacios topológicos. ¿Es la colección $\{A \times B \mid A \in \chi \wedge B \in \mathcal{Y}\}$ una topología sobre $X \times Y$?

E.2.2 Probar que los subconjuntos $A \subset \mathbb{N}$ con la propiedad:

$$n \in A \ \wedge \ m/n \Longrightarrow m \in A$$

forman una topología $\mathcal{D}$ sobre $\mathbb{N}$, que no es la discreta.

E.2.3 Consideremos sobre $[0,1]^2$ el orden lexicográfico.

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$$

que es una relación de orden total.

Describa los abiertos de la topología de orden asociada. ¿Por qué conviene llamarla *topología de televisión*?

E.2.4 Probar que una topología $\mathcal{X}$ sobre un conjunto X es la discreta si y sólo si todo punto constituye un conjunto abierto en $(X, \mathcal{X})$.

E.2.5 Sea $\mathcal{R}^*$ la colección de todos los intervalos reales $(x, +\infty)$, $(-\infty, y)$ con $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que $\mathcal{R}^*$ genera la topología usual de $\mathbb{R}$.

*E.2.6 Probar que todo abierto de $\mathbb{R}$ con la topología usual es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

E.2.7 Mostrar que la topología engendrada en $\mathbb{R}$ por la topología usual y el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) no es la discreta.

E.2.8 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Definamos para todo $x \in X$

$$A_i(x) := \{y \in X \mid y \leq x\} \text{ y } A_d(x) := \{y \in X \mid x \leq y\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones.

i) Las colecciones $\{A_i(x) \mid x \in X\}$, resp.$\{A_d(x) \mid x \in X\}$ forman bases para topologías $\mathcal{X}_i$ resp.$\mathcal{X}_d$ sobre X.

ii) $A \subset X$ es $\mathcal{X}_i$-abierto si y sólo si cumple:

$$x \in A \ \wedge \ y \leq x \Longrightarrow y \in A$$

iii) En la topología $\mathcal{X}_i$, la intersección de una familia cualquiera de abiertos es abierto.

iv) La unión de ambas topologías $\mathcal{X}_i$ y $\mathcal{X}_d$ genera la topología discreta.

v) Si X tiene más de un elemento las topologías $\mathcal{X}_i$ y $\mathcal{X}_d$ no son comparables.

E.2.9 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos tales que $X \subset Y$ y sea $i : X \to Y$ la inyección canónica. Probar que i es continua si y sólo si, para todo abierto $A \in \mathcal{Y}$, la intersección $A \cap X$ es abierta en X.

E.2.10 Consideremos sobre el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ la topología $\mathcal{D}$ del ejercicio 2. Probar que una aplicación $f : (\mathbb{N}, \mathcal{D}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{D})$ es continua si y sólo si cumple:

$$m/n \Longrightarrow f(m)/f(n)$$

E.2.11 Sea X un conjunto ordenado provisto de la topología $\mathcal{X}_i$ definida en el ejercicio 8. Dar una condición necesaria y suficiente para que $f : (X, \mathcal{X}_i) \to (X, \mathcal{X}_i)$ sea continua.

E.2.12 Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto, $\mathcal{T}$ la topología de los complementos finitos sobre X. Dar una condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T})$ sea continua.

E.2.13 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $f : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $\{x \in X \mid f(x) > r\}$ es abierto para todo $r \in \mathbb{Q}$. Probar que f es semicontinua inferiormente.

* E.2.14 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{q}{q},\ q > 0,\ p \text{ y } q \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Probar que f es semicontinua superiormente pero no inferiormente.

* E.2.15 Sean E_n una partición numerable de un espacio topológico X, $f : X \to \mathbb{R}$, (a_n) sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $a_{n+1} > a_n$ para todo n y $f[E_n] = \{a_n\}$.

Hallar una condición necesaria y suficiente sobre los E_n para que f sea superiormente continua.

*E.2.16 Sea $\mathfrak{C}'([0,1])$ el conjunto de las funciones reales y continuamente derivables sobre [0,1]. Probar que:

i) La colección de todos los conjuntos

$$U(f;\varepsilon) = \{g \in \mathfrak{C}([0,1]) \mid f \in \mathfrak{C}([0,1])$$

$$x \in [0,1], \varepsilon > 0 \Rightarrow \mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon\}$$

donde $f \in \mathfrak{C}([0,1])$, ε>0, es base de una topología $\mathcal{X}$ sobre $\mathfrak{C}([0,1])$.

ii) La aplicación $L : f \mapsto L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, que asocia a toda función $f \in \mathfrak{C}([0,1])$ la longitud de la curva $\{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\}$, definida por f es semicontinua inferiormente.

E.2.17 Separar el alfabeto en clases homeomorfas:

$$ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ$$

*E.2.18 Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfismo. Probar que:

$$f(0) = 0 \text{ o } f(0) = 1, f[(0,1)] = (0,1)$$

CAPÍTULO 3

E.3.1 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $A \subset X, \chi_{\mathcal{A}} : X \to \mathbb{R}$ la función característica de A. Probar:

$$\chi_{\mathcal{A}} \text{ continua en } x \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A \vee V \subset \complement A$$

E.3.2 Sea $\mathcal{C}$ la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

i) partes contenidas en $[0,1)$

ii) partes abiertas usuales de $(1, +\infty)$

iii) partes de la forma $[1,a) \cup B$, donde $a > 1$ y $B \subset [0,1), [0,1) \backslash B$ finito o numerable.

Probar que $\mathcal{C}$ es base de una topología para la cual 1 no admite un sistema fundamental de vecindades numerable pero que existe una sucesión (x_n), tal que $x_n \to 1$ en esta topología, con $x_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

E.3.3 Describa los filtros en un conjunto finito. ¿Cuántos filtros hay en un conjunto de n elementos?

E.3.4 Muestre que la intersección de dos filtros $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en un conjunto X viene dada por:

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{M \cup N \mid M \in \mathcal{F}_1 \ \wedge \ N \in \mathcal{F}_2\}$$

E.3.5 Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros en un conjunto X. Probar que si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tiene un supremo $\mathcal{F}$ en el conjunto de todos los filtros sobre X, entonces

$$\mathcal{F} = \{M \cap N \mid M \in \mathcal{F}_1 \wedge N \in \mathcal{F}_2\}$$

E.3.6 Sea X un conjunto infinito. $\mathcal{F}$ el filtro de los complementos finitos, A el conjunto de todas las sucesiones ϕ en X, cuyos términos son todos distintos y $\mathcal{F}_\phi$ los filtros elementales asociados a las sucesiones $\phi \in A$. Probar:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\phi \in A} \mathcal{F}_\phi$$

E.3.7 i) Sea φ una colección cuyos elementos son topologías sobre un conjunto X. Mostrar que el filtro de vecindades de un punto $x \in X$ con respecto a $\cap\varphi$ es más grueso que la intersección de los filtros de vecindades de x con respecto a las topologías de φ.

ii) Sea $\mathcal{X}_1$ la topología de orden sobre $\mathbb{Q}^2$ con el orden lexicográfico (E.2.3) y $\mathcal{X}_2$ la topología sobre $\mathbb{Q}^2$ que se obtiene transportando $\mathcal{X}_1$ por la simetía $(p,q) \mapsto (q,p)$. Muestre que si $\mathcal{X}$ es la intersección de $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$, el filtro de vecindades de un punto de $\mathbb{Q}^2$ con respecto a $\mathcal{X}$ es estrictamente más grueso que la intersección de filtros de vecindades de dicho punto respecto de $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$.

E.3.8 Dar un ejmplo en un conjunto infinito no numerable de dos filtros, uno más fino que el otro, donde el más fino tiene base numerable y el más grueso no.

E.3.9 i) Probar que todo ultrafiltro que es más fino que la intersección de un número finito de filtros es más fino que al menos uno de ellos.

ii) Dar un ejemplo de un ultrafiltro que sea más fino que la intersección de una familia infinita de ultrafiltros, pero que no sea igual a ninguno de los ultrafiltros de la familia.

(*Indicación:* considerar la familia de ultrafiltros en un conjunto infinito cada uno de los cuales tiene una base formada por un elemento).

E.3.10 Muestre que la intersección de todos los conjuntos de un ultrafiltro contiene a lo sumo un punto. Si contiene un punto, entonces es el ultrafiltro de los superconjuntos de dicho punto.

E.3.11 Sea X un conjunto y (x_n) una sucesión en X cuyos términos son todos distintos. Probar que el filtro elemental asociado a (x_n) no es un ultrafiltro.

*E.3.12 i) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sobreyectiva tal que $f^{-1}(m)$ es finito para todo $m \in \mathbb{N}$. Si (x_n) es una sucesión en un conjunto X, sea $y_n = x_{f(n)}$. Muestre que los filtros elementales asociados a las sucesiones (x_n) y (y_n) son iguales.

ii) Deducir que si (a_n) y (b_n) son sucesiones de un conjunto X tal que el filtro asociado con (b_n) es más fino que el filtro asociado con (a_n), entonces el filtro asociado con (b_n) es igual al filtro asociado con una subsucesión de (a_n).

CAPÍTULO 4

E.4.1 Determinar la adherencia del conjunto unitario

$$\{x\} \ (x \in \mathbb{R}) \text{ en el espacio } (\mathbb{R}, \mathcal{X}_1)$$

E.4.2 Sea $C = \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Determinar C' y C'' en $\mathbb{R}$ con la topoloogía usual.

E.4.3 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $A \in \mathcal{X}$. Probar que:

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$$

para todo $B \subset X$.

E.4.4 Un subconjunto C de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama perfecto, si es cerrado y no tiene puntos aislados. Probar:

i) Si $A \subset (X, \mathcal{X})$ no tiene puntos aislados, entonces $\overline{A}$ es perfecto.

ii) Si $(X, \mathcal{X})$ no tiene puntos aislados, entonces tampoco los subconjuntos abiertos o densos en $(X, \mathcal{X})$.

E.4.5 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico (Y, d) un espacio métrico. Proveamos al espacio $\mathfrak{C}(X, Y)$ (funciones continuas de X en Y) de la topología definida por la seudométrica:

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

Probar que:

i) El subconjunto $\mathfrak{C}_b(X, \mathcal{Y})$ de todas las funciones continuas y acotadas de X en Y es a la vez abierto y cerrado en $\mathfrak{C}(X, Y)$.

ii) d_∞ induce una métrica sobre $\mathfrak{C}(X, \mathcal{Y})$.

E.4.6 Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ con la topología usual de dos abiertos A, B tal que los conjuntos

$$A \cap \overline{B}; B \cap \overline{A}, \overline{A \cap B} \text{ y } \overline{A} \cap \overline{B}$$

sean todos distintos.

*E.4.7 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $A \subset X, B \subset X$. Sea $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$, $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Sabemos que

$$A \subset B \Longrightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B) \ \wedge \ \beta(A) \subset \beta(B)$$

Probar que:

i) Si A es abierto , entonces $A \subset \alpha(A)$ y, si A es cerrado, entonces $\beta(A) \subset A$.

ii) Deducir de i) que si A es una parte cualquiera de X entonces

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A) \text{ y } \beta(\beta(A)) = \beta(A)$$

iii) Dar un ejemplo de una parte de $\mathbb{R}$ con la topología usual, donde

$$A, \ \overset{\circ}{A}, \ \overline{A}, \ \alpha(A), \ \beta(A), \ \beta(\overline{A}), \ \alpha(\overset{\circ}{A})$$

sean todos distintos, con sólo las siguientes inclusiones

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}; \ \overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A}); \ \beta(A) \subset \overline{A}$$

$$\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(\overline{A}) \subset \overline{A}; \ \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \alpha(A); \ \beta(A) \subset \beta(\overline{A})$$

E.4.8 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $A \subset X, B \subset X$. Probar que:

i) $fr(\overline{A}) \subset fr(A)$; $fr(\overset{\circ}{A}) \subset fr(A)$.

- Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ con la topología usual donde los tres conjuntos sean distintos.

ii) $fr(A \cup B) \subset fr(A) \cup fr(B)$.

- Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ con la topología usual donde los tres conjuntos sean distintos.

iii) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Longrightarrow fr(A \cup B) = fr(A) \cup fr(B)$.

E.4.9 Sea X un conjunto infinito no numerable y τ la topología de los complementos finitos sobre X. Probar que (X, τ) es separable, pero no tiene base numerable.

*E.4.10 Probar que el espacio l_∞ de las sucesiones (x_n) de números complejos, acotados con la norma $\| x_n \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} | x_n |$ no es separable.

*E.4.11 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Consideremos las cuatro propiedades siguientes:

a) X tiene base numerable.

b) X es separable.

c) Todo $A \subset X$ que contiene solamente puntos aislados es numerable.

d) Toda colección de abiertos dos a dos disjuntos es numerable. Probar que:

i) $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow d)$.

$a) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d)$.

ii) En un espacio métrico las cuatro propiedades son equivalentes.

E.4.12 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ y $(Z, \mathcal{Z})$ espacios topológicos. $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones. Probar que:

i) Si $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada) y f una sobreyección continua, entonces g es abierta (resp. cerrada).

ii) Si $g \circ f$ es abierta (resp. cerrada) y g una inyección continua, entonces g es abierta (resp. cerrada).

E.4.13 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios topológicos $f : X \to Y$ una aplicación abierta (resp. cerrada) y sea $A \subset X$ la imagen inversa de un subconjunto $B \subset Y$ por f. Probar que la restricción $f \mid A : A \to B$ es una aplicación abierta (resp. cerrada).

E.4.14 En $\mathbb{R}$ con la topología usual, probar que:

i) Toda biyección continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es abierta.

ii) Toda función polinomial $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cerrada.

E.4.15 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con sus topologías usuales.

$$\varphi(x, \delta) = \sup\{\mid f(s) - f(t) \mid\mid, t \in (x - \delta, x + \delta)\}$$

$$\varphi(x) = \inf\{\varphi(x, \delta) \mid \delta > 0\}$$

Probar:

i) φ es superiormente semicontinua.

ii) f continua en $x \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$.

iii) El conjunto de puntos de continuidad de una función arbitraria de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ es un G_δ.

CAPÍTULO 5

E.5.1 Sea $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$

i) Muestre que las partes de X de la forma

$\prod\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ($U_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$ para cada α), forma la base de una topología $\mathcal{X}$ en X.

ii) Muestre que la topología producto en X es más gruesa que la topología $\mathcal{X}$ en X.

iii) Muestre que la topología es discreta si cada factor X_α tiene la topología discreta.

iv) Muestre que existen filtros no convergentes $\mathcal{F}$ sobre X tales que cada una de sus proyecciones converge.

E.5.2 Sean Y y Z subespacios de un espacio topológico X tales que $X = Y \cup Z$. Muestre que si un conjunto M de $Y \cap Z$ es abierto (resp. cerrado) en Y y en Z, entonces M es abierto (resp. cerrado) en X.

E.5.3 Sean Y y Z subespacios de un espacio topológico X tales que $X = Y \cup Z$ y tal que $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$, donde $A = Y \cap \complement Z$ y $B = Z \cap \complement Y$.

i) Muestre que si M es cualquier subconjunto de X, entonces la cerradura de M en X es la unión de la cerradura de $M \cap Y$ en Y y de la cerradura de $M \cap Z$ en Z. Deduzca que si $M \cap Y$ es cerrado (resp. abierto) en Y y $M \cap \mathcal{Z}$ es cerrado (resp. abierto) en Z, entonces M es cerrado (resp. abierto).

ii) Sea f una aplicación de X en un espacio topológico X'. Muestre que si f/y y f/z son continuas, entonces f es continua.

E.5.4 Sea $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia infinita de espacios topológicos tal que cada X_α contiene al menos dos puntos distintos a_α, b_α y tal que existe una vecindad de b_α que no contiene a a_α.

i) Sea $C = \{x_\beta \mid \beta \in I\}, C_\beta \in X = \times\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ tal que $\pi_\beta(x_\beta) = b_\beta$ y $\pi_\alpha(x_\alpha) = a_\alpha, \alpha \neq \beta$.

Muestre que todo punto de C es asilado.

ii) Deduzca de i) que la topología de X tiene base numerable si y sólo si I es numerable y la topología de cada X_α tiene base numerable.

iii) Muestre que si el conjunto de índices I no es numerable, el punto $b = (b_\alpha)$ de X no tiene un sistema fundamenltal de vecindades numerable.

E.5.5 Sea R una relacion de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por xRy si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in (n, n+1]$. Probar que la aplicacion canónica $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/R$ no es ni abierta ni cerrada.

E.5.6 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico.

$$D = \{x \in X \mid \{x\} \in \mathcal{X}\},\ E = X \backslash D$$

Muestre que

$$\mathcal{X} = \mathfrak{F}(i_E) \Longleftrightarrow E \in \mathcal{X}$$

donde i_E es la inyección canónica.

E.5.7 Sea T la relación de equivalencia en $\mathbb{Q}$ que se obtiene identificando todos los puntos de $\mathbb{Z}$. Muestre que T es cerrada y que si U es la relación de igualdad en $\mathbb{Q}$, entonces la biyección canónica de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/U \times T$ sobre $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}/T)$ no es un homeomorfismo.

E.5.8 Sean $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico, $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de funciones de X en X_α.

Muestre que $\mathcal{X} = \mathcal{J}(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ si y sólo si para to filtro $\mathcal{F} \in X, \mathcal{F} \to a$ equivale a que $f_\alpha\{\mathcal{F}\} \to f_\alpha(a)$ para todo $\alpha \in I$.

E.5.9 i) Sean $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ conjuntos y para todo $\alpha \in I$, sea $\mathcal{F}_\alpha$ un filtro en X_α.

Sea $\mathcal{B}$ la colección en $X = \prod\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ cuyos elementos son de la forma $\prod\{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ donde $F_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de índices y $F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo α. Muestre que $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X (el filtro $\mathcal{F}$ generado por $\mathcal{B}$ se llama filtro producto de los filtros $\mathcal{F}_\alpha$).

ii) Muestre que en i) es suficiente que la colección $\mathcal{B}$ esté formada por productos $\prod\{F_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{I}\}$, donde $F_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}_\alpha$ es una base de $\mathcal{F}_\alpha$.

iii) Muestre que el filtro de vecindades de un punto cualquiera $x = (x_\alpha) \in X$en $\prod X_\alpha$ es el producto de los filtros de vecindades de cada una de los $x_\alpha \in X_\alpha$.

E.5.10 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico. Probar que la unión de una familia localmente finita de cerrados es cerrada.

CAPÍTULO 6

E.6.1 Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$.

i) Demostrar que si A y B son cerrados tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Mostrar mediante un ejemplo que no obtenemos el mismo resultado si uno de los conjuntos no es cerrado.

ii) Supongamos que A y B son conexos y que $\overline{A} \cup B \neq \varnothing$. Demostrar entonces que $A \cup B$ es conexo.

E.6.2 Para cada par de enteros positivos a y b sea

$$U(a, b) = \{an + n \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{N}$$

Probar que:

i) $\{U(a, b) \mid a$ es primo relativo $b\}$es una base para la topología $\mathcal{X}$ en $\mathbb{N}$.

ii) Para cada número primo p, el conjunto $\{kp \mid k \in \mathbb{N}\}$ es cerrado $(\mathbb{N}, \mathcal{X})$..

iii) Si p es el conjunto de todos los números primos, entonces $P^\circ = \varnothing$.

iv) $(N, \mathcal{X})$ es conexo. (Indicación: probar que si $W \in \mathcal{X}$ y si $W \cap U(a, b) = \varnothing$, entonces ningún múltiplo de a puede pertenecer a W.

E.6.3 Utilizando la caracterización V de los espacios conexos, demostrrar el siguiente resultado:

Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables definidas sobre un intervalo (a, b) y con valores en $\mathbb{R}$. Supóngase que:

i) Existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que la sucesión $(f_n(x_0))$ converge.

ii) Para todo $x \in (a, b)$ existe un entorno $\mathcal{V}(x)$ de x en (a, b) tal que en $\mathcal{V}(x)$ la sucesión de las derivadas (f'_n) converge uniformemente.

Probar que para todo $x \in [a,b)$ la sucesión (f_n) converge uniformemente en $\mathcal{V}(x)$. Además, si para $x \in (a,b)$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$ y $g(x) = \lim_n f'_n(x)$

entonces $g(x) = f'(x)$ para cada $x \in (a,b)$.

Concluir que en particular si $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ es una serie uniformemente convergente en cada subintervalo cerrado y acotado de (a,b), de funciones derivables que cumple ii) (sustituyendo (f'_n) por $(\sum_{k=0}^{n} U'_k(x))$ entonces para todo $x \in [a,b)$ se tiene:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(x)$$

E.6.4 Sean $(X,\mathcal{X}),(Y,\mathcal{D})$ espacios topológicos conexos y A y B subconjuntos propios de X y Y respectivamente. Mostrar que el espacio producto $X \times Y$ el complemento de $A \times B$ es un conjunto conexo.

E.6.5 Probar que un espacio topológico $(X,\mathcal{X})$ es conexo si y sólo si para cualquier cubierta abierta $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ y cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe una subfamilia finita $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ de I tal que:

$$x \in U_{\alpha 1} \wedge y \in U_{\alpha k} \wedge (U_{\alpha j} \cap U_{\alpha i} \neq \varnothing \Longleftrightarrow \mid j - i \mid \leq 1)$$

E.6.6 Sea $(X,\mathcal{X})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X, tal que toda clase de equivalencia según R esté contenida en una componente conexa de X. Demostrar que los componenetes conexas de X/R son las imágenes canónicas de los componentes conexas de $X > 0$

E.6.7 Probar que toda aplicación continua f de un espacio conexo en C tal que e^f sea constante, es constante.

E.6.8 Sean $(X,\mathcal{X})$ e $(Y,\mathcal{D})$ conexos y f una aplicación de $X \times Y$ en $(Z,\mathcal{Z})$ tal que cada una de las aplicaciones parciales $f_y : X \to Z$y $f_x : Y \to Z$ son continuas. Demostrar que $f[X \times Y]$ es conexo.

E.6.9 Demostrar que toda aplicaión continua de E^1 en $\mathbb{R}$ alcanza el mismo valor al menos en dos puntos opuestos de E^1.

E.6.10 Sea $(X,\mathcal{X})$ localmente conexo y $A \subset Y$. Si ∂A es localmente conexo probar que A es loocalmente conexo.

E.6.11 Sea $(X,\mathcal{X})$ localmente conexo, $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados y $A \cap B$ es localmente conexo. Probar que entonces ambos conjuntos A y B son localmente conexos.

E.6.12 En el plano $\mathbb{R}^2$ sea el subespacio

$$E = \{(x,y) \mid (x \in \pi \ \wedge \ y \in [0,1]) \ \vee \ (x \in \mathbb{Q} \ \wedge \ y \in [-1,0])\}$$

i) Probar que E es conexo pero no localmente conexo.

ii) Si $t \mapsto (f(t), g(t))$ es una aplicación continua de $[0,1]$ en E, probar que f es constante.

(*Indicación:* Si existen puntos $t_0 \in [0,1]$ tales que $g(t_0) < 0$, considérese el conjunto abierto $U \subset [0,1]$ de todos los t tales que $9(t) < 0$ y aplíquese el hecho de que todo abierto de $\mathbb{R}$ se puede poner como una unión a lo más numerable de intervalos abiertos disjuntos).

E.6.13 Definir una topología sobre $\mathbb{R}$ más fina que la usual para la cual $\mathbb{R}$ sea conexo pero no localmente conexo.

E.6.14 Sea α un número irracional. Se considera la aplicación de f de $\mathbb{R}$ en el toro T^2 que a todo $t \in \mathbb{R}$, le hace corresponder la imagen canónicas en T^2 del punto $(t, \alpha t) \in \mathbb{R}^2$.

Claramente f es inyectiva y continua. Demostrar que para la topología inicial $\mathcal{X}$ definida por f en $\mathbb{R}, (\mathbb{R}, \mathcal{X})$ es conexo, pero no localmente conexo.

E.6.15 Se dice que un espacio topológicode Hausdorff es extremadamente disconexo si en él la cerradura de todo abierto es tambien un conjunto abierto. Probar que un espacio extremadamente disconexo no contiene nigún subespacio homeomorfo al subespacio $\mathbb{R}$ formado por los números $\frac{1}{n}; n \in \mathbb{Z}^*$ y el número 0.

Deducir que entre los espacios metrizables, los discretos son los únicos extremadamente disconexos. (Estos espacios adquieren importancia en la teoría de álgebras uniformes.)

CAPÍTULO 7

E.7.1 Sea $F : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D})$ una sobreyección continua. ¿Si $(X, \mathcal{X})$ es un T_i−espacio $(i = 0, 1, 2)$, entonces $(Y, \mathcal{D})$ es necesariamente un T_i-espacio? ¿Si $(Y, \mathcal{D})$ es un T_i-espacio, entonces $(X, \mathcal{X})$ es necesariamente un T_i-espacio?.

E.7.2 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Hausdorff. Probar: Si $x_1, ..., x_n$ son puntos distintos de $(X, \mathcal{X})$ entonces existen abierto mutuamente disjuntos $U_1, ..., U_n$ tales que $x_i \in U_i$.

E.7.3 Probar: todo espacio de Hausdorff infinito contiene un subespacio infinito discreto.

E.7.4 Sean $(x, \mathcal{X})$ de Hausdorff y $A \subset X$. Probar: A' es cerrado y $\overline{(A)'} = A'$.

E.7.5 Probar: Si $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff, entonces el cono CX es de Hausdorff.

E.7.6 Probar: Si $(X, \mathcal{X})$ es regular, entonces *dos puntos distintos $x, y \in X$ pueden separarse por dos vecindades cerradas disjuntas.* Dar un ejemplo de un espacio

topológico que cumple esta prapiedad sin ser regular.

E.7.7 Sea R una relación de equivalencia sobre un espacio regular $(X, \mathcal{X})$ tal que la aplicaión canónica $\varphi : X \to X/R$ es abierta y cerrada. Entonces el espacio cociente X/R es de Hausdorff.

E.7.8 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio completamente regular y sea $\mathcal{C}_b(\mathcal{X})$ el conjunto de todas las fuunciones reales continuas acotadas sobre $(X, \mathcal{X})$. Para todo $x \in X, f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X})$, o sea

$$U(x, f, \varepsilon) = \{y \mid\mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon\}$$

Probar que $\{U(x, f, \varepsilon) \mid f \in \mathcal{C}_b(X),\ x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ es una subbase de $\mathcal{X}$.

E.7.9 Sea $(X, \mathcal{X})$ completamente regular y sea $f : X \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente. Probar que $f = \sup(f_\alpha)$ para una familia apropiada $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de funciones continuas.

Inversamente: Si toda función semicontinua inferiormente sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ puede representarse como supremo de una familia de funciones continuas, entonces $(X, \mathcal{X})$ es completamente regular.

CAPÍTULO 8

E.8.1 Sea $\prec$ la relación de orden lexicográfica sobre $X = [0, 1]^2$ definida por

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x < x' \ \vee \ (x = x' \ \wedge \ y \leq y')$$

Probar que X provisto de la topología de orden asociada es compacto.

E.8.2 Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normadao. Probar: Si $K \subset E$ es compacto y $C \subset E$ es cerrado entonces $K + C$ es cerrado en E.

Mostrar mediante un ejemplo que en general la suma de dosc cerrados no es cerrado.

E.8.3 Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto y $H \subset \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ tal que

i) $f, g \in H \Longrightarrow fg \in H$.

ii) Para todo $x \in X$ existe una vecindad $U_x \in \mathcal{V}(x)$ y una función $f_x \in H$ tal que $f_x[U_x] = \{0\}$.

Probar: H contiene la función constante $f \equiv 0$.

E.8.4 Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto y conexo y sea $C \subset X$ cerrado. Probar que existe un cerrado conexo mínimo B tal que $B \subset C$.

E.8.5 Probar que todo T_2-espacio localmente compacto es regular.

E.8.6 Probar:

i) Todo AN 2 espacio localmente compacto es numerable al infinito.

ii) Un espacio localmente compacto es numerable al infinito si y sólo si es de Lindelöf.

E.8.7 Sea $(X, \mathcal{X})$ completamente regular, $C \subset X$ compacto y $U \in \mathcal{V}(C)$.
Probar que existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in C$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in X \mid U$.

E.8.8 Sea $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{D})$ continua y (C_n) una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de $(X, \mathcal{X})$. Probar que

$$f\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f[C_n]$$

E.8.9 Sea $(X, \mathcal{X})$ compacto, R una relación de equivalencia sobre X y $\varphi : X \to X/R$ la aplicación canónica.
Probar: X/R es de Hausdorff si y sólo si φ es cerrada.

E.8.10 Sabemos que las proyecciones sobre un espacio producto en general son abiertas pero no cerradas. Veremos ahora que las proyecciones *paralelas a espacios coordenados compactos son cerradas.* Probar: Si $(X, \mathcal{X})$ es un compacto e $(Y, \mathcal{D})$ un T_2-espacio, entonces la proyección $(x, y) \mapsto y$ de $X \times Y$ sobre Y es cerrada.

E.8.11 Sea f una aplicación de un espacio$(X, \mathcal{X})$ en un T_2-epacio $(Y, \mathcal{D})$.
Probar:

i) Si f es continua entonces la gráfica de f es cerrada en $X \times Y$ pero el inverso no se cumple necesariamente (dar un contraejemplo para $X = Y = \mathbb{R}$).

ii) Si $(Y, \mathcal{D})$ es T_2-compacto entonces una aplicación $f : X \to Y$ es continua si y sólo si su gráfica es cerrada en $X \times Y$.

Indicación: Utilizar ejercicio E.8.10.

E.8.12 Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio $(Y, \mathcal{D})$ compacto Y $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ continua. Probar: las aplicaciones

$$M(\cdot) = \sup\{f(., y) \mid y \in Y\} \text{ y } m(.) = \inf\{f(., y) \mid y \in Y\}$$

son continuas.

Indicación: Para todo real $r \in \mathbb{R}$ definida $S_r = \{(x, y) \mid f((x, y)) \geq r\}$ y utilice ejercicio E.8.10.

E.8.13 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{D})$ espacios compactos y sea f una aplicación de $X \times Y$ en un T_2-espacio $(Z, \mathcal{Z})$ tal que para todo $x \in X$ la aplicación $y \mapsto f(x, y)$ es inyectiva. Sea $z_0 \in Z$. Probar:

i) El conjunto $C = \{x \in X \mid \exists\, y\, Y, (f(x,y) = z_0)\}$ es cerrado en $(X, \mathcal{X})$.

ii) La 'función implícita' $\varphi : C \to Y$ definida por $f(x, \varphi(x)) = z_0$ $(x \in C)$ es continua sobre C.

E.8.14 Sea $(X, \mathcal{X})$ numerablemente compacto e $(Y, \mathcal{D})$ un AN 1-espacio.
Probar: Toda biyección continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo.

E.8.15 Sea $X = I^I$ el espacio de todas las funciomes $x : [0,1] \to [0,1]$ provisto de la topología producto. Sea B el conjunto de todos los $x \in X$ para los cuales existe un subconjunto numerable $N \subset I$ tal que $\pi_t(x) = 0$ para todos los $t \in N$ y $\pi_t(x) = 1$ para todos los $t \in I \setminus N$. Probar: B es numerablemente compacto pero no es compacto.

E.8.16 Probar: un espacio $(X, \mathcal{X})$ es de Lindelöf (resp. compacto), si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento numerable (resp. finito).

E.8.17 Probar: la compactificación de Stone-Cěch es conexo si y sólo si X es conexo.

E.8.18 Probar que la compactificación de Stone-Cěch βX de $(X, \mathcal{X})$ está caracterizada por la propiedad siguiente: Toda aplicación continua f de X en $[0,1]$ tiene una (única) prolongación continua $F : \beta X \to [0,1]$.

E.8.19 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio normal, $C \subset X$ cerrado y f una aplicación continua de C en un espacio completamente regular $(Y, \mathcal{D})$. Probar que f puede prolongarse a una aplicación continua $F : X \to \overline{Y}$ donde $\overline{Y}$ es un espacio compacto que contiene a $(Y, \mathcal{D})$.

E.8.20 Sean $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios localmente compactos y $(X^*, \mathcal{X}^*)$ (resp.$(Y^*, \mathcal{D}^*)$) las compactificaciones de Aleksandrov obtenidas por adjunción de los puntos infinitos ω (resp.ω'). Una aplicación $f : X \to Y$ puede prolongarse continuamente a X^* poniendo $f(\omega) = \omega'$ si y sólo si para todo compacto $K \subset Y$ la imagen recíproca $f^{-1}[K]$ es compacta. (Las aplicaciones con esta propiedad se llaman *aplicaciones propias.)*

CAPÍTULO 10

E.10.1 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio regular que puede ser cubierto por una sucesión (C_n) de subconjuntos compactos.
Probar que $(X, \mathcal{X})$ es paracompacto.

E.10.2 Probar que si todo subconjunto abierto de un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ es compacto entonces todo subespacio $(X, \mathcal{X})$ es paracompacto.

E.10.3 Sea $(X, \mathcal{X})$ paracompacto y $A \subset X$ cerrado. Probar que X/A es paracom-

pacto.

E.10.4 Sea $(X, \mathcal{X})$ paracompacto y $A \subset X$ un conjunto con la siguiente propiedad: para cada abierto $U \supset A$, existe un F_σ-conjunto F con $A \subset F \subset U$. Probar que A es paracompacto.

*E.10.5 Un espacio es llamado numerablemente paracompacto si cada cubierta abierta numerable tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Probar: $(X, \mathcal{X})$ es numerablemente paracompacto si y sólo si para toda sucesión de abiertos $G_n, G_n \supset F_n$, tales que $\cap \overline{G_n} = \varnothing$.

Indicación : Para probar la necesidad basta tomar B como un refinamiento localmente finito de $\{X \backslash F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y construir G_n convenientemente.

Para probar la suficiencia, dado un cubrimento abierto $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, poner $F_n = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y hallar una familia conveniente (G_n) de abiertos tales que $G_n \supset F_n$. Entonces la familia $(G_n \cap U_{n+1})$ es el refinamiento buscado.

E.10.7 *Particiones de unidad diferenciables*). Probar que en una variedad diferenciable de clase $\mathfrak{C}^k$ existen particiones de unidad difernciables de clase $\mathfrak{C}^k$ subordinados a cada cubierta abierta.

Indicación: Ver ejercicio 7.6.13.

E.10.7 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio metrizable y R una relación de equivalencia cerrada en X.

Probar que si las clases de equivalenccia de la relación R son compactas, entonces el espacio X/R es metrizable.

*E.10.8 Probar que un espacio compacto $(X, \mathcal{X})$ es metrizable si y sólo si la igualdad de $X \times X$ es un G_σ-conjunto.

Indicación: Sea $\triangle = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, donde G_n es abierto en $X \times X$ para todo n.

Derfinir para cada n una cubierta abierto finita $\mathcal{D}_n$ de X tal que $U \times U \subset G_n$ para cada $U \in \mathcal{D}_n$.

*E.10.9 Se dice que un espacio topológico es perfectamente normal si es normal y si además en él todo cerrado es un G_σ.

Probar:

i) Si el producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos cualesquiera $(X, \mathcal{X})$ y $(Y, \mathcal{D})$, es tal que todos sus subespacios son normales entonces o todo subconjunto numerable de X es cerrado o Y es perfectamente normal.

Indicación: Suponer que existe un conjunto numerable $M \subset X$ tal que $\overline{M} \backslash M \neq \varnothing$ y un cerrado $N \subset Y$ que es un G_σ. Considerar los conjuntos

$$A = M \times N \text{ y } B = \{x\} \times Y \backslash N$$

donde $x \in \overline{M} \backslash M$.

ii) Usando los ejercicios 8 y 9i) demostrar que un espacio compacto $(X, \mathcal{X})$ es metrizable si y sólo si el producto $X \times X \times X$ es perfectamente normal.

CAPÍTULO 11

E.11.1 Sea X un conjunto y $R \subset X \times X$ una relación de equivalencia sobre X. Probar:

i) $B := \{\mathbb{R}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de vecindades para una estructura uniforme $\mathcal{U}_R$ sobre X.

ii) Si X es finito, toda estructura uniforme sbre X se define de tal forma por una relación de equivalencia.

E.11.2 Sea $X = \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Para $n \geq 1$ sea $U_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \equiv 0 \bmod p^n\}$.

Probar:

i) $B = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ es un sistema fundamental de vecindades para una estructura uniforme $\mathcal{U}_p$ (llamada p-ádica) sobre $\mathbb{Z}$.

ii) Determinar una métrica sobre $\mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_d$.

iii) Sean $p, p\prime$ dos números primos diferentes. Probar que las estructuras uniformes $\mathcal{U}_p$ y $\mathcal{U}_{p'}$ no son comparables.

E.11.3 Sea $\mathcal{U}_i (i = 1, ..., 5)$ las 5 estructuras uniformes siguientes sobre $\mathbb{R}$.

i) $\mathcal{U}_1 = U_d$, donde $d(x, Y) = \mid y - x \mid$

ii) $\mathcal{U}_2 = U_{d'}$, donde $d'(x, y) = \mid \text{ arc tan } x - \text{ arc tan } y \mid$

iii) $\mathcal{U}_3 = U_{\{df, dg\}}$, donde $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

iv) $\mathcal{U}_4 = U_{\{df \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{continua}\}}$

v) $\mathcal{U}_5 = U_{\{df \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{continua y acotada}\}}$

Probar: Todas estas estructuras uniformes definen sobre $\mathbb{R}$ la topología usual. Dibujar el gráfico del conjunto ordenado $(\{U_i \mid i = 1, ..., 5\}, C)$. Determinar cuáles son las aplicaciones informemente continuas de $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_i)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{U}_1)$ $(i = 1, ..., 5)$.

E.11.4 Proveamos $\mathbb{R}$ de su estructura uniforme aditiva. Probar:

i) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\mid x - y \mid \leq 1 \ \vee \ xy \geq 1\}$ es un entorno cerrado en $\mathbb{R}^2$.

ii) $V(\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\})$ no es cerrado aunque $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

E.11.5 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio completamente regular. Probar

i) La estructura uniforme más fina $\mathcal{U}$ sobre X que define la topología χ está caracterizada por la propiedad universal: Para cualquier espacio uniforme $(X', \mathcal{U}')$, toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{X}) \to (X', \mathcal{X}u')$ es uniformemente continua de $(X, \mathcal{U})$ en $(X', \mathcal{U}')$.

ii) La estructura uniforme inducida sobre X por la estructura uniforme de sucompactificación se Stone-Cech $\widetilde{X}$ es la estructura uniforme más gruesa para la cual todas las funciones continuas $f : X \to [0, 1]$ son uniformemente continuas.

E.11.6 Sea $(X, \mathcal{X})$ un AN 2-espacio localmente compacto de Hausdorff. Probar que existe una métrica d tal que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_d$ y $(X, \mathcal{U}_d)$ es completo.

E.11.7 Sea X un conjunto y $(X', \mathcal{U}')$ un espacio uniforme. Probar

i) Para toda aplicación f de X en X' la base de filtro $\mathcal{B} = \{(f \times f)^{-1}[W] \mid W \in \mathcal{U}'\}$ define una estructura uniforme $\mathcal{U}$ $(f, (X', \mathcal{U}'))$ sobre X (llamada *estructura uniforme inducida por f sobre X*).

ii) $\mathcal{U}$ $(f, (X', \mathcal{U}'))$ es la estructura uniforme más gruesa sobre X para la cual $f : X \to X'$ es uniformemente continua.

E.11.8 Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de aplicaciones de un conjunto X en un espacio seudométrico (Y, d). Entonces la estructura uniforme inicial $\mathcal{U}$ definida por $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ sobre X es igual a la estructura uniforme $\mathcal{U}_\mu$ definida por la colección de seudométricas $\mu = \{d_{f\alpha} \mid \alpha \in I\}$ donde

$$d_{f\alpha}(x, y) = d(f_\alpha(x), f_\alpha(y))$$

E.11.9 Sea $((X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ una familia de estructuras uniformes. Entonces se define sobre una suma $X = \sqcup X_\alpha$ de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$, la estructura uniforme suma como la estructura uniforme más fina $\mathcal{U}$ para la cual todas las inyecciones canónicas $i_\alpha : X_\alpha \to X$ son uniformemente continuas. Probar que $\mathcal{U}$ define la topología suma sobre X.

E.11.10 Sea G un grupo y $\mathcal{F}$ un filtro sobre G que cumple

i) $V \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists W \in \mathcal{F} : W \cdot W = \{x \cdot y \mid x, y \in W\} \subset V$.

ii) $V \in \Longrightarrow V^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in V\} \in \mathcal{F}$.

iii) $a \in G \ \wedge \ V \in \mathcal{F} \Longrightarrow aVa^{-1} = \{a \times a^{-1} \mid x \in V\} \in \mathcal{F}$.

Probar: Existe una única topología $\mathcal{X}$ sobre G (compatible con la estructura del grupo) tal que $\mathcal{F}$ es el filtro de vecindades del elemento neutro e en el grupo topológico $(G, \mathcal{X})$.

E.11.11 Sea $(G, \mathcal{X})$ un grupo topológico. Probar:

i) Los filtros de vecindades $\mathcal{V}(a)$ de $a \in G$ se obtienen por multiplicación del filtro $\mathcal{V}(e)$, donde e es el neutro de $G : \mathcal{V}(a) = a\mathcal{V}(e) = \mathcal{V}(e)a$.

ii) Las aplicaciones $x \mapsto xa, x \mapsto ax, x \mapsto axa^{-1}$ son homeomorfismos de $(G, \mathcal{X}); (a \in G)$.

E.11.12 Probar : Todo grupo topológico es completamente regular.

E.11.13 Sea $(G, \mathcal{X})$ un grupo topológico. Probar:

i) Si $G' \subset G$ es un subgrupo de G, entonces $\overline{G'}$ es un subgrupo de G.

ii) Todo subgrupo abierto de G es cerrado.

iii) Sean $(G, \mathcal{X}), (G', \mathcal{X}')$ dos grupos topológicos y $h : G \to G'$ un homomorfismo continuo en e (neutro de G). Entonces h es uniformemente continuo.

E.11.14 Sea $(G, \mathcal{X})$ un grupo topológico. Probar: la componente conexa del elemento neutro e es un subgrupo normal cerrado.

E.11.15 Probar: Todo grupo localmente compacto $(G, \mathcal{X})$ es completo con respecto a las dos estructuras uniformes canónicamente asociadas $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ (ejemplo 10.1.11).

*E.11.16 Sea $(G, \mathcal{X})$ un grupo conmutativo localmente compacto.

Se llama *carácter* sobre G a todo homomorfismo continuo $\mathcal{X}$ de G en el grupo del círculo $T = \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid= 1\}$ provisto de la topología inducida. Probar:

i) El conjunto $\widehat{G}$ de todos los caracteres sobre G forma un grupo conmutativo con respecto a la multiplicación puntual.

ii) Los conjuntos $U(K, \varepsilon) := \{\chi \in \widehat{G} \mid\mid \chi(x) - 1 \mid< \varepsilon$ para todo $x \in X\}$ ($K \subset G$ compacto, $\varepsilon > 0$), forman un sistema fundamental de vecindades del neutro e para una topología X compatible con la estructura de grupo de G.

iii) $(\widehat{G}, \widehat{\mathcal{X}})$ es localmente compacto.

iv) Si G es compacto, entonces $\widehat{G}$ es un grupo discreto (i.e. $\widehat{\mathcal{X}}$ es la topología discreta).

v) Si G es discreto entonces $\widehat{G}$ es compacto.

vi) $\widehat{\mathbb{R}}= \mathbb{R}$; $\widehat{\mathbb{N}}= T$; $\widehat{T}= \mathbb{N}$.

E.11.17 Sea $(E, \mathcal{X})$ un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$. Probar:

i) Si $p : E \to \mathbb{R}$ es una seminorma continua, entonces $B_p := B_p(0,1) = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$ es una vecindad convexa cerrada de 0 que es simétrica, i.e. $-B_p = B_p$.

ii) Inversamente si B es una vecindad convexa simétrica de 0 en $(E, \mathcal{X})$ entonces el funcional de Minkowsky p_B asociado a B (E.1.13) es una seminorma continua sobre $(E, \mathcal{X})$ tal que: $B_{pB} = \overline{B}$.

iii) Si $B_1, ..., B_n$ son vecindades convexas simétricas de 0 y $p_1, ..., p_n$ los funcionales de Minkowsky correspondientes entonces $p : x \mapsto \sup\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$ es el funcional de Minkowsky para $B = B_1 \cap ... \cap B_n$.

iv) La estructura uniforme de un espacio localmente convexo $(E, \mathcal{X})$ puede definirse mediante una colección p de seminormas o sea $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_{\mathbb{X}}$ y por tanto $\mathcal{X}_p = \mathcal{X}$.

E.11.18 Demostrar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda inmersión por isometría de (X, d) en otro espacio métrico es cerrado.

*E.11.19 El siguiente ejercicio expone otro método de completamiento de un espacio métrico.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Dos sucesiones de Cauchy (x_n) y (y_n) en (X, d) se dice que son equivalentes si $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Demostrar que esta relación es una relación de equivalencia.

ii) Probar que el conjunto cociente $\tilde{X}$ asociado a dicha relación con la métrica, $\tilde{d}((x_n), (y_n)) = \lim d(x_n, y_n)$ es un espacio métrico completo.

iii) Probar que la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} i : X & \to & i(X) \subset \tilde{X} \\ x & \mapsto & (x_n) \end{array}$$

donde $x_n = x$ $(n \in \mathbb{N})$ es una isometría y que el par $(i, \overline{i(X)})$ es por tanto un completamiento de (X, d).

iv) Generalizar este proceso de completamiento a T_2-espacios uniformes cualesquiera sustituyendo sucesiones de Cauchy por filtros de Cauchy.

E.11.20 Demostrar que un espacio métrico (X, d) es compacto si y sólo si (X, δ) es completo para cualquier métrica δ topológicamente equivalente a d.

E.11.21 Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de puntos en un espacio de Hilbert $(H, \langle . \rangle)$. Probar que son equivalentes

i) $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es un conjunto total.

ii) $\langle x_\alpha, x \rangle = 0, \forall \alpha \Rightarrow x = 0$. Si la familia es ortonormal entonces i) y ii) son equivalentes a:

iii) $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia ortonormal maximal.

E.11.22 Demostrar que todo espacio de Hilbert separable tiene un subconjunto total numerable.

E.11.23 Utilizando la aplicación 3 del § 10.6 demostrar que para todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot \rangle)$ se tiene $H = M \oplus M^\perp$ donde:

$$M^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in M \, \langle x, y \rangle = 0\}$$

es llamado ortogonal de M.

E.11.24 Utilizando el ejercicio E.11.23 demostrar que para un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot \rangle)$ se tiene el siguiente resultado, que precisa el ejercicio E.1.12.

La aplicación

i) $H \to H'$ (dual topológico de H). $a \mapsto a'$ donde $a'(x) = \langle x, a \rangle$ es una isometría.

E.11.25 Sea (a_n) un sistema ortonormal total es un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot \rangle)$. Probar

i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x, a_n \rangle \mid^2$ es convergente y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x, a_n \rangle \mid^2 = \| x \|^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, a_n \rangle \langle y, a_n \rangle = \langle x, y \rangle$$

ii) La serie de término general $\langle x, a_n \rangle a_n$, es convergente en H y se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, a_n \rangle a_n$$

Recíprocamente para cualquier sucesión de escalares (λ_n) tal que $\sum_{n=1}^{\infty} | \lambda_n |^2$ es convergente, existe un único vector $x \in H$ tal que $\langle x, a_n \rangle = \lambda_n$ para todo n.

*E.11.26 i) Sea (X, d) un espacio *ultramétrico* (E.1.1). Probar que para que una sucesión (x_n) en X sea de Cauchy es necesario y suficiente que
$\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

ii) Sea A un conjunto arbitrario, X el conjunto de todas las sucesiones infinitas $x = (x_n)$ de elementos de A. Para cada par de elementos distintos

$x = (x_n)$ $y = (y_n)$ de X sea $k(x, y)$ el menor entero tal que $x_n \neq y_n$. Sea

$$d(x, y) = \frac{1}{k(x, y)} \text{ si } x \neq y., d(x, y) = 0$$

Demostrar que d es una distancia ultramétrica en X y que el espacio métrico (X, d) es completo.

*E.11.27 Sea $E = \{a_1, a_2, ..., \}$ un conjunto numerable

$$d(a_p, a_p) = 0 \text{ y } d(a_p, a_q) = 10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} (p \neq q)$$

i) Probar que d es una métrica en E y que (E, d) es completo.

ii) Sea $f : E \to E$ definiida por $f(a_p) = a_{p+1}$. Probar que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pero f no tiene ningún punto fijo en E.

iii) Modificando un poco este ejemplo construir un espacio métrico (F, δ) y una aplicación f de F en sí mismo tal que $(\delta(f(x), f(y)) < \delta(x, y)$ y que además posee un punto fijo $a \in F$ y sin embargo para todo $x \neq a$ la sucesión de valores iterados $(f^n(x))$ no tienda hacia a.

E.11.28 Demostrar que el espacio normado (E, N) definido en el ejercicio E.1.6 es completo.

E.11.29 Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme tal que toda toda sucesión de puntos en X tenga al menos un punto adherente en X. Probar que X es precompacto.

(*Indicación*: Por reducción al absurdo).

*E.11.30 Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para todo $V \in \mathcal{U}$ sea $\tilde{V} \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ formado por los pares (M, N) de pares de X tales que se tiene
simultáneamente $M \subset V(N)$ y $N \subset V(M)$.

i) Mostrar que los conjuntos $\tilde{V}$ constituye un sistema fundamental de entornos de una estructura uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$ sobre $\mathcal{P}(X)$.

ii) Sea $\mathfrak{F}(X)$ el conjunto de las partes cerradas no vacías de X provisto de la estructura uniforme inducida por la estructura uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$. Demostrar que si X es precompacto, también lo es $\mathfrak{F}(X)$.

E.11.31 Probar que si todo punto de todo espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ tiene una vecindad la cual es un espacio de Baire, entonces $(X, \mathcal{X})$ es un espacio de Baire.

E.11.32 Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por los puntos $(r, 0)$ con $r \in \mathbb{Q}$ y los puntos $(f\backslash n, \frac{1}{n})$ donde $n \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}$. Probar que X es un espacio de Baire.

*E.11.33 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Baire y sea (F_α) una familia de funciones semicontinuas inferiormente sobre X tales que, en todo punto $x \in X$, $\sup_\alpha f_\alpha(x)$ es finito. Entonces probar que todo conjunto abierto no vacío en X contiene un conjunto abierto no vacío en el cual la familia (f_α) es uniformementre acotada superiormente.

*E.11.34 Un espacio topológico $(X, \mathcal{X})$ se llama *polaco* si es metrizable con base numerable y si existe una métrica compatible con la topológia de X para la cual X es completo.

Probar las siguientes propiedades:

i) Todo subespacio cerado de un espacio polaco es polaco.

ii) Todo subespacio abierto de un espacio polaco es polaco.

iii) El producto de una familia numerable de espacios polacos es polaco.

iv) Si $(X, \mathcal{X})$ es de Hausdorff entonces la intersección de una sucesión (A_n) de subespacios polacos de X es un subespacio polaco.

Concluir de iv) que: $\mathbb{I}$ considerado como subespacio de $\mathbb{R}$ es un espacio polaco.

*E.11.35 Probar que un espacio Y de un espacio polaco $(X, \mathcal{X})$ es polaco si y sólo si Y es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos en X.

Concluir que un espacio X es polaco si y sólo si es homeomorfo a una intersección numerable de conjuntos abiertos en el cubo $I^{\mathbb{N}}$ donde I es el intervalo $[0, 1]$.

CAPÍTULO 11

E.12.1 Sea X un conjunto y sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme de Hausdorff con card $Y \neq 2$. Sean σ_1 *y* $\sigma_2 \subset \mathcal{P}(X)$ colecciones saturadas por uniones finitas y por subconjuntos tales que $\sigma_1 \subset \sigma_2$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Probar que $\mathcal{U}_{\sigma 1}$, es estrictamente más gruesa sobre $\mathfrak{F}(X, \mathcal{Y})$ que $\mathcal{U}_{\sigma 2}$. En particular:

i) Si $(X, \mathcal{X})$ es un T_2-espacio no compacto, entonces $\mathcal{U}_c$ es estrictamente más gruesa que $\mathcal{U}_u$.

ii) Si $(X, \mathcal{X})$ T_2-espacio que contiene un subconjunto infinito compacto, entonces $\mathcal{U}_p$ es estrictamente más gruesa que $\mathcal{U}_c$.

E.12.2 Sea $I = [0, 1]$. Determinar un subconjunto denso numerable de $\mathfrak{F}_p(I, I)$. ¿$\mathfrak{F}_u(I, I)$ es tambien separable?

E.12.3 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y A una subálgebra de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.
Entonces la cerradura $\overline{A}$ de A en $\mathfrak{C}_u(X, \mathbb{R})$ es una subálgebra de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

E.12.4 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico $\sigma \subset \mathcal{P}(x)$ y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Probar:

i) Si $\overline{\sigma} = \{\overline{A} \mid A \in \sigma\}$ entonces las estructuras uniformes inducidas por U_σ y $U_{\overline{\sigma}}$ en $\mathfrak{C}(X, Y)$ son iguales.

ii) Si $(Y, \mathcal{U})$ es de Hausdorff y si $\cup\sigma$ es denso en X, entonces $\mathfrak{C}_\sigma(X, Y)$ es de Hausdorff.

E.12.5 Sea $I = [0, 1]$. ¿Cuáles de los subespacio siguientes de $\mathfrak{F}_p(I, I)$ son compactos?.

i) $\{f \in \mathfrak{F}(I, I) \mid f(0) = 0\}$.

ii) $\{f \in \mathfrak{C}(I, I) \mid f(0) = 0\}$.

iii) $\{f \in \mathfrak{C}(I, I) \mid f$ derivable y $\mid f'(x) \mid \leq 1$ para todo $x \in I\}$.

E.12.6 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(Y, \mathcal{U})$ un espacio uniforme.
Probar que la aplicación:

$$e : X \times \mathfrak{C}_{ca}(X, Y) \to Y$$

definida por $e(x, f) = f(x)$ no es necesariamente continua si $(X, \mathcal{X})$ no es localmente compacto.
(*Indicación:* Tomar $X = \mathbb{Q}, Y = [0, 1]$).

E.12.8 Sea $(X, \mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{D})$ espacios topológiccos. Para todo $S \in \beta(X), B \in \beta(Y)$ sea

$$F(A, B) = \{u \in \mathcal{C}(X, Y) \mid u[A] \subset B\}$$

Sea $\mathfrak{D}$ una cubierta abierta de X.
Denotaremos por $\mathcal{X}_{\mathfrak{D}}$ a la topología sobre $\mathfrak{C}(X, Y)$ generada por todos los conjuntos $(F(C, V)$ donde $V \in \mathcal{D}$ y C es un subconjunto cerrado en $(X, \mathcal{X})$ que está contenido en al menos un $U \in \mathfrak{D}$.
Probar:

i) $\mathcal{X}_{\mathfrak{D}}$ es más fina que $\mathcal{X}_{ca}$. Si $(X, \mathcal{X})$ es regular entonces la aplicación $(u, x) \mapsto u(x)$ de $\mathfrak{C}(X, Y) \times X$ en Y es continua si $\mathfrak{C}(X, Y)$ es provisto de la topología $\mathcal{X}_{\mathfrak{D}}$.

ii) Sea $(X, \mathcal{X})$ completamente regular. Probar que si existe una topología $\mathcal{X}'$ más gruesa sobre $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ con respecto a la cual la aplicación $(u, x) \mapsto u(x)$ es continua, entonces $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{ca}$.

E.11.9 Probar que para todo $M > 0.H = \{f \in \mathfrak{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid\mid f'(x) \mid \leq M$ para todo $x \in [0,1]\}$ es equicontinuo.

E.12.10 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio topológico y $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $H \subset \mathfrak{F}(X, E)$ equicontinuo en $x_0 \in X$ y $k > 0$.

Entonces el conjunto:

$$H_k = \left\{ \sum_i c_i U_i \mid U_i \in H, \sum_i \mid C_i \mid \leq k \right\}$$

es equicontinuo en x_0.

E.12.11 Sea $I = [-1, 1]$ y sea para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to I$$

definida por:

$$f_n(x) = \text{ sen } \sqrt{(x + 4n^2\pi^2)}.$$

Probar que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ es una sucesión equicontinua de funciones que es relativamente compacta en $\mathfrak{C}_c(\mathbb{R}_+, I)$ pero que no lo es en $\mathfrak{C}_u(\mathbb{R}_+, I)$.

E.12.12 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto y (f_n) una sucesión de aplicaciones continuas de X en X que converge puntualmente pero no uniformemetne a una función continua.

Probar que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en $\mathfrak{C}_p(X, \mathcal{X})$ pero no en $\mathfrak{C}_u(X, X) = \mathfrak{C}_c(X, X)$.

E.12.13 Sea $(X, U), (Y, U')$ espacio uniformes y $H \subset \mathcal{F}(X, Y)$. Se dice que H es uniformemente equicontinuo si:

$$\forall V \in U' \; \exists U \in U : (x, x') \in U \Longrightarrow (f(x), f(x')) \in \mathcal{V}$$

para toda $f \in H$.

Probar: H es uniformemente equicontinuo si y sólo si la aplicación $(x, h) \mapsto h(x)$ de $X \times H$ en Y es uniformemente continua, con respecto a la estructura uniforme $\mathcal{U}_u$ inducida sobre H.

E.12.15 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio de Lindelöf, $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ un conjunto filtrante inferirormente con respecto al orden $\leq$ tal que $\equiv \inf H$, es equicontinua. Probar

que existe una sucesión $(f_n), (f_n \in H)$ que converge puntualmente a g.

E.12.16 Sea i un intervalo compacto en $\mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión creciente de funciones $f_n \in \mathfrak{F}(I, \mathbb{R})$, que converge puntualmente sobre I a una función continua g.Probar que g es monótona y que (f_n) converge uniformemente a g.

E.12.17 Sea $(X, \mathcal{X})$ un T_2-espacio compacto, $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real y $H \subset (X, \mathbb{R})$. Probar: Si H es denso en $\mathfrak{C}_u(X, R)$ entonces toda $f \in \mathfrak{C}(X, E)$ puede aproximarse uniformemente por combinaciones lineales de funciones de H con coeficientes en E de la forma

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x) \ \ (a_i \in E, u_i \in H)$$

(*Indicación*: Considerar una cubierta finita $\mathcal{D}$ de X tal que $\delta[f[U]] < \varepsilon$ para todo $U \in \mathcal{D}$).

E.12.18 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto. Probar: si $\Im$ es un ideal cerrado de álgebra de Banach compleja. $\mathfrak{C}(X, C)$, entonces $f \in \Im$ implica $\overline{f} \in \Im$(obsérvese que $\overline{f}$ es límite uniforme de funciones de la forma gf).

Probar los resultadoa de la aplicación 5 para $\mathfrak{C}(X, C)$ en vez de $\mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

E.12.19 Sean $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ espacios compactos. Entonces toda función continua $f : X \to Y$ induce una aplicación:

$$f^* : \mathfrak{C}(Y) \to \mathfrak{C}(X)$$

definida por

$$f^*(h) = h \circ f \ (h \in \mathfrak{C}(Y)).$$

Probar:

i) f^* es un homemorfismo del álgebra $\mathfrak{C}(Y)$ en $\mathfrak{C}(X)$.

ii) f es sobreyectiva si y sólo si f^* es un isomorfismo de $\mathfrak{C}(Y)$ sobre una subálgebra de $\mathfrak{C}(X)$ que contiene a $< 1 >$.

iii) f es inyectiva si y sólo si f^* es sobreyectiva.

iv) Si f es homemorfismo entonces $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1})$.

E.12.20 Sea $(X, \mathcal{X})$ un espacio compacto. Probar: i) Para todo homomorfismo $h : \mathfrak{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ diferente de 0 existe un único punto $x \in X$ tal que $h(h) = f(x)$ para todo $f \in \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$.

ii) Sea $(Y, \mathcal{D})$ otro espacio compacto. Entonces para todo homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras: $\varphi : \mathfrak{C}(Y, \mathbb{R}) \to \mathfrak{C}(X, \mathbb{R})$ que aplica el elemento, $< 1 >$ sobre el elemento $< 1 >$ existe una única aplicación continua $f : X \mapsto Y$ tal que:

$$\varphi(g) = g \circ f \ \text{ para toda } \ g \in \mathfrak{C}(Y, \mathbb{R}).$$

Biografía del Dr. José Luis Fernández Muñiz

Figura 1: El 5 de febrero del 2001, apenas unos días antes de que cumpliera 74 años, falleció en la ciudad de Puebla, México, el Dr. José Luis Fernández Muñiz siendo profesor del Posgrado en Matemáticas adscrito a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a la que entrego los últimos años de su prolífera vida como docente e investigador.

El Dr. José Luis Fernández Muñiz nació en Villavaler, Asturias, España, el 21 de febrero de 1927. Hijo de dos maestros de aquella pequeña población, resultó altamente motivado por ellos hacia el estudio y la investigación, así como hacia la docencia. Con apenas diez años, debe emigrar con su madre y hermanas a Cuba, empujados por la Guerra Civil que ensangrentaba a España.

En Cuba estudió a la par que trabajó, hasta vencer el Bachillerato. Además obtuvo por correspondencia, el Título de Ingeniero en Construcciones Metálicas. Parecía que iba a dedicar su vida a esa rama, la que trabajaba desde los doce años, pero con el triunfo de la Revolución en Cuba, tuvo la oportunidad de continuar estudiando, la que no desaprovechó. Entre 1963 y 1968, cursó, sin dejar de trabajar, la Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de La Habana. Desde 1967 comienza a trabajar en esta misma Licenciatura y Universidad, donde llego a ser Jefe del Departamento de Análisis de la Facultad de Matemática y Computación, uno de los más prestigiados de dicha Universidad por la alta calificación de sus especialistas. No dejó de superarse y en 1975 defiende el grado de Maestro en Ciencias y, posteriormente, en 1983, el de Doctor en Ciencias.

Fue profesor de cursos de Licenciatura en la Universidad de La Habana, la Universidad de Matanzas, el Instituto Superior de Ciencias Médicas de La Habana, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas y Pinar del Río, todos en Cuba, así como en la Universidad Autónoma de Zacatecas, y la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Entre los cursos de Licenciatura impartidos a los estudiantes de la carrera en Matemáticas en la Universidad de La Habana se destacan materias como:

- Análisis Matemático, Análisis sobre Variedades y Análisis Funcional.
- Variable Compleja.

- Ecuaciones Diferenciales.
- Topología.
- Teoría de la Medida.
- Geometría diferencial y Geometría Analítica.

Además impartió cursos para Maestrías y Doctorados en: las Universidades de La Habana y Matanzas, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas, Holguín y Pinar del Río, todos en Cuba. En México en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la Universidad Autónoma de Zacatecas y la Universidad Autónoma de Coahuila. A este nivel impartió cursos sobre:

- Variable Compleja.
- Análisis Funcional, Análisis Complejo y Análisis Matemático en una y varias Variables.
- Teoría de la Aproximación.
- Integración de Funciones de Varias Variables.
- Diferenciación en Espacios Normados.
- Enseñanza de la Matemática.
- Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue.
- Desarrollo Histórico y Metodológico del Análisis Funcional.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Métodos en la Solución de Problemas.
- Teoría de Korovkin.
- Retículos de Riesz y de Banach.
- Curvas Críticas en Optimización no Lineal.

Desarrollo Estancias de Investigación en la Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Estatal de Moscú, Universidad Politécnica de Madrid, Universidad de Complutense de Madrid, Universidad de París 1-Pantheon Sorbone, Universidad de Nancy, Universidad de Bremen, Universidad de Extremadura, Universidad de París Sud, Universidad de Miami, Universidad de Warwick y el Instituto Politécnico Nacional de México.

En razón de su trabajo e investigaciones, estableció relación con matemáticos de renombre internacional como los doctores Baldomero Rubio Segovia, Fernando

Bombal, José Luis González Llavona, Antony Pritchard, Brian A. Coomes, Didier Dacunha Castell, Diedirich Hinrinchen y M. K. Potapov.

Publicó más de 17 artículos y 13 reseñas en revistas especializadas como: Revista Ciencias Matemáticas, Boletín de la Sociedad Cubana de Matemáticas, Cuadernos de Matemáticas de la UNAM, Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones del Seminario de Análisis de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Journal of Approximation Theory, Matemática Fundamental y Aplicada (en ruso), Complex Methods in Approximation Theory. Entre los temas de estas publicaciones destacan: *Teoremas de tipo Korovkin*, *Teoría de la Aproximación*, *Enseñanza de la Matemática*, *Teoremas de Banach y de Bohman*, *Retículos de Riesz* y *Topología General*.

Igualmente aparecieron más de 9 libros o folletos de su autoría, entre ellos: **Variable Compleja**, **Series de Fourier**, **Cálculos sobre Variedades**, **Aproximación por Fracciones Racionales con Polos Prefijados** (Tesis de Maestría), **Topología General**, **Análisis Matemático (Diferenciación de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Integración de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Funciones Paramétricas)**, **Teoremas de Aproximación para Funciones de una y Varias Variables Analíticas en una Franja** (Tesis de Doctorado).

Participó en numerosos eventos tanto Nacionales como Internacionales, en ellos actúo como ponente, como presidente o miembro de los tribunales en su caso, entre ellos se cuentan: Conferencia Interuniversidades, Seminario Metodológico de la Facultad de Física Matemática de la Universidad de La Habana, Conferencia Científica de la Universidad de La Habana, Seminario de Aproximación y Optimización, Congresos de la Sociedad Matemática Cubana, Congresos Internacionales "Pedagogía", Olimpiadas Nacionales de Física, Química y Matemáticas, Olimpiadaa Iberoamericana de Matemáticas, Jornadas Científicas Estudiantiles, Congresos de la Sociedad Matemática Mexicana, First International Conference on Industrial and Aplied Mathematics, Conferencia Internacional de Aproximación y Optimización en el Caribe, Seminario Avanzado en Teoría de Aproximación, Foros de Proyectos de Investigación Científica, la Escuela Internacional sobre Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.

Fue tutor de más de 30 tesis de Maestría y Doctorado, tanto en Cuba como en México. En esos trabajos sus alumnos abordaron, bajo su dirección temas de: *Representaciones de Riesz y de Gelfand-Naimark, Análisis Funcional, Métodos Numéricos, Aproximación, Enseñanza de la Matemática, Espacios Vectoriales Topológicos, Convergencia y Teoremas de Korovkin,* entre otros.

Su actividad lo hizo acreedor de numerosas distinciones, entre ellas:

- Premio Pablo Miquel en la Educación, otorgado por la Sociedad Matemática Cubana, 1985.

- Miembro de Honor de la Cátedra Dulce María Escalona, del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", 1991.
- Visitante Distinguido. Otorgado por el Honorable Ayuntamiento de Puebla, mayo de 1995.
- Medalla "Distinción por la Educación Cubana", por el Consejo de Estado de la República de Cuba, 1990.

Además fue incluido en el **"The International Whos Who of Intelectuals"** de la Cambrige University en 1988 y la **"Revista Ciencias Matemáticas"** le dedicó su volumen VII, No. 2, 1987.

Su calidad humana y sus profundos valores y convicciones lo hicieron acreedor del cariño y respeto de cuantos le conocieron y tuvieron la oportunidad de trabajar a su lado o bajo su dirección.

(10,10)Dr. José Luis Fernández Muñiz

Nació el 21 de febrero de y falleció el 5 de Febrero

Biografía del Dr. José Luis Fernández Muñiz

El 5 de febrero del 2001, apenas unos días antes de que cumpliera 74 años, falleció en la ciudad de Puebla, México, el Dr. José Luis Fernández Muñiz siendo profesor del Posgrado en Matemáticas adscrito a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a la que entrego los últimos años de su prolífera vida como docente e investigador.

El Dr. José Luis Fernández Muñiz nació en Villavaler, Asturias, España, el 21 de febrero de 1927. Hijo de dos maestros de aquella pequeña población, resultó altamente motivado por ellos hacia el estudio y la investigación, así como hacia la docencia. Con apenas diez años, debe emigrar con su madre y hermanas a Cuba, empujados por la Guerra Civil que ensangrentaba a España.

En Cuba estudió a la par que trabajó, hasta vencer el Bachillerato. Además obtuvo por correspondencia, el Título de Ingeniero en Construcciones Metálicas. Parecía que iba a dedicar su vida a esa rama, la que trabajaba desde los doce años, pero con el triunfo de la Revolución en Cuba, tuvo la oportunidad de continuar estudiando, la que no desaprovechó. Entre 1963 y 1968, cursó, sin dejar de trabajar, la Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de La Habana. Desde 1967 comienza a trabajar en esta misma Licenciatura y Universidad, donde llego a ser Jefe del Departamento de Análisis de la Facultad de Matemática y Computación, uno de los más prestigiados de dicha Universidad por la alta calificación de sus especialistas. No dejó de superarse y en 1975 defiende el grado de Maestro en Ciencias y, posteriormente, en 1983, el de Doctor en Ciencias.

Fue profesor de cursos de Licenciatura en la Universidad de La Habana, la Universidad de Matanzas, el Instituto Superior de Ciencias Médicas de La Habana, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas y Pinar del Río, todos en Cuba, así como en la Universidad Autónoma de Zacatecas, y la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Entre los cursos de Licenciatura impartidos a los estudiantes de la carrera en Matemáticas en la Universidad de La Habana se destacan materias como:

- Análisis Matemático, Análisis sobre Variedades y Análisis Funcional.
- Variable Compleja.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Topología.
- Teoría de la Medida.
- Geometría diferencial y Geometría Analítica.

Además impartió cursos para Maestrías y Doctorados en: las Universidades de La Habana y Matanzas, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas, Holguín y Pinar del Río, todos en Cuba. En México en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la Universidad Autónoma de Zacatecas y la Universidad Autónoma de Coahuila. A este nivel impartió cursos sobre:

- Variable Compleja.
- Análisis Funcional, Análisis Complejo y Análisis Matemático en una y varias Variables.
- Teoría de la Aproximación.
- Integración de Funciones de Varias Variables.
- Diferenciación en Espacios Normados.
- Enseñanza de la Matemática.
- Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue.
- Desarrollo Histórico y Metodológico del Análisis Funcional.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Métodos en la Solución de Problemas.
- Teoría de Korovkin.
- Retículos de Riesz y de Banach.
- Curvas Críticas en Optimización no Lineal.

Desarrollo Estancias de Investigación en la Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Estatal de Moscú, Universidad Politécnica de Madrid, Universidad de Complutense de Madrid, Universidad de París 1-Pantheon Sorbone, Universidad de Nancy, Universidad de Bremen, Universidad de Extremadura, Universidad de París Sud, Universidad de Miami, Universidad de Warwick y el Instituto Politécnico Nacional de México.

En razón de su trabajo e investigaciones, estableció relación con matemáticos de renombre internacional como los doctores Baldomero Rubio Segovia, Fernando Bombal, José Luis González Llavona, Antony Pritchard, Brian A. Coomes, Didier Dacunha Castell, Diedirich Hinrinchen y M. K. Potapov.

Publicó más de 17 artículos y 13 reseñas en revistas especializadas como: Revista Ciencias Matemáticas, Boletín de la Sociedad Cubana de Matemáticas, Cuadernos de Matemáticas de la UNAM, Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones del Seminario de Análisis de la Facultad de Matemáticas de la

Universidad Complutense de Madrid, Journal of Approximation Theory, Matemática Fundamental y Aplicada (en ruso), Complex Methods in Approximation Theory. Entre los temas de estas publicaciones destacan: *Teoremas de tipo Korovkin*, *Teoría de la Aproximación*, *Enseñanza de la Matemática*, *Teoremas de Banach y de Bohman*, *Retículos de Riesz* y *Topología General.*

Igualmente aparecieron más de 9 libros o folletos de su autoría, entre ellos: **Variable Compleja**, **Series de Fourier**, **Cálculos sobre Variedades**, **Aproximación por Fracciones Racionales con Polos Prefijados** (Tesis de Maestría), **Topología General**, **Análisis Matemático (Diferenciación de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Integración de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Funciones Paramétricas)**, **Teoremas de Aproximación para Funciones de una y Varias Variables Analíticas en una Franja** (Tesis de Doctorado).

Participó en numerosos eventos tanto Nacionales como Internacionales, en ellos actúo como ponente, como presidente o miembro de los tribunales en su caso, entre ellos se cuentan: Conferencia Interuniversidades, Seminario Metodológico de la Facultad de Física Matemática de la Universidad de La Habana, Conferencia Científica de la Universidad de La Habana, Seminario de Aproximación y Optimización, Congresos de la Sociedad Matemática Cubana, Congresos Internacionales "Pedagogía", Olimpiadas Nacionales de Física, Química y Matemáticas, Olimpiadaa Iberoamericana de Matemáticas, Jornadas Científicas Estudiantiles, Congresos de la Sociedad Matemática Mexicana, First International Conference on Industrial and Aplied Mathematics, Conferencia Internacional de Aproximación y Optimización en el Caribe, Seminario Avanzado en Teoría de Aproximación, Foros de Proyectos de Investigación Científica, la Escuela Internacional sobre Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.

Fue tutor de más de 30 tesis de Maestría y Doctorado, tanto en Cuba como en México. En esos trabajos sus alumnos abordaron, bajo su dirección temas de: *Representaciones de Riesz y de Gelfand-Naimark, Análisis Funcional, Métodos Numéricos, Aproximación, Enseñanza de la Matemática, Espacios Vectoriales Topológicos, Convergencia y Teoremas de Korovkin,* entre otros.

Su actividad lo hizo acreedor de numerosas distinciones, entre ellas:

- Premio Pablo Miquel en la Educación, otorgado por la Sociedad Matemática Cubana, 1985.
- Miembro de Honor de la Cátedra Dulce María Escalona, del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", 1991.
- Visitante Distinguido. Otorgado por el Honorable Ayuntamiento de Puebla, mayo de 1995.
- Medalla "Distinción por la Educación Cubana", por el Consejo de Estado de la República de Cuba, 1990.

Además fue incluido en el **"The International Whos Who of Intelectuals"** de la Cambrige University en 1988 y la **"Revista Ciencias Matemáticas"** le dedicó su volumen VII, No. 2, 1987.

Su calidad humana y sus profundos valores y convicciones lo hicieron acreedor del cariño y respeto de cuantos le conocieron y tuvieron la oportunidad de trabajar a su lado o bajo su dirección.

Biografía del Dr. José Luis Fernández Muñiz

El 5 de febrero del 2001, apenas unos días antes de que cumpliera 74 años, falleció en la ciudad de Puebla, México, el Dr. José Luis Fernández Muñiz, siendo profesor del Posgrado en Matemáticas adscrito a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a la que entrego los últimos años de su prolífera vida como docente e investigador.

El Dr. José Luis Fernández Muñiz nació en Villavaler, Asturias, España, el 21 de febrero de 1927. Hijo de dos maestros de aquella pequeña población, resultó altamente motivado por ellos hacia el estudio y la investigación, así como hacia la docencia. Con apenas diez años, debe emigrar con su madre y hermanas a Cuba, empujados por la Guerra Civil que ensangrentaba a España.

En Cuba estudió a la par que trabajó, hasta vencer el Bachillerato. Además obtuvo por correspondencia, el Título de Ingeniero en Construcciones Metálicas. Parecía que iba a dedicar su vida a esa rama, la que trabajaba desde los doce años, pero con el triunfo de la Revolución en Cuba, tuvo la oportunidad de continuar estudiando, la que no desaprovechó. Entre 1963 y 1968, cursó, sin dejar de trabajar, la Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de La Habana. Desde 1967 comienza a trabajar en esta misma Licenciatura y Universidad, donde llego a ser Jefe del Departamento de Análisis de la Facultad de Matemática y Computación, uno de los más prestigiados de dicha Universidad por la alta calificación de sus especialistas. No dejó de superarse y en 1975 defiende el grado de Maestro en Ciencias y, posteriormente, en 1983, el de Doctor en Ciencias.

Fue profesor de cursos de Licenciatura en la Universidad de La Habana, la Universidad de Matanzas, el Instituto Superior de Ciencias Médicas de La Habana, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas y Pinar del Río, todos en Cuba, así como en la Universidad Autónoma de Zacatecas, y la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Entre los cursos de Licenciatura impartidos a los estudiantes de la carrera en Matemáticas en la Universidad de La Habana se destacan materias como:

- Análisis Matemático, Análisis sobre Variedades y Análisis Funcional.
- Variable Compleja.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Topología.
- Teoría de la Medida.
- Geometría diferencial y Geometría Analítica.

Además impartió cursos para Maestrías y Doctorados en: las Universidades de La Habana y Matanzas, los Institutos Superiores Pedagógicos de Ciudad de La Habana, Matanzas, Holguín y Pinar del Río, todos en Cuba. En México en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la Universidad Autónoma de Zacatecas y la Universidad Autónoma de Coahuila. A este nivel impartió cursos sobre:

- Variable Compleja.
- Análisis Funcional, Análisis Complejo y Análisis Matemático en una y varias Variables.
- Teoría de la Aproximación.
- Integración de Funciones de Varias Variables.
- Diferenciación en Espacios Normados.
- Enseñanza de la Matemática.
- Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue.
- Desarrollo Histórico y Metodológico del Análisis Funcional.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Métodos en la Solución de Problemas.
- Teoría de Korovkin.
- Retículos de Riesz y de Banach.
- Curvas Críticas en Optimización no Lineal.

Desarrollo Estancias de Investigación en la Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Estatal de Moscú, Universidad Politécnica de Madrid,

Universidad de Complutense de Madrid, Universidad de París 1-Pantheon Sorbone, Universidad de Nancy, Universidad de Bremen, Universidad de Extremadura, Universidad de París Sud, Universidad de Miami, Universidad de Warwick y el Instituto Politécnico Nacional de México.

En razón de su trabajo e investigaciones, estableció relación con matemáticos de renombre internacional como los doctores Baldomero Rubio Segovia, Fernando Bombal, José Luis González Llavona, Antony Pritchard, Brian A. Coomes, Didier Dacunha Castell, Diedirich Hinrinchen y M. K. Potapov.

Publicó más de 17 artículos y 13 reseñas en revistas especializadas como: Revista Ciencias Matemáticas, Boletín de la Sociedad Cubana de Matemáticas, Cuadernos de Matemáticas de la UNAM, Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones del Seminario de Análisis de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Journal of Approximation Theory, Matemática Fundamental y Aplicada (en ruso), Complex Methods in Approximation Theory. Entre los temas de estas publicaciones destacan: *Teoremas de tipo Korovkin*, *Teoría de la Aproximación*, *Enseñanza de la Matemática*, *Teoremas de Banach y de Bohman*, *Retículos de Riesz* y *Topología General*.

Igualmente aparecieron más de 9 libros o folletos de su autoría, entre ellos: **Variable Compleja**, **Series de Fourier**, **Cálculos sobre Variedades**, **Aproximación por Fracciones Racionales con Polos Prefijados** (Tesis de Maestría), **Topología General**, **Análisis Matemático (Diferenciación de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Integración de Funciones de Varias Variables)**, **Análisis Matemático (Funciones Paramétricas)**, **Teoremas de Aproximación para Funciones de una y Varias Variables Analíticas en una Franja** (Tesis de Doctorado).

Participó en numerosos eventos tanto Nacionales como Internacionales, en ellos actúo como ponente, como presidente o miembro de los tribunales en su caso, entre ellos se cuentan: Conferencia Interuniversidades, Seminario Metodológico de la Facultad de Física Matemática de la Universidad de La Habana, Conferencia Científica de la Universidad de La Habana, Seminario de Aproximación y Optimización, Congresos de la Sociedad Matemática Cubana, Congresos Internacionales "Pedagogía", Olimpiadas Nacionales de Física, Química y Matemáticas, Olimpiadaa Iberoamericana de Matemáticas, Jornadas Científicas Estudiantiles, Congresos de la Sociedad Matemática Mexicana, First International Conference on Industrial and Aplied Mathematics, Conferencia Internacional de Aproximación y Optimización en el Caribe, Seminario Avanzado en Teoría de Aproximación, Foros de Proyectos de Investigación Científica, la Escuela Internacional sobre Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.

Fue tutor de más de 30 tesis de Maestría y Doctorado, tanto en Cuba como en México. En esos trabajos sus alumnos abordaron, bajo su dirección temas de:

Representaciones de Riesz y de Gelfand-Naimark, Análisis Funcional, Métodos Numéricos, Aproximación, Enseñanza de la Matemática, Espacios Vectoriales Topológicos, Convergencia y Teoremas de Korovkin, entre otros.

Su actividad lo hizo acreedor de numerosas distinciones, entre ellas:

- Premio Pablo Miquel en la Educación, otorgado por la Sociedad Matemática Cubana, 1985.
- Miembro de Honor de la Cátedra Dulce María Escalona, del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", 1991.
- Visitante Distinguido. Otorgado por el Honorable Ayuntamiento de Puebla, mayo de 1995.
- Medalla "Distinción por la Educación Cubana", por el Consejo de Estado de la República de Cuba, 1990.

Además fue incluido en el **"The International Whos Who of Intelectuals"** de la Cambrige University en 1988 y la **"Revista Ciencias Matemáticas"** le dedicó su volumen VII, No. 2, 1987.

Su calidad humana y sus profundos valores y convicciones lo hicieron acreedor del cariño y respeto de cuantos le conocieron y tuvieron la oportunidad de trabajar a su lado o bajo su dirección.

Bibliografía general

1. R. ABRAHAM J. ROBBIN: *Transversal mappings and flows,* Benjamin Inc., (1967).
2. L. V. AHLFORS: *Complex Analysis,* Mc-Graw-Hill, New York, (1953)
3. P. ALEXANDROF: *Uber die Metrisation der im Kleinen kompacten topologischen Raume,* Math. Anen., 92.
4. P. ALEXANDROF: *Einfachste Grundbegraff de Topologie,* Springer, Berlín, (1932).
5. ALEXANDROF P. y HOPE H.: *Topologie I,* Springer, Berlín, (1935).
6. P. ALEXANDROF y P. URYSOHN: *Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une clasee (D),* Compt. Rend. 177, (1923).
7. T. M. APOSTOL: *Análisis Matemático, Introducción Moderna al Cálculo Superior,* Edición revolucionaria. Instituto cubano del Libro, La Habana.
8. R. ARENS: *A topology for spaces of transformations, Ann of Math,* (2), 47, (1946).
9. B. H. ARNOLD: *Intuitive concepts in elementary topology,* Prentice Hall, (1962).
10. G. ASCOLI: *Le curve limité di una varieta dara di curve,* Mem-Accad. Linces, vol. 18 (1883).
11. E. ARTIN y H.BRAUN: *Introduction to algebraic topology*, Charles E. Merill Pub., (1969).
12. R. BAIRE: *Lecons sur le fonctions discontinues,* Gauthiers-Villars, París, (1905).
13. S. BANACH: *Théorie des operations lineaires,* Warsaw, (1932).
14. S. BARR: *Experiments in Topology.* John Murray, Londres, (1965).
15. R. G. BARTLE: *Nest and Filters in Topology,* Ann. Math Monthly, 63, (1955).

16. J. D. BAUM: *Elements of Point Set Topology,* Prentice Hall, (1964).

17. C. BERGE: *The Theory of Graphs,* Londres, (1966).

18. C. BERGE: *Topological Spaces including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity,* Oliver and Boyd, Londres, (1963).

19. L. BERS: *Topology,* Couran inst. of Math. Sciencies, Nueva York Univ., (1956-57).

20. R. H. BING: *Metrization of Topological Spaces,* Can. h. Math 3.

21. G. BIRKHOFF: *Moore-Smith convergence in general topology,* Ann-Math 38, (1937).

22. D. W. BLACKETT: *Elementary topology. A Combinatorial and Algebraic Approach,* Academic Press, (1962).

23. E. BOREL: *Lecons sur la theorie des fonctions,* 2.ª ed. Gauthiers-Villars, París, (1914).

24. K. BORSUK: *Theory of Retracts,* Warszawa, (1967).

25. N. BOURBAKI: *Espaces vectoriels topologiques,* cap. I y cap. II, Hermann, París, (1966).

26. N. BOURBAKI: *Espaces vectoriels topologiques,* cap. IV y cap. V, Hermann, París, (1967).

27. N. BOURBAKI: *Integration,* cap. 1-4, Hermann, París, (1965).

28. N. BOURBAKI: *Theorie des ensemble,* cap. 4, Structures Hermann, París, (1966).

29. N. BOURBAKI: *Topologie General,* cap. 1: ≪Structures topologiques≫, cap. 2: ≪Structures uniformes≫, Hermann, París, (1961).

30. N. BOURBAKI: *Topologie Generale,* cap. 9: ≪Utilisation des nombres réales in topologie general≫ Hermann, París, (1958).

31. N. BOURBAKI: *Topologie General,* cap. 10: ≪Espaces fonctionnels≫ Herman, París, (1967).

32. M. BRELOT: *Elements de la theorie classique du potentiel,* Centre da documentation universitaire, París, (1961).

33. E. BRIESKORN: Conferencias sobre el desarrollo de la topología y la geometría dadas en la Universidad de La Habana (1973). (Por publicar).

34. L. E. J. BROUWER: *Beweis der invarianz der dimensionszahl,* Math. ann 70, (1911).

35. L. E. J. BROUWER: Ü *den Natürlichen dimensionsbegriff,* J. fÜr Math, 142, (1913).

36. A. BROWDER: *Introduction to function algebras,* W. A. Benjamin, (1969).

37. R. BROWN: *Elements of modern topology,* Mac graw Hill, Londres , (1968).

38. R. BUSACHER y T. SAATY: *Finite graphs and networks*, Mc Graw Hill, (1965).

39. G. CANTOR: *Gesammelte Abhandlungen,* Berlín, (1932).

40. H. CARTAN: *Calcul differéntiel*, Collection methods., París, (1967).

41. H. CARTAN: *Filtres et ultrafiltres*, comptes. Rend, 205.

42. H. CARTAN y S. EILENBERG: *Homological Algebra,* Princeton Univ-Press, (1956).

43. H. CARTAN: *Theorie des filtres,* Compt. Rend, 205, (1937).

44. E. CĚCH: *'On bicompact spaces',* Ann. Math, 38, (2).

45. E. CĚCH: *Topological spaces,* Czechoslovak. Accad. Sci, (1966).

46. W. G. CHINN y N. E. STEENROD: *First concepts of topology,* New Mathematičs Library, núm. 18, Random house, (1966).

47. G. CHOQUET: *Theory of Capacities,* Ann. Inst Fourier, (1953-54).

48. G. CHOQUET: *Topology,* Academic press, (1966).

49. J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, (1960).

50. J. DIEUDONNÉ: *Une generalization des espaces compacts,* J. Math. Pures Appl., 23.

51. J. DUGUNDJI: *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, (1970).

52. S.EILENBERG y N. E. STEENROD: *Foundation of Algebraic Topology,* Princeton Univ. Press, (1952).

53. R. ENGELKING: *Outline of General Topology,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1968).

54. W. W. FAIRCHILD y C. I. TULCEA: *Topology,* W. B. Saunders, (1971).

55. H. R. FISCHER: *Limesräume,* Math Ann., 137, (1959).

56. R. H. FOX: *On toplogies for function spaces,* Bull Amer. Math Soc., 51, (1945).

57. M. FRÉCHET: *Les dimensions d'un ensemble abstrait,* Math. Ann., 68.

58. M. FRÉCHET: *Les espaces abstraits,* Gauthiers-Villars, París, (1928).

59. M. FRÉCHET: *Sur quelques points du calcul fonctionnel,* Reudicont del Circulo Matematico di Palermo, vol. 22, (1906).

60. M. FRÉCHET: *Sur la notion de voisinage daus les ensenmbles abstraits,* Bull. Sci. Math., 42, (1918).

61. T. GAMELIN: *Uniform Algebras,* Series in Modern Analysis, New Jersey, Prentice Hall, (1969).

62. A. GARCIA MÁYNEZ: *Introducción a la topología de Conjuntos,* Serie Soc. Matemática Mexicana 4, Editorial Trillas, México, (1971).

63. M. C. GEMIGNANI: *Elementary topology,* Addison-Wesley, (1967).

64. L. GILLMAN y M. JERISON: *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, (1960).

65. K. P. GROTEMEYER: *Topologie,* Bibliographischen Institut, Mancheim, (1969).

66. J. HADAMARD: *Sur certaines applications possibles de la theorie des ensembles,* Verhaudl Intern. Math-Krogress, Zürich, (1898).

67. D. W. HALL y G. L. SPENCER: *Elementary topology II,* John Wiley, (1955).

68. P. H. HALMOS: *Introduction to Hilbert Space,* Chelsea. (1961).

69. P. R. HALMOS: *Measure Theory,* Nueva York, (1950).

70. P. R. HALMOS: *Naive set theory,* Van nostrand, (1960).

71. F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig, (1914).

72. F. HAUSDORFF; *Mengenlehre,* Grayter, Berlín, (1927).

73. F. HARARY: *Graph Theory,* Addison-Wesley, (1971).

74. E. HEWITT y K. A. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis,* Academic Press, (1963).

75. D. HILBERT *Gesammelte Abhaudlunger,* t. III, Springer, Berlín, (1935).

76. D. HILBERT: *Uber die Grundlagen des Geometrie,* Math Ann., 56, (1903).

77. D. HILBERT y S. COHN-VOSSEN: *Geometry and the Imagination,* Chelsea, (1956).

78. P. HILTON: *An Introduction to homotopy theory,* Cambridge Univ. Press, (1953).

79. P. HILTON: *Studies in Modern Topology, (Studies in Mathematics,* volo. 5), Math Asoc. of America. Prentice Hall, (1968).

80. M. HIRSCH: *On imbedding differentiable manifolds in euclidean space,* Ann Math, 73, (1961).

81. J. G. HOCKING y G. S. YOUNG: *Topology,* Addison-Wesley, (1961).

82. K. HOFFMAN: *Banach Space of Analytic Functions. Series in Modern Analysis.* New Jersey, Prentice Hall,)1962).

83. S. T. HU: *homology theory. A first course in Algebraic topology,* Holden-Day, (1966).

84. S. T. HU: *Homotopy Theory,* Academic Press, (1959).

85. S. T. HU: *Introduction to General Topology,* Holden-Day, (1966).

86. S. T. HU: *Theory of Retracts,* Detroit, (1965).

87. W. HUREWICZ y H. WALLMAN: *Dimension theory,* Princeton, (1941).

88. J. R. ISBELL: *Uniform Spaces, Mathematical Surveys,* núm. 12, DMS, (1964).

89. M. A. JIMÉNEZ: *Bornología,* Compacta, La Habana, (Enero, 1972).

90. L. V. KANTOROVICH y G. P. AKILOV: *Functional Analysis in normed Spaces,* Pergamon Press Macmillan, New York, (1964).

91. R. H. KASRIEL: *Undergraduate Topology,* W. B. Aunders. Pha., (1971).

92. J. L. KELLEY: *Convergence in topology,* Duke Math Journal, 17.

93. J. L. KELLEY: *General topology,* Van Nostrand, (19550.

94. J. L. KELLEY and I. NAMIOKA: *Linear Topological Spaces,* Van Nostrand. Princeton. New Jersey, (1963).

95. A. N. KOLMOGOROV y S. V. FOMIN: *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional,* Editorial Mir, Moscú, (1972).

96. H. J. KOWALSKI: *Topologische Raüme,* Basel, (1961).

97. G. KÖTHE: *Topologische Lineare Raüme,* Springer, Berlín, (1966).

98. K. KURATOWSKY: *Quelques problemes concernant les spaces métriques non-separables,* Fund, Math. 25, (1935).

99. K. KURATOWSKI: *Sur l'operation $\bar{A}$ de Analysis situs,* Fund. Math, 3, (1922).

100. K. KURATOWSKI: *Topology,* vol. I, II, Academic Press-P. W. N. (Polisch Scientific Publishers Warszawa), (1966-1968).

101. S. LANG: *Analysis I,* Addison-Wesley, Reading, (1968).

102. S. LANG: *Differentiable Manifolds,* Addison-Wesley, (1972).

103. S. LEFSCHETZ: *Introduction to topology,* Princeton, (19490.

104. W. LIETZMANN: *Visual topology,* American Elsevier, (1965).

105. D. G. LUENBERGER: *Optimization by vector space methods,* J. Wiley, (1969).

106. L. LUISTERNIK y V. SOBOLEV: *Elements of the theory of Functional Analysis,* Frederich Ungar, Nueva York, (1961).

107. N. LUSIN: *Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications,* Gauthiers-Villars, París, (1930).

108. S. MACLANE: *Categories. For the working mathematician,* Springer, Berlín-Nueva York, (1972).

109. Z. P. MAMOZIC: *Introduction to General Topology,* Gröningen, (1963).

110. W. S. MASSEY: *Algebraic topology. An Introduction,* Hancont, Bran and Woold, (1967).

111. B. MENDELSON: *Introduction to topology,* Allyn and Bacon, Boston, (1969).

112. J. W. MILNOR: *Topology from the differentiable viewpoint,* University of Virginia, Charlottesville, (1965).

113. P. MONTEL: *Selectu 1897-1947 Cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel,* París, (1947).

114. E. H. MOORE y H. L. SMITH: *A general theory of limits,* Ann Journal Math, 44, (1922).

115. E. H. MOORE: *Definition of Limits in general integral analysis,* Proc. Natl, Acod, Sci. U. S., 1, (1915).

116. R. L. MOORE: *Foundations of Point set theory,* Coll, Publ., (1932).

117. E. H. MOORE: *Introduction to a form of General Analysis,* (Lectures delivered Sept, 1906) New Haven.

118. J. R. MONK: *Elementary differntial topology,* Annals of Math. Studies, núm. 54, Princeton Univ. Pres, (1963).

119. L. NACHBIN: *Topology and order:* Van Nostrand, Princeton, (1965).

120. K. NAGAMI: *Dimension Theory,* Accad, Press, (1970).

121. J. NAGATA: *Modern Dimension Theory,* Interscience, (1965).

122. J. NAGATA: *Modern General Topology,* North-Hollan Publ. Cp., (1968).

123. M. NAGUMO: *Introducción to the Theory of Banach Space,* Editora Meridional-EMMA. Porto Alegre, (1961).

124. M. H. A. NEWMAN: *Elements of the topology of plane sets of points,* Cambridge Univ. Press., (1964).

125. P. V. O'NEIL: *Fundamental concepts of topology,* Gordon and Breach Science Publishers.

126. W. J. PERVIN: *Foundations of General Topology,* Academic Press, Londres.

127. W. J. PERVIN: *On separation and proximity spaces,* Ann. Math Mont6hly, 71.

128. H. POINCARE: *Analysis Situs:* Journal Ecole Polythechnique 1, (1895).

129. L. S. PONTRYAGIN: *Grundüge de Kombinatousche Topologie,* VEB Deutsche Verlagder, Berlín, (1956).

130. L. PONTRYAGIN: *Topological Groups,* Princeton Univ-Press, New Jersey, (1939).

131. B. RIEMANN: : *Gesammelte Mathematische Werke,* 2.ª ed., Leipzig.

132. F. RIESZ: *Die Genesis des. Raumbergriffs,* Math. Naturwiss Ber Ungarn, 24, (1906).

133. F. RIESZ: *Steligkeitsbegriff und abstracte Mengenlehre,* Atti IV Congr. Intern. Math., Roman, II, (1908).

134. W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis,* 2.ª ed., Mc Graw-Hill, Nueva York, (1964).

135. H. H. SCHAEFER: *Topological Vector Spaces,* Nueva York, (1966).

136. H. SCHUBERT: *Topologie, Eine Einführung,* Teubner, Stuttgart, (1969).

137. M. L. SCHWARTZ: *Cours d'Analyse,* Ecole polytechnique, París, (1960).

138. W. SIERPINSKI: *General topology,* Univ. of Toronto Press, (1952).

139. I. M. SINGER y V. A. THORPE: *Lecture notes on elementary topology and geometry,* Scotl, Foresman and Co. Glenview, (1967).

140. S. SMALE: *A survey of some recent developments in differential topology,* Bull. Amer. Math. Soc., 69, (1963).

141. Y. M. SMIRNOV: *A necesary and sufficient condition for the metrizability of a topological space,* Dokl, Akad Nank. SSR-77.

142. G. SORANI: *An introduction to real and complex manifolds,* Gordon and Breach Science Publ., (1969).

143. M. SOUSLIN: *Sur une définition des ensembles mesurables* **B** *sans nombres transfinis,* C. R. Acod., Sci., t. CLXIV, (1917).

144. E. H. SPANIEV: *Algebraic topology,* Mc. Graw-Hill, (1966).

145. M. SPIVAK: *Cálculo infitesimal,* Ed. Revolucionaria. Instituto Cubano del Libro, L. H.

146. M. SPIVAK: *Calculus on manifolds,* Benjamin, Nueva York, (1965).

147. L. A. STEEN y J. A. SEEBACH (JR): *Counterexamples in topology,* Hold, Rinehart and Wiston, (1970).

148. E. STEINITZ: *Sitz,* Ber. Berlin Math. Ges., 7, (1907).

149. M. H. STONE: *Applications of the theory of Boolean rings to general topology,* Trans. Ann. Math. Soc., 41.

150. M. H. STONE: *The Generalized Weierstrass approximation theorem,* Mathematics Magazine, 21, (1948).

151. A. H. STONE: *Paracompactness and Product Space,* Bull. Amer5. Math. Soc., 54, (1948).

152. A. E. TAYLOR: *Introduction to Functional Analysis,* J. Wiley, (1958).

153. W. J. THRON: *Topological Structures,* Halt, Rinehart and Winston, (1966).

154. H. TIETZE: *Beiträge zur allgemeinen Topologie I,* Math Ann, 88.

155. H. TIETZE: *Beiträge zur allgemeinen Topologie II,* Math Ann, 91.

156. H. TIETZE: *Uber Analysis Situs,* Abhaudl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 2.

157. H. TIETZE y L. VIËTORIS: *Encyclopädie d. Math. Wiss III. AB*/3, Leipzig (1931).

158. J. W. TUHEY: *Convergence and Uniformity topology,* Princeton Univ. Press, (1940).

159. A. TYCHONOFF. *'Über die topologische Erweiterung von Räumen,* Math. Ann. 102, (1929).

160. URYSOHN P.: *Uber die Maechtigkeit zusammenhaengender Mengen,* Math. Ann., 94.

161. P. URYSOHN: *Zum Metrizationsproblem,* Math. Ann., 94.

162. R. VAIDYANATHASWAMY: *Treatise on set Topology I,* 2.ª ed., Nueva York, (1960).

163. L. VIËTORIS: *Stelige Mengen,* Monastsh., 31.

164. V. VOLTERRA: *Theory of Functionals,* Blackie and Son, Londres, (1930).

165. C. T. WALL: *Survey Article, Topology of Smouth Manifolds,* j. London Math. Soc., 40, (1965).

166. L. E. WARD: *Topology: An outline for a first course,* Marcel Dekber, N. Y., (1972).

167. K. WEIERSTRASS: *Uber die Analytische Darstellbarkeit, Sogenaunte Wilkürlicher Funktionen Reeler Argumente Mathematische Werke,* Bd. 3, Mayer Müller, Berlín, (1894-1903).

168. A. WEIL: *Sur les espaces a structure uniforme it sur la topologie generale,* Actualites Sci Ind., 551, (1932).

169. H. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche,* 3ª ed. Teubner, Leipzig (1955).

170. G. T. WHYBURN: *Analytic Topology,* AMS Colloquim Publications, vol. XXVII, AMS, (1942).

171. R. L. WILDE: *Topology of Manifolds,* AMS Colloquim Publications, vol. 32, N. Y., (1965).

172. S. B. NADLER, Jr. *Continoum Theory, An Introduction,* Monographs and Texbooks in Pure and Applied math., Vol 158, Marcel Dekker, Inc., N. Y., (1992).

173. C. E. AULL y R. LOWEN: *Handbook of the History of General Topology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, vol. 1 (1997), vol. 2 (1998).

Apéndice

Conceptos sobre teoría de conjuntos

Supondremos al lector familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. No obstante reuniremos en este apéndice algunos de los resultados y conceptos fundamentales de dicha teoría, que hemos utilizado a lo largo del libro. Aprovecharemos para informar también al lector de la simbología empleada.

Los símbolos siguientes los utilizamos a veces como abreviaturas de frases más largas del lenguaje corriente:

. $\ll\rightleftharpoons\gg$ (leemos: está definido por), declara una definición.

. $\ll:=\gg$ lo empleamos cuando expresamos una definición con una igualdad.

. $\ll\Rightarrow\gg$ denota la implicación lógica.

. $\ll\Longleftrightarrow\gg$ denota la equivalencia lógica.

. $\ll \vee \gg$ denota la disyunción.

. $\ll \wedge \gg$ denota la conjunción.

. $\ll \exists\, x \in X \gg$ denota al cuantificador existencial.

. $\ll \forall\, x \in X \gg$ denota al cuantificador universal.

A.1 Conjuntos

A.1.1 Denotamos a los conjuntos con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas.

En particular muchos conjuntos importantes se denotan por símbolos fijos, entre ellos los siguientes:

$\varnothing$: Conjunto vacío.
$\mathbb{N}$: Números naturales (incluyendo al cero).
$\mathbb{Z}$: Números enteros.
$\mathbb{Q}$: Números racionales.
$\mathbb{I}$: Números irracionales.
$\mathbb{R}$: Números reales.
$\mathbb{C}$: Números complejos.

A.1.2 El símbolo siguiente:

$$\{a, b, c\}$$

denota al conjunto que está formado por los elementos a, b y c y sólo estos. Análogamente para un número finito cualquiera de elementos empleamos la notación

$$\{a, d, h, ..., \}$$

Cuando un conjunto está formado por los elementos de un cierto conjunto X que cumplen una cierta función proposicional $P(x)$, empleamos la notación

$$\{x \in X | P(x)\}$$

Cuando esté claro del contexto cuál es el conjunto X escribimos simplemente

$$\{x | P(x)\}$$

A.1.3 Dados los conjuntos A y B, se dice que A es un *subconjunto (parte)* de B y que B es un *superconjunto* de A (notación: $\ll A \subset B \gg$ o $\ll B \supset A \gg$) si

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Se dice que A es un *subconjunto propio* de B si:

$$(A \subset B) \wedge (A \neq B)$$

A.1.4 Se llama conjunto potencia de un conjunto X y se denota por $\ll \mathcal{P}(X) \gg$ al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X. En particular $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$ y $X \in \mathcal{P}(X)$.

A.1.5 Se definen para dos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ las operaciones *unión, intersección y diferencia:*

$$A \cup B := \{x \in X | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x \in X | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B := \{x \in X | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Si $B \subset A$, $A \setminus B$ se llama complemento de B con respecto a A. En particular $X \setminus A$ se denota por $\ll \complement A \gg$.

La unión e intersección se generalizan de manera natural a un número finito de subconjuntos de X.

A.1.6 Algunas propiedades:

$$\begin{array}{rcl}
A \cup B & = & B \cup A; A \cap B = B \cap A \ \text{(conmutatividad)} \\
A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \ \text{(asociatividad)} \\
A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \ \text{(asociatividad)} \\
A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \ \text{(distributividad)} \\
A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \ \text{(distributividad)} \\
\complement A \cup A & = & X; \ A \cap \complement A = \varnothing \\
A & \subset & B \Rightarrow \complement A \supset \complement B \\
\complement(A \cup B) & = & \complement A \cap \complement B; \ \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B
\end{array}$$

A.2 Colecciones de conjuntos

A.2.1 Empleamos la palabra *colección* para designar a los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$, es decir los elementos de una colección son partes de X.

A.2.2 Dada una colección $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ se definen la unión y la intersección de la colección $\mathfrak{F}$ por:

$$\cup\mathfrak{F} := \cup\{F | F \in \mathfrak{F}\} := \{x \in X | \exists F \in \mathfrak{F}, \text{ tal que } x \in F\}$$

$$\cap\mathfrak{F} := \cap\{F | F \in \mathfrak{F}\} := \{x \in X | \forall F \in \mathfrak{F}, x \in F\}$$

Cuando $\mathfrak{F}$ está formada por un número finito de elementos, obtenemos la unión e intersección ya definida para conjuntos.

A.2.3 Para la unión e intersección de una colección $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\complement(\cup\mathfrak{F}) &= \cap\{\complement F | F \in \mathfrak{F}\} \\
\complement(\cap\mathfrak{F}) &= \cup\{\complement F | F \in \mathfrak{F}\} \\
(\cup\mathfrak{F}) \cap (\cup\mathfrak{F}^{'}) &= \cup\{F \cap F^{'} | F \in \mathfrak{F} \wedge F^{'} \in \mathfrak{F}^{'}\} \\
(\cap\mathfrak{F}) \cup (\cap\mathfrak{F}^{'}) &= \cap\{F \cup F^{'} | F \in \mathfrak{F} \wedge F^{'} \in \mathfrak{F}^{'}\}
\end{aligned}$$

A.2.4 A un subconjunto de una colección dada $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ se le llama *subcolección* de $\mathfrak{F}$.

A.2.5 Una colección $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ constituye un *cubrimiento* de una parte $A \subset X$, si $A \subset \cup\mathfrak{F}$. En particular $\mathfrak{F}$ es un cubrimiento de X si y sólo si $\cup\mathfrak{F} = X$.

A.2.6 Se llama partición de X a un cubrimiento $\mathfrak{F}$ de X tal que:

i) $\forall F \in \mathfrak{F}, F \neq \varnothing$.

ii) $F \in \mathfrak{F} \wedge G \in \mathfrak{F} \wedge (F \neq G) \Rightarrow F \cap G = \varnothing$.

La última condición se expresa diciendo que los elementos de $\mathfrak{F}$ son dos a dos disjuntos.

A.3 Relaciones

A.3.1 Para dos conjuntos X e Y se define la operación *producto cartesiano* y se denota $\ll X \times X \gg$ por:

$$X \times Y := \{(x, y) \,|\, (x \in X) \ \wedge \ (y \in Y)\}$$

Los elementos del conjunto $X \times Y$ se llaman pares ordenados. Dos pares (x, y) y $(x^{'}, y^{'})$ son iguales si y sólo si $x = x^{'}$ y $y = y^{'}$.

Llamamos diagonal de $X \times X$ y la denotamos por Δ al subconjunto de $X \times X$ dado por

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X \,|\, x \in X\}$$

Una importante propiedad es la siguiente:

$$X \times Y = \varnothing \Longleftrightarrow X = \varnothing \ \vee \ Y = \varnothing$$

A.3.2 Dados dos conjuntos X y Y, un subconjunto R de $X \times Y$ se llama una *relación* entre X e Y. En lugar de $(x, y) \in R$ se emplea a veces la notación xRy.

Cuando $X = Y$, una relación R entre X e Y se llama una relación *sobre* X.

Dada una relación R sobre X y $A \subset X$, la relación $R \cap (A \times A)$ sobre A se llama *relación inducida* sobre A por R y se denota R_A.

Dadas dos relaciones R y S sobre los conjuntos X e Y respectivamente, podemos definir la *relación producto* sobre $X \times Y$, que se denota $\ll R \times S \gg$ por

$$(x, y)R \times S(x^{'}, y^{'}) \rightleftharpoons (xRx^{'}) \wedge (ySy^{'})$$

A.3.3 Una relación R sobre X se llama de *equivalencia* si

1. $\forall x \in X, xRx$ (reflexiva).
2. $(xRy) \Rightarrow (yRx)$ (simétrica).
3. $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$ (transitiva).

Si xRy se dice que x y y son equivalentes.

A.3.4 Una relación R sobre X se llama de *preorden* si

1. $\forall x \in X, xRx$ (reflexiva).
2. $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$ (transitiva).

Una relación de *orden* R sobre un conjunto X es una relación de preorden con la condición adicional de

3. $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$

Al par formado por un conjunto y una relación de preorden (respectivamente de orden) dada, se llama *conjunto preordenado* (respectivamente *ordenado*).

Para las relaciones de preorden y de orden se emplean indistintamente las notaciones $\ll x \prec y \gg$ o $\ll y \succ x \gg$, que se leen respectivamente $\ll x$ anterior a $y \gg$ y $\ll y$ posterior a $x \gg$ y también $\ll x \leq y \gg$ o $\ll y \geq x \gg$ que se leen respectivamente $\ll x$ menor que $y \gg$ y $\ll y$ mayor que $x \gg$.

Dada una relación $\leq$ sobre $X, x, y \in X$, el símbolo $x < y$ o $y > x$ que se lee respectivamente $\ll x$ estrictamente menor que $y \gg$ y $\ll y$ estrictamente mayor que $x \gg$ significa

$$(x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

La única relación que es a la vez de equivalencia y de orden es la igualdad.

Si $A \subset X$ y R es una relación de equivalencia (respectivamente de preorden y de orden) sobre X, entonces R_A es una relación de equivalencia (respectivamente de preorden y de orden) sobre A.

A.4 Conjunto cociente

A.4.1 Dados un conjunto X, $x \in X$ y una relación de equivalencia R sobre X, el conjunto

$$[x] := \{y \in X | yRx\}$$

se llama *clase de equivalencia del punto* x con respecto a la relación R.

A un elemento cualquiera $y \in [x]$ se le llama un representante de la clase.

A.4.2 La colección formada por las clases de equivalencia forman una partición de X, es decir se cumple que

1. $\cup\{[x]|x \in X\} = X$
2. $\forall x \in X, [x] \neq \varnothing$
3. $x, y \in X, [x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$

Recíprocamente, si $\mathfrak{F}$ es una partición de X, la relación R dada por

$$xRy \rightleftharpoons \exists F \in \mathfrak{F}, (x \in F) \wedge (y \in F)$$

es una relación de equivalencia sobre X, para la cual $\mathfrak{F}$ es la colección de las clases de equivalencia.

A.4.3 Dado un conjunto X y una relación de equivalencia $\mathbb{R}$ sobre X, al conjunto X/R de todas las clases de equivalencia se llama conjunto cociente de X por $\mathbb{R}$.

La formación de conjuntos cociente es uno de los métodos más importantes utilizados en la matemática para introducir nuevos conceptos y estructuras matemáticas. Por ejemplo, a toda relación de preorden $\leq$ sobre un conjunto X puede asociarse una relación de orden:

$$[x] \leq [y] \rightleftharpoons x \leq y$$

sobre el conjunto cociente X/R definida por la relación de equivalencia R sobre X.

$$xRy \rightleftharpoons (x \leq y) \wedge (y \leq x)$$

A.4.4 Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto X y $A \subset X$, se llama *saturado de A con respecto a* R y se denota $\ll sat_R A \gg$ al conjunto

$$sat_R A = \cup\{[x]|x \in A\}$$

es el conjunto de todos los $y \in X$ que son equivalentes con algún $x \in A$.

Se llama a $A \subset X$ saturado con respecto a R o simplemente saturado si

$$A = sat_R A$$

A.5 Funciones

A.5.1 Dados dos conjuntos X y Y, una relación $G \subset X \times Y$ la llamamos *relación funcional* si

$$(x, y) \in G \wedge (x, y^{'}) \in G \Rightarrow y = y^{'}$$

Una función o aplicación f es una terna $(X, Y, G(f))$ donde X e Y son conjuntos y $G(f)$ es una relación funcional para la cual se cumple que

$$\forall x \in X, \exists\ y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in G(f)$$

Dado $x \in X$, primer elemento de un par ordenado en G, está unívocamente determinado su segundo elemento y, que denotamos por $f(x)$.

La relación funcional $G(f)$ se llama el *gráfica de* f y se denota por $\ll G_f \gg$

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

El conjunto X se llama dominio de f y Y se llama codominio de f. Decimos que f toma valores en Y.

Dos aplicaciones $(X_1, Y_1, G(f_1))$ y $(X_2, Y_2, G(f_2))$ son iguales si y sólo si $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ y $G(f_1) = G(f_2)$.

Para una aplicación f se emplea la notación $f : X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$, donde X es el dominio y Y es el codominio de f. También para una aplicación se emplea la notación:

$$x \mapsto f(x)$$

A.5.2 Dada una aplicación $f : X \to Y$ y $A \subset X$, llamamos *imagen de* A por f y la denotamos $\ll f[A] \gg$, al conjunto

$$f[A] := \{f(x) | x \in A\}$$

Cuando $A = X$ se llama $f[X]$ *imagen o rango* de f.

Si $f : X \to Y$ y $\mathfrak{F}$ es una colección de conjuntos de X, llamamos *imagen de* $\mathfrak{F}$ por f y la denotamos $\ll f\{\mathfrak{F}\} \gg$ al conjunto

$$f\{\mathfrak{F}\} := \{f(x) | \exists A \in \mathfrak{F}\ \wedge\ x \in A\}$$

A.5.3 Decimos que una aplicación $f; X \to Y$ es *sobreyectiva* si

$$\forall\ y \in Y,\ \exists\ x \in X, \text{ tal que } f(x) = y$$

Decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es *inyectiva* si

$$f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$$

Decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es *biyectiva* si es a la vez sobreyectiva e inyectiva.

A.5.4 Dada una aplicación $f : X \to Y$ y $B \subset Y$, se llama imagen inversa de B por f y se denota por $\ll f^{-1}(B) \gg$ al conjunto

$$f^{-1}[B] := \{x \in X | f(x) \in B\}$$

En particular si $B \cap f[X] = \varnothing$, entonces $f^{-1}[B] = \varnothing$.
Si $B = \{y\}$ se denota a $f^{-1}[\{y\}]$ por $\ll f^{-1}(y) \gg$.

A.5.5 Algunas propiedades importantes son las siguientes:

i) $\forall A \subset X, A \subset f^{-1}[f[A]]$.

(la igualdad ocurre si f es inyectiva).

2. $\forall B \subset Y, f[f^{-1}[B]] \subset B$.

(la igualdad ocurre si f es sobreyectiva).

3. $\forall \mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X), f[\cup\{F|F \in \mathfrak{F}\}] = \cup\{f[F]|F \in \mathfrak{F}\}$.
4. $\forall \mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X), f[\cap\{F|F \in \mathfrak{F}\}] \subset \cap\{f[F]|F \in \mathfrak{F}\}$.
5. $\forall \mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(Y),\ f^{-1}[\cup\{G|G \in \mathfrak{F}\}] = \cup\{f^{-1}[G]|G \in \mathfrak{F}\}$.
6. $\forall \mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(Y),\ f^{-1}[\cap\{G|G \in \mathfrak{F}\}] = \cap\{f^{-1}[G]|G \in \mathfrak{F}\}$.
7. $\forall B \subset Y,\ f^{-1}[\complement B] = \complement f^{-1}[B]$.

A.5.6 Si $f : X \to Y$ es inyectiva se puede definir la función *inversa* de f, que se denota por f^{-1}. Tiene por dominio a $f[X]$ y por rango a X y su gráfica viene dada por

$$G(f^{-1}) = \{(y, x) \in f[X] \times X | (x, y) \in G(f)\}$$

A.5.7 Dadas dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se define la función *compuesta* $g \circ f : X \to Z$ cuya gráfica viene dada por

$$G(g \circ f) = \{(x, z) \in X \times Z | \exists\, y \in Y$$

tal que

$$(x, y) \in G(f) \wedge (y, z) \in G(g)\}$$

Si $g \circ f$ essobreyectiva (respectivamente inyectiva), entonces necesariamente g es sobreyectiva (respectivamente f es inyectiva).

Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es y se tiene

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

A.5.8 Dada una aplicación $f : X \to Y$ y $A \subset X$, se define la *restricción* $f|A : A \to Y$ cuya gráfica viene dada por

$$G_{f|A} := \{(x, y) \in G_f \mid x \in A\} := G_f \cap A \times Y$$

En el otro sentido si $A \subset X$ y $g : A \to Y$ es una aplicación dada, una aplicación $f : X \to Y$ tal que $f|A = g$ se llama una prolongación de g a X con respecto a Y.

A.5.9 Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *constante* si para un elemento fijo $a \in Y$ se tiene que

$$\forall x \in X, f(x) = a$$

(Notación $\ll < a > \gg$).

A.5.10 Se llama aplicación identidad o idéntica en X y se denota $\mathbb{1}_X : X \to X$ a la biyección: $\mathbb{1}_X(x) = x$. Dado $A \subset X$ la restricción de la identidad $\mathbb{1}_X|A$ se llama *inyección canónica* y se denota i_A.

A.5.11 Dados dos conjuntos X y Y, la aplicación $\pi_1 : X \times Y \to X$ determina por $\pi_1(x, y) = x$ se llama proyección sobre X. Análogamente se define π_2.

A.5.12 Si R es una relación de equivalencia sobre X se define la *sobreyección canónica* $\varphi_R : X \to X/R$ por:

$$\varphi_R(x) = [x]$$

Cuando quede claro del contexto se denota simplemente por φ.

Si $A \subset X$, $sat_R A = \varphi^{-1}[\varphi[A]]$.

A.6 Descomposición canónica

A.6.1 Si R es una relación de equivalencia sobre X y $f : X \to Y$ es una aplicación, diremos que f es *compatible* con R si $f(x) = f(y) \Rightarrow xRy$.

Recíprocamente si definimos la relación R_f por $xR_fy \rightleftharpoons f(x) = f(y)$, la relación R_f es de equivalencia sobre X y se llama *relación de equivalencia asociada a f*. Es claro que f es compatible con R_f.

A.6.2 Si denotamos por φ la sobreyección canónica asociada a R_f se tiene la siguiente descomposición llamada *descomposición canónica de f* : $f = \bar{f} \circ \varphi$ donde $\bar{f} : X/R_f \to Y$ viene dada por

$$\forall [x] \in X/R_f \qquad \bar{f}([x]) = f(x)$$

Esta secomposición se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow\downarrow & \overline{f} \\ & & X/R_f \end{array}$$

Es importante destacar que $\bar{f}$ siempre es inyectiva y que, si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es biyectiva.

A.7 Familias de conjuntos

A.7.1 Dado un conjunto X, una familia de partes de X viene dada por una aplicación $\alpha \mapsto X_\alpha$ cuyo dominio es un conjunto arbitrario I, llamado conjunto de índices, y su codominio es $\mathcal{P}(X)$. Se denota por

$$(X_\alpha)_{\alpha \in I}$$

Llamamos subfamilia de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ a la restricción $(X_\alpha)_{\alpha \in j}$ de $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ a un subconjunto J de I.

A toda familia de conjunto $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ se le puede hacer corresponder la colección, llamada colección asociada, $\{X_\alpha|_{\alpha \in I}\}$.

Recíprocamente dada una colección $\mathfrak{F}$ y tomando como conjunto de índices a la propia colección, la aplicación identidad nos define una familia de conjuntos.

Para familias de conjuntos se definen a través de su colección asociada las operaciones de unión e intersección, así como los conceptos de partición y cubierta. Dada una familia $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ la notación empleada es

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha := \cup\{X_\alpha | \alpha \in I\} \ \text{(unión)}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha := \cap\{X_\alpha | \alpha \in I\} \ \text{(intersección)}$$

Por definición se tiene que

$$\cup\{X_\alpha | \alpha \in \varnothing\} = \varnothing \ \text{(unión vacía)}$$

$$\cap\{X_\alpha | \alpha \in \varnothing\} = X \ \text{(intersección vacía)}$$

A.8 Producto

Dados dos conjuntos X_1 y X_2, el producto Cartesiano $X_1 \times X_2$ puede interpretarse como el conjunto de funciones $x : \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$ con la propiedad $x(1) \in X_1, x(2) \in X_2$. Este concepto puede extenderse a una familia arbitraria de conjuntos:

A.8.1 Se define como producto Cartesiano de la familia $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ y se denota por $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ al conjunto de funciones $x : I \to \cup\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ con la propiedad de que para todo $\alpha, x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha$.

Los elementos de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ suelen denotarse por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ y cuando no hay dudas del conjunto de índices sencillamente (x_α). El conjunto X_α se llama el α-ésimo factor del producto y a $x_\alpha \in X_\alpha$ la α-ésima coordenada.

Si $A_\alpha \subset X_\alpha$, para todo α, se tiene $\prod\{A_\alpha | \alpha \in I\} \subset \times(X_\alpha | \alpha \in I\}$.

Si la familia de conjuntos es constante, es decir si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in I$, el producto $\prod\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ se denota por X^I y por definición es el conjunto de todas las funciones de I en X. En particular X^N es el conjunto de las sucesiones de elementos de X.

A.8.2 Para cada $\alpha \in I$ se define la α-ésima proyección como la aplicación

$$\pi_\alpha : X\{X_\alpha | \alpha \in I\} \to X_\alpha$$

al que para todo $x = (x_\alpha) \in X\{X_\alpha | \alpha \in I\}$

$$\pi_\alpha(x) = x_\alpha$$

Si $A \subset X_\alpha, \pi_\alpha^{-1}[A]$ se llama *cilindro de base* A.
Las aplicaciones proyección tienen las siguientes propiedades:

1. Son sobreyectivas.
2. Si $A \subset \prod\{X_\alpha | \alpha \in I\}$, entonces $A \subset \prod\{\pi_\alpha[A_\alpha] | \alpha \in I\}$.
3. Si $A_{\alpha k} \subset X_{\alpha k} (1 \leq k \leq n)$, entonces

$$\cup\{\pi_{\alpha k}^{-1}[A_{\alpha k}] | 1 \leq k \leq n\} = \prod\{Y_\alpha | \alpha \in I\}$$

donde $Y_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_k$, $Y_{\alpha k} = A_{\alpha k}$.

A.8.3 Sea la aplicación $f : X \to X\{X_\alpha | \alpha \in I\}$, entonces para cada $\alpha \in I$, la función compuesta

$$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f : X \to X_\alpha$$

se llama *α-ésima coordenada de la función f.* Una función f de X en $X\{X_\alpha|\alpha \in I\}$ puede expresarse por la familia de funciones $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ de X en X_α.

A.8.4 En muchas ramas de la matemática, la Topología entre ellas, es de uso frecuente el llamado *axioma de elección* que puede ser enunciado de la manera siguiente.

Si $\{X_\alpha|\alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos no vacíos, entonces

$$\prod\{X_\alpha|\alpha \in I\} \neq \varnothing$$

Esto puede interpretarse de la manera siguiente: si para todo $\alpha \in I$, $X_\alpha \neq \varnothing$, entonces existe una aplicación que asigna a cada $\alpha \in I$ un elemento $x_\alpha \in X_\alpha$. El axioma de elección tiene muchas formulaciones equivalentes.

A.9 Suma

A.9.1 Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces un conjunto X se llama *suma* de esta familia si posee una partición $\{X_\alpha^{'}|\alpha \in I\}$ tal que existe para cada $\alpha \in I$ una biyección

$$j_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha^{'} \subset X$$

En este caso las aplicaciones j_α se llaman inyecciones canónicas de X_α en X.

Si los conjuntos X_α de la familia son dos a dos disjuntos, entonces $\cup\{X_\alpha|\alpha \in I\}$ es una suma de $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$. En el caso general, el conjunto

$$\sqcup\{X_\alpha|\alpha \in I\} := \cup\{X_\alpha \times \{\alpha\}|\alpha \in I\}$$

llamado *unión disjunta* de los X_α con las biyecciones $f_\alpha : x \mapsto (x, \alpha)$ de X_α sobre $X_\alpha^{'} = X_\alpha \times \{\alpha\}$ es una suma de $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$.

A.10 Conjuntos ordenados

A.10.1 Si $\{(X_\alpha, \leq_\alpha)|\alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos ordenados, se puede definir un orden $\leq$ en $X\{X_\alpha|\alpha \in I\}$ llamado orden producto de los $\leq_\alpha$:

$$(x_\alpha) \leq (y_\alpha) \rightleftharpoons \forall_\alpha \in I, x_\alpha \leq_\alpha y_\alpha.$$

En el caso particular de F^X, donde F es un conjunto ordenado por $\leq$ el orden producto lo podemos interpretar de la manera siguiente: Si f y g son funciones de X en F

$$f \leq g \rightleftharpoons \forall_x \in X, f(x) \leq g(x)$$

A.10.2 Un orden $\leq$ (o preorden) sobre un conjunto X se llama *filtrante* si cumple

$$\forall\ x,\ y \in X,\ \exists\ z \in X : (x \leq z)\ \wedge\ (y \leq z)$$

se llama *conjunto dirigido* a un conjunto ordenado con un orden filtrante.

A.10.3 Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $A \subset X$. Un elemento $a \in X$ se llama *cota superior o mayorante* de A. (Notación $\ll A \leq a \gg$) si

$$x \in A \Rightarrow x \leq a$$

Un elemento $b \in X$ se llama *cota inferior o minorante* de A (notación: $\ll A \geq b \gg$) si

$$x \in A \Rightarrow b \leq x$$

El conjunto de los mayorantes (resp. minorantes) puede ser vacío. Si el conjunto de los mayorantes (resp. minorantes) de una parte $A \subset X$ no es vacío, se dice que A es acotado superiormente (resp. inferiormente). Si $A \subset X$ es acotado superior e inferiormente se dice que A es acotado como subconjunto del conjunto ordenado X.

A.10.4 Si el conjunto de las cotas superiores o mayorantes de una parte $A \subset X$ tiene un menor elemento a, este elemento se llama *supremo* de A en X (notación: $\ll a = \sup A \gg$ o $\ll a = \sup\{x | x \in A\}$.) O sea, $a = \sup A \Longleftrightarrow a \geq A \wedge (c \geq A \Rightarrow c \geq a)$.

Si el conjunto de las cotas inferiores ominorantes de una parte $A \subset X$ tiene un mayor elemento b, este elemento se llama *ínfimo* de A en X (notación: $\ll b = \inf A \gg$ o $\ll b = \inf\{x | x \in A\} \gg$). O sea,

$$b = \inf A \rightleftharpoons b \leq A \wedge (d \leq A \Rightarrow d \leq b)$$

Un elemento $a \in X$ (resp. $b \in X$) se llama máximo de A (resp. mínimo de A) (notación: $\ll a = \text{máx}\, A \gg$) (resp. $\ll b = \text{mín} A \gg$) si

$$(a = \sup A) \wedge a \in A (\text{resp. } (a = \inf A) \wedge a \in A)$$

Se tiene que $a = \inf A (resp.\ b = \sup B)$ si y sólo si a es el máximo (resp. b es el mínimo) de las cotas inferiores (resp. superiores).

A.10.5 Un elemento a de un conjunto ordenado X se llama *maximal* (resp. *minimal*) si no existe ningún $x \in X, x \neq a$ tal que $a \leq x$ (resp. $x \geq a$).

A.10.6 Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se llama *retículo* si todo subconjunto formado por dos elementos $\{x_1, x_2\}$ tiene un ínfimo y un supremo en $(X, \leq)$.

Se dice que $(X, \leq)$ es un *retículo completo* si todo subconjunto de X posee un ínfimo y un supremo en $(X, \leq)$.

Evidentemente $\mathbb{R}$ es un retículo, pues en general, lo es todo conjunto totalmente ordenado. Sin embargo, no es un retículo completo.

Un ejemplo de retículo completo es todo conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ ordenado

por inclusión.

En $(\mathcal{P}(X), \subset)$ tenemos para toda familia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de subconjuntos de X.

$$\inf(A_\alpha)_{\alpha\in I} = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \ \ y \ \ \sup(A_\alpha)_{\alpha\in I} = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

Un subconjunto de un retículo (resp. retículo completo) no tiene por que ser un retículo (resp. retículo completo).

Para verlo basta considerar el conjunto de los subconjuntos unitarios en un conjunto potencia ordenado por inclusión. Además aunque un subconjunto A de un retículo completo $(X, \leq)$ sea un retículo completo los ínfimos y supremos en $(A, \leq_A)$ no son necesariamente iguales a los ínfimos y supremos en $(X, \leq)$. Por ejemplo el conjunto $\left\{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$ tiene un supremo 0 en el retículo completo $[-1, 1]$ y 1 en el retículo completo $[-1, 0) \cup \{1\}$.

Si $(A, \leq_A)$ es un subconjunto del retículo $(X, \leq)$, cerrado para inf y sup, diremos que es un *subretículo*.

A.10.7 Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se dice *totalmente ordenado* si

$$(x \in X) \wedge (y \in X) \Rightarrow (x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Un subconjuto A de un conjunto ordenado es una cadena si $(A \ \leq_A)$ está totalmente ordenado. $\mathbb{R}$ con el orden usual es totalmente ordenado.

En un conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ se definen los siguientes intervalos:

1. $(a, b) := \{x \in X | a < x < b\}$ (abierto).

2. $(a, b] := \{b\} \cup (a, b)$ (semiabierto).

   $[a, b) := \{a\} \cup (a, b)$ (semiabierto).

3. $[a, b] := \{a, b\} \cup (a, b)$ (cerrado).

4. $(a, \rightarrow) := \{x \in X | a < x\}$.

   $[a, \rightarrow) := \{a\} \cup (a, \rightarrow)$.

5. $(\leftarrow, a) := \{x \in X | x < a\}$.

$$(\leftarrow, a] := \{a\} \cup (\leftarrow, a).$$

A.10.8 Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ se dice *inductivamente ordenado* si toda cadena en X tiene una cota superior.

Para los conjuntos inductivamente ordenados se tiene una formulación equivalente del axioma de elección, llamado *lema de Zorn*:

Todo conjunto inductivamente ordenado tiene al menos un elemento maximal.

A.10.9 Si $(X, \leq), (Y, \leq)$ son conjuntos ordenados, $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ se dice creciente (resp. decreciente) si

$$(x \in X) \ \wedge \ (y \in X) \ \wedge \ (x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \ \ (\text{resp. } f(x) \geq f(y))$$

La aplicación f se dice estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) si

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \ \ (\text{resp. } f(x) > f(y)$$

Se dice que f es monótona si es creciente o decreciente.

A.10.10 Una aplicación $f : X \to Y$ donde Y es un conjunto ordenado se dice *acotada superiormente, acotada inferiormente o acotada* si $f[X]$ lo es respectivamente.

A.11 Cardinales

El concepto de cardinal de un conjunto está relacionado con el *número de elementos* de dicho conjunto.

A.11.1 Decimos que dos conjuntos tienen el mismo número cardinal y lo denotamos card $X =$ card Y, si existe una biyección de X sobre Y.

En la teoría formal de conjuntos, los conjuntos finitos se caracterizan por la propiedad de no tener el mismo número cardinal de ninguno de sus subconjuntos propios.

Un conjunto se dice *numerable* si tiene el mismo número cardinal que $\mathbb{N}$. El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito no numerable.

A.11.2 Precisando la idea de que un conjunto tenga más elementos que otro se puede definir una relación de orden entre los conjuntos por

$$\text{card } X \leq \ \text{card } \ Y \rightleftharpoons \exists f : X \to Y \text{ inyectiva}$$

A.11.3 Algunas importantes propiedades son las siguientes:

1. Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es finito o numerable.
2. Card $\mathbb{N}$ es menor o igual que el de cualquier conjunto infinito.
3. Para todo conjunto X, card X $<$ card $B(X)$.
4. Card $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ = card $\mathbb{R}$.
5. Card $\mathbb{N}$ = card $\mathbb{Q}$.
6. La unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.
7. Todo producto finito de conjuntos numerables es numerable.

Indice alfabético

Abierto, conjunto (1.6.11), 59.
Acotada, aplicación (A.10.10), 505.
–, métrica (seudo) (1.6.24), 62.
Acotado, conjunto (1.5.10), 50.
–, débilmente (8.3.4), 300.
Acumulación, punto de (4.1.9), 126.
Adherencia, conjunto (4.1.2), 123.
Adherente, punto,
–, de un conjunto (4.1.2), 123.
Adjunción, espacio de (5.5.7), 194.
Aglomeración, punto de,
– –, de un filtro (3.6.7), 115.
– –, de una sucesión (cap. 3) (30).
Aislado, punto (4.1.9), 126.
Alaoglu, teorema de (8.7.2), 328.
Alexander, torema de (8.1.8), 288.
Alexandrof, compactificación (8.6.5), 318.
–, teorema de (8.6.5), 318.
Algebra de las funciones continuas (5.2.17), 168.
AN 2 (2.3.13), 76.
AN 1 (3.1.14), 94.
Aplicación (ver *función*) 497.
– n-lineal (12.1) (apl. 3), 429.
Aplicaciones acotadas, subespacio de, 12.1 (apl. 1), 426.
– continuas, subespacios de 12.1 (apl. 2), 428.
– multilineales cont., subespacio de, 12.1 (apl. 3), 429.
Arco (6.3.1), 216.
– homótopo (6.5.1), 229.
– cerrado (6.5.10), 233.
Ascoli, teorema de (12.3.12), 438.
Atriódico (9.6.15), 355.
Axioma de elección (A.8.4), 502.
Axiomas de separación (§7.1), 242.

Baire, teorema de (11.4.6), 403.
–, espacio de (11.4.7), 403.
Banach, espacios de (11.4.1), 400.
Banda de Moebins (5.4.3), 181.
Baricentro.
Base de una topología (2.3.5), 73.
– de un filtro (3.4.3), 103.
– de filtro de Cauchy (11.3.1), 394.
– σ-localmete finita (10.2.6), 371.
Bases equivalentes (2.3.7) (2.3.10) (3.5.3), 74, 75, 106.
Biyectiva, aplicación (A.5.3), 498.
Bolas (abiertas y cerradas) (1.5.4), 48.
Borel, conjunto de (4.6.7), 149.
Bornología (8.1.22), 293.
Botella de Klein (5.4.5), 182.

Cadena (9.4.6) (A.10.7), 346, 504.
Canónica, descomposición (A.6.2) (5.4.7), 499, 184.
–, inyección (A.5.10), 499.
–, sobreyección (A.5.12), 499.
Cantor, continuo de (6.2.11), 210.
Característica, aplicación (2.4.21), 84.
Cardinal, número (A.11.1), 505.
– cociente, espacio
–, topología
Cartas compatibles (7.7.1), 278.
– n-dimensionales (7.7.1), 278.
Cartesiano, producto (A.3.1), 494.
Casi-encogimiento (7.6.4), 273.
Categoría (2.4.7), 79.
– de los conjuntos (2.4.8), 80.
– de los conjuntos ordenados (2.4.9), 80.
– de los espacios vectoriales reales (2.4.11), 80.
– de los espacios métricos (2.4.14), 81.
– de los espacios topológicos (2.4.26), 85.
– de los espacios topológicos con punto fijado (6.5.21), 238.
– de los espacios uniformes (11.2.9), 391.
– de los grupos (2.4.10), 80.
– isomorfismo de (2.4.12), 80.
Cauchy, filtro de (11.3.1), 394.
–, sucesión de (10.1.1), 376.
–, integral de (7.3.9), 252.
Cauchy-Schwartz, desigualdad de, (cap. 1) (11)
– – 0-homótopo (6.5.10), 233.
Cerrado, conjunto (4.2.1), 128.
Cerrada, aplicación (4.5.8), 143.

Cilindro (A.8.2)(5.2.3), 501, 162.
Cociente, conjunto (A.4.3), 496.
–, espacio (5.4.6), 183.
Cofinita, topología (2.1.7), 67.
Colección (A.2.1), 493.
Compacidad, criterios de (8.1.1), 285.
Compatible (A.6.1), 499.
Compactificación (8.6.1), 317.
– de Alexandrof (8.6.5), 318.
– de Stone-Cěch (8.6.11), 322.
Compacto, (espacio, conjunto) (8.1.2), 286.
– débilmente ℕ-compacto (8.4.1), 304.
– localmente (8.5.1), 311.
– numerablemente (8.4.1), 304.
– relativamente (8.1.21), 293.
– sucesionalmene (8.4.1), 304.
Complemento, conjunto (A.1.5), 493.
Complementos finitos, topología (2.1.7), 67.
– numerables, topología (3.2.5), 96.
Completamiento (11.5.2), 405.
– de un espacio métrico (11.5.3), 405.
Completamente regular, espacio (7.4.6), 257.
Completo, espacio métrico (11.4.1), 400.
– , Subconjunto (en un normado) (4.4.4), 138.
Composante (9.3.4), 342.
Composición de aplicaciones (A.5.3), 497.
– de funciones continuas (2.4.23), 84.
Conexa, componente (6.2.1), 206.
Conexa por arcos, componente (6.3.2), 217.
Conexo, espacio, conjunto (6.1.1), 197.
–, Localmente (6.2.13), 212.
–, Simplemente (6.5.14), 234.
Conexo por arcos, espacio, conjunto (6.3.2), 217.
Conjunto (A.1.2), 492.
– potencia (A.1.4), 492.
– cociente (A.4.3), 496.
Cono (§7.5), 261.
Constante, aplicación (A.5.9), 499.
Continua en un punto, aplicación (1.6.1) (3.2.6), 54, 97.
Continua, aplicación (1.6.8) (2.4.15), 58, 82.
Continuo (§9) (9.1.1), 333, 334.
– tipo arco (9.6.2), 351.
– encadenable (9.6.19), 356. Continuos
– descomponibles (§9.4), 344.
– indescomponibles (§9.4), 344
Contractable (6.4.12), 226.
Contractante, aplicación (§11.6), 409.
Convergencia de una base de filtro (3.6.1), 112.
– de un filtro (3.6.1), 112.
– de una red (3.3.4), 104.
– de una secesión (1.5.1) (3.2.1), 47, 95.
– en media (1.1.5), 30.
– puntual (1.1.3) (5.2.4), 29, 162.
– uniforme (1.1.4) (1.4.6), 29, 44.
Convexa, envoltura (§7.5), 261.
Convexo, conjunto (6.3.4)(§7.5), 218, 261.
Coordenada, función (5.2.14), 167.
Coordenadas locales (§7.7), 277.
Cota (superior, inferior) (A.10.3), 503.
Creciente, aplicación (A.10.9), 505.
Cuasicomponente (9.2.1), 339.
Cubo de Hilbert (8.3.3) (9.1.4), 300, 335.
Cubrimiento (A.2.5), 494.
– puntualmente finito (5.1.15), 158.
Cubrimiento localmente finito (5.1.15), 158.
Curva (6.3.1), 216.

D'Alembert, teorema de (8.7.3), 329.
Débil, topología (5.3.7), 174.
Dendrita (9.7.5), 360.
Densidad, Cap. 7 (21)
Densidad, punto de (8.4.3), 305.
Denso, subconjunto (4.4.1), 137.
Denso en ningún lugar, subconjunto (4.4.12), 140.
Derivado, conjunto (4.1.9), 126.
Diagonal (A.3.1) (7.2.1), 494, 244.
Diámetro (1.5.10), 50.
Difeomorfismo de clase C^k (§7.7), 277.
Diferencial, topología (§7.7), 277.
Diferencia, conjunto (A.1.5), 492.
Dígrafos evaluados (1.2.8), 38.
Dilatación, aplicación (1.3.6), 41.
Dini, teorema de (12.4.3), 444.
Dirigido, conjunto (A.10.2), 502.
Disconexo, totalmente (6.2.10), 210.
Discreta, distancia (1.2.3), 34.
–, Topología (2.1.5), 67.
Distancia (1.1.1), 28.
– de costos (1.2.8), 38.
– del bosque (1.2.9) (1.6.28), 39, 63.
– discreta (1.2.3), 34.
– entre conjuntos (1.5.15), 52.
– p-ádica (1.2.7), 38.
– inducida (1.3.1), 40.
Distancias (seudo) semejantes (1.4.9), 45.
– topológicamente equivalentes (1.6.21), 61.

Elemental, filtro (3.4.8), 104.
–, abierto (5.2.1), 161.
Encogido, espacio (5.4.11), 186.
Encogimiento (7.6.1), 272.
Entorno uniforme (11.1.5), 278.
– – simétrico (11.1.4), 377.
Entornos uniformes, sistema fundamental de (11.1.6), 378.
Enyugado, espacio (5.3.9), 174.

ε-cadena (6.2.13), 212.
εfunción (9.6.1), 350.
ε-red (8.1.7), 288.
Equicontinuo (11.3.1), 394.
Equivalencia, relación de (A.3.3), 495.
–, Clases de (A.4.1), 495.
Esfera (1.5.4), 48.
Estrellado, conjunto (6.3.6), 218.
Estructura uniforme,
– – de la convergencia uniforme (12.1.2), 421.
– – de la convergencia puntual (12.1.3), 422.
– – de la convergencia compacta (12.1.7), 424.
– – de la convergencia acotada (12.1.8), 425.
– – de la σ-convergencia (12.1.4), 423.
Estructura diferenciable (7.7.5), 279.
– – inducida (7.7.7), 280.
Evaluación, aplicación
Extensión (8.6.1), 317.
Exterior, punto (4.3.1), 131.
Extremal, punto (8.7.4), 330.
–, Conjunto (8.7.4), 330.

Familia de conjuntos (A.7.1), 500.
Filtro (3.4.1), 103.
–, Base de (3.4.3), 103.
– convergente (3.6.1), 112.
– de Cauchy (11.3.1), 394.
– de Fréchet (3.4.7), 104.
– de secciones (3.4.8), 104.
– de vecindades (3.4.5), 104.
– de los complementos finitos (3.4.6), 104.
– elemental (3.4.8), 104.
– generado (3.5.11), 108.
– principal (3.4.4), 104.
– por adjunción (3.5.15), 109.
–, Subbase de (3.5.11), 108.
– filtros comparables (3.5.1), 106.
Final, topología (5.3.11), 177.
Fox, teorema de (11.2.4), 390.
Frontera, conjunto (4.3.1), 131.
–, Punto (4.3.1), 131.
F_σ-conjunto (4.6.1), 147.
Función (A.5.1), 497.
– de Urysohn (7.4.2), 255.
– separable (7.4.1), 254.
Funtor (6.5.22), 239.

$\mathbf{G}_\delta$-conjunto (4.5.1), 141.
Goursat, teorema de (11.6.4), 415.
Gráfica de f (A.5.1) (7.2.3), 497, 245.
Grupo fundamental (6.5.14), 234.
– topológico (11.1.11), 379.

Hahn-Banach, teorema de (forma geométrica) (7.5.9), 268.
–, teorema de (forma analítica) (7.5.15), 270.
Hausdorff, topología de (7.1.6), 243.
–, Espacio de (7.6.1), 272.
–, Uniformidad de (11.1.24), 385.
Hereditabilidad (7.2.8), 246.
Hereditaria, propiedada (5.1.7), 154.
Hilbert, cubo de (8.3.3), 300.
–, Espacios de (11.4.1), 400.
Hiperplano (4.5.4) (§7.5), 192, 261.
– de apoyo (7.5.10), 260.
Homeomorfismo (2.4.28), 85.
Homeomorfos, espacios (2.4.28), 85.
Homotopía de aplicaciones (6.4.1), 222.
– de arcos (6.5.1), 229.
Homotópica, aplicación (6.4.1), 222.
Homotópico, espacio (6.4.10), 226.
Homótopo, arco (6.5.1), 229.

Idéntica, aplicación (A.5.10) (2.4.17), 499, 82.
Identidad, aplicación (ver *Idéntica*)
Identificación, aplicación (5.3.15), 178.
–, Topología de (5.3.14), 177.
Imagen (A.5.2), 497.
Imagen inversa (A.5.2), 497.
Indiscreta topología (2.1.6), 67.
Indiscreta, estructura uniforme (11.1.10), 379.
Inducida, topología (5.1.1), 152.
Inductivamente ordenado (A.10.8), 505.
Inesencial, aplicación (6.4.1), 222.
Infimo (A.10.4), 503.
Inicial, topología (5.3.2), 172.
Inmersión (5.1.10) (11.5.1), 155, 405.
Integral de Riemann (3.6.4), 114.
Interior, de un conjunto (1.6.10), 60.
–, punto (1.6.3) (4.3.1), 55, 131.
–, producto (1.2.5), 36.
Intersección de conjuntos (A.1.5), 492.
– de colecciones (A.2.2), 493.
– de familias (A.7.1), 500.
–, punto de (6.2.5), 208.
– vacía (A.7.1), 500.
Intersecciones anidadas (9.1.11), 337.
Inversa, función (A.5.6), 498.
Inyectiva, aplicación (A.5.3), 497.
Irreducible (9.3.1), 342.
Isometría (1.3.2), 40.
Isométricos (o isomorfos), espacios métricos (1.3.2), 40.
Isomorfismo, de categorías (2.4.13), 81.
Isomorfismos uniformes (11.2.9), 391.
Izquierda, topología (5.3.2), 172.

Jordán, curva de (8.2.8), 296.
–, Teorema de (6.2.8), 209.

Klein, botella de (5.4.5), 182.

Krein-Milman, teorema de (8.7.5), 331.

Lifting, problema del (5.4.6), 183.
Límite funcional (3.7.6), 120.
–, punto (4.1.12), 127.
– superior, topología de (2.3.15), 77.
Lineal continua, función (1.6.9), 58.
Lebesgue, número de (8.4.9), 307.
– integral de (7.3.9), 252.
Localización, teorema de (7.7.10), 282.
Localmente metrizable (10.2.9), 374.

Maximal, elemento (A.10.5), 503.
Máximo (A.10.4), 503.
Mazur, torema de (7.5.9), 268.
Medida de Radón (7.2.6), 246.
– positiva (7.7.10), 282.
Metrizabilidad (2.4.1), 77.
Métrica (1.2.1), 34.
Métrico, espacio (1.2.1), 34.
Minimal, elemento (A.10.5), 503.
Mínimo (A.10.4), 503.
Minkowsky, desigualdad de (1.2.2), 34.
Möebius, banda de (5.4.3), 181.
Monótona, aplicación (A.10.9), 505.
Morfismo (2.4.7), 79.

Nagata-Smirnov-Klein, teorema de (10.2.6), 371.
Norma (1.2.4), 34.
Normado, espacio (1.2.4), 34.
Normal, espacio (7.1.6), 243.
Normas equivalentes (1.6.26), 62.
Numerabilidad, 1er axioma de (3.1.14), 94.
–, $2.^{do}$ axioma de (2.3.13), 76.
Numerable, conjunto (A.11.1), 505.
– al infinito (8.6.18), 324.
Numerablemente compacto (8.4.1), 304.

Orden, relación de (A.3.4), 495.
– filtrante (A.10.2), 502.
– producto (A.10.1), 502.
– topología de (2.1.9), 68.
Oscilación (1.5.10), 50.

Paracompacto, espacio, conjunto (10.1.1), 362.
Paralelogramo, ley del (cap. 1) (13)
Partición (A.4.2), 496.
– de unidad (7.6.8), 275.
– de unidad diferenciable (7.6.13), 276.
– de unidad subordinada (7.6.9), 275.
Partición de unidad, teorema (10.1.4), 363.
Peano, curvas de (6.2.12), 210.
Polígono (6.3.14), 220.
Precompacto, espacio, conjunto (11.3.11), 397.
Prehilbertiano, espacio (1.2.5), 36.
Preorden filtrante (A.10.2), 502.
Preorden, relación de (A.3.4), 495.
Principio del máximo
Producto cartesiano (A.3.1), 494.
Producto, conjunto (A.8.1), 501.
–, espacio (5.2.1), 161.
–, relación (A.3.2), 494.
–, de estructuras uniformes (12.1.2), 421.
Producto de espacios métricos (5.2.2), 161.
Producto finito de espacios métricos (1.4.7), 44.
Prolongación continua (5.1.14), 157.
Prolongación de funciones reales continuas (§7.5), 261.
Propiedad (global, local) (§7.6), 271.
Propiedad del punto fijo (9.6.25), 357.
Proyección (4.5.11), 144.
– estereográfica (7.7.3), 279.
Proyección, teorema de (11.6.3), 413.
Proyectivo, espacio (5.4.12), 187.

Punto de corte (§9.7), 359.
Red (3.3.3), 101.
Refinamiento (7.6.1), 272.
– baricéntrico (11.1.12), 380.
– ε-localmente finito (10.1.5), 363.
Regular, espacio (7.1.6), 243.
Relación (A.3.2), 494.
– inducida (A.3.2), 494.
– funcional (A.5.1), 497.
Restricción, aplicación (A.5.8), 499.
Retículo (A.10.6), 503.
Retracto (6.4.13), 227.
– de deformación (6.4.13), 227.
Riemann, integral de (7.3.9), 252.
Riesz, teorema de (8.7.1), 327.

Saturado (A.4.4) (5.3.10), 496, 176.
Secciones, filtro de (3.4.8), 104.
Segmento (6.3.4), 218.
Semicontinua, aplicación (2.4.20), 82.
Semiespacio cerrado (4.5.4), 142.
– positivo (negativo) (§7.5), 261.
Seminorma (1.4.3) (7.2.7), 42, 246.
Separable, espacio (4.4.5), 138.
Separación, axiomas de (§7.1), 242.
Separado, conjunto (6.1.6), 198.
Seudométrica (1.4.1), 42.
–, imagen recíproca de una (1.4.4), 43.
Seudométricas semejantes (1.4.9), 45.
– topológicamente equivalentes (1.6.21), 61.
Sierpinski, espacio de (2.1.2), 66.

σ-álgebra (4.6.6), 149.
σ-anillo de conjuntos (4.6.6), 149.
Sobreyectiva, aplicación (A.5.3), 497.
Solenoide diádico (9.1.15), 338.
Soporte de una función (7.6.5), 274.
Stone, teorema de (10.1.11), 365.
–, topología de (12.4.39), 460.
Stone-Cěch, teorema de (8.6.15), 290.
Stone-Weiertrass, teorema de (12.4.21), 452.
Subbase, de un filtro (3.5.11), 108.
–, de una topología (2.3.1), 70.
Subconjunto (A.1.3), 492.
– de corte (§9.7), 359.
Subespacio métrico (1.3.1), 40.
– topológico (5.1.1), 152.
Sucesión convergente (1.5.1), 47.
Suma, conjunto (A.9.1), 502.
–, espacio (5.5.1), 191.
Sumable, familia (3.6.2), 113.
Sumas, (superiores, inferiores) (7.3.9), 252.
Supremo (A.10.4), 503.

T$_1, T_2, T_3, T_4$, espacios (§7.1), 242.
$T_{3.5}$ espacio (7.4.6), 257.
Topológico, espacio (2.1.1), 66.
Toro (5.4.10), 186.
Totalmente ordenado, conjunto (A.10.7), 504.
Topología más gruesa (más fina) (2.2.4), 70.
Traslación, aplicación (1.3.6), 41.
Triodo (9.6.15), 355.
Tychonoff, teorema (8.3.1) (8.6.10), 299, 320.

–, topología (5.2.1), 161.
Ultrafiltro (3.5.17), 110.
– inducido (3.5.22), 111.
–, imagen directa de un (3.7.5), 319.
Unicoherente (9.6.9), 353.
–, hereditariamente (9.6.9), 353.
Uniforme, espacio, estructura (11.1.5), 378.
–, subespacio (11.2.11), 392.
–, topología de la convergencia (12.1.1) (12.1.2), 420, 421.
Uniformemente continua, aplicación (11.1.2) (11.2.1), 376, 389.
Uniformizable, espacio (11.1.25), 385.
Uniformizable, familia (11.1.12), 393.
Unión de conjuntos (A.1.5), 492.
– de colecciones (A.2.2), 493.
– de familias (A.7.1), 500.
Unión disjunta (A.9.1), 502.
Unión vacía (A.7.1), 500.
Urysohn, función de (7.4.2), 255.
–, teorema de (8.6.22), 326.

Variedad algebraica (4.5.5), 142.
Variedad de Riemann (§7.7), 277.
– diferenciable (7.7.6), 280.
Variables, producto de (7.7.9), 280.
Vecindad, en un espacio métrico (1.6.3), 55.
–, en un espacio topológico (3.1.1), 90.
– uniforme (11.1.17), 383.
Vecindades, filtro de (3.4.5), 105.
Vecindades, sistema fundamental de (3.1.9), 93.
Vecinos de orden $\mathcal{U}$ (10.1.5), 363.

Weiertrass, teorema de (12.4.30), 455.
Wallace, teorema de (8.3.6), 303.

Zorn, lema de (A.10.8), 505.

Bibliografía comentada

CAPITULO 1

1. (§ 1.1) Hay dos raíces históricas de la teoría de los espacios métricos en el siglo precedente. Los conjuntos de puntos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$ fueron estudiados sistemáticamente por CANTOR. Paralelamente, pioneros del Análisis Funcional como ASCOLI [10] y VOLTERRA [164] investigaron con los mismos métodos *conjuntos de funciones, curvas,* etc. En 1906 los espacios métricos fueron introducidos por M. FRÉCHET [59]. La teoría fue desarrollada por HAUSDORFF en su obra clásica *Grundzuege der Mengenlehre* [71], que es a la vez también la primera presentación sistemática de la Topología General.
   Ya en 1925 la teoría de los espacios métricos tenía a grandes rasgos su forma presente, debida principalmente a las obras de URYSOHN.

2. (§ 1.1) Las diferentes nociones de convergencia para sucesiones de funciones son expuestas en libros de texto sobre Análisis Matemático, por ejemplo, APOSTOL [7], RUDIN [134], S. LANG [101], CHOQUET [48].

3. (§ 1.2) Para introducirse a las teorías de los *espacios normados y espacios de Hilbert* pueden consultarse los libros de S. LANG [101], CHOQUET [48], DIEUDONNE [49], SCHWARTZ [137] y también las diversas introducciones al Análisis Funcional; mencionamos, más o menos en orden de dificultad creciente, los libros de KOLMOGOROFF/FOMIN [95], LUISTERNIK/SOBOLEV [106], KANTOROVICH/AKILOV [90], recomendamos en paricular la exposición bien concisa y geométrica de LUENBERGER [105] que se sitúa en el contexto de la *Teoría de Optimización.*

4. (§ 1.2-§ 1.6) Casi todos los libros de Topología General dedican un capítulo o más a los espacios métricos. Suficientemente elemental para una introducción son por ejemplo

los capítulos respectivos en CHOQUET [48], DIEUDONNE [49], BERGE [18], KASRIEL [91]. Para el estudio más profundo de la teoría de los espacios métricos se recomienda esperar hasta el capítulo 9.

CAPITULO 2

1. Para obtener una visión general histórica de los problemas y logros principales de toda la topología (no sólo la Topología General) recomendamos encarecidamente al lector leer artículo de BRIESKORN [33], que será publicado por la Escuela de Matemática de la Universidad de la Habana. Es difícil fijar una fecha precisa para el nacimiento de la Topología. Problemas de naturaleza topológica ya fueron estudiados por Euler y Gauss, parece que la palabra *topología* fue utilizada por primera vez por Listing. De suma importancia para el desarrollo ulterior de toda la topología fueron las obras de RIEMANN [131], de CANTOR [39] y POINCARÉ [128]. Sin embargo, la topología General sólo nació en los años 1905-1910 cuando tres autores diferentes logarron hallar definiciones generales de un espacio topológico: RIESZ [132], FRECHET [59], E. H. MOORE [117]. HAUSDORFF [71] fundamentó la topología mediante un sistema de axiomas para las vecindades. Parece que TIETZE [54] fue el primero que analizó la posibilidad de definir un espacio topológico mediante la familia de sus abiertos (en 1923). ALEXANDROF [3] definió en 1925 un espacio de HAUSDORFF por un sistema de axiomas para los abiertos. En 1935, ALEXANDROF/HOPF [5] propusieron, entre otros, el sitema (01)-(03) como sistemas de axiomas para los espacios topológicos generales. Desde entonces, casi todas las obras importantes de Topología General utilizan este sistema axiomático, como por ejemplo BOURBAKI [29] y [KELLEY] 93.

2. (§ 2.1) Quien se interese por las interrelaciones entre topología y orden en un espacio topológico ordenado puede consultar el tratamiento sistemático de L. NACHBIN [119].

3. (§ 2.2) El primer libro de texto que utilizó ampliamente la teoría de los conjuntos ordenados en Topología General fue VAIDYANA THSWAMY [162] en 1947.

4. (§ 2.4) Algunos autores utilizan nociones elementales de la *Teoría de Categorías* para estructuras de Topología General, como por ejemplo GROTEMEYER [65], MENDELSOHN[111]. Como libro de referncia sobre la teoría de categorías de nivel superior mencionamos MCLANE [108].

5. (§ 2.4) El punto de vista de que la Topología es una *geometría de superficies de goma* está acentuado en el libro de ARNOLD [9] sobre conceptos intuitivos en topología elemental, y en otros libros (muy recomendables) que tratan la topología con mucha intuición como CHINN/STEENROD [46], HILBERT/COHN-VOSSEN [77], MILNOR

[112], LIETZMANN [104]. Sin embargo, la formalización de este enfoque geométrico conduce más bien a la Topología Algebraica y a la Topología Diferencial, que a la Topología General.

6. (§ 2.4) Las funciones semicontinuas fueron introducidas por BAIRE [12]. Para una primera información sobre estas funciones recomendamos CHOQUET [48].

CAPITULO 3

1. (§ 3.1) HILBERT [76] y H. WEYL [169] utilizaron en 1903 y 1913 respectivamente, sistema de vecindades para definir *superficies.* Sucediéndoles, HAUSDORFF [71] definió en 1914 los espacios topológicos que hoy se llaman *espacios de Hausdorff.*
   El sistema de axiomas $(U^1)-(U^4)$ fue introducido por BOURBAKI [29] en 1940. En 1918, FRÉCHET [60] había propuesto un sistema considerablemente más débil de axiomas. Resultados sobre estos llamados *V-espacios de Fréchet* son expuestos en THRON [153] y en SIERSPINSKI [138].

2. (§ 3.2-§ 3.3) Las dificultades precisadas en § 3.2 condujeron a E. H. MOORE [115] en 1915 y más tarde, en cooperación con SMITH [114], a desarrollar su *teoría de redes.* La teoría fue aplicada a problemas de convergencia por BIRKHOFF [21] y desarrollado ulteriormente por TUKEY [158] y KELLEY [92]. Antes de 1940, en todas las obras sobre Topología General fueron empleadas únicamente las redes en sustitución de las sucesiones (compárese por ejemplo CECH [45].

3. (§ 3.4-§ 3.7) En 1937, H. CARTAN introdujo los filtros [43] y definióp los ultrafiltros [41]. La presentación clásica de la *teoría de los filtros* que contribuyó fuertemente a la diseminación de este concepto en Topolgía General es de BOURBAKI [29]. La equivalencia entre redes y filtross fue discutido por primera vez por BARTLE [15].

4. (§ 3.5-§ 3.6) Hay muchos libros sobre Topología General que no tratan los conceptos de red o filtro más que marginalmente, porque no están interesados en el enfoque analítico de la Topología General. El otro extremo es marcado por el libro de KOWALSKY [96], que define el espacio topológico por medio de filtros y pone este concepto en el centro de la Topolgía General. El resultado es muy difícil de leer. FISCHER [55] toma la convergencia como concepto fundamental y da un sistema de axiomas para los filtros convergentes.

CAPITULO 4

1. (§ 4.1-§ 4.2) Casi todos los conceptos y resultados de estos dos epígrafes ya fueron establecidos por CANTOR [39] para los espacios euclidianos.

2. (§ 4.3) Un sistema de axiomas para el operador clausura fue introducido por KURATOWSKI [99] en su tesis de 1920. Este sistema de axiomas para los espacios topológicos, fue diseminado principalmente por la obra de ALEXANDROF/HOPF [5]. Más tarde, KURATOSKI [98] utilizó un sistema modificado que define los T_1- espacios (véase cap. 7).

3. (§ 4.4) Una introducción concisa de los espacios y conceptos considerados en este epígrafe se halla en LUENBERGER [105].

4. (§ 4.5) El principio del máximo para funciones armónicas está tratado en el apéndice de M. BRELOT [32].

5. (§ 4.6) Los conjuntos borelianos y nociones a fines fueron analizados primeramente en las obras de BOREL [32] y BAIRE [12], quienes trataron con vistas a la teoría de integración, de clasificar los conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^n$. La teoría fue desarrollada después de 1910 principalmente por los topólogos rusos y polacos en el contexto de la teoría de los espacios métricos, en particular por LUSIN [107] y SOUSLIN [143].
   Para una presentación sisteemática de esta teoría pueden recomendarse BORBAKI [30] y (como libro de referencia) KURATOWSKI [98]. Los principales campos de aplicación son la teoría de integración (véase HALMOS [69] y teoría del potencial (CHOQUET [47]).

CAPITULO 5

1. (§ 5.1) Ya en 1906, RIESZ [132] expuso las ideas básicas para definir la *topología inducida* sobre un subespacio. Independientemente, HAUSDORFF [71] dio en 1914 un tratamiento sistemático de los subespacios. La idea de *inmersión* fue utilizada implícitamente por Cantor y Dedekind en sus construcciones de los números reales. Sin embargo, el concepto general sólo fue estudiando mucho más tarde.
   Nosotros vamos a construir dos inmersiones especiales de gran importancia en los capítulos 7 (compactificaciones) y 8 (completamiento). Los problemas de inmersión constituyen un tema importante en otras ramas de la Topología, como por ejemplo la Topología Diferencial (véase MASSEY [10]).
   Muy relacionado con el concepto de inmersión está la noción de *prolongación*.

Muchos problemas de toda la Topología pueden formularse como problemas de prolongación. HU, por ejemplo, pone este problema en el centro de su libro sobre *homotopía [84]*.
Nosotros vamos a estudiar problemas de prolongación en el capítulo 7 . En análisis Funcional, la prolongación de funcionales es un tema de suma imoportancia (veáse, por ejemplo, el teorema de Hahn-Banach, cap. 7.7 (3).

2. (§ 5.2) Primeras definiciones para la estructura topológica de productos finitos fueron propuestas en 1907, por STEINITZ [148] y en 1910 por FRÉCHET [57]. En 1923 *Tietze* [156] dio una definicion para productos cualesquiera que fue más fuerte que la definición geeneral adoptada hoy. Esta Topología se debe a Tychonoff. Topología más fuertes para los espacios funcionales Y^X se estudiarán en el capitulo 11.

3. (§ 5.3) Las topologías iniciales y finales son casos particulares de las estructuras iniciales y finales, tratadas por BOURBAKI [28] en su Toería de Conjuntos. No hay muchas introducciones a la Topología General que estudian explícitamente las topologías iniciales y finales; mencionaremos GROTEMEYER [65] y GEMIGNANI [63].

4. (§ 5.3) Los espacios enyugados fueron estudiados en 1937 por A. WEIL [168], en el contexto de su teoría de los espacios uniformes. Los espacios uniformes X puede definirse equivalentemente por una familia de seudométricas sobre X, o por un sistema de axiomas para los llamados *entornos* $H \subset X \times X$ que indican la *cercanía* de puntos en X (véase cap. 10).
KELLEY [93], DUGUNDJI [51], NAGATA [121], THRON [152], SCHUBERT [136].
Más informaciones bibliográficas sobre los espacios uniformes se hallan en el capítulo 8.

5. (§ 5.3) Los *espacios vectoriales topológicos* y en particular los *espacios localmente convexos* son de gran importancia en Análisis Funcional. Para una introducción a esta teoría recomendamos CHOQUET [48]. Un estudio más completo a un nivel intermedio ofrece BOURBAKI [29], [26]. Importantes libros de referencia de un nivel superior son SCHAEFER [135], KOETHE [97], KELLEY/NAMIOKA [94].

6. (§ 5.3) Las Topologías de identificación juegan un papel cada vez más importante en topología (DUGUNDJI [51]). Son estudiadas particularmente en los libros de Topología General con un enfoque geométrico, como por ejemplo BROWN [37]. Su importancia en Topología Algebraica se pone de manifiesto en el libro de MASSEY [110].

7. (§ 5.4) Como introducción al estudio de las superficies que forman los ejemplos de este epígrafe recomendamos BARR [14], BLACKETT [29], MASSEY [110]. Nuestra presentación sigue parcialmente al libro de BROWN [37].

8. (§ 5.5) Los *espacios de adjunción* son estudiados con más detalle en BROWN [37].

CAPITULO 6

1. (§ 6.1) La noción de conexidad tiene una historia complicada. Una relación condensada está ofrecida en THRON [153], pág. 29-30. La definición 6.1.1 que hoy está aceptada generalmente se debe a RIESZ [132].

   La invarianza de la dimensión para homemorfismos fue demostrada por BROUWER[34]. DUGUNDJI[51] presenta una demostración de este teorema fundamental mediante la *teoría de homotopía*. Una demostración por técnicas homológicas se halla en ARTIN/BRAUN[11] y HOCKING/YOUNG[81]. Partiendo de los resultados de Brouwer se ha desarrollado una propia *teoría topológica de la dimensión*. La obra clásica es de, HUREWICZ/WALLMAN[87], quienes definieron la dimensión de espacios *métricos separables* cualesquiera. Hoy existen diferentes teorías de dimensión para espacios *normales* (véase cap. 6) expuestas en NAGATA [21] y NAGAMI [120].

2. (§ 6.2) Las *componentes conexas* fueron introducidas por HAUSDORFF [71]. Los *puntos de intersección* son estudiados en BROWN [37], ARNOLD [9], BLACKETT [29] y LIETZMANN [104]. Analizan de manera muy intuitiva curvas y grafos en un espacio topológico. Al lector que busca una presentación más sistemática le recomendamos el excelente libro de HARARY [73].

   Para una primera introducción a los problemas topológicos relacionados con el *teorema de curvas de jordán* recomendamos las presentaciones intuitivas de CHINN/STEENROD [46], MILNOR [112] y ARNOLD [9]. Una demostración elemental de este teorema se halla en HALL/SPENCER [67].

3. (§ 6.3) La *teoría de los conjuntos convexos* es una parte del Análisis Funcional que más aplicaciones tiene en la práctica (especialmente en teoría de optimización). Como introducción se recomienda el excelente libro de LUENBERGER [105]. BERGE [18] incluye resultados importantes sobre los convexos en su libro de Topología General. El *teorema 6.3.16* se utiliza frecuentemente en Análisis Complejo (véase AHLFORS [2]).

4. (§ 6.4) La Topología Algebraica es más vieja que la Topología General. En 1895, POINCARÉ [128] definió los grupos fundamentales y hechó los cimientos para una teoría algebraica de los espacios topológicos. Como introducción a la *teoría de homotopía* pueden servir los libros de BROWN [37], MASSEY [110], O'NEILL [125]. Los libros conocidos de HOCKING/YOUNG [81], SINGER/THORPE [139] y DUGUNDJI [51] tratan la teoría de homotopía a un nivel intermedio. Las obras siguientes exponen esta teoría de manera sistemática en un nivel superior, y presuponen parcialmente conocimientos de técnicas homológicas: HU [84], [86] HILTON [78], BORSUK [24].

CAPITULO 7

1. (§ 7.1) El axioma (T_2) fue introducido por HAUSDORFF [71] en 1914, el axioma (T_3) por VIETORIS [163] en 1921, el axioma (T_4) por TIETZE [154], [154] en 1923, el axioma (T_0) por ALEXANDROF/HOPE [5] en 1935. El axioma (T_1) se atribuye a FRÉCHET [59]. URYSOHN dio una primera discusión sistemática de los axiomas de separación hasta entonces conocidos en [160], [161]. Una breve relación hitórica de los varios axiomas de separación que fueron propuestos y estudiados en el pasado se halla en THORN [153] p. § 0/91.

2. (§ 7.3) *Ejemplo 8* : La *integral de Riemann* está definida en SPIVAK [145], la *integral de Cauchy* en S. LANG [101], la *integral de Lebesgue* en RUNDI [134]. Una caracterización de las *funciones arregladas* se halla en DIEUDONNE [49].

3. (§ 7.4) El teorema de Urysohn fue publicado en 1925 (URYSOHN [160]). Sólo entonces fue reconocida la importancia de los espacios normales introducidos por TIETZE [154], [156] en 1923. Hemos expuesto el teorema de Urysohn en un estilo anlogo a los teoremas de sepacración de conjuntos convexos por un hiperplano, conocidos del Análisis Funcional: compárese 5 (§ 7.6) El ejercicio 13 se debe a un manuscrito no publicado de un curo de ARTIN sobre Topología General (Hamburgo, 1959).

4. (§ 7.5) El llamado *teorema de tietze* fue probado en su forma general por URYSOHN [160] en 1925 después de ser demostrado para espacios métricos por TIETZE [154], [156] y HAUSDORFF y para los espacios $\Re^n$ por varios autores (LEBESGUE, BROUWER, etc). El problema de prolongar una función con valores en espacios topológicos más generales, obtiene más y más importancia en Topología Algebraica; compárese HU [84].

5. (§ 7.6) La presentación de este epígrafe sigue, en su mayor parte, la exposición de LUENBERGER [105], con excepción de la demostración del *teorema de Banach*. Recomendamos este libro para profundizar en las aplicaciones de los resultados de este epígrafe en Teoría de Optimización.

6. (§ 7.7) DIEUDONNE [50] fue el primero en estudiar las *particiones de unidad* sistemáticamente en el contexto de su teoría de los espacios paracompactos.

7. (§ 7.8) Para una introducción al *Análisis Matemático sobre variedades* recomendamos SPIVAH [146]. Un buen libro de texto, más completo es LANG [102]. Para una primera introducción a la *Topología Diferencial* puede servir BLACKETT [29], MILNOR [112], SORANI [142]. Para una aplicación de los métodos de Topología Difernciall a la *teoría cualitativa* de ecuaciones diferenciales (véase ABBRAHAM [1], SMALE [140]). Una visión general de los progresos y resultados recientes en Topología Diferencial la dan SMALE [140] y WALL [165].

CAPITULO 8

1. (§ 8.1) El desarrollo histórico de la noción de compacidad fue complicada por la equivalencia de criterios de compacidad en $\mathbb{R}^n$, que no son equivalentes en un espacio topológico cualquiera. Esto causó confusión entre las nociones de *compacidad, compacidad numerable y compacidad sucesional* (véase § 3 de este capítulo). Una breve relación histórica dan Bourbaki [29], pag. 184-186 y Thoron [153] pág. 118-119). Notamos que la noción de compacidad fue el concepto fundamental y el motivo estimulante para el desarrollo del Análisis Funcional (véase Bourbaki [29], pag. 185). Todos los libros de texto sobre Topología General tratan los espacios compactos; véase por ejemplo Bourbaki [29], Kelley [93], Dugundji [51].

2. (§ 8.1) Sobre el desarrollo reciente de la teoría de bornología véase, por ejemplo, un artículo de Jiménez [89] en la revista *Compacta* (La Habana).

3. (§ 8.2) De los razonamientos del ejemplo 16 pueden derivarse fácilmente los teoremas sobre la separación de convexos en $\mathbb{R}^n$ (véase Berge [18], pág. 162-163). Para una generalización de estos razonamientos a espacios de Hilbert que se obtienen utilizando un argumento de completitud en lugar de compacidad. (Compárese cap. 10, § 6 *Teoría de proyección.*)

4. (§ 8.3) La demostración del teorema de Tychonoff es tomado de Bourbaki [29]. El ejemplo 20 se debe a Luenberger [105].

5. (§ 8.4) El lector hallará las demostraciones de las proposiciones enunciadas de este epígrafe en Dugundji [51], y Thron [153] (pág. 118-128). El ejemplo 21 es de Steen/Seebach [147].

6. (§ 8.5) Los espacios localmente compactos fueron introducidos en 1924 independientemente por Tietze [155] y Alexandrof [3], quienes estudiaron también la un-punto-compactificación.

   Sobre las compactificaciones de Stone-Cěch comparar Tychonov [159], Cěch [44] y M. H. Stone [149].

   Para una exposición más general de una *teoría de extensión* (por medio de filtros) compárese Kowalski [96] y Thron [153]. El *teorema de metrización* de Urysohn ya fue publcado en 1925 (Urysohn [161]).

CAPITULO 9

1. La teoría de los continuos se distingue como una rama específica de la topología, desde los primeros años del siglo XX. Janusz J. Charatonik hace un recuento del desarrollo de esta teoría es su artículo "History of Continuum Theory", el cual está incluido en C. E. Aull y R. Lowen[173]. Las referencias clásicas en esta temática son los libros de Kuratowski[100] y de Whyburn[170], estas obras se citan regularmente en los

artículos de investigación en teoría de continuos. Actualmente, ya contamos con un libro de texto introductorio a esta parte de la topología, publicado en 1992 por SAM B. NADLER JR.[172]. Este texto presenta, en sus 13 capítulos, los tópicos más desarrollados de la teoría, con la ventaja de que un curso básico en topología general basta para realizar su lectura.

CAPITULO 10

1. (§ 10.1) Los espacios paracompactos fueron introducidos como una generalización de los espacios compactos en 1944 por DIEUDONNE [50]. En 1948 A. H. STONE [151] demostró el célebre teorema 10.1.11 que lleva su nombre. Los resultados de DIEUDONNE y STONE fueron decisivos para la generalización de la teoría de dimensión a espacios no separables (véase NAGAMI [120]).

   Caracterizaciones de los espacios paracompactos, por medio de otros tipos de refinamientos, válidos para T_1-espacios, se halla en DUGUNDJI [51] (págs. 167-169). Un desarrollo más detallado de la teoría de los espacios paracompactos está dado en NAGATA [21].

2. (§ 10.2) Ya en 1923 ALEXANDROF/URYSOHN [6] dieron una primera condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad de un espacio topológico.

   Sin embargo, el primer criterio de amplia utilidad teórica (10.2.4) fue el dado por URYSOHN [161] en 1924, el cual se limita a A. N. 2-espacios.

   El problema de hallar un criterio general de metrizabilidad satisfactirio fue, durante decenios, un problema abierto de la Topología.

   No fue hasta después que STONE [151] demostrara su teorema 10.1.11 que en los años 1950/52 tres matemáticos NAGATA [122], SMIRNOV [141] y BING [20] descubrieron el criterio necesario y suficiente formulado en 10.2.8.

3. (§ 10.2) Para profundizar en la teoría de los espacios métricos, en general, recomendamos SIERPINSKY [138]

CAPITULO 11

1. (§ 11.1) Los espacios uniformes fueron introducidos por A. WEIL [168] en 1937. Es raro que no fueran estudiados desde antes, puesto que su definición axiomática sigue el método utilizado para definir los espacios topológicos 20 años antes. El artículo de WEIL [168] ya contiene todos los resultados básicos que hemos expuesto en los epígrafes § 11.1-§ 11.3; en particular ya prueba la existencia de una familia de seudométricas que define una estructura uniforme dada. La monología de ISBELL [88] reúne los resultados ontenidos hata 1960 sobre la geometría intrínseca de los espacios uniformes.

2. (§ 11.1) el sistema axiomático de A. Weil no se ha enriquecido con el desarrollo ulterior de la teoría. El sistema axiomático cásico que nosotros utilizamos (11.1.5) fue dado por Bourbaki [29], cap. 2. El método de definir una estructura por recubrimientos (ejemplo 11.1.12) fue introducido por Tukey [158]. Isbell [88] utiliza el mismo método, lo cual no es sorprendente ya que su monografía se dedica principalmente a la teoría de dimensión. Una visión general de las diferentes exposiciones de la teoría de la sestructuras uniformes se da en Mamuzič [109].

3. (§ 11.1) Una clase de espacios intermedia entre los espacios topológicos y los espacios uniformes está formada por los llamados espacios de proximidad. Informaciones sobre esta clase de espacios dan Pervin [126] y Thron [153].

4. (§ 11.1.11) El hecho de que todo grupo topológico sea uniformizable (por dos estructuras uniformes canónicas), análisis constituido uno de los motivos fundamentales para el estudio de los espacios uniformes (compárese Weil [168]). Para una introducción en la teoría de los grupos topológicos recomendamos el libro de Pontryagin [130]. El interés actual en la teoría de los grupos topológicos se concentra en el problema de que partes del Análisis clásico pueden trasladarse a los grupos topológicos (Análisis Harmónico). Como libros de referencia citamos los tratamientos de Loomis y Hewitt/Ross [74].

5. (§ 11.3) Las estructuras uniformes completas juegan un papel fundamental en la teoría de los espacios vectoriales topológicos (véase Bourbaki [25]).

6. (§ 11.4) Los espacios métricos completos que han resultado ser una potente arma de trabajo en diferentes ramas de la matemática, fueron introducidos por M. Fréchet [59] en 1960.

   Los dos tipos de espacios métricos completos más utilizados en la práctica son los espacios de Banach y de Hilbert. Una amplia bibliografía sobre espacios de Hilbert puede encontrar el lector en las notas bibliográficas al capitulo 1. Para introducirse en el estudio de los espacios de Banach recomendamos Dieudonne [49], H. Cartan [40] y Nagumo [123].

   G. Cantor probó un caso particular del teorema de caracterización de los espacios métricos completos que lleva su nombre. La formulación dada aquí fue hallada por F. Hausdorff [71] en 1914.

   Otros criterios necesarios y/o suficientes para la completicidad de un espacio métrico han sido dados por Kuratowski (ver Engelking [53]).

   La carcterización topológica de los espacios metrizables completos fue dada por Čech [45] en 1937.

7. (§ 11.5) Los espacios totalmente acotados o precompactos fueron introducidos por F. Hausdorff [72] en 1927, con vistas a obtener un nexo entre los espacios métricos compactos y completos.

8. (§ 11.6) El teorema de completamiento fue demostrado por Hausdorff [71] en 1914. La demostración de Hausdorff fue una generalización de la construcción de los números reales hecha por Cantor. La simple prueba dada aquí fue hallada por K. Kuratowski [98] en 1935.

9. (§ 11.7) Para profundizar en aplicaciones en la teoría de optización recomendamos al lector LUENBERGER [105]. Aplicaciones a las teorías de Algebra de Funciones pueden encontrarse en HOFFMAN [82], GAMELIN [61].

   Para aplicaciones de los espacios de BANACH a las ecuaciones diferenciales recomendamos H-CARTAN [40]

CAPITULO 12

1. (Introducción). Una breve exposición sobre las raíces histŕicas del contenido de este capítulo se halla en BOURBAKI [31]. Este libro es a la vez el mejor libro de referencia porque contiene en una presentación más sistemática y más completa casi todos los resultados de este capítulo.

2. (§ 12.1) La referencia cásica sobre las estructuras uniformes de σ-convergencia es BOURBAKI [31]. Puede también consultarse SCHUBERT [136].

   La mayoría de los libros de topología no tratan sistemátimente esta materia. Las σ-topologías sobre espacios de funciones con valores en un vectorial topológico se tratan en BOURBAKI [31], KÖETHE [97].

3. (§ 12.2) Como suplemento de BOURBAKI [31] que introduce las topologías compactas abiertas solamente sobre los espacios de las funciones continuas con valores en un espacio uniforme, sería conveniente ver DUGUNDJI [51] (cap. XII) y SCHUBERT [136], quienes presentan también algunas aplicaciones de los resultados 12.2.4 y 12.2.5, a topologías de identificación y en Teoría de Homotopía. La relación entre la topología compacta abierta y la continuidad de la aplicación evaluación, descubierta por R. H. FOX [56] y R. Arens [8] mostró que en general no existe una topología más gruesa sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ con respecto a la cual dicha aplicación sea continua.

4. (§ 11.3) La noción de equicontinuidad fue introducida por ASCOLI [10] para la caracterización de los conjuntos compactos de funciones. La teoría de MONTEL[113] sobre las funciones normales contribuyó notablemente a la popularización del teorema de Ascoli.

   Una demostración completa del teorema de Peano mediante el teorema de Ascoli que nos sirvió de modelo se halla en A. N. KOLMOGOROF/S. V. FOMIN [95]. Otros criterios de compacidad para espacios funcionales compactos de importancia en Análisis Funcional son presentados en LIUSTERNIK/SOBOLEV [106].

5. (§ 12.4) La teoría de aproximación desarrollada en este epígrafe se basa en el teorema clásico de WEIERSTRASS publicado en [167]. M. H. STONE [150], resaltó el papel central que juega la relación de orden en la aproximación de funciones reales continuas y mostró que el teorema de WEIERSTRASS generalizado (12.4.21), junto con los demás resultados presentados en este epígrafe, pueden desarrollarse en una teoría sistemática y coherente de la aproximación de funciones reales continuas.

   Las aplicaciones 1-4 se hallan eleboradas con demostraciones completas en BOURBAKI [31].

   Resultados similares se obtienen para las álgebras de funciones complejas en la Teoría de las Algebras Uniformes. (Véase ejercicio E.11.18) y BROWDER [36]