Dirección General de Publicaciones

Topología y sus aplicaciones 8

J. JUAN ANGOA AMADOR
RAÚL ESCOBEDO CONDE
MANUEL IBARRA CONTRERAS
AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO

editores

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Topología y sus aplicaciones 8

Editores literarios

Juan Angoa, Agustín Contreras, Raúl Escobedo, Manuel Ibarra

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Primera edición: 2021
ISBN: 978-607-525-767-9

4 sur 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tel.: 01 (222) 229 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 norte 1404, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tels.: 222 246 85 59
222 229 55 00
Ext. 5768
publicaciones.buap.mx
librosdgp@correo.buap.mx

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Presentación

Estimado lector, el cuerpo académico de Topología y sus Aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, publica un nuevo libro, en este caso virtual, de la serie topología y sus aplicaciones; en este volumen incluimos temas de funciones cardinales, teoría de Categorías, teoría de continuos, teoría de conjuntos, topología general, sistemas dinámicos, así como una importante discusión de nuevas líneas de abordar lo continuo. Es de destacar la unión lograda entre autores y editores gracias al lazo que los une, los árbitros y los lectores. Todo esto forma parte de una comunidad interesada en la visión topológica de la matemática, así como de sus métodos y aplicaciones. Nuevamente, nos percatamos con orgullo del gran mosaico humano que se congrega para la realización de este libro: matemáticos de Oaxaca, Tlaxcala, Ciudad de México, Zacatecas, Chiapas y Puebla, nos han apoyado enviando sus trabajos a este comité editorial. Es de destacar, la participación de matemáticos de otros paises, y la ya importante influencia que hemos obtenido en colegas de otros paises que se interesan por este proyecto, tenemos aportaciones de matemáticos de: España, Perú y Estados Unidos; esperamos aumentar nuestra área de influencia, que esto a final de cuentas, expresa la acumulación de nuevas relaciones humanas. También resaltamos que nuestro libro poco a poco se adentra en las vias de la investigación, tenemos artículos que aportan resultados novedosos. Aunque no es el grueso de los artículos los que tienen este perfil, subrayamos la presencia ya de algunos de este tipo, que son expresión de la madurez de este trabajo editorial.

En el estado actual del país y de la universidad, estos esfuerzos, más alla de una actividad acádemica, son una actividad de esperanza y confianza de que la ciencia tiene una carga salvadora. Todo esto nos impele a continuar con este trabajo, ya que su dimensión nacional se ha asegurado, y se trabaja en una influencia internacional. La pemanencia y disciplina de los participantes en este proyecto, así como de una comunidad que se siente interesada en él, nos confirma la gran responsabilidad que se nos ha delegado. Sentimos que hemos asumido la gran responsabilidad, pese a todo, de continuarlo, tal vez no con la misma frecuencia, pero sí con la misma calidad que hasta ahora hemos tenido.

Los editores
Enero de 2021

Contenido

Capítulo 1

Una cota para el peso de espacios T_3

Fidel Casarrubias Segura
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México

1. Introducción

Una de las nociones más básicas en topología es el concepto de base para una topología. Todas las bases de un espacio topológico tiene una cantidad mínima de elementos; esta cantidad mínima de elementos recibe el nombre de *peso del espacio*. En forma más precisa el peso $w(X)$ de un espacio topológico (X, τ) se define como el número cardinal $w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } \tau\}$.

El peso es una función (clase) de la clase de todos los espacios topológicos a la clase de todos los números cardinales que tiene la cualidad de asociarle el mismo número cardinal a espacios homeomorfos; esto es lo que se conoce como una función cardinal topológica. Entre otras cosas, la función w caracteriza a la clase de espacios segundo-numerable: un espacio X es segundo numerable si y sólo si $w(X) \leqslant \omega$, y de cierta manera, extiende ésta clase a cardinalidades mayores a la numerable.

La clase de los espacios segundo-numerable tiene buenas propiedades: ésta es cerrada bajo productos finitos y productos numerables, y es cerrada bajo subespacios; pero no es finito-aditiva, es decir, no es siempre cierto que si un espacio X se puede escribir como la unión finita de subespacios segundo-numerables, entonces X es segundo-numerable. En 1951 Arkhangles'kii demostró que cuando el espacio X es compacto, sí es posible concluir la segundo-numerabilidad de X:

Teorema. (Arkhangel'skii). Si X es un espacio compacto Hausdorff, $\kappa \geqslant \aleph_0$ y $X = A \cup B$ con $w(A), w(B) \leqslant \kappa$, entonces $w(X) \leqslant \kappa$.

Este resultado es llamado hoy en día teorema de aditividad del peso, y la idea clave para su demostración fue la introducción por parte de Arkhangelskii de una noción que generaliza a las bases de una topología: la noción de red.

En este trabajo estudiamos las propiedades más básicas de la función cardinal topológica peso de red, la cual mide la mínima cardinalidad de redes de un espacio topológico. Damos también una demostración completa del resultado que muestra que el peso de un espacio T_3 es menor o igual que el peso de red elevado al número de Nagami del espacio. Este resultado generaliza el correspondiente resultado de Tkachenko para espacios Tychonoff. Finalizamos la nota presentando algunos resultados recientes obtenidos en [**3**] que resuelven dos problemas abiertos planteados por Molina Lara y Okunev en [**7**].

Terminología y notación. Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X)$ denota al conjunto potencia de X, esto es, a la colección de todos los subconjuntos de X.

Todos los espacios topológicos se suponen no vacíos. Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces $\tau(x,X)=\{V\in\tau : x\in V\}$.

Recuerde que un espacio X es *completamente regular* si para todo subconjunto cerrado F de X y todo punto $x\in X\setminus F$, existe una función continua $f:X\to[0,1]$ tal que $f(F)\subseteq\{0\}$ y $f(x)=1$. Un espacio es Tychonoff, o de Tychonoff, si es un espacio completamente regular T_0.

2. Las redes de Arkhangel'skii

Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces una *base* para τ es una colección $\mathcal{B}\subseteq\tau$ tal que para cada $x\in X$ y cada $U\in\tau(x,X)$ existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subseteq U$. Cuando quitamos la exigencia «$\mathcal{B}\subseteq\tau$» obtenemos el concepto de red.

Definición 2.1 (Arkhangel'skii)**.** Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que una colección $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{P}(X)$ es una *red de subconjuntos de* X si para cada $x\in X$ y cada $U\in\tau(x,X)$ existe $N\in\mathcal{N}$ tal que $x\in N\subseteq U$.

El peso de red (o peso red) de un espacio topológico (X,τ) es el número cardinal $nw(X)=\min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}\text{ es red de }X\}$. Es muy sencillo verificar que para cualquier espacio topológico (X,τ) la familia $\mathcal{N}=\{\{x\}:x\in X\}$ es una red de subconjuntos de X y es por esto que $nw(X)\leqslant|X|$. También es cierto que $nw(X)\leqslant w(X)$ y la razón de ello es que toda base es una red de subconjuntos.

Los espacios topológicos que tienen una red a lo más numerable se llaman *cósmicos*. Las desigualdades enunciadas en el parrafo anterior implican que *todos los espacios finito o numerables, y todos los espacios segundo-numerables son espacios cósmicos.*

Los espacios cósmicos son espacios separables; es decir, tienen un subconjunto denso finito o numerable. Es esta la razón del porqué son separables los espacios finitos, los espacios numerables y los espacios segundo-numerables. Lo anterior es una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. Para todo espacio topológico (X,τ) sucede que

$$d(X)\leqslant nw(X)\leqslant w(X)\quad\text{y}\quad nw(X)\leqslant|X|.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que $d(X)\leqslant nw(X)$. Recuerde que $d(X)=\min\{|D| : D\subseteq X=\overline{D}\}$ es la densidad de X. Consideremos una red $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que $|\mathcal{N}|=nw(X)$. Para cada $N\in\mathcal{N}\setminus\{\emptyset\}$ fijemos un único elemento $x_N\in N$. Es claro que $D=\{x_N : N\in\mathcal{N}\setminus\{\emptyset\}\}$ tiene cardinalidad menor o igual que la cardinalidad de $\mathcal{N}$. Además, $\overline{D}=X$ puesto que si U es un abierto no vacío podemos elegir un elemento $x\in U$. Como $\mathcal{N}$ es red de X, existe un $N\in\mathcal{N}$ de modo que $x\in N\subseteq U$. Note que $N\in\mathcal{N}\setminus\{\emptyset\}$, así $x_N\in N\subseteq U$. Luego $x_N\in U\cap D$. Por lo tanto, D es denso en X. Consecuentemente, $d(X)\leqslant|D|\leqslant nw(X)$. $\square$

Cualquier espacio numerable que no sea primero-numerable, como por ejemplo el *abanico numerable*[1], es un espacio cósmico que no es segundo-numerable. Para la línea de Sorgenfrey $(\mathbb{R},\tau_s)$ sucede que $w(\mathbb{R},\tau_s)=nw(\mathbb{R},\tau_s)=\mathfrak{c}$. En efecto, debido a que $nw(\mathbb{R},\tau_s)\leqslant w(\mathbb{R},\tau_s)\leqslant|\mathbb{R}|$[2] sólo debemos mostrar que $nw(\mathbb{R},\tau_s)\geqslant\mathfrak{c}$; y para hacer esto es suficiente probar que ninguna subcolección no vacía $\mathcal{N}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de cardinalidad $<\mathfrak{c}$ puede ser una red en $(\mathbb{R},\tau_s)$. Suponga entonces que $\mathcal{N}$ es una colección de las características mencionadas. Sin perder generalidad podemos suponer que $\emptyset\notin\mathcal{N}$. Definamos

$$\mathcal{N}_a=\{N\in\mathcal{N} : N\text{ es acotado inferiormente en }(\mathbb{R},\leqslant)\}$$

y

$$\mathcal{N}_{na}=\{N\in\mathcal{N} : N\text{ es no acotado inferiormente en }(\mathbb{R},\leqslant)\}.$$

[1] El espacio cociente del producto topológico $Y\times\mathbb{N}$ generado por la relación de equivalencia: $(y,n)\sim(z,k)$ si $y=z=0$ o si $y=z\neq0$ y $n=k$, es un espacio de este tipo. Aquí, $Y=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ tiene la topología de subespacio respecto del espacio usual de los números reales y $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta. Este espacio cociente es conocido con el nombre de *abanico numerable*.

[2] La colección $\mathcal{B}=\{[x,x+\frac{1}{n}) : x\in\mathbb{R}\ \&\ n\in\mathbb{N}\}$ es una base para la topología de la línea de Sorgenfrey.

Si $\mathcal{N}_a = \emptyset$, entonces $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{na}$, pero en este caso es muy fácil probar que $\mathcal{N}$ no es una red porque para el abierto $[0, 1)$ y el elemento 0 no es posible hallar $N \in \mathcal{N}_{na}$ tal que $0 \in N \subseteq [0, 1)$. Podemos entonces suponer que $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$. Para toda $N \in \mathcal{N}_a$, definamos $x_N = \text{ínf}\, N$, y $A = \{x_N : N \in \mathcal{N}_a\}$. Como $A \subseteq \mathbb{R}$ y $|A| < \mathfrak{c}$, podemos fijar $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Consideremos al abierto $[x, x+1)$ de X. Observe que para $x \in [x, x+1)$ ningún elemento $N \in \mathcal{N}_{na}$ tiene la siguiente propiedad: $x \in N \subseteq [x, x+1)$ porque $[x, x+1)$ es acotado inferiormente y ningún elemento de $\mathcal{N}_{na}$ lo es. Pero tampoco hay elementos M de $\mathcal{N}_a$ de modo que $x \in M \subseteq [x, x+1)$ porque la contención $M \subseteq [x, x+1)$ implica que $x \leqslant m$ para toda $m \in M$, y por esto $x \leqslant x_M = \text{ínf}\, M$; pero como $x \in \mathbb{R} \setminus A$ y $x_M \in A$, necesariamente $x < x_M$ lo cual implica que existe un elemento de M, a saber x, tal que $x < x_M = \text{ínf}\, M$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ no es una red para X. Esto termina la demostración.

Para cualquier espacio indiscreto X de cardinalidad $\geqslant 2$ siempre se tiene que $nw(X) < |X|$. Esto muestra que hay clases grandes de espacios donde siempre obtenemos el menor estricto en la desigualdad $nw \leqslant |\cdot|$. También hay clases grandes de espacios topológicos donde siempre se da la igualdad; por ejemplo la clase de los espacios discretos: para cualquier espacio discreto X la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ es siempre un subconjunto de cualquier red para X.

Si (X, τ) es un espacio topológico, $(Y, \tau \restriction Y)$ es un subespacio topológico de X y $\mathcal{N}$ es una red de subconjuntos de (X, τ), entonces la colección $\mathcal{N} \restriction Y = \{N \cap Y : N \in \mathcal{N}\}$ es una red en $(Y, \tau \restriction Y)$. Esto muestra en realidad que el peso de red es una función cardinal monótona, es decir, si X es un espacio y Y es un subespacio de X, entonces $nw(Y) \leqslant nw(X)$ puesto que basta elegir una red para X de modo que $|\mathcal{N}| = nw(X)$, y por lo antes dicho, tenemos que $nw(Y) \leqslant |\mathcal{N} \restriction Y| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$.

En relación a las imágenes continuas de un espacio topológico, el peso de red no se incrementa porque si $f : X \to Y$ es una función continua suprayectiva y $\mathcal{N}$ es una red de subconjuntos de X, entonces es muy fácil probar que $f[\mathcal{N}] = \{f[N] : N \in \mathcal{N}\}$ es una red de subconjuntos de Y. Consecuentemente, si elegimos una red $\mathcal{N}$ para X tal que $|\mathcal{N}| = nw(X)$, entonces $nw(Y) \leqslant |f[\mathcal{N}]| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$.

Usando esta última propiedad se puede deducir fácilmente que si X es homeomorfo a Y, entonces $nw(X) = nw(Y)$; es decir, se puede deducir que nw es en efecto una función cardinal topológica.

Un resultado un poco menos trivial que involucra al peso de red es el siguiente; en él se proporciona una cota para la cardinalidad de cualquier espacio T_0 usando al peso de red.

Proposición 2.3. Si X es un espacio T_0, entonces $|X| \leqslant 2^{nw(X)}$.

Demostración. Fijemos una red $\mathcal{N}$ de modo que $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $x \in X$, definamos $\mathcal{N}_x = \{N \in \mathcal{N} : x \in N\}$. Es claro que $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{N}$ y por ello $\mathcal{N}_x \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ para cada $x \in X$. De esta manera $\phi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ definida por $\phi(x) = \mathcal{N}_x$ $(x \in X)$ es una función bien definida.

Verifiquemos que ϕ es inyectiva. Supongamos que $x, y \in X$ son elementos diferentes. Como X es T_0, existe un abierto U de modo que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Si $x \in U$, entonces $y \notin U$. Por ser $\mathcal{N}$ una red en X existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$. Luego, $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \notin \mathcal{N}_y$. Entonces $\phi(x) \neq \phi(y)$. Si ocurre que $y \in U$, entonces $x \notin U$. Y como $\mathcal{N}$ una red en X existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $y \in M \subseteq U$. Luego, $M \in \mathcal{N}_y$ y $M \notin \mathcal{N}_x$. Entonces $\phi(x) \neq \phi(y)$. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

Como ϕ es inyectiva, $|X| \leqslant |\mathcal{P}(\mathcal{N})| = 2^{nw(X)}$. □

Como una consecuencia del resultado anterior, podemos deducir que para *todo espacio T_0 es equivalente que el espacio tenga peso de red finito con el hecho de que el espacio mismo sea finito*. Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}^n$ con su topología usual $\tau_{\mathbb{R}^n}$ tiene peso de red infinito simplemente porque es un espacio T_0 de cardinalidad infinita. La anterior equivalencia es falsa si omitimos el axioma de separación T_0, como lo constata $\mathbb{R}$ junto con su topología indiscreta $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

El siguiente resultado será muy útil para dar una demostración del teorema de Arkhangel'skii sobre la aditividad del peso.

Lema 2.4. Para todo espacio Hausdorff (X, τ) existe una familia de abiertos $\mathcal{B}$ que tiene las siguientes cuatro propiedades:

1. $|\mathcal{B}| \leqslant nw(X)$,
2. $\mathcal{B}$ es base de una topología Hausdorff θ de X,
3. $\theta \subseteq \tau$,
4. $w(X, \theta) \leqslant nw(X)$.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio Hausdorff cualquiera. Si X es finito, entonces τ es la topología discreta en X. Definamos en este caso a $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\theta = \tau = \mathcal{P}(X)$. Obsérvese también que (X, θ) es un espacio Hausdorff y que $w(X, \theta) = |X| = nw(X, \tau)$.

Supongamos ahora que X es un espacio infinito. Suponga que $\mathcal{N}$ es una red para (X, τ) con $\mathcal{N} = nw(X)$. Definamos

$$\mathcal{D} = \{(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2 : \big(\exists (V_1, V_2) \in \tau^2\big) \big(N_1 \subseteq V_1, N_2 \subseteq V_2 \ \ \& \ \ V_1 \cap V_2 = \emptyset\big)\}.$$

Primero notemos que $\mathcal{D}$ es no vacío. Efectivamente, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es Hausdorff, existen abiertos ajenos V_x, V_y tales que $x \in V_x$ y $y \in V_y$. Como $\mathcal{N}$ es una red de X, existen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ tales que $x \in N_1 \subseteq V_x$ y $y \in N_2 \subseteq V_y$. Entonces $(N_1, N_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

También es fácil notar que $|\mathcal{D}| \leqslant |\mathcal{N} \times \mathcal{N}| = |\mathcal{N}| = nw(X)$ porque $nw(X)$ es infinito.

Ahora fijemos, para cada $(N, M) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, un elemento $(V(N), V(M)) \in \tau \times \tau$ de modo que $N \subseteq V(N)$ y $M \subseteq V(M)$.

Definamos $\mathcal{V} = \{V(N), V(M) : (N, M) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}\}$. Es claro que $\mathcal{V} \subseteq \tau$ y que $|\mathcal{V}| \leqslant nw(X)$.

Definamos $\mathcal{B}$ como la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de la familia $\mathcal{V}$. Es fácil notar que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y que $|\mathcal{B}| \leqslant nw(X)$.

Afirmación. La colección $\mathcal{B}$ es base para una topología Hausdorff de X.

Demostración de la afirmación. Considere un elemento cualquiera $x \in X$. Consideremos un elemento $y \in X$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es Hausdorff, existen abiertos ajenos V_x, V_y tales que $x \in V_x$ y $y \in V_y$. Como $\mathcal{N}$ es una red de (X, τ), existen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ tales que $x \in N_1 \subseteq V_x$ y $y \in N_2 \subseteq V_y$. Entonces $(N_1, N_2) \in \mathcal{D}$. Luego, $x \in V(N_1) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Por otro lado, supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y que $x \in B_1 \cap B_2$ son elementos cualesquiera. Como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, tenemos que $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Todo lo anterior muestra que $\mathcal{B}$ genera una topología θ para X. Resulta que θ es una topología Hausdorff para X. Efectivamente, supongamos que $x, y \in X$ son elementos diferentes. Como (X, τ) es Hausdorff, existen abiertos A y B ajenos tales que $x \in A$ y $y \in B$. Siendo $\mathcal{N}$ una red en (X, τ), existen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ de modo que $x \in N_1 \subseteq A$ y $y \in N_2 \subseteq B$. Entonces $(N_1, N_2) \in \mathcal{D}$. Consideremos a la pareja ordenada $(V(N_1), V(N_2))$ que hemos seleccionado para el elemento (N_1, N_2). Por la elección de $(V(N_1), V(N_2))$, se tiene que $V(N_1), V(N_2) \in \mathcal{B}$. Además, $x \in N_1 \subseteq V(N_1)$ y $y \in N_2 \subseteq V(N_2)$, y $V(N_1) \cap V(N_2) = \emptyset$. Por lo tanto, (X, θ) es un espacio Hausdorff. ⊠

Finalmente, como $\mathcal{B} \subseteq \tau$, tenemos que $\theta \subseteq \tau$ y además como $\mathcal{B}$ es base de θ se tiene que $w(X, \theta) \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant nw(X)$. □

Una consecuencia interesante del lema anterior es que en los espacios Hausdorff compactos el peso y el peso de red coinciden.

Proposición 2.5 (Arkhangel'skii)**.**

1. Si (X, τ) es un espacio Hausdorff, entonces existen un espacio Hausdorff (Y, θ) y una condensación (es decir, una función continua y biyectiva) $f : X \to Y$ de modo que $w(Y, \theta) \leqslant nw(X, \tau)$.
2. Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces $w(X) = nw(X)$.

Demostración. (1). Por el lema anterior existe una familia de abiertos $\mathcal{B}$ de cardinalidad a lo más $nw(X,\tau)$ que es base de una topología Hausdorff θ de X tal que $\theta \subseteq \tau$ y además $w(X,\theta) \leqslant nw(X)$. Definamos $(Y,\theta) = (X,\theta)$ y $f = \mathrm{id}_X : (X,\tau) \to (Y,\theta)$. La función f es continua porque $\theta \subseteq \tau$. Es claro que f es biyectiva. También es claro que $w(Y,\theta) = w(X,\theta) \leqslant nw(X,\tau)$.

(2). Por ser (X,τ) Hausdorff, aplicando el inciso anterior, podemos concluir que existen un espacio Hausdorff (Y,θ) y una condensación $f : X \to Y$ tal que $w(Y,\theta) \leqslant nw(X,\tau)$. Debido a (X,τ) es un espacio compacto y a que (Y,θ) es un espacio Hausdorff, f es una función cerrada; y consecuentemente, un homeomorfismo. Por esto $w(X,\tau) = w(Y,\theta)$. Por lo tanto, $w(X,\tau) \leqslant nw(X,\tau)$. Como la desigualdad contraria es siempre cierta, obtenemos que $nw(X,\tau) = w(X,\tau)$. $\square$

El teorema de aditividad del peso en espacios Hausdorff compactos es ya una consecuencia sencilla del inciso (2) de la proposición anterior.

Teorema 2.6 (de Arkhangel'skii sobre la aditividad del peso)**.** Sea κ un cardinal infinito. Si X es un espacio compacto Hausdorff y $X = A \cup B$ con $w(A), w(B) \leqslant \kappa$, entonces $w(X) \leqslant \kappa$.

Demostración. Como X es un espacio compacto Hausdorff, $nw(X) = w(X)$. Así que para probar que $w(X) \leqslant \kappa$, bastará demostrar que $nw(X) \leqslant \kappa$.

Como $w(A) \leqslant \kappa$ y $w(B) \leqslant \kappa$, existen colecciones $\mathcal{B}_A$ y $\mathcal{B}_B$ de cardinalidad menor o igual que κ que son bases de los subespacios $(A, \tau \restriction A)$ y $(B, \tau \restriction B)$, respectivamente[3]. Definamos $\mathcal{N} = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_B$. Es claro que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y que $|\mathcal{N}| \leqslant \kappa + \kappa = \kappa$. Demostraremos ahora que $\mathcal{N}$ es una red en X. En efecto, suponga que U es un abierto de X y que $x \in U$ es cualquier elemento. Como $X = A \cup B$, $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, entonces $x \in U \cap A$. Debido a que $\mathcal{B}_A$ es una base para la topología de $(A, \tau \restriction A)$, existe $N \in \mathcal{B}_A$ de modo que $x \in N \subseteq U \cap A$. Entonces existe $N \in \mathcal{N}$ de modo que $x \in N \subseteq U$. De manera análoga se puede demostrar que si $x \in B$, entonces existe un elemento $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una red de X.

Para finalizar la prueba, dése cuenta que $nw(X) \leqslant |\mathcal{N}| \leqslant \kappa$. $\square$

Observación 2.7. En la demostración del teorema anterior implícitamente se demuestra que el peso de red es una función cardinal finito aditiva, esto es, si un espacio X se puede escribir como la unión finita $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ de subespacios tales que $nw(A_i) \leqslant \kappa$ para toda i, donde κ es un cardinal infinito, entonces $nw(X) \leqslant \kappa$. En forma más general, *si κ es un cardinal infinito y $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, donde $nw(C) \leqslant \kappa$, entonces $nw(X) \leqslant \kappa \cdot |\mathcal{C}| = \max\{\kappa, |\mathcal{C}|\}$.*

Como una simple aplicación del teorema anterior (2.6) obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.8. Si un espacio compacto Hausdorff es la unión de una cantidad finita de subespacios segundo-numerables, entonces él mismo es un espacio segundo-numerable, y por tanto, metrizable.

3. Teorema de dualidad para nw

A menos que explícitamente se diga lo contrario, todos los espacios topológicos considerados en esta sección son Tychonoff.

Si X es un espacio, entonces el conjunto $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ es un subconjunto del producto topológico $\mathbb{R}^X$. De esta forma el conjunto $C(X)$ puede ser dotado de la topología de subespacio respecto del producto topológico $\mathbb{R}^X$. El espacio así constituido es denotado con los símbolos $C_p(X)$ y la topología de $C_p(X)$ es llamada *topología de la convergencia puntual.*

Si un espacio Tychonoff es finito, entonces es discreto. Por esta razón, cuando X es finito el espacio $C_p(X)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y por ello $d(C_p(X)) = nw(C_p(X)) = w(C_p(X)) = \aleph_0$.

[3]Donde τ es la topología de X y $\tau \restriction A$ es la topología de subespacio de A respecto de X. Análogamente, para B.

Cuando X es un espacio Tychonoff infinito las cosas cambian un poco. Como sabemos, la base canónica del espacio producto $\mathbb{R}^X$ es la colección de todos los conjunto de tipo

$$[x_1,\ldots,x_n;U_1,\ldots,U_n]=\big\{g\in\mathbb{R}^X:\big(\forall\, i=1,\ldots,n\big)\big(g(x_i)\in U_i\big)\big\},$$

donde $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n\in X$ y $U_1,\ldots,U_n\in\tau_{\mathbb{R}}$. Es una tarea rutinaria demostrar que para cualquier elemento $g\in[x_1,\ldots,x_n;U_1,\ldots,U_n]$ es posible encontrar intervalos abiertos $(p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n)$ con extremos racionales de modo que

$$g\in[x_1,\ldots,x_n;(p_1,q_1),\ldots,(p_n,q_n)]\subseteq[x_1,\ldots,x_n;U_1,\ldots,U_n].$$

Esto muestra que la familia formada por todos los conjuntos de tipo

$$[x_1,\ldots,x_n;W_1,\ldots,W_n], \tag{1.1}$$

donde $W_1,\ldots,W_n\in\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_0$ es la colección de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con extremos en $\mathbb{Q}$, es una base para la topología del producto topológico $\mathbb{R}^X$. La ventaja de esta última base es que con ella podemos concluir que

$$w(\mathbb{R}^X)\leqslant|[X]^{<\aleph_0}|\cdot|\mathcal{B}_0|=|X|\cdot\aleph_0=|X|.$$

Debido a que $C_p(X)$ es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^X$, $w(C_p(X))\leqslant w(\mathbb{R}^X)$. Por esta razón, $w(C_p(X))\leqslant w(\mathbb{R}^X)\leqslant|X|$. Curiosamente, para el caso que nos ocupa (X infinito) las igualdades son ciertas. En efecto, para fundamentar nuestra afirmación es suficiente demostrar que $|X|\leqslant w(C_p(X))$. Suponga por el contrario que $w(C_p(X))<|X|$. Entonces podemos fijar una base $\mathcal{B}$ de $C_p(X)$ tal que $|\mathcal{B}|=w(C_p(X))$. Resulta que si $f\equiv 0:X\to\mathbb{R}$ es la función constante de valor cero, entonces la colección $\mathcal{B}(f)=\{B\in\mathcal{B}:f\in B\}$ es una base local de f en $C_p(X)$. Debido a que los conjuntos de tipo (1.1) forman una base de la topología producto de $\mathbb{R}^X$, para cada $B\in\mathcal{B}(f)$ existen $n_B\in\mathbb{N}$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_B}}\in X$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que

$$f\in[x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_B}};(-\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{m}),\ldots,(-\tfrac{1}{m},\tfrac{1}{m})]\cap C_p(X)\subseteq B.$$

Definamos $Y=\bigcup_{B\in\mathcal{B}(f)}\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_B}}\}$. Es fácil convencerse que $|Y|<|X|$. Fijemos un elemento $y\in X\setminus Y$ y consideremos al subconjunto abierto $U=[y;(-1,1)]\cap C_p(X)$ que contiene f. Resulta que ningún elemento de la colección $\mathcal{B}(f)$ está contenido en U porque si $B\in\mathcal{B}(f)$ es un elemento cualquiera al ser X un espacio de Tychonoff existe una función continua $g_B:X\to[0,1]$ de modo que $g_B(y)=1$ y $g_B[\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_B}}\}]\subseteq\{0\}$. Entonces $g_B\in B$ pero no está en U. Esto contradice que la colección $\mathcal{B}(f)$ es una base local de f en $C_p(X)$. Esta contradicción muestra que necesariamente $|X|\leqslant w(C_p(X))$. De esta forma hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 3.1. $w(C_p(X))=w(\mathbb{R}^X)=|X|$, para todo espacio Tychonoff infinito X.

Para el caso de la función cardinal nw sucede algo muy curioso. Sabemos que $nw\leqslant|\cdot|$ y que $nw\leqslant w$, y que además, para espacios Tychonoff infinitos X ocurre que $|X|=w(C_p(X))$. Es decir, en las anteriores dos desigualdades, las dos funciones cardinales del lado derecho se relacionan vía el functor C_p. Así que lo natural es conjeturar que para espacios Tychonoff infinitos X las dos funciones cardinales del lado izquierdo también se relacionan vía el functor C_p, es decir, es natural conjeturar que $nw(X)=nw(C_p(X))$ para cualquier espacio Tychonoff infinito X. La conjetura es cierta y el resultado es llamado teorema de dualidad de Arkhangel'skii para el peso red. Enseguida, demostraremos este teorema demostrando previamente dos resultados.

Lema 3.2. Para todo espacio de Tychonoff X, se tiene que X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X))$.

Demostración. Suponga que X es un espacio Tychonoff. Para cada $x\in X$ definimos $e_x:C_p(X)\to\mathbb{R}$ como la función $\pi_x\restriction C_p(X):C_p(X)\to\mathbb{R}$, donde $\pi_x:\mathbb{R}^X\to\mathbb{R}$ es la proyección en la coordenada x asociada al producto topológico $\mathbb{R}^X$. La función π_x es continua por la definición de la topología producto, y $C_p(X)$ tiene la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}^X$, consecuentemente e_x es una función continua. Por lo tanto, $e_x \in C_p(C_p(X))$ para toda $x \in X$. Por todo lo anterior podemos definir a la función $i : X \to C_p(C_p(X))$ por medio de la regla: $i(x) = e_x$. Demostremos que i es una inmersión.

i es inyectiva porque si $x, y \in X$ son elementos diferentes, entonces existe una función continua $g : X \to [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g(y) = 1$. Entonces $i(x)(g) = e_x(g) = g(x) \neq g(y) = e_y(g) = i(y)(g)$. Consecuentemente, $i(x) \neq i(y)$.

Por otro lado, i es continua porque para cualquier $g \in C_p(X)$ sucede que $\pi_g \circ i = g$ es una función continua, donde $\pi_g : \mathbb{R}^{C_p(X)} \to \mathbb{R}$ es la proyección a la g-coordenada del producto topológico $\mathbb{R}^{C_p(X)}$.

Finalmente verifiquemos que i es una función abierta a su imagen. Para ello consideremos cualquier subconjunto abierto U de X. Suponga que $y \in i[U]$ es cualquier elemento. Sea $x \in U$ tal que $i(x) = y$. Como X es Tychonoff, existe $g : X \to [0,1]$ continua tal que $g(x) = 1$ y $g[X \setminus U] \subseteq \{0\}$. Consideremos al abierto $W = \pi_g^{-1}[(\frac{1}{2}, 2)] \cap i[X]$ de $i[X]$ (aquí $\pi_g : \mathbb{R}^{C_p(X)} \to \mathbb{R}$ es la proyección a la coordenada g del producto topológico $\mathbb{R}^{C_p(X)}$). Resulta (y no es difícil demostrar) que $y \in W \subseteq i[U]$. Esto muestra que $i[U]$ es un subconjunto abierto de $i[X]$. $\square$

Proposición 3.3. Si X es un espacio Tychonoff infinito, entonces $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$.

Demostración. Por el lema 2.3, $nw(X) \geqslant \aleph_0$. Fijemos una red $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X de manera que $|\mathcal{N}| = nw(X)$; así, $|\mathcal{N}| \geqslant \aleph_0$. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable del espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{N}$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, definimos

$$(N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n) = \{g \in C_p(X) : \big(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\big)\, \big(g(N_i) \subseteq B_i\big)\}.$$

Resulta que la colección

$$\mathcal{R} = \{(N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n) : n \in \mathbb{N}, N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{N}, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}\}$$

es una red de subconjuntos de $C_p(X)$. Efectivamente, suponga que U es un abierto de $C_p(X)$ y que $f \in U$ es cualquier elemento. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$f \in [z_1, \ldots, z_n; (f(z_1) - \epsilon, f(z_1) + \epsilon), \ldots, (f(z_n) - \epsilon, f(z_n) + \epsilon)] \cap C_p(X) \subseteq U.$$

Como $\mathcal{B}$ es base de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, podemos fijar $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ de modo que

$$f(z_i) \in B_i \subseteq (f(z_i) - \epsilon, f(z_i) + \epsilon) \text{ para cada } i = 1, \ldots, n.$$

Observe ahora que como f es continua, los conjuntos $f^{-1}(B_i)$ son abiertos en X y que siendo $\mathcal{N}$ una red de subconjuntos de X, existen $N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{N}$ tales que $z_i \in N_i \subseteq f^{-1}(B_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $f \in (N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n) \subseteq [z_1, \ldots, z_n; (f(z_1) - \epsilon, f(z_1) + \epsilon), \ldots, (f(z_n) - \epsilon, f(z_n) + \epsilon)] \cap C_p(X)$. Por lo tanto, $f \in (N_1, \ldots, N_n; B_1, \ldots, B_n) \subseteq U$. Esto muestra que $\mathcal{R}$ es una red en $C_p(X)$.

Para finalizar la prueba, dése cuenta que $nw(C_p(X)) \leqslant |\mathcal{R}| \leqslant |[\mathcal{N}]^{<\omega}| \cdot |[\mathcal{B}]^{<\omega}| = |\mathcal{N}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{N}| = nw(X)$. $\square$

Podemos ya demostrar el teorema de dualidad del peso de red de Arkhangel'skii.

Teorema 3.4 (Arkhangel'skii)**.** Para cualquier espacio Tychonoff infinito X, $nw(C_p(X)) = nw(X)$.

Demostración. Como X es infinito por la proposición anterior se tiene que $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$. Pero también $C_p(X)$ es un espacio de Tychonoff infinito así que $nw(C_p(C_p(X))) \leqslant nw(C_p(X))$ (aplicando de nuevo la proposición anterior). Como X es homeomorfo a un subespacio Y de $C_p(X)$ obtenemos que $nw(X) = nw(Y)$ y $nw(Y) \leqslant nw(C_p(C_p(X)))$. Consecuentemente, $nw(X) \leqslant nw(C_p(X))$. Por lo tanto, $nw(C_p(X)) = nw(X)$. $\square$

Si X es un espacio Tychonoff finito, entonces X es un espacio discreto finito, así que $nw(X) \leqslant |X| < \aleph_0$ y $C_p(X)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, donde $n = |X|$. Por esto $nw(C_p(X)) = nw(\mathbb{R}^n) \leqslant \aleph_0$.

Pero por el inciso (6) del lema anterior, no puede ocurrir que $nw(\mathbb{R}^n) < \aleph_0$ porque $\mathbb{R}^n$ es infinito. En conclusión, cuando X es un espacio Tychonoff finito[4] $nw(X)$ y $nw(C_p(X))$ no coinciden.

Si X es un espacio Tychonoff, entonces definimos de manera recursiva a los espacios de funciones iterados $C_{p,n}(X)$ para cada $n \geqslant 0$ de la siguiente forma:

(i) $C_{p,0}(X) = X$;
(ii) $C_{p,n}(X) = C_p(C_{p,n-1}(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observe que por el teorema de dualidad de Arkhangel'skii cuando X es un espacio Tychonoff finito sucede que

$$nw(C_{p,0}(X)) = |X| < \aleph_0 \leqslant nw(C_p(X)) = nw(C_{p,2}(X)) = nw(C_{p,3}(X)) = \cdots,$$

y si X es infinito, entonces

$$\aleph_0 \leqslant nw(C_{p,0}(X)) = nw(C_p(X)) = nw(C_{p,2}(X)) = nw(C_{p,3}(X)) = \cdots.$$

4. Redes módulo cubiertas compactas

Como hemos visto, las redes de Arkhangelskii surgen como una generalización «natural» de la noción de base. Ellas, a su vez, pueden ser vistas como un caso particular de otra noción más general: la noción de red módulo una cubierta.

Observe que si uno denota a la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ de los conjuntos singulares de un espacio topológico (X, τ) por $\mathcal{C}$, entonces una colección $\mathcal{N}$ es una red en el sentido de Arkhangel'skii si para cada $C \in \mathcal{C}$ y cada $U \in \tau$ tal que $C \subseteq U$ existe $N \in \mathcal{N}$ de modo que $C \subseteq N \subseteq U$. Lo relevante de esta forma de «ver» a las redes de Arkhangel'skii es que se puede notar que se está trabajando en realidad con una cubierta de X que está formada por subconjuntos compactos, a saber, la colección $\mathcal{C}$. Este simple cambio de punto de vista trae como consecuencia una generalización natural de las redes de Arkhangel'skii.

Definición 4.1. Si $\mathcal{C}$ es una cubierta de un espacio topológico (X, τ), entonces una red para la cubierta $\mathcal{C}$ o una *red módulo* $\mathcal{C}$ es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que para cada $C \in \mathcal{C}$ y cada $U \in \tau(C, X)$ existe $N \in \mathcal{N}$ de modo que $C \subseteq N \subseteq U$.

Los espacios Tychonoff que tienen una red a lo más numerable módulo alguna cubierta compacta se llaman Lindelöf-Σ.

Definición 4.2. Diremos que un espacio Tychonoff X es un espacio Lindelöf-Σ si existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red módulo $\mathcal{C}$ a lo más numerable.

En realidad los espacios Lindelöf-Σ son espacios Hausdorff que tienen la propiedad de Lindelöf y que son espacios Σ en el sentido de Nagami [**8**]. Sin embargo, esta última definición no implica que los espacios Lindelöf-Σ puedan ser espacios Tychonoff, de hecho, ni siquiera espacios T_3. Por ejemplo, cualquier espacio Hausdorff, numerable, no regular[5] es un espacio Σ que es Lindelöf y Hausdorff, pero no es T_3 porque no es un espacio regular. No obstante, todo espacio Σ, Lindelöf y T_3 es siempre un espacio Tychonoff. Por esta razón, nuestra definición y la que usa la noción de espacio Σ de Nagami son equivalentes en la clase de los espacios Tychonoff[6].

Existe una función cardinal que generaliza a cardinalidades superiores la noción de espacio Lindelöf-Σ: el número de Nagami.

Definición 4.3. El número de Nagami de un espacio topológico (X, τ), el cual es denotado por $Nag(X)$, es el más pequeño número cardinal κ para el cual existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una familia $\mathcal{N}$ de cardinalidad κ que es red para X módulo $\mathcal{C}$.

---

[4]Es importante mencionar que no importando la cardinalidad de X, siempre ocurre que $nw(C_p(X)) \geqslant \aleph_0$ porque $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un subespacio (cerrado) de $C_p(X)$.

[5]Vea por ejemplo [**5**, 8.A.(18)].

[6]Es suficiente pedir que el espacio sea T_3, vea [**2**].

Para cualquier espacio Tychonoff X la colección $\mathcal{N} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una red módulo la cubierta compacta $\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$; de esta manera, el número de Nagami es un número bien definido y además $Nag(X) \leqslant |X|$ para todo espacio Tychonoff X.

Es claro que un espacio Tychonoff X es Lindelöf-Σ si y sólo si $Nag(X) \leqslant \aleph_0$. De esta forma, cualquier espacio compacto Hausdorff es Lindelöf-Σ porque su número de Nagami es 1 ya que la red $\mathcal{N} = \{X\}$ es una red módulo la cubierta compacta $\mathcal{C} = \{X\}$. Asimismo, todo espacio Tychonoff cósmico X es un espacio Lindelöf-Σ porque si $\mathcal{N}$ es una red a lo más numerable de X esta colección es una red módulo la cubierta compacta $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. Es claro que en este caso $Nag(X) \leqslant |\mathcal{N}| \leqslant \aleph_0$.

Tkachenko demostró en **[10]** que la desigualdad $w(X) \leqslant nw(X)^{Nag(X)}$ es válida para todo espacio Tychonoff X. En **[4]** se obtuvo la siguiente generalización del resultado de Tkachenko.

Teorema 4.4 (Casarrubias-Rojas-García)**.** Para todo espacio X regular y T_0, sucede que $w(X) \leqslant nw(X)^{Nag(X)}$.

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio T_3. Si X es un espacio finito, entonces X es discreto y compacto. Luego, $w(X) = nw(X)$ y $Nag(X) = 1$. Consecuentemente, $w(X) = nw(X) \leqslant nw(X)^{Nag(X)}$.

Supongamos ahora que X es un espacio infinito. Por la proposición 2.4, podemos fijar una colección $\mathcal{B}$ de abiertos de (X, τ) que es base de una topología Hausdorff θ para X de modo que $\theta \subseteq \tau$ y $|\mathcal{B}| \leqslant nw(X)$. Por la proposición 2.3, $\mathcal{B}$ es una colección infinita. Consideremos ahora a la colección $\mathcal{B}_0$ formada por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ y todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Adicionalmente, supongamos que $X \in \mathcal{B}_0$. Debido a que $\mathcal{B}$ es una base de θ, la colección $\mathcal{B}_0$ también lo es, y como $\mathcal{B}$ es infinita, se tiene que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_0|$. Fijemos una cubierta compacta $\mathcal{K}$ para (X, τ) y una red $\mathcal{N}$ módulo la cubierta $\mathcal{K}$ de modo que $|\mathcal{N}| = Nag(X)$. Debido a que $|\mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}| \leqslant nw(X)^{Nag(X)}$, bastará probar que $w(X) \leqslant |\mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}|$. Y para hacer esto último probaremos que la colección $\{W_\phi : \phi \in \mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}\}$ es una base para (X, τ), donde

$$W_\phi = X \setminus \mathrm{cl}_X\big(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N \setminus \phi(N)\big)$$

para cada $\phi \in \mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}$.

Suponga que $U \in \tau$ y que $x \in U$. Por la regularidad de (X, τ), existe $V \in \tau$ de modo que $x \in \mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$. Consideremos ahora los siguientes casos:

Caso (1). $U = X$. Definamos $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{B}_0$ por medio de la regla $\phi(N) = X$ para cada $N \in \mathcal{N}$. Resulta que $\phi \in \mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}$ y que $W_\phi = X$. Es claro que en este caso, $x \in W_\phi \subseteq U$.

Caso (2). $U \neq X$. Primero construiremos recursivamente dos sucesiones $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de elementos de $\mathcal{N}$ y $\mathcal{B}_0$, respectivamente, para un ordinal $\lambda \leqslant |X \setminus U|$.

Fijemos $z_0 \in X \setminus U$. Entonces existe $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que $z_0 \in K$. Observe que los conjuntos $K \setminus U$ y $K \cap \mathrm{cl}(V)$ son subconjuntos compactos de (X, τ) y ajenos. Entonces ellos son subconjuntos compactos y ajenos en la topología θ. Luego, existen $A_0, B_0 \in \mathcal{B}_0$ tales que $K \setminus U \subseteq A_0$ y $K \cap \mathrm{cl}(V) \subseteq B_0$. Resulta que $K \subseteq (A_0 \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (U \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (B_0 \cap U)$. Como $\mathcal{N}$ es red módulo $\mathcal{K}$, existe $N_0 \in \mathcal{N}$ de modo que $K \subseteq N \subseteq (A_0 \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (U \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (B_0 \cap U)$. Si $X \setminus U \subseteq N_0 \setminus B_0$, entonces paramos la construcción, definimos $\lambda = 1$ y de esta manera tenemos construidas a las sucesiones deseadas. Si $X \setminus U \nsubseteq N_0 \setminus B_0$, entonces podemos elegir $y_1 \in X \setminus U \setminus (N_0 \setminus B_0)$.

En forma general, si sucede que $X \setminus U \nsubseteq \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta \setminus B_\beta$ fijamos $y_\alpha \in X \setminus U \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta \setminus B_\beta$. Elegimos $K_\alpha \in \mathcal{K}$ de modo que $y_\alpha \in K_\alpha$. Resulta que los conjuntos $K_\alpha \setminus U$ y $K_\alpha \cap \mathrm{cl}(V)$ son subconjuntos compactos de (X, τ) y ajenos. Entonces ellos son subconjuntos compactos y ajenos en la topología θ y por ello existen $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B}_0$ tales que $K_\alpha \setminus U \subseteq A_\alpha$ y $K_\alpha \cap \mathrm{cl}(V) \subseteq B_\alpha$. Resulta que $K_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (U \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (B_\alpha \cap U)$. Como $\mathcal{N}$ es red módulo $\mathcal{K}$, existe $N_\alpha \in \mathcal{N}$ de modo que $K_\alpha \subseteq N_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (U \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (B_\alpha \cap U)$. De esta manera, tenemos construidos los elementos N_α y B_α requeridos. En el caso en que $X\setminus U \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta \setminus B_\beta$ terminamos la construcción y definimos $\lambda = \alpha$.

Observe que por la construcción de las sucesiones $\{N_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$, para cada $\alpha < \lambda$ tenemos que

$$y_\alpha \in N_\alpha \setminus B_\alpha \subseteq (A_\alpha \setminus \mathrm{cl}(V)) \cup (U \setminus \mathrm{cl}(V)) \subseteq X \setminus V,$$

y

$$(N_\alpha \setminus B_\alpha) \setminus U \subseteq N_\alpha \setminus (B_\alpha \cup U) = N_\alpha \cap A_\alpha) \setminus U.$$

Por lo anterior, si $\alpha, \beta <$ son diferentes, por ejemplo si $\beta < \alpha$, entonces por el hecho de que $y_\alpha \in U$ tenemos que

$$y_\alpha \in ((N_\alpha \setminus B_\alpha) \setminus U) \setminus ((N_\beta \setminus B_\beta) \setminus U) = (N_\alpha \setminus U) \setminus (N_\beta \setminus U).$$

Y por ello $N_\alpha \neq N_\beta$. Por esta razón, la regla

$$\phi(N) = \begin{cases} B_\alpha & \text{si } N = N_\alpha \text{ para algún } \alpha < \lambda \\ X & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es la regla de una función bien definida $\phi \in \mathcal{B}_0^{\mathcal{N}}$. Resulta que $x \in W_\phi \subseteq U$. Efectivamente, el hecho de que $N_\alpha \subseteq X \setminus V$ para cada $\alpha < \lambda$ implica que $N \setminus \phi(X) \subseteq X \setminus V$ para toda $N \in \mathcal{N}$. De lo cual se sigue que $x \in V \subseteq W_\phi$. Por otro lado, del hecho de que $X \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda}(N_\alpha \setminus B_\alpha) \subseteq \bigcup_{N\in\mathcal{N}}(N \setminus \phi(N))$ se deduce que $W_\phi \subseteq U$. Esto termina la demostración. □

Una consecuencia muy interesante de 4.4 es lo siguiente.

Corolario 4.5. $w(X) \leqslant nw(X)^\omega$ para todo espacio Tychonoff Lindelöf Σ.

5. Aplicaciones.

La clase $L\Sigma$ formada por todos los espacios Tychonoff que son Lindelöf-Σ fue estratificada por Kubiś, Okunev, and Szeptycki en [**6**] cuando introdujeron a las clases $L\Sigma(\leqslant \kappa)$: dado un cardinal κ, finito o infinito, la clase $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ está constituida por aquéllos espacios Tychonoff X para los cuales existen tanto una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X tal que $w(C) \leqslant \kappa$ para cualquier $C \in \mathcal{C}$, como una red a lo más numerable módulo la cubierta $\mathcal{C}$.

La cardinalidad de una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de un espacio Tychonoff con respecto a la cual existe una red $\mathcal{N}$ a lo más numerable no excede al cardinal del continuo $\mathfrak{c}$[7]. Esto implica que todo elemento de $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ tiene cardinalidad[8] a lo más $2^{\kappa+\omega}$ y también implica que para cardinales $\kappa \geqslant 2^\omega$ la clase de espacios $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ coincide[9] con la clase de todos los espacios Lindelöf-Σ de peso de red $\leqslant \kappa$; es decir, $L\Sigma(\leqslant \kappa) = \{X : X \text{ es Lindelöf-}\Sigma \;\; \& \;\; nw(X) \leqslant \kappa\}$. De esto último y del corolario 4.5 se sigue que $w(X) \leqslant nw(X)^{Nag(X)} \leqslant \kappa^\omega$ para todo elemento de $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ y para todo cardinal $\kappa \geqslant 2^\omega$. El siguiente corolario resume lo anterior.

Corolario 5.1 ([**3**])**.** Para cardinales infinitos κ tales que $\kappa^\omega = \kappa$,

$$L\Sigma(\leqslant \kappa) = \{X : X \text{ es Lindelöf-}\Sigma \;\; \& \;\; w(X) \leqslant \kappa\}.$$

[7]Efectivamente, la función $\Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$ definida por: $\Psi(C) = \{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\}$ es inyectiva ya que si $C, C_0 \in \mathcal{C}$ son elementos diferentes, digamos que porque $C \setminus C_0 \neq \emptyset$, podemos seleccionar $x \in C \setminus C_0$. Como $C_0 \subseteq X \setminus \{x\}$ y $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$, existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $C_0 \subseteq M \subseteq X \setminus \{x\}$. Entonces $M \in \{N \in \mathcal{N} : C_0 \subseteq M\}$ pero $M \notin \{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\}$. Por lo tanto, $\Psi(C) \neq \Psi(C_0)$.

[8]Si X es un espacio Tychonoff para el cual existen tanto una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X tal que $w(C) \leqslant \kappa$ para cualquier $C \in \mathcal{C}$, como una red a lo más numerable módulo la cubierta $\mathcal{C}$. Entonces por un teorema de Arkangel'skii $|C|^{L(X)\chi(X)} \leqslant 2^{w(X)} \leqslant 2^\kappa$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Luego $|X| = |\bigcup \mathcal{C}| \leqslant 2^\kappa \cdot |\mathcal{C}| \leqslant 2^\kappa \cdot 2^\omega \leqslant 2^{\kappa+\omega}$.

[9]Si X es un espacio Lindelöf Σ tal que $nw(X) \leqslant \kappa$, entonces existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red a lo más numerable $\mathcal{N}$ módulo $\mathcal{C}$. Como nw es monótono, $nw(C) \leqslant \kappa$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Pero $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta, luego $w(C) = nw(C) \leqslant \kappa$ para toda C. Consecuentemente $X \in L\Sigma(\kappa)$. Recíprocamente, si $X \in L\Sigma(\kappa)$, entonces existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red a lo más numerable $\mathcal{N}$ módulo $\mathcal{C}$ con $w(C) \leqslant \kappa$ para toda C. Como el peso de red es aditivo, $nw(C) \leqslant \kappa$ para toda C y $|\mathcal{C}| \leqslant 2^\omega$, se tiene que $nw(X) \leqslant \kappa \cdot 2^\omega = \kappa$.

El corolario 5.1 es un avance en el conocimiento de las clases $L\Sigma(\leqslant \kappa)$. Por ejemplo, ya sabíamos que $L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c}) = \{X : X \text{ es Lindelöf-}\Sigma \ \& \ nw(X) \leqslant \mathfrak{c}\}$, a raíz del corolario 5.1 ahora sabemos que

$$L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c}) = \{X : X \text{ es Lindelöf-}\Sigma \ \& \ w(X) \leqslant \mathfrak{c}\}.$$

El corolario 5.1 y está nueva forma de describir a la clase $L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$ tiene importantes consecuencias en el ámbito de la teoría de los espacios de funciones $C_p(X)$. Por ejemplo, en el siguiente teorema se reunen algunas propiedades que son equivalentes al hecho de que un espacio de funciones es un elemento de la clase $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ cuando κ es un cardinal infinito con $\kappa^\omega = \kappa$. Este resultado fue demostrado por los autores de [**3**] en el año 2019.

Teorema 5.2. Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier cardinal infinito κ tal que $\kappa^\omega = \kappa$:

1. $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \kappa)$;
2. $nw(X) \leqslant \kappa$;
3. $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, y $w(C_p(X)) \leqslant \mathfrak{c}$;
4. $|X| \leqslant \kappa$;
5. $p(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\} \text{ es punto-finita }\} \leqslant \kappa$.

Para cardinales infinitos κ se puede considerar la clase $L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa))$ consistente de todos los espacios Lindelöf Σ que tienen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ cuyos elementos pertenecen a la clase $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ y que tienen una red numerable módulo la cubierta $\mathcal{C}$. Molina Lara y Oleg Okunev introdujeron y estudiaron la clase $L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \omega))$ en [**7**]. Ellos preguntaron en su problema 4.10 si la clase $L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \omega))$ está contenida en la clase $L\Sigma(\leqslant \omega)$. En [**3**] los autores dan respuesta positiva a este planteamiento en la clase de espacios $C_p(X)$.

Teorema 5.3 ([**3**])**.** Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier κ tal que $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$:

1. $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$;
2. $C_p(X) \in L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa))$;
3. $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$.

Demostración. Es fácil probar que cualquier espacio compacto segundo-numerable es elemento de $L\Sigma(\leqslant \kappa)$. De esto se sigue que $L\Sigma(\leqslant \omega) \subset L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa))$. Lo cual prueba la implicación (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Cada elemento de $L\Sigma(\leqslant \kappa)$ es igual a la unión de a lo más $\mathfrak{c}$ subespacios compactos de peso de red $\leqslant \kappa$. Entonces tiene peso de red $\leqslant \kappa \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Por esta razón, si $X \in L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa))$, entonces $nw(X) \leqslant \mathfrak{c}$. De donde $X \in L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$. Por lo tanto, $L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa)) \subseteq L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$. Esto prueba (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponga que $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$. Como $C_p(X)$ is Lindelöf Σ y $w(C_p(X)) \leqslant \mathfrak{c}$, por 5.2 se tiene que $|X| \leqslant \kappa$. Tkachuk probó en [**11**] que $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$ si y sólo si $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. Como $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$ podemos aplicar el teorema de Tkachuk para concluir que $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$. □

Como hemos mencionado en la prueba anterior, Tkachuk probó en [**11**] que $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$ si y sólo si $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. Los autores de [**3**] han podido extender esta caracterización.

Corolario 5.4 ([**3**])**.** Supóngase que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ y que $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$;
2. $C_p(X) \in L\Sigma(L\Sigma(\leqslant \kappa))$;
3. $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$;
4. $|X| \leqslant \mathfrak{c}$;
5. $nw(X) \leqslant \mathfrak{c}$;
6. $p(X) \leqslant \mathfrak{c}$.

Las nuevas caracterizaciones presentadas en el corolario anterior han permitido obtener varios avances. Terminamos la presente nota exhibiendo algunos resultados que son aplicaciones casi directas de estas nuevas caracterizaciones y que resuelven problemas abiertos publicados en el ámbito de la C_p-teoría y los espacios Lindelöf Σ.

El siguiente teorema, que es una aplicación de 5.4, resuelve positivamente el problema 4.7 de [**7**].

Teorema 5.5 ([**3**]). Si X es un espacio $L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$ y Y es un subespacio Lindelöf Σ de $C_p(X)$, entonces Y también es un espacio $L\Sigma(\leqslant \omega)$.

Demostración. Debido a que X y Y son Lindelöf Σ, y a que $Y \subset C_p(X)$, se sigue de un resultado de Okunev [**9**, Corolario 2.12] que $C_{p,n}(Y)$ es Lindelöf Σ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, el hecho de que $X \in L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$ implica que $nw(X) \leqslant \mathfrak{c}$. Consecuentemente

$$nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leqslant nw(C_p(X)) = nw(X) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Aplicando ahora 5.4 podemos concluir que $C_p(C_p(Y)) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$. Finalmente, como Y puede encajarse en $C_p(C_p(Y))$ como un subespacio cerrado (vea 3.2 y [**1**, Proposición 0.5.9]) y la clase $L\Sigma(\leqslant \omega)$ es cerrada bajo subespacios cerrados, tenemos que $Y \in L\Sigma(\leqslant \omega)$. □

El siguiente teorema resuelve positivamente el problema 4.8 de [**7**].

Teorema 5.6 ([**3**]). Si X es un espacio Lindelöf Σ y $C_p(X)$ es un espacio $L\Sigma(\leqslant \mathfrak{c})$, entonces X es un espacio $L\Sigma(\leqslant \omega)$.

Demostración. Como X se encaja en $C_p(C_p(X))$ (vea 3.2), el teorema 5.5 implica que X es un espacio $L\Sigma(\leqslant \omega)$. □

Los resultados en los teoremas 5.5 y 5.6 junto con el corolario 2.12 de [**9**] producen los siguientes corolarios acerca de los espacios de funciones iterados.

Corolario 5.7 ([**11**]). Si X es un espacio Lindelöf Σ y $C_p(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$, entonces $C_{p,n}(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$ para todo $n \in \omega$.

Corolario 5.8. Si $X \in L\Sigma(\leqslant \omega)$ y $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(X) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$ para todo $n \in \omega$.

Referencias

[1] A.V. Arhangel'skii, Topological Function Spaces, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[2] F. Casarrubias Segura, *Los espacios Lindelof* Σ, Capítulo 1, Topología y sus aplicaciones 2, Textos Científicos, BUAP. 2013.

[3] F. Casarrubias Segura, R. Rojas Hernández. *Hereditarily monotonically Sokolov spaces have countable network weight.* Topology and its Applications 260 (2019) 178–188.

[4] F. Casarrubias-Segura, S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández, Every Σ_s-product of K-analytic spaces has the Lindelöf Σ-property, Topol. Appl. 234 (2018) 285–297.

[5] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología general*, Aportaciones matemáticas Textos 37, nivel medio, Instituto de Matemáticas, UNAM. 1ra. Edición. Mayo 2019. ISBN 978-607-30-1780-0.

[6] W. Kubis, O. G. Okunev, P. J. Szeptycki, *On some classes of Lindelöf* Σ*-spaces*, Topology Appl. **153 (14)** (2006) 2574-2590.

[7] I. Molina Lara, O. G. Okunev $L\Sigma(\leqslant \omega)$*-spaces and spaces of continuous functions*, Cent. Eur. J. Math. **8(4)** (2010) 754-763.

[8] K. Nagami, Σ*-spaces*, Fund. Math. **65** (2)(1969) pp. 169-192.

[9] O. G. Okunev, *On Lindelöf* Σ*-spaces of continuous functions in the pointwise convergence*, Topology Appl. 49 (1993) 149-166.

[10] M. G. Tkachenko, *The weight and Lindelöf property in spaces and topological groups*, Topol. Appl. 221 (2017) 465–475.

[11] V. V. Tkachuk, *Some criteria for* $C_p(X)$ *to be an* $L\Sigma(\leqslant \omega)$*-space*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **43(1)** (2013) 373-384.

Correos electrónicos:
fcasarrubiass@ciencias.unam.mx (Fidel Casarrubias Segura)

Capítulo 2

Transitividad en hiperespacios

Franco Barragán, Sergio Flores, Alicia Santiago-Santos y Jesús F. Tenorio
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México

1. Introducción

Dados un espacio métrico compacto X y una función continua $f : X \to X$, al par (X, f) le denominamos *sistema dinámico*. Es bien sabido que un sistema dinámico (X, f) induce un sistema dinámico $(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(f))$, donde $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X, considerado con la topología de Vietoris, y $\mathcal{H}(f)$ es la función inducida por f a $\mathcal{H}(X)$. En este contexto, un problema natural es el siguiente. Dados un sistema dinámico (X, f) y los sistemas dinámicos inducidos $(\mathcal{H}_1(X), \mathcal{H}_1(f))$ y $(\mathcal{H}_2(X), \mathcal{H}_2(f))$, estamos interesados en:

$(*)$ Estudiar todas las posibles conexiones entre las siguientes proposiciones para una propiedad dinámica $\mathcal{P}$:

(1) f tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
(2) $\mathcal{H}_1(f)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
(3) $\mathcal{H}_2(f)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Cuando se estudia el sistema dinámico (X, f) se dice que se analiza la dinámica individual y, cuando se considera algún sistema dinámico inducido $(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(f))$, se dice que se investiga la dinámica colectiva. Por lo cual, en este trabajo estamos interesados en analizar las relaciones entre la dinámica individual y la colectiva. Es importante indicar que el estudio de la dinámica topológica en sistemas dinámicos inducidos está en boga y existe un buen número de artículos relacionados con este tema. Por mencionar algunos tenemos [**1, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 17, 21, 22, 24, 44, 27, 29, 30, 31**].

Las propiedades dinámicas que se han estudiado en hiperespacios referentes al problema $(*)$ son muy variadas, por ejemplo: funciones del tipo transitivas, funciones del tipo mezclante, funciones caóticas o funciones sensitivas. En el presente escrito nos enfocamos al análisis de lo planteado en $(*)$, principalmente cuando $\mathcal{P}$ es la transitividad topológica y los sistemas dinámicos inducidos $(\mathcal{H}_1(X), \mathcal{H}_1(f))$ y $(\mathcal{H}_2(X), \mathcal{H}_2(f))$ son $(2^X, 2^f)$ y $(C(X), C(f))$. Utilizamos la Sección 3 de [**1**] y algunos hechos del Capítulo 18 de [**19**] como base para la exposición de nuestro trabajo.

Para poder presentar a detalle y de forma clara este tema, nos hemos dado a la tarea de exponer la herramienta indispensable para tal fin. En la Sección 2 recordamos lo referente a hiperespacios y a funciones inducidas a hiperespacios. La Sección 3 está dedicada al análisis de algunos hechos de la transitividad en la dinámica individual; resumimos las propiedades requeridas de cuatro funciones clásicas de los sistemas dinámicos discretos, y exponemos los pormenores de la demostración de un famoso Teorema de Furstenberg (Teorema 3.27), resultado que empleamos tanto en la demostración de un teorema de Banks (Teorema 3.28), como en la de un teorema de Peris (Teorema 4.1). Finalmente, en la Sección 4 atendemos lo correspondiente a la dinámica colectiva con la finalidad de determinar la veracidad o falsedad de todas las implicaciones esquematizadas en el diagrama (#), el cual indica con claridad el desarrollo del problema en ($*$). Cabe señalar que en muchos de los resultados que se enuncian, la compacidad no es necesaria.

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{f} \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ \boldsymbol{2^f} \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & \boldsymbol{C(f)} \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd} \qquad (\#)$$

2. Preliminares

Comenzamos con algunos conceptos preliminares. Como es usual, representamos con $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos. Un espacio métrico X con métrica d lo escribimos como la pareja (X, d). En este trabajo consideramos que todo espacio métrico tiene más de un punto. Dados un espacio métrico (X, d), $a \in X$ y $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en a de radio ε respecto a la métrica d, la denotamos por $B_d(a, \varepsilon)$. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X, $Cl(A)$ indica su clausura. Para un conjunto X, el símbolo id_X es la función identidad de X en X. Si $f : X \to X$ es una función y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por f^k la k-ésima iterada o iteración de f, la cual se define de manera recursiva como $f^0 = id_X$ y $f^k = f \circ f^{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Si (X, f) es un sistema dinámico y $A \subseteq X$, decimos que A es *invariante* bajo f si $f(A) \subseteq A$. Notemos que cuando esto sucede, $f^k(A) \subseteq A$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos un conjunto X y $m \in \mathbb{N}$. Denotamos por X^m el producto cartesiano de X consigo mismo m veces. Además, si $f : X \to X$ es una función, denotamos la m-ésima función producto de f como $f^{\times m} : X^m \to X^m$, la cual se define por:

$$f^{\times m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)), \text{ para cada } (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X^m.$$

El siguiente resultado muestra algunas propiedades de las funciones iteradas de una función producto; la demostración es sencilla y la omitimos.

Proposición 2.1. Sean X un conjunto, $f : X \to X$ una función y $m \in \mathbb{N}$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de $f^{\times m}$ satisface lo siguiente: para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X^m$ y $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m \subseteq X$, se tiene que:

(1) $\left(f^{\times m}\right)^k (x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(f^k(x_1), f^k(x_2), \ldots, f^k(x_m)\right)$.
(2) $\left(f^{\times m}\right)^k (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m) = f^k(A_1) \times f^k(A_2) \times \cdots \times f^k(A_m)$.
(3) $[(f^{\times m})^k(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m)] \cap [B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m] \neq \emptyset$ si y sólo si $f^k(A_1) \cap B_1 \neq \emptyset, f^k(A_2) \cap B_2 \neq \emptyset, \ldots, f^k(A_m) \cap B_m \neq \emptyset$.

Ahora damos paso a recordar algunos elementos de la Teoría de los Hiperespacios de un espacio métrico compacto X. Comenzamos con una noción bastante conocida en esta rama de la Topología. El hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, se denota como 2^X. Entonces:

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

A 2^X le damos la *topología de Vietoris*, τ_V, la cual tiene por base la familia:

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_k \text{ son subconjuntos abiertos en } X \text{ y } k \in \mathbb{N}\},$$

donde, si $k \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son subconjuntos de X, entonces $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle$ denota el subconjunto de 2^X definido como sigue:

$$\left\{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\right\}.$$

Una demostración de que la familia $\mathcal{B}_V$ es una base para τ_V, se puede consultar en [**18**, Teorema 1.2, p. 3].

Los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son las *entradas* del subconjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle$ de 2^X. Se tiene lo siguiente.

Proposición 2.2. Si X es un espacio métrico, entonces para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle B_1, B_2, \ldots, B_n\rangle$ se pueden reescribir de modo que tengan el mismo número de entradas.

Demostración. Supongamos que $k \neq n$. Sin perder generalidad, consideremos que $k < n$. Definimos $A_j = A_k$, para cada $j \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Sea

$$\mathcal{A}' = \langle A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n\rangle.$$

Es claro que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ y que $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}$ tienen el mismo número de entradas. □

Recordemos que un espacio métrico X es un *continuo* si X es compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto Y de un espacio métrico X es un *subcontinuo* de X si Y es un continuo con la métrica de subespacio.

Sea X un espacio métrico compacto. Los subespacios de 2^X que ocupamos en este trabajo son los siguientes. El hiperespacio $C(X)$ de los subcontinuos de X y el hiperespacio $F_1(X)$ de los singulares de X. Así pues:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \quad \text{y} \quad F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Como $C(X)$ y $F_1(X)$ son subconjuntos de 2^X a ambos les damos la topología de Vietoris, es decir, la topología de subespacio inducida por τ_V. En vista de [**18**, Teorema 14.9, p. 113], [**23**, Corolario 1.8.8, p. 47] y [**25**, Teoremas 4.13 y 4.17, p. 59 y 61], se obtiene que 2^X, $C(X)$ y $F_1(X)$ son compactos.

Como se sabe, dado un espacio métrico compacto (X, d), al hiperespacio 2^X se le asocia una métrica. En lo que sigue recordamos algunas definiciones para poder indicar dicha métrica. Notemos que para cualesquiera $B \in 2^X$ y $a \in X$, por la compacidad de B, se tiene que:

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Más aún, si $A \in 2^X$, ante la compacidad de A, el conjunto $\{d(a, B) : a \in A\}$ tiene máximo. Con estas aclaraciones tenemos lo siguiente. Dado un espacio métrico compacto (X, d), definimos la función $\rho : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como:

$$\rho(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}, \text{ para cada } A, B \in 2^X.$$

En general, la función ρ no define por sí misma una métrica sobre 2^X. Por ejemplo, supongamos que $a, b \in X$, con $a \neq b$. Es claro que $\{a\}, \{a, b\} \in 2^X$. Además, $\{a\} \neq \{a, b\}$, pero $\rho(\{a\}, \{a, b\}) = 0$. Sin embargo, es bien sabido que la función ρ induce una métrica sobre 2^X. Esto lo enunciamos a continuación, para una demostración el lector puede consultar [**5**, Teorema 3.1, p. 63].

Proposición 2.3. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. La función $H \colon 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida como

$$H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}, \text{ para cada } A, B \in 2^X,$$

es una métrica sobre 2^X.

La función $H\colon 2^X \times 2^X \to [0,\infty)$ definida en la Proposición 2.3 se conoce como la *métrica de Hausdorff*. Así, la pareja $\left(2^X, H\right)$ es un espacio métrico. Más aún, en [**18**, Teorema 3.1, p. 16] se prueba que la topología inducida por la métrica de Hausdorff H, coincide con la topología de Vietoris τ_V en 2^X.

Recordemos que si (X,d) es un espacio métrico compacto, A es un elemento de 2^X y $\varepsilon > 0$, entonces la nube alrededor de A y de radio ε es el conjunto:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}.$$

En [**5**, Teorema 2.7, p. 61] se puede consultar una demostración del siguiente resultado.

Proposición 2.4. Si (X,d) es un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B_d(a,\varepsilon) : a \in A\} \quad \text{y} \quad N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}.$$

El resultado siguiente brinda una manera muy útil de usar la métrica de Hausdorff. Una demostración puede revisarse en [**5**, Teorema 3.7, p. 66].

Proposición 2.5. Sea X un espacio métrico compacto. Si $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Una herramienta requerida para nuestra exposición, es la referente a las funciones inducidas.

Definición 2.6. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. La función $2^f : 2^X \to 2^X$, dada por $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$, es conocida como **función inducida** por f al hiperespacio 2^X.

Además de 2^f se definen la función inducida por f al hiperespacio $C(X)$ como $C(f) : C(X) \to C(X)$, dada por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$, y la función inducida por f al hiperespacio $F_1(X)$, como la función $F_1(f) : F_1(X) \to F_1(X)$, determinada por $F_1(f) = 2^f|_{F_1(X)}$. Es sabido que si X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua en X, entonces la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es continua en 2^X [**18**, Lema 13.3, p. 106]. En consecuencia, $C(f)$ y $F_1(f)$ también son continuas.

Si X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ es una función continua entonces, como ya indicamos, la pareja (X,f) es un sistema dinámico. También los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y $F_1(X)$ son métricos compactos y las funciones inducidas 2^f, $C(f)$ y $F_1(f)$ son continuas. Por tanto el sistema dinámico (X,f), llamado *sistema base*, induce los sistemas dinámicos $(2^X, 2^f)$, $(C(X), C(f))$ y $(F_1(X), F_1(f))$. Cuando se estudian propiedades de estos sistemas dinámicos, se dice que se estudia la *dinámica inducida* del sistema base (X,f). Por ejemplo, es natural preguntar si una propiedad dinámica impuesta en el sistema base se preserva en los sistemas inducidos a los hiperespacios, o viceversa. Conviene indicar la siguiente relación de las funciones iteradas. Si $A \in 2^X$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $(2^f)^k(A) = f^k(A)$.

Una propiedad que relaciona los subconjuntos $\langle A\rangle$ de 2^X con las iteradas de la función inducida 2^f es la siguiente.

Proposición 2.7. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $A \subseteq X$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\left(2^f\right)^k(\langle A\rangle) \subseteq \langle f^k(A)\rangle$.

Demostración. Sean $A \subset X$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $D \in \left(2^f\right)^k(\langle A\rangle)$, entonces existe $C \in \langle A\rangle$ tal que $\left(2^f\right)^k(C) = D$. Luego, $f^k(C) = D$ y dado que $C \subseteq A$ se tiene que $f^k(C) \subseteq f^k(A)$. Así, $D \subseteq f^k(A)$. Esto implica que $D \in \langle f^k(A)\rangle$. Con todo, concluimos que $\left(2^f\right)^k(\langle A\rangle) \subseteq \langle f^k(A)\rangle$. $\square$

3. Dinámica individual

En esta sección recordamos algunos hechos de la transitividad en la dinámica individual; entre otras cosas, resumimos las propiedades requeridas de cuatro funciones clásicas de los sistemas dinámicos discretos, a saber, propiedades de la función rotación irracional, de la función tienda, de una función que hemos denotado por g y le llamamos tienda con pata alargada y de la función máquina de sumar binaria. Además, exponemos a detalle la demostración de un famoso Teorema de Furstenberg (Teorema 3.27) y, como una aplicación de éste, demostramos un teorema de Banks (Teorema 3.28).

Dados un espacio métrico X y una función continua $f : X \to X$, la órbita de un punto $x \in X$ con respecto a f, es el conjunto $\mathcal{O}(x, f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Se dice que x es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$. Además, x es un *punto periódico* bajo f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$. Al número $\min\{k \in \mathbb{N} : f^k(x) = x\}$ se le llama *periodo* de x. Más aún, al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $\mathrm{Per}(f)$. Observemos lo siguiente.

Proposición 3.1. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Para cada $x \in X$, la cerradura de la órbita de x bajo f es invariante bajo f.

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que $f(Cl(\mathcal{O}(x, f))) \subseteq Cl(\mathcal{O}(x, f))$. Tomemos $b \in f(Cl(\mathcal{O}(x, f)))$ y un subconjunto abierto U de X tal que $b \in U$. Como $b \in f(Cl(\mathcal{O}(x, f)))$, existe $a \in Cl(\mathcal{O}(x, f))$ tal que $f(a) = b$. Luego, $a \in f^{-1}(U)$. Además, dado que f es continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X. Así, $f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. De aquí, existe $y \in f^{-1}(U) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo que $f(y) \in U$. Más aún, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = y$. En consecuencia, $f^{k+1}(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Puesto que $b \in U$, obtenemos que $b = f(a) \in Cl(\mathcal{O}(x, f))$. □

Ahora indicamos la definición de las funciones que empleamos a lo largo del trabajo.

Definición 3.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

(a) **transitiva** si para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$;
(b) **caótica** si $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X y f es transitiva;
(c) **totalmente transitiva** si f^k es transitiva, para cada $k \in \mathbb{N}$;
(d) **débilmente mezclante** si la función producto $f^{\times 2} : X^2 \to X^2$ es transitiva;
(e) **minimal** si para cualquier subconjunto no vacío y cerrado A de X, que sea invariante bajo f, se cumple que $A = X$.

En la siguiente observación vemos que la existencia de subconjuntos invariantes con propiedades especiales, hacen que una función no sea transitiva.

Observación 3.3. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subseteq X$ un subconjunto invariante bajo f. Si existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V en X tales que $U \subseteq A$ y $V \subseteq X - A$, entonces f no es transitiva. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$f^k(U) \cap V \subseteq f^k(A) \cap (X - A) \subseteq A \cap (X - A) = \emptyset.$$

En particular, si existen dos subconjuntos A y B de X, invariantes bajo f, y existen abiertos no vacíos U y V de X tales que $U \subseteq A - B$ y $V \subseteq B - A$, entonces f no es transitiva. De hecho, si existe un subconjunto no vacío A de X, cerrado propio con interior no vacío e invariante bajo f, entonces f no es transitiva.

Antes de indicar resultados que muestren las relaciones existentes entre las funciones que hemos dado en la Definición 3.2, vamos a recordar algunos ejemplos clásicos de los sistemas dinámicos discretos. Comenzamos con la función rotación irracional de la circunferencia.

Ejemplo 3.4. Consideremos $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$, con la métrica usual de los números complejos. Dado un número irracional $\lambda > 0$, definimos la función $T_\lambda \colon S^1 \to S^1$ por $T_\lambda(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + 2\pi\lambda)}$. La función T_λ se llama **rotación irracional** de la circunferencia.

A continuación enunciamos algunas propiedades de la función T_λ (ver [**27**, Ejemplo 4.1, p. 101]).

Teorema 3.5. Si $\lambda > 0$ es un número irracional, entonces la rotación irracional $T_\lambda \colon S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo con las siguientes propiedades:

(1) $\mathrm{Per}(T_\lambda) = \emptyset$.
(2) T_λ no es caótica.
(3) Para cada $e^{i\theta} \in S^1$, la órbita $\mathcal{O}(e^{i\theta}, T_\lambda)$ es densa en S^1.

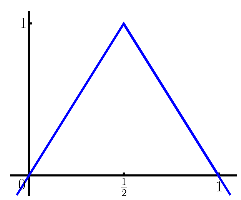
Recordemos que dado un espacio métrico (X, d), se dice que una función $f \colon X \to X$ es una *isometría* si $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, para cada $x, y \in X$. Es sencillo demostrar que si $f \colon X \to X$ es una isometría, entonces $d(x, y) = d(f^k(x), f^k(y))$, para cada $x, y \in X$ y toda $k \in \mathbb{N}$. Además, de manera fácil se prueba lo siguiente.

Observación 3.6. Si $\lambda > 0$ es un número irracional, entonces la rotación irracional $T_\lambda \colon S^1 \to S^1$ es una isometría.

Por otro lado, la función tienda es un ejemplo práctico para visualizar varias propiedades dinámicas. Su definición y su gráfica son las siguientes.

Ejemplo 3.7. Se define la **función tienda** $T : [0, 1] \to [0, 1]$, para cada $x \in [0, 1]$, como sigue:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Veamos algunas propiedades de la dinámica individual de la función tienda. Comenzamos con el siguiente resultado técnico (ver [**19**, Proposición 7.1, p. 96] para una demostración).

Proposición 3.8. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:

(a) La función T^n restringida al intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$,
$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]} \colon \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0, 1],$$
es un homeomorfismo.

(b) La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ es:
$$T^n(x) = \mu + (-1)^l 2^n x,$$
donde μ es un número entero. Por lo tanto, en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ la gráfica de T^n es un segmento de recta cuya pendiente es 2^n, si l es par, y es $-(2^n)$, si l es impar.

Observación 3.9. Utilizando inducción se puede demostrar que para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que $\displaystyle\bigcup_{m=0}^{2^N-1} [\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}] = [0, 1]$.

Como consecuencia de la Proposición 3.8, se tiene lo siguiente.

Corolario 3.10. Sean $a, b \in [0, 1]$ tales que $a < b$ y $(a, b) \subseteq [0, 1]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que $0 < b - a$. Luego, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 < N(b-a)$. Puesto que $N \leqslant 2^{N-1}$, se sigue que $1 < 2^{N-1}(b-a)$. De donde, $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Afirmamos que existe $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que $[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}] \subseteq (a, b)$. En efecto, por la Observación 3.9, existe $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que $\frac{m}{2^N} \leqslant a \leqslant \frac{m+1}{2^N}$. De aquí, se tiene que $\frac{m+2}{2^N} < b$. Ponemos $l = m + 1$. Así, $[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}] \subseteq (a, b)$. De donde, en vista de la Proposición 3.8-(a), obtenemos que $T^N(a, b) = [0, 1]$. □

Teorema 3.11. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función tienda. Se cumple lo siguiente:

(1) Los únicos puntos fijos de T son 0 y $\frac{2}{3}$.
(2) T es débilmente mezclante.
(3) $\mathrm{Per}(T)$ es denso en $[0, 1]$.

Demostración. (1) Sea $x \in [0, 1]$ y supongamos que $T(x) = x$. Si $x \leqslant \frac{1}{2}$, entonces $2x = x$. Así, $x = 0$. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, entonces $2 - 2x = x$. Luego $x = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, T tiene como puntos fijos 0 y $\frac{2}{3}$.

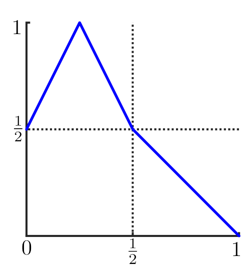
(2) Demostremos que $T^{\times 2}$ es transitiva. Sean $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ abiertos básicos en $[0, 1]^2$. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(T^{\times 2})^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Por el Corolario 3.10, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $T^{N_1}(U_1) = [0, 1]$ y $T^{N_2}(U_2) = [0, 1]$. Luego, poniendo $k = \max\{N_1, N_2\}$, obtenemos que $T^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $T^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. De donde, $(T^{\times 2})^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, T es débilmente mezclante.

(3) Sea U un subconjunto abierto no vacío de $[0, 1]$. Veamos que $U \cap \mathrm{Per}(T) \neq \emptyset$. Como U no es vacío, se sigue de la Observación 3.9 que existen $N \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tales que $[\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}] \subseteq U$. Por la Proposición 3.8-(a), $T^N([\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}]) = [0, 1]$. Así, existe $x_0 \in [\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}]$ tal que $T^N(x_0) = x_0$. Esto es, $x_0 \in \mathrm{Per}(T)$. Por lo tanto, $U \cap \mathrm{Per}(T) \neq \emptyset$. En conclusión, $\mathrm{Per}(T)$ es denso en $[0, 1]$. □

A continuación definimos otra función transitiva, a la cual la llamaremos "función tienda con pata alargada". Esta función es definida en [**2**, p. 841], su regla de correspondencia y su gráfica las encontramos a continuación.

Ejemplo 3.12. Se define la función $g : [0, 1] \to [0, 1]$, para cada $x \in [0, 1]$, como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}; \\ \frac{3}{2} - 2x, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

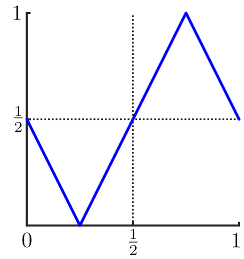


Una demostración del siguiente hecho se puede consultar en [**19**, Ejemplo 18.13, p. 293].

Teorema 3.13. La función $g : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva.

Es importante conocer el comportamiento de la segunda iterada de g, esto es, de la función $g^2 : [0, 1] \to [0, 1]$, cuya regla de correspondencia y gráfica son las siguientes.

$$g^2(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}; \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}; \\ -2x + \frac{5}{2}, & \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$



Proposición 3.14. La función $g^2\colon [0,1] \to [0,1]$ no es transitiva. En particular, $g : [0,1] \to [0,1]$ no es totalmente transitiva.

Demostración. No es difícil ver que los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ son invariantes bajo g^2. Así, por la Observación 3.3, se tiene que g^2 no es transitiva, y en consecuencia g no es totalmente transitiva. $\square$

Como cuarto y último ejemplo indicamos la función máquina de sumar binaria. Para definirla, consideremos el conjunto de las sucesiones infinitas de ceros y unos:

$$\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots) : s_k \in \{0,1\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

En general, los elementos de Σ_2 los denotamos con las letras $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}$, etc. Además, escribimos $\mathbf{0} = (0,0,0,0,\ldots)$ y $\mathbf{1} = (1,0,0,0,\ldots)$.

Para una demostración del siguiente hecho, se puede consultar [**9**, Proposición 6.2, p. 40].

Proposición 3.15. La función $d_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to [0,\infty)$ definida, para $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ y $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots)$ en Σ_2 como:

$$d_{\Sigma_2}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

es una métrica.

En [**19**, Sección 10.2], por ejemplo, se estudia el espacio métrico (Σ_2, d_{Σ_2}), denominado espacio de dos símbolos o espacio de las sucesiones de ceros y unos. Veamos las siguientes propiedades de Σ_2. La compacidad es consecuencia de [**10**, Teorema 1.4-(4), p. 224] y la disconexidad total de [**10**, Ejemplo 3, p. 111].

Proposición 3.16. (Σ_2, d_{Σ_2}) es compacto y totalmente disconexo.

Vamos a definir un homeomorfismo transitivo de Σ_2 en sí mismo. Para esto, primero requerimos de la siguiente operación en Σ_2. Dados $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots)$ y $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots)$, elementos cualesquiera de Σ_2, se define la suma de $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$ como:

$$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{u},$$

donde los términos de la sucesión $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$ se definen con ayuda de una sucesión $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots)$ en Σ_2 como sigue: hacemos $r_0 = 0$ y

$$u_0 = s_0 + t_0 + r_0 (\text{mod } 2).$$

Si $s_0 + t_0 < 2$, definimos $r_1 = 0$ y, si $s_0 + t_0 = 2$, entonces $r_1 = 0$. En cualquier situación, hacemos

$$u_1 = s_1 + t_1 + r_1 (\text{mod } 2).$$

Suponiendo que, para $k \geqslant 1$ los términos r_{k-1} y u_{k-1} ya han sido definidos, hacemos $r_k = 0$ si $s_{k-1} + t_{k-1} + r_{k-1} < 2$, o bien $r_k = 1$ si $s_{k-1} + t_{k-1} + r_{k-1} \geqslant 2$. Definimos ahora

$$u_k = s_k + t_k + r_k (\text{mod } 2).$$

Notemos que $\mathbf{u} \in \Sigma_2$, por lo que la suma en Σ_2 está bien definida.

Ahora veamos la regla de correspondencia de la función máquina de sumar binaria en Σ_2.

Ejemplo 3.17. Sea Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos. Definimos la función $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ por $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$, para cada $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. A τ se le llama la **sumadora** o **máquina de sumar binaria** en Σ_2.

En la literatura aparecen otras máquinas de sumar que se definen de manera similar a la que hemos dado. Como en el presente trabajo utilizamos únicamente la máquina sumar binaria, de ahora en adelante simplemente la llamamos máquina de sumar. Para conocer más detalles de la función máquina de sumar recomendamos al lector consultar la Sección 2.2 de [**13**] o las Secciones 10.2 y 13.3–13.5 de [**19**]. A continuación, por completez de este escrito, presentamos una propiedad muy importante de la función τ (ver [**37**, Proposición 1.26, p. 29] para una demostración).

Teorema 3.18. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función máquina de sumar. Para cada $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, se tiene que la órbita $\mathcal{O}(\mathbf{s}, \tau)$ es un conjunto denso en Σ_2.

Como consecuencia del Teorema 3.18 obtenemos los incisos (1) y (2) del resultado siguiente. Para garantizar la parte (3) hacemos notar, como se indica en [**4**, p. 684], que la función τ^{2^n} no es transitiva, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.19. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función máquina de sumar. La función τ cumple las siguientes propiedades:
(1) $\mathrm{Per}(\tau) = \emptyset$.
(2) τ no es caótica.
(3) τ no es totalmente transitiva.

Después de haber revisado en los ejemplos algunas funciones importantes, retomamos la Definición 3.2 y analizamos las relaciones existentes entre los tipos de funciones que se han definido.

Proposición 3.20. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua.
(1) Si f es una función caótica, entonces f es transitiva.
(2) Si f es una función totalmente transitiva, entonces f es transitiva.
(3) Si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Las partes (1) y (2) son inmediatas. Para probar (3), supongamos que f es débilmente mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Consideremos los subconjuntos abiertos no vacíos $U \times U$ y $V \times V$ en X^2. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[(f^{\times 2})^k(U \times U)] \cap [V \times V] \neq \emptyset$. Luego, por la Proposición 2.1-(3), $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Con todo, concluimos que f es transitiva. $\square$

Se sigue del Teorema 3.11-(2) y de la Proposición 3.20-(3) lo siguiente.

Proposición 3.21. La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es transitiva.

En seguida se exhibe una equivalencia del concepto de función minimal.

Proposición 3.22. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Se tiene que f es minimal si y sólo si la órbita de cualquier $x \in X$ bajo f, $\mathcal{O}(x, f)$, es un conjunto denso en X.

Demostración. Supongamos que f es una función minimal. Sea $x \in X$. Veamos que $Cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Notemos que $Cl(\mathcal{O}(x, f))$ es un subconjunto cerrado no vacío en X. Más aún, por la Proposición 3.1, tenemos que $Cl(\mathcal{O}(x, f))$ es invariante bajo f. En vista de que f es minimal, se sigue que $Cl(\mathcal{O}(x, f)) = X$. Esto es, $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto denso en X.
Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto A de X que es cerrado, no vacío, invariante bajo f y tal que $A \neq X$. Tomemos un punto $x \in A$. Puesto que $X - A$ es un subconjunto abierto no vacío de X, se sigue por hipótesis que $(X - A) \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$. Sea $a \in (X - A) \cap \mathcal{O}(x, f)$. Luego, $a \in X - A$ y $a = f^k(x)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in A$ y $f(A) \subseteq A$, se tiene que

$f^k(x) \in f^k(A) \subseteq f(A) \subseteq A$. De aquí, $a \in A$, lo que es una contradicción. Con esto obtenemos que f es minimal. □

Aplicando la Proposición 3.22 obtenemos lo siguiente.

Proposición 3.23. La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ no es minimal.

Demostración. Del Teorema 3.11-(1) la órbita de $\frac{2}{3}$ bajo T es $\mathcal{O}(\frac{2}{3}, T) = \{\frac{2}{3}\}$. Así, por la Proposición 3.22 se tiene que T no es minimal. □

El concepto de función minimal es más general que el de función transitiva, como lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.24. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es minimal, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es minimal. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $x \in U$. Como f es minimal, de la Proposición 3.22, se tiene que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Por lo que $\mathcal{O}(x, f) \cap V \neq \emptyset$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in V$. Así, $f^k(x) \in f^k(U) \cap V$. Esto es, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es transitiva. □

Combinando el Teorema 3.18 y las Proposiciones 3.22 y 3.24 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.25. Sean Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos y $\tau\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función máquina de sumar. Se tiene que τ es minimal. En particular, τ es transitiva.

De manera similar, ahora combinando el Teorema 3.5-(3) y las Proposiciones 3.22 y 3.24, obtenemos lo siguiente.

Proposición 3.26. Sean $\lambda > 0$ un número irracional y $T_\lambda\colon S^1 \to S^1$ la rotación irracional. Se tiene que T_λ es minimal, y en particular, es transitiva.

A continuación, veamos un resultado clásico de la dinámica topológica conocido como Teorema de Furstenberg [**14**, Proposición 1.3, p. 9]. Por su importancia, detallamos su demostración.

Teorema 3.27. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, la m-ésima función producto $f^{\times m} : X^m \to X^m$ es transitiva.

Demostración. Procedemos por inducción matemática sobre m. Para $m = 1$, el resultado se sigue de la Proposición 3.20-(3).
Sea $m > 2$. Supongamos que la m-ésima función producto $f^{\times m}$ es transitiva. Demostremos que $f^{\times(m+1)}$ es transitiva. Sean $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{m+1}$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m+1}$ abiertos básicos en X^{m+1}. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$[(f^{\times(m+1)})^k(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{m+1})] \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m+1}] \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Notemos que, por la Proposición 2.1-(3), probar (2.1) es equivalente a demostrar:

$$f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \ldots, f^k(U_{m+1}) \cap V_{m+1} \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Tomemos los subconjuntos abiertos no vacíos $U_m \times V_m$ y $U_{m+1} \times V_{m+1}$ en X^2. Como $f^{\times 2}$ es transitiva, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $[(f^{\times 2})^l(U_m \times V_m)] \cap [U_{m+1} \times V_{m+1}] \neq \emptyset$. De la Proposición 2.1-(3), se sigue que $f^l(U_m) \cap U_{m+1} \neq \emptyset$ y $f^l(V_m) \cap V_{m+1} \neq \emptyset$. Luego, $f^{-l}(U_{m+1}) \cap U_m \neq \emptyset$ y $f^{-l}(V_{m+1}) \cap V_m \neq \emptyset$. Sean $U = f^{-l}(U_{m+1}) \cap U_m$ y $V = f^{-l}(V_{m+1}) \cap V_m$. Notemos que U y V son abiertos no vacíos en X. Consideremos los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{m-1} \times U$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m-1} \times V$ en X^m. Como $f^{\times m}$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$[(f^{\times m})^k(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{m-1} \times U)] \cap [V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_{m-1} \times V] \neq \emptyset.$$

Luego, por la Proposición 2.1-(3), se tiene que $f^k(U_1)\cap V_1\neq\emptyset$, $f^k(U_2)\cap V_2\neq\emptyset$, ..., $f^k(U_{m-1})\cap V_{m-1}\neq\emptyset$, $f^k(U)\cap V\neq\emptyset$. Para terminar con la demostración de la afirmación (2.2), veamos que $f^k(U_m)\cap V_m\neq\emptyset$ y $f^k(U_{m+1})\cap V_{m+1}\neq\emptyset$. Dado que $f^k(U)\cap V\neq\emptyset$, existe $x\in U$ tal que $f^k(x)\in V$. Como $U\subseteq U_m$ y $V\subseteq V_m$, se obtiene que $x\in U_m$ y $f^k(x)\in V_m$. Por lo anterior, vemos que $f^k(U_m)\cap V_m\neq\emptyset$.
Nuevamente, en vista de que $f^k(U)\cap V\neq\emptyset$, existe $y\in U$ tal que $f^k(y)\in V$. Como $U\subseteq f^{-l}(U_{m+1})$, se sigue que $f^l(y)\in U_{m+1}$. Dado que $f^k(y)\in V$ y $V\subseteq f^{-l}(V_{m+1})$, se tiene que $f^l\left(f^k(y)\right)\in V_{m+1}$. Notemos que $f^l\left(f^k(y)\right)=f^k\left(f^l(y)\right)$. Luego, $f^k\left(f^l(y)\right)\in f^k(U_{m+1})\cap V_{m+1}$. Por lo tanto, $f^k(U_{m+1})\cap V_{m+1}\neq\emptyset$. Así, la afirmación (2.2) queda demostrada. En conclusión, $f^{\times(m+1)}$ es transitiva. □

Empleamos el Teorema de Furstenberg para demostrar el Teorema 3.28 debido a Banks [**3**, Lema 7, p. 87] (ver también la parte (e) de [**4**, Teorema 1]).

Teorema 3.28. Sean X un espacio métrico compacto y $f:X\to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X y $p\in\mathbb{N}$. Veamos que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(f^p)^k(U)\cap V\neq\emptyset$. Como f es continua, entonces f^i es continua, para cada $i\in\{1,2,\ldots,p\}$. Luego, $f^{-i}(V)$ es un subconjunto abierto no vacío en X, para cada $i\in\{1,2,\ldots,p\}$. En vista de que f es débilmente mezclante, por el Teorema de Furstenberg (Teorema 3.27), la función $f^{\times p}$ es transitiva. De este modo, considerando los conjuntos abiertos no vacíos $U_i=U$ y $V_i=f^{-i}(V)$, para cada $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, existe $l\in\mathbb{N}$ tal que:

$$[(f^{\times p})^l(U_1\times U_2\times\cdots\times U_p)]\cap[V_1\times V_2\times\cdots\times V_p]\neq\emptyset.$$

En consecuencia, de la Proposición 2.1-(3), se tiene que para toda $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, $f^l(U_i)\cap V_i\neq\emptyset$. De donde, $f^l(U)\cap f^{-i}(V)\neq\emptyset$, para cada $i\in\{1,2,\ldots,p\}$. Dados los números l y p, por el algoritmo de la división, existen $q,r\in\mathbb{N}$ tales que $l=qp+r$ y $0\leqslant r\leqslant p-1$. Notemos que $0<p-r\leqslant p$. Se sigue que $p-r\in\{1,2,\ldots,p\}$. Por lo que $f^l(U)\cap f^{-(p-r)}(V)\neq\emptyset$. Así, existe $x\in U$ tal que $f^l(x)\in f^l(U)$ y $f^l(x)\in f^{-(p-r)}(V)$. De donde, $f^{p-r}(f^l(x))\in V$. Observemos que:

$$f^{p-r}(f^l(x))=f^{l+p-r}(x)=f^{qp+r+p-r}(x)=f^{p(q+1)}(x)=(f^p)^{q+1}(x).$$

Luego, $(f^p)^{q+1}(x)\in V$. Lo cual implica que $(f^p)^{q+1}(x)\in(f^p)^{q+1}(U)$ y $(f^p)^{q+1}(x)\in V$. Haciendo $k=q+1$, obtenemos que $(f^p)^k(U)\cap V\neq\emptyset$. En conclusión, f es totalmente transitiva. □

Por la Proposición 3.14 y los Teoremas 3.19-(3) y 3.28, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.29. Las funciones $g:[0,1]\to[0,1]$ y $\tau\colon\Sigma_2\to\Sigma_2$, de los Ejemplos 3.12 y 3.17, no son débilmente mezclantes.

A continuación probamos dos equivalencias del concepto de función débilmente mezclante, originalmente demostradas en [**4**], donde, de hecho, se encuentran otras equivalencias más de este tipo de funciones.

Teorema 3.30. Sean X un espacio métrico compacto y $f:X\to X$ una función continua. Son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante.
(2) Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U_1,U_2,V_1 y V_2 de X, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1)\cap V_1\neq\emptyset$ y $f^k(U_2)\cap V_2\neq\emptyset$.
(3) Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U,V_1 y V_2 de X, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $f^k(U)\cap V_1\neq\emptyset$ y $f^k(U)\cap V_2\neq\emptyset$.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y demostremos que se cumple la condición (2). Sean U_1,U_2,V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Luego, $U_1\times U_2$ y $V_1\times V_2$ son subconjuntos abiertos no vacíos en X^2. Como f es débilmente mezclante, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $[(f^{\times 2})^k(U_1 \times U_2)] \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. En conclusión, por la Proposición 2.1-(3), se tiene que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que se satisface (2) y veamos que f es débilmente mezclante. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos en X^2. Así, existen U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X tales que $U_1 \times U_2 \subseteq U$ y $V_1 \times V_2 \subseteq V$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego, por la Proposición 2.1-(3), $[(f^{\times 2})^k(U_1 \times U_2)] \cap [V_1 \times V_2] \neq \emptyset$. Lo cual implica que $(f^{\times 2})^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es débilmente mezclante.

Por otro lado, demostremos que (2) implica (3). Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Consideremos $U = U_1 = U_2$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. De donde, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Finalmente, supongamos que se cumple (3) y demostremos (2). Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos en X. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. En efecto, aplicando la hipótesis a los subconjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2 y V_2, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^l(U_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. De aquí, se tiene que $U_1 \cap f^{-l}(U_2) \neq \emptyset$ y $U_1 \cap f^{-l}(V_2) \neq \emptyset$. Sean $A = U_1 \cap f^{-l}(U_2)$ y $B = U_1 \cap f^{-l}(V_2)$. Dado que f es una función continua, obtenemos que A y B son subconjuntos abiertos no vacíos en X. Nuevamente, aplicando la hipótesis a los subconjuntos abiertos no vacíos A, B y V_1, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$. Ponemos $W = A \cap f^{-k}(B)$. Puesto que A y B son subconjuntos abiertos y f^k es continua, se sigue que W es un subconjunto abierto en X, claramente no vacío. Ahora, como $A \subseteq U_1$, se tiene que $f^k(A) \subseteq f^k(U_1)$. Además, puesto que $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$, obtenemos que $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Por lo anterior, resta ver que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Notemos que $W \subseteq A \subseteq f^{-l}(U_2)$. Sea $x \in W$. Así, $f^l(x) \in U_2$. Dado que $x \in W \subseteq f^{-k}(B)$ y $B \subseteq f^{-l}(V_2)$, resulta que $f^k(x) \in f^{-l}(V_2)$. De donde, $f^l\left(f^k(x)\right) = f^k\left(f^l(x)\right) \in V_2$. En vista de que $f^l(x) \in U_2$, tenemos que $f^k\left(f^l(x)\right) \in f^k(U_2)$. Con todo, hemos demostrado que $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. $\square$

En el Diagrama 1 resumimos lo obtenido en las Proposiciones 3.20 y 3.24 y el Teorema 3.28. La flecha significa que la clase de funciones precedente implica la siguiente.

$$\begin{tikzcd}
& \text{Débilmente mezclante} \arrow[d] & \\
& \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \\
\text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \text{Minimal} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1: Relación entre las funciones estudiadas.

Si el lector está interesado en otras propiedades relacionadas a las funciones que hemos estudiado en esta sección, puede consultar las Secciones 2.2 y 3.1 de[**13**] y la Sección 11.2 de [**19**].

4. Dinámica colectiva

En esta sección revisamos algunos resultados de la dinámica colectiva. Entre otros, nos enfocamos a la transitividad de funciones inducidas para cualquier función, y particularizamos en la transitividad de las funciones inducidas de las rotaciones irracionales (Ejemplo 3.4), de la función tienda (Ejemplo 3.7), de la función tienda con pata alargada (Ejemplo 3.12) y de la función máquina de sumar (Ejemplo 3.17). Todo esto con la finalidad de resolver lo que nos hemos planteado en el presente trabajo.

En el 2003, Román-Flores probó que si 2^f es transitiva, entonces f es transitiva (ver [**27**, Teorema 3.6]). Además, demuestra que si T_λ es una rotación irracional de la circunferencia, entonces 2^{T_λ}

no es transitiva (ver [**27**, Ejemplo 4.1]). Observemos que por la Proposición 3.26, T_λ es transitiva. Todo esto indica que, para una función continua $f\colon X \to X$, la transitividad de $2^f\colon 2^X \to 2^X$ no queda caracterizada a través de la transitividad de f. Más aún, como 2^{T_λ} no es transitiva, entonces por la Proposición 3.24, la función 2^{T_λ} no es minimal. Así, T_λ es una función minimal cuya inducida 2^{T_λ} no es minimal. Todos estos hechos los detallamos en la presente sección.

En el 2005, Peris probó en [**44**, Teorema 2.1] el resultado que enunciamos a continuación y del cual incluimos una demostración. Notemos que, por la Proposición 3.20-(3), el teorema de Peris generaliza el de Román-Flores (Corolario 4.2), además de que caracteriza la transitividad de la función inducida 2^f utilizando, en su lugar, la mezclación débil de f. En la demostración encontramos una aplicación más del Teorema de Furstenberg. Cabe recordar que si $k \in \mathbb{N}$, entonces la k-ésima iterada de 2^f evaluada en cualquier elemento $A \in 2^X$ es $\left(2^f\right)^k(A) = f^k(A)$; esto es, la imagen de A bajo la k-ésima iterada de f.

Teorema 4.1. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Son equivalentes:

(1) f es débilmente mezclante,
(2) 2^f es débilmente mezclante,
(3) 2^f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es débilmente mezclante y mostremos que 2^f es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos en 2^X. En vista del Teorema 3.30-(2), veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left(2^f\right)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ y $\left(2^f\right)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por la definición de la base para τ_V y por la Proposición 2.2, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} &\langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle \subseteq \mathcal{U}_1, &&\langle U_1', U_2', \ldots, U_l'\rangle \subseteq \mathcal{U}_2, \\ &\langle V_1, V_2, \ldots, V_l\rangle \subseteq \mathcal{V}_1 \quad \text{ y } &&\langle V_1', V_2', \ldots, V_l'\rangle \subseteq \mathcal{V}_2. \end{aligned}$$

para algunos subconjuntos abiertos no vacíos

$$U_1, U_2, \ldots, U_l, U_1', U_2', \ldots, U_l', V_1, V_2, \ldots, V_l, V_1', V_2', \ldots, V_l'$$

de X. Ahora, dado que f es débilmente mezclante, por el Teorema de Furstenberg (Teorema 3.27), $f^{\times 2l}$ es transitiva. Así, considerando los subconjuntos abiertos no vacíos $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_l \times U_1' \times U_2' \times \cdots \times U_l'$ y $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_l \times V_1' \times V_2' \times \cdots \times V_l'$ en X^{2l}, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left[(f^{\times 2l})^k(U_1 \times \cdots \times U_l \times U_1' \times \cdots \times U_l')\right] \cap [V_1 \times \cdots \times V_l \times V_1' \times \cdots \times V_l'] \neq \emptyset.$$

Esto es, de la Proposición 2.1-(3), $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$, $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \ldots, f^k(U_l) \cap V_l \neq \emptyset$, $f^k(U_1') \cap V_1' \neq \emptyset$, $f^k(U_2') \cap V_2' \neq \emptyset, \ldots, f^k(U_l') \cap V_l' \neq \emptyset$. De aquí, podemos considerar los siguientes puntos en X:

$$\begin{gathered} x_1 \in U_1 \text{ tal que } f^k(x_1) \in V_1, \\ x_2 \in U_2 \text{ tal que } f^k(x_2) \in V_2, \\ \vdots \\ x_l \in U_l \text{ tal que } f^k(x_l) \in V_l, \\ x_1' \in U_1' \text{ tal que } f^k(x_1') \in V_1', \\ x_2' \in U_2' \text{ tal que } f^k(x_2') \in V_2', \\ \vdots \\ x_l' \in U_l' \text{ tal que } f^k(x_l') \in V_l'. \end{gathered}$$

Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \cap U_i \neq \emptyset$. Así, $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle$. Similarmente, podemos ver que ocurre $\{x_1', x_2', \ldots, x_l'\} \in \langle U_1', U_2', \ldots, U_l'\rangle$. Observemos que:

$$f^k(\{x_1, \ldots, x_l\}) = \{f^k(x_1), \ldots, f^k(x_l)\} \text{ y } f^k(\{x_1', \ldots, x_l'\}) = \{f^k(x_1'), \ldots, f^k(x_l')\}.$$

En consecuencia, $f^k(\{x_1,\dots,x_l\}) \in \langle V_1,\dots,V_l\rangle$ y $f^k(\{x'_1,\dots,x'_l\}) \in \langle V'_1,\dots,V'_l\rangle$.
En vista de que $\{x_1,\dots,x_l\} \in \langle U_1,\dots,U_l\rangle$ y como $f^k(\{x_1,\dots,x_l\}) \in \langle V_1,\dots,V_l\rangle$, obtenemos que $(2^f)^k(\{x_1,\dots,x_l\}) \in (2^f)^k(\langle U_1,\dots,U_l\rangle) \cap \langle V_1,\dots,V_l\rangle$. Por lo que:

$$(2^f)^k(\langle U_1,U_2,\dots,U_l\rangle) \cap \langle V_1,V_2,\dots,V_l\rangle \neq \emptyset.$$

Similarmente, como $\{x'_1,\dots,x'_l\} \in \langle U'_1,\dots,U'_l\rangle$ y $f^k(\{x'_1,\dots,x'_l\}) \in \langle V'_1,\dots,V'_l\rangle$, obtenemos que $(2^f)^k(\{x'_1,\dots,x'_l\}) \in (2^f)^k(\langle U'_1,\dots,U'_l\rangle) \cap \langle V'_1,\dots,V'_l\rangle$. Así:

$$(2^f)^k(\langle U'_1,\dots,U'_l\rangle) \cap \langle V'_1,\dots,V'_l\rangle \neq \emptyset.$$

Por la forma en que tomamos los conjuntos $\langle U'_1,\dots,U'_l\rangle$ y $\langle V'_1,\dots,V'_l\rangle$, concluimos que $(2^f)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(2^f)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, por la parte (2) del Teorema 3.30, 2^f es débilmente mezclante.
Se sigue de la Proposición 3.20-(3) que la condición (2) implica la condición (3).
Finalmente, supongamos que 2^f es transitiva y demostremos que f es débilmente mezclante. Para este fin, usamos la parte (3) del Teorema 3.30. Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Consideremos los subconjuntos abiertos $\langle U\rangle$ y $\langle V_1,V_2\rangle$ de 2^X. Como U no es vacío, $\langle U\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de 2^X. En vista de que V_1 y V_2 no son vacíos, existen $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$. Así, $\{x_1,x_2\} \in \langle V_1,V_2\rangle$. Por lo que $\langle V_1,V_2\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío en 2^X. Puesto que 2^f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left(2^f\right)^k(\langle U\rangle) \cap \langle V_1,V_2\rangle \neq \emptyset$. De donde existe $A \in \langle U\rangle$ tal que $(2^f)^k(A) \in \langle V_1,V_2\rangle$. Es decir, $f^k(A) \in \langle V_1,V_2\rangle$. Luego, $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. Dado que $A \in \langle U\rangle$, $A \subseteq U$. Luego, $f^k(A) \subseteq f^k(U)$. Por lo que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. En conclusión, por el Teorema 3.30-(3), f es débilmente mezclante. $\square$

Cabe destacar que en [**4**, Teorema 2] se demuestra una generalización del Teorema 4.1. Además, el Teorema 4.1 también se prueba en [**22**, Teorema 2.1], sin dar crédito ni a [**4**] ni a [**44**]. Más aún, en [**16**, Teorema 3.2] lo enuncian sin demostración, indicando que es un resultado debido a S. Shao [**28**]. Por otro lado, la equivalencia de las afirmaciones (1) y (2) del Teorema 4.1 se demuestra en [**6**, Teorema 1 y Proposición 2] para el caso cuando f es un homeomorfismo.

Como hemos dicho, del Teorema 4.1, y en vista de la Proposición 3.20-(3), obtenemos el resultado debido a Román-Flores [**27**, Teorema 3.6].

Corolario 4.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Notemos que el Teorema 4.1 no es válido para la función inducida $C(f)$, pues la función tienda T es débilmente mezclante y, como veremos en la Proposición 4.8, su función inducida $C(T)$ no es transitiva. Sin embargo, un resultado similar al Corolario 4.2, para la función $C(f)$, lo encontramos a continuación.

Teorema 4.3. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si la función inducida $C(f) : C(X) \to C(X)$ es transitiva, entonces f es transitiva.

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Dados los subconjuntos abiertos U y V, se tiene que $\langle U\rangle \cap C(X)$ y $\langle V\rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C(X)$. Como $C(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$[(C(f))^k(\langle U\rangle \cap C(X))] \cap [\langle V\rangle \cap C(X)] \neq \emptyset.$$

Luego, existe $A \in \langle U\rangle \cap C(X)$ tal que $(C(f))^k(A) \in \langle V\rangle \cap C(X)$. De donde, $A \subseteq U$ y $f^k(A) \subseteq V$. De aquí, como $f^k(A) \subseteq f^k(U)$, obtenemos que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En conclusión, f es transitiva. $\square$

Es importante destacar que si en el Teorema 4.3 agregamos la condición de conexidad al espacio X, es decir, si suponemos que X es un continuo, entonces no sólo obtenemos que f es transitiva, sino que es débilmente mezclante. Este resultado lo encontramos en el Teorema 4.4, que dicho de otra manera, muestra que la implicación (3) entonces (1) del Teorema 4.1, permanece válida cambiando 2^f por $C(f)$. El resultado es debido a Banks [**4**, Teorema 4].

Teorema 4.4. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Si $C(f) : C(X) \to C(X)$ es transitiva, entonces f es débilmente mezclante.

Demostración. Sean U, V_1 y V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X. Debido al Teorema 3.30-(3), veamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. Notemos que $\langle U \rangle \cap C(X)$ y $\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos de $C(X)$. Puesto que U es un subconjunto no vacío en X, existe $x \in U$. Es decir, $\{x\} \in \langle U \rangle \cap C(X)$. Además, dado que $X \in C(X)$, $X \subseteq V_1 \cup V_2 \cup X$, $X \cap V_1 \neq \emptyset$, $X \cap V_2 \neq \emptyset$ y $X \cap X \neq \emptyset$, se sigue que $X \in \langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$. En consecuencia, $\langle U \rangle \cap C(X)$ y $\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C(X)$. Puesto que $C(f)$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[(C(f))^k(\langle U \rangle \cap C(X))\right] \cap [\langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)] \neq \emptyset$. Lo cual implica que existe $A \in \langle U \rangle \cap C(X)$ tal que $f^k(A) \in \langle V_1, V_2, X \rangle \cap C(X)$. Así, $f^k(A) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(A) \cap V_2 \neq \emptyset$. En vista de que $A \in \langle U \rangle$, esto es, $A \subseteq U$, tenemos, $f^k(A) \subseteq f^k(U)$. Por lo tanto, $f^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^k(U) \cap V_2 \neq \emptyset$. En conclusión, del Teorema 3.30-(3), f es débilmente mezclante. □

Corolario 4.5. Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua tal que la función inducida $C(f) : C(X) \to C(X)$ es transitiva. Entonces f es totalmente transitiva y la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es transitiva. En particular, f es transitiva.

Demostración. Por el Teorema 4.4, f es débilmente mezclante. Luego, por los Teoremas 3.28 y 4.1, f es totalmente transitiva y 2^f es transitiva. La Proposición 3.20-(2) implica que f es transitiva. □

Dados un espacio métrico compacto X y $n \in \mathbb{N}$, el hiperespacio de los subconjuntos cerrados, no vacíos de X y con a lo más n componentes, se denota por $C_n(X)$. Esto es:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Si $f \colon X \to X$ es una función continua, consideramos su función inducida a este hiperespacio de X, $C_n(f) \colon C_n(X) \to C_n(X)$. Es claro que para $n = 1$ la función $C_1(f)$ es la función $C(f)$. En [**7**] encontramos un excelente estudio de la transitividad de la función inducida $C_n(f)$, donde se presentan generalizaciones de algunos resultados de[**1**] y en particular de los que mostramos en este trabajo.

En la Sección 3 vimos cuatro ejemplos de funciones de las cuales destacamos algunas propiedades de su dinámica individual. A continuación las retomamos para estudiar algunos aspectos de su dinámica colectiva. Veamos el siguiente resultado (originalmente presentado en [**4**, Lema 1]), que nos servirá para garantizar que el conjunto de puntos periódicos de la función inducida 2^T de la función tienda T es denso en $2^{[0,1]}$.

Proposición 4.6. Si X es un espacio métrico y compacto y $f \colon X \to X$ es una función continua tal que $\operatorname{Per}(f)$ es denso en X, entonces $\operatorname{Per}(2^f)$ es denso en 2^X.

Demostración. Sea $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$ un subconjunto abierto no vacío de 2^X. Como $\operatorname{Per}(f)$ es denso en X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $x_i \in U_i \cap \operatorname{Per}(f)$. Sea m_i el periodo de x_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, y definimos m como el mínimo común múltiplo de $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Se tiene que el conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle$ es tal que $(2^f)^m(A) = A$. Luego $\langle U_1, U_2, \ldots, U_k \rangle \cap \operatorname{Per}(2^f) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\operatorname{Per}(2^f)$ es denso en 2^X. □

Corolario 4.7. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Entonces la función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es transitiva y $\operatorname{Per}\left(2^T\right)$ es denso en $2^{[0,1]}$. En particular 2^T es caótica, débilmente mezclante y totalmente transitiva. Más aún, 2^T no es minimal.

Demostración. Hemos visto en el Teorema 3.11-(2) que la función T es débilmente mezclante. Así, por el Teorema 4.1, obtenemos que 2^T es transitiva. Además, por el Teorema 3.11-(3) y por la Proposición 4.6, obtenemos que $\mathrm{Per}(2^T)$ es denso $2^{[0,1]}$. Luego, en vista de la transitividad de 2^T, obtenemos que 2^T es caótica. El Teorema 4.1 implica que 2^T es débilmente mezclante. De donde, por el Teorema 3.28 obtenemos que 2^T es totalmente transitiva. Finalmente, puesto que $\{\frac{2}{3}\}$ es un punto fijo de T (parte (1) del Teorema 3.11), se obtiene que $\mathcal{O}(\{\frac{2}{3}\}, 2^T) = \{\{\frac{2}{3}\}\}$. Así, $\mathcal{O}(\{\frac{2}{3}\}, 2^T)$ no es un conjunto denso en $2^{[0,1]}$. Por lo tanto, de la Proposición 3.22, se tiene que 2^T no es minimal. □

Una demostración alternativa de la densidad de los puntos periódicos de 2^T aparece en [**19**, Proposición 18.5, p. 288], mientras que otras pruebas de la transitividad de 2^T se encuentran en [**19**, Proposición 18.9, p. 291] y [**27**, Ejemplo 4.3].

Siguiendo con la dinámica colectiva de la función tienda, a continuación analizamos la transitividad de su función inducida $C(T)$. De hecho, el siguiente resultado muestra que aun cuando T es una función transitiva su inducida $C(T)$ no lo es. Aunque en [**1**, Teorema 4.5] se prueba un resultado más general que garantiza que $C(T)$ no es transitiva, para el caso particular de la función T, podemos seguir las ideas que aparecen en [**27**, Ejemplo 4.2].

Proposición 4.8. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Se tiene que la función inducida $C(T) : C([0,1]) \to C([0,1])$ no es transitiva.

Demostración. Veamos que existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en $C([0,1])$ tales que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $[(C(T))^k(\mathcal{U})] \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Para esto, probemos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Para todo $K \in B_H\left([0,1], \frac{1}{10}\right) \cap C([0,1])$, se tiene que $\frac{2}{3} \in K$. Además, para cada $p \in \mathbb{N}$, sucede que $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$.
En efecto, sea $K \in B_H\left([0,1], \frac{1}{10}\right) \cap C([0,1])$. Entonces $H(K, [0,1]) < \frac{1}{10}$, por lo que $0, 1 \in [0,1] \subseteq N(\frac{1}{10}, K)$. Esto implica que K es un subcontinuo de $[0,1]$ que intersecta a los subintervalos $[0, \frac{1}{10}]$ y $[\frac{9}{10}, 1]$. Por tanto, $\frac{2}{3} \in K$. Por otro lado, sea $p \in \mathbb{N}$. Dado que $\frac{2}{3} \in K$, se tiene que $\{\frac{2}{3}\} \subseteq K$. Luego, $T^p(\{\frac{2}{3}\}) \subseteq T^p(K)$. Así, $\{T^p(\frac{2}{3})\} \subseteq T^p(K)$. De donde, $T^p(\frac{2}{3}) \in (C(T))^p(K)$. Sabemos de la parte (1) de la Proposición 3.11 que $\frac{2}{3}$ es un punto fijo de T. Así, obtenemos que $T^p(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$.

Afirmación 2. Para todo $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$, se tiene que $F \subseteq \left[0, \frac{1}{10}\right]$. Además, para cada $y \in F$, sucede que $|\frac{2}{3} - y| \geqslant \frac{17}{30}$.
En efecto, sea $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$. Luego, $H(\{0\}, F) < \frac{1}{10}$. Así, por la Proposición 2.5, en particular tenemos, $F \subseteq N(\frac{1}{10}, \{0\})$. De donde, puesto que $N(\frac{1}{10}, \{0\}) = [0, \frac{1}{10}) \subseteq [0, \frac{1}{10}]$, obtenemos que $F \subseteq [0, \frac{1}{10}]$. Por otra parte, tomemos $y \in F$. Luego, dado que $F \subseteq [0, \frac{1}{10}]$, se sigue que $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{10}$. Así, $-y \geqslant -\frac{1}{10}$. Por lo que $|\frac{2}{3} - y| \geqslant \frac{17}{30}$.

Afirmación 3. Para toda terna (K, F, p), donde $K \in B_H([0,1], \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$, $F \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$ y $p \in \mathbb{N}$, se tiene que $H((C(T))^p(K), F) \geqslant \frac{17}{30}$.
En efecto, tomemos una terna (K, F, p) como se indica en la afirmación, y supongamos que $H((C(T))^p(K), F) < \frac{17}{30}$. Luego, por la Proposición 2.5, en particular se sigue, $(C(T))^p(K) \subseteq N(\frac{17}{30}, F)$. Además, por la Afirmación 1, $\frac{2}{3} \in (C(T))^p(K)$. En consecuencia, $\frac{2}{3} \in N(\frac{17}{30}, F)$. Así, $d(\frac{2}{3}, F) < \frac{17}{30}$. Por lo que existe $y \in F$ tal que $|\frac{2}{3} - y| < \frac{17}{30}$, lo cual contradice la Afirmación 2. Por lo tanto, $H((C(T))^p(K), F) \geqslant \frac{17}{30}$.

Finalmente, sean $\mathcal{U} = B_H([0,1], \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$ y $\mathcal{V} = B_H(\{0\}, \frac{17}{30}) \cap C([0,1])$. Es claro que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos no vacíos en $C([0,1])$. Consideremos $K \in \mathcal{U}$, $\{0\} \in B_H(\{0\}, \frac{1}{10}) \cap C([0,1])$ y $k \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Por la Afirmación 3, se tiene que $H((C(T))^k(K), \{0\}) \geqslant \frac{17}{30}$. Luego,

$(C(T))^k(K) \notin B_H\left(\{0\}, \frac{17}{30}\right) \cap C([0,1])$. Así, $(C(T))^k(K) \in (C(T))^k(\mathcal{U})$ y $(C(T))^k(K) \notin \mathcal{V}$. Por lo que $[(C(T))^k(\mathcal{U})] \cap \mathcal{V} = \emptyset$. En conclusión, $C(T)$ no es transitiva. $\square$

La demostración del siguiente corolario se obtiene de la Proposición 4.8 y del Diagrama 1 de la Sección 3.

Corolario 4.9. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Entonces la función inducida $C(T) : C([0,1]) \to C([0,1])$ no es caótica, ni totalmente transitiva, ni débilmente mezclante ni minimal.

Proposición 4.10. Si (X, d) es un espacio métrico y compacto y $f \colon X \to X$ es una isometría, entonces $2^f : 2^X \to 2^X$ no es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es una isometría y que 2^f es transitiva. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Ponemos $r = d(x,y)$, $U = B(x, \frac{r}{4})$ y $V = B(y, \frac{r}{4})$. Se tiene que los conjuntos $\langle U, V\rangle$ y $\langle V\rangle$ son abiertos no vacíos en 2^X. Puesto que 2^f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^k(\langle U, V\rangle) \cap \langle V\rangle \neq \emptyset$. Sea $B \in \langle U, V\rangle$ tal que $(2^f)^k(B) \in \langle V\rangle$. Tomemos $b \in B \cap U$ y $c \in B \cap V$. Así, utilizando la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$r = d(x,y) \leqslant d(x,b) + d(b,c) + d(c,y) < \frac{r}{2} + d(b,c).$$

De donde, $\frac{r}{2} < d(b,c)$. Luego, puesto que $f^k(b), f^k(c) \in f^k(B) \subseteq V$, concluimos que

$$d(f^k(b), f^k(c)) \leqslant \frac{r}{2} < d(b,c),$$

lo que contradice que f es una isometría. Por lo tanto, 2^f no es transitiva. $\square$

Corolario 4.11. Sean $\lambda > 0$ un número irracional y $T_\lambda \colon S^1 \to S^1$ la rotación irracional. Entonces la función inducida $2^{T_\lambda} : 2^{S^1} \to 2^{S^1}$ no es transitiva y, por ende, no es caótica, ni totalmente transitiva, ni débilmente mezclante ni minimal.

Demostración. La no transitividad 2^{T_λ} se sigue de la Observación 3.6 y la Proposición 4.10. El resto de las propiedades se deriva del Diagrama 1 de la Sección 3. $\square$

Cabe señalar que, como hemos mencionado, la no transitividad de la función 2^{T_λ} indicada en el Corolario 4.11 es [**27**, Ejemplo 4.1].

Proposición 4.12. Sean X un espacio métrico compacto y $f \colon X \to X$ una función continua. Si $2^f : 2^X \to 2^X$ es minimal, entonces f es minimal.

Demostración. Supongamos que 2^f es minimal. Sea $x \in X$. Veamos que $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Notemos que $\langle U\rangle$ es un subconjunto abierto no vacío de 2^X. Puesto que $\{x\} \in 2^X$ y 2^f es minimal, entonces por la Proposición 3.22, se tiene que $\langle U\rangle \cap \mathcal{O}(\{x\}, 2^f) \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U\rangle$ tal que $(2^f)^k(\{x\}) = A$, para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, $A \subseteq U$ y $f^k(\{x\}) = A$. Así, $f^k(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(x, f)$ es denso en X. Nuevamente por la Proposición 3.22, obtenemos que f es minimal. $\square$

El recíproco de la Proposición 4.12 no es cierto. En efecto, hemos visto en la Proposición 3.26 que para cualquier número irracional $\lambda > 0$, la rotación irracional T_λ es minimal, pero por el Corolario 4.11 su inducida 2^{T_λ} no lo es.

Por otro lado, consideremos la función tienda con pata alargada g definida en el Ejemplo 3.12. Recordemos que en el Teorema 3.13 se dijo que g es transitiva. Sin embargo, en vista de la Proposición 3.29 y del Teorema 4.1, obtenemos que su inducida 2^g no es transitiva (ver también [**22**, Proposición 3.2] o [**19**, Ejemplo 18.13, p. 293]). Esto lo indicamos a continuación junto con otras consecuencias que desprenden del Diagrama 1 de la Sección 3.

Corolario 4.13. Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda con pata alargada. Entonces la función inducida $2^g : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ no es transitiva y, por ende, tampoco es caótica, ni totalmente transitiva, ni débilmente mezclante ni minimal.

A continuación vemos la siguiente propiedad de la función inducida $F_1(f)$, para cualquier función $f : X \to X$. Esta propiedad permite concluir aspectos de la dinámica colectiva de la función máquina de sumar (definida en el Ejemplo 3.17).

Proposición 4.14. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces así lo es la función inducida $F_1(f) : F_1(X) \to F_1(X)$.

Demostración. Supongamos que f es transitiva y veamos que $F_1(f)$ también lo es. Consideremos la función $h : X \to F_1(X)$ con regla de correspondencia $h(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$. No es difícil demostrar que h es un homeomorfismo. Ahora, tomemos dos abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en $F_1(X)$. Como h es continua, $h^{-1}(\mathcal{U})$ y $h^{-1}(\mathcal{V})$ son abiertos no vacíos en X. En vista de que f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(\mathcal{U})) \cap h^{-1}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$. Sea $x \in h^{-1}(\mathcal{U})$ tal que $f^k(x) \in h^{-1}(\mathcal{V})$. Luego, $h(x) \in \mathcal{U}$ y $h(f^k(x)) \in \mathcal{V}$. Notemos que $h(f^k(x)) = \{f^k(x)\} = f^k(\{x\}) = F_1(f)^k(\{x\}) = F_1(f)^k(h(x))$. Así, $h(x) \in \mathcal{U}$ y $F_1(f)^k(h(x)) \in \mathcal{V}$. De aquí, $F_1(f)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_1(f)$ es transitiva. $\square$

El lector puede consultar en [**1**, Teorema 3.5, p. 1016] la demostración original del siguiente resultado.

Proposición 4.15. Sea $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función máquina de sumar en el espacio Σ_2. Se tiene que la función inducida $C(\tau) : C(\Sigma_2) \to C(\Sigma_2)$ es transitiva mientras que $2^\tau : 2^{\Sigma_2} \to 2^{\Sigma_2}$ no lo es.

Demostración. Observemos que por las Proposiciones 3.25 y 4.14, la función inducida $F_1(\tau) : F_1(\Sigma_2) \to F_1(\Sigma_2)$ es transitiva. Así, puesto que $C(\Sigma_2)$ y $F_1(\Sigma_2)$ son iguales (pues Σ_2 es totalmente disconexo por la Proposición 3.16), obtenemos que $C(\tau) : C(\Sigma_2) \to C(\Sigma_2)$ es transitiva. Por otro lado, la parte (3) del Teorema 3.19 indica que τ no es totalmente transitiva. Luego, por el Teorema 3.28, τ no es débilmente mezclante. Por lo tanto, del Teorema 4.1, 2^τ no es transitiva. $\square$

Se siguen de la Proposición 4.15 y del Diagrama 1 de la Sección 3 los siguientes hechos.

Corolario 4.16. Sea Σ_2 el espacio de sucesiones infinitas de ceros y unos. Entonces la función inducida $2^\tau : 2^{\Sigma_2} \to 2^{\Sigma_2}$ no es caótica, ni totalmente transitiva, ni débilmente mezclante ni minimal.

Concluimos este trabajo con los siguientes diagramas, donde resumimos algunos de los resultados que hemos revisado.

En el Diagrama 2 consideramos un sistema dinámico (X, f), donde X es un espacio métrico compacto. En este caso, el Corolario 4.2 indica que si la función inducida 2^f es transitiva, entonces f lo es. El Teorema 4.3 garantiza que si la función inducida $C(f)$ es transitiva, entonces f también es transitiva (ver también el Corolario 4.5). A su vez, el Teorema 3.13 muestra que la función tienda con pata alargada g es transitiva y por el Corolario 4.13 se tiene que su inducida 2^g no es transitiva; otra función con estas propiedades es la rotación irracional T_λ (ver la Proposición 3.26 y el Corolario 4.11). La Proposición 3.21 muestra que la función tienda T es transitiva, sin embargo la Proposición 4.8 indica que su inducida $C(T)$ no lo es. Por otra parte, en la Proposición 4.15 vemos que la función máquina de sumar τ, cumple que su inducida $C(\tau)$ es transitiva, mientras que 2^τ no. Finalmente, el Corolario 4.7 y la Proposición 4.8 garantizan, respectivamente, que la inducida 2^T de la función tienda es transitiva y que $C(T)$ no tiene esta propiedad.

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{f} \arrow[dl, shift left, "\times"] \arrow[dr, shift left, "\times"] & \\
\boldsymbol{2^f} \arrow[ur, shift left, "\checkmark"] \arrow[rr, shift left, "\times"] & & \boldsymbol{C(f)} \arrow[ll, shift left, "\times"] \arrow[ul, shift left, "\checkmark"]
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2: Relaciones entre funciones con respecto a la transitividad, donde el sistema dinámico corresponde a un espacio métrico compacto.

En el Diagrama 3 el espacio X es un continuo. Los argumentos que justifican las relaciones indicadas son los que utilizamos en el Diagrama 2, excepto por la Proposición 4.15 referente a la función máquina de sumar, en su lugar la implicación $C(f)$ transitiva, entonces 2^f transitiva, que sí se cumple cuando X es un continuo, está garantizada por el Corolario 4.5.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{f} \arrow[dl, shift left, "\times"] \arrow[dr, shift left, "\times"] & \\
\boldsymbol{2^f} \arrow[ur, shift left, "\checkmark"] \arrow[rr, shift left, "\times"] & & \boldsymbol{C(f)} \arrow[ul, shift left, "\checkmark"] \arrow[ll, shift left, "\checkmark"]
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3: Relaciones entre funciones con respecto a la transitividad, donde el sistema dinámico corresponde a un continuo.

Agradecimientos. Los autores agradecemos el tiempo y la disposición de la revisora o del revisor, quien nos sugirió un gran número de cambios, y que una vez realizados, nuestro escrito mejoró notablemente.

Referencias

[1] G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl., 156 (2009), 1013–1033.

[2] Ll. Alsedia, M. A. del Río y J. A. Rodríguez, *A note on the totally transitive graph maps*, Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg. 11 (2001), No. 3, 841–843.

[3] J. Banks, *Topological mapping properties defined by digraphs*, Discrete Cont. Dynam. Sys. No. 5 (1999), 83–92.

[4] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps*, Chaos Solitons Fractals 25 (3) (2005), 681–685.

[5] F. Barragán, A. Romero, S. Sánchez-Perales y Víctor M. Grijalva, *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, en Topología y sus aplicaciones 3 (J. Juan Angoa, Raúl Escobedo, Manuel Ibarra, eds.), Textos Científicos BUAP (2014), 57–84.

[6] W. Bauer y K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975), 81–92.

[7] J. Camargo, C. García y Á. Ramírez, *Transitivity of induced map $C_n(f)$*, Rev. Colomb. Mat. 48(2014)2, 235–245.

[8] E. Castañeda-Alvarado, F. Orozco-Zitli y J. Sánchez-Martínez, *Induced mappings between quotient spaces of symmetric products of continua*, Topology Appl., 163 (2014), 66–76.

[9] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Westview Press, 2003.

[10] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[11] A. Fedeli, *On chaotic set-valued discret dynamical systems*, Chaos Solitons Fractals 23 (2005), 1381–1384.

[12] L. Fernández, C. Good, M. Puljiz y Á. Ramírez, *Chain transitivity in hyperspaces*, Chaos Solitons Fractals 81 (2015), 83–90.

[13] S. Flores, *Un Acercamiento a la Dinámica Colectiva*, Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemáticas Aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2017.

[14] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory 1 (1967), 1–49.

[15] J. L. Gómez-Rueda, A. Illanes y H. Méndez, *Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products*, Chaos Solitons Fractals 45 (2012), 1180–1187.

[16] R. Gu y W. Guo, *On mixing property in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons Fractals 28 (2006), 747–754.

[17] G. Higuera y A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc. 37 (2011), 367–401.

[18] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[19] J. E. King Dávalos y H. Méndez-Lango, *Sistemas Dinámicos Discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.
[20] P. Kůrka, *Topologial and Symbolic Dynamics*, Cours Spécialisés [Specialized Courses] 11, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
[21] D. Kwietniak y P. Oprocha, *Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces*, Chaos Solitons Fractals 33 (2007), 76–86.
[22] G. Liao, L. Wang y Y. Zhang, *Transitivity, mixing and chaos for a class of set-valued mappings*, Sci. China Ser. A 49 (1) (2006), 1–8.
[23] S. Macías, *Topics on Continua*, Second Edition, Springer, 2018.
[24] H. Méndez-Lango, *Dinámica colectiva*, Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 30–1(2012), 25–41.
[25] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
[26] A. Peris, *Set-valued discrete chaos*, Chaos Solitons Fractals 26 (1) (2005), 19–23.
[27] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos Solitons Fractals 17 (1) (2003), 99–104.
[28] S. Shao, *Dyanamical systems and families.* Doctoral thesis of University of Science and Thechnology of China, 2004 [en Chino].
[29] P. Sharma y A. Nagar, *Inducing sensitivity on hyperspaces*, Topology Appl., 157 (2010), 2052–2058.
[30] Y. Wang y G. Wei, *Characterizing mixing, weak mixing and transitivity of induced hyperspace dynamical systems*, Topology Appl., 155 (2007), 56–68.
[31] Y. Wang, G. Wei y W. Campbell, *Sensitive dependence on initial conditions between dynamical systems and their induced hyperspace dynamical systems*, Topology Appl., 156 (2009), 803–811.

Correos electrónicos:
franco@mixteco.utm.mx (Franco Barragán),
sergioflr12@gmail.com (Sergio Flores),
alicia@mixteco.utm.mx (Alicia Santiago-Santos),
jtenorio@mixteco.utm.mx (Jesús F. Tenorio).

Capítulo 3

Las funciones punto medio y de puntos extremos en relación con algunas funciones especiales entre continuos

María de Jesús López Toriz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México
Patricia Pellicer Covarrubias
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México
José Luis Suárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Dado un espacio topológico X, uno puede fijarse en la familia de subconjuntos de X que son arcos o singulares, y preguntarse si al estudiar dicha familia es posible obtener información relevante sobre el espacio X. En 1978, S. B. Nadler, Jr. propuso estudiar la familia mencionada cuando X se trata de un continuo ([**17**, p. 601]) y, desde entonces, ha habido varios avances significativos en esta dirección. A tal familia se le conoce como el *hiperespacio de arcos y singulares* de X y en este capítulo la denotaremos como $\mathcal{M}(X)$. En 1999, A. Soto probó varias propiedades de $\mathcal{M}(X)$ para ciertos continuos particulares llamados dendroides [**13**]. Más adelante, A. Illanes utilizó a $\mathcal{M}(X)$ para dar una caracterización de una clase de dendritas [**3**]. En 2016, en el artículo [**6**], los autores introdujeron dos funciones naturales en $\mathcal{M}(X)$: la función punto medio y la función de puntos extremos. Ahí mismo se da una caracterización de la continuidad de ambas funciones y se estudian algunas de sus propiedades. Posteriormente, en [**7**] se dieron condiciones que garantizan que las funciones punto medio y de puntos extremos sean abiertas y/o cerradas; con ellos los autores muestran que el estudio del comportamiento de las funciones en cuestión es útil para caracterizar clases de continuos.

En el presente capítulo se retoma el espíritu de [**6**] y [**7**], pues ahí se obtuvieron algunos resultados acerca de la relación que existe entre las funciones punto medio o bien la función de puntos extremos con las funciones cerradas, abiertas, monótonas, confluentes, atriódicas y ligeras. En este trabajo se busca determinar cuándo las funciones punto medio o la función de puntos extremos pertenecen a alguna clase de funciones dada. Las clases de funciones que consideraremos son las casi monótonas, atómicas, fuertemente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles. Como consecuencia de nuestros resultados se obtienen directamente dos caracterizaciones: una para los continuos libres de arcos y una nueva caracterización para las dendritas.

Es justo señalar que parte de este trabajo es resultado de la tesis de maestría del tercer autor [**14**].

Después de los Preliminares, en la Sección 3 de este trabajo, se introducen el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(X)$ de un continuo X, las funciones punto medio y la función de puntos extremos en $\mathcal{M}(X)$. También se incluyen resultados auxiliares que serán de utilidad en el resto del capítulo. En la Sección 4 se presentan condiciones bajo las cuales las funciones punto medio y/o de puntos extremos resultan ser casi monótonas, fuertemente monótonas, fuertemente libremente descomponibles, libremente descomponibles y atómicas. También se obtienen un par de caracterizaciones de continuos en términos del comportamiento de las funciones punto medio y de puntos extremos.

2. Preliminares

Diremos que un conjunto es **no degenerado** si contiene más de un punto.

Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un **subcontinuo** de un continuo es un subespacio que también es continuo. Existen diversos tipos de continuos, entre los ejemplos más sencillos se encuentran los **arcos**, espacios topológicos homeomorfos al intervalo cerrado $I = [0, 1]$, o las **curvas cerradas simples**, espacios topológicos homeomorfos a la circunferencia unitaria S^1 en el plano. Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $x \in X$ si para cada abierto U en X que contiene al punto x, existe un subespacio conexo y abierto V en X tal que $x \in V \subseteq U$. Un espacio es **localmente conexo** si lo es en cada uno de sus puntos.

Dentro de la familia de los continuos localmente conexos existe una clase muy particular y ampliamente estudiada, las llamadas *dendritas*. Recordemos que una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Algunos ejemplos sencillos de dendritas incluyen a los arcos, los continuos homeomorfos a la letra T y los continuos homeomorfos a la letra H.

Dados un continuo X y un punto $x \in X$ diremos que x es un **punto de corte** de X si $X \setminus \{x\}$ no es conexo. Si A es un arco, esto es, si existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \to A$, diremos que $p \in A$ es un **punto extremo** de A si $A \setminus \{p\}$ es conexo.

Un espacio topológico X es **arco conexo** si dados dos puntos distintos $p, q \in X$ existe un arco contenido en X que tiene como puntos extremos p y q.

Definición 2.1. Sea X un continuo y sean $p, q \in X$. Decimos que X es **irreducible** entre p y q si no existe un subcontinuo propio C de X tal que $p, q \in C$.

Teorema 2.2. Sea X un continuo arco conexo. Si X es irreducible, entonces X es un arco.

Demostración. Sean $p, q \in X$ tales que X es irreducible entre p y q. Como X es arco conexo, existe un arco $A \subseteq X$ que contiene a p y a q. La irreducibilidad de X garantiza que $A = X$. □

Por otro lado, el estudio de las funciones especiales entre continuos ha sido una parte importante en la *Teoría de continuos*, la cual nos ha permitido analizar propiedades topológicas de éstos. En [**14**, pág. 12], Máckowiak define varias funciones especiales entre espacios topológicos, nosotros las vamos a considerar entre espacios métricos compactos, con esta suposición obtenemos el Corolario 3.17 y los incisos (5), (10) y (15) en el Teorema 4.7. Comenzamos esta sección listando los tipos de funciones que consideraremos en este trabajo:

Definición 2.3. Dada una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios métricos compactos, diremos que f es:

(1) **casi monótona** si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo;

(2) **atómica** si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es un conjunto no degenerado, se cumple que $f^{-1}(f(K)) = K$;

(3) **fuertemente libremente descomponible** si para cada par de subcontinuos propios C y D de Y tales que $Y = C \cup D$, se tiene que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos;

(4) **fuertemente monótona** si para cada subcontinuo irreducible Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo irreducible de X;

(5) **libremente descomponible** si para cada par de subcontinuos propios C y D de Y tales que $Y = C \cup D$, existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $f(A) \subseteq C$ y $f(B) \subseteq D$;

(6) **monótona** si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.

Existen diversas publicaciones respecto al estudio de las funciones especiales entre continuos, siendo los trabajos de T. Maćkowiak [**14**] los más conocidos y que dieron el primer paso en la literatura de dichas funciones. En breve, presentaremos algunas relaciones que existen entre estas funciones. Por supuesto, algunas de éstas serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

Iniciamos con una observación que se sigue de las definiciones. Para esto, note que todo singular es un subcontinuo irreducible.

Observación 2.4. Toda función fuertemente monótona entre continuos es monótona.

A continuación citamos una caracterización sobre funciones monótonas, para una prueba de esto le sugerimos ver [**1**, Teorema 3.2].

Teorema 2.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. La función f es monótona si y sólo si para cada subcontinuo B de Y se tiene que $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X.

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6. Toda función monótona entre continuos es casi monótona.

Proposición 2.7. Toda función casi monótona entre continuos es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función casi monótona entre continuos. Sean C y D subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$. Notemos que C y D son subconjuntos cerrados de Y, por lo cual $Y \setminus C$ y $Y \setminus D$ son subconjuntos abiertos en Y y no vacíos. Además, $Y \setminus D \subseteq C$ y $Y \setminus C \subseteq D$, se sigue que C y D tienen interior no vacío. Luego, por hipótesis, $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son conexos, por lo cual, f es fuertemente libremente descomponible. $\square$

Proposición 2.8. Toda función fuertemente libremente descomponible entre continuos es libremente descomponible.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Sean C y D subcontinuos propios de Y tales que $Y = C \cup D$. Por hipótesis tenemos que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son subespacios conexos de X. Además de la continuidad de f se tiene que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son subconjuntos cerrados de X. De aquí que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son subcontinuos de X.

Por otro lado, notemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ y $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$. Luego, basta considerar $A = f^{-1}(C)$ y $B = f^{-1}(D)$. Por lo tanto, f es libremente descomponible. $\square$

De la Observación 2.4 y las Proposiciones 2.6, 2.7 y 2.8 tenemos que si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre continuos, entonces

$$\begin{gathered} f \text{ fuertemente monótona} \Rightarrow f \text{ monótona} \Rightarrow f \text{ casi monótona} \Rightarrow \\ f \text{ fuertemente libremente descomponible} \Rightarrow f \text{ libremente descomponible.} \end{gathered} \tag{3.1}$$

Por supuesto que las implicaciones de regreso no se tienen, esto es, para ver que el regreso de la Observación 2.4 no es válido en general, en el Ejemplo 4.9 mostramos un contraejemplo usando nuestro objeto de estudio en este texto: *la función punto medio*. Para ver que el regreso de la Proposición 2.6 es falso vea [**2**, Ejemplo 4.2]; para ver que el regreso es falso en la Proposición 2.7 vea [**2**, Ejemplo 4.4]; para ver que el regreso de la Proposición 2.8 no se tiene vea [**2**, Ejemplo 4.5].

Concluimos esta sección con un poco de *teoría de los hiperespacios*. Los hiperespacios son espacios de subconjuntos de un espacio topológico X que comparten una propiedad en común. En particular, dado un continuo X vamos a considerar la familia de todos sus subconjuntos cerrados y no vacíos, denotada por 2^X, y dotada con la métrica de Hausdorff [**12**, Teorema 2.2]. A la familia 2^X equipada con esta métrica se le conoce como el **hiperespacio de cerrados** de X. Se sabe que el hiperespacio 2^X es un continuo, [**17**, Teorema (1.13)]. Otra familia que se considera es la de los subcontinuos de X, la cual se define como $\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ y se denota por $C(X)$. A $C(X)$, como subespacio del hiperespacio 2^X, se le conoce como el **hiperespacio de subcontinuos** de X.

Dos colecciones más que vamos a considerar son: el conjunto de todos los elementos singulares del continuo X, esto es, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ conocido como el **hiperespacio de singulares** de X, y también la colección $F_2(X) = \{\{x, y\} : x, y \in X\}$ conocida como el **segundo producto simétrico** de X, ambos como subespacios de 2^X. En la literatura podemos encontrar textos sobre los hiperespacios que hemos mencionado, por ejemplo puede ver [**12**] y [**17**] para un buen recuento de propiedades de éstos.

Por otra parte, dados un continuo X, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ y una familia finita $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X, digamos $\{U_1, \ldots, U_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, definimos el **vietórico** determinado por $\mathcal{U}$ en $\mathcal{H}$ como el conjunto:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{\mathcal{H}} = \{H \in \mathcal{H} : H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } H \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

La familia de todos los vietóricos en 2^X determinados por colecciones finitas de conjuntos abiertos en X es base para una topología sobre 2^X, [**12**, Teorema 1.2], la cual es conocida como **topología de Vietoris**. Si X es un continuo, en [**12**, Teorema 3.1] se prueba que la topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff para 2^X coinciden.

3. Las funciones punto medio y de puntos extremos en continuos

Sam B. Nadler Jr. propone en [**17**, pág. 601] estudiar el denominado *Hiperespacio de arcos*, el cual se define a continuación:

Definición 3.1. Sea X un continuo. El **hiperespacio de arcos** de X está dado por

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco}\}.$$

Más tarde, Adrián Soto [**13**] retoma la propuesta de Nadler y define el denominado *Hiperespacio de arcos y singulares*, de la siguiente manera:

Definición 3.2. Para cada continuo X, el **hiperespacio de arcos y singulares** de X se define como

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X).$$

Observación 3.3. Si X es un arco se tiene que $\mathcal{M}(X) = C(X)$. Por otro lado, en [**4**, Ejemplos 3.1 y 3.7] se prueba que $F_2(X)$ es homeomorfo a $C(X)$. En consecuencia, $\mathcal{M}(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$.

La función punto medio en continuos fue introducida por I. Serapio su tesis de maestría [**12**]. Para hablar de ella primero necesitamos introducir dos definiciones.

Dado un continuo X, recordemos que una **función de Whitney** para $C(X)$, digamos μ, es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mu(\{x\}) = 0$, para cada $x \in X$.
2. Si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Se sabe que cualquier continuo admite funciones de Whitney para su hiperespacio de subcontinuos, [**12**, Teorema 13.4].

Definición 3.4. Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $M \in \mathcal{M}(X)$ y $x \in M$. Si existen dos subcontinuos K y L de M, tales que $M = K \cup L$, $K \cap L = \{x\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$, diremos que x es **punto medio** de M respecto de μ.

Observación 3.5. Si X es un continuo y μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces para cada $x \in X$, x es el único punto medio de $\{x\}$.

Teorema 3.6. Si A es un arco y μ es una función de Whitney para $C(A)$, entonces A admite un único punto medio respecto de μ. Más aún, el punto medio de A respecto de μ no es punto extremo de A.

Demostración. Consideremos a y b los puntos extremos de A y sea $E : C(A) \to F_2(A)$ su función de puntos extremos. Por [**12**, Teorema 2.25] sabemos que E es un homeomorfismo. Luego, podemos definir una función continua $g : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \mu(E^{-1}(\{a, x\})) - \mu(E^{-1}(\{x, b\})), \quad \text{para cada } x \in A.$$

Note que,

$$g(a) = \mu(E^{-1}(\{a\})) - \mu(E^{-1}(\{a, b\})) = \mu(\{a\}) - \mu(A) = -\mu(A) < 0,$$
$$g(b) = \mu(E^{-1}(\{a, b\})) - \mu(E^{-1}(\{b\})) = \mu(A) - \mu(\{b\}) = \mu(A) > 0.$$

Como la función g tiene dominio conexo, existe un punto $p \in A$, distinto de a y de b, tal que $g(p) = 0$. Por lo tanto, si definimos $K = E^{-1}(\{a, p\})$ y $L = E^{-1}(\{p, b\})$ entonces $\mu(K) = \mu(L)$, note que K y L son subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$ y $K \cap L = \{p\}$. Se sigue que p es punto medio de A respecto de μ.

Para demostrar la unicidad, supongamos que $q \in A$ también es punto medio de A respecto de μ, es decir, existen dos subcontinuos $K', L' \subseteq A$ tales que $A = K' \cup L'$, $K' \cap L' = \{q\}$ y $\mu(K') = \mu(L')$, además supongamos que $a \in K'$ y $b \in L'$. Note que $q \in A = K \cup L$. Sin perder generalidad supongamos que $q \in K$. Dado que $E(K') = \{a, q\} \subseteq K$ y A es un arco se sigue que $K' \subseteq K$. Ahora, como $p \in A = K' \cup L'$ se tienen dos posibilidades.

(i) Si $p \in K'$ entonces K' contiene a los puntos extremos de K y por lo tanto $K = K'$.
(ii) Si $p \in L'$ entonces $E(L) = \{p, b\} \subseteq L'$, lo cual implica que $L \subseteq L'$. Así, $\mu(K) = \mu(L) \leqslant \mu(L') = \mu(K')$. Lo anterior demuestra que $K = K'$.

De (i) y (ii) se concluye que $K = K'$ y $\{a, p\} = E(K) = E(K') = \{a, q\}$. Esto prueba que $p = q$, y en consecuencia, p es el único punto medio de A respecto de μ. □

Definición 3.7. Dados un continuo X y una función de Whitney μ para el hiperespacio $C(X)$, consideramos la función

$$P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$$

que asigna a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio respecto de μ, tal y como lo aseguran la Observación 3.5 y el Teorema 3.6. A esta función la llamaremos **función punto medio** de X respecto de μ.

Definición 3.8. Sea X un continuo. Diremos que X tiene **funciones punto medio continuas** si para cada función de Whitney μ para $C(X)$, la función punto medio $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es continua.

Observación 3.9. Si X es un continuo y μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces la función punto medio P_μ es continua en cada punto de $F_1(X)$.

Teorema 3.10. Todas las funciones punto medio del arco son continuas.

Demostración. Véase [**12**, Corolario 2.76]. □

Definición 3.11. Dados un continuo X y $L \in \mathcal{M}(X)$ se define el *conjunto de puntos extremos* de L como sigue

$$E(L) = \begin{cases} \{p \in L : p \text{ es un punto extremo de } L\}, & \text{si } L \in \mathcal{A}(X); \\ L, & \text{si } L \in F_1(X). \end{cases}$$

Así, de manera natural consideramos la función

$$E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$$

que a cada elemento del hiperespacio de arcos y singulares le asigna el conjunto de sus puntos extremos. A esta función la llamaremos **función de puntos extremos** de X.

Cuando uno estudia clases de funciones, en general es relevante saber cuándo éstas son continuas. En relación con esto, se conoce el siguiente resultado para las funciones punto medio y la función de puntos extremos en continuos.

Teorema 3.12. Si X es un continuo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. todas las funciones punto medio de X son continuas;
2. X tiene alguna función punto medio continua;
3. X tiene función de puntos extremos continua.

Demostración. Véase [**6**, Teorema 4.12] o bien [**12**, Teorema 2.75]. □

Estudiar el hiperespacio de arcos y singulares ha resultado ser muy interesante. Cabe mencionar que, en general, este hiperespacio no es compacto; por ejemplo, en [**8**, Corolario 1.27] se prueba que el hiperespacio de arcos y singulares de la curva cerrada simple $\mathcal{M}(S^1)$ no es compacto. De hecho, se conoce el resultado que sigue:

Teorema 3.13. Sea X un continuo localmente conexo. Entonces $\mathcal{M}(X)$ es compacto si y sólo si X es una dendrita.

Demostración. Véase [**17**, Teorema (19.21)]. □

De este modo, debido a que el hiperespacio $\mathcal{M}(S^1)$ no es compacto, si consideramos cualquier función de Whitney μ para $\mathcal{M}(S^1)$ y tomamos la función punto medio correspondiente

$$P_\mu : \mathcal{M}(S^1) \to S^1,$$

se concluye que P_μ no pertenece a ninguna de las clases introducidas en la Definición 2.3. Sin embargo, cabe resaltar un par de resultados respecto a las curvas cerradas simples.

Teorema 3.14. Las curvas cerradas simples tienen función de puntos extremos continua.

Demostración. Véase [**6**, Teorema 3.16]. □

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 3.12 y 3.14 tenemos el siguiente:

Teorema 3.15. Todas las funciones punto medio de cualquier curva cerrada simple son continuas.

Observación 3.16. Si X es un continuo tal que el hiperespacio $\mathcal{M}(X)$ es compacto y su función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ es continua, entonces X no contiene curvas cerradas simples ([**8**, Corolario 1.27]), y en consecuencia, E es inyectiva ([**8**, Proposición 1.28]). Así, dado que E es continua, concluimos que E es un encaje.

Corolario 3.17. Sea X un continuo tal que su función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ pertenece a alguna de las clases de funciones presentadas en la Definición 2.3. Entonces, E es un encaje. En particular, E es monótona.

4. Las funciones punto medio y de puntos extremos en relación con algunas funciones especiales entre continuos

Recientemente se han obtenido algunos resultados acerca de la relación que existe entre las funciones punto medio o la función de puntos extremos con otras funciones, por ejemplo con las funciones cerradas, abiertas, monótonas, confluentes, atriódicas y ligeras; estos resultados forman parte de la tesis de I. Serapio [**12**]; posteriormente conformaron la sección 6 del artículo *A midpoint function and an end point function in continua* [**7**]. El objetivo de este capítulo está centrado en atender las siguientes preguntas:

Problema 4.1. ¿Para cuáles continuos se tiene que sus funciones punto medio son fuertemente libremente descomponibles (respectivamente: fuertemente monótonas, libremente descomponibles)?

Problema 4.2. ¿Para cuáles continuos se tiene que su función de puntos extremos es fuertemente libremente descomponible (respectivamente: fuertemente monótona, libremente descomponible)?

En la teoría de continuos existen ejemplos con propiedades importantes, uno de ellos es el *pseudoarco*, este continuo es considerado como el más simple de los continuos hereditariamente indescomponibles, es decir, todo subcontinuo del pseudoarco no se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios, (para la definición de pseudoarco puede ver [**18**, 1.23]), note que el pseudoarco es un continuo que no contiene arcos.

Más adelante, con el Teorema 4.10 caracterizamos una clase de continuos, a saber los continuos *libres de arcos* (un continuo es **libre de arcos** si ninguno de sus subcontinuos es un arco) como aquellos que satisfacen que sus funciones punto medio son fuertemente monótonas. Consecuentemente, con el Corolario 4.11 tenemos que los continuos libre de arcos tienen funciones punto medio fuertemente libremente descomponibles y así libremente descomponibles. Por último, es interesante ver el Teorema 4.7 con relación a las Preguntas 4.1 y 4.2.

Por otro lado, respecto a la Pregunta 4.2, se sabe que si X es una dendrita, entonces la función de puntos extremos E de X es fuertemente monótona y, en consecuencia, E es fuertemente libremente descomponible y libremente descomponible (Corolario 4.13). En el Corolario 4.16 mostraremos una caracterización en este sentido para la clase de los continuos arco conexos.

En los dos teoremas que siguen mencionamos algunos resultados que se conocen acerca de las funciones punto medio.

Teorema 4.3. Para todo continuo X las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. existe una función punto medio de X que es biyectiva;
2. todas las funciones punto medio de X son biyectivas;
3. existe una función punto medio de X que es un homeomorfismo;
4. todas las funciones punto medio de X son homeomorfismos;
5. X es libre de arcos.

Demostración. Véase [**12**, Teorema 3.4]. $\square$

Teorema 4.4. Para todo continuo X las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. existe una función punto medio de X que es atómica;
2. todas las funciones punto medio de X son atómicas;
3. X es libre de arcos.

Demostración. Véase [**12**, Teorema 3.7] o bien [**7**, Teorema 6.3]. $\square$

La siguiente propiedad será muy útil en la prueba del Teorema 4.7.

Lema 4.5. Todas las funciones punto medio de cualquier continuo tienen fibras arco conexas.

Demostración. Véase [**12**, Lema 4.21] o bien [**7**, Lema 6.19]. $\square$

Lema 4.6. Si X es un continuo, μ es una función de Whitney para $C(X)$ y Q es un subcontinuo arco conexo de X, entonces $P_\mu^{-1}(Q)$ es un subespacio arco conexo de $\mathcal{M}(X)$.

Demostración. Note que $P_\mu^{-1}(Q) = F_1(Q) \cup (\bigcup_{q\in Q} P_\mu^{-1}(q))$. Por el Lema 4.5 tenemos que $P_\mu^{-1}(q)$ es arco conexo y además $\{q\} \in P_\mu^{-1}(q) \cap F_1(Q)$ para cada $q \in Q$. Por otro lado, considere la función $h : Q \to F_1(Q)$ definida por $h(x) = \{x\}$, para cada $x \in Q$. No es difícil convencerse de que h es un homeomorfismo. Luego, Q es homeomorfo a $F_1(Q)$ y así $F_1(Q)$ es arco conexo. Veamos que $P_\mu^{-1}(Q)$ es arco conexo. Para esto sean $A, B \in P_\mu^{-1}(Q)$, por lo anterior es suficiente ver el caso cuando $A \in P_\mu^{-1}(p)$ y $B \in P_\mu^{-1}(q)$, para puntos distintos $p, q \in Q$. Note que $\{p\}, A \in P_\mu^{-1}(p)$, $\{p\}, \{q\} \in F_1(Q)$ y $\{q\}, B \in P_\mu^{-1}(q)$. Dado que $P_\mu^{-1}(p)$, $F_1(Q)$ y $P_\mu^{-1}(q)$ son arco conexos, se tiene que existen arcos $\mathcal{A}_1 \subset P_\mu^{-1}(p)$ con puntos extremos $\{p\}$ y A, $\mathcal{A}_2 \subset F_1(Q)$ con puntos extremos $\{p\}$ y $\{q\}$ y $\mathcal{A}_3 \subset P_\mu^{-1}(q)$ con puntos extremos $\{q\}$ y B. Luego, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ es un arco con puntos extremos A y B. $\square$

Teorema 4.7. Sean X un continuo y $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ su función de puntos extremos. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. toda función punto medio de X es monótona;
2. toda función punto medio de X es casi monótona;
3. toda función punto medio de X es fuertemente libremente descomponible;

4. toda función punto medio de X es libremente descomponible;
5. $\mathcal{M}(X)$ es compacto y toda función punto medio de X es continua;
6. existe una función punto medio de X que es monótona;
7. existe una función punto medio de X que es casi monótona;
8. existe una función punto medio de X que es fuertemente libremente descomponible;
9. existe una función punto medio de X que es libremente descomponible;
10. $\mathcal{M}(X)$ es compacto y existe una función punto medio de X que es continua;
11. E es monótona;
12. E es casi monótona;
13. E es fuertemente libremente descomponible;
14. E es libremente descomponible;
15. $\mathcal{M}(X)$ es compacto y E es continua;
16. E es atómica.
17. E es un encaje.

Demostración. De la expresión (3.1) de la página 39, se infiere que

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5),$$

que

$$(6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (10)$$

y que

$$(11) \Rightarrow (12) \Rightarrow (13) \Rightarrow (14) \Rightarrow (15).$$

La implicación $(5) \Rightarrow (6)$ se sigue del Lema 4.5.

Supongamos que se cumple (10). Por el Teorema 3.12 sabemos que E es continua. Más aún, de la Observación 3.16 obtenemos que E es inyectiva. Por lo tanto, E es monótona. Esto prueba que $(10) \Rightarrow (11)$.

Supongamos ahora (15). Usando una vez más la Observación 3.16 deducimos que E es inyectiva. En consecuencia, se tiene (16).

Ahora, supongamos (16). Se sigue del Corolario 3.17 que E es un encaje. Esto prueba la implicación $(16) \Rightarrow (17)$.

Por último, asumamos que E es un encaje. Así, E es continua. Por el Teorema 3.12 todas las funciones punto medio de X son continuas. Luego, usando el Lema 4.5 obtenemos (1). $\square$

El Teorema 4.7 establece que la propiedad de ser monótona (casi monótona, fuertemente libremente descomponible, libremente descomponible) es equivalente para las funciones punto medio y la función de puntos extremos de un continuo dado.

En contraste con esta situación, veremos que la monotonía fuerte y la atomicidad de las funciones punto medio no son equivalentes a la propiedad correspondiente de la función de puntos extremos (ver Corolarios 4.14 y 4.15).

Usando la siguiente proposición daremos una caracterización de los continuos cuyas funciones punto medio son fuertemente monótonas (Teorema 4.10).

Proposición 4.8. Ninguna función punto medio de un arco es fuertemente monótona.

Demostración. Consideremos el arco $I = [0,1]$. Sabemos que $\mathcal{M}(I)$ es igual a $C(I)$ (ver Observación 3.3). En [**4**, Ejemplo 3.1] se demuestra que $C(I)$ es homeomorfo al triángulo $T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$, de modo que $\mathcal{M}(I)$ es una 2-celda. Consideremos una función de Whitney μ para $C(I)$ y sea $P_\mu : \mathcal{M}(I) \to I$ la función punto medio correspondiente. Note que $P_\mu^{-1}(I)$ coincide con $\mathcal{M}(I)$, así $P_\mu^{-1}(I)$ es una 2-celda, se sigue que $P_\mu^{-1}(I)$ es arco conexo y no es un arco. Luego, por el Teorema 2.2 se tiene que $P_\mu^{-1}(I)$ no es irreducible. Por lo tanto, P_μ no es una función fuertemente monótona. □

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Observación 2.4 no se cumple.

Ejemplo 4.9. Cada función punto medio del arco $[0,1]$, $P_\mu : \mathcal{M}([0,1]) \to [0,1]$ es monótona, pero no es fuertemente monótona.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 3.10, el Lema 4.5 y la Proposición 4.8. □

Teorema 4.10. Para todo continuo X las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. existe una función punto medio de X fuertemente monótona;
2. toda función punto medio de X es fuertemente monótona;
3. X es libre de arcos.

Demostración. La prueba de la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es inmediata.

Como todo homeomorfismo es una función fuertemente monótona, tenemos que la implicación (3) $\Rightarrow$ (2) se sigue del Teorema 4.3.

Finalmente, probaremos que (1) $\Rightarrow$ (3) por contrarrecíproca. Supongamos que X contiene un arco A. Sea μ cualquier función de Whitney para $C(X)$ y consideremos $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ la función punto medio respectiva. De la prueba de la Proposición 4.8 tenemos que $P_\mu^{-1}(A)$ contiene una 2-celda; además por el Lema 4.6, $P_\mu^{-1}(A)$ es un subespacio arco conexo de $\mathcal{M}(X)$. Luego, por el Teorema 2.2 se tiene que $P_\mu^{-1}(A)$ no es irreducible. Se sigue que P_μ no es fuertemente monótona. □

Es inmediato del Teorema 4.10, la Observación 2.4 y las Proposiciones 2.6, 2.7 y 2.8 concluir lo siguiente.

Corolario 4.11. Si X es un continuo libre de arcos, entonces toda función punto medio de X es fuertemente libremente descomponible (y, en consecuencia, libremente descomponible).

A continuación citamos una caracterización de las dendritas. Cabe mencionar que en [**8**] se presentan dos caracterizaciones más de las dendritas, en términos de su función de puntos extremos.

Teorema 4.12. Para cualquier continuo X las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. X es una dendrita;
2. la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ es un homeomorfismo;
3. existe un homeomorfismo $S : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ de manera que $S(A) \subseteq A$, para cada $A \in \mathcal{M}(X)$.

Demostración. Véase [**8**, Teorema 1.34]. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.12 es el resultado que sigue.

Corolario 4.13. Si X es una dendrita, entonces la función de puntos extremos E de X es fuertemente monótona (en consecuencia, E es una función fuertemente libremente descomponible y así, libremente descomponible).

Corolario 4.14. Considérense las siguientes condiciones para un continuo X:

1. existe una función punto medio de X que es fuertemente monótona;
2. todas las funciones punto medio de X son fuertemente monótonas;
3. la función de puntos extremos de X es fuertemente monótona.

Las condiciones (1) y (2) siempre son equivalentes. Más aún, si X es arco conexo, entonces (2) $\Rightarrow$ (3) (pero en general (3) $\not\Rightarrow$ (2)).

Demostración. Por el Teorema 4.10 sabemos que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Ahora, si X es arco conexo y suponemos (2), usando la Observación 2.4 y el Teorema 4.7 inferimos que la función de puntos extremos E es un encaje. Dado que X es arco conexo obtenemos que E es suprayectiva y, por lo tanto, es un homeomorfismo. Esto demuestra (3).

Por otro lado, si X es una dendrita, por el Teorema 4.12 se cumple (3). Note que, dado que X es una dendrita por el Teorema de arco conexidad [**18**, 8.23], X es un continuo arco conexo. Ahora, por el Teorema 4.10 no se cumple (2). $\square$

Corolario 4.15. Considérense las siguientes condiciones para un continuo X:

1. existe una función punto medio de X que es atómica;
2. todas las funciones punto medio de X son atómicas;
3. la función de puntos extremos de X es atómica.

Las condiciones (1) y (2) siempre son equivalentes. Más aún, si X es arco conexo, entonces (2) $\Rightarrow$ (3) (pero en general (3) $\not\Rightarrow$ (2)).

Demostración. Del Teorema 4.4 se tiene que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Supongamos ahora (2), en particular las funciones punto medio de X son continuas y $\mathcal{M}(X)$ es compacto. Así, del Teorema 4.7 obtenemos que la función de puntos extremos E es un encaje. La arco conexidad de X implica que E es suprayectiva y, en consecuencia, E es un homeomorfismo. Esto muestra (3).

Por último, si X es una dendrita, por el Teorema 4.12 se tiene (3). Note que, dado que X es una dendrita por el Teorema de arco conexidad [**18**, 8.23], X es un continuo arco conexo. Por otra parte, por el Teorema 4.4 no se tiene (2). $\square$

Concluimos esta sección con una nueva caracterización de las dendritas, en términos de las funciones que hemos considerado en este trabajo.

Corolario 4.16. Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo arco conexo X:

1. la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ pertenece a alguna de las clases de funciones presentadas en la Definición 2.3;
2. X es una dendrita.

Demostración. La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) se sigue del Teorema 4.12.

Ahora supongamos que se cumple (1). Puesto que X es arco conexo, la función E es suprayectiva. Así, el Corolario 3.17 implica que E es un homeomorfismo. Por lo tanto, X es una dendrita (Teorema 4.12). $\square$

Agradecimientos: Más allá de la formalidad de agradecer al árbitro (a), con toda sinceridad, los autores le agradecen al árbitro(a) sus comentarios y sugerencias a este trabajo.

Referencias

[1] Barragán F., López M. de J. *Funciones especiales entre continuos.* Capítulo 5 en Topología y sistemas dinámicos III. Editores: Juan Angoa y otros. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2010.

[2] Barragán F., Rojas A., Macías S. *Funciones especiales entre continuos II.* Capítulo 1 en Topología y sus aplicaciones 5. Editores: J. Angoa, R Escobedo, M. Ibarra. Dirección de Fomento Editorial, BUAP, Textos Científicos, 2017.

[3] Illanes A. *Hyperspaces of arcs and two-point sets in dendroids.* Topology and its Applications, 117 (3) (2002), 307–317.

[4] Illanes A. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[5] Illanes A., Nadler Jr. S. B. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[6] López M. de J., Pellicer Covarrubias P., Serapio Ramos I. *Introducción a la función punto medio en continuos.* Rev. Integr. Temas Mat. 34, No. 1, (2016), 109–123.

[7] López M. de J., Pellicer Covarrubias P., Serapio Iván. *A midpoint function and an end point function in continua.* Topology and its Applications, 235 (2018), 167–184.

[8] López M. de J., Pellicer Covarrubias P., Serapio Iván. *Caracterización de la conexidad local en continuos, en términos de la función de puntos extremos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 7. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2019.

[9] Maćkowiak T. *Continuous mappings on continua.* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1–95.

[10] Nadler, Jr. S. B. *Hyperspaces of sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978. Reimpreso en: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[11] Nadler, Jr. S. B. *Continuum theory: an introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[12] Serapio Ramos I. *Funciones punto medio en continuos.* Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, Junio 2016.

[13] Soto A. *El hiperespacio de arcos de un continuo.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1999. (http://132.248.9.195/pd2000/283734/Index.html).

[14] Suárez López J. L. *Propiedades e interrelaciones de las funciones punto medio y de puntos extremos en continuos.* Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, Diciembre 2018.

Correos electrónicos:
mjlopez@fcfm.buap.mx (María de Jesús López Toriz),
paty@ciencias.unam.mx (Patricia Pellicer Covarrubias),
louis.suarez.lopez@gmail.com (José Luis Suárez López).

Capítulo 4

Propiedad de semi-Kelley y clases de funciones en continuos de Hausdorff

Mauricio Esteban Chacón Tirado, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz
y Fernando Macías Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.

La *propiedad de Kelley* fue introducida por J. L. Kelley como *Propiedad 3.2*, para continuos, véase [**13**, pág. 26]; esta noción fue usada para estudiar la contractibilidad de los hiperespacios de continuos, en relación con estos conceptos se sugiere al lector revisar [**17**, Capítulo XVI] o [**12**, págs. 167–172]. En 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik definieron una propiedad más débil que la propiedad de Kelley, a saber, la *propiedad de semi-Kelley*, véase [**8**, Definición 3.16]; para más sobre esta propiedad véase [**1**], [**2**], [**7**], [**11**].

Un *continuo de Hausdorff* es un espacio topológico de Hausdorff, no vacío, compacto y conexo.

En 1999, W. J. Charatonik [**9**, Definición 2.1] y W. Makuchowski [**15**, pág. 124] de manera independiente extendieron el concepto de propiedad de Kelley, a la clase de los continuos de Hausdorff; W. J. Charatonik dio un ejemplo de un continuo de Hausdorff homogéneo que no tiene la propiedad de Kelley, y W. Makuchowski demostró que varias definiciones relacionadas con la conexidad local, son equivalentes en el hiperespacio de subcontinuos de un continuo de Hausdorff que tiene la propiedad de Kelley.

Recientemente M. E. Chacón y M. de J. López extendieron la propiedad de semi-Kelley, a la clase de los continuos de Hausdorff [**6**, Definición 3.15], y obtuvieron que varios resultados encontrados en [**8**], son válidos en la clase de los continuos de Hausdorff. El estudio de ciertos tipos de funciones entre continuos es una herramienta para obtener información de las propiedades de continuos [**14**]. En relación al estudio de los continuos de Hausdorff con la propiedad de semi-Kelley, véase [**4**], [**5**] y [**6**].

En este trabajo se exponen resultados sobre algunas clases de funciones y las propiedades arriba mencionadas, precisamente, demostramos los resultados siguientes en la clase de los continuos de Hausdorff: tener la propiedad de semi-Kelley se preserva bajo retracciones (Teorema 3.4), tener la propiedad de Kelley se preserva bajo funciones confluentes (Teorema 3.6), de hecho con este resultado se responde en lo positivo a la cuestión [**5**, Pregunta 4.5] y, por último, si un continuo de Hausdorff tiene la propiedad de Kelley, entonces su imagen bajo una función semi-confluente tiene la propiedad de semi-Kelley (Teorema 3.7). Cabe mencionar que estos resultados generalizan los ya demostrados por J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, véase [**8**, Sección 5].

2. Preliminares

Para dos conjuntos X, Y y una función $f : X \to Y$, dado $A \subset X$, la imagen directa de A bajo f se denota por $f(A)$, y dado $B \subset Y$, la imagen inversa de B bajo f se denota por $f^{-1}(B)$.

Dado un continuo de Hausdorff X, se considera la colección de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X, denotada y definida por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado de } X\},$$

esta colección se dota de la topología de Vietoris, que a continuación se describe: para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada colección finita $U_1, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos de X, se define

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

La colección de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es una base para la *topología de Vietoris para* 2^X, véase [**16**, Definición 1.7, pág. 153]. Al conjunto 2^X con la topología de Vietoris se le llama *hiperespacio de cerrados* de X. También se considera la colección de todos los subcontinuos de Hausdorff de X, denotada y definida por

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

considerado como subespacio de 2^X, llamado el *hiperespacio de subcontinuos de* X. Es conocido que si X es un continuo de Hausdorff, entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son también continuos de Hausdorff [**16**]. De este modo, dado un continuo de Hausdorff X, se tiene que

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es un subconjunto no vacío y cerrado de } C(X)\}$$

y

$$C(C(X)) = \{\mathcal{A} \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo}\}$$

son también continuos de Hausdorff.

Dados X un continuo de Hausdorff y $A, B \in C(X)$ con $A \subset B$, consideremos la colección

$$C(A, B) = \{K \in C(B) : A \subset K\}.$$

En [**4**, Observación 2.1] se prueba que $C(A, B)$ es un subconjunto no vacío cerrado y conexo de $C(X)$, esto es $C(A, B) \in C(C(X))$.

Por otro lado, si $\mathcal{A} \subset 2^X$, se denota por $\bigcup \mathcal{A}$ la unión de sus elementos, es decir, $\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X :$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A\}$.

Una función continua entre continuos de Hausdorff $f : X \to Y$, induce una función entre los hiperespacios de subcontinuos de X y Y, denotada por $C(f) : C(X) \to C(Y)$ y definida como $C(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$. En [**16**, 5.10.1] se prueba que $C(f)$ es una función continua.

Ahora mencionamos la noción de conjunto dirigido y el concepto de red en espacios topológicos.

Definición 2.1. Se dice que un par $(D, \leqslant)$ es un *conjunto dirigido* si D es un conjunto no vacío, $\leqslant$ es una relación de orden en D, y para cualesquiera $a, b \in D$ existe $c \in D$ con $a \leqslant c$ y $b \leqslant c$. Cuando el contexto lo permita, se dice simplemente que D es un conjunto dirigido, sin mencionar explícitamente la relación de orden.

Definición 2.2. Una *red* en un espacio topológico X es una función $R : D \to X$, donde D es un conjunto dirigido, la red R también se denota por $\{R(d)\}_{d \in D}$. En todo este trabajo, al considerar una red $R : D \to X$, se sobreentenderá que D es un conjunto dirigido.

Recordemos la siguiente definición usual de convergencia de una red en un espacio topológico.

Definición 2.3. Sean X un espacio topológico, $R : D \to X$ una red en X y un punto $a \in X$. Se dice que la red R *converge al punto* a si para toda vecindad V de a, existe $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $n \leqslant m$, entonces $R(m) \in V$.

Definición 2.4. Dados un continuo de Hausdorff X y una red $R : D \to 2^X$, se define el *límite superior de la red* R por $\limsup R = \{x \in X :$ para toda vecindad U de x en X y todo $n \in D$, existe $m \in D$ tal que $n \leqslant m$ y $U \cap R(m) \neq \emptyset\}$.

Dado un continuo de Hausdorff X, en [**5**, Teorema 3.10 (3)] se prueba que el límite superior de una red es un subconjunto cerrado de X y no vacío. Esto es:

Lema 2.5. Sean X un continuo de Hausdorff y $\{R(d)\}_{d\in D}$ una red en 2^X, se tiene que

$$\limsup\{R(d)\}_{d\in D}$$

es un elemento de 2^X.

Por otro lado, otra propiedad más que usaremos de límites superiores de redes es la siguiente, cuya prueba la puede consultar en [**5**, Teorema 3.15].

Lema 2.6. Sean X y Y continuos de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y $R : D \to 2^X$ una red. Entonces $f(\limsup\{R(d)\}_{d\in D}) = \limsup\{f(R(d))\}_{d\in D}$.

En 1942, J. L. Kelley introduce el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos, originalmente era conocida como *propiedad 3.2*, [**13**, pág. 26], que a continuación enunciamos:

Definición 2.7. Sean X un continuo con métrica d, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $p, q \in X$, si $d(p,q) < \delta$, entonces para todo $K \in C(\{p\}, X)$, existe $L \in C(\{q\}, X)$ tal que $H(K,L) < \varepsilon$, donde H denota la métrica de Hausdorff en $C(X)$.

En 1999, W. J. Charatonik [**9**, Definición 2.1] y W. Makuchowski [**15**, pág. 124] extienden independientemente el concepto de *propiedad de Kelley* para la clase de continuos de Hausdorff, como sigue:

Definición 2.8. Sean X un continuo de Hausdorff y un punto $p \in X$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley en* p, si para cada $K \in C(\{p\}, X)$ y para cada conjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ con $K \in \mathcal{U}$, existe un conjunto abierto U de X con $p \in U$ tal que si $q \in U$, entonces existe $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$. Diremos que X tiene la *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

Naturalmente, las Definiciones 2.7 y 2.8 son equivalentes en la clase de los continuos Hausdoff, véase [**5**, Teorema 4.3].

Vamos a necesitar la siguiente equivalencia a la propiedad de Kelley, en la clase de los continuos de Hausdorff.

Teorema 2.9. Si X es un continuo de Hausdorff, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) X tiene la propiedad de Kelley.
(2) Para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$, se tiene que $\bigcup \mathcal{U}$ es un conjunto abierto de X.
(3) La función $f : X \to 2^{C(X)}$, definida por $f(p) = C(\{p\}, X)$, para cada $p \in X$, es continua.

Cabe mencionar que la equivalencia de (1) y (3) fue probada por R. Wardle para continuos, véase [**19**, (2.2) Teorema]; por otro lado, W. J. Charatonik menciona, sin dar prueba alguna, que (1) y (3) son equivalentes para continuos de Hausdorff, véase [**9**, Proposición 2.3]. W. Makuchowski prueba la equivalencia de (1) y (2), véase [**15**, Teorema 11]. Una prueba completa la puede encontrar en [**5**, Teorema 4.4].

En 1998, J. J. Charatonik y J. W. Charatonik definieron el concepto de *continuo límite maximal* para continuos [**8**, Definición 3.2] como sigue:

Definición 2.10. Sean K un subcontinuo de un continuo X. Un subcontinuo $M \subset K$ se llama *continuo límite maximal de* K si existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a M tal que, para cada sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X, con $M_n \subset M'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $M' \in C(K)$, entonces $M' = M$.

Dados un continuo de Hausdorff X y $\mathcal{U} \subset C(X)$, consideramos la colección

$$F(\mathcal{U}) = \{B \in C(X) : C(B, X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}.$$

Recientemente, M. Chacón-Tirado y M. de J. López en [**4**, Definición 4.5] extienden el concepto de *continuo límite maximal*, a la clase de los continuos de Hausdorff de la siguiente manera:

Definición 2.11. Sean M, K subcontinuos de un continuo de Hausdorff X, con $M \subset K$. Llamaremos a M *continuo límite maximal de Hausdorff de* K *en* X si, para cada subcontinuo $L \subset X$ con $M \subsetneq L \subset K$ existe $\mathcal{U} \subset C(X)$ abierto tal que $L \in \mathcal{U}$ y el conjunto $F(\mathcal{U})$ no es vecindad de M.

Por supuesto, las Definiciones 2.10 y 2.11 coinciden en la clase de los continuos, véase [**4**, Teorema 4.8].

Otro concepto interesante es la *propiedad de semi-Kelley*, éste fue introducido por J. J. Charatonik y W. J. Charatonik en [**8**, Definición 3.16] para continuos, usando la noción de continuo límite maximal. También recientemente, M. Chacón-Tirado y M. de J. López en [**6**, Definición 3.15] extienden el concepto de *continuo de Hausdorff con la propiedad de semi-Kelley*, de manera similar, usando la noción de continuo límite maximal de Hausdorff.

Definición 2.12. Un continuo de Hausdorff X tiene la *propiedad de semi-Kelley (o bien, X es un continuo de Hausdorff semi-Kelley)* si para cada subcontinuo K de X, se tiene que si M_1 y M_2 son continuos límites maximal de Hausdorff de K, entonces $M_1 \subset M_2$ o bien $M_2 \subset M_1$.

Recordemos que un continuo tiene la *propiedad de semi-Kelley* si cambiamos en la Definición 2.12 continuo límite maximal de Hausdorff por *continuo límite maximal*.

En 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik también definieron para continuos el concepto de *continuo límite maximal fuerte* [**8**, Definición 3.3] que a continuación citamos:

Definición 2.13. Sean K un subcontinuo de un continuo X. Un subcontinuo $M \subset K$ se llama *continuo límite maximal fuerte de* K si existe una sucesión de subcontinuos de X, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge a M en $C(X)$ tal que, para cada subsucesión $\{M_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para cada sucesión $\{M'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $M_{n_k} \subset M'_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que converge a $M' \in C(K)$, se tiene que $M' = M$.

Recientemente, M. Chacón-Tirado y M. de J. López en [**6**, Definición 3.7] extienden el concepto de *continuo límite maximal fuerte de Hausdorff*, para continuos de Hausdorff, de la siguiente manera:

Definición 2.14. Sean M, K subcontinuos de un continuo de Hausdorff X, con $M \subset K$. Llamaremos a M *continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de* K *en* X, si existe una red $\{M_d\}_{d\in D}$ en $C(X)$ que converge a M tal que

$$C(K) \cap \operatorname{lím\,sup}\{C(M_d, X)\}_{d\in D} = \{M\}.$$

Necesitamos otra equivalencia más a la propiedad de Kelley, en la clase de los continuos de Hausdorff. Este resultado lo usamos para probar que la imagen confluente de un continuo de Hausdorff con la propiedad de Kelley, también tiene la propiedad de Kelley.

Teorema 2.15. [**6**, Teorema 3.12] Si X es un continuo de Hausdorff, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. X tiene la propiedad de Kelley.

2. Para cada subcontinuo K de X, se tiene que K es el único continuo límite maximal de Hausdorff de K.
3. Para cada subcontinuo K de X, se tiene que K es el único continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de K en X.

Concluimos esta sección citando una equivalencia a la propiedad de semi-Kelley en la clase de los continuos de Hausdorff. Con este resultado vamos a probar que la imagen semi-confluente de un continuo de Hausdorff con la propiedad de Kelley, tiene la propiedad de semi-Kelley.

Teorema 2.16. [**6**, Teorema 3.18] Si X es un continuo de Hausdorff, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. X tiene la propiedad de semi-Kelley.
2. Para cada subcontinuo K de X y cada M_1 y M_2 continuos límite maximal fuerte de Hausdorff de K en X, se tiene que $M_1 \subset M_2$ o bien $M_2 \subset M_1$.

3. Imágenes de continuos de Hausdorff Kelley y semi-Kelley

En esta seccción estudiaremos la relación entre algunas clases de funciones y los continuos de Hausdorff con la propiedad de Kelley o la propiedad de semi-Kelley.

Para dos continuos de Hausdorff X y Y y una función continua $f : X \to Y$ y suprayectiva, se dice que:

(1) f es una *retracción*, si $Y \subset X$ y para cada $y \in Y$, se tiene que $f(y) = y$; en este caso diremos que Y es un *retracto* de X;

(2) f es *abierta*, si para cada subconjunto abierto de X, se tiene que su imagen bajo f es un subconjunto abierto de Y;

(3) f es *monótona*, si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es un subconjunto conexo de X;

(4) f es *confluente*, si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$;

(5) f es *débilmente confluente*, si para cada subcontinuo Q de Y existe una componente K de $f^{-1}(Q)$, que satisface $f(K) = Q$;

(6) f es *semi-confluente*, si para cada subcontinuo Q de Y y para cada dos componentes K_1 y K_2 de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K_1) \subset f(K_2)$ o bien $f(K_2) \subset f(K_1)$.

De las definiciones se obtienen los siguientes lemas.

Lema 3.1. Sean X y Y continuos de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función confluente, entonces f es débilmente confluente.

Lema 3.2. Sean X y Y continuos de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función semi-confluente, entonces f es débilmente confluente.

Lema 3.3. Sean X y Y continuos de Hausdorff tales que Y es un retracto de X y K un subcontinuo de Y. Si M es un continuo límite maximal de Hausdorff de K en Y, entonces M es un continuo límite maximal de Hausdorff de K en X.

Demostración. Sea $r\colon X \to Y$ una retracción de X en Y. Consideremos L un subcontinuo de X tal que $M \subsetneq L \subset K$. Como M es continuo límite maximal de Hausdorff de K en Y, existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $C(Y)$ tal que $L \in \mathcal{U}$ y la colección $\{B \in C(Y) : C(B, Y) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ no es vecindad de M en $C(Y)$. Ahora, consideremos la función inducida $C(r) : C(X) \to C(Y)$, la cual es continua, y sea $\mathcal{V} = C(r)^{-1}(\mathcal{U})$. Se tiene que $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto de $C(X)$ tal que $L \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Además, note que $\{B \in C(X) : C(B, X) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset\} \cap C(Y) = \{B \in C(Y) : C(B, Y) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$; de aquí se obtiene que la colección $\{B \in C(X) : C(B, X) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset\}$ no es vecindad de M en $C(X)$. Esto es, M es un continuo límite maximal de Hausdorff de K en X. $\square$

Como consecuencia del Lema 3.3 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. Sean X y Y continuos de Hausdorff. Si X tiene la propiedad de semi-Kelley y Y es un retracto de X, entonces Y tiene la propiedad de semi-Kelley.

Con el resultado que sigue probaremos que las funciones confluentes preservan la propiedad de Kelley, en la clase de los continuos de Hausdorff.

Lema 3.5. Sean X y Y continuos de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función débilmente confluente. Si X tiene la propiedad de Kelley y M es un continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de un subcontinuo K de Y, entonces existe una componente E de $f^{-1}(K)$ tal que $f(E) = M$.

Demostración. Como M es un continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de un subconjunto K de Y, podemos considerar una red $\{M_d\}_{d\in D}$ en $C(Y)$ que converge a M tal que $C(K) \cap \operatorname{lím\,sup}\{C(M_d, Y)\}_{d\in D} = \{M\}$. Como f es débilmente confluente, para cada $d \in D$, podemos considerar B_d una componente de $f^{-1}(M_d)$ tal que $f(B_d) = M_d$. Note que $B_d \in C(X)$, así $\{B_d\} \subset C(X)$, para cada $d \in D$, se sigue que $\operatorname{lím\,sup}\{\{B_d\}\}_{d\in D} \subset C(X)$. Por el Lema 2.5 podemos considerar un elemento $B \in C(X)$ tal que $B \in \operatorname{lím\,sup}\{\{B_d\}\}_{d\in D}$.

Afirmación 1. Se tiene que $f(B) = M$.

En efecto, consideremos la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$, note que $C(f)$ es continua y $C(f)(\{B_d\}) = \{M_d\}$, para cada $d \in D$. Por el Lema 2.6, se tiene que

$$\begin{aligned} C(f)(\operatorname{lím\,sup}\{\{B_d\}\}_{d\in D}) &= \operatorname{lím\,sup}\{C(f)(\{B_d\})\}_{d\in D} \\ &= \operatorname{lím\,sup}\{\{M_d\}\}_{d\in D} = \{M\}. \end{aligned}$$

Luego, $C(f)(B) \in \{M\}$. Esto es $f(B) \in \{M\}$, esto prueba la Afirmación 1.

Ahora, consideremos la componente E de $f^{-1}(K)$ tal que $B \subset E$. Se sigue que $M = f(B) \subset f(E) \subset K$.

Afirmación 2. Se tiene que $f(E) \subset M$.

En efecto, suponga que $M \subsetneq f(E) \subset K$, como M es un continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de K, entonces $f(E) \notin \operatorname{lím\,sup}\{C(M_d, Y)\}_{d\in D}$. Luego, existen un conjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(Y)$ y un elemento $d_0 \in D$ tales que $f(E) \in \mathcal{U}$, y para cada $m \in D$ con $m \geqslant d_0$, se tiene que $\mathcal{U} \cap C(M_m, Y) = \emptyset$. Sin perder generalidad, podemos elegir $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap C(Y)$, donde $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de Y, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $M \subset f(E) \in \mathcal{U}$, renumerando los conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$, podemos suponer que $\{i \in \{1, \ldots, n\} : U_i \cap M \neq \emptyset\} = \{1, \ldots, r\}$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Dado que $\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap C(Y)$ es un conjunto abierto de $C(X)$ que contiene a M, podemos elegir $d_1 \in D$ tal que, para todo $m \in D$ con $d_1 \leqslant m$, se tiene que $M_m \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap C(Y)$.

Note que $C(f)^{-1}(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto de $C(X)$ y $E \in C(f)^{-1}(\mathcal{U})$. Pongamos $U = \bigcup C(f)^{-1}(\mathcal{U})$. Como X tiene la propiedad de Kelley, se sigue del Teorema 2.9 que U es un conjunto abierto de X. Note que $B \subset E \subset U$, así $B \in \langle U\rangle$. Luego, dado que $d_0 \in D$ y $\langle U\rangle \cap C(X)$ es un conjunto abierto de $C(X)$ que contiene a B y, además $B \in \operatorname{lím\,sup}\{\{B_d\}\}_{d\in D}$, existe $d_2 \in D$ con $d_0 \leqslant d_2$, $d_1 \leqslant d_2$ y $(\langle U\rangle \cap C(X)) \cap \{B_{d_2}\} \neq \emptyset$. Esto implica que $B_{d_2} \in \langle U\rangle \cap C(X)$, así $B_{d_2} \subset U$. Para $d_2 \in D$, consideremos un punto $b_{d_2} \in B_{d_2} \subset U$, entonces existe $V_{d_2} \in C(f)^{-1}(\mathcal{U})$ tal que $b_{d_2} \in V_{d_2}$, y además $C(f)(V_{d_2}) \in \mathcal{U}$. Se tiene que $f(V_{d_2} \cup B_{d_2}) = f(V_{d_2}) \cup f(B_{d_2}) = f(V_{d_2}) \cup M_{d_2} \in C(M_{d_2}, Y)$, de donde $f(V_{d_2}) \cup M_{d_2} \notin \mathcal{U}$. Como $f(V_{d_2}) \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap C(Y)$ y $M_{d_2} \in \langle U_1, \ldots, U_r\rangle \cap C(Y)$, es claro que $f(V_{d_2}) \cup M_{d_2} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap C(Y)$, lo cual es una contradicción. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

De las Afirmaciones 1 y 2, se tiene que E es una componente de $f^{-1}(K)$ tal que $f(E) = M$. El lema queda probado. $\square$

En [**5**, Pregunta 4.5] se cuestiona que si la propiedad de Kelley se preserva por funciones confluentes entre continuos de Hausdorff, así con nuestro Teorema 3.6, se obtiene una respuesta positiva a dicha interrogante.

Teorema 3.6. Sean X y Y continuos de Hausdorff. Si X tiene la propiedad de Kelley y $f : X \to Y$ es una función confluente, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.

Demostración. Sean K un subcontinuo de Y y M un continuo límite maximal fuerte de Hausdorff de K. Dado que f es confluente, por el Lema 3.1, tenemos que f es débilmente confluente. Ahora, se sigue del Lema 3.5 que existe una componente E de $f^{-1}(K)$ tal que $f(E) = M$. Por otro lado, como f es confluente, tenemos que $f(E) = K$. Esto implica que $K = M$. Finalmente, aplicando el Teorema 2.15 obtenemos que Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Teorema 3.7. Sean X y Y continuos de Hausdorff. Si X tiene la propiedad de Kelley y $f : X \to Y$ es una función semi-confluente, entonces Y tiene la propiedad de semi-Kelley.

Demostración. Para ver que Y tiene la propiedad de semi-Kelley usaremos el Teorema 2.16. Para esto sean K un subcontinuo de Y y M_1 y M_2 dos continuos límites maximal fuerte de Hausdorff de K en Y. Por el Lema 3.2, se sigue que f es débilmente confluente. Por el Lema 3.5, existen E_1 y E_2 componentes de $f^{-1}(K)$ tales que $f(E_1) = M_1$ y $f(E_2) = M_2$. Como f es semi-confluente, entonces $M_1 \subset M_2$ o $M_2 \subset M_1$, por lo tanto, Y tiene la propiedad de semi-Kelley. $\square$

Concluimos este capítulo mencionando que en 2019, Leobardo Fernández e Isabel Puga probaron que la propiedad de semi-Kelley se preserva bajo funciones abiertas y también bajo funciones confluentes, entre continuos, [**10**, Teoremas 7 y 8]. En relación con estos resultados, citamos la pregunta planteada en [**6**, Pregunta 5.6] que dice lo siguiente:

PROBLEMA 3.8. Sean X y Y continuos de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función abierta o monótona. Si X es un continuo de Hausdorff con la propiedad de semi-Kelley, ¿será que Y tiene la propiedad de semi-Kelley?

Agradecimientos: Los autores agradecen la importante labor de los árbitros, quienes mejoraron por mucho la presentación de este trabajo.

Referencias

[1] I. D. Calderón-Camacho, E. Castañeda-Alvarado, C. Islas-Moreno, D. Maya-Escudero and F. J. Ruiz-Montañez. *Being semi-Kelley does not imply semi-smoothness*, Questions Answers Gen. Topology 32 (2014), 73–77.

[2] E. Castañeda-Alvarado and I. Vidal-Escobar. *Property of being semi-Kelley for the cartesian products and hyperspaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 58 (2017), 359–369.

[3] M. Chacón-Tirado, D. Embarcadero-Ruiz, J. A. Naranjo-Murillo and I. Vidal-Escobar. *Semi-Kelley compactifications of (0, 1]*, manuscrito.

[4] M. Chacón-Tirado, M. de J. López. *On the property of Kelley for Hausdorff continua*, Rev. Integr. temas mat. 38, No. 1, (2020), 55–66.

[5] M. Chacón-Tirado, P. Domínguez Soto, M. de J. López. *Sobre redes en hiperespacios de continuos Hausdorff y la propiedad de Kelley*, Capítulo 4 en Matemáticas y sus aplicaciones 13. Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco (Editores). Dirección General de Publicaciones, BUAP, 2020.

[6] M. Chacón-Tirado, M. de J. López. *The property of semi-Kelley for Hausdorff continua*, Topology Proc. 58 (2021), 241–263.

[7] J. J. Charatonik. *Semi-Kelley continua and smoothness*, Questions Answers Gen. Topology 21 (2003), 103–108.

[8] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik. *A weaker form of the property of Kelley*, Topology Proc. 23 (1998), 69–99.

[9] W. J. Charatonik. *A homogeneous continuum without the property of Kelley*, Topology Appl., 96 (1999), 209–216.

[10] L. Fernández, I. Puga. *On semi-Kelley continua*, Houston J. Math. 45 (2019), No. 1, 307–315.

[11] A. Illanes, *Semi-Kelley continua*, Colloq. Math. 163 (2021), No. 1, 53–69.

[12] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
[13] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22–36.
[14] T. Maćkowiak. *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1–95.
[15] W. Makuchowski. *On local connectedness in hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), No. 2, 119–126.
[16] E. Michael. *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.
[17] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.
[18] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
[19] R. Wardle. *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977), No. 2, 291–299.

Correos electrónicos:
maeschacon@fcfm.buap.mx (M. Chacón-Tirado),
dherrera@fcfm.buap.mx (D. Herrera Carrasco),
mjlopez@fcfm.buap.mx (M. de J. López),
fmacias@fcfm.buap.mx (F. Macías Romero).

Capítulo 5

Sistemas dinámicos discretos no-autónomos

Gerardo Acosta
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México
Juan Manuel Martínez Dueñas
Universidad Autónoma de Fresnillo, Fresnillo, Zacatecas, México
Manuel Sanchis
Institut de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I, Spain

1. Introducción

Este trabajo está basado en [**42**], el cual fue presentado con el mismo título como la Tesina del segundo autor, para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Matemáticas) en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. También contiene material que aparece en [**1**]. Nuestro estudio se enmarca en el área de las Matemáticas llamada Sistemas Dinámicos Discretos. Vamos a definir lo que es un sistema dinámico discreto autónomo y lo que es un sistema dinámico discreto no-autńomo. Para simplificar la escritura, nos referimos a ellos como "sistema autónomo" y "sistema no-autónomo", respectivamente. El propósito principal es exponer una introducción general a los sistemas no-autónomos, presentando tanto propiedades básicas, como otras que requieren de más desarrollo, e indicando tanto similitudes como diferencias que existen entre un sistema autónomo y uno no-autńomo. Los ingredientes que describen el caos en el sentido de Devaney, es decir la transitividad, la densidad de puntos periódicos y la dependencia sensitiva a condiciones iniciales, son conceptos fundamentales en este trabajo, así como la semiconjugación y la conjugación topológicas.

En cuanto al contenido, luego de esta Introducción, en la Sección 2 presentamos la notación así como las nociones y resultados fundamentales de conjunto regularmente cerrado, conjunto denso en otro conjunto y de conjunto co-denso, las cuales se utilizan posteriormente. En la Sección 3 consideramos las correspondientes definiciones de sistema autónomo (Definición 3.1) y de sistema no-autónomo (Definición 3.3). En todo el trabajo estudiamos principalmente los sistemas no-autónomos como se indican en la Definición 3.3, aunque también presentamos resultados y sobre todo ejemplos, para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞), donde X es un espacio topológico, f_∞ es la sucesión $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon X \to X$ es una funciń continua. Los sistemas no-autónomos (X, f_∞) son un caso particular de los que se indican en la Definición 3.3. Otro caso particular de sistema no-autónomo es el que aparece en la Definición 3.1. Entre los resultados que se presentan en la Sección 3, para sistemas no-autónomos, destacamos que las Proposiciones 3.13, 3.14, 3.17, 3.19 y el Teorema 3.15 aparecen aquí en una forma diferente a como originalmente se enuncian en [**40**]. La Proposición 3.14 enuncia dos afirmaciones equivalentes a la transitividad en relación con la transitividad en un conjunto, y con el hecho de poseer un conjunto transitivo (ver Definiciones 3.7 y 3.9). En el Teorema 3.15 se indican dos afirmaciones que son equivalentes a la transitividad en un conjunto, los cuales extienden resultados conocidos para el caso de la transitividad de un sistema autónomo. En el mismo sentido, en la Proposición 3.17 se indican tres propiedades que se derivan de la transitividad en un conjunto.

Dos sistemas dinámicos suelen compararse determinando si entre ellos existe una conjugación topológica o bien una semiconjugación topológica. Cuando un sistema autónomo es semiconjugado topológicamente con otro, algunas propiedades que posee el primero de ellos, también las tiene el segundo. En la Sección 4 introducimos la semiconjugación y la conjugación topológicas, tanto para sistemas autónomos (Definición 4.1), como para no-autónomos (Definición 4.4). Entre los resultados que se presentan destacamos los siguientes: en el Teorema 4.8, dados dos sistemas no-autónomos (X, f_∞) y (Y, g_∞), una semiconjugación $h\colon X \to Y$ y un subconjunto no vacío A de X, mostramos condiciones bajo las que se preservan tanto la transitividad como la m-transitividad en A. El Teorema 4.12 generaliza [**50**, Lema 3.1] y su parte 2) aparece por primera vez en este trabajo.

El tema de la semiconjugación y la conjugación aparece de nuevo en las Secciones 5 y 6. En la Sección 5 probamos que ser un punto periódico se preserva bajo semiconjugación (Teorema 5.8). En el Teorema 6.10 mostramos una condición, bajo la cual, la dependencia sensitiva bajo condiciones iniciales se preserva bajo conjugación y, en el Teorema 6.11, así como en los corolarios que se derivan, combinamos el trabajo realizado para la preservación, bajo conjugación, del caos en el sentido de Devaney. En la forma en que se presentan, los Teoremas 5.8 y 5.9 aparecen aquí por primera vez.

La noción de punto periódico para un sistema no-autónomo no es estándar. En la Definición 5.3 consideramos tres de ellas, que distinguimos como (P1), (P2) y (P3). Cada una de estas nociones tiene sus ventajas y sus desventajas pues, como veremos, mientras que la órbita de un punto periódico en el sentido (P3) es un conjunto finito (cosa que no necesariamente sucede con las otras nociones), un punto periódico en el sentido (P3) puede no tener periodo (cosa que siempre sucede con las otras nociones). En la Sección 5 estudiamos las tres nociones de punto periódico y de punto fijo para un sistema no-autónomo, enunciamos propiedades fundamentales de dichas nociones (Proposiciones 5.5 y 5.7) y mostramos que algunos resultados válidos para sistemas autónomos (Proposiciones 5.22, 5.24, 5.25 y 5.27), no necesariamente se cumplen en un sistema no-autónomo (Ejemplos 5.1, 5.12, 5.17, 5.23, 5.26 y 5.28). Por sus propiedades, consideramos interesantes los Ejemplos 5.18 y 5.19.

Un resultado importante en la teoría de los sistemas autónomos es el Teorema de Transitividad de Birkhoff (Teorema 5.41), el cual da condiciones bajo las cuales la transitividad de una función equivale a la existencia de un punto cuya órbita es densa. En el Ejemplo 5.35 verificamos que esto no se cumple en un sistema no-autónomo. Además presentamos varios resultados, como las Proposiciones 5.20, 5.29 y 5.30, así como los Teoremas 5.39 y 5.40 para finalmente obtener el Teorema 5.42, el cual es una versión del Teorema de Transititividad de Birkhoff para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞).

En la Sección 6 consideramos la noción de caos en el sentido de Devaney, para un sistema autónomo (Definición 6.2). Es conocido que todo sistema metrizable autónomo e infinito que es transitivo y cuyo conjunto de puntos periódicos es denso, posee dependencia sensitiva a condiciones iniciales (Teorema 6.3). El objetivo principal de la Sección 6 es exhibir condiciones bajo las que dicho resultado permanece válido en un sistema no-autónomo (ver Problema 1 de [**38**]). Para esto indicamos primero la definición de dependencia sensitiva a condiciones iniciales en un sistema no-autónomo (Definición 6.4). Intuitivamente un sistema posee tal propiedad si en cualquier abierto no vacío se pueden encontrar dos puntos y una iteración de ellos que los separe significativamente. Luego de esto presentamos tres nociones, para sistemas no-autónomos: el caos en un conjunto en el sentido de Devaney (Definición 6.8), la equi-continuidad de una familia de funciones (Definición 6.9) y la ergodicidad topológica en un conjunto (Definición 6.17). En la Proposición 6.18 probamos que, en un sistema no-autónomo, la transitividad y la densidad de puntos periódicos en un conjunto invariante (Definición 3.11), implican la ergodicidad topológica en dicho conjunto.

A continuación estudiamos el problema de si, en un sistema no-autónomo, la transitividad y la densidad de puntos periódicos en un conjunto A, en el sentido (P3), implican la dependencia sensitiva a condiciones iniciales en A. Conviene mencionar que si $\mathbb{I} = [0, 1]$ es el intervalo unitario con su topología usual, entonces en [**49**, Ejemplo 4.4] se construye un sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ que es transitivo, su conjunto de puntos periódicos en el sentido (P1) es denso y no tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales. Los sistemas no-autónomos presentados en los Ejemplos 5.28 y 5.43 también satisfacen dichas condiciones. En 2018 A. Miralles, M. Murillo-Arcila y M. Sanchis muestran en [**43**, Proposición 2.3], que todo sistema autónomo (X, f), transitivo y sin dependencia sensitiva a condiciones iniciales, donde $f\colon X \to X$ es una función continua y biyectiva, induce un sistema no-autónomo (X, f_∞) que es transitivo, su conjunto de puntos periódicos en el sentido (P2) es X (y por tanto denso en X) y no tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales. En [**43**, Teorema 2.4] prueban que cuando la sucesión de funciones continuas $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ que define a f_∞ converge uniformemente a una función continua $f\colon X \to X$, la transtividad y la densidad de puntos periódicos en el sentido (P2), implican la dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

Con respecto al problema de si la tansititivad y la densidad de puntos periódicos en un conjunto A, en el sentido (P3), implican la dependencia sensitiva a condiciones iniciales en A, destacamos los Teoremas 6.20, 6.23, 6.25 y 6.29. éste último resultado es similar a [**43**, Teorema 2.4], pero considerando que la sucesión $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de funciones continuas $f_n\colon X \to X$ que define a f_∞, converge puntualmente a una función continua $f\colon X \to X$.

Como hemos indicado, la noción más general de sistema no-autónomo que consideramos es la que aparece en la Definición 3.3, aunque también presentamos resultados para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞). Una de las principales aportaciones de este trabajo, es la unificación tanto de nociones como de resultados a los sistemas dinámicos de la Definición 3.3. Hemos visto, por ejemplo, que algunas definiciones y/o resultados que en la literatura aparecen considerados para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞), permanecen válidos o se pueden adaptar en la situación más general, y así es como los presentamos en este trabajo. Un ejemplo de esto es la Definición 3.9, las Proposiciones 3.12, 3.13, 3.14, 3.17, 3.19 y los Teoremas 3.15, 3.16 y 4.12. En otros casos, como en los Teoremas 5.36 y 5.42, es interesante saber si el resultado se puede adaptar a la situación más general. Otra aportación es que el presente es el primer texto en castellano en donde se realiza un estudio sistemático de los tres tipos de puntos periódicos que se han considerado en la literatura, estudio que en inglés se inicia en [**1**]. Otra aportación más es el trabajo que se ha dedicado a presentar las demostraciones en la forma más detallada posible, a riesgo de la extensión del mismo.

1.1. Panorama Histórico. Históricamente los sistemas no-autónomos fueron introducidos en 1996 por S. Kolyada y L. Snoha en [**33**], trabajo en cuya introducción se realiza una detallada motivación de las razones del interés de su estudio. Dichos sistemas están relacionados con las ecuaciones en diferencia no-autónomas. Una forma general de una ecuación en diferencia no-autónoma es la siguiente: dados un espacio métrico y compacto (X, d) y una sucesión de funciones continuas $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ tal que $f_n\colon X \to X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos, para toda $x \in X$,

$$\begin{cases} x_1 &= x, \\ x_{n+1} &= f_n(x_n). \end{cases}$$

Notemos que las órbitas de los puntos son una solución a la ecuación. Esta clase de ecuaciones en diferencia no-autónoma ha sido de gran interés para muchos matemáticos. Mientras que los sistemas autónomos evolucionan siempre de acuerdo a una misma ley que no cambia, los sistemas no-autónomos suelen modelar fenómenos naturales que están sujetos a fuerzas externas que dependen del tiempo. De 1996 a la fecha, una gran cantidad de artículos de investigación se han dedicado a las propiedades dinámicas de los sistemas no-autónomos. Como se menciona en [**66**], en 1996 S. Kolyada y L. Snoha dieron en [**33**] la definición de entropía topológica para sistemas no-autónomos. En 2002, W. Krabs estudió en [**36**] la estabilidad de los sistemas no-autónomos. También en 2002, R. Kempf estudió en [**31**] los ω-conjuntos límite para los sistemas no-autónomos. Dichos ω-conjuntos límites fueron posteriormente estudiados en 2006 por J. S. Cánovas en [**14**]. En 2004, S. Kolyada, L. Snoha y S. Trofimchuk consideraron en [**35**] la minimalidad de los sistemas no-autónomos. En 2008, X. Huang, X. Wen y F. Zeng estudiaron en [**29**] la presión topológica de un sistema no-autónomo y, posteriormente, en [**28**] analizaron la entropía preimagen de un sistema no-autónomo. En 2009 tanto Y. Shi y G. Chen en [**50**] como P. Oprocha y P. Wilczyński en [**46**], hicieron un estudio sobre el caos en sistemas no-autónomos. En 2011 J. S. Cánovas también realizó en [**16**] un estudio del caos en sistemas no-autónomos.

En 2014 L. Liu y Y. Sun consideraron en [**40**] las nociones de transitividad de un subconjunto en un sistema no-autónomo, así como las de funciones débilmente mezcladoras y funciones semiconjugadas. En 2017 I. Sánchez, M. Sanchis y H. Villanueva en [**49**], trasladan conceptos como transitividad, función débilmente mezcladora, puntos periódicos y transitivos, dependencia a condiciones iniciales, entre otros, a sistemas no-atónomos en hiperespacios con la métrica de Hausdorff. Tres artículos que presentan problemas abiertos y nuevas líneas de investigación en torno a los sistemas no-autónomos son [**4**], [**5**] y [**15**].

En cuanto a trabajos de tesis en el tema de los sistemas no-autónomos, hasta donde sabemos no se han realizado Tesis de Licenciatura. El 21 de abril de 2017 se present
o la Tesis de Maestría [**25**] de G. Gupta, y el 12 de marzo de 2018 la Tesis de Maestría [**48**] de M. Salman, ambas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Delhi, India, y bajo la dirección de la profesora Ruchi Das. El trabajo de M. Salman ha resultado en los artículos [**17**], [**18**] y [**19**]. En enero de 2019 fue aprobada la Tesina de Maestría [**42**] del segundo autor de este trabajo, y dirigida por el primero. La profesora Ruchi Das ha dirigido la Tesis de Doctorado [**51**] de D. Thakkar, presentada en octubre de 2016, así como la de R. Vasisht, quien el 9 de abril de 2019 expuso un reporte preliminar de su trabajo de tesis doctoral. El trabajo de D. Thakkar ha derivado en los artículos [**52**], [**53**], [**54**], [**55**] y [**56**], y el de R. Vasisht en [**58**], [**59**], [**60**], [**61**], [**62**] y [**63**]. En el 2018 fueron presentadas, en el Instituto de Ciencias Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, las Tesis de Doctorado [**11**] y [**41**] de F. Balibrea-Iniesta y C. Lopesino, respectivamente. Ambas fueron dirigidas por los profesores Ana María Mancho Sánchez y Stephen Wiggins. Como resultado de su trabajo, se han publicado los artículos [**6**], [**7**], [**8**], [**9**] y [**10**]. En [**10**] y en el Capítulo 5 de [**11**] se presenta una aplicación de los sistemas no-autónomos a un contexto de análisis del transporte en el océano ártico.

Como se menciona en [**66**], los sistemas no-autónomos aparecen con más frecuencia que los sistemas autónomos, pues muchos problemas físicos, biológicos y económicos suelen describirse en términos de sistemas no-autónomos. Es por esta razón que el interés por estudiarlos se ha incrementado durante los últimos años. El presente trabajo es una aportación al tema de los sistemas no-autónomos.

2. Preliminares

En esta sección, además de presentar parte de la notación que utilizamos, consideramos las nociones de conjunto regularmente cerrado, de conjunto denso en otro conjunto, de conjunto denso en ninguna parte y de conjunto co-denso. Tanto los conceptos como los resultados que probamos, serán utilizados en secciones posteriores.

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ denotan los conjuntos de los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números reales, respectivamente. Entendemos que $0 \notin \mathbb{N}$. Si A es un conjunto, entonces $|A|$ denota la cardinalidad de A. La diferencia de dos conjuntos A y B se denota como $A \setminus B$. La letra $\mathbb{I}$ representa al intervalo unitario $[0, 1]$ con su topología usual. Si $f\colon X \to Y$ es una función y $B \subset X$, entonces el símbolo $f|_B$ es la restricción de f a B. Dados un espacio topológico X y $A \subset X$, los símbolos $\mathrm{cl}A$ e $\operatorname{int} A$, denotan la cerradura y el interior de A en X, respectivamente. Consideramos en A la topología de X relativa a A. Recordemos que $V \subset A$ es abierto en A si existe un abierto U en X tal que $V = U \cap A$.

Consideremos ahora los siguientes conceptos.

Definición 2.1. Sean X un espacio topológico y A y B subconjuntos no vacíos de X. Entonces

1) A es **regularmente cerrado** en X si $A = \mathrm{clint}\, A$;
2) B es **denso en** A si $A \subset \mathrm{cl}A \cap B$.

A los conjuntos regularmente cerrados se les conoce también como *dominios cerrados*. Notemos que si B es denso en A, entonces $B \cap A \neq \emptyset$. Notemos también que B es denso en X si y sólo si $X \subset \mathrm{cl}X \cap B$, es decir, si y sólo si $\mathrm{cl}B = X$. Entre otros resultados, en la siguiente proposición vemos una forma alternativa de enunciar la densidad relativa, la cual se asemeja a aquella que dice que B es denso en X si y sólo si para cada subconjunto abierto y no vacío V de X, sucede que $V \cap B \neq \emptyset$.

Proposición 2.2. Sea X un espacio topológico. Si A, B y C son tres subconjuntos no vacíos de X, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si A es regularmente cerrado en X, entonces para cada subconjunto abierto y no vacío V de A, sucede que $\operatorname{int} V \neq \emptyset$;
2) B es denso en A si y sólo si para cualquier subconjunto abierto y no vacío V de A, sucede que $V \cap B \neq \emptyset$;
3) si B es denso en A y $B \subset C$, entonces C es denso en A.

Demostración. Para probar 1), supongamos que A es regularmente cerrado en X y que V es un subconjunto abierto y no vacío de A. Sea U un abierto en X tal que $V = U \cap A$. Como $V = U \cap A = U \cap \mathrm{clint}\, A$, $V \neq \emptyset$ y U es abierto en X, tenemos que $U \cap \operatorname{int} A \neq \emptyset$. Puesto que U es abierto en X y el interior de una intersección es la intersección de los interiores, resulta que

$$\emptyset \neq U \cap \operatorname{int} A = \operatorname{int} U \cap \operatorname{int} A = \operatorname{int} U \cap A = \operatorname{int} V.$$

Esto muestra 1).

Para probar 2), supongamos primero que B es denso en A. Sean V un subconjunto abierto y no vacío de A y U un subconjunto abierto de X de modo que $V = U \cap A$. Notemos que $V \cap A \subset A \subset \mathrm{cl}A \cap B$. Como $V = U \cap A$ es no vacío, tomando un punto $p \in U \cap A$, tenemos que $p \in \mathrm{cl}A \cap B$. Esto implica, por ser U un subconjunto abierto de X que tiene a p, que $U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, así $V \cap B \neq \emptyset$. Esto prueba la primera parte de 2). Supongamos ahora que cualquier subconjunto abierto y no vacío de A intersecta a B. Si $A \not\subset \mathrm{cl}A \cap B$, entonces existe $x \in A$ tal que $x \notin \mathrm{cl}A \cap B$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $U \cap (A \cap B) = \emptyset$. Luego $V = U \cap A$ es un subconjunto abierto de A, no vacío pues $x \in V$ y tal que $V \cap B = \emptyset$, contradiciendo nuestra hipótesis. Esto prueba que $A \subset \mathrm{cl}A \cap B$, por lo que B es denso en A y la prueba de 2) termina.

Para probar 3) supongamos que B es denso en A y que $B \subset C$. Sea V un subconjunto abierto y no vacío de A. Usando 2), $\emptyset \neq V \cap B \subset V \cap C$. Luego, de nueva cuenta por 2), C es denso en A. Esto muestra 3). $\square$

Tomemos un espacio topológico X así como dos subconjuntos no vacíos A y B de X. Por la propiedad 2) de la Proposición 2.2, B es denso en A si y sólo si, como subespacio de A, el conjunto $B \cap A$ es denso en A.

Consideremos ahora las siguientes nociones.

Definición 2.3. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es

1) **denso en ninguna parte** de X, si $\operatorname{int} \operatorname{cl} A = \emptyset$;
2) **co-denso** en X, si $X \setminus A$ es denso en X.

La siguiente proposición relaciona dichos conceptos. En su demostración utilizamos el hecho de que para cada $A \subset X$, $\operatorname{int} A = X \setminus \operatorname{cl} X \setminus A$ (ver [**22**, Teorema 1.1.5]).

Proposición 2.4. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es denso en ninguna parte de X si y sólo si $\operatorname{cl} A$ es co-denso en X.

Demostración. Por definición A es denso en ninguna parte de X si y sólo si $\operatorname{int} \operatorname{cl} A = \emptyset$. Esto equivale a decir que $X \setminus \operatorname{cl} X \setminus \operatorname{cl} A = \emptyset$, afirmación equivalente a que $\operatorname{cl} X \setminus \operatorname{cl} A = X$, o lo que es lo mismo, a que $\operatorname{cl} A$ es co-denso en X. □

El siguiente resultado se utilizará con frecuencia a lo largo del presente trabajo, por ejemplo, en las respectivas pruebas de las Proposiciones 2.6 y 6.15, así como en la de los Teoremas 5.39 y 6.20.

Proposición 2.5. Sea X un espacio topológico T_1 sin puntos aislados. Entonces todo subconjunto abierto y no vacío de X es infinito. En particular, X es infinito.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un subconjunto no vacío A de X, que es finito y abierto en X. Sea $y \in A$. Como X es T_1 y A es finito, $A \setminus \{y\}$ es cerrado en X. Luego $\{y\} = A \cap (X \setminus (A \setminus \{y\}))$ es abierto en X, contradiciendo la inexistencia de puntos aislados. □

Sean B y C dos conjuntos tales que $C \subset B$. Decimos que C es *cofinito en* B, o bien que C es un subconjunto cofinito de B, si el complemento $B \setminus C$ es finito. En la parte 3) de la Proposición 2.2, probamos que la densidad en un conjunto A se preserva bajo superconjuntos. Ahora daremos condiciones para que la densidad en A se preserve bajo subconjuntos.

Proposición 2.6. Sean X un espacio topológico T_1, A un subconjunto no vacío de X sin puntos aislados y $B \subset X$ tal que B es denso en A. Si $C \subset B$ es cofinito en B, entonces C es denso en A.

Demostración. Como C es cofinito en B, el conjunto $F = B \setminus C$ es finito y, por tanto, cerrado en X. Sean U un subconjunto abierto y no vacío de A y U_1 un abierto en X tal que $U = A \cap U_1$. Por la Proposición 2.5 aplicada al conjunto A, tenemos que U es infinito. Por tanto,

$$V = U \cap (X \setminus F) = A \cap U_1 \cap (X \setminus F)$$

es un subconjunto abierto y no vacío de A. En vista de que B es denso en A, por la parte 2) de la Proposición 2.2, existe $b \in V \cap B$. Como $B = C \cup F$ y $V \cap F = \emptyset$, sucede que $b \in C$. Luego $\emptyset \neq V \cap C \subset U \cap C$ y, de nuevo por la parte 2) de la Proposición 2.2, C es denso en A. □

Si $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una sucesión en un espacio topológico X, entonces todo subconjunto de la sucesión de la forma $\{x_n : n \geqslant m\}$, para alguna $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es una *cola* de dicha sucesión. Toda cola es una sucesión y un subconjunto cofinito de la sucesión dada. Entonces, por la Proposición 2.6, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.7. Sean X un espacio topológico T_1 y A un subconjunto no vacío de X sin puntos aislados. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una sucesión en X que es densa en A, entonces toda cola de dicha sucesión es densa en A.

En la prueba de varios resultados, por ejemplo los Teoremas 3.15 y 4.8, utilizaremos la siguiente proposición, correspondiente a la Teoría de Conjuntos y cuya sencilla prueba omitimos.

Proposición 2.8. Sean X y Y dos conjuntos, $f\colon X \to Y$ una función, $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces $A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ si y sólo si $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

3. Sistemas Autónomos y Sistemas No-Autónomos

En la presente sección sentamos las bases para nuestro estudio. Nos referimos a las nociones de sistema dinámico discreto autónomo y de sistema dinámico discreto no-autónomo. Presentamos también la notación y las convenciones que necesitamos. Extendemos definiciones elementales de los sistemas dinámicos discretos autónomos al ámbito de los no-autónomos, tales como la órbita de un punto, la transitividad topológica, la m-transitividad topológica y la invarianza. Posteriormente vemos que algunos resultados conocidos para la transitividad topológica de un sistema dinámico discreto autónomo, tienen su versión en el caso no-autónomo. Consideremos primero la siguiente noción.

Definición 3.1. Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Un **sistema dinámico discreto autónomo** es la pareja (X, f). Si X es metrizable, diremos que (X, f) es un **sistema metrizable autónomo**.

Como comentamos en la Introducción, para simplificar la escritura, escribiremos sistema autónomo en lugar de sistema dinámico discreto autónomo. Dado un espacio topológico X, denotamos por id_X a la función identidad de X en X. Si f es una función continua de X en X, definimos $f^0 = \mathrm{id}_X$, $f^1 = f$ y

$$f^n = f \circ f^{n-1}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f^n\colon X \to X$ es continua y se llama la *n-ésima iteración* de f. Dada $x \in X$, el conjunto que tiene como elementos a las iteraciones de f, evaluadas en x, recibe el nombre que se indica a continuación.

Definición 3.2. Sean (X, f) un sistema autónomo y $x \in X$. La **órbita** de x en (X, f) es el conjunto

$$\operatorname{orb}(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots\right\} = \{f^n(x)\colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\,. \tag{5.1}$$

Cuando se tienen un sistema autónomo (X, f) y un punto $x \in X$, es natural preguntar por propiedades del conjunto $\operatorname{orb}(x, f)$. Por ejemplo saber si es finito o denso en X. Pensando a $\operatorname{orb}(x, f)$ como una sucesión en X, es también natural determinar si dicha sucesión es convergente, o si posee subsucesiones convergentes. Incluso interesa saber si existen varios puntos con órbita finita, o varios con órbita densa en X. Más adelante veremos algunas condiciones en un sistema autónomo que involucran un comportamiento específico de la órbita de alguno de los puntos del espacio en cuestión.

Ahora presentamos la noción de sistema dinámico discreto no-autónomo, pero antes consideramos las siguientes convenciones: sean X un espacio topológico y para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n un subconjunto no vacío de X. Denotamos por D_∞ a la sucesión $\{D_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon D_n \to D_{n+1}$ es una función continua. Denotamos por f_∞ a la sucesión $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Si existe un subconjunto no vacío D de X tal que $D_n = D$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces identificamos la sucesión constante

$$D_\infty = \{D_n\colon n \in \mathbb{N}\} = \{D, D, D, \ldots, D, \ldots\}$$

con D. En particular, si $D = X$, identificamos $D_\infty = \{X, X, X, \ldots, X, \ldots\}$ con X. Si existe una función continua $f\colon X \to X$ tal que $f_n = f$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces identificamos la sucesión constante

$$f_\infty = \{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} = \{f, f, f, \ldots, f, \ldots\}$$

con f. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $D_n = D$ y $f_n = f$ (donde, en este caso, $f\colon D \to D$ es una función continua), entonces identificamos la pareja (D_∞, f_∞) con (D, f).

Definición 3.3. Sea X un espacio topológico. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n es un subconjunto no vacío de X y $f_n\colon D_n \to D_{n+1}$ es una función continua. Un **sistema dinámico discreto no-autónomo** es la pareja (D_∞, f_∞). Si X es metrizable, diremos que (D_∞, f_∞) es un **sistema metrizable no-autónomo**.

En [**51**] a f_∞ se le llama *función variante del tiempo*. Como comentamos en la Introducción, para simplificar la escritura, diremos que (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo. Aunque la definición más general de un sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) con la que vamos a trabajar es la que presentamos en la Definición 3.3, en la literatura algunos autores suponen otras situaciones como la definición de un sistema no-autónomo. Por ejemplo, en [**34**] se considera que para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n es un espacio métrico y compacto y que, a priori, no existe relación entre D_n y D_m para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, ni se supone que cada D_n es un subconjunto de algún espacio X. En [**5**] y [**46**] se procede de manera similar: en el primero se considera que cada D_n es un espacio topológico T_2 y, en el segundo, que cada D_n es métrico pero no necesariamente compacto. En [**50**] se indica que cada conjunto D_n es un subconjunto del espacio métrico X, mientras que en [**27**] se considera que cada D_n es un subconjunto de un espacio de Banach X. Hasta donde hemos podido investigar la noción de sistema no-autónomo, tal como se indica en la Definición 3.3, aparece por primera vez en [**42**, Definición 3.3].

El caso particular (X, f_∞), es decir la situación en la que toda D_n es X y cada f_n es una función continua de X en X es, quizá, el mas común en los artículos de investigación que tratan los sistemas no-autónomos. Como originalmente lo definieron S. Kolyada y L. Snoha en [**33**], se supone que X es un espacio compacto. En 2012 L. Liu y B. Chen consideran en [**39**] el caso (X, f_∞), donde X es un espacio topológico. En el presente trabajo aparecen tanto sistemas no-autónomos en la forma general (D_∞, f_∞), como en el caso particular (X, f_∞). Incluso el caso particular servirá de base para los ejemplos que vamos a presentar.

En la teoría de los sistemas autónomos la *función de Henon* es muy importante. En [**20**, Sección 2.9] se presentan varias propiedades de dicho sistema dinámico que se define como sigue: para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ consideramos la función $H_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H_{a,b}(x, y) = (a + by - x^2, x).$$

La función $H_{a,b}$ es biyectiva y, para una buena cantidad de valores de a y b, existe $C \subset \mathbb{R}^2$ tal que C es homeomorfo al conjunto de Cantor, $H_{a,b}(C) \subset C$ y la dinámica del sistema dinámico autónomo $(C, H_{a,b}|_C)$ es la de una máquina de sumar (ver [**37**, Sección 4.1.2] para un estudio de la máquina de sumar). Otra función, más sencilla y con propiedades similares, es la llamada *función de Lozi* definida como sigue: para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la función $L_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$L_{a,b}(x, y) = (1 + y - a|x|, bx).$$

La función $L_{a,b}$ es biyectiva y en [**21**] se presentan propiedades de dicho sistema dinámico aut onomo, así como modificaciones y generalizaciones de la función de Lozi. En [**6**] se dice que un sistema no-autónomo es una pareja $\{f_n, D_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ donde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, D_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ y $f_n\colon D_n \to D_{n+1}$ es una función continua y biyectiva. En [**6**] y [**7**] se construyen, respectivamente, las versiones no-autónomas de las funciones de Henon y de Lozi. Ambos tienen la forma $\{f_n, D_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ antes descrita en donde, para la función de Henon todos los conjuntos D_n son iguales, pero no así para la función de Lozi. Podemos considerar, por tanto, que el sistema no-autónomo de Lozi es un sistema dinámico interesante que es de la forma descrita en la Definición 3.3.

Aunque menos interesante, dinámicamente hablando, otro sistema no-autónomo que no es del caso especial (X, f_∞) puede definirse como sigue: en el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $I_n = [0, 2^n]$ y $g_n : I_n \to I_{n+1}$ la función definida en $x \in I_n$ como $g_n(x) = 2x$. Si $I_\infty = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $g_\infty = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces (I_∞, g_∞) es un sistema no-autónomo.

A partir de este momento, cuando indiquemos que (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo, entenderemos que D_∞ y f_∞ son las sucesiones $D_\infty = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ y que existe un espacio topológico X de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset X$ y $f_n : D_n \to D_{n+1}$ es una función continua. Definimos, además, $f_1^0 = \mathrm{id}_{D_1}$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, consideramos que $f_n^n = f_n$ y que

$$f_1^n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1.$$

Notemos que $f_1^n : D_1 \to D_{n+1}$ es una función continua. A f_1^n se le llama la *n-ésima iteración de f_∞*. Notemos que las iteradas son la composición en el "orden natural" de los miembros de la sucesión f_∞, es decir, la 1-ésima iteración es f_1, el primer elemento de f_∞, la 2-ésima iteración es la composición de $f_2 \circ f_1$, es decir, la composición del primer elemento de f_∞ con el segundo elemento de f_∞, y así sucesivamente. Si $V \subset X$ definimos

$$(f_1^n)^{-1}(V) = (f_1^n)^{-1}(V \cap D_{n+1}) = \{x \in D_1 : f_1^n(x) \in V\}.$$

Dada $x \in D_1$, el conjunto que tiene como elementos a las iteraciones de f_∞, evaluadas en x, recibe el nombre que se indica a continuación.

Definición 3.4. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $x \in D_1$. La **órbita** de x en (D_∞, f_∞) es el conjunto

$$\mathrm{orb}(x, f_\infty) = \left\{x, f_1(x), f_1^2(x), f_1^3(x), \ldots, f_1^n(x), \ldots\right\} = \{f_1^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \tag{5.2}$$

Más adelante en la Sección 4, específicamente en la prueba del Teorema 6.23, utilizaremos *pedazos de una*
orbita, las cuales quedan definidas como sigue: para cada $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant k$, definimos

$$f_k^n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_{k+1} \circ f_k. \tag{5.3}$$

En la teoría de los sistemas no-aut ónomos, los pedazos de una órbita no siempre se consideran como se indica en (5.3). Algunos autores definen f_k^n para cada $k, n \in \mathbb{N}$ (sin importar si la desigualdad $n \geqslant k$ se cumple o no) como sigue:

$$f_k^n = f_{k+(n-1)} \circ f_{k+(n-2)} \circ \cdots \circ f_{k+1} \circ f_k. \tag{5.4}$$

Como ya indicamos, un caso particular de un sistema no-autńomo (D_∞, f_∞), se obtiene cuando existe una función continua $f : X \to X$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n = X$ y $f_n = f$. Como hemos convenido, en dicho caso la pareja (D_∞, f_∞) se ha identificado con la pareja (X, f). Además, para cada $x \in X$, los conjuntos $\mathrm{orb}(x, f)$ y $\mathrm{orb}(x, f_\infty)$ definidos en (5.1) y (5.2), respectivamente, son iguales. Entonces el sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) es, para todos los efectos dinámicos, igual al sistema autónomo (X, f). Por tanto todo sistema autónomo es un caso particular de un sistema no-autónomo (también se suele decir que todo sistema no-autónomo se degenera en un sistema autónomo). Luego, cualquier resultado cierto para sistemas no-autónomos, es también válido para sistemas autónomos. Como veremos más adelante, existen propiedades que se satisfacen en un sistema autónomo, pero no en cualquier sistema no-autónomo.

En inglés a los sistemas autónomos y a los no-autónomos se les suele llamar con las siglas ADS y NDS, respectivamente, por corresponder con las oraciones "autonomous dynamical systems" y "non-autonomous dynamical systems". Utilizando dichas siglas, si ADS es la familia de los sistemas autónomos y NDS la de los no-autónomos, entonces hemos visto que ADS $\subset$ NDS. Los elementos del complemento NDS $\setminus$ ADS reciben el nombre que indicamos a continuación.

Definición 3.5. Un sistema no-autónomo se llama **estrictamente no-autónomo** si es falso que el sistema es autónomo.

Si (D_∞, f_∞) es un sistema estrictamente no autónomo, entonces la sucesión $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ posee dos elementos distintos, es decir, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f_n \neq f_m$.

3.1. Transitividad y m-Transitividad. Varias propiedades dinámicas, definidas originalmente para sistemas autónomos, tienen su versión para sistemas no-autónomos. En la siguiente definición presentamos dos de ellas.

Definición 3.6. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Decimos que (D_∞, f_∞) o bien que f_∞ es

1) **topológicamente transitivo** si para cada dos subconjuntos U y V, abiertos y no vacíos en D_1, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$;
2) m-**transitivo** si para cada par de familias $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ de subconjuntos abiertos y no vacíos en D_1, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

En adelante, a los sistemas topológicamente transitivos los llamaremos transitivos. En algunos textos la noción de m-transitividad se considera para cada natural m, entendiendo que ser transitivo y ser 1-transitivo son nociones equivalentes. Si f_∞ es 2-transitivo también se suele decir que es *débilmente mezcladora* o bien *débilmente mezclante*. Es claro que todo sistema no-autónomo $(m+1)$-transitivo es m-transitivo. También es claro que todo sistema no-autónomo m-transitivo es transitivo. En [**47**, Corolario 2.57 y Teorema 2.58] se muestra un sistema autónomo que es transitivo pero no débilmente mezclante. En el Ejemplo 5.17 construimos un sistema estrictamente no-autónomo que es transitivo pero no débilmente mezclante.

En el presente trabajo vamos a estudiar propiedades de los sistemas no-autónomos (D_∞, f_∞), en subconjuntos no vacíos de D_1, por lo que replicamos la definición anterior, pero ahora para subconjuntos de D_1, como se indica en la siguiente noción, cuya parte 1) aparece en [**50**, Definición 2.2].

Definición 3.7. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y A un subconjunto no vacío de D_1. Decimos que (D_∞, f_∞) es

1) **transitivo en** A si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$;
2) m-**transitivo en** A si A tiene más de un punto y para cada par de familias $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ de subconjuntos abiertos y no vacíos de A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Notemos que (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) si y sólo si (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en D_1. Notemos también que si (D_∞, f_∞) es $(m+1)$-transitivo en A, entonces (D_∞, f_∞) es m-transitivo en A y que si (D_∞, f_∞) es m-transitivo en A, entonces (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Ahora bien, por definición, el sistema aut
onomo (X, f) es transitivo en A si para cualesquiera dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.8. Sean (X, f) un sistema autónomo y A un subconjunto no vacío de X tal que $f(A) \subset A$. Entonces (X, f) es transitivo en A si y sólo si el sistema autónomo $(A, f|_A)$ es transitivo.

La siguiente definición aparece en [**40**, Definiciones 2.2 y 2.3], para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞) y subconjuntos cerrados de X. Ahora la presentamos para sistemas no-autónomos (D_∞, f_∞) y subconjuntos no vacíos de D_1.

Definición 3.9. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y A un subconjunto no vacío de D_1. Decimos que A es un conjunto

1) **transitivo** en (D_∞, f_∞), si para cualquier subconjunto abierto y no vacío U de A y cada subconjunto abierto y no vacío V de X tal que $V \cap A \neq \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$;

2) m-**transitivo** en (D_∞, f_∞) si A tiene más de un punto y, para cada familia $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ de subconjuntos abiertos y no vacíos de A y toda familia $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ de subconjuntos abiertos y no vacíos de X tal que $V_i \cap A \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Notemos que si A es $(m+1)$-transitivo en (D_∞, f_∞), entonces A es m-transitivo en (D_∞, f_∞). Además si A es m-transitivo en (D_∞, f_∞), resulta que A es transitivo en (D_∞, f_∞).

Ejemplo 3.10. Para ilustrar la Definición 3.9, consideremos el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$. Supongamos que $f_1 = f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$ y que, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, $f_n \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ es la función definida como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2n}{n-2}\right) x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{n-2}{2n}; \\ 1, & \text{si } \frac{n-2}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{n+2}{2n}; \\ \left(\frac{2n}{n-2}\right)(1 - x), & \text{si } \frac{n+2}{2n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

En [**40**, Ejemplo 2.1, p. 3] se indica que $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ es transitivo en el sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$. $\square$

Observemos que si A es un subconjunto no vacío de D_1 y (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en A, entonces A es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en (D_∞, f_∞). Para que el recíproco se cumpla requerimos de la noción dada en la Definición 3.11, la cual aparece en [**50**, Definición 2.4] y es la versión no-autónoma del concepto de conjunto invariante que se suele definir en un sistema autónomo. Recordemos que si (X, f) es un sistema autónomo y A es un subconjunto no vacío de X, entonces A es *invariante* en (X, f) si $f(A) \subset A$. Esto implica que $f^n(A) \subset A$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Reemplazando f^n por f_1^n tenemos la noción de conjunto invariante en un sistema no-autónomo.

Definición 3.11. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo con $\bigcap_{i=1}^\infty D_i \neq \emptyset$ y A un subconjunto no vacío de $\bigcap_{i=1}^\infty D_i$. Decimos que A es **invariante** en (D_∞, f_∞) si $f_1^n(A) \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así pues, A es invariante en (D_∞, f_∞) si cada iteración de f_∞ deja invariante al conjunto A. En el caso del sistema no-autónomo (X, f_∞), un subconjunto no vacío A de X es invariante en (X, f_∞) si y sólo si $f_1^n(A) \subset A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo con $\bigcap_{i=1}^\infty D_i \neq \emptyset$ y que A es un subconjunto no vacío de $\bigcap_{i=1}^\infty D_i$. Tanto en [**44**] como en [**65**, Definición 2.2] se considera la siguiente definición alternativa de conjunto invariante: se dice que A es invariante en (D_∞, f_∞) si $f_i(A) \subset A$, para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, si cada elemento de la sucesión f_∞ deja invariante al conjunto A. Notemos que la noción alternativa de invarianza implica la dada en la Definición 3.11, pero no al revés.

El siguiente resultado, que aparece en [**40**, Teorema 3.1] para sistemas no-autínomos de la forma (X, f_∞) y subconjuntos cerrados de X, establece la relación que existe entre que un conjunto sea transitivo en un sistema no-autónomo y que dicho sistema sea transitivo en tal conjunto. A partir de ahora entenderemos que si A es un subconjunto invariante del sistema no-autónomo (D_∞, f_∞), entonces $\bigcap_{i=1}^\infty D_i \neq \emptyset$ y A es un subconjunto no vacío de $\bigcap_{i=1}^\infty D_i$.

Proposición 3.12. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y A invariante en (D_∞, f_∞). Entonces A es transitivo *(*respectivamente, m-transitivo*)* en (D_∞, f_∞) si y sólo si (D_∞, f_∞) es transitivo *(*respectivamente, m-transitivo*)* en A.

Demostración. Notemos que $A \subset \bigcap_{i=1}^\infty D_i$, por lo que $A \subset D_1$. Como ya indicamos, si (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en A, entonces A es transitivo en (D_∞, f_∞). Supongamos ahora que A es transitivo en (D_∞, f_∞). Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Consideremos un abierto V_1 en X de modo que $V = V_1 \cap A$. Como U es un abierto no vacío de A, V_1 es un abierto no vacío de X y $V_1 \cap A = V \neq \emptyset$. Por la transitividad de A en (D_∞, f_∞), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U) \cap V_1 \neq \emptyset$. Puesto que $U \subset A$ y A es invariante en (D_∞, f_∞), sucede que

$f_1^k(U) \subset f_1^k(A) \subset A$. Así que
$$\emptyset \neq f_1^k(U) \cap V_1 = f_1^k(U) \cap A \cap V_1 = f_1^k(U) \cap V.$$
Luego (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Si suponemos ahora que A es m-transitivo en (D_∞, f_∞) entonces, procediendo de manera similar, se prueba que (D_∞, f_∞) es m-transitivo en A. □

Notemos que la Proposición 3.12 permanece cierta con la definición alternativa de conjunto invariante. De la Proposición 3.12 se infiere que si D_1 es invariante en (D_∞, f_∞), entonces (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) si y sÓlo si D_1 es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en (D_∞, f_∞).

En la Sección 6 la transitividad de un sistema no-autónomo en un conjunto, va a jugar un papel más importante que el hecho de ser un conjunto transitivo. El siguiente resultado establece una relación entre sistemas transitivos y la transitividad en subconjuntos regularmente cerrados.

Proposición 3.13. Sea (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo.

1) Si (D_∞, f_∞) es transitivo, entonces (D_∞, f_∞) es transitivo en cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X.
2) Si D_1 es regularmente cerrado en X y (D_∞, f_∞) es transitivo en cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X, entonces (D_∞, f_∞) es transitivo.

Demostración. Para mostrar 1), supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo. Sea A un subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X. Consideremos que U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Como A es regularmente cerrado en X, por la parte 1) de la Proposición2.2, $\operatorname{int} U \neq \emptyset$ e $\operatorname{int} V \neq \emptyset$. Puesto que $U \subset A \subset D_1$, sucede que $\operatorname{int} U \subset \operatorname{int} D_1 \subset D_1$. De manera similar, $\operatorname{int} V \subset D_1$. Entonces $\operatorname{int} U$ e $\operatorname{int} V$ son dos subconjuntos abiertos y no vacíos en D_1 y dado que (D_∞, f_∞) es transitivo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(\operatorname{int} U) \cap \operatorname{int} V \neq \emptyset$, lo que implica que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra que (D_∞, f_∞) es transitivo en A, probando así 1).

Para ver 2), supongamos ahora que D_1 es regularmente cerrado en X y que (D_∞, f_∞) es transitivo en cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X. Como D_1 es un subconjunto no vacío de D_1, que es regularmente cerrado en X, tenemos que (D_∞, f_∞) es transitivo en D_1. Esto implica que (D_∞, f_∞) es transitivo y, así, 2) es cierto. □

Ahora probamos el siguiente resultado, cuyas partes 2) y 3) generalizan [**40**, Teorema 3.2 y Corolario 3.2], respectivamente.

Proposición 3.14. Sea (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo en donde D_1 es regularmente cerrado en X. Entonces se cumplen las siguiente afirmaciones:

1) (D_∞, f_∞) es transitivo si y sólo si (D_∞, f_∞) es transitivo en cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X.
2) Si (D_∞, f_∞) es transitivo, entonces cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X es un conjunto transitivo en (D_∞, f_∞).
3) Si D_1 es invariante en (D_∞, f_∞) y cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X es un conjunto transitivo en (D_∞, f_∞), entonces (D_∞, f_∞) es transitivo.

Demostración. La parte 1) se sigue de la Proposición 3.13. Para mostrar 2), supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo y que A es un subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X. Utilizando las mismas ideas que dimos en la demostración de la parte 1) de la Proposición 3.13, se verifica que A es transitivo en (D_∞, f_∞). Esto prueba 2). Para mostrar 3), supongamos que D_1 es invariante en (D_∞, f_∞) y que cada subconjunto no vacío de D_1 y regularmente cerrado en X es transitivo en (D_∞, f_∞). Entonces D_1 mismo es un conjunto transitivo en (D_∞, f_∞). Como D_1 es invariante en (D_∞, f_∞), por la Proposición 3.12, (D_∞, f_∞) es transitivo en D_1. Luego (D_∞, f_∞) es transitivo. Esto prueba 3). □

Las Proposiciones 3.13 y 3.14 permanecen válidas si cambiamos transitividad por m-transitividad.

Los siguientes dos resultados son una modificación de los exhibidos en [**40**], donde cambiamos la hipótesis de que un conjunto sea transitivo en un sistema no-autónomo, por la de que el sistema no-autónomo es transitivo en el subconjunto. Es fácil ver que un sistema autónomo (X, f) es transitivo si y sólo si, para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. En [**24**, Proposición 1.10] se prueba que (X, f) es transitivo si y sólo si, para cada subconjunto abierto y no vacío V de X, el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)$ es denso en X. Dichos resultados toman la siguiente forma en el caso no-autónomo.

Teorema 3.15. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) (D_∞, f_∞) es transitivo en A.
2) Para cada par de subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de A, existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $U \cap (f_1^k)^{-1}(V) \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto V de X tal que $V \cap A$ es no vacío, los conjuntos
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V \cap A) \quad \text{y} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V)$$
son densos en A.

Demostración. Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.8, $U \cap (f_1^k)^{-1}(V) \neq \emptyset$. Esto prueba que 1) implica 2).

Supongamos que 2) es cierto. Sea V un subconjunto abierto de X tal que $V \cap A$ es no vacío. Tomemos un subconjunto abierto y no vacío U de A. Por 2), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $U \cap (f_1^{k_0})^{-1}(V \cap A) \neq \emptyset$. Luego,
$$\emptyset \neq U \cap (f_1^{k_0})^{-1}(V \cap A) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(U \cap (f_1^k)^{-1}(V \cap A)\right) = U \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V \cap A)\right).$$
Esto prueba, por la parte 2) de la Proposición 2.2, que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V \cap A)$ es denso en A. Como
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V \cap A) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V),$$
por la parte 3) de la Proposición 2.2, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V)$ es denso en A. Así 2) implica 3).

Supongamos que 3) es cierto. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Por 3), $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V)$ es denso en A por lo que, por la parte 2) de la Proposición 2.2,
$$U \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f_1^k)^{-1}(V)\right) \neq \emptyset.$$
Luego existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $U \cap (f_1^n)^{-1}(V) \neq \emptyset$ y, por la Proposición 2.8, $f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Esto prueba que 3) implica 1). $\square$

Usando una prueba similar a la dada en el Teorema 3.15, se puede demostrar el siguiente resultado que generaliza [**40**, Proposición 3.1], probado para sistemas no autónomos de la forma (X, f_∞) y subconjuntos cerrados de X.

Teorema 3.16. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) A es transitivo en (D_∞, f_∞).

2) Para cada subconjunto abierto y no vacío U de A y cada subconjunto abierto y no vacío V de X tal que $V \cap A \neq \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $U \cap (f_1^k)^{-1}(V) \neq \emptyset$.
3) Para cada subconjunto abierto V de X tal que $V \cap A \neq \emptyset$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(f_1^k)^{-1}(V)$ es denso en A.

Vamos ahora a enunciar otras propiedades de los conjuntos transitivos.

Proposición 3.17. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si U es abierto y no vacío en A, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, entonces U es denso en A.
2) Si A es regularmente cerrado en X, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1^n(A)$ es denso en A.
3) Si $E \subset A$ es tal que E es cerrado en A, E es invariante en (D_∞, f_∞) y, además $(f_1^n)^{-1}(A) \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $E = A$ o bien E es denso en ninguna parte de A.

Demostración. Para ver 1), supongamos que U es abierto y no vacío en A y que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$. Por la parte 3) del Teorema 3.15, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_1^n)^{-1}(U)$ es denso en A. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, por la parte 3) de la Proposición 2.2, U es denso en A. Esto prueba 1).

Para mostrar 2), supongamos que A es regularmente cerrado en X y que U es un subconjunto abierto y no vacío de A. Por la parte 1) de la Proposición 2.2, $\operatorname{int} U \neq \emptyset$. Esto implica que tanto $\operatorname{int} A$ como $\operatorname{int} U$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Como (D_∞, f_∞) es transitivo en A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(\operatorname{int} A) \cap \operatorname{int} U \neq \emptyset$. Luego $f_1^k(A) \cap U \neq \emptyset$, por lo que $U \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1^n(A)\right) \neq \emptyset$. Esto prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1^n(A)$ es denso en A y así 2) es cierto.

Para ver 3), supongamos que $E \subset A$ es tal que E es cerrado en A y E es invariante en (D_∞, f_∞). Supongamos también que $(f_1^n)^{-1}(A) \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos que $E \subsetneq A$. Dado que E es cerrado en A, el conjunto $U = A \setminus E$ es abierto y no vacío en A. Vamos a probar que $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para esto fijemos $n \in \mathbb{N}$. Como E es invariante en (D_∞, f_∞), $f_1^n(E) \subset E$. Luego $E \subset (f_1^n)^{-1}(E)$ y como también $(f_1^n)^{-1}(A) \subset A$, tenemos que

$$(f_1^n)^{-1}(U) = (f_1^n)^{-1}(A \setminus E) = (f_1^n)^{-1}(A) \setminus (f_1^n)^{-1}(E) \subset A \setminus E = U.$$

Esto implica, por la afirmación 1), que U es denso en A. Luego $E = \mathrm{cl}[A]E$ es co-denso en A, y por la Proposición 2.4, E es denso en ninguna parte de A. Esto prueba 3). $\square$

Proposición 3.18. Consideremos un sistema no-autónomo (X, f_∞), así como $A \subset X$ de modo que (X, f_∞) es transitivo en A. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1) Si U es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces U es denso en A.
2) Si A es regularmente cerrado en X, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1^n(A)$ es denso en A.
3) Si E es un subconjunto cerrado en X tal que $E \subset A$ y E es invariante en (X, f_∞), entonces $E = A$ o bien E es denso en ninguna parte de A.

Demostración. La prueba de 1) es, en esencia, la misma que la dada en la Proposición 3.17. Tomemos U como se indica en 1). Por la parte 3) del Teorema 3.15, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_1^n)^{-1}(U)$ es denso en A. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, por la parte 3) de la Proposición 2.2, U es denso en A. Esto prueba 1). La prueba de 2) es idéntica a la dada en la Proposición 3.17. La prueba de 3), aunque sigue ideas similares a la dada en la Proposición 3.17, es más simple. Sea E como se indica en 3). Si $E \subsetneq A$ entonces, como E es cerrado en X, el conjunto $U = X \setminus E$ es abierto y no vacío en X. Vamos a probar que $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijemos, por tanto $n \in \mathbb{N}$. Como E es invariante en (X, f_∞), tenemos que $E \subset (f_1^n)^{-1}(E)$, de donde

$$(f_1^n)^{-1}(U) = (f_1^n)^{-1}(X \setminus E) = (f_1^n)^{-1}(X) \setminus (f_1^n)^{-1}(E) \subset X \setminus E = U.$$

Esto implica, por 1), que U es denso en A y de aquí se sigue, como hicimos ver en la prueba de la Proposición 3.17, que E es denso en ninguna parte de A. $\square$

Las propiedades de las Proposiciones 3.17 y 3.18 indican diferencias que se presentan entre trabajar con sistemas no-autónomos en la forma general (D_∞, f_∞) y los del caso especial (X, f_∞).

El siguiente resultado generaliza [**40**, Proposición 3.3], y se demuestra de manera similar a como hicimos para la Proposición 3.17 usando, para probar la parte 1), el Teorema 3.16 en lugar del Teorema 3.15.

Proposición 3.19. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Supongamos que A es transitivo en (D_∞, f_∞). Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) Si U es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $(f_1^n)^{-1}(U) \subset U$, entonces U es denso en A.
2) Si A es regularmente cerrado en X, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_1^n(A)$ es denso en A.
3) Si $E \subset A$ es tal que E es cerrado en A, E es invariante en (D_∞, f_∞) y, además $(f_1^n)^{-1}(A) \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $E = A$ o bien E es denso en ninguna parte de A.

4. Conjugación Topológica

En la presente sección consideramos la noción de semiconjugación y de conjugación topológicas, tanto para los sistemas autónomos como para los no-autónomos. Posteriormente mostramos que tanto la transitividad como la m-transitividad en un conjunto, son propiedades que se preservan bajo semiconjugación topológica entre sistemas no-autónomos de la forma particular (X, f_∞). También, para dichos sistemas no-autónomos, presentamos condiciones bajo las que "ser un conjunto transitivo" o bien "ser un conjunto m-transitivo", se preservan bajo semiconjugación topológica. El Teorema 4.12 es el más importante de la sección pues, además de generalizar [**50**, Lema 3.1] y aparecer por primera vez en este trabajo, considera tanto la transitividad como la m-transitividad en un conjunto, entre sistemas no-autónomos en la situación general.

En Topología la forma usual de comparar dos espacios topológicos X y Y, es a través de una función continua y suprayectiva de X a Y, o de Y a X, o mediante un homeomorfismo de X a Y. Cuando existen una función continua y suprayectiva o bien un homeomorfismo de X a Y, entonces hay propiedades que cuando X las tiene, también las posee Y. En la teoría de los sistemas autónomos, la manera de emular esto, para así comparar dos sistemas autónomos (X, f) y (Y, g), es determinando si entre ellos existe una semiconjugación topológica, o bien una conjugación topológica, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 4.1. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas autónomos. Decimos que (X, f) está **topológicamente semiconjugado** con (Y, g), si existe una función continua y suprayectiva $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Decimos que (X, f) está **topológicamente conjugado** con (Y, g) si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Para simplificar, en adelante diremos semiconjugado o conjugado en lugar de topológicamente semiconjugado o de topológicamente conjugado, respectivamente. Si (X, f) está semiconjugado con (Y, g), a cualquier función continua y suprayectiva $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$ se le llama una *semiconjugación*. De manera similar, si (X, f) está conjugado con (Y, g), cualquier homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$, es una *conjugación*.

En [**40**, Definici0́n 3.1] se generalizan las nociones de semiconjugación y de conjugación para dos sistemas no-autónomos (X, f_∞) y (Y, g_∞), donde $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $g_\infty = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon X \to X$ y $g_n\colon Y \to Y$ son funciones continuas.

Definición 4.2. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos. Decimos que (X, f_∞) está **semiconjugado** con (Y, g_∞), si existe una función continua y suprayectiva $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f_n = g_n \circ h$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Decimos que (X, f_∞) está **conjugado** con (Y, g_∞) si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f_n = g_n \circ h$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como antes, a la función h que se describe en la definición anterior, se le llama una *semiconjugación* o bien una *conjugación*, dependiendo de si (X, f_∞) está semiconjugado o conjugado con (Y, g_∞). Para ilustrar la noción anterior, consideremos el siguiente ejemplo que aparece en [**40**, Ejemplo 3.1].

Ejemplo 4.3. Sea S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, con su topología usual. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología usual y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g_n\colon S^1 \to S^1$ las funciones definidas, para $x \in \mathbb{R}$ y $e^{i\theta} \in S^1$, como

$$f_n(x) = nx \quad \text{ y } \quad g_n\left(e^{i\theta}\right) = e^{in\theta}.$$

Entonces $(\mathbb{R}, f_\infty)$ y (S^1, g_∞) son dos sistemas no-autónomos. Sea $h\colon \mathbb{R} \to S^1$ la función definida para $x \in \mathbb{R}$, como $h(x) = e^{2\pi ix}$. Notemos que h es una función continua y suprayectiva. Además para cada $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in X$,

$$(g_n \circ h)(x) = g_n(h(x)) = g_n\left(e^{2\pi ix}\right) = e^{2\pi inx}$$

y

$$(h \circ f_n)(x) = h(f_n(x)) = h(nx) = e^{2\pi inx} = (g_n \circ h)(x).$$

Luego $g_n \circ h = h \circ f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $(\mathbb{R}, f_\infty)$ está semiconjugado con (S^1, g_∞) y que h es una semiconjugación. □

Dados dos espacios topológicos X y Y, en [**50**, Definici n 3.1] se presenta la noción de conjugación para dos sistemas no-autónomos (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞), donde $D_\infty = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$, $E_\infty = \{E_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, $g_\infty = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset X$, $E_n \subset Y$ y tanto $f_n\colon D_n \to D_{n+1}$ como $g_n\colon E_n \to E_{n+1}$ son funciones continuas. En lo que resta de la presente sección, pensaremos que los sistemas no-autónomos (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) satisfacen las condiciones que acabamos de indicar.

Definición 4.4. Supongamos que X y Y son dos espacios topológicos. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas no-autónomos. Decimos que (D_∞, f_∞) está **semiconjugado** con (E_∞, g_∞) si existe una sucesión $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, llamada una **semiconjugación**, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n\colon D_n \to E_n$ es una función continua y suprayectiva tal que $h_{n+1} \circ f_n = g_n \circ h_n$. Decimos que (D_∞, f_∞) está **conjugado** con (E_∞, g_∞) si existe una sucesión $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, llamada una **conjugación**, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n\colon D_n \to E_n$ es un homeomorfismo tal que $h_{n+1} \circ f_n = g_n \circ h_n$.

Notemos que (X, f_∞) está semiconjugado (respectivamente, conjugado) con (Y, g_∞) si existe una semiconjugación (respectivamente, una conjugación) de la forma $h_\infty = \{h, h, h, \ldots, h, \ldots\}$, donde $h\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva (respectivamente, es un homeomorfismo). Cuando un sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) está conjugado con el sistema no-autónomo (E_∞, g_∞), es común decir que los sistemas (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) están conjugados. Cuando (D_∞, f_∞) está semiconjugado con (E_∞, g_∞) y h_∞ es una semiconjugación, se suele decir que (D_∞, f_∞) es una *h_∞-extensión* de (E_∞, g_∞).

Definición 4.5. Sea P una propiedad. Decimos que P es una **propiedad dinámica** si para cada dos sistemas no-autónomos y conjugados (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞), resulta que (D_∞, f_∞) posee la propiedad P si y sólo si (E_∞, g_∞) posee la propiedad P.

Se puede considerar que la teoría de los sistemas no-aut
onomos estudia los sistemas no-autónomos, las propiedades dinámicas y aquellas propiedades que se preservan bajo semiconjugación. Vamos a probar, en el Corolario 4.9, que la transitividad y la m-transitividad son propiedades dinámicas. En general, para mostrar que cuando tenemos dos sistemas semiconjugados o conjugados, ciertas propiedades que posee uno de ellos también las tiene el otro, el resultado que enunciamos a continuación y su corolario juegan un papel importante.

Proposición 4.6. Si (D_∞, f_∞) está semiconjugado con (E_∞, g_∞), entonces para cada semiconjugación $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que

$$h_{n+1} \circ f_1^n = g_1^n \circ h_1, \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Demostración. Sea $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ una semiconjugaci
on. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n : D_n \to E_n$ es una función continua y suprayectiva tal que $h_{n+1} \circ f_n = g_n \circ h_n$. Como $f_1^0 = \mathrm{id}_{D_1}$ y $g_1^0 = \mathrm{id}_{E_1}$, tenemos que $h_1 \circ f_1^0 = h_1$ y $g_1^0 \circ h_1 = h_1$. Luego $h_{0+1} \circ f_1^0 = g_1^0 \circ h_1$, y el resultado se cumple para $n = 0$. Ahora vamos a probar, por inducción, que $h_{n+1} \circ f_1^n = g_1^n \circ h_1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$, tenemos que $h_2 \circ f_1^1 = g_1^1 \circ h_1$ y el resultado se cumple para $n = 1$. Supongamos que para un número natural k, tenemos que $h_{k+1} \circ f_1^k = g_1^k \circ h_1$. Como h_∞ es una semiconjugación, $h_{k+2} \circ f_{k+1} = g_{k+1} \circ h_{k+1}$ de donde

$$\begin{aligned} g_{k+1} \circ \big(h_{k+1} \circ f_1^k\big) = (g_{k+1} \circ h_{k+1}) \circ f_1^k = (h_{k+2} \circ f_{k+1}) \circ f_1^k = \\ = h_{k+2} \circ \big(f_{k+1} \circ f_1^k\big) = h_{k+2} \circ f_1^{k+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, por hipótesis de inducción,

$$g_{k+1} \circ \big(h_{k+1} \circ f_1^k\big) = g_{k+1} \circ \big(g_1^k \circ h_1\big) = \big(g_{k+1} \circ g_1^k\big) \circ h_1 = g_1^{k+1} \circ h_1.$$

Luego $h_{(k+1)+1} \circ f_1^{k+1} = h_{k+2} \circ f_1^{k+1} = g_1^{k+1} \circ h_1$, y el resultado se cumple para $n = k+1$. Esto termina la prueba por inducción. □

Corolario 4.7. Si (X, f_∞) está semiconjugado con (Y, g_∞) entonces para cada semiconjugación $h : X \to Y$ sucede que

$$h \circ f_1^n = g_1^n \circ h, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞), por el siguiente resultado, tanto la transitividad como la m-transitividad en un conjunto se preservan bajo semiconjugación.

Teorema 4.8. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $h : X \to Y$ una semiconjugación. Sea A un subconjunto no vacío de X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si (X, f_∞) es transitivo en A, entonces (Y, g_∞) es transitivo en $h(A)$;
2) si (X, f_∞) es m-transitivo en A y $h(A)$ tiene más de un punto, entonces (Y, g_∞) es m-transitivo en $h(A)$.

Demostración. Para mostrar 1), supongamos que (X, f_∞) es transitivo en A. Sean C y D dos subconjuntos abiertos y no vacíos de $h(A)$. Tomemos un subconjunto abierto y no vacío V de Y tal que $D = V \cap h(A)$. Como $D \cap h(A) \neq \emptyset$, por la Proposición 2.8, $A \cap h^{-1}(D) \neq \emptyset$. Usando la contención $A \subset h^{-1}(h(A))$, no es difícil probar que

$$A \cap h^{-1}(D) = A \cap h^{-1}(V \cap h(A)) = A \cap h^{-1}(V).$$

Esto implica, por la continuidad de h, que $A \cap h^{-1}(D)$ es un subconjunto abierto y no vacío de A. De manera similar $A \cap h^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto y no vacío de A. Por la transitividad de (X, f_∞) en A y la propiedad 2) del Teorema 3.15, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(A \cap h^{-1}(D)) \cap (f_1^k)^{-1}(A \cap h^{-1}(C)) \neq \emptyset. \tag{5.1}$$

Como h es una semiconjugación, por el Corolario 4.7, $g_1^k \circ h = h \circ f_1^k$. Luego

$$\begin{aligned} (A \cap h^{-1}(D)) \cap (f_1^k)^{-1}(A \cap h^{-1}(C)) = A \cap h^{-1}(D) \cap (f_1^k)^{-1}(A) \cap (f_1^k)^{-1}(h^{-1}(C)) = \\ = A \cap h^{-1}(D) \cap (f_1^k)^{-1}(A) \cap h^{-1}((g_1^k)^{-1}(C)) = A \cap (f_1^k)^{-1}(A) \cap h^{-1}(D \cap (g_1^k)^{-1}(C)). \end{aligned}$$

Usando (5.1) se deduce que

$$A \cap (f_1^k)^{-1}(A) \cap h^{-1}(D \cap (g_1^k)^{-1}(C)) \neq \emptyset.$$

Esto implica que $D \cap (g_1^k)^{-1}(C) \neq \emptyset$ y, por la propiedad 2) del Teorema 3.15, (Y, g_∞) es transitivo en $h(A)$.

La prueba de 2) es similar a la que acabamos de presentar. Supongamos que (X, f_∞) es m-transitivo en A y que $|h(A)| > 1$. Sean $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ y $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ dos familias de m subconjuntos abiertos y no vacíos de $h(A)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sea W_i un abierto en Y tal que $V_i = W_i \cap h(A)$. Tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Puesto que $V_i \cap h(A) \neq \emptyset$, por la Proposición 2.8, $A \cap h^{-1}(V_i) \neq \emptyset$. Usando la contención $A \subset h^{-1}(h(A))$, no es difícil probar que

$$A \cap h^{-1}(V_i) = A \cap h^{-1}(W_i \cap h(A)) = A \cap h^{-1}(W_i).$$

Esto implica, por la continuidad de h, que

$$\{A \cap h^{-1}(V_1), A \cap h^{-1}(V_2), \ldots, A \cap h^{-1}(V_m)\}$$

es una familia de m subconjuntos abiertos y no vacíos de A. De la misma manera se tiene que

$$\{A \cap h^{-1}(U_1), A \cap h^{-1}(U_2), \ldots, A \cap h^{-1}(U_m)\}$$

es una familia de m subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Como (X, f_∞) es m-transitivo en A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_1^k(A \cap h^{-1}(U_i)) \cap (A \cap h^{-1}(V_i)) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Por la Proposición 2.8,

$$(h^{-1}(U_i) \cap A) \cap (f_1^k)^{-1}(h^{-1}(V_i) \cap A) \neq \emptyset.$$

Al ser h una semiconjugaci
on, por el Corolario 4.7, $g_1^k \circ h = h \circ f_1^k$. Luego

$$\begin{aligned}\emptyset \neq h^{-1}(U_i) \cap A \cap (f_1^k)^{-1}(h^{-1}(V_i) \cap A) = \\ = h^{-1}(U_i) \cap A \cap h^{-1}((g_1^k)^{-1}(V_i)) \cap (f_1^k)^{-1}(A) = \\ = A \cap (f_1^k)^{-1}(A) \cap h^{-1}(U_i \cap (g_1^k)^{-1}(V_i)).\end{aligned}$$

Esto implica que $U_i \cap (g_1^k)^{-1}(V_i) \neq \emptyset$. Aplicando de nuevo la Proposición 2.8, tenemos que $g_1^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y, por tanto, (Y, g_∞) es m-transitivo en $h(A)$. □

Corolario 4.9. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $h\colon X \to Y$ una conjugación. Sea A un subconjunto no vacío de X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) (X, f_∞) es transitivo en A si y s
olo si (Y, g_∞) es transitivo en $h(A)$;
2) (X, f_∞) es m-transitivo en A si y sólo si (Y, g_∞) es m-transitivo en $h(A)$.

Demostración. Basta observar que, bajo el homeomorfismo h, A es no vacío en X si y s
olo si $h(A)$ es no vacío en Y, y A tiene más de un punto si y sólo si $h(A)$ tiene más de un punto, y aplicar el Teorema 4.8. □

Los siguientes resultados aparecen originalmente en [**40**, Teorema 3.3 y Corolario 3.3], respectivamente, para subconjuntos cerrados A de X y semiconjugaciones $h\colon X \to Y$ para las que $h(A)$ es un subconjunto cerrado en Y. En el primero se indica que "ser un conjunto transitivo" es una propiedad que se preserva bajo semiconjugación. También, bajo las condiciones que se mencionan, "ser un conjunto m-transitivo" se preserva bajo semiconjugación. Del corolario se infiere que "poseer un conjunto transitivo" y "poseer un conjunto m-transitivo" son propiedades dinámicas.

Teorema 4.10. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $h\colon X \to Y$ una semiconjugación. Sea A un subconjunto no vacío de X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si A es transitivo en (X, f_∞), entonces $h(A)$ es transitivo en (Y, g_∞);

2) si A es m-transitivo en (X, f_∞) y $h(A)$ tiene más de un punto, entonces $h(A)$ es m-transitivo en (Y, g_∞).

Demostración. La prueba de 1) sigue ideas muy similares a las indicadas en la prueba de la afirmación 1) del Teorema 4.8. Sean C un subconjunto abierto y no vacío de $h(A)$ y V un subconjunto abierto y no vacío de Y tal que $V \cap h(A) \neq \emptyset$. Hagamos $D = V \cap h(A)$. Como indicamos en la prueba de la parte 1) del Teorema 4.8, $A \cap h^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto y no vacío de A y $h^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X tal que $A \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Puesto que A es transitivo en (X, f_∞), por la parte 2) del Teorema 3.16, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \cap h^{-1}(C) \cap (f_1^k)^{-1}(h^{-1}(V)) \neq \emptyset.$$

Como h es una semiconjugación, por el Corolario 4.7, $g_1^k \circ h = h \circ f_1^k$. Luego

$$A \cap h^{-1}(C) \cap (f_1^k)^{-1}(h^{-1}(V)) = A \cap h^{-1}(C) \cap h^{-1}((g_1^k)^{-1}(V)) =$$
$$= A \cap h^{-1}(C \cap (g_1^k)^{-1}(V)).$$

Esto implica que $C \cap (g_1^k)^{-1}(V) \neq \emptyset$ y, por la parte 2) del Teorema 3.16, $h(A)$ es transitivo en (Y, g_∞) probando así 1). La demostración de 2) sigue ideas similares a las que acabamos de escribir y a las indicadas en la prueba de la parte 2) del Teorema 4.8. □

Corolario 4.11. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos, $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ y $h\colon X \to Y$ una conjugación. Sea A un subconjunto no vacóo de X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) A es transitivo en (X, f_∞) si y sólo si $h(A)$ es transitivo en (Y, g_∞);
2) A es m-transitivo en (X, f_∞) si y sólo si $h(A)$ es m-transitivo en (Y, g_∞).

Para sistemas no-autónomos en la forma general, se tiene el siguiente resultado, que generaliza la parte (ii) de [**50**, Lema 3.1], en donde se supone que X y Y son espacios métricos y solo se muestra que, cuando la condición $(\star)$ se cumple, la transitividad de (E_∞, g_∞) implica la transitividad de (D_∞, f_∞).

Teorema 4.12. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas no-autónomos y $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Supongamos que (D_∞, f_∞) está conjugado con (E_∞, g_∞), y que $h_\infty = \{h_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ es una conjugación con la siguiente propiedad:

$(\star)$ para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$, si $E_{n_1} \cap E_{n_2} \neq \emptyset$, entonces $h_{n_1}^{-1}(y) = h_{n_2}^{-1}(y)$, para toda $y \in E_{n_1} \cap E_{n_2}$.

Dado un subconjunto no vacío B de E_1, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si (E_∞, g_∞) es transitivo en B, entonces (D_∞, f_∞) es transitivo en $h_1^{-1}(B)$;
2) si (E_∞, g_∞) es m-transitivo en B, entonces (D_∞, f_∞) es m-transitivo en $h_1^{-1}(B)$.

Demostración. Para mostrar 1), supongamos que (E_∞, g_∞) es transitivo en B. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de $h_1^{-1}(B)$. Como $h_1\colon D_1 \to E_1$ es un homeomorfismo, $h_1(U)$ y $h_1(V)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de B. Puesto que (E_∞, g_∞) es transitivo en B, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(g_1^k)(h_1(U)) \cap h_1(V) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 4.6, $g_1^k \circ h_1 = h_{k+1} \circ f_1^k$, de donde $h_{k+1}(f_1^k(U)) \cap h_1(V) \neq \emptyset$. Esto implica, pues h_{k+1} es un homeomorfismo, que

$$f_1^k(U) \cap (h_{k+1}^{-1} \circ h_1)(V) \neq \emptyset.$$

Sea $x \in U$ tal que $f_1^k(x) \in (h_{k+1}^{-1} \circ h_1)(V)$. Entonces existe $y \in V$ tal que $h_{k+1}(f_1^k(x)) = h_1(y)$. Notemos que $k + 1 \neq 1$, pues $k \in \mathbb{N}$. Además $h_1(y) \in E_1$ y $h_{k+1}(f_1^k(x)) \in E_{k+1}$. Como dichos elementos son iguales, tenemos que $E_1 \cap E_{k+1} \neq \emptyset$ y $h_1(y) \in E_1 \cap E_{k+1}$. Luego, por $(\star)$,

$$h_{k+1}^{-1}(h_1(y)) = h_1^{-1}(h_1(y)) = y.$$

Utilizando esto y la igualdad $h_{k+1}(f_1^k(x)) = h_1(y)$, tenemos que

$$f_1^k(x) = h_{k+1}^{-1}(h_1(y)) = y.$$

Esto prueba que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$, por lo que (D_∞, f_∞) es transitivo en $h_1^{-1}(B)$.

Antes de probar 2), conviene indicar que en la demostración de la parte 1) hemos hecho ver lo siguiente:

$$\text{si } h_{k+1}(f_1^k(U)) \cap h_1(V) \neq \emptyset, \text{ entonces } f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

Para probar 2) supongamos que (E_∞, g_∞) es m-transitivo en B. Sean $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ dos familias de m subconjuntos abiertos y no vacíos de $h_1^{-1}(B)$. Como h_1 es un homeomorfismo, se tiene que

$$\{h_1(U_1), h_1(U_2), \ldots, h_1(U_m)\} \quad \text{y} \quad \{h_1(V_1), h_1(V_2), \ldots, h_1(V_m)\}$$

son dos familias de m subconjuntos abiertos y no vacíos de B. Puesto que (E_∞, g_∞) es m-transitivo en B, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$(g_1^k)(h_1(U_i)) \cap h_1(V_i) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 4.6, $g_1^k \circ h_1 = h_{k+1} \circ f_1^k$, de donde

$$h_{k+1}(f_1^k(U_i)) \cap h_1(V_i) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Luego, por (5.2), obtenemos que

$$f_1^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Por tanto, (D_∞, f_∞) es m-transitivo en $h_1^{-1}(B)$. □

Bajo las hipótesis del Teorema 4.12, tomando $B = E_1$ se deduce que si (E_∞, g_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo), entonces (D_∞, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo). Si los sistemas no-autónomos (X, f_∞) y (Y, g_∞) están conjugados entonces, por la Definición 4.2, toda conjugación es un homeomorfismo h de X en Y. En tal situación, la propiedad $(\star)$ del Teorema 4.12 se cumple pues, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = Y$ y $h_n = h$. Entonces, de las afirmaciones 1) y 2) del Teorema 4.12, si (Y, g_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en B, entonces (X, f_∞) es transitivo (respectivamente, m-transitivo) en $h^{-1}(B)$.

5. Órbitas, Puntos Periódicos y Transitividad

En esta sección estudiamos, tanto en un sistema autónomo como en uno no-autónomo, la relación que existe entre las órbitas de los puntos y la transitividad. Resaltamos diferencias que existen entre sistemas autónomos y no-autónomos mediante ejemplos, mostrando resultados que son válidos para sistemas autónomos, pero no necesariamente para los no-autónomos. Definimos los puntos periódicos de un sistema no-autónomo, los cuales serán de suma importancia en la siguiente sección. También analizamos la relación que existe entre puntos aislados, puntos transitivos (Definición 5.13) y la transitividad en los sistemas autónomos y en los no-autónomos. Las nociones y resultados que aparecen en esta sección, fueron tomados principalmente de [**1**] y [**66**].

Conviene mencionar que en [**66**] un sistema no-autónomo tiene la forma (D_∞, f_∞), donde $D_\infty = \{D_n \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una sucesión de subconjuntos de un espacio métrico X y $f_\infty = \{f_n \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una sucesión tal que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f_n \colon D_n \to D_{n+1}$ es una función, no necesariamente continua. En otras palabras, en [**66**] los sistemas no-autónomos son como los que consideramos en la Definición 3.3, pero sin pedir que cada función f_n sea continua. Como el lector puede observar, las respectivas nociones de transitividad, m-transitividad, conjugación y semiconjugación pudieron presentarse sin pedir que las funciones a considerar sean continuas. En muchos de los resultados que ya probamos, la continuidad de las respectivas funciones no es una propiedad esencial. Lo mismo sucederá con varias nociones y resultados que escribiremos a partir de ahora. Tomando en cuenta esto, adaptaremos los resultados de [**66**] a la forma en como hemos considerado en la Definición 3.3 la noción de sistema no-autónomo.

Notemos primero que en el caso autónomo la órbita de cada punto es un conjunto invariante. Esto es, si (X, f) es un sistema autónomo entonces para cada $x \in X$ sucede que

$$f(\mathrm{orb}(x, f)) \subset \mathrm{orb}(x, f).$$

La situación es distinta en un sistema no-autónomo, como lo muestran los siguientes ejemplos, tomados de [**65**, Ejemplo 2.7].

Ejemplo 5.1. Presentamos un sistema estrictamente no-autónomo (X, f_∞) que posee un punto cuya órbita no es invariante. Para ver esto, tomemos $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, así como las funciones continuas $g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas en $x \in \mathbb{R}$ como

$$g_1(x) = x + 1 \quad \text{ y } \quad g_2(x) = x - 1.$$

Sean $f_n = g_1$ para n impar, $f_n = g_2$ para n par y $f_\infty = \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. En el sistema no-autónomo $(\mathbb{R}, f_\infty)$ si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{orb}(x, f_\infty) = \{x, x+1, x, x+1, x, x+1, \ldots\} = \{x, x+1\}.$$

En particular, $\mathrm{orb}(1, f_\infty) = \{1, 2\}$ y

$$f_1^n(\mathrm{orb}(1, f_\infty)) = \begin{cases} \{2,3\}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{1,2\} = \mathrm{orb}(1, f_\infty), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego $\mathrm{orb}(1, f_\infty)$ no es un conjunto invariante en $(\mathbb{R}, f_\infty)$. □

Ejemplo 5.2. Presentamos un sistema estrictamente no-autónomo (X, f_∞) que posee un punto cuya órbita es invariante. Para ver esto, tomemos $X = \mathbb{R}$ con la topología usual así como las funciones continuas $h_1, h_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas en $x \in \mathbb{R}$ como

$$h_1(x) = x^2 \quad \text{ y } \quad h_2(x) = -x.$$

Sean $f_n = h_1$ para n impar, $f_n = h_2$ para n par y $f_\infty = \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. En el sistema no-autónomo $(\mathbb{R}, f_\infty)$ si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{orb}(x, f_\infty) = \{x, x^2, -x^2, x^4, -x^4, \ldots\}.$$

En particular, $\mathrm{orb}(-1, f_\infty) = \{-1, 1\}$ y

$$f_1^n(\mathrm{orb}(-1, f_\infty)) \subset \{-1, 1\} = \mathrm{orb}(-1, f_\infty).$$

Luego $\mathrm{orb}(-1, f_\infty)$ es un conjunto invariante en $(\mathbb{R}, f_\infty)$. □

5.1. Puntos Periódicos. Recordemos que si (X, f) es un sistema autónomo y $x \in X$, entonces x es un punto *k-periódico* de (X, f) si $k \in \mathbb{N}$ y $f^k(x) = x$. Al menor número natural k tal que $f^k(x) = x$ se le llama el *periodo* de x. Decimos que x es un *punto periódico* de (X, f) si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que x es un punto k-peripodico de (X, f). Un *punto fijo* de (X, f) es un punto 1-periódico de (X, f). La noción de punto periódico no es estándar en los sistemas no-autónomos. En la literatura han aparecido tres nociones que distinguimos como (P1), (P2) y (P3). Todas ellas generalizan la noción de punto periódico en el caso autónomo.

Definición 5.3. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $x \in D_1$. Decimos que x es un punto

(P1) **k-periódico en el sentido (P1)** si $k \in \mathbb{N}$ y $f_1^k(x) = x$; al menor k con esta propiedad se le llama el **periodo** de x.
(P2) **k-peri**
odico en el sentido (P2) si $k \in \mathbb{N}$ y $f_1^{kn}(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$; al menor k con esta propiedad se le llama el **periodo** de x.

(P3) **k-periódico en el sentido (P3)** si $k \in \mathbb{N}$ y

$$f_1^{k+n}(x) = f_1^n(x), \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \tag{5.1}$$

si además de (5.1) se tiene que $k \neq 1$ y $f_1^m(x) \neq x$ para cada $m \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, decimos que k es el **periodo** de x.

Para $i \in \{1, 2, 3\}$, decimos que x es un **punto periódico de** (D_∞, f_∞) **en el sentido (Pi)** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que x es k-periódico en el sentido (Pi). Decimos que x es un **punto fijo de** (D_∞, f_∞) **en el sentido (Pi)** si x es un punto 1-periódico en el sentido (Pi).

En [**49**] se consideran los puntos periódicos en el sentido (P1), mientras que en [**43**] se toman en el sentido (P2) y tanto en [**50**, Definición 2.1] como en [**66**, Definición 2.1] se consideran en el sentido (P3). En [**1**] se dice que el periodo de un punto k-periódico en el sentido (P3) con $k \neq 1$ es el menor número natural k tal que $f_1^k(x) = x$ y los elementos del conjunto $\{f_1^1(x), f_1^2(x), \ldots, f_1^{k-1}(x)\}$ son diferentes dos a dos. Notemos que esta forma de considerar el periodo de un punto periódico en el sentido (P3) difiere a la dada en la Definición 5.3. Notemos también que los puntos periódicos en el sentido (P1) y en el (P2) tienen periodo. Más adelante, en los Ejemplos 5.11 y 5.12, vemos que un punto periódico en el sentido (P3) puede no tener periodo. Notemos que en el sistema no-autónomo $(\mathbb{R}, f_\infty)$ descrito en el Ejemplo 5.1, cada elemento de $\mathbb{R}$ es un punto 2-periódico en el sentido (P3) y de periodo 2.

Consideremos de momento los puntos fijos de un sistema no-autónomo (D_∞, f_∞). Notemos que x es un punto fijo en el sentido (P1) si $f_1(x) = x$. En dicho caso bien puede suceder que $f_2(x)$ y $f_1(x)$ sean puntos distintos. El sistema no-autónomo (X, f_∞) del Ejemplo 5.28 tiene un único punto fijo a_1 en el sentido (P1) y, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sucede que $f_n(a_1) \neq a_1 = f_1(a_1)$. Además $\mathrm{orb}(a_1, f_\infty)$ es infinito.

Notemos ahora que x es un punto fijo en el sentido (P2) si $f_1^n(x) = x$, para toda $n \in \mathbb{N}$. En dicho caso, $\mathrm{orb}(x, f_\infty) = \{x\}$ es un conjunto finito. El siguiente resultado aparece probado en [**1**, Teorema 2.1], para sistemas no-autónomos de la forma (X, f_∞).

Proposición 5.4. *Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $x \in X$. Entonces x es un punto fijo en el sentido (P2) si y sólo si $f_n(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos primero que x es un punto fijo en el sentido (P2). Luego $f_1^n(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $f_1(x) = f_1^1(x) = x$ y si $n \geqslant 2$, entonces

$$f_n(x) = f_n(f_1^{n-1}(x)) = f_1^n(x) = x.$$

Esto prueba que $f_n(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora supongamos que $f_n(x) = x$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_1^n(x) = (f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x) = (f_n \circ \cdots \circ f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = (f_n \circ \cdots \circ f_3 \circ f_2)(x) = \\ = (f_n \circ \cdots \circ f_4 \circ f_3)(f_2(x)) = (f_n \circ \cdots \circ f_4 \circ f_3)(x) = \cdots = f_n(x) = x. \end{aligned}$$

Por tanto, x es un punto fijo en el sentido (P2). □

Notemos ahora que x es un punto fijo en el sentido (P3) si $f_1^{1+n}(x) = f_1^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De esto se infiere el siguiente resultado.

Proposición 5.5. *Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $x \in X$. Entonces x es un punto fijo en el sentido (P2) si y sólo si x es un punto fijo en el sentido (P3).*

Demostración. Supongamos primero que x es un punto fijo en el sentido (P2). Entonces, por la Proposición 5.4, $f_1^n(x) = x$ y $f_n(x) = x$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular $f_1^{1+0}(x) = f_1^1(x) = f_1(x) = x = f_1^0(x)$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f_1^{n+1}(x) = f_{n+1}(f_1^n(x)) = f_{n+1}(x) = x = f_1^n(x).$$

Luego $f_1^{1+n}(x) = f_1^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por lo que x es un punto fijo en el sentido (P3).

Ahora supongamos que x es un punto fijo en el sentido (P3). Entonces $f_1^{1+n}(x) = f_1^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Probemos por inducci
on que $f_1^n(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ tenemos que $f_1^1(x) = f_1^{1+0}(x) = f_1^0(x) = x$. Supongamos que $f_1^k(x) = x$. Entonces $f_1^{k+1}(x) = f_1^{1+k}(x) = f_1^k(x) = x$. Esto prueba que $f_1^n(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, x es un punto fijo en el sentido (P2). □

Así pues, los puntos fijos en el sentido (P2) coinciden con los puntos fijos en el sentido (P3). Consideremos ahora los puntos periódicos como en la Definición 5.3. Notemos que

$$\text{(P3)} \implies \text{(P2)} \implies \text{(P1)}$$

es decir, todo punto k-periódico en el sentido (P3) es k-periódico en el sentido (P2) y, también, todo punto k-periódico en el sentido (P2) es k-periódico en el sentido (P1). Las implicaciones recíprocas no son ciertas y más adelante, en esta sección, veremos ejemplos que ilustran esto (ver Ejemplos 5.11, 5.12, 5.17, y 5.18).

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ definimos

$$P_i(f_\infty) = \{x \in D_1 \colon x \text{ es un punto periódico de } (D_\infty, f_\infty) \text{ en el sentido (Pi)}\}. \tag{5.2}$$

Para un sistema autónomo (X, f), definimos

$$P(f) = \{x \in X \colon x \text{ es un punto periódico de } (X, f)\}. \tag{5.3}$$

El siguiente resultado se sigue directamente de la noción de punto periódico y de la parte 2) de la Proposición 2.2.

Proposición 5.6. Sean (X, f) un sistema autónomo y A un subconjunto no vacío de X tal que $f(A) \subset A$. Entonces $P(f)$ es denso en A si y sólo si $P(f|_A)$, el conjunto de puntos periódicos del sistema autónomo $(A, f|_A)$, es denso en A.

Ahora mostramos una propiedad de los puntos k-periódicos en el sentido (P3).

Proposición 5.7. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, $k, n \in \mathbb{N}$ y $x \in D_1$. Si x es un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido *(P3)*, entonces

$$f_1^{km+n}(x) = f_1^n(x), \qquad \text{para cada } m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{5.4}$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $m = 0$, la igualdad (5.4) es cierta. Si $m = 1$ entonces, por (5.1), $f_1^{k+n}(x) = f_1^n(x)$. Supongamos que $m \geqslant 2$. Utilizando m veces la igualdad (5.1), tenemos que

$$\begin{aligned} f_1^{km+n}(x) = f_1^{k+[k(m-1)+n]}(x) = f_1^{k(m-1)+n}(x) = f_1^{k+[k(m-2)+n]}(x) = f_1^{k(m-2)+n}(x) = \\ = \cdots = f_1^{k[m-(m-1)]+n}(x) = f_1^{k+n}(x) = f_1^n(x). \end{aligned}$$

□

5.2. Conjugación y Semiconjugación. En la prueba del siguiente resultado vemos que, para dos sistemas no-autónomos (X, f_∞) y (Y, g_∞), "ser un punto k-periódico" y "tener un conjunto denso de puntos periódicos" son propiedades que se preservan bajo semiconjugación. En particular, son propiedades dinámicas.

Teorema 5.8. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos, $h \colon X \to Y$ una semiconjugación e $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si $x \in P_i(f_\infty)$, entonces $h(x) \in P_i(g_\infty)$;
2) si $P_i(f_\infty)$ es denso en X, entonces $P_i(g_\infty)$ es denso en Y.

Demostración. Para probar 1), sea $x \in P_i(f_\infty)$. Hagamos $y = h(x)$ y supongamos primero que x es k-periódico de (X, f_∞) en el sentido (P1). Entonces $f_1^k(x) = x$. Por el Corolario 4.7, $g_1^k \circ h = h \circ f_1^k$, así que

$$g_1^k(y) = g_1^k(h(x)) = h(f_1^k(x)) = h(x) = y,$$

de donde y es k-periódico de (Y, g_∞) en el sentido (P1).

Ahora supongamos que x es k-periódico de (X, f_∞) en el sentido (P2). Entones $f_1^{kn}(x) = x$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$ tenemos, por el Corolario 4.7, $g_1^{kn} \circ h = h \circ f_1^{kn}$, así que

$$g_1^{kn}(y) = g_1^{kn}(h(x)) = h(f_1^{kn}(x)) = h(x) = y,$$

por lo que y es k-periódico de (Y, g_∞) en el sentido (P2).

Para terminar la prueba de 1) supongamos que x es un punto k-periódico de (X, f_∞) en el sentido (P3). Entonces $f_1^{k+n}(x) = f_1^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijemos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por el Corolario 4.7, $g_1^n \circ h = h \circ f_1^n$ y $g_1^{k+n} \circ h = h \circ f_1^{k+n}$. Luego

$$g_1^{k+n}(y) = g_1^{k+n}(h(x)) = h\left(f_1^{k+n}(x)\right) = h\left(f_1^n(x)\right) = g_1^n(h(x)) = g_1^n(y).$$

Por tanto, y es un punto k-periódico de (Y, g_∞) en el sentido (P3). Esto prueba 1).

Para mostrar 2) supongamos que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $P_i(f_\infty)$ es denso en X. Sea V un subconjunto abierto y no vacío de Y. Entonces $h^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X y, como $P_i(f_\infty)$ es denso en X, existe $p \in h^{-1}(V) \cap P_i(f_\infty)$. Por 1), $h(p) \in P_i(g_\infty)$, así que $V \cap P(g_\infty) \neq \emptyset$. Luego $P_i(g_\infty)$ es denso en Y y 2) se cumple. $\square$

Para sistemas no-autónomos en la forma general, se tiene el siguiente resultado, que generaliza la parte (i) de [**50**, Lema 3.1], en donde se supone que X y Y son espacios métricos y solamente se utilizan puntos periódicos en el sentido (P3).

Teorema 5.9. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas no-autónomos. Supongamos que (D_∞, f_∞) está conjugado con (E_∞, g_∞), y que $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una conjugación con la siguiente propiedad:

($\star$) para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$, si $E_{n_1} \cap E_{n_2} \neq \emptyset$, entonces $h_{n_1}^{-1}(y) = h_{n_2}^{-1}(y)$, para toda $y \in E_{n_1} \cap E_{n_2}$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1) si $y \in P_i(g_\infty)$, entonces $h_1^{-1}(y) \in P_i(f_\infty)$;
2) si $P_i(g_\infty)$ es denso en E_1, entonces $P_i(f_\infty)$ es denso en D_1.

Demostración. Recordemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n : D_n \to E_n$ es un homeomorfismo. Para ver 1) sea $y \in P_i(g_\infty)$. Hagamos $x = h_1^{-1}(y)$ y supongamos que $y \in E_1$ es un punto k-periódico de (E_∞, g_∞) en el sentido (P1). Entonces $k \in \mathbb{N}$ y $g_1^k(y) = y$. Por la Proposición 4.6, $h_{k+1} \circ f_1^k = g_1^k \circ h_1$. Luego

$$h_{k+1}(f_1^k(x)) = g_1^k(h_1(x)) = g_1^k(y) = y = h_1(x).$$

Puesto que $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $k + 1 \neq 1$. Además $h_{k+1}(f_1^k(x)) \in E_{k+1}$ y $h_1(x) \in E_1$ y como dichos elementos son iguales, $E_{k+1} \cap E_1 \neq \emptyset$. Aplicando ($\star$) deducimos que

$$x = h_1^{-1}(h_1(x)) = h_{k+1}^{-1}(h_1(x)) = h_{k+1}^{-1}(h_{k+1}(f_1^k(x))) = f_1^k(x).$$

Luego $f_1^k(x) = x$, de donde x es un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P1). Por tanto $h_1^{-1}(y) \in P_1(f_\infty)$.

Ahora supongamos que $y \in E_1$ es un punto k-periódico de (E_∞, g_∞) en el sentido (P2). Entonces $k \in \mathbb{N}$ y $g_1^{kn}(y) = y$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 4.6, $h_{kn+1} \circ f_1^{kn} = g_1^{kn} \circ h_1$. Luego

$$h_{kn+1}(f_1^{kn}(x)) = g_1^{kn}(h_1(x)) = g_1^{kn}(y) = y = h_1(x).$$

Como $k, n \in \mathbb{N}$ tenemos que $kn + 1 \neq 1$. Además $h_{kn+1}(f_1^{kn}(x)) \in E_{kn+1}$ y $h_1(x) \in E_1$ y al ser dichos elementos iguales, $E_{kn+1} \cap E_1 \neq \emptyset$. Aplicando $(\star)$ deducimos que

$$x = h_1^{-1}(h_1(x)) = h_{kn+1}^{-1}(h_1(x)) = h_{kn+1}^{-1}(h_{kn+1}(f_1^{kn}(x))) = f_1^{kn}(x).$$

Luego $f_1^{kn}(x) = x$, de donde x es un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P2). Por tanto $h_1^{-1}(y) \in P_2(f_\infty)$.

Para terminar la prueba de 1) supongamos que $y \in E_1$ es un punto k-periódico de (E_∞, g_∞) en el sentido (P3). Entonces $k \in \mathbb{N}$ y $g_1^{k+n}(y) = g_1^n(y)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijemos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 4.6,

$$h_{n+1} \circ f_1^n = g_1^n \circ h_1 \quad \text{ y } \quad h_{k+n+1} \circ f_1^{k+n} = g_1^{k+n} \circ h_1.$$

Luego $h_{n+1} \circ f_1^n \circ h_1^{-1} = g_1^n$, por lo que

$$\begin{aligned} h_{k+n+1}\left(f_1^{k+n}(x)\right) &= g_1^{k+n}\left(h_1(x)\right) = g_1^{k+n}(y) = g_1^n(y) = \\ &= h_{n+1}\left(f_1^n\left(h_1^{-1}(y)\right)\right) = h_{n+1}\left(f_1^n(x)\right). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $k + n + 1 \neq n + 1$. Además

$$h_{n+1}(f_1^n(x)) \in E_{n+1}, \quad h_{k+n+1}(f_1^{k+n}(x)) \in E_{k+n+1} \;\text{ y }\; h_{k+n+1}(f_1^{k+n}(x)) = h_{n+1}(f_1^n(x))$$

por lo que $h_{n+1}(f_1^n(x)) \in E_{n+1} \cap E_{k+n+1}$. Aplicando $(\star)$, deducimos que

$$\begin{aligned} f_1^n(x) &= h_{n+1}^{-1}\left(h_{n+1}\left(f_1^n(x)\right)\right) = h_{k+n+1}^{-1}\left(h_{n+1}\left(f_1^n(x)\right)\right) = \\ &= h_{k+n+1}^{-1}\left(h_{k+n+1}\left(f_1^{k+n}(x)\right)\right) = f_1^{k+n}(x). \end{aligned}$$

Es decir, $f_1^{k+n}(x) = f_1^n(x)$, de donde x es un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P3). Luego $h_1^{-1}(y) \in P_3(f_\infty)$. Esto prueba 1).

Para mostrar 2) supongamos que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $P_i(g_\infty)$ es denso en E_1. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de D_1. Entonces $h_1(U)$ es un subconjunto abierto y no vacío de E_1. Como $P_i(g_\infty)$ es denso en E_1, existe $q \in P_i(g_\infty) \cap h_1(U)$. Por 1), $h_1^{-1}(q) \in P_i(f_\infty) \cap U$. Esto prueba que $P_i(f_\infty)$ es denso en D_1. □

Como comentamos al final de la Sección 4, si (X, f_∞) y (Y, g_∞) son dos sistemas no-autónomos y $h \colon X \to Y$ es una conjugación, entonces se satisface la propiedad $(\star)$. Por tanto, de las propiedades 1) y 2) del Teorema 5.9, se infiere que $h^{-1}(P_i(g_\infty)) \subset P_i(f_\infty)$ y si $P_i(g_\infty)$ es denso en Y, entonces $P_i(f_\infty)$ es denso en X ($i \in \{1, 2, 3\}$).

5.3. Las órbitas en un Sistema No-Autónomo. Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 5.10. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, $i \in \{1, 2, 3\}$ y $x \in D_1$ un punto periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (Pi). La **órbita periódica de x en** (D_∞, f_∞) es el conjunto $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$. Un subconjunto no vacío B de X es una **órbita periódica de** (D_∞, f_∞) **en el sentido (Pi)** si existe un punto periódico $y \in D_1$ de (D_∞, f_∞) en el sentido (Pi) tal que $\operatorname{orb}(y, f_\infty) = B$.

Notemos que la órbita de un punto k-periódico en el sentido (P3) es un conjunto finito, justo su órbita periódica

$$\operatorname{orb}(x, f_\infty) = \left\{x, f_1(x), f_1^2(x), \dots, f_1^{k-1}(x)\right\}.$$

Como vemos en esta sección, la órbita periódica de un punto periódico en el sentido (P1) o (P2) es un conjunto que puede ser finito o bien infinito. Aún y cuando la órbita de un punto k-periódico en el sentido (P2) sea finita, con $k \geqslant 2$, el punto no tiene porque ser k-periódico en el sentido (P3), como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11. Construimos un sistema no-autónomo (X, f_∞) que posee un punto $x \in X$ con las siguientes propiedades: x es 2-periódico en el sentido (P2) pero no en el sentido (P3), $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$ posee tres elementos, x es 4-periódico en el sentido (P3) y x no tiene periodo en el sentido (P3). Para ver esto, supongamos que el espacio topológico X tiene por lo menos 3 elementos distintos a_1, a_2 y a_3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una función $f_n \colon X \to X$ de manera que $f_i = f_j$ si y sólo si i y j son congruentes módulo 4. Además f_1, f_2, f_3 y f_4 son tales que

$$f_1(a_1) = a_2, \quad f_2(a_2) = a_1, \quad f_3(a_1) = a_3 \quad \text{y} \quad f_4(a_3) = a_1.$$

Hagamos $x = a_1$ y consideremos el sistema no-autónomo (X, f_∞). Entonces $\operatorname{orb}(x, f_\infty) = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $f_1^{2n}(x) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto x es 2-periódico en el sentido (P2), pero no en el sentido (P3), pues $f_1^{2+1}(x) = a_3$, $f_1^1(x) = a_2$ y $a_2 \neq a_3$. Notemos que x es 4-periódico en el sentido (P3). Sin embargo, x no tiene periodo 4 en el sentido (P3), pues $f_1^2(x) = x$. □

Cuando la construcción del Ejemplo 5.11 la realizamos en un espacio que posee al menos cuatro puntos en lugar de tres, obtenemos una dinámica distinta, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.12. Construimos un sistema estrictamente no-autónomo (X, f_∞) que posee un punto $x \in X$ con las siguientes propiedades: x es 5-periódico en el sentido (P3) pero no tiene periodo en el sentido (P3), x es 3-periódico en el sentido (P1) pero no en el sentido (P2) ni (P3) y $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$ posee cuatro elementos. Para ver esto, supongamos que el espacio topológico X tiene por lo menos 4 elementos distintos a_1, a_2, a_3 y a_4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n \colon X \to X$ de manera que $f_i = f_j$ si y sólo si i y j son congruentes módulo 5. Además, f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 se definen de modo que

$$f_1(a_1) = a_2, \quad f_2(a_2) = a_3, \quad f_3(a_3) = a_1, \quad f_4(a_1) = a_4 \quad \text{y} \quad f_5(a_4) = a_1.$$

Hagamos $x = a_1$ y consideremos el sistema no-autónomo (X, f_∞). Entonces

$$\operatorname{orb}(x, f_\infty) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

y $f_1^{5+n}(x) = f_1^n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, x es un punto 5-periódico de (X, f_∞) en el sentido (P3). Sin embargo, x no tiene periodo 5, pues $f_1^3(x) = x$. Notemos que x es un punto 3-periódico en el sentido (P1) pero no en el sentido (P2) ni (P3), pues $f_1^6(x) = f_1^{2(3)}(x) = a_2 \neq a_1$, $f_1^4(x) = f_1^{3+1}(x) = a_4$, $f_1^1(x) = a_2$ y $a_2 \neq a_4$. Por tanto, en el sentido (P3), x es un punto periódico de (X, f_∞) que no tiene periodo. □

Si (X, f) es un sistema autónomo, $x \in X$ y $y = f^m(x) \in \operatorname{orb}(x, f)$, entonces

$$\operatorname{orb}(y, f) = \{f^n(x) \colon n \geqslant m\}$$

es una cola de $\operatorname{orb}(x, f)$, considerada como una sucesión. Si (X, f_∞) es un sistema no-autónomo, $x \in X$ y $y = f_1^m(x) \in \operatorname{orb}(x, f_\infty)$ entonces, como vemos en los Ejemplos 5.18 y 5.19, el conjunto

$$\operatorname{orb}(y, f_\infty) = \{f_1^n(f_1^m(x)) \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

no necesariamente es una cola de la sucesión $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$. Consideremos ahora la siguiente noción.

Definición 5.13. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Se dice que (D_∞, f_∞) posee un **punto transitivo** en A, si existe $x \in A$ tal que el conjuto $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$ es denso en A.

Si (D_∞, f_∞) posee un punto transitivo x en A, es común decir que x es un punto transitivo de A. Por la Proposición 2.7, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 5.14. Si X es un espacio T_1 sin puntos aislados, entonces los elementos en la órbita de un punto transitivo son puntos transitivos.

Proposición 5.15. Sea (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio T_1. Si A es un subconjunto no vac
io de D_1 sin puntos aislados y x es un punto transitivo de A entonces, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el conjunto $\{f_1^m(x)\colon m > n\}$ es denso en A.

Corolario 5.16. Sea (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio T_1 sin puntos aislados. Si x es un punto transitivo de X entonces, para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, el conjunto $\{f_1^m(x)\colon m > n\}$ es denso en X.

Notemos que si x es un punto periódico de un sistema autónomo (X, f), entonces x tiene periodo y los elementos de la órbita de x, son puntos periódicos del mismo periodo. Vamos ahora a presentar algunos ejemplos en donde se muestra que, en un sistema estrictamente no-aut
onomo, la propiedad anterior así como la Proposici
on 5.14 pueden no cumplirse.

Ejemplo 5.17. Presentamos un conjunto finito X y un sistema estrictamente no-autónomo (X, f_∞) con las siguientes propiedades:

1) cada elemento de X es un punto periódico y transitivo de X;
2) existe un punto periódico a de (X, f_∞) en el sentido (P3) y ningún elemento de $X \setminus \{a\}$ es periódico en el sentido (P3);
3) los elementos de $X \setminus \{a\}$ son puntos periódicos en el sentido (P1) pero no en el sentido (P2);
4) (X, f_∞) es transitivo pero no 2-transitivo.

Sea $X = \{a, b, c\}$ un conjunto con tres elementos y con la topología discreta. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una función $f_n\colon X \to X$ de manera que $f_i = f_j$ si y sólo si i y j son congruentes módulo 3. Además f_1, f_2 y f_3 se definen como sigue: $f_1(a) = b$, $f_2(b) = c$, $f_3(c) = a$, $f_1(b) = a$, $f_2(a) = b$, $f_3(b) = a$, $f_1(c) = a$, $f_3(a) = c$ y $f_2(c) = a$. Entonces $f_1 \neq f_2$, $f_1 \neq f_3$ y $f_2 \neq f_3$. Además $f_1^{3+n}(a) = f_1^n(a)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, a es un punto 3-periódico de (X, f_∞) en el sentido (P3), de periodo 3 y $\operatorname{orb}(a, f_\infty) = X$. Notemos que b, un elemento de $\operatorname{orb}(a, f_\infty)$, no es 3-periódico en el sentido (P3), pues

$$f_1^2(b) = b, \qquad f_1^5(b) = f_1^{3+2}(b) = c \qquad \text{y} \qquad b \neq c.$$

Esto muestra que, en general,

a) los elementos en la órbita de un punto k-periódico en el sentido (P3), no necesariamente son k-periódicos en el sentido (P3).

Es fácil ver que $\operatorname{orb}(b, f_\infty) = \operatorname{orb}(c, f_\infty) = X$. Por tanto, cada elemento de X es un punto transitivo de X. Además $f_1^k(b) = b$ si y sólo si $k = 2$ o bien existe $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $k = 4 + 3r$. Por tanto b es periódico en el sentido (P1). Notemos que b no es 2-periódico en el sentido (P2) pues $f_1^6(b) = f_1^{2(3)}(b) = a$ y $a \neq b$. Notemos también que b no es 2-periódico en el sentido (P3) pues

$$f_1^3(b) = a, \qquad f_1^5(b) = f_1^{2+3}(b) = c \qquad \text{y} \qquad a \neq c.$$

Observemos que para ninguna $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, b es $(4+3r)$-periódico en el sentido (P2) ni en el sentido (P3), pues

$$f_1^{2(4+3r)}(b) = f_1^{4+3(2r+1)+1}(b) \neq b, \;\; f_1^{(4+3r)+3}(b) = f_1^{4+3(r+1)}(b) = b, \;\; f_1^3(b) = a$$

y $a \neq b$. Esto prueba que b no es un punto periódico de (X, f_∞) en el sentido (P2) ni en el sentido (P3). Notemos que $f_1^k(c) = c$ si y sólo si existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $k = 5 + 3s$. Por tanto c es un punto periódico en el sentido (P1). Para ninguna $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, c es $(5 + 3s)$-periódico en el sentido (P2) ni en el sentido (P3), pues

$$f_1^{2(5+3s)}(c) = f_1^{5+3(2s+1)+2}(c) \neq c, \;\; f_1^{(5+3s)+3}(c) = f_1^{5+3(s+1)}(c) = c, \;\; f_1^3(c) = a$$

y $a \neq c$. Esto prueba que c tampoco es un punto periódico de (X, f_∞) en el sentido (P2) ni en el sentido (P3).

Con lo que hemos escrito tenemos probado 1), 2) y 3). Del hecho de que cada elemento de X tiene órbita densa en X, se sigue que (X, f_∞) es transitivo. Para ver que (X, f_∞) no es 2-transitivo, notemos primero que $f_1^k(a) = a$ si y sólo si k es congruente con 0 módulo 3, mientras que $f_1^k(b) = c$ si y sólo si $k = 5 + 3t$ para alguna $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir si y sólo si k es congruente con 2 módulo 3. Entonces, para las parejas $\{\{a\}, \{b\}\}$ y $\{\{a\}, \{c\}\}$ de abiertos no vacíos de X, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(\{a\}) \cap \{a\} \neq \emptyset$ y $f_1^k(\{b\}) \cap \{c\} \neq \emptyset$. Esto prueba que (X, f_∞) no es 2-transitivo. □

Cuando tenemos un sistema autónomo (X, f) donde el espacio topológico X es infinito y T_1, es fácil ver que los puntos periódicos no son transitivos. El siguiente ejemplo aparece en [**1**, Teorema 2.3] y hace ver que, en un sistema no-autónomo (X, f_∞), donde X es infinito y T_1, un punto periódico puede ser también un punto transitivo. En su construcción utilizamos las llamadas *funciones lineales por pedazos* en el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$. Recordemos que si $n \in \mathbb{N}$ y tenemos definida una función $f\colon \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{I}$, donde $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, entonces podemos extender f a $\mathbb{I}$ como sigue: para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la gráfica de f en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de $\mathbb{I}$ es el segmento de recta cuyos extremos son $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Decimos que $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ es una función lineal por pedazos.

Para construir una función lineal por pedazos $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, primero indicamos cómo se define f en un conjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, y luego decimos que f es lineal por pedazos en el resto. Por ejemplo, si $g\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ es la función definida como $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g(1) = 1$ y lineal por pedazos en el resto, entonces $g(x) = 0$ para cada $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ y $g(x) = 2x - 1$ para toda $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

Ejemplo 5.18. En el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$ definimos un sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ con las siguientes propiedades: existen un punto periódico x en el sentido (P2) que también es un punto transitivo de $\mathbb{I}$, así como $y \in \operatorname{orb}(x, f_\infty) \setminus \{x\}$ tal que y no es un punto periódico ni un punto transitivo de $\mathbb{I}$. Además x no es periódico en el sentido (P3). Para ver esto, sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\} \subset \mathbb{I} \setminus \{0, 1\}$ un subconjunto denso en $\mathbb{I}$ tal que $\frac{1}{2} < s_1$. Definimos $(\mathbb{I}, f_\infty)$ como sigue: para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ satisface

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 0, \quad f_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = s_{n+1}, \quad f_{2n}(s_n) = \frac{1}{2}$$

y tanto f_{2n} como f_{2n+1} son lineales por pedazos en el resto. Además

$$f_1(x) = \begin{cases} s_1, & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = s_1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = s_1, \end{cases}$$

y tanto f_1 como f_2 son lineales por pedazos en el resto. Sean $x = \frac{1}{2}$ y $y = s_1$. Notemos que

$$\operatorname{orb}(x, f_\infty) = \left\{\frac{1}{2}, s_1, \frac{1}{2}, s_2, \ldots, \frac{1}{2}, s_n, \ldots\right\} \quad \text{y} \quad \operatorname{orb}(y, f_\infty) = \left\{s_1, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \ldots\right\}.$$

Por tanto, $y \in \operatorname{orb}(x, f_\infty) \setminus \{x\}$ y $\operatorname{orb}(y, f_\infty)$ no es una cola de $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$. Además x es un punto periódico en el sentido (P2), cuya órbita es densa en $\mathbb{I}$, mientras que y no es un punto periódico y la órbita de y no es densa en $\mathbb{I}$. Como los puntos periódicos en el sentido (P3) tienen órbita finita, x no es periódico en el sentido (P3). □

Un espacio topológico X es *homogéneo* si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f\colon X \to X$ tal que $f(x) = y$. Un *grupo topológico* es una terna $(G, \tau, \cdot)$ tal que (G, τ) es un espacio topológico, $(G, \cdot)$ es un grupo (no necesariamente abeliano) y las funciones $f_1\colon G \times G \to G$ y $f_2\colon G \to G$ definidas, para $x, y \in G$, como $f_1(x, y) = x \cdot y$ y $f_2(x) = x^{-1}$ (el inverso de x) son continuas. En [**3**, Corolario 1.3.6] se prueba que los grupos topológicos son homogéneos.

El siguiente ejemplo aparece en [**1**, Ejemplo 2.1] y está basado en el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, con su topología usual. Entre las propiedades de $\mathcal{C}$ que utilizaremos enunciamos las siguientes:

C1) Un espacio métrico X es homeomorfo a $\mathcal{C}$ si y sólo si X es compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. La prueba original de dicho resultado aparece en [**13**], aunque una referencia más reciente es [**45**, Teorema 7.14].

C2) $\mathcal{C}$ es homogéneo. En [**3**, Sección 1.10] se dice que en [**13**] se prueba que $\mathcal{C}$ es un grupo topológico abeliano y, por tanto, es homogéneo.

Quizá la prueba más natural de la homogeneidad de $\mathcal{C}$ es la siguiente: el conjunto $\{0,1\}$, con la operación de adición módulo 2, es un grupo topológico. Por [**30**, Teorema 12], el producto de grupos topológicos es un grupo topológico, así que el espacio producto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es un grupo topológico y, por tanto, es homogéneo. Además, por resultados estándares de la topología producto, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Luego, por la afirmación C1), $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es homogéneo.

Ejemplo 5.19. En el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ definimos un sistema no-autónomo $(\mathcal{C}, h_\infty)$ con las siguientes propiedades:

1) existen $x, y \in \mathcal{C}$ tales que $x \neq y$, $x \in \operatorname{orb}(y, h_\infty)$ y $y \in \operatorname{orb}(x, h_\infty)$;
2) x es un punto periódico en el sentido (P3) y y no es un punto periódico en el sentido (P3);
3) y es un punto transitivo de $\mathcal{C}$ y x no es un punto transitivo de $\mathcal{C}$.

Podemos escribir $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ donde $\mathcal{C}_1 \subsetneq \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2 \subsetneq \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ y tanto $\mathcal{C}_1$ como $\mathcal{C}_2$ son homeomorfos a $\mathcal{C}$. Usando la homogeneidad de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, se sigue que para cada $z_1, z_2 \in \mathcal{C}_1$ y todo $y_1, y_2 \in \mathcal{C}_2$ existen homeomorfismos $h_1\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ y $h_2\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tales que $h_1(z_1) = y_1$ y $h_2(y_2) = z_2$.

Sea $f_1\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un homeomorfismo. Tomemos $x \in \mathcal{C}_1$ y $y \in \mathcal{C}_2$ con $f_1(x) = y$. Entonces $x, y \in \mathcal{C}$ son tales que $x \neq y$. Sea $f_2 = f_1^{-1}\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$. Como $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son separables, existen dos sucesiones

$$A = \{x_{2n+1} \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathcal{C}_2 \quad \text{y} \quad B = \{x_{2n+2} \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathcal{C}_1$$

con las siguientes propiedades: sus elementos son diferentes dos a dos, $x_1 = y$, $x_2 = x$, A es denso en $\mathcal{C}_2$ y B es denso en $\mathcal{C}_1$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos homeomorfismos $g_{2n+1}\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ y $g_{2n+2}\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tales que

$$g_{2n+1}(x_{2n+1}) = x_{2n+2} \quad \text{y} \quad g_{2n+2}(x_{2n+2}) = x_{2(n+1)+1} \quad \text{para toda } n \geqslant 0.$$

Consideremos la sucesión de homeomorfismos $h_\infty = \{h_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ donde, para cada

$$n \geqslant 0, h_{2n+1}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \text{ y } h_{2n+2}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

se definen como sigue:

$$h_{2n+1}(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{si } t \in \mathcal{C}_1, \\ g_{2n+1}(t), & \text{si } t \in \mathcal{C}_2, \end{cases} \quad \text{y} \quad h_{2n+2}(t) = \begin{cases} f_2(t), & \text{si } t \in \mathcal{C}_2, \\ g_{2n+2}(t), & \text{si } t \in \mathcal{C}_1. \end{cases}$$

En el sistema no-autónomo $(\mathcal{C}, h_\infty)$ tenemos que $h_1^{2+n}(x) = h_1^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, así que x es 2-periódico en el sentido (P3), de hecho $\operatorname{orb}(x, h_\infty) = \{x, y\}$. Por construcción,

$$\operatorname{orb}(y, h_\infty) = \{y, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots\}$$

es infinito e, incluso, $\operatorname{orb}(y, h_\infty)$ es denso en $\mathcal{C}$. Entonces y es un punto transitivo que no es un punto periódico en el sentido (P3). Además x es un elemento de la órbita de y y, así, $\operatorname{orb}(x, h_\infty)$ no es una cola de $\operatorname{orb}(y, h_\infty)$. Por tanto, en el sistema no-autónomo $(\mathcal{C}, h_\infty)$, existe un punto transitivo en cuya órbita hay un punto que no es transitivo, al ser un punto periódico en el sentido (P3). $\square$

El siguiente resultado generaliza [**1**, Teorema 2.2].

Proposición 5.20. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A y que x es un punto aislado de A. Entonces x es un punto periódico en el sentido *(P1)* y también un punto transitivo de A.

Demostración. Como $\{x\}$ es abierto en A, por la transitividad en A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(\{x\}) \cap \{x\} \neq \emptyset$. Luego $f_1^k(x) = x$ y, así, x es periódico en el sentido (P1). Tomemos ahora un abierto no vacío U de A. Por la transitividad en A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^n(\{x\}) \cap U \neq \emptyset$, así que $f_1^n(x) \in U$. Esto prueba que $\mathrm{orb}(x, f_\infty)$ es denso en A. □

Corolario 5.21. Sean (X, f) un sistema autónomo y A un subconjunto no vacío de X. Supongamos que f es transitiva en A. Si A posee un punto aislado x, entonces x es un punto periódico de (X, f) y $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en A.

Como hemos visto, la situación con un punto periódico en un sistema no-autónomo, de acuerdo a como se ha dado en la Definición 5.3, cambia con respecto a lo que estamos acostumbrados para un sistema autónomo. Esto es consecuencia de como se están considerando los puntos periódicos. Cada definición de punto periódico en un sistema no-autónomo tendrá sus pros y sus contras. Independientemente de la noción que se considere, es un problema interesante determinar si, en un sistema no-autónomo, la transitividad y la densidad de puntos periódicos implican que el sistema es caótico en el sentido de Devaney (Definición 6.8). En la Sección 6 trataremos este problema para los puntos periódicos en el sentido (P3). Como comentamos en la Introducción, el mismo problema se considera tanto en [**43**], para los puntos periódicos en el sentido (P2), como en [**49**] para los puntos periódicos en el sentido (P1).

Hemos mencionado que todo resultado válido en un sistema no-autónomo, produce un resultado válido para un sistema autónomo. Ahora vamos a mostrar diversas situaciones en las que el recíproco de la afirmación anterior no es cierto. El siguiente resultado aparece enunciado sin demostración en [**66**, Comentario 2.1].

Proposición 5.22. Sea (X, f) un sistema autónomo. Si dos órbitas periódicas de (X, f) tienen un punto en común, entonces dichas órbitas son iguales.

Demostración. Sean x y y dos puntos periódicos de X, con periodos n y m, respectivamente. Supongamos que existe $z \in \mathrm{orb}(x, f) \cap \mathrm{orb}(y, f)$ y tomemos $k, l \in \mathbb{N}$ de modo que $z = f^k(x) = f^l(y)$. Por la Propiedad Arquimediana, existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $an > k$ y $bm > l$. Definamos $r = an - k$ y $s = bm - l$. Luego

$$f^{r+l}(y) = f^r(f^l(y)) = f^r(z) = f^r(f^k(x)) = f^{r+k}(x) = f^{an}(x) = x \tag{5.5}$$

y

$$f^{s+k}(x) = f^s(f^k(x)) = f^s(z) = f^s(f^l(y)) = f^{s+l}(y) = f^{bm}(y) = y. \tag{5.6}$$

Por (5.5), $x \in \mathrm{orb}(y, f)$, de donde $\mathrm{orb}(x, f) \subset \mathrm{orb}(y, f)$, y por (5.6), $y \in \mathrm{orb}(x, f)$, así que $\mathrm{orb}(y, f) \subset \mathrm{orb}(x, f)$. Esto prueba que $\mathrm{orb}(x, f) = \mathrm{orb}(y, f)$. □

La Proposición 5.22 es falsa para sistemas no-autónomos, como se puede ver en el siguiente resultado, que aparece en [**66**, Ejemplo 2.1].

Ejemplo 5.23. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, de cuatro elementos, con la topología discreta. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon X \to X$ de modo que para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_{2n}(b) = a$ y $f_{4n}(a) = b$, mientras que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f_{2n+1}(a) = b, \quad f_{4n+1}(b) = c, \quad f_{4n+2}(c) = d \quad \text{y} \quad f_{4n+3}(d) = a.$$

Luego a es un punto 2-periódico de (X, f_∞), en el sentido (P3), de periodo 2 y $\mathrm{orb}(a, f_\infty) = \{a, b\}$, mientras que b es un punto 4-periódico de (X, f_∞), en el sentido (P3), de periodo 4 con

$\mathrm{orb}(b, f_\infty) = \{b, c, d, a\}$. Notemos que $\mathrm{orb}(a, f_\infty) \cap \mathrm{orb}(b, f_\infty) = \{a, b\}$ y las órbitas son distintas. Por tanto, son órbitas periódicas que comparten un elemento y no son iguales. $\square$

El siguiente resultado aparece enunciado sin demostración en [**66**, Comentario 2.2]. Recordemos que $P(f)$ es el conjunto de los puntos periódicos del sistema autónomo (X, f).

Proposición 5.24. Sean (X, f) un sistema autónomo y A un subconjunto finito y no vacío de X. Si X es T_1 y f es transitiva en A, entonces $A \subset P(f)$. Además,

1) para cada $a \in A$, tenemos que $A \subset \mathrm{orb}(a, f)$;
2) si A es invariante en (X, f) y $a \in A$, entonces $A = \mathrm{orb}(a, f)$.

Demostración. Vamos a probar primero que cada elemento de A es un punto aislado de A. Sea $x \in A$. Como X es T_1 y A es finito, $A \setminus \{x\}$ es un subconjunto cerrado de X. Luego $X \setminus (A \setminus \{x\})$ es abierto en X. Además

$$(X \setminus (A \setminus \{x\})) \cap A = [(X \setminus A) \cup \{x\}] \cap A = \{x\}.$$

es abierto en A. Esto prueba que cada elemento de A es un punto aislado de A. Entonces, por el Corolario 5.21, $A \subset P(f)$. Para probar 1), sean $a, b \in A$. Como $\{a\}$ y $\{b\}$ son abiertos no vacíos en A y f es transitiva en A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\{a\}) \cap \{b\} \neq \emptyset$. Luego $f^n(a) = b$, por lo que $b \in \mathrm{orb}(a, f)$. Esto prueba que $A \subset \mathrm{orb}(a, f)$.

Para probar 2) supongamos que A es invariante en (X, f) y sea $a \in A$. Como $f(A) \subset A$, tenemos que $\mathrm{orb}(a, f) \subset A$. Utilizando esto y 1), deducimos que $A = \mathrm{orb}(a, f)$. $\square$

Con ideas similares a las dadas en el resultado anterior, se prueba la siguiente proposición.

Proposición 5.25. Sea (X, f) un sistema autónomo transitivo, en el que X tiene la topología discreta. Entonces X es finito y consta de una única órbita periódica.

Demostración. Tomemos $x \in X$. Como X tiene la topología discreta, $\{x\}$ es un punto aislado de X. Puesto que f es transitiva en X, por el Corolario 5.21, x es un punto periódico de (X, f) y $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X. Entonces $\mathrm{orb}(x, f)$ es un subconjunto finito, cerrado y denso en X, por lo que $X = \mathrm{orb}(x, f)$. $\square$

Por la Proposición 5.20, si (X, f_∞) es un sistema no-autónomo transitivo donde X es finito, entonces X es la órbita periódica de un punto periódico en el sentido (P1). Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo que aparece en [**66**, Ejemplo 2.2], X no necesariamente es la órbita periódica de un punto periódico en el sentido (P3).

Ejemplo 5.26. Consideremos el conjunto $X = \{a, b\}$ de dos elementos con la topología discreta. Definimos $f_1 \colon X \to X$ y $f_2 \colon X \to X$ como sigue: $f_1(a) = b$, $f_1(b) = a$ y $f_2 = f_1$. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, sea $f_n = \mathrm{id}_X$. Luego el sistema no-autónomo (X, f_∞) es transitivo. Además $\mathrm{orb}(a, f_\infty) = \mathrm{orb}(b, f_\infty) = X$ y para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tenemos que $f_1^k(a) = a$, $f_1^k(b) = b$. Por tanto a y b son puntos periódicos en el sentido (P2). Sin embargo, a y b no son puntos periódicos de (X, f_∞) en el sentido (P3). Así que X es la órbita periódica de un punto periódico en el sentido (P2), pero no la órbita periódica de un punto periódico en el sentido (P3). $\square$

Proposición 5.27. Sean (X, f) un sistema autónomo transitivo, en el que X es un espacio T_1 e infinito. Entonces X no contiene puntos aislados.

Demostración. Supongamos que existe un punto aislado x en X. Por el Corolario 5.21, x es un punto periódico de (X, f) y $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X. Como X es T_1, tenemos entonces que $\mathrm{orb}(x, f)$ es un subconjunto finito, cerrado y denso en X, por lo que $X = \mathrm{orb}(x, f)$. Luego X es finito. De esta contradicción se sigue que X no posee puntos aislados. $\square$

La Proposición 5.27 es falsa para sistemas no-autónomos, como muestra el siguiente ejemplo que aparece en [**66**, Ejemplo 2.3].

Ejemplo 5.28. Construimos un sistema no-autónomo (X, f_∞) con las siguientes propiedades: X es T_1, infinito y posee un punto aislado, (X, f_∞) es transitivo y $P_1(f_\infty)$ es denso en X. Sean $\mathbb{I} = [0,1]$ el intervalo unitario, $X = \mathbb{I} \cup \{2\}$, con la topología usual y $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números racionales en $\mathbb{I}$, de modo que $D = \{a_{2m+1} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es denso en $\mathbb{I}$. Entendemos que los elementos de D son diferentes dos a dos. Notemos que X es un espacio T_1 infinito, y que 2 es un punto aislado de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos una función $f_n : X \to X$ como sigue: $f_{2m+1}(x) = a_{2m+1}$ para toda $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada $x \in X$, mientras que $f_{2m}(x) = 2$, para toda $m \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$. Notemos que $f_1^2(\{2\}) = \{2\}$ y que $f_1^{2m+1}(a_{2m+1}) = a_{2m+1}$. Por tanto $D \cup \{2\} \subset P_1(f_\infty)$ y, como D es denso en $\mathbb{I}$, resulta que $P_1(f_\infty)$ es denso en X.

Para probar que (X, f_∞) es transitivo, sea A un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{I}$. Entonces $f_1^2(A) = \{2\}$, y como D es denso en $\mathbb{I}$, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a_{2m+1} \in A$. Luego $f_1^{2m+1}(\{2\}) = \{a_{2m+1}\} \subset A$, de donde $f_1^{2m+1}(\{2\}) \cap A \neq \emptyset$. Supongamos ahora que U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathbb{I}$. Por la densidad de D en $\mathbb{I}$, existen $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $a_{2m+1} \in U$ y $a_{2n+1} \in V$. Notemos que

$$f_1^{2n+1}(U) = \{a_{2n+1}\} \subset V \quad \text{ y } \quad f_1^{2m+1}(V) = \{a_{2m+1}\} \subset U.$$

Por tanto, $f_1^{2n+1}(U) \cap V \neq \emptyset$ y $f_1^{2m+1}(V) \cap U \neq \emptyset$. Esto muestra que el sistema no-autónomo (X, f_∞), con $\{2\}$ como punto aislado, es transitivo.

Notemos que 2 es un punto periódico en el sentido (P2). Sin embargo, para ninguna $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a_{2m+1} es un punto periódico en el sentido (P2), pues

$$f_1^{3(2m+1)}(a_{2m+1}) = f_1^{6m+3}(a_{2m+1}) = f_1^{2(3m+1)+1}(a_{2m+1}) = a_{2(3m+1)+1} = a_{6m+3}$$

y $a_{6m+3} \neq a_{2m+1}$. Entonces los elementos de D son puntos periódicos en el sentido (P1) pero no en el sentido (P2). □

La siguiente proposición, que aparece en [**66**, Lema 2.1], muestra condiciones para que un sistema no-autónomo no posea puntos aislados. En el artículo citado se supone que X es un espacio métrico. Sin embargo, basta con suponer que X es un espacio T_1. Como veremos en la Sección 6, la Proposición 5.29 es un paso importante para determinar si la transitividad y la densidad de puntos periódicos en el sentido (P3) implican el caos en el sentido de Devaney (ver Teorema 6.20).

Proposición 5.29. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, en donde X es un espacio T_1, y A un subconjunto infinito de D_1. Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A y que $P_3(f_\infty)$ es denso en A. Entonces A no posee puntos aislados.

Demostración. Supongamos que $a \in A$ es un punto aislado de A. Entonces $\{a\}$ es abierto en A. Como $P_3(f_\infty)$ es denso en A y $\{a\}$ es abierto y no vacío en A, por la parte 2) de la Proposición 2.2, $a \in P_3(f_\infty)$. Luego $\operatorname{orb}(a, f_\infty)$ es un subconjunto finito y por tanto cerrado de X. Como A es infinito, $V = (X \setminus \operatorname{orb}(a, f_\infty)) \cap A$ es un subconjunto abierto y no vacío de A. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que

$$f_1^n(\{a\}) \cap V \subset \operatorname{orb}(a, f_\infty) \cap V = \emptyset.$$

Puesto que esto contradice el hecho de que (D_∞, f_∞) es transitivo en A, deducimos que A no posee puntos aislados. □

El sistema no-autónomo (X, f_∞) del Ejemplo 5.28 es transitivo en $A = X$ y $P_1(f_\infty)$ es denso en $A = X$. Además X es infinito, T_1 y posee un punto aislado. Por tanto, la Proposición 5.29 no se cumple para los puntos periódicos en el sentido (P1). Es interesante verificar si la Proposición 5.29 se cumple para los puntos k-periódicos en el sentido (P2) con $k \geqslant 2$.

5.4. Transitividad y Puntos Transitivos. Como hemos visto en el Ejemplo 5.17 y en la Proposición 5.20, bajo ciertas condiciones la transitiviad implica la existencia de un punto transitivo. En el siguiente resultado relacionamos puntos transitivos con transitividad en un sistema no-autónomo. Su corolario aparece en [**1**, Teorema 3.3]. Conviene relacionar la proposición siguiente con el Ejemplo 5.17, en donde la transitividad del sistema no-autónomo que se construyó, se deriva del hecho de que cada punto es transitivo.

Proposición 5.30. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1 sin puntos aislados. Supongamos que X es T_1. Si el conjunto de puntos transitivos de A es denso en A (en particular, si cada elemento de A es un punto transitivo de A), entonces (D_∞, f_∞) es transitivo en A.

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos en A. Como el conjunto de los puntos transitivos de A es denso en A, existe $x \in U$ tal que x es un punto transitivo de A. Notemos que $x \in A$. En vista de que A no posee puntos aislados, existe $y \in V$ tal que $x \neq y$. Como X es T_1 y, por tanto A también y $x, y \in A$ son tales que $x \neq y$, existe un abierto W en A tal que $y \in W$ y $x \notin W$. Por la densidad de $\text{orb}(x, f_\infty)$ en A, tenemos que $(V \cap W) \cap \text{orb}(x, f_\infty) \neq \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f_1^k(x) \in V \cap W$. Como $x \notin W$, sucede que $k \neq 0$. Luego $k \in \mathbb{N}$ y $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto prueba que (D_∞, f_∞) es transitivo en A. □

Corolario 5.31. Sea (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio T_1 sin puntos aislados. Si el conjunto de los puntos transitivos es denso en X, entonces (X, f_∞) es transitivo.

En el siguiente ejemplo, mostramos que la transitividad no implica la existencia de puntos transitivos en sistemas autónomos.

Ejemplo 5.32. Consideremos el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$ así como la *función tienda* $g \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ definida, para cada $x \in \mathbb{I}$ como $g(x) = 1 - |2x - 1|$. Sean X el conjunto de todos los puntos periódicos de g y $f = g|_X$. En [**32**, p. 99] se muestra que X es denso en $\mathbb{I}$. Por tanto X es infinito. Además $f(X) \subset X$ y el sistema autónomo (X, f) no posee puntos con órbitas densas, dado que cada órbita consta de una cantidad finita de puntos y X es infinito. En [**32**, p. 112] se prueba que (X, f) es transitivo. □

En general, la existencia de un punto transitivo no implica la transitividad, como indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.33. Consideremos el conjunto $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$, con la topología usual como subespacio de $\mathbb{R}$. Definimos $f \colon X \to X$ como $f(0) = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$. La órbita $\text{orb}(1, f)$ es densa en X, pero para los abiertos $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $\{1\}$ de X, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \cap \{1\} \neq \emptyset$. Por tanto (X, f) no es transitivo. □

Para el caso de los sistemas autónomos, el siguiente resultado muestra una condición bajo la cual, la existencia de un punto transitivo implica la transitividad del sistema.

Teorema 5.34. Sea (X, f) un sistema autónomo, en donde X es un espacio T_1 sin puntos aislados. Si $x \in X$ es un punto transitivo en X, entonces (X, f) es transitivo.

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Como X no tiene puntos aislados, por la Proposición 2.5, U y V son infinitos. Notemos que $U \cap (X \setminus \{x\})$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Como $\text{orb}(x, f)$ es denso en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in U \cap (X \setminus \{x\})$. Definamos

$$W = V \setminus \left\{x, f(x), \ldots, f^k(x)\right\}.$$

Como V es infinito y X es T_1, se tiene que W es un subconjunto abierto y no vacío de X. Aplicando de nuevo la densidad de $\text{orb}(x, f)$, existe $m > k$ de modo que $f^m(x) \in V$. Tenemos así que $f^k(x)$

es un elemento de U tal que $f^{m-k}(f^k(x)) = f^m(x) \in V$. Por tanto $f^{m-k}(U) \cap V \neq \emptyset$, probando que (X, f) es transitivo. $\square$

Para sistemas no-autónomos el Teorema 5.34 no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo que aparece en [**49**, Ejemplo 4.7].

Ejemplo 5.35. En el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0,1]$ construimos un sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, g_\infty)$ no transitivo y con un punto de transitividad. Para esto, consideremos el conjunto infinito numerable F de los elementos (a,b,c,d) tales que $a,b,c,d \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $a < b$, $a \neq c$, $b \neq d$ y $c \neq d$. Cada $(a,b,c,d) \in F$ induce un homeomorfismo $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ como sigue: si $c < d$, entonces

$$f(0) = 0, \quad f(a) = c, \quad f(b) = d, \quad (1) = 1$$

y f es lineal por pedazos en el resto. Si $d < c$, entonces

$$f(0) = 1, \quad f(a) = c, \quad f(b) = d, \quad f(1) = 0$$

y f es lineal por pedazos en el resto. Sea $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de los homeomorfismos inducidos por los elementos de F. En el sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ con

$$f_\infty = \{f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}, \ldots, f_n, f_n^{-1}, \ldots\},$$

cada elemento de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ es un punto de transitividad. Además $(\mathbb{I}, f_\infty)$ es débilmente mezclante y, por tanto, transitivo. Sea $g\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ la función definida como

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad g(1) = 1$$

y lineal por pedazos en el resto. Hagamos

$$g_\infty = \{g, f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}, \ldots, f_n, f_n^{-1}, \ldots\}.$$

Si $U = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $g_1^m(U) \subset \{0,1\}$, por lo que si $V = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, entonces $g_1^m(U) \cap V = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego $(\mathbb{I}, g_\infty)$ no es transitivo. En el sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, g_\infty)$, $\frac{3}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ es un punto de transitividad. $\square$

Veamos ahora condiciones bajo las cuales, la transitividad en un sistema no-autónomo de la forma (X, f_∞), implica la existencia de un punto transitivo de X. Recordemos que un espacio topológico X es *de Baire* o bien de la *segunda categoría de Baire*, si X no se puede escribir como una unión numerable $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, donde cada A_i es denso en ninguna parte de X. Por la Proposición 2.4, X es de la segunda categoría de Baire si y sólo si, para cada familia $\{O_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos y densos en X, sucede que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$. En [**26**, Teorema 2.4] se prueba que los espacios métricos y completos son de Baire. En particular, como se indica en [**32**, Proposición 8.5], los espacios métricos y compactos son de Baire.

El siguiente resultado aparece en [**49**, Proposición 4.6].

Teorema 5.36. Sean (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio segundo numerable y de Baire. Si (X, f_∞) es transitivo, entonces (X, f_∞) posee un punto transitivo en X.

Demostración. Como X es segundo numerable, existe una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$O_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (f_1^m)^{-1}(U_n).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para toda $m \in \mathbb{N}$, por la continuidad de f_1^m y el hecho de que U_n es abierto en X, resulta que $(f_1^m)^{-1}(U_n)$ es abierto en X. Luego O_n es un subconjunto abierto de X. Como (X, f_∞) es transitivo en X, aplicando la parte 3) del Teorema 3.15 a U_n, resulta que O_n es denso en X. Esto prueba que $\{O_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y densos en X. Como X es de Baire, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Vamos a probar que $\mathrm{orb}(x, f_\infty)$ es denso en X. Sea U

un subconjunto abierto y no vacío en X. Como $\mathcal{B}$ es una base de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset U$. Además $x \in O_n$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (f_1^m)^{-1}(U_n)$. Luego $f_1^m(x) \in U_n$. Como

$$f_1^m(x) \in \mathrm{orb}(x, f_\infty) \cap U_n \subset \mathrm{orb}(x, f_\infty) \cap U,$$

tenemos que x es un punto transitivo de X. $\square$

Corolario 5.37. Sea (X, f) un sistema autónomo, donde X es segundo numerable y de Baire. Si (X, f) es transitivo, entonces (X, f) posee un punto transitivo.

Combinando el Teorema 5.34 y el Corolario 5.37, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.38. Sea (X, f) un sistema autónomo, donde X es un espacio T_1, segundo numerable, de Baire y sin puntos aislados. Entonces (X, f) es transitivo si y sólo si (X, f) posee un punto transitivo.

Si a las hipótesis del Teorema 5.36 agregamos el axioma de separación T_3, entonces podemos asegurar que el conjunto de los puntos transitivos es denso, como indica el siguiente resultado que aparece en [**1**, Teorema 3.2].

Teorema 5.39. Sea (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio T_3, segundo numerable y de Baire. Si (X, f_∞) es transitivo, entonces el conjunto de los puntos transitivos es denso en X.

Demostración. Como X es segundo numerable, existe una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$O_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (f_1^m)^{-1}(U_n).$$

Como indicamos en la prueba del Teorema 5.36, cada O_n es un subconjunto abierto y denso en X. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Como X es T_3, existe un abierto no vacío V de X tal que $\mathrm{cl}V \subset U$. Además los elementos de la familia $\{O_n \cap V \colon n \in \mathbb{N}\}$ son abiertos y densos en $\mathrm{cl}V$. Por [**26**, Proposición 1.14 y Teorema 1.15], $\mathrm{cl}V$ es de Baire así que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_n \cap V) \neq \emptyset.$$

Sean $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_n \cap V)$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $x_0 \in O_n$, la definición de O_n implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in (f_1^m)^{-1}(U_n)$. Por tanto la órbita de x_0 es densa en X. Como $x_0 \in V \subset U$, los puntos transitivos son densos en X. $\square$

Combinando el Corolario 5.31 y el Teorema 5.39 tenemos el siguiente resultado, que aparece en [**1**, Corolario 3.1].

Teorema 5.40. Sean (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio T_3, segundo numerable, de Baire y sin puntos aislados. Entonces (X, f_∞) es transitivo si y sólo si el conjunto de los puntos transitivos es denso en X.

Si X es un espacio topológico, decimos que $D \subset X$ es un *conjunto G_δ-denso* en X si D es denso en X y, además, D se escribe como la intersección de una cantidad numerable de subconjuntos abiertos de X. En [**24**, Teorema 1.16] se prueba el Teorema de Transitividad de Birkhoff, obtenido en 1920 por G. D. Birkhoff para funciones continuas $f \colon X \to X$, donde X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Dicho teorema dice lo siguiente.

Teorema 5.41. Sea (X, f) un sistema autónomo, donde X es un espacio métrico, completo, separable y sin puntos aislados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) (X, f) es transitivo;

2) (X, f) posee un punto transitivo en X.

Más aún, si alguna de las dos condiciones anteriores se cumple, entonces el conjunto de los puntos transitivos de X es un conjunto G_δ-denso en X.

Notemos que la equivalencia entre las afirmaciones 1) y 2) del Teorema 5.41 se sigue del Teorema 5.38, pues los espacios métricos, completos y separables son T_1, segundo numerables y de Baire. El siguiente resultado, cuya segunda parte aparece en [**1**, Teorema 3.4], es una versión del Teorema de Transitividad de Birkhoff para sistemas no-autónomos.

Teorema 5.42. Sea (X, f_∞) un sistema no-autónomo, donde X es un espacio métrico, completo, separable y sin puntos aislados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) (X, f_∞) es transitivo;

2) el conjunto T de los puntos transitivos es denso en X.

Más aún, si alguna de las dos condiciones anteriores se cumple, entonces T es un conjunto G_δ-denso en X. Además, T es la intersección de una cantidad numerable de subconjuntos abiertos y densos en X.

Demostración. En vista que que X es un espacio métrico, completo, separable y sin puntos aislados, resulta que X es T_3, segundo numerable, de Baire y sin puntos aislados. Entonces, por el Teorema 5.40, las afirmaciones 1) y 2) son equivalentes. Ahora bien, si alguna de las condiciones 1) y 2) se cumple entonces, por el Teorema 5.39, el conjunto T de los puntos transitivos de X es denso en X. Como X es separable, existe un subconjunto $D = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ denso en X. Sea d una métrica en X que induce la topología de X. Para cada terna (s_k, ε, n), donde $s_k \in D$, $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$M_{(s_k,\varepsilon,n)} = \left\{x \in X : d\left(f_1^j(x), s_k\right) < \varepsilon, \text{ para alguna } j > n\right\}.$$

Fijemos una terna (s_k, ε, n) con las propiedades que ya indicamos. Vamos a probar que $M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ es un subconjunto abierto en X tal que $T \subset M_{(s_k,\varepsilon,n)}$. Tomemos $x \in T$. Como x es un punto transitivo de X, por el Corolario 5.16, la cola $\{f_1^m(x) : m > n\}$ de $\operatorname{orb}(x, f_\infty)$ es densa en X. Por tanto existe $j > n$ tal que $d\left(f_1^j(x), s_k\right) < \varepsilon$. Esto prueba que $T \subset M_{(s_k,\varepsilon,n)}$, de donde $M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ es un subconjunto denso en X. Para verificar que también es un subconjunto abierto en X, tomemos $x \in M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ y $j > n$ de modo que $d\left(f_1^j(x), s_k\right) < \varepsilon$. Por la continuidad de f_1^j en x, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y, para toda $y \in U$, sucede que $d\left(f_1^j(y), s_k\right) < \varepsilon$. Luego $U \subset M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ y, así, $M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ es abierto en X. Hemos mostrado que cada $M_{(s_k,\varepsilon,n)}$ es un subconjunto abierto y denso en X que contiene a T. Luego

$$T \subset \bigcap \left\{M_{(s_k,\varepsilon,n)} : s_k \in D, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty) \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para probar que la contención anterior es una igualdad, tomemos un punto

$$z \in \bigcap \left\{M_{(s_k,\varepsilon,n)} : s_k \in D, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty) \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Vamos a probar que $z \in T$, es decir, que $\operatorname{orb}(z, f_\infty)$ es denso en X. Para esto, sea V un abierto y no vacío en X. Como D es denso en X, existe $s_k \in V$. Tomemos $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ de modo que cada elemento $y \in X$ tal que $d(y, s_k) < \varepsilon$ se encuentra en V. Como $z \in M_{(s_k,\varepsilon,1)}$, existe $j > 1$ tal que $d(f_1^j(z), s_k) < \varepsilon$. Luego $f_1^j(z) \in V$ y, de esta manera, $V \cap \operatorname{orb}(z, f_\infty) \neq \emptyset$. Por tanto $z \in T$ y, así,

$$T = \bigcap \left\{M_{(s_k,\varepsilon,n)} : s_k \in D, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty) \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}$$

es la intersección de un cantidad numerable de subconjuntos abiertos y densos en X. En particular, T es un conjunto G_δ-denso en X. $\square$

Es interesante saber si los Teoremas 5.36, 5.39 y 5.42 se pueden probar en un contexto más general. Por ejemplo, verificar que si cuando (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo y A es un subconjunto no vacío de X, segundo numerable, de Baire y (D_∞, f_∞) es transitivo en A, entonces (D_∞, f_∞) posee un punto transitivo en A. También verificar si cuando añadimos como hipótesis el axioma de separación T_3, entonces el conjunto de los puntos transitivos es denso en A.

Supongamos que X es T_3, segundo numerable, de Baire y sin puntos aislados. Por la Proposición 2.5, X es infinito. Ahora bien, si (X, f_∞) es un sistema no-autónomo y transitivo entonces, por el Teorema 5.39, X contiene un subconjunto denso de puntos transitivos. Más aún, si x_0 es un punto transitivo entonces x_0 no es un punto periódico en el sentido (P3) pues, en dicho caso, $\mathrm{orb}(x_0, f_\infty)$ será un subconjunto finito y denso del conjunto infinito X. ¿Puede ser x_0 un punto periódico en el sentido (P1) o (P2)? Para responder esto consideremos el siguiente ejemplo, el cual aparece en [**1**, Ejemplo 3.1] y es una modificación del Ejemplo 5.28.

Ejemplo 5.43. En el intervalo unitario $\mathbb{I}$ construimos un sistema no-autónomo y transitivo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ y un subconjunto denso D de $\mathbb{I}$ con las siguientes propiedades: cada elemento de D es un punto transitivo y también un punto periódico en el sentido (P1). Para esto sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números racionales en $\mathbb{I}$ de modo que

$$D = \{a_{2m+1} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

es denso en $\mathbb{I}$. Dada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$f_{2m+1}(x) = a_{2m+1} \quad \text{y} \quad f_{2m+2}(x) = 1, \text{ para cada } x \in \mathbb{I}.$$

Entonces $(\mathbb{I}, f_\infty)$ es un sistema no-autónomo. Sean $a_{2m+1} \in D$ y W un abierto no vacío en $\mathbb{I}$. Notemos que $f_1^{2m+1}(a_{2m+1}) = a_{2m+1}$. Como D es denso en $\mathbb{I}$, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a_{2n+1} \in W$. Notemos que $f_1^{2n+1}(a_{2n+1}) = a_{2n+1} \in W$. Esto prueba que cada elemento de D es un punto transitivo y un punto periódico en el sentido (P1). Consideremos ahora dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de $\mathbb{I}$. Por la densidad de D, existen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $a_{2n+1} \in U$ y $a_{2m+1} \in V$. Notemos que $f_1^{2m+1}(a_{2n+1}) = a_{2m+1}$, así que $f_1^{2m+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto prueba que $(\mathbb{I}, f_\infty)$ es transitivo y que $P_1(f_\infty)$ es denso en $\mathbb{I}$. □

Sea (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo, donde $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Decimos que (D_∞, f_∞) es *suprayectivo* si cada f_n es una función suprayectiva. Para sistemas autónomos tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.44. Si (X, f) es un sistema autónomo y transitivo, donde X es un espacio compacto y T_2, entonces f es una función suprayectiva.

Demostración. Si f no es suprayectiva entonces, al ser f una función cerrada, $V = X \setminus f(X)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Usando la transitividad de f, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(X) \cap V \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, ya que $f^n(X) \subset f(X) = X \setminus V$. □

En vista de la Proposición 5.44, se puede conjeturar que si (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo y transitivo, donde X es un espacio compacto y T_2, entonces (D_∞, f_∞) es suprayectivo. Sin embargo, dicho resultado es falso, como lo muestran los Ejemplos 5.28 y 5.43. Notemos que en dichos ejemplos, las funciones que definen la sucesión f_∞ son constantes. En [**1**, Ejemplo 3.3] se construye un sistema no-autónomo transitivo $(\mathcal{C}, f_\infty)$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor con su topología usual, tal que ninguna de las funciones que definen a f_∞ es suprayectiva ni constante.

Para verificar que la Proposición 5.27 no se cumple para sistemas no-autónomos, en el Ejemplo 5.28 mostramos un sistema no autónomo transitivo (X, f_∞) tal que X es T_1, infinito y con un punto aislado. En tal ejemplo, cada función que define a f_∞ es constante. En [**1**, Ejemplo 3.4] se construye un sistema no autónomo transitivo $(\mathcal{C} \cup \{x\}, f_\infty)$ tal que x es un punto aislado de $\mathcal{C} \cup \{x\}$ y ninguna función que define a f_∞ es suprayectiva ni constante.

6. Caos en el Sentido de Devaney

Sea (D_∞, f_∞) un sistema no-aut
onomo. Como hemos convenido, existe un espacio topológico X tal que $D_n \subset X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En las secciones anteriores no tuvimos la necesidad de considerar a X como un espacio metrizable. Sin embargo para la presente sección, y a menos que digamos explícitamente lo contrario, supondremos que todo espacio topológico es metrizable. Consideramos tanto a $\mathbb{R}$ como a sus subconjuntos, como espacios métricos con la métrica euclidiana.

Como ya indicamos en la sección anterior, en la presente sección, tratamos las condiciones necesarias para que un sistema metrizable no-autónomo sea caótico en el sentido de Devaney. Uno de los objetivos principales será emular el resultado de J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacy que aparece en [**12**]. Posteriormente, y conectado con este problema, dado un sistema metrizable no-autónomo (X, f_∞) con $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, consideramos el caso en que la sucesión de funciones $f_n : X \to X$ converge puntualmente a una función continua $f : X \to X$, para así comparar el caos en (X, f_∞) con el caos en el sistema metrizable autónomo (X, f). Esto permitirá probar el Teorema 6.29, el cual es otro resultado que emula el que aparece en [**12**].

6.1. Dependencia Sensitiva a Condiciones Iniciales. Para definir el caos en el sentido de Devaney falta el ingrediente que describimos a continuación.

Definición 6.1. Supongamos que X es un espacio metrizable y que d es una métrica en X que induce la topología de X. Decimos que el sistema autónomo (X, f) tiene **dependencia sensitiva a condiciones iniciales**, si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ y todo subconjunto abierto U en X con $x \in U$, existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

En 1985 R. L. Devaney presentó en [**20**] las siguientes tres caracterásticas que un sistema dinámico autónomo debe poseer para ser caótico. En la literatura se han considerado otras propiedades que también llevan a comportamientos caóticos. Las indicadas por R. L. Devaney siguen siendo importantes.

Definición 6.2. El sistema metrizable autónomo (X, f) es **Devaney caótico** o bien **caótico en el sentido de Devaney**, si satisface las siguientes condiciones:

1) (X, f) es transitivo;
2) $P(f)$, el conjunto de los puntos periódicos de f, es denso en X;
3) (X, f) tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

En 1992 se probó en [**12**] que, cuando X es infinito, las condiciones 1) y 2) de la Definición 6.2 implican la 3). Para futuras referencias, enunciamos a continuación el resultado de [**12**].

Teorema 6.3. Sean (X, f) un sistema metrizable autónomo, donde X es infinito. Si (X, f) es transitivo y $P(f)$ es denso en X, entonces (X, f) tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

En la presente sección vemos condiciones bajo las cuales, en un sistema metrizable no-autónomo, las propiedades 1) y 2) implican la 3), considerando los puntos periódicos en el sentido (P3). Recordemos que, para $i \in \{1, 2, 3\}$, en (5.2) indicamos que $P_i(f_\infty)$ es el conjunto de los puntos periódicos de (D_∞, f_∞) en el sentido (Pi).

En [**64**] se muestra que si $\mathbb{I} = [0, 1]$ y $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ es cualquier función continua, entonces $(\mathbb{I}, f)$ es caótico en el sentido de Devaney si y sólo si $(\mathbb{I}, f)$ es transitivo. En otras palabras, en algunas situaciones, la condición 1) de la Definición 6.2 implica la 2) y la 3). Es un problema abierto y difícil, el estudio de espacios metrizables X, no homeomorfos al intervalo unitario, con la propiedad de que para cualquier función continua $f : X \to X$, el sistema autónomo (X, f) es caótico en el sentido de Devaney si y sólo si (X, f) es transitivo. Más difícil parece este problema, para el caso de sistemas metrizables no-autónomos.

A partir de este momento y a menos que digamos lo contrario, supondremos que (D_∞, f_∞) es un sistema metrizable no-autónomo, y que d es una métrica en X que induce la topología de X. Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, el símbolo $B(\varepsilon, x)$ denota la bola abierta en X, de radio ε y centro en x. Es decir,

$$B(\varepsilon, x) = \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Es fácil probar que $\mathrm{cl}B(\varepsilon, x) \subset B(2\varepsilon, x)$, para cada $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$. Decimos que $A \subset X$ está *acotado* si existen $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ tales que $A \subset B(\varepsilon, x)$.

La siguiente noción aparece en [**50**, Definición 2.3].

Definición 6.4. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Decimos que (D_∞, f_∞) tiene **dependencia sensitiva a condiciones iniciales en** A, si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ y todo subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existen $y \in U \cap A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d\left(f_1^n(x), f_1^n(y)\right) > \delta$. Al número δ se le llama **constante de sensibilidad** de (D_∞, f_∞) en A.

Se dice que (D_∞, f_∞) tiene *dependencia sensitiva a condiciones iniciales*, si tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales en D_1. Para simplificar la notación, diremos que un sistema metrizable no-autónomo es *sensitivo* o *sensitivo en* A si tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales o dependencia sensitiva a condiciones iniciales en A, respectivamente. En particular, si A es un subconjunto no vacío de un espacio metrizable X, entonces un sistema autónomo (X, f) es sensitivo en A si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ y todo subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existen $y \in U \cap A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta$.

Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Si A posee un punto aislado, entonces es fácil ver que (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A. Por tanto el sistema no-autónomo $(\mathbb{I} \cup \{2\}, f_\infty)$ presentado en el Ejemplo 5.28 es transitivo, $P_1(f_\infty)$ es denso en $\mathbb{I} \cup \{2\}$ y no es sensitivo, pues 2 es un punto aislado en $\mathbb{I} \cup \{2\}$.

Ejemplo 6.5. El sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ presentado en el Ejemplo 5.43 es transitivo, $P_1(f_\infty)$ es denso en $\mathbb{I}$ y no es sensitivo en $\mathbb{I}$. Para ver que el sistema no es sensitivo en $\mathbb{I}$ supongamos, por el contrario, que $\delta > 0$ es una constante de sensibilidad de $(\mathbb{I}, f_\infty)$. Sean $x = \frac{1}{2}$ y $U = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Entonces existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f_1^n(x) - f_1^n(y)| > \delta$. Notemos que si n es par, entonces $f_1^n(x) = f_1^n(y) = 1$, mientras que si $n = 2m + 1$ es impar, entonces $f_1^n(x) = f_1^n(y) = a_{2m+1}$. En cualquier caso, $|f_1^n(x) - f_1^n(y)| = 0$. Esto muestra que $(\mathbb{I}, f_\infty)$ no es sensitivo. Las otras propiedades de $(\mathbb{I}, f_\infty)$ fueron probadas en el Ejemplo 5.43. $\square$

En la Introducción comentamos que en [**43**, Proposición 2.3] se prueba que todo sistema autónomo (X, f), transitivo y sin dependencia sensitiva a condiciones iniciales, donde $f \colon X \to X$ es una función biyectiva, induce un sistema no-autónomo (X, f_∞) que es transitivo, $P_2(f_\infty) = X$ y no es sensitivo. Por tanto, existen sistemas no-autónomos transitivos cuyo conjunto $P_2(f_\infty)$ es denso en X y que no son sensitivos. Una rotación irracional de la circunferencia unitaria, es un ejemplo de un sistema autónomo transitivo, no sensitivo en donde la función utilizada es biyectiva (un homeomorfismo, incluso).

El siguiente resultado se sigue de la Definición 6.4, e indica que la sensitividad en A se puede considerar restringiendo la topología de X al subespacio A.

Proposición 6.6. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ y todo subconjunto abierto V de A con $x \in V$, existen $y \in V$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d\left(f_1^n(x), f_1^n(y)\right) > \delta$.

Corolario 6.7. Sean (X, f) un sistema metrizable autónomo y A un subconjunto no vacío de X tal que $f(A) \subset A$. Entonces (X, f) es sensitivo en A si y sólo si el sistema autónomo $(A, f|_A)$ es sensitivo.

Mientras que las nociones de transitividad y de densidad de órbitas periódicas son topológicas, la noción de sensitividad es métrica. Es por esto que estamos considerando sistemas metrizables no-autónomos. Esto no es la excepción con la noción de caos en el sentido de Devaney, para sistemas metrizables no-autónomos, según se considera en [**50**, Definición 2.5] para puntos periódicos en el sentido (P3).

Definición 6.8. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo, A un subconjunto no vacío de D_1 e $i \in \{1,2,3\}$. Se dice que (D_∞, f_∞) es **Devaney caótico en A en el sentido (Pi)** o bien **caótico en el sentido de Devaney en A con puntos periódicos en el sentido (Pi)**, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1) (D_∞, f_∞) es transitivo en A;
2) $P_i(f_\infty)$, el conjunto de los puntos periódicos de f_∞ en el sentido (Pi), es denso en A;
3) (D_∞, f_∞) es sensitivo en A.

Por la propiedad 2) de la Proposición 2.2, $P_i(f_\infty)$ es denso en A si y sólo si, como subespacio de A, el conjunto $P_i(f_\infty) \cap A$ es denso en A.

6.2. Equi-continuidad. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos. En el Teorema 4.8 probamos que la transitividad se preserva bajo semiconjugación. Posteriormente, en el Teorema 5.8, mostramos que la densidad de puntos periódicos también se preserva bajo semiconjugaci"on. En [**12**] se muestra que, para sistemas metrizables autónomos, la sensitividad no se preserva bajo conjugación. Para preservar la sensitividad se requiere del concepto de equi-continuidad. Antes de definirlo, supongamos que (X, d) y (Y, e) son dos espacios métricos y que $h\colon X \to Y$ es una función. Recordemos que h es *uniformemente continua* si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ se tiene que $e(h(x), h(y)) < \varepsilon$. Consideremos ahora la siguiente noción que aparece en [**50**, Definición 3.2].

Definición 6.9. Sean X y Y dos espacios metrizables, d y e métricas que inducen las respectivas topologías de X y Y, $D_\infty = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $E_\infty = \{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ sucesiones de subconjuntos no vacíos de X y de Y, respectivamente. Para cada cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n\colon D_n \to E_n$ una función continua. Decimos que $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es **equi-continua** en D_∞ si se cumple la siguiente propiedad:

1) para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $x, y \in D_n$ con $d(x, y) < \delta$, sucede que $e\left(h_n(x), h_n(y)\right) < \varepsilon$.

Decimos que h_∞ es **uniformemente equi-continua** en D_∞ si cada función h_n es uniformemente continua y se cumple la propiedad 1).

Si existe una función continua $h\colon X \to Y$ tal que, en la definición anterior, $D_n = X$, $E_n = Y$ y $h_n = h$, para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión constante h_∞, que identificamos con h, es equi-continua si y sólo si h es uniformemente continua. Usando la noción de equi-continuidad, vamos a presentar resultados que indican condiciones bajo las que la sensitividad y el caos en el sentido de Devaney se preservan bajo conjugacín. El siguiente, por ejemplo, aparece originalmente en [**50**, Lema 3.2], en donde se supone que la conjugación h_∞ es uniformemente equi-continua.

Teorema 6.10. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas metrizables no-autónomos. Supongamos que (D_∞, f_∞) está conjugado con (E_∞, g_∞) y que $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una conjugación. Si h_∞ es equi-continua en D_∞ y (E_∞, g_∞) es sensitivo en E_1, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en D_1.

Demostración. Por la Proposición 6.6 existe $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:

1) para cada $a \in E_1$ y para todo subconjunto abierto V de E_1 con $a \in V$, existen $b \in V$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $e(g_1^n(a), g_1^n(b)) > \delta$.

Como h_∞ es equi-continua en D_∞, existe $\eta > 0$ con la siguiente propiedad:

2) para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $x, y \in D_n$ con $d(x, y) < \eta$, sucede que $e(h_n(x), h_n(y)) < \delta$.

Sean $z \in D_1$ y U un abierto en D_1 de modo que $z \in U$. Entonces $h_1(z) \in E_1$ y $h_1(U)$ es un abierto en E_1 tal que $h_1(z) \in h_1(U)$. Por 1) existen $b \in h_1(U)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $e(g_1^n(h_1(z)), g_1^n(b)) > \delta$. Sea $w \in U$ tal que $h_1(w) = b$. Por la Proposición 4.6, $h_{n+1} \circ f_1^n = g_1^n \circ h_1$. Además, notemos que $f_1^n(z), f_1^n(w) \in D_{n+1}$. Si $d(f_1^n(z), f_1^n(w)) < \eta$ entonces, por 2),

$$e(h_{n+1}(f_1^n(z)), h_{n+1}(f_1^n(w))) < \delta.$$

Esto implica, utilizando las igualdades $h_{n+1} \circ f_1^n = g_1^n \circ h_1$ y $h_1(w) = b$, que

$$e\left(g_1^n\left(h_1(z)\right), g_1^n(b)\right) = e\left(g_1^n\left(h_1(z)\right), g_1^n\left(h_1(w)\right)\right) < \delta,$$

lo cual es un absurdo. Por tanto,

$$d(f_1^n(z), f_1^n(w)) \geqslant \eta > \frac{\eta}{2}.$$

Hemos probado, así, que $\frac{\eta}{2} > 0$ es un número tal que para cada $z \in D_1$ y todo subconjunto abierto U de D_1 con $z \in U$, existen $w \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f_1^n(z), f_1^n(w)) > \frac{\eta}{2}$. Entonces, por la Proposición 6.6, (D_∞, f_∞) es sensitivo en D_1. □

Combinando los Teoremas 4.12, 5.9 y 6.10, tenemos el siguiente resultado que es la parte (i) de [**50**, Teorema 3.1], y se cumple para los puntos periódicos en el sentido (P1), (P2) y (P3).

Teorema 6.11. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas metrizables no-autónomos e $i \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos que (D_∞, f_∞) está conjugado con (E_∞, g_∞), y que $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una conjugación equi-continua en D_∞ y con la siguiente propiedad:

($\star$) para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$, si $E_{n_1} \cap E_{n_2} \neq \emptyset$, entonces $h_{n_1}^{-1}(y) = h_{n_2}^{-1}(y)$, para toda $y \in E_{n_1} \cap E_{n_2}$.

Si (E_∞, g_∞) es Devaney caótico en E_1 en el sentido *(Pi)*, entonces (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en D_1 en el sentido *(Pi)*.

Corolario 6.12. Sean (D_∞, f_∞) y (E_∞, g_∞) dos sistemas metrizables no-autónomos e $i \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos que (D_∞, f_∞) está conjugado con (E_∞, g_∞), y que $h_\infty = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una conjugaci"on tal que h_∞ es equi-continua en D_∞, $h_\infty^{-1} = \{h_n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ es equi-continua en E_∞ y, además, se tienen las siguientes propiedades:

($\star$) para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$, si $E_{n_1} \cap E_{n_2} \neq \emptyset$, entonces $h_{n_1}^{-1}(y) = h_{n_2}^{-1}(y)$, para toda $y \in E_{n_1} \cap E_{n_2}$;

($\star\star$) para cada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 \neq n_2$, si $D_{n_1} \cap D_{n_2} \neq \emptyset$ entonces $h_{n_1}(x) = h_{n_2}(x)$, para toda $x \in D_{n_1} \cap D_{n_2}$.

Entonces (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en X en el sentido *(Pi)* si y sólo si (E_∞, g_∞) es Devaney caótico en Y en el sentido *(Pi)*.

Corolario 6.13. Sean (X, f_∞) y (Y, g_∞) dos sistemas no-autónomos conjugados, $h: X \to Y$ una conjugación e $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1) si h es uniformemente continua y (Y, g_∞) es Devaney caótico en Y en el sentido *(Pi)*, entonces (X, f_∞) es Devaney caótico en X el sentido *(Pi)*;

2) si h y h^{-1} son uniformemente continuas, entonces (X, f_∞) es Devaney caótico en X en el sentido *(Pi)* si y sólo si (Y, g_∞) es Devaney caótico en Y en el sentido *(Pi)*.

El Corolario 6.12 aparece en [**50**, Corolario 3.1] para puntos periódicos en el sentido (P3), mientras que la parte 2) del Corolario 6.13, que se deduce del Corolario 6.12, aparece en [**57**, Teorema 3.1], considerando puntos periódicos en el sentido (P3).

Recordemos que si (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo entonces, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \geqslant n$ definimos la siguiente función pedazo de órbita:

$$f_n^k = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_{n+1} \circ f_n.$$

En particular

$$f_n^{n+i} = f_{n+i} \circ f_{n+i-1} \circ \cdots \circ f_{n+1} \circ f_n, \qquad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Si (D_∞, f_∞) es metrizable no-autónomo y la sucesión f_∞ es equi-continua, se tiene la propiedad que se describe a continuación, y será de gran uso para la prueba del Teorema 6.23.

Teorema 6.14. Sea (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo tal que f_∞ es equi-continua en D_∞. Entonces para cada $\delta > 0$ y toda $m \in \mathbb{N}$, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $x_n, y_n \in D_n$ y $d(x_n, y_n) < \delta'$, entonces

$$d\left(f_n^{n+i}(x_n), f_n^{n+i}(y_n)\right) < \delta, \qquad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Demostración. Hagamos $f_0 = f_1$. Sean $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Como f_∞ es equi-continua en D_∞, existe $\delta_1 > 0$ con la siguiente propiedad:

1) para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $x, y \in D_n$ con $d(x, y) < \delta_1$, sucede que $d(f_n(x), f_n(y)) < \delta$.

Sin perder generalidad, podemos suponer que $\delta_1 < \delta$. Notemos que para los elementos de la familia $\{f_{m+j+1} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se cumple que si $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x, y \in D_{m+j+1}$ son tales que $d(x, y) < \delta_1$ entonces, por 1),

$$d\left(f_{m+j+1}(x), f_{m+j+1}(y)\right) < \delta.$$

Utilizando de nuevo la equi-continuidad de f_∞ en D_∞, existe $\delta_2 > 0$ con la siguiente propiedad:

2) para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $x, y \in D_n$ con $d(x, y) < \delta_2$, sucede que $d(f_n(x), f_n(y)) < \delta_1$.

Sin perder generalidad, podemos suponer que $\delta_2 < \delta_1$. Notemos que para los elementos de la familia $\{f_{m+j} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se cumple que si $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x, y \in D_{m+j}$ son tales que $d(x, y) < \delta_2$ entonces, por 2),

$$d(f_{m+j}(x), f_{m+j}(y)) < \delta_1.$$

Continuando como antes, utilizamos de nuevo la equi-continuidad de f_∞ en D_∞ para garantizar la existencia de $0 < \delta_3 < \delta_2$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $x, y \in D_n$ con $d(x, y) < \delta_3$, sucede que $d(f_n(x), f_n(y)) < \delta_1$. Notemos que para los elementos de la familia $\{f_{m+j-1} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se cumple que si $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x, y \in D_{m+j-1}$ son tales que $d(x, y) < \delta_3$, entonces

$$d(f_{m+j-1}(x), f_{m+j-1}(y)) < \delta_2.$$

Continuando con este procedimiento, garantizamos que,

3) para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ existe $0 < \delta_{i+2} < \delta_{i+1}$ tal que para los elementos de la familia $\{f_{m+j-i} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se cumple que si $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x, y \in D_{m+j-i}$ son tales que $d(x, y) < \delta_{i+2}$, entonces

$$d(f_{m+j-i}(x), f_{m+j-i}(y)) < \delta_{i+1}.$$

Sea $\delta' = \delta_{m+2}$. Entonces $0 < \delta' < \delta$. Vamos a probar que δ' satisface lo que enunciamos en el teorema. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in D_n = D_{m+n-m}$ tales que $d(x_n, y_n) < \delta'$ e $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como $x_n, y_n \in D_{m+n-m}$, $d(x_n, y_n) < \delta_{m+2}$ y f_n es un elemento de la familia $\{f_{m+j-m} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, resulta que

$$d\left(f_{m+n-m}(x_n), f_{m+n-m}(y_n)\right) < \delta_{m+1}.$$

Luego $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) < \delta_{m+1}$. Notemos que $f_n(x_n), f_n(y_n) \in D_{n+1} = D_{m+n-(m-1)}$ y que f_{n+1} es un elemento de la familia $\{f_{m+j-(m-1)} \colon j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Además tenemos que

$$d(f_n(x_n), f_n(y_n)) < \delta_{m+1} = \delta_{(m-1)+2}.$$

Entonces, por la propiedad que cumple δ_{m+1},

$$\begin{aligned} d\left(f_n^{n+1}(x_n), f_n^{n+1}(y_n)\right) &= d(f_{n+1}(f_n(x_n)), f_{n+1}(f_n(y_n))) = \\ &= d(f_{m+n-(m-1)}(f_n(x_n)), f_{m+n-(m-1)}(f_n(y_n)) < \delta_{(m-1)+1} = \delta_m. \end{aligned}$$

Por tanto, $d\left(f_n^{n+1}(x_n), f_n^{n+1}(y_n)\right) < \delta_m$. Notemos que

$$f_n^{n+1}(x_n), f_n^{n+1}(y_n) \in D_{n+2} = D_{m+n-(m-2)}$$

y que f_{n+2} es un elemento de la familia $\{f_{m+j-(m-2)} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Además tenemos que

$$d(f_n^{n+1}(x_n), f_n^{n+1}(y_n)) < \delta_m = \delta_{(m-2)+2}.$$

Entonces, por la propiedad que cumple δ_m,

$$d\left(f_n^{n+2}(x_n), f_n^{n+2}(y_n)\right) = d\left(f_{n+2}\left(f_n^{n+1}(x_n)\right), f_{n+2}\left(f_n^{n+1}(y_n)\right)\right) =$$
$$= d\left(f_{m+n-(m-2)}\left(f_n^{n+1}(x_n)\right), f_{m+n-(m-2)}\left(f_n^{n+1}(y_n)\right)\right) < \delta_{(m-2)+1} = \delta_{m-1}.$$

Es decir, $d\left(f_n^{n+2}(x_n), f_n^{n+2}(y_n)\right) < \delta_{m-1}$. Continuando de esta manera, tenemos que

$$d(f_n^{n+3}(x_n), f_n^{n+3}(y_n)) < \delta_{m-2}, \qquad d(f_n^{n+4}(x_n), f_n^{n+4}(y_n)) < \delta_{m-3}$$

y, así,

$$d\left(f_n^{n+i}(x_n), f_n^{n+i}(y_n)\right) < \delta_{m-(i-1)} < \delta, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Esto termina la demostración. □

El siguiente resultado se utilizará en más de una ocasión.

Proposición 6.15. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto infinito de D_1. Si (D_∞, f_∞) es transitivo en A y $P_3(f_\infty)$ es denso en A entonces, para cada $p \in A$ y toda $\varepsilon > 0$,

$$A \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right). \tag{5.1}$$

Demostración. Sean $p \in A$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $x \in A$ y un subconjunto abierto U de X con $x \in U$. Por la Proposición 5.29, A no posee puntos aislados. Entonces el subconjunto abierto y no vacío $U|_A = U \cap A$ de A contiene un punto distinto de x (incluso, al ser A un espacio T_1 sin puntos aislados, por la Proposición 2.5, $U|_A$ es infinito). Como (D_∞, f_∞) es transitivo en A y los conjuntos $B(\varepsilon, p) \cap A$ y $U|_A$ son abiertos no vacíos de A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(B(\varepsilon, p) \cap A) \cap U|_A \neq \emptyset$. Luego

$$U \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right)\right) \neq \emptyset,$$

probando así que $x \in \operatorname{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty} f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right)$ y con ello (5.1). □

6.3. Ergodicidad Topológica (Transitividad Sintética).

Las siguientes nociones aparecen en [**66**, Definiciones 2.9 y 2.10].

Definición 6.16. Una sucesión creciente $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es **sintética**, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k+1} - n_k \leqslant m$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 6.17. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y A un subconjunto no vacío de D_1. Decimos que (D_∞, f_∞) es **topológicamente ergódico en** A, si para cada dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de A el conjunto

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset\},$$

pensado como una sucesión creciente en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, es no vacío y sintético.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, hagamos $n_i = b + a(i-1)$. Entonces la progresión aritmética $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N}$ es una sucesión creciente que es sintética. Más aún, cualquier superconjunto de $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ que sea una sucesión creciente en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, también es sintético. Esto se utilizará en la prueba de la Proposición 6.18.

En la Definición 6.16, hemos traducido “syndetic sequence” como “sucesión sintética”. Otra forma de referirse a esto es como “sucesión sindética”. Por otro lado en otros artículos, como en

[**61**, Definición 2.9], la noción de sistema topológicamente ergódico, se llama sistema *sintéticamente transitivo* o bien *sindéticamente transitivo* ("syndetically transitive", en inglés), mientras que la noción de sistema topológicamente ergódico difiere de la que hemos dado (ver, por ejemplo, [**61**, Definición 2.10]).

Tanto en [**2**] como en [**23**] se prueba que si un sistema autónomo (X, f) es transitivo y $P(f)$ es denso en X, entonces (X, f) es topológicamente ergódico en X. En la siguiente proposición, que aparece en [**66**, Teorema 2.1] para puntos periódicos en el sentido (P3), se extiende este resultado para sistemas no-autónomos que no tienen porque ser metrizables.

Proposición 6.18. Sean (D_∞, f_∞) un sistema no-autónomo y $A \subset D_1$ tal que A es invariante en (D_∞, f_∞). Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Entonces, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) si $P_i(f_\infty)$ es denso en A entonces para cualesquiera dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de A, existe $p \in U \cap P_i(f_\infty)$ de manera que $\operatorname{orb}(p, f_\infty) \cap V \neq \emptyset$;

2) si $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces (D_∞, f_∞) es topológicamente ergódico en A.

Demostración. Para probar 1), supongamos que $P_i(f_\infty)$ es denso en A y sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Como (D_∞, f_∞) es transitivo en A, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $x \in U$ de modo que $f_1^k(x) \in V$. Como las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son continuas en el conjunto invariante A, la restricción $(f_1^k)|_A \colon A \to A$ es una función continua en A. Entonces existe un abierto W de A tal que $x \in W$ y $(f_1^k)|_A(W) \subset V$. Como $P_i(f_\infty)$ es denso en A y $U \cap W$ es un subconjunto abierto y no vacío de A, pues tiene a x, existe $p \in (U \cap W) \cap P_i(f_\infty)$. Notemos que $p \in U \cap P_i(f_\infty)$ y

$$f_1^k(p) = (f_1^k)|_A(p) \in V \cap \operatorname{orb}(p, f_\infty).$$

Esto prueba 1).

Para probar 2), supongamos que $P_3(f_\infty)$ es denso en A y sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Aplicando 1) con $i = 3$, deducimos que existen $p \in U \cap P_3(f_\infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f_1^k(p) \in V$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que p es un punto m-periódico de (D_∞, f_∞). Por la afirmación (5.4) de la Proposición 5.7,

$$f_1^{mj+k}(p) = f_1^k(p), \qquad \text{para cada } j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Como $f_1^k(U) \cap V \neq \emptyset$, tenemos que $mj + k \in N(U, V)$, para toda $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Haciendo $n_j = k + m(j-1)$, para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que la progresión aritmética $\{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} - n_j = m$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Por tanto la sucesión $\{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ es sintética y, como $\{n_j : j \in \mathbb{N}\} \subset N(U, V)$, el conjunto $N(U, V)$ es no vacío y sintético. Esto prueba que el sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) es topológicamente ergódico. □

Corolario 6.19. Sea (X, f_∞) un sistema no-autónomo transitivo tal que $P_3(f_\infty)$ es denso en X. Entonces (X, f_∞) es topológicamente ergódico.

6.4. Caos en un Sistema No-Autónomo. Para emular el Teorema 6.3 en sistemas metrizables no-autónomos, supondremos que nuestro sistema es transitivo en un conjunto A y que el conjunto de puntos periódicos, en el sentido (P3), es denso en A. Nos proponemos entonces verificar si el sistema es sensitivo en A. Para esto, procedemos como se indica en la Sección 3 de [**66**], y consideramos dos casos: cuando $A \subset X$ está acotado y cuando no lo está.

El siguiente resultado, que contempla el caso en que $A \subset D_1$ no está acotado, aparece originalmente en [**66**, Teorema 3.1].

Teorema 6.20. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto no vacío y no acotado de D_1. Si (D_∞, f_∞) es transitivo en A y $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A, y como constante de sensibilidad se puede escoger cualquier número positivo. En consecuencia (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A el sentido *(P3)*.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Para ver que δ es una constante de sensibilidad, fijemos $\varepsilon > 3$ y sean $x \in A$ y U un subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Sea $U|_A = U \cap A$. Notemos que $\varepsilon - 1 > 2$, por lo que $(\varepsilon - 1)\delta > 2\delta$, de donde

$$\frac{(\varepsilon-1)\delta}{2} > \delta.$$

Como A no está acotado, A es infinito. Utilizando esto y el hecho de que (D_∞, f_∞) es transitivo en A y $P_3(f_\infty)$ es denso en A, por la Proposición 5.29, no existen puntos aislados en A. Luego, por la Proposición 2.5, $U|_A$ es infinito así que $U|_A \cap (X \setminus \{x\})$ es un subconjunto abierto y no vacío de A. Como $P_3(f_\infty)$ es denso en A, existe $q \in U|_A \cap P_3(f_\infty)$ tal que $q \neq x$. Notemos que $d(x, q) > 0$. Consideremos el número

$$\eta = \text{máx}\left\{2d(x,z) \colon z \in \text{orb}(q, f_\infty) \text{ y } d(x,z) > 0\right\}. \tag{5.2}$$

Como $q \in \text{orb}(q, f_\infty)$ y $d(x, q) > 0$, el conjunto $\{z \in \text{orb}(q, f_\infty) \colon d(x, z) > 0\}$ es no vacío, y por tanto, η es un máximo de números mayores que cero, por lo que $\eta > 0$. Por (5.2), para cada $z \in \text{orb}(q, f_\infty)$ sucede que

$$d(x,z) = 0 < \eta \quad \text{o bien} \quad 0 < d(x,z) < 2d(x,z) \leqslant \eta.$$

Esto prueba que $\text{orb}(q, f_\infty) \subset B(\eta, x)$. Por tanto,

$$\text{orb}(q, f_\infty) \subset B(\eta, x) \subset \text{cl}B\,(\eta, x) \subset \text{cl}B\,(\varepsilon\eta, x).$$

Como A no está acotado,

$$(X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\eta, x)) \cap A \quad \text{ y } \quad (X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\delta, x)) \cap A$$

son subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Por la transitividad de (D_∞, f_∞) en A, existen $k, r \in \mathbb{N}$ tales que

$$f_1^k(U|_A) \cap [(X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\eta, x)) \cap A] \neq \emptyset \quad \text{y} \quad f_1^r(U|_A) \cap [(X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\delta, x)) \cap A] \neq \emptyset.$$

Sean $y, w \in U|_A$ de modo que

$$f_1^k(y) \in (X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\eta, x)) \cap A \quad \text{y} \quad f_1^r(w) \in (X \setminus \text{cl}B(2\varepsilon\delta, x)) \cap A.$$

Como

$$B(\varepsilon\eta, x) \subset \text{cl}B(\varepsilon\eta, x) \subset B(2\varepsilon\eta, x) \subset \text{cl}B(2\varepsilon\eta, x)$$

y

$$B(\varepsilon\delta, x) \subset \text{cl}B(\varepsilon\delta, x) \subset B(2\varepsilon\delta, x) \subset \text{cl}B(2\varepsilon\delta, x),$$

tenemos que

$$d(x, f_1^k(y)) \geqslant \varepsilon\eta \quad \text{ y } \quad d(x, f_1^r(w)) \geqslant \varepsilon\delta.$$

Ahora consideraremos dos casos, dependiendo de si $\eta \geqslant \delta$ o bien $\eta < \delta$. Supongamos primero que $\eta \geqslant \delta$. Por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, f_1^k(y)) \leqslant d(x, f_1^k(q)) + d(f_1^k(q), f_1^k(y)).$$

Utilizando esto así como las afirmaciones $\eta \geqslant \delta$ y $f_1^k(q) \in \text{orb}(q, f_\infty) \subset B(\eta, x)$, tenemos que

$$d\left(f_1^k(q), f_1^k(y)\right) \geqslant d\left(x, f_1^k(y)\right) - d\left(x, f_1^k(q)\right) \geqslant \varepsilon\eta - \eta = (\varepsilon-1)\eta \geqslant (\varepsilon-1)\delta.$$

Usando de nuevo la desigualdad de triángulo, deducimos que

$$d\left(f_1^k(x), f_1^k(y)\right) + d\left(f_1^k(x), f_1^k(q)\right) \geqslant d\left(f_1^k(q), f_1^k(y)\right) \geqslant (\varepsilon-1)\delta.$$

Por tanto

$$d\left(f_1^k(x), f_1^k(y)\right) \geqslant \frac{(\varepsilon-1)\delta}{2} > \delta \quad \text{ o bien } \quad d\left(f_1^k(x), f_1^k(q)\right) \geqslant \frac{(\varepsilon-1)\delta}{2} > \delta.$$

En cualquiera de las dos situaciones, hemos probado que existe

$$p \in \{q, y\} \subset U|_A \text{ tal que } d(f_1^k(x), f_1^k(p)) > \delta.$$

Luego (D_∞, f_∞) es sensitivo con constante de sensibilidad δ. Esto termina la prueba del primer caso.

Ahora supongamos que $\eta < \delta$. Entonces $\mathrm{orb}(q, f_\infty) \subset B(\eta, x) \subset B(\delta, x)$. En particular $f_1^r(q) \in B(\delta, x)$. Ahora bien, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, f_1^r(w)) \leqslant d(x, f_1^r(q)) + d(f_1^r(q), f_1^r(w)).$$

Luego

$$d\left(f_1^r(q), f_1^r(w)\right) \geqslant d\left(x, f_1^r(w)\right) - d\left(x, f_1^r(q)\right) \geqslant \varepsilon\delta - \delta = (\varepsilon - 1)\delta.$$

Usando de nuevo la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$d\left(f_1^r(x), f_1^r(w)\right) + d\left(f_1^r(x), f_1^r(q)\right) \geqslant d\left(f_1^r(q), f_1^r(w)\right) \geqslant (\varepsilon - 1)\delta.$$

Por tanto

$$d\left(f_1^r(x), f_1^r(w)\right) \geqslant \frac{(\varepsilon - 1)\delta}{2} > \delta \quad \text{o bien} \quad d\left(f_1^r(x), f_1^r(q)\right) \geqslant \frac{(\varepsilon - 1)\delta}{2} > \delta.$$

En cualquiera de las dos situaciones, hemos probado que existe $p \in \{q, w\} \subset U|_A$ tal que $d(f_1^r(x), f_1^r(p)) > \delta$. Luego (D_∞, f_∞) es sensitivo con constante de sensibilidad δ. Esto termina la prueba del segundo caso, y por tanto, también la del teorema. □

En la prueba del Teorema 6.20 no se utiliza la continuidad de cada función f_n que define a f_∞. En [**66**, Ejemplo 3.1] se ilustra el Teorema 6.20 de la siguiente manera.

Ejemplo 6.21. Sean I un intervalo no acotado tal que $I \subset \mathbb{R}$ y $Q = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de los números racionales en I. Podemos pensar que $I = [0, +\infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una función $f_n : I \to I$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n, & \text{si } x \in Q, \\ x, & \text{si } x \in I \setminus Q. \end{cases}$$

Notemos que las funciones f_n no son continuas. Consideremos $f_\infty = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, así como la pareja (I, f_∞). Es claro que $P_3(f_\infty) = I \setminus Q$ es denso en $A = I$ Ahora sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacío de A. Como Q es denso en A, existen $a_m \in U \cap Q$ y $a_n \in V$. Notemos que $f_1^n(a_m) = a_n$, de donde $f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, (I, f_∞) es transitivo en A. Como A es un subconjunto no vacío y no acotado de I, por el Teorema 6.20, (I, f_∞) es sensitivo en A y, en consecuencia, es Devaney caótico en A el sentido (P3). □

Es un problema interesante ejemplificar el Teorema 6.20 con un sistema no-autónomo como se ha considerado en la Definición 3.3, es decir, en el que cada una de las funciones que definen a f_∞ sea continua.

En la prueba del caso en que $A \subset D_1$ está acotado, vamos a utilizar el siguiente resultado, que aparece en [**66**, Lema 3.1].

Proposición 6.22. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo, A un subconjunto no vacío de D_1 y $E \subset D_1$ tal que E es denso en A. Si (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A, entonces para cualquier $\delta > 0$ existen $y \in E \cap A$ y $0 < \varepsilon < \delta$ tales que

$$f_1^n\left(B(\varepsilon, y) \cap A\right) \subset B\left(\delta, f_1^n(y)\right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Demostración. Sea $\delta > 0$. Como (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A, el número positivo $\frac{\delta}{4}$ no es una constante de sensibilidad de (D_∞, f_∞) en A. Por tanto existen $x \in A$ y un abierto U en X tales que $x \in U$ de modo que

1) para cada $z \in U \cap A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, sucede que $d(f_1^n(x), f_1^n(z)) \leqslant \frac{\delta}{4}$.

Como U es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(2\varepsilon, x) \subset U$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\varepsilon < \delta$. Como E es denso en A y $B(\varepsilon, x) \cap A$ es un subconjunto abierto y no vacío de A, pues tiene a x, por la parte 2) de la Proposición 2.2, existe $y \in E \cap B(\varepsilon, x) \cap A$. Notemos que $y \in E \cap A$. Para probar (5.3), tomemos $w \in B(\varepsilon, y) \cap A$ y $n \in \mathbb{N}$. Como

$$y \in B(\varepsilon, x) \cap A \subset B(2\varepsilon, x) \cap A \subset U \cap A,$$

por 1), $d(f_1^n(x), f_1^n(y)) \leqslant \frac{\delta}{4}$. Por la desigualdad del triángulo,

$$d(w, x) \leqslant d(w, y) + d(y, x) < 2\varepsilon.$$

Luego $w \in B(2\varepsilon, x) \cap A \subset U \cap A$, y por 1), $d(f_1^n(x), f_1^n(w)) \leqslant \frac{\delta}{4}$. Aplicando la desigualdad del triángulo,

$$d\left(f_1^n(w), f_1^n(y)\right) \leqslant d\left(f_1^n(w), f_1^n(x)\right) + d\left(f_1^n(x), f_1^n(y)\right) \leqslant \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Esto prueba (5.3). □

El siguiente resultado, que contempla el caso en que $A \subset D_1$ es infinito y está acotado, aparece originalmente en [**66**, Teorema 3.2] y utiliza la noción de equi-continuidad así como el Teorema 6.14. En su demostración no utilizaremos la continuidad de cada función f_n que define a f_∞.

Teorema 6.23. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto infinito de D_1 que está acotado. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) un elemento de A es un punto fijo de (D_∞, f_∞) en el sentido *(P3)*;

2) f_∞ es equi-continua en D_∞.

Si (D_∞, f_∞) es transitivo en A y $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A. En consecuencia, (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A en el sentido *(P3)*.

Demostración. Como A está acotado, $\delta = \frac{1}{7}\text{diám}(A)$ es un número mayor que cero. Supongamos que (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A. Como $P_3(f_\infty)$ es un subconjunto de D_1 que es denso en A, por la Proposición 6.22, existen $p \in P_3(f_\infty) \cap A$ y $0 < \varepsilon < \delta$ tales que

$$f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right) \subset B\left(\delta, f_1^n(p)\right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Por la Proposición 6.15,

$$A \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right). \tag{5.5}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que p es un punto m-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P3). Entonces

$$f_1^{m+n}(p) = f_1^n(p), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Utilizando esto y las contenciones (5.4) y (5.5), tenemos que

$$A \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1^n\left(B(\varepsilon, p) \cap A\right) \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B\left(\delta, f_1^n(p)\right) = \text{cl} \bigcup_{i=1}^{m} B\left(\delta, f_1^i(p)\right). \tag{5.6}$$

Como f_∞ es equi-continua en D_∞, por el Teorema 6.14, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $x_n, y_n \in D_n$ y $d(x_n, y_n) < \delta'$, entonces

$$d(f_n^{n+i}(x_n), f_n^{n+i}(y_n)) < \delta, \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Sea $q \in A$ un punto fijo de (D_∞, f_∞) en el sentido (P3). Entonces

$$f_1^n(q) = q, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

por lo que $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Además, por las Proposiciones 5.4 y 5.5, $f_n(q) = q$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Utilizando esto y la propiedad de δ', tenemos que

$$f_n^{n+i}\left(B(\delta', q) \cap D_n\right) \subset B(\delta, q), \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{5.7}$$

Como (D_∞, f_∞) es transitivo en A, y los conjuntos $B(\varepsilon, p)\cap A$ y $B(\delta', q)\cap A$ son abiertos no vacíos en A, existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que

$$f_1^r\left(B(\varepsilon,p)\cap A\right)\cap\left(B(\delta',q)\cap A\right)\neq\emptyset.$$

Sea $y_1 \in B(\varepsilon,p)\cap A$ tal que $f_1^r(y_1)\in B(\delta',q)\cap A$. Como $f_1^r(y_1)\in D_{r+1}$, tenemos que

$$f_1^r(y_1)\in B(\delta',q)\cap D_{r+1}. \tag{5.8}$$

Por (5.7) y (5.8), para cada $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, sucede que

$$f_1^{r+1+i}(y_1)=f_{r+1}^{r+1+i}\left(f_1^r(y_1)\right)\in f_{r+1}^{r+1+i}\left(B(\delta',q)\cap D_{r+1}\right)\subset B(\delta,q). \tag{5.9}$$

Fijemos $i\in\{1,2,\ldots,m\}$. Como $y_1\in B(\varepsilon,p)\cap A$, por (5.4),

$$f_1^{r+1+i}(y_1)\in f_1^{r+1+i}(B(\varepsilon,p)\cap A)\subset B\left(\delta, f_1^{r+1+i}(p)\right). \tag{5.10}$$

Sea $z\in B(\delta, f_1^{r+1+i}(p))$. Por la desigualdad del triángulo

$$d(z,q)\leqslant d\left(z, f_1^{r+1+i}(p)\right)+d\left(f_1^{r+1+i}(p), f_1^{r+1+i}(y_1)\right)+d\left(f_1^{r+1+i}(y_1),q\right). \tag{5.11}$$

La elección de z implica que $d(z, f_1^{r+1+i}(p))<\delta$. Además, por (5.10)

$$d(f_1^{r+1+i}(p), f_1^{r+1+i}(y_1))<\delta$$

y, por (5.9),

$$d(f_1^{r+1+i}(y_1),q)<\delta.$$

Por tanto, de (5.11), $d(z,q)<3\delta$ o lo que es lo mismo $z\in B(3\delta,q)$. Así tenemos que

$$B(\delta, f_1^{r+1+i}(p))\subset B(3\delta,q).$$

Como esto es válido para toda $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, hemos probado que

$$\bigcup_{i=1}^{m} B\left(\delta, f_1^{r+1+i}(p)\right)\subset B(3\delta,q). \tag{5.12}$$

Si escribimos a r como $r=mq_1+r_1$, donde $q_1,r_1\in\mathbb{N}$ y $0\leqslant r_1<m$ y utilizamos el hecho de que, por la Proposición 5.7,

$$f_1^{mq_2+r_2}(p)=f_1^{r_2}(p),\qquad \text{para todo } q_2\in\mathbb{N} \text{ y cada } r_2\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

tenemos que

$$\left\{f_1^1(p), f_1^2(p),\ldots,f_1^m(p)\right\}=\left\{f_1^{r+2}(p), f_1^{r+3}(p),\ldots,f_1^{r+m+1}(p)\right\}.$$

Combinando esto con (5.6) y (5.12) resulta que

$$A\subset \mathrm{cl}\bigcup_{i=1}^{m} B\left(\delta, f_1^i(p)\right)=\mathrm{cl}\bigcup_{i=1}^{m} B\left(\delta, f_1^{r+1+i}(p)\right)\subset \mathrm{cl}B(3\delta,q)\subset B(6\delta,q).$$

Por tanto diám$(A)\leqslant 6\delta$, contradiciendo el hecho de que diám$(A)=7\delta$. Como llegamos a esta contradicción porque supusimos que (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A, concluimos que (D_∞, f_∞) es sensitivo en A y, en consecuencia, (D_∞, f_∞) es caótico en el sentido de Devaney en A. □

Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto infinito de D_1 que está acotado. Supongamos que (D_∞, f_∞) es transitivo en A y que $P_3(f_\infty)$ es denso en A. En [**66**] no se considera si las condiciones 1) y 2) del Teorema 6.23 son esenciales. Tampoco se indica si la sensitividad de (D_∞, f_∞) en A se obtiene si suponemos que f_∞ es equi-continua en D_∞, y que algún elemento de A es un punto fijo de (D_∞, f_∞) en el sentido (P1).

La pareja (I, f_∞) que aparece en el Ejemplo 6.21, suponiendo ahora que I es un intervalo acotado, es una manera de ejemplificar el Teorema 6.23, si no consideramos importante la continuidad de cada función f_n que define a f_∞. Cuando importa la continuidad de cada función f_n, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.24. Para ilustrar el Teorema 6.23, consideremos el sistema no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$, donde $A = \mathbb{I} = [0,1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{2n}(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{I}$ y

$$f_{2n+1}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2(1-x), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Cada f_{2n+1} es la función tienda, la cual es una función transitiva. En [**66**, Ejemplo 3.2] se indica que $(\mathbb{I}, f_\infty)$ satisface todas las condiciones del Teorema 6.23, por lo que $(\mathbb{I}, f_\infty)$ es sensitivo en A. □

Vamos a mostrar un resultado similar al Teorema 6.23, pero ahora con condiciones más estrictas en lo que concierne a la densidad de puntos periódicos. Antes de mencionar el siguiente teorema, será útil definir un conjunto especial de puntos periódicos: si (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo entonces, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$P_N(f_\infty) = \{p \in P_3(f_\infty) \colon \ p \text{ es un punto } m_p\text{-periódico de } (D_\infty, f_\infty) \text{ y } m_p \leqslant N\}. \tag{5.13}$$

Es claro que

$$P_N(f_\infty) \subset P_3(f_\infty) \subset D_1, \quad \text{para cada } N \in \mathbb{N}.$$

Además si $A \subset D_1$ es no vacío y para alguna $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $P_N(f_\infty)$ es denso en A, por la parte 3) de la Proposición 2.2, $P_3(f_\infty)$ es denso en A.

El siguiente resultado aparece en [**66**, Teorema 3.3].

Teorema 6.25. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto infinito de D_1 que está acotado. Si (D_∞, f_∞) es transitivo en A y, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $P_N(f_\infty)$ es denso en A, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A. En consecuencia, (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A en el sentido *(P3)*.

Demostración. Por la Proposición 5.29, A no tiene puntos aislados. Como A es infinito, existe $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\} \subset A$ tal que $|C| = N+1$. Definamos

$$\delta = \frac{1}{8} \text{mín}\{d(x_i, x_j) \colon i, j \in \{1, 2, \ldots, N+1\} \text{ e } i \neq j\}.$$

Entones los elementos del conjunto $\{B(\delta, x_1), B(\delta, x_2), \ldots, B(\delta, x_{N+1})\}$ son ajenos dos a dos. Supongamos que (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A. Como $P_N(f_\infty)$ es denso en A, por la Proposición 6.22, existen $p_1 \in P_N(f_\infty) \cap A$ y $0 < \varepsilon < \delta$ tales que

$$f_1^n\left(B(\varepsilon, p_1) \cap A\right) \subset B\left(\delta, f_1^n(p_1)\right), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que p_1 es un punto m-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P3) y $m \leqslant N$. Entonces $f_1^{m+n}(p_1) = f_1^n(p_1)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 6.15,

$$A \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1^n\left(B(\varepsilon, p_1) \cap A\right). \tag{5.15}$$

De (5.14) y (5.15), tenemos que

$$\begin{aligned} A \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1^n(B(\varepsilon, p_1) \cap A) \subset \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B\left(\delta, f_1^n(p_1)\right) = \\ = \text{cl} \bigcup_{k=1}^{m} B\left(\delta, f_1^k(p_1)\right) = \bigcup_{k=1}^{m} \text{cl} B\left(\delta, f_1^k(p_1)\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Vamos a probar que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, el conjunto

$$\text{cl} B(\delta, f_1^k(p_1)) \cap C$$

tiene a lo más un elemento. Supongamos, por el contrario, que existen $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $i, j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$ con $i \neq j$ tales que

$$x_i, x_j \in \mathrm{cl}B(\delta, f_1^k(p_1)) \subset B(2\delta, f_1^k(p_1)).$$

Entonces

$$d(x_i, x_j) \leqslant d\left(x_i, f_1^k(p_1)\right) + d\left(f_1^k(p_1), x_j\right) < 4\delta,$$

contradiciendo el hecho de que $d(x_i, x_j) \geqslant 8\delta$. Esto prueba que $\mathrm{cl}B(\delta, f_1^k(p_1)) \cap C$ tiene a lo más un elemento, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por tanto, como $m \leqslant N$, existe $s \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$ tal que

$$x_s \notin \bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{cl}B(\delta, f_1^k(p_1)),$$

contradiciendo con esto la contención (5.16). Esta contradicción surgió del hecho de suponer que (D_∞, f_∞) no es sensitivo en A. Por tanto (D_∞, f_∞) es sensitivo en A y, en consecuencia, (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A en el sentido (P3). □

6.5. Convergencia Puntual y Caos. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo y A un subconjunto infinito de D_1, invariante en (D_∞, f_∞). Para presentar otro resultado en el que la transitividad en A y la densidad de puntos periódicos en A implique la sensitividad en A (Teorema 6.29), vamos a suponer que la sucesión de funciones continuas $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a una función continua $f\colon X \to X$ en A. Esto significa que, para cada $x \in A$, la sucesión $\{f_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ converge a $f(x)$. Ahora bien, la función f permite considerar el sistema autónomo (X, f), que llamamos el *sistema autónomo inducido* por (D_∞, f_∞). Luego de estudiar si los tres ingredientes del caos en el sentido de Devaney se preservan del sistema no-autónomo a su sistema autónomo inducido, probaremos el Teorema 6.29.

A partir de este momento, vamos a considerar que (D_∞, f_∞) es un sistema no-autónomo y A es un subconjunto no vacío de D_1 e invariante en (D_∞, f_∞). Suponemos también que $f\colon X \to X$ es una función continua y que la sucesión $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A. Salvo en el enunciado del Teorema 6.29, en el resto de los resultados que aparecen en esta subsección, no vamos a escribir todas estas suposiciones. En el siguiente resultado, que aparece en [**66**, Lema 4.1] probamos que, para cada punto periódico $x \in A$, en el sentido (P3), sucede que $\mathrm{orb}(x, f_\infty) = \mathrm{orb}(x, f)$.

Proposición 6.26. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $x \in A$ tales que x es un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido *(P3)*. Entonces $f_1^i(x) = f^i(x)$ para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y x es un punto k-periódico del sistema autónomo (X, f).

Demostración. Sean $x \in A \subset D_1 \subset X$ un punto k-periódico de (D_∞, f_∞) en el sentido (P3). Vamos a probar primero que

1) $f_1^{i+1}(x) = f\left(f_1^i(x)\right)$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Para ver esto, sea $i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 5.7, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f_1^{i+1}(x) = f_1^{nk+i+1}(x) = f_{nk+i+1}\left(f_1^{nk+i}(x)\right) = f_{nk+i+1}\left(f_1^i(x)\right). \tag{5.17}$$

Como A es invariante y $x \in A$, tenemos que $f_1^i(x), f_1^{i+1}(x) \in A$. Por la convergencia puntual de $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ a f en A, la sucesión $\{f_{nk+i+1}(f_1^i(x))\colon n \in \mathbb{N}\}$ converge a $f(f_1^i(x))$. Como la sucesión constante $\{f_1^{i+1}(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ también converge a $f_1^{i+1}(x)$, usando (5.17) tenemos que $f_1^{i+1}(x) = f(f_1^i(x))$. Esto prueba 1).

Ahora vamos a probar por inducción que $f_1^i(x) = f^i(x)$, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para $i = 0$, $f_1^0(x) = x$ y $f^0(x) = x$. Supongamos que, para alguna $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sucede que $f_1^j(x) = f^j(x)$. Como

$j \geqslant 0$, tenemos que $j+1 \in \mathbb{N}$. Además, por 1),

$$f_1^{j+1}(x) = f\left(f_1^j(x)\right) = f\left(f^j(x)\right) = f^{j+1}(x).$$

Esto prueba que $f_1^i(x) = f^i(x)$, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En particular, $x = f_1^k(x) = f^k(x)$, así que x es un punto k-periódico de (X, f). $\square$

Corolario 6.27. Si $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces $P(f)$ es denso en A.

Así pues, cuando la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f y en el sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) hay densidad de puntos periódicos en el sentido (P3), también hay densidad de puntos periódicos en el sistema autónomo inducido (X, f). Ahora presentamos condiciones bajo las que la transitividad en (D_∞, f_∞) equivale a la transitividad en (X, f), y también el que (D_∞, f_∞) sea sensitivo equivale a que el sistema autónomo inducido (X, f) es sensitivo. El siguiente resultado aparece en [**66**, Proposición 4.1].

Proposición 6.28. Si (D_∞, f_∞) es metrizable y $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

1) para cada $x \in A$ y toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_1^n(x) = f^n(x)$;
2) (D_∞, f_∞) es transitivo en A si y sólo si (X, f) es transitivo en A;
3) (D_∞, f_∞) es sensitivo en A si y sólo si (X, f) es sensitivo en A.

Demostración. Para ver 1), sean $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $P_3(f_\infty)$ es denso en A, tenemos que $P_3(f_\infty) \cap A$ es denso en A o, lo que es lo mismo, que $\mathrm{cl}[A]P_3(f_\infty) \cap A = A$. Esto implica, pues X es metrizable, que existe una sucesión $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ en $P_3(f_\infty) \cap A$ que converge x. Por la Proposición 6.26, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$f_1^n(p_m) = f^n(p_m). \tag{5.18}$$

Tomando el límite cuando $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty} f_1^n(p_m) = \lim_{m\to\infty} f^n(p_m).$$

Por la continuidad de las funciones f_1^n y f^n,

$$f_1^n\left(\lim_{m\to\infty} p_m\right) = f^n\left(\lim_{m\to\infty} p_m\right).$$

Luego $f_1^n(x) = f^n(x)$. Esto prueba 1).

Para ver 2), supongamos primero que (D_∞, f_∞) es transitivo en A. Sean U y V dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Por la transitividad de (D_∞, f_∞) en A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea $x \in U \subset A$ de modo que $f_1^n(x) \in V$. Por 1), $f_1^n(x) = f^n(x)$ así que $f^n(x) \in V$. Luego $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y (X, f) es transitivo en A. Ahora supongamos que (X, f) es transitivo en A. Sean C y D dos subconjuntos abiertos y no vacíos de A. Por la transitividad de (X, f) en A, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(C) \cap D \neq \emptyset$. Tomemos $y \in C \subset A$ de modo que $f^m(y) \in D$. Nuevamente, por 1), $f_1^m(y) = f^m(y)$, así que $f_1^m(y) \in D$. Por tanto, $f_1^m(C) \cap D \neq \emptyset$ y (D_∞, f_∞) es transitivo en A.

Para ver 3), supongamos primero que (D_∞, f_∞) es sensitivo en A. Sea $\delta > 0$ una constante de sensibilidad de (D_∞, f_∞) en A. Vamos a probar que δ es también una constante de sensibilidad de (X, f). Sean $x \in A$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Como δ es una constante de sensibilidad de (D_∞, f_∞), existen $y \in U \cap A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f_1^n(x), f_1^n(y)) > \delta$. Por 1), $f_1^n(x) = f^n(x)$ y $f_1^n(y) = f^n(y)$. Luego $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Esto prueba que (X, f) es sensitivo en A. Utilizando ideas similares se prueba que si (X, f) es sensitivo en A, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A. $\square$

Consideremos las hipótesis de la Proposición 6.28. Como el conjunto A es invariante en (D_∞, f_∞) para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_1^n(A) \subset A$, por lo que $(f_1^n)|_A$ es una función de A en A. En vista de que f_1^n y f^n coinciden en A, según la parte 1) de la Proposición 6.28, sucede que $(f^n)|_A$ es una función de A en A, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular $f|_A$ es una función de A en A.

Es interesante determinar si la transitividad de (D_∞, f_∞) en A implica la transitividad de (X, f) en A, sin la hipótesis de que $P_3(f_\infty)$ sea denso en A. Lo mismo el recíproco de esta afirmación y lo correspondiente cambiando transitividad en A por sensitividad en A.

En el contexto que estamos considerando, el Teorema 6.3 toma la siguiente forma, la cual aparece en [**66**, Teorema 4.1].

Teorema 6.29. Sean (D_∞, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo, A un subconjunto infinito de D_1 y $f\colon X \to X$ una función continua. Supongamos que A es invariante en (D_∞, f_∞) y que la sucesión $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A. Si (D_∞, f_∞) es transitivo en A y $P_3(f_\infty)$ es denso en A, entonces (D_∞, f_∞) es sensitivo en A. En consecuencia, (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A en el sentido *(P3)*.

Demostración. Como ya indicamos $f|_A$ es una función continua del espacio metrizable e infinito A en A. Luego $(A, f|_A)$ es un sistema autónomo. La transitividad en A de (D_∞, f_∞) y el inciso 2) de la Proposición 6.28, implican que (X, f) es transitivo en A. Entonces, por la Proposición 3.8, $(A, f|_A)$ es transitivo. Por el Corolario 6.27, $P(f)$ es denso en A. Esto implica, por la Proposición 5.6, que $P(f|_A)$ es denso en A. Entonces, por la Proposición 6.3, $(A, f|_A)$ es sensitivo en A. Luego, por el Corolario 6.7, que (X, f) es sensitivo en A. Por tanto, por el inciso 3) de la Proposición 6.28, (D_∞, f_∞) es sensitivo en A y, por tanto, (D_∞, f_∞) es Devaney caótico en A en el sentido (P3). □

La Proposición 6.28 y el Teorema 6.29 indican condiciones bajo las que si el sistema metrizable no-autónomo (D_∞, f_∞) es caótico en el sentido de Devaney, entonces el sistema metrizable autónomo inducido (X, f) también lo es. Para notar que el recíproco de esta afirmación es falso, veamos el siguiente ejemplo que aparece en [**66**, Ejemplo 4.1].

Ejemplo 6.30. Consideremos $\mathbb{I} = A = [0,1]$ y, para cada $x \in \mathbb{I}$ y todo $n \geqslant 2$, definamos

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}]; \\ \frac{2}{3}, & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ x, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]; \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2(1-x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es claro que la sucesión $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A. Además $f_1([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) = \{\frac{2}{3}\}$, y para cada $n \geqslant 2$, $f(\frac{2}{3}) = f_n(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Sean $U = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $V = (0, \frac{1}{3})$. Entonces U y V son abiertos en A tales que $f_1^n(U) = \{\frac{2}{3}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f_1^n(U) \cap V = \emptyset$. Esto implica que el sistema metrizable no-autónomo $(\mathbb{I}, f_\infty)$ no es transitivo en A. En particular $(\mathbb{I}, f_\infty)$ no es Devaney caótico en A. Sin embargo, como f es la función tienda, el sistema metrizable autónomo inducido $(\mathbb{I}, f)$ es Devaney caótico, como se muestra en [**32**, p. 132]. □

Sean $f\colon X \to X$ una función y $B \subset X$. Decimos que f es *suprayectiva en B* si para cada $y \in B$ existe $x \in B$ tal que $f(x) = y$, es decir, si $B \subset f(B)$. A continuación agregamos la condición de que f_1 es una función suprayectiva en A a las hipótesis de la Proposición 6.28. Como vemos esto implica que, restringido al conjunto A, el sistema no-autónomo (D_∞, f_∞) es en realidad el sistema autónomo inducido $(A, f|_A)$. El siguiente resultado aparece en [**66**, Proposición 4.2].

Proposición 6.31. Supongamos que (D_∞, f_∞) es metrizable, $P_3(f_\infty)$ es denso en A y f_1 es suprayectiva en A. Entonces la sucesión $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A si y sólo si para cada $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_n(x) = f(x)$.

Demostración. Supongamos que para cada $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_n(x) = f(x)$. Entonces la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A. Para probar el recíproco, supongamos ahora que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f en A. Por la parte 1) de la Proposición 6.28, para cada $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_1^n(x) = f^n(x)$. En particular,

$$f_1(x) = f_1^1(x) = f^1(x) = f(x), \qquad \text{para cada } x \in A,$$

es decir f_1 y f coinciden en A. Como A es invariante en (D_∞, f_∞), $f_1(A) \subset A$. Además, al ser f_1 suprayectiva en A, $A \subset f_1(A)$. Luego $f_1(A) = A$ y, como f_1 y f coinciden en A, tenemos que $f(A) = A$. Entonces f es suprayectiva en A.

Vamos a probar que para toda $n \in \mathbb{N}$, f_n y f coinciden en A. En el camino probaremos también que cada f_n es suprayectiva en A. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, f_1 es suprayectiva en A y ya vimos que f_1 y f coinciden en A. Supongamos ahora que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, f_j y f coinciden en A, entonces

$$f_j(A) = f(A) = A \quad \text{para toda } j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

por lo que cada f_j es suprayectiva en A. Para ver que f_{k+1} es suprayectiva en A y, además, que f_{k+1} y f coinciden en A, sea $y \in A$. Como $A \subset f_k(A)$, podemos considerar $x_k \in A$ tal que $y = f_k(x_k) = f(x_k)$. Puesto que $A \subset f_{k-1}(A)$, existe $x_{k-1} \in A$ tal que $x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$. También $A \subset f_{k-2}(A)$, por lo que podemos tomar $x_{k-2} \in A$ tal que $x_{k-1} = f_{k-2}(x_{k-2}) = f(x_{k-2})$. Continuando de esta manera, existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$ tales que

$$y = f_k(x_k) = f(x_k) \text{ y } x_{i+1} = f_i(x_i) = f(x_i), \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \tag{5.19}$$

Notemos que, por (5.19)

$$\begin{aligned} f_1^{k+1}(x_1) &= (f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x_1) = (f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_2)(f_1(x_1)) = \\ &= (f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_2)(x_2) = (f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_3)(f_2(x_2)) = \\ &= (f_{k+1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_3)(x_3) = \cdots = f_{k+1}(f_k(x_k)) = f_{k+1}(y). \end{aligned}$$

Luego $f_{k+1}(y) = f_1^{k+1}(x_1)$. Por la parte 1) de la Proposición 6.28, $f_1^{k+1}(x_1) = f^{k+1}(x_1)$. Ahora bien, por (5.19),

$$f^k(x_1) = f^{k-1}(f(x_1)) = f^{k-1}(x_2) = f^{k-2}(f(x_2)) = f^{k-2}(x_3) = \cdots = f(x_k) = y.$$

Por tanto, $f(y) = f^{k+1}(x_1) = f_1^{k+1}(x_1) = f_{k+1}(y)$. Esto prueba que f_{k+1} y f coinciden en A. En particular, como f es suprayectiva en A, tenemos que f_{k+1} es suprayectiva en A. Hemos probado, por tanto, que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es suprayectiva en A, y además, f_n y f coinciden en A. $\square$

El siguiente resultado aparece en [**66**, Corolario 4.1].

Proposición 6.32. Supongamos que (D_∞, f_∞) es metrizable. Si $P_3(f_\infty)$ es denso en A y f es suprayectiva en A entonces, para cada $x \in A$ y toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_n(x) = f(x)$.

Demostración. Por la parte 1) de la Proposición 6.28, para toda $n \in \mathbb{N}$, f_1^n y f^n coinciden en A. En particular, f_1 y f coinciden en A y, como f es suprayectiva en A, tenemos que f_1 es suprayectiva en A. Luego por la Proposici
on 6.31, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n y f coinciden en A. $\square$

Terminamos con el siguiente resultado que aparece en [**66**, Proposición 4.3], y da condiciones bajo las que la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equivalente a su convergencia puntual e, incluso, equivalente a que el sistema no-autónomo (X, f_∞) es en realidad el sistema autónomo (X, f).

Proposición 6.33. Sea (X, f_∞) un sistema metrizable no-autónomo en el que X es compacto. Supongamos que $f\colon X \to X$ es una función continua. Si (X, f_∞) es transitivo y $P_3(f_\infty)$ es denso en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1) $f_n = f$, para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) la sucesión $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a f;
3) la sucesión $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a f.

Demostración. Notemos que las implicaciones 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) son obvias. Supongamos que 3) se cumple. Como $A = X$ es invariante en (X, f_∞), por la Proposición 6.32 basta probar que f es suprayectiva. Supongamos, por el contrario, que $f(X) \subsetneq X$. Como f es continua y X es compacto, $f(X)$ es un subconjunto compacto del espacio metrizable X. Luego $f(X)$ es un subconjunto cerrado y propio de X, por lo que $X \setminus f(X)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Por la parte 1) de la Proposición 6.28, para cualquier subconjunto U de X y cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_1^n(U) = f^n(U) \subset f(X)$. En particular, para cualquier subconjunto abierto y no vacío V de X y toda $n \in \mathbb{N}$, $f_1^n(V) \cap (X \setminus f(X)) = \emptyset$. Como esto contradice la transitividad de (X, f_∞), deducimos que f es suprayectiva. As
i $f_n = f$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y 1) se cumple. $\square$

Comentario Final: El presente trabajo fue escrito durante la estancia sabática del primer autor en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), llevada a cabo de enero a junio de 2019. Los autores agradecen las correcciones indicadas por el árbitro pues, gracias a ellas, se tiene una mejor versión del presente trabajo.

Referencias

[1] G. Acosta, M. Sanchis, *A note on nonautonomous discrete dynamical systems*, En Ferrando J. (eds), *Descriptive Topology and Functional Analysis II*, TFA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 286. Springer, Cham 2019, p. 29–41.

[2] E. Akin, *Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions*, The University Series in Mathematics, Springer Science + Business Media, New York, 1997.

[3] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, Amsterdam, Paris, 2008.

[4] F. Balibrea, T. Caraballo, P. E. Kloeden, J. Valero, *Recent developments in dynamical systems: Three perspectives*, Int. J. Bifurcation Chaos, 20 No. 9 (2010), 2591–2636.

[5] F. Balibrea, *On problems of topological dynamics in non-autonomous discrete systems*, Appl. Math. Noninear Sci. 1 No. 2 (2016), 391–404.

[6] F. Balibrea-Iniesta, C. Lopesino, A. M. Mancho, S. Wiggins, *Chaotic dynamics in nonautonomous maps: Application to the nonautononous Hénon map*, Int. J. Bifurcation Chaos, 25 No. 12 (2015), Article ID 1550172, 14 pages.

[7] F. Balibrea-Iniesta, C. Lopesino, A. M. Mancho, S. Wiggins, *The chaotic saddle in the Lozi map, autonomous and nonautonomous versions*, Int. J. Bifurcation Chaos, 25 No. 13 (2015), Article ID 1550184, 18 pages.

[8] F. Balibrea-Iniesta, C. Lopesino, A. M. Mancho, S. Wiggins, *Lagrangian descriptors for stochastic differential equations: A tool for revealing the phase portrait of stochastic dynamical systems*, Int. J. Bifurcation Chaos, 26 No. 13 (2016), Article ID 1630036, 20 pages.

[9] F. Balibrea-Iniesta, V. J. García-Garrido, C. Lopesino, A. M. Mancho, S. Wiggins, *A theoretical framework for Lagrangian descriptors*, Int. J. Bifurcation Chaos, 27 No. 1 (2017), Article ID 1730001, 25 pages.

[10] F. Balibrea-Iniesta, L. Bertino, V. J. García-Garrido, A. M. Mancho, S. Wiggings, J. Xie, *Lagrangian transport across the upper Artic waters in the Canada basin*, QJR Meteorol. Soc. 145 No. 718 (2019), 76–91.

[11] F. Balibrea-Iniesta, *Nonautononous Dynamical Systems: From Theory To Applications*, Tesis de Doctorado, Departamento de Matem
aticas, Universidad Autónoma de Madrid, 2018.

[12] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacy, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, 99 (1992), 332–334.

[13] L. E. J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, Proc. Acad. Amsterdam 12 (1910), 785–794.

[14] J. S. Cánovas, *On ω-limit sets of non-autonomous discrete systems*, J. Differ. Equ. Appl. 12 (2006), 95–100.

[15] J. S. Cánovas, *Recent results on non-autonomous discrete systems*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. 51 (2010), 33–41.

[16] J. S. Cánovas, *Li-Yorke chaos in a class of nonautonomous discrete systems*, J. Differ. Equ. Appl. 17 (2011), 479–468.

[17] R. Das, M. Salman, *Dynamics of weakly mixing non-autonomous systems*, arXiv:1810.02144v1.

[18] R. Das, M. Salman, *Multi-sensitivity and other stronger forms of sensitivity in non-autonomous discrete systems*, Chaos, Solitions and Fractals, 115 (2018), 341–348.

[19] R. Das, M. Salman, *Specification properties for non-autonomous discrete systems*, arXiv:1808.07791v2.

[20] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[21] Z. Elhadj, *Lozi Mappings: Theory and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2013.

[22] R. Engelking, *General Topology*, Second Edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[23] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[24] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris, *Linear Chaos*, Universitext, Springer London Ltd, London, 2011.

[25] G. Gupta, *On Topological Entropy and Chaos in Nonautonomous Discrete Dynamical Systems*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, University of Delhi, 2017.

[26] R. C. Haworth, R. A. Mccoy, *Baire spaces*, Dissertationes Math., 141 (1977), 1–77.

[27] Q. Huang, Y. Shi, L. Zhang, *Chaotification of nonautonomous discrete dynamical systems*, Int. J. Bifurcation Chaos, 21 No. 11 (2011), 3359–3371.

[28] X. Huang, X. Wen, F. Zeng, *Pre-image entropy of nonautonomous dynamical systems*, J. Syst. Sci. Complex 21 (2008), 441–445.

[29] X. Huang, X. Wen, F. Zeng, *Topological pressure of nonautonomous dynamical systems*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory 8 (2008), 43–48.

[30] T. Husain, *Introduction to Topological Groups*, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, 1966.

[31] R. Kempf, *On Ω-limit sets of discrete-time dynamical systems*, J. Differ. Equ. Appl. 8 (2002), 1121–1131.

[32] J. E. King, H. Méndez, *Sistemas Dinámicos Discretos*, Las Prensas de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.

[33] S. Kolyada, S. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems*, Random Comp. Dyn. 4 (1996), 205–233.

[34] S. Kolyada, M. Misiurewicz, S. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous piecewise monotone dynamical systems on the interval*, Fund. Math. 160 (1999), 161–181.

[35] S. Kolyada, L. Snoha, S. Trofimchuk, *On minimality of nonautonomous dynamical systems*, Nonlinear Oscil. 7 (2004), 83–89.

[36] W. Krabs, *Stability and controllability in non-autonomous time-discrete dynamical systems*, J. Differ. Equ. Appl. 8 (2002), 1107–1118.

[37] P. Kůrka *Topological and Symbolic Dynamics*, Cours Spécialisés [Specialized Courses] 11, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[38] Y. Lan, *Chaos in nonautonomous discrete fuzzy dynamical systems*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 404–412.

[39] L. Liu, B. Chen, *On ω-limit sets and attraction of non-autonomous discrete dynamical systems*, J. Korean Math. Soc. 49 No. 4 (2012), 703–713.

[40] L. Liu, Y. Sun, *Weakly mixing sets and transitive sets for non-autonomous discrete system*, Adv. Differ. Equ. 217 (2014), 1–9.

[41] C. Lopesino, *Aspects of Global Dynamics in Nonautonomous Dynamical Systems*, Tesis de Doctorado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 2018.

[42] J. M. Martínez Dueñas, *Sistemas Dinámicos Discretos No-Autónomos*, Tesina de Maestr ia, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 2019.

[43] A. Miralles, M. Murillo-Arcila, M. Sanchis, *Sensitive dependence for nonautonomous discrete dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. 463 (2018), 268–275.

[44] M. Murillo-Arcila, A. Peris, *Mixing properties for nonautonomous linear dynamics and invariant sets*, Appl. Math. Lett., 26 No. 2 (2013), 215–218.

[45] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc. New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[46] P. Oprocha, P. Wilczynski, *Chaos in nonautonomous dynamical systems*, An. Univ. 'Ovidius' Constanta Ser. Mat. 17 (2009), 209–221.

[47] Á. Ramírez Urrutia, *Dinámica en Hiperespacios*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., 2012.

[48] M. Salman, *Dynamical Behaviour of Maps in Non-Autonomous Systems*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, University of Delhi, 2018.

[49] I. Sánchez, M. Sanchis, H. Villanueva, *Chaos in hyperspaces of nonautonomous discrete systems*, Chaos, Solitions and Fractals, 94 (2017), 68–74.

[50] Y. Shi, G. Chen, *Chaos of time-varying discrete dynamical systems*, J. Differ. Equ. Appl. 15 (2009), 429–449.

[51] D. Thakkar, *On Nonautonomous Discrete Dynamical Systems*, Tesis de Doctorado, The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Octubre 2016.

[52] D. Thakkar, R. Das, *A note on nonwandering set of a nonautonomous discrete dynamical system*, Applied Math. Sciences, 7 No. 138 (2013), 6849–6854.

[53] D. Thakkar, R. Das, *On nonautonomous discrete dynamical systems*, Int. J. Analysis Vol. 2014 (2014), Article ID 538691, 6 pages.

[54] D. Thakkar, R. Das, *Topological stability of a sequence of maps on a compact metric space*, Bull. Math. Sci. No. 4 (2014), 99–111.

[55] D. Thakkar, R. Das, *Some properties of chain recurrent set in nonautonomous discrete dynamical system*, Adv. Pure Appl. Math., 6(3)(2015), 173–178.

[56] D. Thakkar, R. Das, *Spectral decomposition theorem in equicontinous nonautonomous discrete dynamical system*, J. Differ. Equ. Appl. 22 (2) (2016), 676–686.

[57] C. Tian, G. Chen, *Chaos of a sequence of maps in a metric space*, Chaos, Solitons Fractals 28 (2006), 1067–1075.

[58] R. Vasisht, R. Das, *Continuum-wise expansive in non-autonomous discrete systems*, arXiv:1906.00209v3.

[59] R. Vasisht, R. Das, *Generalizations of expansiveness in non-autonomous discrete systems*, arXiv:1905.10061.

[60] R. Vasisht, R. Das, *Induced dynamics in hyperspace of non-autonomous discrete systems*, por aparecer en la revista Filomat, arXiv:1805.07623.

[61] R. Vasisht, R. Das, *On stronger forms of sensitivity in non-autonomous systems*, Taiwanese J. Math., Vol. 22, No. 5 (2018), 1139–1159.

[62] R. Vasisht, R. Das, *A note on $\mathcal{F}$-sensitivity for non-autononous systems*, J. Differ. Equ. Appl. 25 (4) (2019), 548–559.

[63] R. Vasisht, R. Das, *Furstenberg families and transitivity in non-autonomous systems*, Asian-Eur. J. Math. 13 (1) (2020), Article ID 2050029, 16 pages.

[64] M. Vellekoop, R. Berglunf, *On intervals, transivity = chaos*, Amer. Math. Monthly, Vol. 101, No. 4 (1994), 353–355.

[65] C. Yang, Z. Li, *On the sensitivities dependence in non-autonomous dynamical system*, arXiv: 1602.00075.

[66] H. Zhu, Y. Shi, H. Shao, *Devaney chaos in non-autonomous discrete systems*, Int. J. Bifurcation Chaos, 26 No. 11 (2016), Article ID 1650190, 10 pages.

Correos electrónicos:
`gacosta@matem.unam.mx` (G. Acosta),
`juanmtzd1991@hotmail.com` (J. M. Martínez Dueñas),
`sanchis@mat.uji.es` (M. Sanchis).

Capítulo 6

Algunos ejemplos de subobjetos clasificadores

Juan Angoa-Amador, Carlos Alberto López-Andrade
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Es conocido que en algunas categorías donde es posible encontrar subobjetos clasificadores se puede hacer una teoría de los subobjetos de los objetos en ella que se parece a la de la teoría de conjuntos (**Set**). Así se pueden hacer analogías entre ellas y algunas cualidades que se observan en **Set**. Nuestra intención es desarrollar al detalle dos categorías conocidas en álgebra y describir sus subobjetos clasificadores.

2. Preliminares

Una categoría es una estructura matemática que consiste de dos clases una la llamada clase de objetos de la categoría, otra la clase de los morfismos de la categoría, además de un par de funciones una que asocia a cada morfismo un objeto llamado dominio del morfismo y otra que asocia a cada morfismo un objeto llamado el codominio del morfismo, junto con una función composición que asocia a dos morfismo con codominio y dominio común un tercer morfismo llamado composición de estos morfismos con dominio el primero (de izquierda a derecha) y codominio el segundo, y, dicha composición es asociativa, finalmente a cada objeto le asocia un morfismo llamado el morfismo identidad que es el neutro bajo esta composición.

Formalmente; sea $\mathscr{C}$ una categoría, denotamos por $Mor(\mathscr{C})$ a su clase de morfismos, por $Ob(\mathscr{C})$ su clase de objetos. Si $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, $Dom(f)$ y $Cod(g)$ son los objetos dominio y codominio de f y g respectivamente; si $Dom(f) = Cod(g)$, denotamos por fg a su composición y ahora $Dom(fg) = Dom(g)$ y $Cod(fg) = Cod(f)$, si $A \in Ob(\mathscr{C})$, denotamos por Id_A al morfismo identidad y cumple $Dom(I_A) = Cod(I_A) = A$ y si $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, $Dom(f) = A$ y $Cod(g) = A$, entonces $fId_A = f$ y $Id_A g = g$, además para $f, g, h \in Mor(\mathscr{C})$, con $Dom(f) = Cod(g)$ y $Dom(g) = Cod(h)$, entonces $(fg)h = f(gh)$. En adelante si $M, N \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in Mor(\mathscr{C})$ con $Dom(f) = M$ y $Cod(f) = N$, denotamos esto con $f : M \to N$.

Veamos las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría.
1. Sean $M \in Ob(\mathscr{C})$, I un conjunto, para todo $i \in I$ $X_i \in Ob(\mathscr{C})$ y $c_i : M \to X_i$ morfismos de $\mathscr{C}$, la clase $\{c_i : M \to X_i : i \in I\}$ será llamada una M-$\mathscr{C}$-fuente. Análogamente, si $N \in Ob(\mathscr{C})$ y

para todo $i \in I$, $l_i : X_i \to N$ es un morfismo de $\mathscr{C}$, llamaremos a la colección $\{l_i : X_i \to N : i \in I\}$ un N-$\mathscr{C}$-pozo.

2. Una categoría es pequeña si la clase de sus objetos es un conjunto. Sea $\mathscr{D}$ una categoría pequeña y $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un funtor, el funtor D será llamado un diagrama en $\mathscr{C}$.

3. Sean $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un diagrama en $\mathscr{C}$ y $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ una M-$\mathscr{C}$-fuente tal que, si $\alpha : i \to j$ es un morfismo de $\mathscr{D}$, entonces:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"'] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{C}$. Si todo lo anterior ocurre, diremos que la M-$\mathscr{C}$-fuente es D-natural.

4. Sea $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ una M-$\mathscr{C}$-fuente D-natural, diremos que $(c_i : M \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ es un D-límite si dada $(d_i : M' \to D(i))_{i \in Ob(\mathscr{D})}$ otra M'-$\mathscr{C}$-fuente D-natural, existe un único morfismo $k : M' \to M$ tal que

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "k"'] \arrow[dr, "d_i"'] & & M \arrow[dl, "c_i"'] \\ & D(i) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

5. Diremos que $\mathscr{C}$ tiene límites finitos si para toda categoría finita $\mathscr{D}$, i.e., categoría que consiste de un conjunto finito de objetos y un conjunto finito de morfismos, y $D : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtor, existe un D-límite.

Definición 2.2. 1. Sean $\mathscr{C}$ categoría e I un conjunto. Si $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$, diremos que la P-$\mathscr{C}$-fuente $(p_\alpha : P \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$ es un producto de $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$, si para toda M-$\mathscr{C}$-fuente $(c_\alpha : M \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$, existe un único $k : M \to P$ $\mathscr{C}$-morfismo, tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "k"'] \arrow[dr, "c_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"'] \\ & X_\alpha & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $\alpha \in I$.

2. Diremos que $\mathscr{C}$ tiene productos finitos si para todo $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$ con I conjunto finito, existe el producto de $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq Ob(\mathscr{C})$.

Definición 2.3. Sean $f, g : X \to Y$ morfismos de $\mathscr{C}$. Diremos que la pareja (E, i), donde $E \in Ob(\mathscr{C})$ $i : E \to X$ morfismo en $\mathscr{C}$, es un igualador de f y g, si

i) $fi = gi$.

ii) Si $h : M \to X$ tal que $fh = gh$, entonces existe un único $l : M \to E$ tal que el triángulo conmuta en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "l"'] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \\
& E \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Diremos que una categoría tiene igualadores si para todo par de morfismos $f, g : X \to Y$, existe (E, i) un igualador para ellos.

Definición 2.4. Sean $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$, decimos que los morfismos $h : N \to Z$ y $t : N \to X$ son un jalador de f y g, si:
1. El diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y
2. Si $h' : M \to Z$ y $t' : M \to X$ son tales que:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "t'"'] \arrow[d, "h'"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces existe un único $k : M \to N$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "t'"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\
& N \arrow[r, "t"'] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
& Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Una categoría tiene jaladores si todo par de morfismos con codominio común, tiene un jalador.

Definición 2.5. Un objeto X es un objeto terminal en $\mathscr{C}$ si para todo $M \in Ob(\mathscr{C})$, existe un único morfismo $T_M : M \to X$.

A continuación enunciamos un teorema importante:

Teorema 2.6. [**1**, 12.4 Theorem] Si $\mathscr{C}$ es una categoría, son equivalentes los siguientes enunciados:
1. En $\mathscr{C}$ existen límites finitos.
2. En $\mathscr{C}$ existen productos finitos e igualadores
3. En $\mathscr{C}$ existen jaladores y objetos terminales.

Si tenemos una categoría que cumpla alguna de las propiedades del teorema previo, tal categoría podría tener cierta cercanía a **Set**, que es lo que desarrollaremos en la siguiente sección.

3. Subobjetos clasificadores

Dada una categoría $\mathscr{C}$, y $f : Z \to X$ un morfismo, diremos que f es un monomorfismo si f es cancelable por la izquierda, i.e., si siempre que $fh = ft$, podemos implicar que $h = t$ para toda $h, t \in Mor(Y, Z)$. En una categoría $\mathscr{C}$, se llaman subojetos de X a todo monomorfismo con codominio X (cf. [**2**, Definition 6.9]). Dada la equivalencia del Teorema 2.6, si una categoría tiene límites finitos, entonces tiene jaladores y objetos terminales.

Hechos estos señalamientos, veamos la siguiente definición:

Definición 3.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con límites finitos. Un subobjeto clasificador Ω es

1. Un monomorfismo $true : 1 \to \Omega$ donde 1 es un objeto terminal y además:

2. Si $f : N \to X$ es un subobjeto de X, entonces existe un único morfismo $\chi_f : X \to \Omega$ tal que:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador.

El ejemplo motivador de esta definición es **Set**. Ya que en este caso $1 = \{0\}$, $\Omega = \{0, 1\}$ $true : 1 \to \Omega$ es definida como $true(0) = 0$, y si $f : N \to X$, es un monomorfismo, definimos:

$$\chi_f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in Imf, \\ 1 & \text{si } y \notin Imf \end{cases}$$

está claro que $T_N(z) = 0$ para todo $z \in N$.

Sólo veamos que

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador y que χ_f es única. Para esto, sea $T_{N'} : N' \to 1$, $\alpha : N' \to X$ tal que $\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "T_{N'}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$ conmuta. Como $\chi_f(\alpha(w)) = 0$ ya que $true(T_{N'}(w)) = true(0) = 0$ y el diagrama conmuta, entonces $\alpha(w) \in Imf$, se puede demostrar que en **Set**, los monomorfismos son funciones inyectivas, luego, dado que $\alpha(w) \in Imf$ existe $n \in N$ tal que $f(n) = \alpha(w)$, dicho n es único, puesto que si existe $n' \in N$ tal que $f(n') = \alpha(w)$ tenemos que $f(n) = f(n')$ pero f es un monomorfismo luego es inyectivo de ahí que, $n = n'$, así, existe un único $n \in N$ tal que $f(n) = \alpha(w)$. Definimos $\overline{\alpha} : N' \to N$ dada por $\overline{\alpha}(w) = n$ para cada $w \in N'$ con $\alpha(w) = f(n)$. El diagrama:

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[dr, "\overline{\alpha}"] \arrow[drr, "T_{N'}"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\ & N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\ & X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo, en efecto, sólo veamos que $T_N\overline{\alpha} = T_{N'}$ y $f\overline{\alpha} = \alpha$, como $T_N(\overline{\alpha}(w)) = T_N(n) = 0 = T_{N'}(w)$, mientras que $f(\overline{\alpha}(w)) = f(n) = \alpha(w)$ para cada $w \in N'$, tenemos que, $T_N\overline{\alpha}(w) = T_{N'}(w)$

y $f\overline{\alpha}(w) = \alpha(w)$ para cada $w \in N'$. Ahora $\overline{\alpha}$ es única, ya que si α' cumple que $f\alpha' = \alpha = f\overline{\alpha}$, por ser f monomorfismo, $\alpha' = \overline{\alpha}$. Supongase que θ_f cumple que $\theta_f f = trueT_N = 0$. Si $x \in Imf$, existe $n \in N$ tal que $x = f(n)$, luego $\theta_f(x) = \theta_f(f(n)) = trueT_N(n) = 0$, i.e., $\theta_f(x) = 0$, pero si $\theta_f(x) = 1$, $x \notin Imf$, ya que siempre que $x \in Imf$, se cumple que $\theta_f(x) = 0$, así:

$$\theta_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Imf, \\ 1 & \text{si } x \notin Imf \end{cases}$$

por tanto $\theta_f(x) = \chi_f(x)$ para cada $x \in X$, luego χ_f es única y en **Set**, existe un subobjeto clasificador.

4. Las categorías Act-M y Act-G

Sea M un monoide, sabemos que X es un conjunto sobre el que actúa M por la derecha, si existe $\psi : X \times M :\to X$ una función (la acción derecha de M sobre X) entre los conjuntos $X \times M$ y X tal que

1. $\psi(x, e) = x$ para todo $x \in X$ y e el neutro de M.
2. Para todo $x \in X$ y para todo $m, n \in M$, se cumple que $\psi(\psi(x, n), m) = \psi(x, nm)$.

Si denotamos por $\psi(x, n) = xn$, tenemos que:

M actúa por la derecha sobre X si existe una operación entre elementos de X con elementos de M tal que

1. Para todo $x \in X$ y e el neutro de M, se cumple que $xe = x$
2. Para todo $x \in X$ y para todo $m, n \in M$, se cumple que $(xn)m = x(nm)$.

Sea X un conjunto y M un monoide, siempre podemos hacer actuar a M sobre X por la derecha, mediante la acción $\psi(x, m) = x$ definida para todo $x \in X$ y $m \in M$. Otro conjunto que acepta una única acción de un monoide arbitrario es el conjunto vacío, ya que existe la función vacía y tal función define una acción de cualquier monoide sobre el conjunto vacío.

Queremos dar una estructura de categoría a este tipo de objetos, los conjuntos con una acción de un monoide fijo por la derecha, así que denotaremos por: **Act**-M a la categoría con objetos los conjuntos con una acción de M por la derecha sobre ellos. Ahora, definamos los morfismos de la categoría, sean $(X, \psi), (Y, \phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ con sus respectivas acciones ψ y ϕ. Sea $f : X \to Y$ una función entre los conjuntos X e Y, diremos que $f \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ si $f(\psi(x, m)) = \phi(f(x), m)$ para todo $x \in X$ y $m \in M$, en otras palabras, para todo $x \in X$ y $m \in M$ se cumple que $f(xm) = f(x)m$.

No es difícil demostrar que con esta definición **Act**-M es categoría. Ahora veamos un teorema importante.

Teorema 4.1. La categoría **Act**-M, tiene jaladores y objetos terminales.

Demostración. Sean $(X, \psi), (\{*\}, c) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ donde $c : \{*\} \times M \to \{*\}$ está dada por $c(*, m) = *$ para cada $m \in M$, i.e., $*m = *$ para cada $m \in M$ y sea $\theta \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ tal que $\theta : (X, \psi) \to (\{*\}, c)$, veamos que $(\{*\}, c)$ es un objeto terminal en **Act**-M, en efecto, como $\theta : X \to \{*\}$ es función tenemos que $\theta(x) = *$ para cada $x \in X$, i.e., θ es una función constante, además si $\tau \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$ tal que $\tau : (X, \psi) \to (\{*\}, c)$ está dada por $\tau(x) = *$ para cada $x \in X$, ya que τ es función entre X y $\{*\}$, entonces $* = \tau(xm) = \tau(x)m = *m$, i.e., $*m = *$ para cada $m \in M$.

Veamos que **Act**-M tiene jaladores, sean $f : (X, \psi) \to (Y, \phi)$ y $g : (Z, \gamma) \to (Y, \phi)$ morfismos de **Act**-M. Primero construimos el objeto $(X \times Z, \psi \times \gamma)$, la acción definida como $(\psi \times \gamma)((x, z), n) = (\psi(x, n), \gamma(z, n))$ (es decir: $(x, z)n = (xn, zn)$) para todo $x \in X$, $z \in Z$ y $n \in M$. No es difícil demostrar que esta función es una acción de M sobre $X \times Z$. Sea $T = \{(x, z) : f(x) = g(z)\}$, en el caso en que $T = \emptyset$ se puede ver que satisface los axiomas de la definición. Si $T \neq \emptyset$, sea $(x, z) \in T$ y $n \in M$, entonces $f(xn) = f(x)n = g(z)n = g(zn)$, así que $(xn, zn) \in T$, pero $(x, z)n = (xn, zn)$, así que $(T, (\psi \times \gamma)|_T) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$. De hecho se puede demostrar que si

$(X,\psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ y $S \subseteq X$ tal que para todo $s \in S$ y todo $n \in M$ se cumple que $sn \in S$, entonces $(S, \psi|_{S\times M}) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ (aquí $\psi|_{S\times M} : S \times M \to S$ es la restricción de ψ al dominio S).

Ahora definimos $h : T \to X$ como $h(x,z) = x$ y $l : T \to Z$ como $l(x,z) = z$, veamos que

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un jalador en $\mathbf{Act}$-M. Primero, está claro que $h((x,z)n) = xn = h((x,z))n$ y también que $l((x,z)n) = zn = l((x,z))n$, así que $h, l \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$, además $fh((x,z)) = f(x) = g(z) = gl((x,z))$, de ahí que el diagrama es conmutativo. Sea

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en $\mathbf{Act}$-M. Definimos $k : T' \to T$ para $t \in T'$, como $k(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ y $f(\alpha(t)) = g(\beta(t))$, entonces $(\alpha(t), \beta(t)) \in T$, está claro que $k(tn) = (\alpha(tn), \beta(tn)) = (\alpha(t)n, \beta(t)n) = (\alpha(t), \beta(t))n = k(t)n$, así que $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$. Comprobemos que

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & T \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "l"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ & Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero $hk(t) = h(\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t)$ y $lk((t)) = l(\alpha(t), \beta(t)) = \beta(t)$ y por tanto es conmutativo. Finalmente veamos la unicidad de k, sea $k' : T' \to T$ tal que $hk'(t) = \alpha(t)$ y $l(k'(t)) = \beta(t)$, si $k'(t) = (x,z)$, entonces $\alpha(t) = h(k'(t)) = x$ y $\beta(t) = l(k'(t)) = z$, luego $k'(t) = k(t)$. $\square$

Si G es un grupo y X un conjunto, una acción de G sobre X por la derecha, es análogamente una función $\psi : X \times G \to X$, tal que: para todo $x \in X$ y e el neutro de G, se cumple que $\psi(x,e) = x$ y para todo $x \in X$ y $m, n \in G$ se cumple que $\psi(x,n)m = \psi(x,nm)$.

También se define una estructura categórica para estos conjuntos, donde los objetos son conjuntos con una acción de G por la derecha en ellos y los morfismos son funciones de conjuntos $f : (X,\psi) \to (Y,\phi)$ tales que $f(\psi(x,n)) = \phi((f(x), n)$.

Los mismos candidatos que en el caso de los monoides serán los objetos terminales y los jaladores para un par de morfismos $f : (X,\psi) \to (Y,\gamma)$ y $g : (Z,\phi) \to (Y,\gamma)$, para así obtener la propiedad: si $\mathbf{Act}$-G es nuestra categoría de conjuntos con una acción por la derecha del grupo G entonces la categoría $\mathbf{Act}$-G tiene un objeto terminal y jaladores.

5. Subobjetos clasificadores en Act-M y en Act-G

Sean $(X,\psi), (Y,\phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$ o $(X,\psi), (Y,\phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$ y $h : (Y,\phi) \to (X,\psi)$ tal que $h \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$ o $h \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$, si h es monomorfismo, tenemos que h es una función inyectiva. En efecto, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $h(y_1) = h(y_2)$, definimos $t_1 : Y \to \{y_1\}$ como

$t_1(y) = y_1$ y $t_2 : Y \to \{y_2\}$ como $t_2(y) = y_2$ para todo $y \in Y$. Definimos la acción de G o la de M en $\{y_i\}$ como $y_i g = y_i$ para todo $g \in G$. Veamos que $t_1, t_2 \in Mor(\textbf{Act}\text{-}G)$, sea $y \in Y$ y $g \in G$, entonces $t_i(yg) = y_i$ por otro lado $t_i(y)g = y_i g = y_i$, de manera similar se exhibe que $t_1, t_2 \in Mor(\textbf{Act}\text{-}M)$. Está claro que $h(t_i(y)) = h(y_i)$ para cada $y \in Y$ y como $h(y_1) = h(y_2)$, entonces $h(t_1(y)) = h(t_2(y))$ para cada $y \in Y$. Así tenemos que $h \circ t_1 = h \circ t_2$ y dado que h es monomorfismo, entonces $t_1 = t_2$, luego $t_1(y) = t_2(y)$, i.e., $y_1 = y_2$, de ahí que h es inyectiva.

Vamos a resumir lo anterior en los resultados del lema siguiente:

Lema 5.1. 1. Sean $\{*\}$ y M monoide (o G grupo), definimos $*g = *$ para cada g en M (o en G) una acción de M (o de G) sobre $\{*\}$, entonces $\{*\}$ es objeto terminal en **Act**-G (o **Act**-M).

2. Si $h : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ es monomorfismo en **Act**-M o en **Act**-G, entonces h es inyectiva.

3. En **Act**-M o en **Act**-G existen jaladores.

4. Si $(X, \psi) \in Ob(\textbf{Act}\text{-}M)$ o $(X, \psi) \in Ob(\textbf{Act}\text{-}G)$, si $X_0 \subseteq X$ tal que $xg \in X_0$ para todo $g \in M$ o $g \in G$. Entonces $(X_0, \psi|_{X_0 \times M}) \in Ob(\textbf{Act}\text{-}M)$ o $(X_0, \psi|_{X_0 \times G}) \in Ob(\textbf{Act}\text{-}G)$.

5. El conjunto $\emptyset$ con la acción vacía es un objeto de **Act**-M o de **Act**-G.

6. Si $(X, \psi), (Y, \psi)$ objetos de **Act**-M o de **Act**-G, entonces $X \times Y$ con la acción $(\psi \times \phi)((x, y), n) = (\psi(x, n), \phi(y, n))$ es un objeto de **Act**-M o de **Act**-G.

7. Dado (X, ψ) objeto de **Act**-M o de **Act**-G un subobjeto de (X, ψ) es una función $h : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ inyectiva.

Ahora veamos un objeto clasificador en **Act**-G.

Teorema 5.2. Dado G un grupo, existe un subobjeto clasificador en **Act**-G.

Demostración. El conjunto $1 = \{0\}$ con la acción $c(0, g) = 0$ para cada g en G es un objeto terminal de **Act**-G y el conjunto $\{0, 1\}$ con la acción $\gamma(0, g) = 0$ y $\gamma(1, g) = 1$ para cada $g \in G$, i.e., $0g = 0$ y $1g = 1$ para cada $g \in G$, es un objeto de **Act**-G, veamos que esto último es cierto, $0e = 0$ y $1e = 1$ para e el neutro de G y además $(0g_1)g_2 = 0g_2 = 0 = 0(g_1 g_2)$ y $(1g_1)g_2 = 1g_2 = 1 = 1(g_1 g_2)$, i.e., $(0g_1)g_2 = 0(g_1 g_2)$ y $(1g_1)g_2 = 1(g_1 g_2)$ para cada $g_1, g_2 \in G$, así $(\{0, 1\}, \gamma) \in Ob(\textbf{Act}\text{-}G)$. Ahora sea $f : (Y, \phi) \to (X, \psi)$ un subobjeto de (X, ψ), debemos definir Ω y un morfismo $\chi_f : X \to \Omega$ para construir un jalador. En este sentido, sea $\Omega = \{0, 1\}$ con la acción γ, definimos $true : 1 \to \Omega$ y $T_Y : Y \to 1$ dadas por $true(0) = 0$ y $T_Y(y) = 0$ para toda $y \in Y$, respectivamente. Además, sea

$$\chi_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in Imf. \\ 1 & \text{si} \quad x \notin Imf \end{cases}$$

Veamos que χ_f es morfismo. Sea $x \in X$, $g \in G$, primero supongamos que $x \in Imf$, i.e., $x = f(y)$ para algún $y \in Y$, entonces $xg = f(y)g = f(yg)$, de ahí que $xg \in Imf$, por consiguiente, $\chi_f(xg) = 0 = 0g = \chi_f(x)g$, así $\chi_f(xg) = \chi_f(x)g$. Ahora supongamos que $x \notin Imf$, si $xg \in Imf$, entonces $xg = f(y)$ para algún $y \in Y$, luego $f(y)g^{-1} = x$, pero $f(y)g^{-1} = f(yg^{-1})$, de ahí que $x \in Imf$, por tanto $xg \notin Imf$, así que $\chi_f(xg) = 1 = 1g = \chi_f(x)g$, por consiguiente, $\chi_f(xg) = \chi_f(x)g$, en consecuencia $\chi_f \in Mor(\textbf{Act}\text{-}G)$. Ya con estas definiciones, resta demostrar que:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es jalador. Es fácil ver que el diagrama previo es conmutativo. Ahora si

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f'"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces $\chi_f(f'(n)) = true(T_N(n)) = 0$, así que $f'(n) \in Imf$, luego existe un único $y \in Y$ tal que $f(y) = f'(n)$, por un argumento similar al dado en el ejemplo en **Set**, ya que f es inyectiva. Definimos $k : N \to Y$, como $k(n) = y$ para cada $n \in N$ con $f'(n) = f(y)$. Veamos que $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$, sea $g \in G$, entonces $k(ng) = y_0$ con $f'(ng) = f(y_0)$. Como $f'(n) = f(y)$ tenemos que $f'(ng) = f'(n)g = f(y)g = f(yg)$, entonces $f(yg) = f(y_0)$, otra vez por la inyectividad de f, $yg = y_0$, luego $k(n)g = k(ng)$, por consiguiente, $k \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}G)$. No es difícil mostrar que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "T_N"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\
& X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para la unicidad de k, si $k' : N \to Y$, tal que $fk' = f' = fk$, como f es monomorfismo, tenemos que $k = k'$. Finalmente, veamos la unicidad de χ_f, supongamos que θ_f cumple que:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "T_N"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X \arrow[r, "\theta_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es jalador. Por la conmutatividad, $\theta_f(f(y)) = true(T_N(y)) = 0$, así que para todo $x \in Imf$, se cumple que $\theta_f(x) = 0 = \chi_f(x)$, por otro lado, si $\theta_f(x) = 1$ y $x \in Imf$ existe $y \in Y$ tal que $x = f(y)$, entonces $0 = true(T_N(y)) = \theta_f(f(y)) = \theta_f(x)$, i.e., $\theta_f(x) = 0$, así que $x \notin Imf$, luego $\theta_f(x) = 1 = \chi_f(x)$, siempre que $x \notin Imf$, por consiguiente, $\theta_f = \chi_f$ y por tanto, existe un subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-G. □

Ahora, describiremos el subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-M, tal categoría no cumple que el complemento de la imagen de un morfismo pueda aceptar la acción restringida como acción para así convertirse en objeto de la categoría, así que debemos construir otro objeto.

En otras palabras, sea $(X, \phi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$, si $S \subseteq X$ tal que para todo $x \in S$ y $n \in M$, se cumple que $xn \in S$, a este tipo de subconjuntos de X se les llama multiplicativamente cerrados, para los que puede suceder que para $z \in X \setminus S$ exista algún $n \in M$ tal que $xn \in S$, notar que en el caso de $(X, \psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}G)$, se tiene que para $S \subseteq X$ multiplicativamente cerrado se cumple que $X \setminus S$ también es multiplicativamente cerrado.

Definición 5.3. Sea $I \subseteq M$, diremos que I es un ideal derecho de M si para todo $w \in I$ y para todo $n \in M$, se cumple que $wn \in I$ (cf. [**2**, Definition 2.20]. Denotamos por $\mathfrak{I}_M$ a la colección de ideales derechos de M.

Lema 5.4. Existe una acción de M sobre $\mathfrak{I}_M$

Demostración. Ahora definamos una acción de M sobre $\mathfrak{I}_M$. Sea $m \in M$ e $I \in \mathfrak{I}_M$, definimos $Im = \{k \in M : mk \in I\}$. Veamos que es una acción de M sobre $\mathfrak{I}_M$. Primero veamos que $Im \in \mathfrak{I}_M$, sea $k \in Im$ y $n \in M$, veamos que $kn \in Im$, para esto $m(kn) = (mk)n$, pero $mk \in I$, luego $(mk)n \in I$, por tanto $kn \in Im$. Ahora, si $I \in \mathfrak{I}_M$, entonces $Ie = \{k : ek \in I\} = I$, finalmente, sea $n, m \in I$ con $I \in \mathfrak{I}_M$, verifiquemos que $(Im)n = I(mn)$. Tenemos que $k \in (Im)n$ si y sólo si $nk \in Im$ si y sólo si $m(nk) \in I$ si y sólo si $(mn)k \in I$ si y sólo si $k \in I(mn)$, por tanto $(Im)n = I(mn)$. □

En el camino de construir un subobjeto clasificador en $\mathbf{Act}$-M, veamos el siguiente lema:

Lema 5.5. Sean $(X, \psi) \in Ob(\mathbf{Act}\text{-}M)$, y $S \subseteq X$ un conjunto multiplicativamente cerrado, entonces:

1. Para todo $x \in X$, el conjunto $\langle S, x\rangle := \{m \in M : xm \in S\} \in \mathfrak{I}_M$.
2. La función $\phi_S : X \to \mathfrak{I}_M$, definida como $\phi_S(x) = \langle S, x\rangle$ es un morfismo de **Act**-M, donde M actúa sobre $\mathfrak{I}_M$ como se definió en el Lema 5.4.

Demostración. 1. Sea $n \in \langle S, x\rangle$ y $m \in M$, por demostrar que $nm \in \langle S, x\rangle$, o sea $x(nm) \in S$, pero $x(nm) = (xn)m$ y como $xn \in S$ entonces $(xn)m \in S$, luego $nm \in \langle S, x\rangle$.

2. Sea $x \in X$ y $n \in M$, por demostrar que $\phi_S(xn) = \phi_S(x)n$, es decir $\langle S, xn\rangle = \langle S, x\rangle n$. Ahora $k \in \langle S, xn\rangle$ si y sólo si $(xn)k \in S$, pero $(xn)k = x(nk)$, luego $x(nk) \in S$, así que $nk \in \langle S, x\rangle$, por tanto $k \in \langle S, x\rangle n$. □

Sea $f : (Y, \psi) \to (X, \phi)$ un morfismo de **Act**-M, está claro que Imf es multiplicativamente cerrado, ya que $f(yn) = f(y)n$. Con estos preliminares podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.6. En **Act**-M, existe un subobjeto clasificador.

Demostración.

1. Definamos $\Omega = \mathfrak{I}_M$ con la acción definida antes. Sea $true : 1 \to \Omega$, definida como $true(0) = M$, $true$ es morfismo ya que $true(0n) = M$, pero $true(0)n = Mn = \{k \in M : nk \in M\} = M$, i.e., $true(0n) = true(0)n$.
2. Ahora, dado $f : (Y, \gamma) \to (X, \psi)$ un monomorfismo de **Act**-M, debemos definir un único morfismo: $\chi_f : X \to \Omega$ de tal manera que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

sea jalador.

Consideremos $S = Imf$, así que S es multiplicativamente cerrado, luego $\phi_S : X \to \Omega$ definida en el Lema 5.5 es un morfismo de **Act**-M, hagamos $\chi_f = \phi_S$. Primero veamos que el diagrama anterior es conmutativo. Sea $y \in Y$, entonces $\chi_f(f(y)) = \langle S, f(y)\rangle = \{k \in M : f(y)k \in S\}$, es decir $k \in \chi_f(f(y))$ si y sólo si $f(y)k \in Imf$ si y sólo si $f(yk) \in Imf$, lo cual muestra que $\chi_f(f(y)) = M = true(0) = true(T_Y(y)))$.

Sea

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "T_Z"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en **Act**-M. Definamos $\beta : Z \to Y$, para esto notemos que para todo $z \in Z$, como $true(T_Z(z)) = true(0) = M$, entonces $\chi_f(\alpha(z)) = M$, es decir $\langle S, \alpha(z)\rangle = M$, entonces $\alpha(z)e \in Imf$, luego $\alpha(z) \in Imf$, sea $y \in Y$, tal que $\alpha(z) = f(y)$, notar que como f es inyectiva y es única, así que definimos $\beta(z) = y$, por lo que β es función. Veamos que $\beta \in Mor(\mathbf{Act}\text{-}M)$. Sea $z \in Z$ y $n \in M$, calculemos $\beta(zn) = y_0$, es decir $f(y_0) = \alpha(zn) = \alpha(z)n$, si $y_1 \in Y$, tal que $f(y_1) = \alpha(z)$, entonces $f(y_1)n = f(y_1 n)$, pero $f(y_1)n = \alpha(z)n = \alpha(zn)$, luego $f(y_1 n) = f(y_0)$, luego $y_1 n = y_0$, por tanto $\beta(z)n = \beta(zn)$. Veamos que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, "T_Z"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
& X \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Solo resta demostrar que $f(\beta(z)) = \alpha(z)$, pero si $\beta(z) = y$, entonces $f(y) = \alpha(z)$, luego $f(\beta(z)) = f(y) = \alpha(z)$. Veamos la unicidad de β. Sea $\beta' : Z \to Y$, tal que $f\beta' = \alpha = f\beta$, como f es monomorfismo, concluimos que $\beta = \beta'$. Finalmente, veamos que χ_f es única. Sea $\theta : X \to \Omega$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "T_Y"'] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "true"'] \\
X \arrow[r, "\theta"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

sea jalador en **Act**-M.

Sea $x \in X$, por demostrar que $\theta(x) = \langle S, x\rangle = \chi_f(x)$. Observemos que:

1) $xk \in Imf$ si y sólo si $k \in \langle S, x\rangle$ si y sólo si $\langle S, xk\rangle = M$.
2) $k \in \theta(x)$ si y sólo si $\theta(xk) = M$.

En efecto, veamos 1), sea $k \in \langle S, x\rangle$, entonces $xk \in Imf$, como $\chi_f(x) = \langle S, x\rangle$, $\langle S, x\rangle k = \chi_f(x)k = \chi_f(xk) = \langle S, xk\rangle$, pero $\langle S, x\rangle k = \{l \in M : kl \in \langle S, x\rangle\}$, por tanto, para toda $l \in M$, se tiene que $(xk)l \in Imf$, ya que $xk \in Imf$, luego $\langle S, xk\rangle = M$. Si $\langle S, xk\rangle = M$, entonces $(xk)e \in Imf$, luego $xk \in Imf$, por tanto $k \in \langle S, x\rangle$.

Veamos 2), sea $k \in \theta(x)$, $\theta(x)k = \theta(xk) = \{l \in M : kl \in \theta(x)\}$, pero $\theta(x) \in \mathcal{I}_M$, luego $\theta(xk) = M$. Inversamente, si $\theta(xk) = M$, entonces $\{l \in M : kl \in \theta(x)\} = M$, luego $ke \in \theta(x)$, así que $k \in \theta(x)$.

Ahora, veamos la igualdad $\theta(x) = \langle S, x\rangle = \chi_f(x)$, $k \in \langle S, x\rangle$ si y sólo si $\langle S, xk\rangle = M$ si y sólo si $xk \in Imf$ si y sólo si existe $y \in Y$ tal que $f(y) = xk$, por otro lado, $\theta(f(y)) = \theta(xk) = M$ si y sólo si $k \in \theta(x)$. Y así concluimos que **Act**-M tiene un subobjeto clasificador. □

6. Conclusiones

Resulta muy elaborada la demostración de que las categorías **Act**-M y **Act**-G tienen un subobjeto clasificador, pero esto nos muestra las propiedades comunes que tienen y que en esencia las hace parecerse a la categoría **Set**. El camino para hallar tales analogías resultó muy largo pero lo común es lo suficientemente robusto como para aceptar que se encontró una esencia que antes no era visible. Cabe señalar que toda categoría de pregavillas es un topos y es claro que la categoría **Act**-M es isomorfa a la categoría Set^M con M la categoría monoide. Por lo que, de manera inmediata se tendría que **Act**-M es un topos. Pero creemos que es interesante exhibir un subobjeto clasificador en esta categoría.

Agradecimientos: Nos gustaría agradecer al árbitro por sus valiosos comentarios y sugerencias que contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de nuestro manuscrito.

Referencias

[1] Jiří Adámek, Horst Herrlich and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, GNU Free Documentation License, Version 1.2, 2004.

[2] Mati Kilp, Ulrich Knauer and Alexander V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[3] Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic (A First Introduction to Topos Theory)*, Springer Science+Business Media, New York, 1992.

Correos electrónicos:
jangoa@fcfm.buap.mx (Juan Angoa-Amador),
clopez@fcfm.buap.mx (Carlos Alberto López-Andrade)

Capítulo 7

Una alternativa al *back-and-forth*

Tonatiuh Matos Wiederhold
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es exhibir una parte de una poderosa herramienta de la Teoría de Conjuntos y cómo se puede aplicar para simplificar, en cierto sentido, las demostraciones de resultados que, en ocasiones, conllevan argumentos poco ilustrativos. Para este trabajo, nos centraremos muy concretamente en la técnica conocida como *back-and-forth*, usada para construir isomorfismos en la Teoría de Órdenes Parciales, pero incluso en otras áreas como la Teoría de Gráficas.

Las primeras dos secciones buscan mostrar una prueba sencilla y otra complicada de resultados conocidos, con la esperanza de que el lector aprecie cómo los argumentos resultan, a nuestro parecer, considerablemente más claros que aquéllos empleados en la literatura clásica. La sección final muestra cómo las mismas técnicas se pueden adaptar a áreas comúnmente consideradas distantes de la Teoría de Conjuntos, en esta instancia, la Teoría de Gráficas.

Las primeras dos secciones están basadas en mi tesis de licenciatura (ver [**6**]), bajo la dirección del Dr. Roberto Pichardo Mendoza, a quien agradezco profundamente por sus consejos y revisiones de este trabajo. Si bien todos los resultados mencionados en este trabajo son bien conocidos, hasta donde sabemos, las demostraciones de las últimas dos secciones son originales.

La notación y resultados básicos de Teoría de Conjuntos se pueden consultar en [**4**]. Entre la notación indispensable tenemos, por ejemplo, para dos conjuntos A, B cualesquiera, $A \subseteq B$ quiere decir que todo elemento de A es elemento de B. Si X es un conjunto, $[X]^{<\omega}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de X. Diremos que un conjunto A es *numerable* si $|A| \leqslant |\mathbb{N}|$, donde $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales positivos. Como es común, ω denotará al primer ordinal transfinito, es decir, $\omega \setminus \{0\} = \mathbb{N}$.

También son convenientes los símbolos de *dominio* e *imagen de una función*: si f es una función, $\operatorname{dom}(f) := \{x \colon \exists y((x, y) \in f)\}$ e $\operatorname{img}(f) := \{y \colon \exists x((x, y) \in f)\}$. Además, vamos a usar la notación $f[A] := \{y \colon \exists a \in A((a, y) \in f)\}$ y $f^{-1}[B] := \{x \colon \exists b \in B((x, b) \in f)\}$.

Además, denotaremos por ${}^{B}A$ a la colección de todas las funciones de B en A. Así, por ejemplo, ${}^{<\omega}2 := \bigcup_{n<\omega} {}^{n}2$, esto es, ${}^{<\omega}2$ es el conjunto de todas las sucesiones binarias finitas (sucesiones de ceros y unos).

Finalmente, si tenemos una función f y un conjunto A, definimos la *restricción* de f a A como $f \restriction A = \{(a, b) \in f \colon a \in A\}$.

2. Preliminares

Para los fines de este trabajo, un *preorden* es una pareja $(\mathbb{P}, \leqslant)$ donde $\leqslant$ es una relación reflexiva y transitiva sobre el conjunto $\mathbb{P}$. Si la relación $\leqslant$ resulta ser antisimétrica también, diremos que la pareja es un *orden parcial*. Daremos por hecho que un preorden (orden parcial) $\leqslant$ induce su correspondiente preorden (orden parcial) estricto (ver [**4**, Definición 4.101, p. 78]) y viceversa y lo denotaremos por $<$. Fijemos, a partir de ahora, un preorden $(\mathbb{P}, \leqslant)$ y definamos dos propiedades importantes.

Definición 2.1. Un subconjunto D de $\mathbb{P}$ será llamado *denso* si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

Observemos que en la definición anterior, por la reflexividad del orden, resulta equivalente sustituir "para todo $p \in \mathbb{P}$" por "para todo $p \in \mathbb{P} \setminus D$".

Definición 2.2. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ y $F \subseteq \mathbb{P}$.

- Vamos a decir que p y q son *compatibles* si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, y escribiremos $p \mid q$. En caso contrario se dirá que son *incompatibles* y emplearemos el símbolo $p \perp q$.
- Diremos que F es un *filtro* si:
  1. para todo $p, q \in F$ existe $r \in F$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$ y
  2. las condiciones $p \in \mathbb{P}, q \in F$ y $q \leqslant p$ implican la pertenencia $p \in F$.

Una simple observación es que la segunda condición en la definición de filtro aplica para cualquier cantidad finita de elementos en él. Es decir, si F es un filtro, n un número natural y tenemos $\{p_i \colon i < n\} \subseteq F$, entonces existe $r \in F$ tal que para todo $i < n$, $r \leqslant p_i$.

Definición 2.3. Si F un filtro y $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, diremos que F es $\mathcal{D}$-*genérico* si F interseca a todos los elementos de $\mathcal{D}$, es decir, si para todo $D \in \mathcal{D}$ se cumple $F \cap D \neq \emptyset$.

Veamos un ejemplo que, además de ilustrar las nociones tratadas hasta ahora, nos será de utilidad en la siguiente sección.

Ejemplo 2.4. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Denotemos por $\mathrm{Fn}(X, Y)$ a la colección de todas las funciones de algún subconjunto finito de X en Y, en símbolos,

$$\mathrm{Fn}(X, Y) := \{f \in [X \times Y]^{<\omega} \colon f \text{ es función}\}.$$

Entonces, directamente de las definiciones, la pareja $(\mathrm{Fn}(X, Y), \supseteq)$ es un orden parcial (con la contención inversa como orden) y tiene un elemento máximo: $\emptyset$.

Cada función que pertenece a $\mathrm{Fn}(X, Y)$ es llamada *función parcial finita de X en Y*. Más aún, demostraremos que nuestro ejemplo tiene las siguientes propiedades pertinentes a las definiciones que hemos dado hasta este momento. Recordemos que dos funciones f y g son *compatibles* si su unión vuelve a ser una función, equivalentemente, si f y g coinciden en la intersección de sus dominios.

Teorema 2.5.

1. Dos funciones en $\mathrm{Fn}(X, Y)$ son compatibles (según la definición 2.2) si y sólo si son compatibles como funciones;
2. si F es un filtro en $\mathrm{Fn}(X, Y)$, entonces $\bigcup F$ es una función;
3. para todo $x \in X$, el subconjunto $D_x := \{p \in \mathrm{Fn}(X, Y) \colon x \in \mathrm{dom}(f)\}$ es denso; y
4. si F es $\{D_x \colon x \in X\}$-genérico, entonces $\mathrm{dom}(\bigcup F) = X$, es decir, $\bigcup F$ es una función de X en Y.

Demostración.

1. Sean $p, q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$. Si $p \mid q$, entonces existe $r \in \mathrm{Fn}(X, Y)$ con $r \supseteq p, q$, particularmente, $r \supseteq p \cup q$, que implica $p \cup q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$. Por otro lado, si $p \cup q \in \mathrm{Fn}(X, Y)$, inmediatamente tenemos $p \cup q \supseteq p, q$ y, en consecuencia, que $p \mid q$.
2. Del inciso anterior se deduce que todo filtro F forma un *sistema compatible de funciones*, es decir, $\bigcup F$ es una función.
3. Fijemos $x \in X$, D_x como en el enunciado y $p \in \mathrm{Fn}(X, Y) \setminus D_x$. Luego, fijando cualquier $y_0 \in Y$, $q := p \cup \{(x, y_0)\} \in \mathrm{Fn}(X, Y)$ satisface $q \supseteq p$.
4. Bajo las hipótesis del inciso, es claro que $\mathrm{dom}(\bigcup F) \subseteq X$. Dado cualquier $x \in X$, por la hipótesis de genericidad, hay algún $p \in F \cap D_x$; es decir, $x \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup F)$. Esto prueba la otra contención.

$\square$

Una pregunta natural es cuándo podemos garantizar, en general, la existencia de un filtro genérico, como, por ejemplo, el descrito en el resultado anterior. El siguiente resultado brinda una respuesta parcial a esta pregunta, la cual bastará para nuestros fines.

Teorema 2.6 (Lema de Rasiowa-Sikorski)**.** Dados un preorden $(\mathbb{P}, \leqslant)$, $p \in \mathbb{P}$ y una familia *numerable* de densos $\mathcal{D}$, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico al cual pertenece p.

Demostración. Por ser numerable, podemos escribir $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ (posiblemente con repeticiones). Vamos a construir una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathbb{P}$ tal que para todo $n \in \omega$:

a) $q_{n+1} \leqslant q_n \leqslant q_0 = p$ (la sucesión es decreciente) y
b) $q_{n+1} \in D_n$.

Empezamos entonces tomando $q_0 := p$ y si tenemos elegido a q_n, como D_n es denso, existe $q_{n+1} \in D_n$ tal que $q_{n+1} \leqslant q_n$. Esto completa la recursión.

Verifiquemos ahora que $F := \{t \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega(q_n \leqslant t)\}$ es el filtro buscado. Notemos que la reflexividad de $\leqslant$ nos da $\{q_n\}_{n\in\omega} \subseteq F$ y, en especial, $p \in F$. Con respecto a las propiedades de filtro:

1. Dados $t_1, t_2 \in F$, existen $m, k \in \omega$ tales que $q_m \leqslant t_1$ y $q_k \leqslant t_2$. Por (a) y por transitividad de $\leqslant$, $q_{m+k} \leqslant t_1, t_2$ y $q_{m+k} \in F$.
2. Dado $q \in \mathbb{P}$ y $t \in F$, si $t \leqslant q$ entonces, por transitividad de $\leqslant$, $q \in F$.

Finalmente, por (b), F es un filtro $\mathcal{D}$-genérico. $\square$

3. Una caracterización de los racionales

Una primera aplicación del Lema de Rasiowa-Sikorski es como sigue. Se sabe que los racionales con su orden usual $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ son un orden total (cualesquiera dos racionales son comparables), denso (entre cualesquiera dos racionales existe otro número racional), numerable y no acotado (el conjunto carece de extremos). Cantor mostró que estas cuatro propiedades caracterizan a los racionales como conjunto ordenado, es decir, que salvo isomorfismo hay un único orden con esas cuatro propiedades, como dice, formalmente, el siguiente teorema (para más detalles, consulte [**4**, Teorema 11.2, p. 297]). El teorema 2.6 nos da una demostración bastante sencilla de dicho hecho.

Teorema 3.1 (Cantor)**.** Sea $(X, \preceq)$ un orden total, denso, numerable y no acotado. Entonces $(X, \preceq)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo usando el teorema 2.6. Para esto es necesario dar un preorden $\mathbb{P}$ y una familia numerable de densos adecuada.

Sea $\mathbb{P} := \{p \in \mathrm{Fn}(X, \mathbb{Q}) : \forall x, y \in X(x \prec y \to p(x) < p(y))\}$, o sea $\mathbb{P}$ es la colección de todas las funciones parciales finitas que preservan el orden estricto. Nuevamente $\emptyset \in \mathbb{P}$. Ordenemos a $\mathbb{P}$ con la contención inversa.

Mostraremos que, para cada $x \in X$, el conjunto $D_x := \{p \in \mathbb{P} \colon x \in \mathrm{dom}(p)\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Con esto en mente tomemos $p \in \mathbb{P} \setminus D_x$ y definamos

$$x^{\leftarrow} := \{y \in \mathrm{dom}(p) \colon y \prec x\} \text{ y } x^{\rightarrow} := \{y \in \mathrm{dom}(p) \colon x \prec y\}.$$

Entonces, hay exactamente tres posibilidades respecto a los conjuntos que se acaban de definir:

a) $x^{\leftarrow} = \emptyset$. Dado que $\preceq$ es un orden total, $\mathrm{dom}(p) = x^{\rightarrow}$. Como $\mathbb{Q}$ no es acotado (en particular no tiene mínimo) y el conjunto $\mathrm{img}(p)$ es finito, existe $a_0 \in \mathbb{Q}$ tal que para todo $a \in \mathrm{img}(p)$ se tiene $a_0 < a$. De este modo $q := p \cup \{(x, a_0)\}$ es un elemento de D_x que cumple $q \supseteq p$.

b) $x^{\rightarrow} = \emptyset$. Una modificación mínima al argumento de arriba produce $q \in D_x$ de tal modo que $q \supseteq p$.

c) $x^{\leftarrow} \neq \emptyset$ y $x^{\rightarrow} \neq \emptyset$. Denotemos por a y b, respectivamente, al máximo elemento de $x^{\leftarrow}$ y al mínimo elemento de $x^{\rightarrow}$ en X. Entonces $p(a) < p(b)$ y por densidad existe un racional c tal que $p(a) < c < p(b)$. Por lo tanto $q := p \cup \{(x, c)\}$ es un elemento de D_x con $q \supseteq p$.

Análogamente, para cada $a \in \mathbb{Q}$ definimos $E_a := \{p \in \mathbb{P} \colon a \in \mathrm{img}(p)\}$ y por un argumento similar al expuesto arriba se deduce que E_a es denso.

Consideramos $\mathcal{D} := \{D_x \colon x \in X\} \cup \{E_a \colon a \in \mathbb{Q}\}$ y notamos que como X y $\mathbb{Q}$ son numerables, $\mathcal{D}$ es una familia numerable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Entonces, por el teorema 2.6, existe F un $\mathbb{P}$-filtro $\mathcal{D}$-genérico con $\emptyset \in F$. Por lo mencionado en el teorema 2.5(2), $f := \bigcup F$ es una función. Veamos que es el isomorfismo buscado.

Dado $x \in X$, como F es $\mathcal{D}$-genérico, en particular existe $p \in F \cap D_x$, es decir, $x \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \bigcup_{q \in F} \mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(f)$. Así, $\mathrm{dom}(f) = X$, es decir, $f \colon X \longrightarrow \mathbb{Q}$. Similarmente, para cada $a \in \mathbb{Q}$ existe $p \in F \cap E_a$ y, por ende, $a \in \mathrm{img}(p) \subseteq \mathrm{img}(f)$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Supongamos para $x, y \in X$ que $x \prec y$. Entonces, existen $p, q \in F$ tales que $x \in \mathrm{dom}(p)$ y $y \in \mathrm{dom}(q)$. Pero F es filtro, así que existe $r \in F$ tal que $r \supseteq p, q$. En particular $x, y \in \mathrm{dom}(r)$. Así es claro que $f(x) = r(x) < r(y) = f(y)$. En otras palabras, f preserva el orden estricto y en particular es inyectiva. Por lo tanto, f es una biyección entre conjuntos linealmente ordenados que preserva el orden, esto es, en virtud de [**4**, Teorema 4.124, p. 84], un isomorfismo de orden. $\square$

4. Hay una única álgebra booleana numerable y libre de átomos

En esta sección vamos a extender el argumento anterior a un resultado considerablemente más difícil: probaremos que, salvo isomorfismo, existe una única álgebra booleana numerable y libre de átomos (ver definición 4.2, abajo). Usaremos la notación, resultados básicos y definiciones (así como la noción de *álgebra booleana*) que aparecen en el tercer capítulo del libro [**7**].

Una demostración con *back-and-forth* se encuentra en [**7**, Teorema 5.4.9, pp. 132-133].

Dada un álgebra booleana $(A, \leqslant)$ (para simplificar la notación, nos referiremos a ella como A) y $a, b \in A$,

1. los símbolos 0_A y 1_A denotarán, respectivamente, al mínimo y al máximo elemento de A, y pensaremos siempre que éstos son distintos;
2. $a \wedge b$ y $a \vee b$ representarán al ínfimo y al supremo, correspondientemente;
3. similarmente, para $B \subseteq A$, $\bigwedge B$ y $\bigvee B$ denotarán el ínfimo y supremo del conjunto B, respectivamente;
4. a' representará el complemento del elemento a;
5. $a - b$ es una abreviatura de $a \wedge b'$ y
6. denotaremos al conjunto de elementos positivos de A por A^+, es decir, $A^+ := A \setminus \{0_A\}$.

Lema 4.1. Para cualesquiera $a \in A^+$ y $E \in [A]^{<\omega}$, la condición $a \leqslant \bigvee E$ implica que hay $x \in E$ con $a \wedge x > 0_A$.

Demostración. Por contrapuesta: supongamos que $a \wedge x = 0_A$, para cada $x \in E$. Luego, por la distributividad,

$$a = a \wedge \bigvee E = \bigvee \{a \wedge x \colon x \in E\} = 0_A,$$

es decir, $a \notin A^+$. □

Definición 4.2. Sea A un álgebra booleana. Un elemento $a \in A^+$ es llamado *átomo* si es un elemento $\leqslant$-minimal en A^+. Al conjunto de átomos de A se le denotará por $\mathrm{At}(A)$. Para simplificar la notación, definamos también, para cada $a \in A$, el conjunto

$$\mathrm{At}_a(A) := \{x \in \mathrm{At}(A) \colon x \leqslant a\}.$$

De este modo, diremos que A es *libre de átomos* si $\mathrm{At}(A) = \emptyset$.

Para un breve ejemplo ilustrativo, se puede considerar, para un conjunto no vacío X, al álgebra booleana $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. En este caso, dado $Y \subseteq X$, $\mathrm{At}_Y(\mathcal{P}(X)) = \{\{y\} \colon y \in Y\}$. Note que si $x, y \in X$ satisfacen $\emptyset \neq \{x\} \cap \{y\}$, entonces, $x = y$; también se tiene que $\bigcup \mathrm{At}_Y(\mathcal{P}(X)) = Y$. Esto sirve de motivación para las siguientes dos proposiciones.

Se tienen las siguientes propiedades respecto a los átomos de A. Primeramente, si dos átomos de A, digamos a y b, son tales que $0_A < a \wedge b$, entonces, como $a \wedge b \leqslant a$ y por ser a un átomo, $a \wedge b = a$, es decir, $a \leqslant b$ y, por ser también b un átomo, $a = b$. En resumen, hemos probado lo siguiente.

Proposición 4.3. Para cualesquiera $a, b \in \mathrm{At}(A)$, si $0_A < a \wedge b$, entonces $a = b$.

Proposición 4.4. Supongamos que A es finita. Entonces,

1. $\mathrm{At}(A)$ es denso en A^+ y
2. para todo $a \in A$, $a = \bigvee \mathrm{At}_a(A)$ (ver definición 4.2).

Demostración. Hagamos el primer inciso por contrapuesta: si no fuera el caso que $\mathrm{At}(A)$ es denso en A^+, entonces habría un elemento $a \in A^+$ tal que para todo $b \in A$, $b \leqslant a$ implica $b \notin \mathrm{At}(A)$. Argumentaremos que esta última condición tiene como consecuencia la existencia de una sucesión $\{a_k \colon k < \omega\} \subseteq A$ estrictamente decreciente, en especial, con una infinidad de elementos, lo cual nos garantiza que A es infinita.

Como en particular $a_0 := a$ no es un átomo, existe $a_1 \in A^+$ tal que $a_1 < a$. Si, para algún natural n, tenemos construida $\{a_k \colon k \leqslant n\}$, una sucesión estrictamente decreciente, entonces, por hipótesis, a_n no es un átomo (pues $a_n \leqslant a$), y así obtenemos a_{n+1} con las propiedades deseadas. Esto completa nuestra recursión.

Pensando ahora en el segundo inciso, es claro que a es cota superior de $\mathrm{At}_a(A)$. De este modo, $b := \bigvee \mathrm{At}_a(A) \leqslant a$. Por otro lado, si sucediera que $a - b \in A^+$, entonces el primer inciso del lema nos arrojaría un átomo $c \in A^+$ tal que $c \leqslant a - b$; luego, se tiene que $c \leqslant a$ y $c \leqslant b'$. La primera de estas desigualdades, junto con $c \in \mathrm{At}(A)$, nos dice que $c \leqslant b$, lo cual contradice la segunda desigualdad, porque c es positivo. Por lo tanto, $a - b = 0_A$, o sea, $a = b$. □

Del primer inciso de la proposición anterior se deduce que la igualdad $\mathrm{At}(A) = \emptyset$ implica que A es infinita (observe que $\emptyset$ no puede ser denso en A^+ pues $1_A \in A^+$). Si además A es numerable, entonces $|A| = \omega$. Esto es importante para el resultado central de la sección, pues así toda álgebra numerable y libre de átomos tiene cardinalidad ω.

Supongamos que A_0 es una subálgebra de A y sea $u \in A$. En vista de que la intersección de subálgebras vuelve a ser una subálgebra, para cualquier subconjunto arbitrario de A tiene sentido definir la mínima subálgebra que lo contiene. En particular, tenemos lo siguiente.

Definición 4.5. La *extensión simple de A_0 dada por u* es la mínima subálgebra de A que contiene a $A_0 \cup \{u\}$ y es denotada por $A_0(u)$.

Para los siguientes lemas, supondremos que C_0 y D_0 son álgebras booleanas y que C y D son subálgebras de C_0 y D_0 respectivamente. Dejaremos de especificar a cuál álgebra pertenecen los órdenes y los elementos máximo y mínimo pues será claro del contexto y simplificará la lectura de las pruebas.

Lema 4.6. Sea u un elemento arbitrario de C_0. Se tiene que

$$C(u) = \{(a \wedge u) \vee (b - u) \colon a, b \in C\}.$$

Si además $H \colon C(u) \longrightarrow D_0$ es un homomorfismo booleano, entonces $H[C(u)]$ es la extensión simple de la subálgebra $H[C]$ dada por $H(u)$, es decir, $H[C(u)] = H[C](H(u))$.

Demostración. En la prueba que se expone a continuación usaremos libremente las propiedades básicas de los operadores booleanos, como asociatividad, conmutatividad, distributividad, Leyes de De Morgan y equivalencias con el orden.

Primero, veamos que $C' := \{(a \wedge u) \vee (b - u) \colon a, b \in C\}$ es una subálgebra de C_0 que contiene a $C \cup \{u\}$, así por minimalidad, $C(u) \subseteq C'$.

En primer lugar, por ser C una subálgebra de C_0, $\{0, 1\} \subseteq C$, y así

$$u = (1 \wedge u) \vee (0 - u) \in C'.$$

También, dado $\{a, a_1, b, b_1\} \subseteq C$, tenemos que

$$a = a \wedge (u \vee u') = (a \wedge u) \vee (a - u) \in C',$$

es decir, $C \cup \{u\} \subseteq C'$. Luego, podemos usar que (nuevamente por ser subálgebra) tanto $a \vee a_1$ como $b \vee b_1$ son elementos de C para obtener

$$\begin{aligned}
&[(a \wedge u) \vee (b - u)] \vee [(a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u)] = \\
&[(a \wedge u) \vee (a_1 \wedge u)] \vee [(b - u) \vee (b_1 - u)] = \\
&\qquad [(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u] \in C'.
\end{aligned}$$

Para ver que C' es cerrado bajo complementos, notemos primero que

$$\begin{aligned}
(a' \wedge b') \wedge [(b' \wedge u') \vee (a' \wedge u)]' &= \\
(a' \wedge b') \wedge [(b' \wedge u')' \wedge (a' \wedge u)'] &= \\
b' \wedge (b' \wedge u')' \wedge a' \wedge (a' \wedge u)' &= \\
b' \wedge (b \vee u) \wedge a' \wedge (a \vee u') &= \\
b' \wedge u \wedge a' \wedge u' &= 0.
\end{aligned}$$

Y como consecuencia,

$$a' \wedge b' \leqslant (b' \wedge u') \vee (a' \wedge u). \tag{7.1}$$

Finalmente, como $\{a', b'\} \subseteq C$,

$$\begin{aligned}
[(a \wedge u) \vee (b - u)]' &= \\
(a \wedge u)' \wedge (b - u)' &= \\
(a' \vee u') \wedge (b' \vee u) &= \\
[(a' \wedge b') \vee (a' \wedge u)] \vee [(u' \wedge b') \vee (u \wedge u')] &= \\
(a' \wedge b') \vee (a' \wedge u) \vee (u' \wedge b') &= \quad \text{(por (7.1))} \\
(a' \wedge u) \vee (b' - u) &\in C'.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

De este modo, C' es una subálgebra de C_0 que contiene a $C \cup \{u\}$ y con eso tenemos la primera inclusión: $C(u) \subseteq C'$. La segunda inclusión es más sencilla, pues dados $a, b \in C$, como $C(u)$ es una subálgebra que contiene a $C \cup \{u\}$, debe suceder que $(a \wedge u) \vee (b - u) \in C(u)$. Concluimos que $C(u) = C'$ como se quería.

Demos por hecho ahora que $H \colon C(u) \longrightarrow D_0$ es un homomorfismo booleano. Por lo que acabamos de demostrar en los párrafos anteriores, basta ver que

$$H[C(u)] = \{(a \wedge H(u)) \vee (b - H(u)) \colon a, b \in H[C]\}.$$

Por un lado, dados $a, b \in H[C]$, existen $x, y \in C$ con $H(x) = a$ y $H(y) = b$. Por ser H un homomorfismo,

$$\begin{aligned}(a \wedge H(u)) \vee (b - H(u)) &= (H(x) \wedge H(u)) \vee (H(y) - H(u)) \\ &= H((x \wedge u) \vee (y - u)) \in H[C(u)]\end{aligned}$$

Por el otro lado, si $a \in H[C(u)]$, entonces existen (usando la primera parte del lema) $x, y \in C$ tales que $a = H((x \wedge u) \vee (y - u))$. Como H es un homomorfismo, una cuenta similar a la anterior revela que $a = (H(x) \wedge H(u)) \vee (H(y) - H(u))$. Por lo tanto, $H[C(u)]$ es la extensión simple de $H[C]$ dada por $H(u)$. $\square$

Nos será de gran utilidad el siguiente lema de extensión.

Lema 4.7. Suponga que $u \in C_0$ y $w \in D_0$ son arbitrarios. Si un isomorfismo booleano $h\colon C \longrightarrow D$ satisface que para todo $x \in C$

1. $x \leqslant u'$ si y sólo si $h(x) \leqslant w'$ y
2. $x \leqslant u$ si y sólo si $h(x) \leqslant w$,

entonces existe un isomorfismo booleano $H\colon C(u) \longrightarrow D(w)$ tal que H extiende a h y $H(u) = w$.

Demostración. Demos por ciertas las hipótesis del lema y sea $x \in C(u)$. Queremos definir $H(x)$. Por el lema anterior, x tiene una representación en términos de dos elementos de C y de u. Si bien dicha representación para x no es única, veremos que las hipótesis que satisface h tienen como consecuencia que, para cualquier $\{a_0, a_1, b_0, b_1\} \subseteq C$, las igualdades

$$x = (a_0 \wedge u) \vee (b_0 - u) = (a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u) \tag{7.3}$$

implican la igualdad

$$(h(a_0) \wedge w) \vee (h(b_0) - w) = (h(a_1) \wedge w) \vee (h(b_1) - w). \tag{7.4}$$

Notemos que la condición (7.3) implica que

$$\begin{aligned} & a_0 \wedge u = x \wedge u = a_1 \wedge u \\ \text{y} \quad & b_0 - u = x - u = b_1 - u; \\ \text{entonces, para cada } i < 2, \quad & (a_i - a_{1-i}) \wedge u = 0_A \\ \text{y} \quad & (b_i - b_{1-i}) - u = 0_A; \\ \text{de donde} \quad & (a_i - a_{1-i}) \leqslant u' \\ \text{y} \quad & (b_i - b_{1-i}) \leqslant u. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ahora, usando las dos hipótesis del lema y que h es un homomorfismo booleano, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{para } i < 2, \quad & h(a_i) - h(a_{1-i}) \leqslant w' \\ \text{y} \quad & h(b_i) - h(b_{1-i}) \leqslant w \end{aligned} \tag{7.6}$$

Las últimas desigualdades implican que

$$h(a_0) \wedge w = h(a_1) \wedge w \quad \text{y} \quad h(b_0) - w = h(b_1) - w$$

y, con eso, la condición (7.4).

Definamos entonces, para cada $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$, $H(x) := (h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)$. H está bien definida por todo lo hecho previamente. En especial, si $a \in C$, podemos escribir $a = (a \wedge u) \vee (a - u)$ para calcular $H(a) = (h(a) \wedge w) \vee (h(a) - w) = h(a)$, es decir, $H \restriction C = h$. También podemos escribir $u = (1 \wedge u) \vee (0 - u)$ para ver que $H(u) = (h(1) \wedge w) \vee (h(0) - w) = (1 \wedge w) \vee (0 - w) = w$.

únicamente falta verificar que, efectivamente, H es un isomorfismo. Tomemos arbitrariamente dos elementos x, y en $C(u)$ y, por el lema anterior, supongamos que se ven como $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$

y $y = (a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u)$, para algún $\{a, a_1, b, b_1\} \subseteq C$. Tal y como lo hicimos en la prueba del lema 4.6, $x \vee y = [(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u]$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
H(x \vee y) &= \\
H([(a \vee a_1) \wedge u] \vee [(b \vee b_1) - u]) &= \\
(h(a \vee a_1) \wedge w) \vee (h(b \vee b_1) - w) &= \\
(h(a) \vee h(a_1)) \wedge w) \vee (h(b) \vee h(b_1)) - w) &= \\
((h(a) \wedge w) \vee (h(a_1) \wedge w)) \vee ((h(b) - w) \vee (h(b_1)) - w)) &= \\
((h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)) \vee ((h(a_1) \wedge w) \vee (h(b_1) - w)) &= \\
H(((a \wedge u) \vee (b - u))) \vee H(((a_1 \wedge u) \vee (b_1 - u))) &= H(x) \vee H(y).
\end{aligned}$$

Por un argumento similar al que empleamos para deducir (7.1) (escribiendo $h(a)$, $h(b)$ y w en lugar de a, b y u, respectivamente), se puede obtener que

$$h(a)' \wedge h(b)' \leqslant (h(b)' - w) \vee (h(a)' \wedge w). \tag{7.7}$$

Usando esto y la cuenta que se hizo en (7.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
H(x)' = H([(a \wedge u) \vee (b - u)])' &= \\
[(h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w)]' &= \\
(h(a)' \vee w') \wedge (h(b)' \vee w) &= \\
(h(a)' \wedge h(b)') \vee (h(a)' \wedge w) \vee (w' \wedge h(b)') \vee (w' \wedge w) &= \\
(h(a)' \wedge h(b)') \vee (h(a)' \wedge w) \vee (w' \wedge h(b)') &= \quad \text{(por (7.7))} \\
(h(a)' \wedge w) \vee (h(b)' - w) &= \\
(h(a') \wedge w) \vee (h(b') - w) &= \\
H((a' \wedge u) \vee (b' - u)) &= \\
H([(a \wedge u) \vee (b - u)]') &= H(x').
\end{aligned}$$

Concluimos así que H es un morfismo booleano. Más aún, el lema 4.6 implica que $H[C(u)] = H[C](H(u))$ y en vista de que $H(u) = w$ y h es un isomorfismo extendido por H, se tiene que $H[C](H(u)) = h[C](w) = D(w)$. Concluimos que $H\colon C(u) \longrightarrow D(w)$ es, entonces, un epimorfismo booleano. Vale la pena hacer el comentario de que, de nuestras hipótesis del lema, hasta ahora, no hemos usado las implicaciones de regreso de los incisos (1) y (2).

Veamos que H es inyectiva. Dado $x \in C(u)$ tal que $H(x) = 0$, fijemos $a, b \in C$ con $x = (a \wedge u) \vee (b - u)$. Entonces, tenemos la igualdad $(h(a) \wedge w) \vee (h(b) - w) = 0$, la cual, a su vez, tiene como consecuencia que $(h(a) \wedge w) = (h(b) - w) = 0$ o, visto de otro modo, $h(a) \leqslant w'$ y $h(b) \leqslant w$. Aplicando nuestras dos hipótesis del lema, obtenemos que $a \leqslant u'$ y $b \leqslant u$, luego, $x = (a \wedge u) \vee (b - u) = 0 \vee 0 = 0$. Comprobamos que H tiene núcleo trivial, y esto implica que H es inyectiva. Con ello tenemos que H es un isomorfismo. □

Intuitivamente, el lema que acabamos de probar nos dice que si w se compara con D de la misma forma en que u se compara con C, entonces podemos extender cualquier isomorfismo entre C y D para que incluya a u y w. Sin embargo, para la prueba del resultado central de esta sección nos será de gran utilidad saber cómo encontrar un elemento $w \in D_0$ que haga lo requerido por el lema. El siguiente lema tiene justamente este objetivo.

Lema 4.8. Supongamos ahora que C y D son finitas, $u \in C_0$, D_0 es libre de átomos y que $h\colon C \longrightarrow D$ es un isomorfismo booleano. Entonces, existe $w \in D_0$ que cumple con todas las hipótesis del lema 4.7: para todo $x \in C$,

1. $x \leqslant u'$ si y sólo si $h(x) \leqslant w'$ y
2. $x \leqslant u$ si y sólo si $h(x) \leqslant w$.

Demostración. Comencemos por definir los siguientes conjuntos de átomos.

$$\begin{aligned} A^0 &:= \{a \in \mathrm{At}(C) \colon a \leqslant u\}, \\ A^1 &:= \{a \in \mathrm{At}(C) \colon a \leqslant u'\} \text{ y} \\ A^{1/\pi} &:= \mathrm{At}(C) \setminus (A^0 \cup A^1). \end{aligned}$$

Es claro que estos tres son ajenos y su unión es $\mathrm{At}(C)$.

Como $\mathrm{At}(D_0) = \emptyset$, para cada $y \in A^{1/\pi}$, existe $\hat{y} \in D_0^+$ (recuerde que D_0^+ es el conjunto de elementos positivos de D_0) de tal suerte que $\hat{y} < h(y)$. Con todo esto, proponemos

$$w := \bigvee \{\hat{y} \colon y \in A^{1/\pi}\} \vee \bigvee h[A^0].$$

Veamos que w cumple con las bicondicionales.

Primero vamos a probar que los incisos (1) y (2) del lema 4.7 son ciertos cuando x es un átomo, y luego, veremos que el resultado se extiende para un x arbitrario. Tomemos un átomo $x \in C$.

Supongamos que $x \leqslant u'$; en particular, $x \in A^1$. Así, por distributividad,

$$h(x) \wedge w = \bigvee \{h(x) \wedge \hat{y} \colon y \in A^{1/\pi}\} \vee \bigvee \{h(x) \wedge h(y) \colon y \in A^0\}.$$

Para cada $y \in A^{1/\pi}$, $h(x) \wedge \hat{y} \leqslant h(x) \wedge h(y)$. Como h es un isomorfismo, debe mandar átomos distintos en átomos distintos, así, por la proposición 4.3, $h(x) \wedge h(y) = 0$. Similarmente, dado cualquier $y \in A^0$, $h(x) \wedge h(y) = 0$. Esto prueba que $h(x) \wedge w = 0$, y luego, $h(x) \leqslant w'$.

Ahora, supongamos que $x \leqslant u$. Según nuestra definición, esto quiere decir que $x \in A^0$, lo cual implica que $h(x) \leqslant \bigvee h[A^0] \leqslant w$.

Consideremos ahora el caso en que $h(x) \leqslant w'$. Entonces, $h(x) \wedge w = 0$, de donde, por la definición de w y por distributividad, obtenemos que para cualquier $y \in A^0$, $h(x) \wedge h(y) = 0$ y, para cualquier $y \in A^{1/\pi}$, $h(x) \wedge \hat{y} = 0$. Pero x es un átomo y trivialmente $0 < h(x) = h(x) \wedge h(x)$, así $x \notin A^0$; también, si x fuera un elemento de $A^{1/\pi}$, entonces, $0 < \hat{x} = h(x) \wedge \hat{x}$, lo que contradice lo dicho al principio de este párrafo, es decir $x \notin A^{1/\pi}$. En resumen, $x \in A^1$, y luego, $x \leqslant u'$.

Finalmente, si $h(x) \leqslant w$, entonces, por el lema 4.1, debe suceder uno de dos casos. El primer caso es si $0 < h(x) \wedge \bigvee h[A^0]$. Entonces, por el mismo lema, debe haber un átomo $y \in A^0$ de forma que $0 < h(x) \wedge h(y)$. En vista de que h es un isomorfismo, se deduce que $h(x), h(y) \in \mathrm{At}(D)$ y, de acuerdo a la proposición 4.3, concluimos que $h(x) = h(y)$. Así, por inyectividad, $x = y \in A^0$. Es decir, $x \leqslant u$.

El segundo caso, $0 < h(x) \wedge \bigvee h[A^0]$, implica que, por el lema 4.1, hay algún $y \in A^{1/\pi}$ para el cual $0 < h(x) \wedge \hat{y} \leqslant h(x) \wedge h(y)$. Entonces, por la proposición 4.3, $h(x) = h(y)$ y así $x = y \in A^{1/\pi}$. En especial, tenemos que para todo $z \in A^0$, $h(x) \wedge h(z) = 0$ (pues z y y pertenecen a clases de átomos distintas), lo cual tiene como consecuencia que $h(x) \wedge \bigvee h[A^0] = 0$. Consecuentemente, sólo el caso analizado en el párrafo previo ocurre.

Veamos ahora que para un $x \in C$ arbitrario se valen los incisos (1) y (2) del lema 4.7. La proposición 4.4 nos permite escribir $x = \bigvee \mathrm{At}_x(C)$, lo cual, junto con la definición de supremo, nos dice que para cualquier $v \in C_0$,

$$x \leqslant v \qquad \text{si y sólo si} \qquad \text{para todo } a \in \mathrm{At}_x(C),\ a \leqslant v. \tag{7.8}$$

Tenemos entonces que (tomando $v = u$ en (7.8)) $x \leqslant u$ si y sólo si, para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $a \leqslant u$, lo cual, por los párrafos anteriores, equivale a que para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $h(a) \leqslant w$. Esto último implica que

$$h(x) = h\left(\bigvee \mathrm{At}_x(C)\right) = \bigvee \{h(a) \colon a \in \mathrm{At}_x(C)\} \leqslant w.$$

Conversamente, si $h(x) \leqslant w$, entonces, como h es un isomorfismo, para todo $a \in \mathrm{At}_x(C)$, $h(a) \leqslant h(x) \leqslant w$. En vista de que a es un átomo, se deduce que $a \leqslant u$ y por (7.8), $x \leqslant u$. Esto prueba el inciso (1).

Análogamente, sustituyendo en el párrafo anterior u y w por u' y w' respectivamente, se obtiene el inciso (2). $\square$

Teorema 4.9. Si $(\mathbb{A} \leqslant)$ y $(\mathbb{B}, \preceq)$ son álgebras booleanas (no triviales) numerables y libres de átomos, entonces son isomorfas.

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo usando Rasiowa-Sikorski. Con ello en mente, definamos al conjunto $\mathbb{P}$ mediante la fórmula siguiente.

$$p \in \mathbb{P} \text{ si y sólo si } p \in \mathrm{Fn}(A, B),\ p \text{ es un isomorfismo booleano y}$$
$$\mathrm{dom}(p) \text{ e } \mathrm{img}(p) \text{ son subálgebras finitas de } A \text{ y } B, \text{ respectivamente.}$$

Dotamos a $\mathbb{P}$ con el orden $q \leqslant p$ si y sólo si q es una extensión de p, es decir, $p \subseteq q$. Tenemos que $(\mathbb{P}, \leqslant)$ es un orden parcial con elemento máximo $\{(0_A, 0_B), (1_A, 1_B)\}$. Para simplificar la notación, abreviemos, para $p \in \mathbb{P}$, $A_p := \mathrm{dom}(p)$ y, similarmente, $B_p := \mathrm{img}(p)$.

Para cada elemento $a \in A$, afirmamos que $D_a := \{p \in \mathbb{P} \colon a \in A_p\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Para esto, tomemos arbitrariamente $p \in \mathbb{P} \setminus D_a$, es decir, $a \in A \setminus A_p$. Vamos a aplicar los lemas 4.8 y 4.7 (en ese orden) tomando $C_0 := A$, $D_0 := B$, $C := A_p$, $D := B_p$, $h := p$ y $u := a$ para obtener, respectivamente, $w \in B$ y luego un isomorfismo $H \colon A_p(a) \longrightarrow B_p(w)$ que extiende a p. Como la extensión simple de una subálgebra finita vuelve a ser finita y $a \in A_p(a)$, resulta que $H \in D_a$, con lo cual se concluye que D_a es denso.

Similarmente, para cada $b \in B$, el conjunto $E_b := \{p \in \mathbb{P} \colon b \in B_p\}$ es denso en $\mathbb{P}$: dado $p \in \mathbb{P} \setminus E_b$, aplicamos los lemas 4.8 y 4.7 tomando $C_0 := B$, $D_0 := A$, $C := B_p$, $D := A_p$, $h := p^{-1}$ y $u := b$ para obtener, respectivamente, $w \in A$ y luego un isomorfismo $H \colon B_p(b) \longrightarrow A_p(w)$ que extiende a p^{-1}. Así, el isomorfismo $H^{-1} \colon A_p(w) \longrightarrow B_p(b)$ es una extensión de p que tiene al elemento b en su imagen por lo cual, análogo al caso anterior, culmina en la prueba de que E_b es denso en $\mathbb{P}$.

Así, la familia

$$\mathcal{D} := \{D_a \colon a \in A\} \cup \{E_b \colon b \in B\}$$

es una colección numerable (pues A y B son numerables) de densos en $\mathbb{P}$. Por el teorema 2.6, hay un filtro $F \subseteq \mathbb{P}$ que es $\mathcal{D}$-genérico. Hagamos $f := \bigcup F$ y notemos que el teorema 2.5(2) nos garantiza que f es una función. Comprobemos que es el isomorfismo buscado.

Primeramente, notemos que dado $a \in A$, por genericidad, existe $p \in G$ tal que $a \in A_p \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Análogamente, para cada $b \in B$, $b \in \mathrm{img}(f)$. Así, $f \colon A \longrightarrow B$ es sobreyectiva.

Dados $a_0, a_1 \in A$, debe haber $p_0, p_1 \in F$ tales que para $i < 2$, $a_i \in \mathrm{dom}(p_i)$; pero F es un filtro, entonces debe existir una condición $q \in F$ que extiende a ambas, p_0 y p_1; en especial, $\{a_0, a_1\} \subseteq \mathrm{dom}(q)$. Pero q es un isomorfismo, así que $a_0 \leqslant a_1$ si y sólo si $f(a_0) = q(a_0) \preceq q(a_1) = f(a_1)$. Por lo tanto, f es un isomorfismo de orden y, por ende, un isomorfismo booleano. $\square$

El resto de la sección está dedicado a probar que el teorema anterior no es cierto por vacuidad, esto es, nos concentraremos en producir un ejemplo de un álgebra booleana numerable y libre de átomos.

Mucho de lo que se expondrá a continuación se puede hacer en espacios topológicos más generales, sin embargo, para los fines de este trabajo, bastará con particularizar varios conceptos. Aquellos que no sean definidos explícitamente aquí, deberán entenderse tal y como aparecen en [**3**].

Vamos a considerar al espacio topológico ${}^{\omega}2$ obtenido como el producto Tychonoff de ω copias del espacio discreto 2. Si $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ denota la colección de conjuntos que son abiertos y cerrados en ${}^{\omega}2$, se puede verificar (ver [**7**, Ejemplo 3.1.6, p. 64]) que $(\mathrm{CA}({}^{\omega}2), \subseteq)$ es un álgebra booleana con $\emptyset$ y ${}^{\omega}2$ como mínimo y máximo, respectivamente. También, dados $A, B \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$, $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B = A \cup B$.

Vamos a usar el hecho de que, como cada factor del espacio es finito y, en consecuencia, compacto, por el Teorema de Tychonoff, ${}^{\omega}2$ es compacto también.

Recordemos que la topología producto es la *topología débil inducida* por la familia de proyecciones (para detalles consúltese la sección 4.3 de [**3**]), o sea, en nuestro caso particular, la topología de ${}^{\omega}2$, denotada por $\tau({}^{\omega}2)$, es la menor topología que hace continua, para cada $n < \omega$, a la función $\pi_n \colon {}^{\omega}2 \longrightarrow 2$ dada por $\pi_n(f) := f(n)$. Como 2 es un espacio discreto, un conjunto $U \subseteq {}^{\omega}2$ es un básico canónico de ${}^{\omega}2$ si y sólo si existen $F \in [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{A_n \colon n \in F\} \subseteq \mathcal{P}(2)$ de tal forma que

$$U = \bigcap_{n \in F} \pi_n^{-1}[A_n].$$

Vale la pena observar que, por la continuidad de cada proyección, U, además de ser un abierto canónico, es intersección de conjuntos cerrados y, por lo tanto, cerrado.

Continuando con nuestra elección de F y U, supongamos ahora que U es no vacío, es decir, $U \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)^+$. Si tomamos, por ser F finito, $m \in \omega \setminus (\bigcup F + 1)$ y un punto cualquiera $x \in U$, es claro, según la discusión del párrafo anterior, que

$$x \in U' := \bigcap_{n < m} \pi_n^{-1}[\{x(n)\}] \in \tau({}^{\omega}2).$$

También, dado cualquier $z \in U'$, la elección de U' nos dice que para todo $n < m$, $z(n) = x(n)$, en particular, para todo $n \in F \subseteq m$, $z(n) \in \{x(n)\}$, o sea, $z \in U$. Hemos demostrado que $x \in U' \subseteq U$.

Definamos ahora, para cada $s \in {}^{<\omega}2$, $[s] := \{x \in {}^{\omega}2 \colon s \subseteq x\}$ y notemos que, si x es cualquier punto del producto,

$$z \in \bigcap_{n < m} \pi_n^{-1}[\{x(n)\}]$$

si y sólo si para todo $n < m$, $z(n) = x(n)$ o, equivalentemente, $z \restriction m = x \restriction m$ (el símbolo $\restriction$ está definido al final de la primera sección). Más sucintamente,

$$\bigcap_{n < m} \pi_n^{-1}[\{x(n)\}] = [x \restriction m].$$

De este modo, cada conjunto de la forma $[x \restriction m]$ es un elemento de $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$.

Proposición 4.10. La colección numerable $\mathcal{B} := \{[s] \colon s \in {}^{<\omega}2\} \subseteq \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es base del espacio $({}^{\omega}2, \tau({}^{\omega}2))$.

Demostración. Como $|{}^{<\omega}2| = \left|\bigcup_{n<\omega} {}^{n}2\right| \leqslant \omega \cdot \omega = \omega$, $\mathcal{B}$ es numerable. Además, el comentario final del párrafo que precede esta proposición tiene como consecuencia que $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$.

Dado un básico canónico U en ${}^{\omega}2$ y $x \in U$, los párrafos previos a la presente proposición justifican la existencia de un natural m tal que

$$x \in [x \restriction m] \subseteq U.$$

Consecuentemente, $\mathcal{B}$ es base del espacio en cuestión. $\square$

Mostremos ahora que el álgebra booleana $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es libre de átomos: dado $A \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)^+$, podemos escoger $x \in A$ y, por la proposición anterior, algún $m < \omega$ tal que $x \in [x \restriction m] \subseteq A$. Observemos que se da la contención $[x \restriction (m+1)] \subseteq [x \restriction m]$; de hecho, la función $f \in {}^{\omega}2$ dada por

$$f(n) := \begin{cases} x(n), & n \neq m \\ 1 - x(n), & n = m \end{cases},$$

cumple que $f \in [x \restriction m] \setminus [x \restriction (m+1)]$ y así atestigua que la contención es propia. Luego, $x \in [x \restriction (m+1)] \subsetneq A$, lo cual prueba que A no es un átomo. Concluimos que $\mathrm{At}(\mathrm{CA}({}^{\omega}2)) = \emptyset$.

Dado cualquier $A \in \mathrm{CA}({}^{\omega}2)$, por ser A un abierto y por la proposición 4.10, existe $B \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup B$. Por ser A cerrado en el espacio compacto ${}^{\omega}2$, A es compacto y, siendo B una cubierta abierta de A, tiene alguna subcubierta finita. Por lo tanto, cada elemento de $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es la unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, la cual es una colección numerable. Por lo tanto, $\mathrm{CA}({}^{\omega}2)$ es numerable.

En resumen, $(\mathrm{CA}({}^{\omega}2), \subseteq)$ es un álgebra booleana numerable y libre de átomos; más aún, según el teorema 4.9, es la única salvo isomorfismo. Con esto completamos la sección.

5. Una aplicación a las gráficas aleatorias

En esta sección exploraremos un uso del Lema de Rasiowa-Sikorski en un tema de gran interés para la Teoría de Gráficas. Consideremos entonces lo siguiente. No usaremos más que las definiciones más básicas de gráficas; para más detalles, recomendamos los primeros dos capítulos de [**1**]. Recordemos que una *gráfica* es una pareja (V, E) donde V es un conjunto, cuyos elementos son llamados *vértices*, y E es un conjunto de parejas de vértices llamadas *aristas*; dos vértices unidos por una arista son *adyacentes*. Siempre que el conjunto de aristas sea claro, es usual referirse a V como la gráfica. Dado un vértice v, $N(v)$ denota el conjunto de vértices que son adyacentes a v y sus elementos son llamados *vecinos* de v. Dos gráficas son *isomorfas* si hay una biyección entre los conjuntos de vértices que satisface que dos vértices son adyacentes en la primera gráfica si y sólo si las imágenes de dichos vértices bajo el isomorfismo lo son en la segunda. Veamos dos ejemplos relevantes de gráficas.

Supongamos que M es un modelo transitivo y numerable de un fragmento de la Teoría de Conjuntos (para una explicación de la existencia de M, referimos al lector a las secciones 1 y 9 del capítulo VII de [**10**]). Luego, dos conjuntos $x, y \in M$ serán adyacentes si y sólo si $x \in y$ o $y \in x$. Así formamos una gráfica M. Para el segundo ejemplo, tomemos a $\mathbb{N}$ como conjunto de vértices y formemos una gráfica N como sigue. Para cada par de números naturales, elegiremos aleatoriamente y con probabilidad $1/2$, si éstos son adyacentes o no. Naturalmente, este proceso puede producir muchas gráficas diferentes, pero nos podemos preguntar cuál es la probabilidad de que las dos gráficas M y N sean isomorfas. El objetivo de esta sección es dar la respuesta a esta pregunta, desde luego, usando el material tratado hasta ahora.

Empecemos por pensar en qué propiedades en común tienen nuestras gráficas.

Definición 5.1. Una gráfica (V, E) tiene la *propiedad de la extensión* si para cualesquiera dos conjuntos finitos ajenos de vértices A y B, existe un vértice $v \in V \setminus (A \cup B)$ tal que $A \subseteq N(v)$ pero $B \cap N(v) = \emptyset$.

Por la restricción que se le pide al vértice v de no pertenecer a A ni a B, es claro que una gráfica con esta propiedad necesariamente tiene una infinidad de vértices.

Lema 5.2. *M cumple la propiedad de la extensión y la probabilidad de que N la cumpla es de 1.*

Demostración. Dados A y B subconjuntos de M como en la definición 5.1, por ser un modelo de la Teoría de Conjuntos y satisfacer, en particular, los axiomas del Par, Unión y Buena Fundación, $v := A \cup \{B\}$ es un vértice de M con la propiedad deseada.

Similarmente, tomamos A y B en N. Para un vértice v, la probabilidad de que éste no satisfaga la conclusión deseada es de $1 - 2^{-(|A|+|B|)}$. La probabilidad de que ningún vértice del conjunto infinito $\mathbb{N} \setminus (A \cup B)$ satisfaga la condición, por independencia, es de

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - 2^{-(|A|+|B|)}\right)^k = 0,$$

de donde, tomando los complementos de las probabilidades, se obtiene el resultado. □

Este lema, aunado al siguiente teorema, prueba no sólo que nuestras dos gráficas son isomorfas, sino que, salvo isomorfismo, son la única gráfica con la propiedad previamente mencionada.

Teorema 5.3. *Cualesquiera dos gráficas sobre un conjunto numerable de vértices que satisfaga la propiedad de extensión son isomorfas.*

Nuevamente, el plan es construir el isomorfismo usando el teorema 2.6. Vale la pena observar que estamos construyendo un isomorfismo de gráficas, no de orden, en contraste con los resultados de las secciones previas.

Demostración. Sean (V_0, E_0) y (V_1, E_1) dos gráficas con la propiedad de extensión y donde V_0 y V_1 son numerables (más aún, como consecuencia del comentario que se hizo antes de enunciar el lema 5.2, los conjuntos de vértices son infinitos). Definamos a $\mathbb{P}$ por medio de la fórmula $p \in \mathbb{P}$ si y sólo si $p \in \mathrm{Fn}(V_0, V_1)$ es una biyección y para todo $x, y \in \mathrm{dom}(p)$, $(x, y) \in E_0$ equivale a $(p(x), p(y)) \in E_1$. Ordenado por la contención inversa, claramente $\emptyset$ es, como es usual en estas construcciones, un elemento máximo del preorden.

Para cada $x \in V_0$ y cada $y \in V_1$, definimos los conjuntos $D_x := \{p \in \mathbb{P} \colon x \in \mathrm{dom}(p)\}$ y $D'_y := \{p \in \mathbb{P} \colon y \in \mathrm{img}(p)\}$. Para ver que estos conjuntos son densos en $\mathbb{P}$, tomemos $p \in \mathbb{P} \setminus D_x$. Apliquemos la propiedad de la extensión que tiene (V_1, E_1) a los conjuntos finitos y ajenos $A := p[N(x)]$ y $B := p[V_0 \setminus N(x)]$ para obtener un vértice $v \in V_1$ con las cualidades que garantiza dicha propiedad. Luego, afirmamos que $q := p \cup \{(x, v)\}$ es un elemento de $\mathbb{P}$ tal que $q \supseteq p$, es decir, una biyección que atestigua la densidad de D_x. Análogamente, se puede usar la propiedad de la extensión en (V_0, E_0) para probar la densidad de D'_y.

Aplicando el teorema 2.6 a la familia numerable de densos $\{D_x \colon x \in V_0\} \cup \{D'_y \colon y \in V_1\}$, producimos un filtro genérico F. Empleando argumentos que en este punto ya son repetitivos, se puede verificar que $f := \bigcup F$ es un isomorfismo entre las dos gráficas. $\square$

Ya teniendo dos ejemplos de gráficas con la propiedad de la extensión, hemos probado la existencia y la unicidad, con lo cual podemos bautizar a la gráfica que protagoniza esta sección como *gráfica de Rado*, también conocida como *gráfica aleatoria*. Vale la pena, antes de terminar este trabajo, mencionar algunas de las propiedades más notables que tiene la gráfica de Rado.

Usando la propiedad de la extensión que definimos, es un simple ejercicio demostrar lo siguiente:

Teorema 5.4. Denotemos por R a la gráfica de Rado.

1. Añadir o quitar cualquier cantidad finita de vértices o aristas a R, produce una gráfica isomorfa a R.
2. Dada una partición finita de los vértices de R, alguna de las clases induce (en el sentido usual de Teoría de Gráficas) una gráfica isomorfa a R. Más aún, de las gráficas numerables no triviales y no completas, R es, salvo isomorfismo, la única con esta propiedad (ver [**2**, Proposition 4, p. 5]).
3. R es isomorfa a la gráfica obtenida al invertir todas las adyacencias y no adyacencias de R, o sea, es *auto-complementaria*.

Referimos al lector interesado en más propiedades y construcciones alternativas de R, que además abarcan varias áreas de las matemáticas, al artículo [**2**], donde, por cierto, se prueba una versión del teorema 5.3 por medio de *back-and-forth*.

Referencias

[1] J.A. Bondy y U.S.R. Murty, *Graph Theory*. Springer, 2008.

[2] P.J. Cameron, *The random graph*. The Mathematics of Paul Erdős, pp. 331–351. Springer Verlag, Berlin, 1996.

[3] F. Hernández Hernández, *Teoría de los Conjuntos (una introducción)*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13. Sociedad Matemática Mexicana, México, 1998.

[4] F. Casarrubias Segura y Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología general*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.

[5] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[6] T. Matos Wiederhold, *Aplicaciones del lema de Rasiowa-Sikorski a la teoría de órdenes parciales y a la teoría de Ramsey*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2019.

[7] R. Pichardo Mendoza y Á. Tamariz Mascarúa, *Álgebras booleanas y espacios topológicos*. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 40. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2017.

Correo electrónico:

tonamatos@ciencias.unam.mx (Tonatiuh Matos Wiederhold)

Capítulo 8

Propiedades dinámicas en productos

Franco Barragán
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México
Anahí Rojas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción

En los últimos años la Dinámica Topológica se ha convertido en un área de gran interés para muchos investigadores. Particularmente, se ha definido un gran número de sistemas dinámicos, entre los más conocidos y estudiados se encuentran los sistemas: transitivos, exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos en el sentido de Devaney, minimales e irreducibles. Otros tipos de sistemas dinámicos que ya no son tan populares como los anteriores son los siguientes: órbita-transitivos, estrictamente órbita-transitivos, ω-transitivos, TT_{++}, suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticos, minimales inversos, totalmente minimales, dispersores, Touhey y los F-sistemas. De las muchas formas en la que se pueden analizar estos sistemas, en [**5**] hicimos un análisis de relaciones que existen entre los sistemas: exactos, mezclantes, débilmente mezclantes, transitivos, totalmente transitivos, fuertemente transitivos, caóticos en el sentido de Devaney, minimales, irreducibles, semi-abiertos, turbulentos, órbita-transitivos, estrictamente órbita-transitivos, ω-transitivos, IN, TT y TT_{++}. Además, por medio de contraejemplos, demostramos que algunas de estas nociones no pueden relacionarse de manera general. Por lo cual, es necesario condicionar al espacio fase o a la función para obtener más relaciones entre estos sistemas. Con el fin de darle continuidad al trabajo realizado en [**5**], en este nuevo capítulo agregamos los sistemas suavemente mezclantes, exactamente Devaney caóticos, minimales inversos, totalmente minimales, dispersores, Touhey y los F-sistemas y, además de mostrar relaciones que existen entre todos estos sistemas dinámicos, los estudiamos sobre un espacio muy particular.

Sean $X_1, \ldots, X_m$ espacios topológicos, con $m \geqslant 2$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la función $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \to \prod_{i=1}^m X_i$ dada por $\prod_{i=1}^m f_i((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m))$, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Esta función es llamada *función producto*. De este modo, podemos analizar las relaciones entre los sistemas dinámicos (1) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (2) (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. N. Değirmenci y Ş. Koçak [**12**] consideraron dos espacios métricos, X y Y, y dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ (no necesariamente continuas) y analizaron las relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es una función caótica en el sentido de Devaney. En particular, demostraron el siguiente resultado: si f es continua y caótica en el sentido de Devaney, y g es caótica en el sentido de Devaney y mezclante (no necesariamente continua), entonces $f \times g$ es caótica en el sentido de Devaney. Años después, X. Wu y P. Zhu [**28**] demostraron que para cada entero $m \geqslant 2$, si $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es caótica en el sentido de Devaney, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es también caótica en el sentido de Devaney. Además, demostraron que si $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es transitiva, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva. El recíproco no es cierto en general. En [**28**], X. Wu y P. Zhu consideraron espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. Más aún, R. Li y X. Zhou [**20**] analizaron relaciones entre f, g y $f \times g$ cuando alguna de ellas es: topológicamente transitiva, topológicamente débilmente mezclante, sindéticamente transitiva, cofinitamente sensitiva, multi-sensitiva y ergódicamente sensitiva, siempre considerando espacios métricos y funciones no necesariamente continuas. Recientemente, K. B. Mangang [**22**] estudió el caos Li-Yorke del sistema dinámico producto $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \prod_{i=1}^{m} f_i)$ cuando cada sistema dinámico (X_i, f_i) tiene la propiedad. En particular, demostró que (X, f) y (Y, g) son sistemas dinámicos exactos si y sólo si el sistema dinámico producto $(X \times Y, f \times g)$ es exacto. En este último trabajo, X y Y son espacios métricos compactos y f y g son funciones continuas.

Sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F-sistema. En este capítulo estudiamos relaciones entre las siguientes dos condiciones:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.
(2) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$.

Es importante enfatizar que en los artículos antes mencionados, los autores trabajan con espacios métricos compactos o espacios métricos sin puntos aislados y funciones continuas. En este capítulo consideramos espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas.

Cabe mencionar que este capítulo está basado en las secciones tres y cuatro del artículo *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products* [**24**].

2. Preliminares

En esta sección presentamos los conceptos básicos de sistemas dinámicos necesarios para un buen desarrollo de este capítulo. Considerando un espacio topológico X y un subconjunto A de X, al conjunto cerradura de A en X lo detonamos por $\mathrm{cl}_X(A)$. Si no existe riesgo de confusión se escribe $\mathrm{cl}(A)$. También, denotamos con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{I}$ al conjunto de los números naturales, números enteros no negativos y números irracionales, respectivamente.

Además, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Esto es, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). Debe quedar claro que $f^k \circ f^s = f^{k+s}$ y $(f^k)^s = f^{ks}$. Para un subconjunto A de X y k un entero, denotamos con $f^k(A)$ a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geqslant 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$. En el caso del conjunto que consta de un único punto x, escribimos $f^{-k}(x)$ para denotar al conjunto $f^{-k}(\{x\})$, donde $k > 0$.

En todo el escrito, m es un entero mayor o igual que dos.

Definición 2.1. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su ***producto cartesiano*** como el conjunto:

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$ al conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ se le denota con X_1^m.

Definición 2.2. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, τ_i) un espacio topológico. La ***topología producto*** $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^m X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^m X_i, \mathcal{X})$ se llama *espacio producto* de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^m$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^m X_i$.

Es natural pensar que así como se pude construir un espacio topológico a partir de espacios topológicos dados, también podemos construir una función a partir de otras.

Definición 2.3. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la ***función producto*** $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \to \prod_{i=1}^m X_i$ como:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)((x_1, \dots, x_m)) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \cdots = f_m$ a la función $\prod_{i=1}^m f_i$ se le denota con $f_1^{\times m}$.

Las siguientes propiedades no son difíciles de verificar.

Observación 2.4. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean X_i un espacio topológico, U_i y V_i subconjuntos no vacíos de X_i y $f_i : X_i \to X_i$ una función y sea $k \in \mathbb{N}$. Se cumple lo siguiente:

(1) $(\prod_{i=1}^m f_i)^k = \prod_{i=1}^m f_i^k$.
(2) Si $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m V_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i^k(U_i) = V_i$.

Definición 2.5. Sean X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Se dice que E es ***denso*** en X si $\mathrm{cl}_X(E) = X$.

Recordemos que la idea principal de este capítulo es analizar algunas propiedades del sistema dinámico $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$. Por ello, es necesario introducir la definición de estos objetos.

Definición 2.6. Un ***sistema dinámico*** es cualquier pareja formada por un espacio topológico X y cualquier función $f : X \to X$ y lo denotamos con (X, f).

Para referirse al sistema dinámico (X, f), generalmente se hace referencia únicamente a la función f.

Un concepto muy importante dentro de la teoría de sistemas dinámicos es el de órbita de un punto.

Definición 2.7. Sea (X, f) un sistema dinámico. La ***órbita de un punto $x \in X$ bajo f***, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. Esto es: $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Existen puntos con la particularidad de generar órbitas finitas.

Definición 2.8. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto periódico de f*** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.

Al conjunto de todos los puntos periódicos de f se le denota con $Per(f)$.

Ejemplo 2.9. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función se conoce como *función tienda*. Se cumple que, $x_0 = \frac{2}{5}$ es un punto periódico de T, ya que $T^2(x_0) = x_0$.

También existen puntos con la particularidad de generar órbitas densas.

Definición 2.10. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que x es un ***punto transitivo de f*** si la órbita $\mathcal{O}(x, f)$ es densa en X.

Al conjunto de todos los puntos transitivos de f se le denota con $trans(f)$.

Ejemplo 2.11. Sean $\theta \in \mathbb{I}$ y $S^1 = \{e^{2\pi i\alpha} : \alpha \in [0,1]\}$. Se define la *función rotación irracional* $R_\theta : S^1 \to S^1$ como $R_\theta(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i\theta}(e^{2\pi i\alpha}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)}$, para cada $\alpha \in [0,1]$ o simplemente;

$$R_\theta(z) = (e^{2\pi i\theta})z, \text{ para cada } z \in S^1.$$

Notemos que, para cada $z \in S^1$, $z \in trans(R_\theta)$.

Cada uno de los conjuntos que hemos definido hasta este momento juegan un papel importante en el desarrollo de este capítulo, sin embargo, los conjuntos que a continuación se definen, son punto clave en la demostración de resultados en secciones posteriores.

Definición 2.12. Sean (X, f) un sistema dinámico y A un subconjunto de X. Se dice que A es ***+invariante bajo f*** si $f(A) \subseteq A$, A es ***−invariante bajo f*** si $f^{-1}(A) \subseteq A$ y A es ***invariante bajo f*** si $f(A) = A$.

A los espacios topológicos con la propiedad de que cada subconjunto abierto es +invariante bajo una función, les damos un nombre especial. La siguiente definición es una aportación original de [**24**].

Definición 2.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que X es un espacio ***+invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f***, si cada subconjunto abierto de X es +invariante bajo f.

Ejemplo 2.14. Sean $X = \{1, 2\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 1$ y $f(2) = 1$. Luego, X es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f.

No todos los espacios topológicos son +invariantes sobre subconjuntos abiertos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. Sean (X, τ) como en el Ejemplo 2.14 y $f : X \to X$ la función dada por $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$. Notemos que $f^{\times 2}(\{1\} \times \{1\}) = \{(2, 2)\} \not\subseteq \{1\} \times \{1\}$. Así, X^2 no es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo $f^{\times 2}$.

Lema 2.16. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico, U_i un subconjunto no vacío de X_i y $x_i \in X_i$. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$, entonces, para $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_m\}$, se cumple que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Pongamos $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) = f_i^{k_i+l_i}(x_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(x_i))$. Consecuentemente, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in f_i^{l_i}(U_i)$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es +invariante bajo f_i, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. □

Definición 2.17. Sean (X, f) un sistema dinámico y A y B subconjuntos de X. Se define el siguiente conjunto:

$$\boldsymbol{n_f(A, B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}}.$$

Para finalizar esta sección, presentamos la definición de punto ω-límite y conjunto ω-límite.

Definición 2.18. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se dice que $y \in X$ es un ***punto ω-límite de x bajo f*** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualquier abierto U de X tal que $y \in U$, existe un entero $n \geqslant k$ tal que $f^n(x) \in U$. El conjunto de todos los puntos ω-límite de x bajo f, se denota por $\omega(x, f)$ y se llama ***conjunto ω-límite de x bajo f***.

Ejemplo 2.19. Sean $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq [0,1]$ con la métrica usual y $f : X \to X$ definida por; $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ [**21**, Ejemplo 2.9]. Luego, $0 \in \omega(1, f)$.

3. Funciones del tipo transitivas

Desde hace muchos años el estudio de propiedades particulares en una función se ha convertido en una herramienta importante en muchas áreas de la matemática. Una de las primeras propiedades que se observó en ciertas funciones fue la continuidad. Definición que introduce M. Fréchet en 1910 [**14**]. Después de la definición de M. Fréchet, empezaron a surgir otras clases de funciones. En 1913, H. Weyl [**27**] introduce la clase de las funciones abiertas; once años después, R. L. Moore [**23**] introduce el concepto de función monótona; y en 1964, J. J. Charatonik [**11**] establece las condiciones para que una función pertenezca a la clase de las funciones confluentes. Desde la introducción de estas tres clases de funciones, se han definido otras que están contenidas o contienen a alguna de las tres anteriores. Por ejemplo, los homeomorfismos, las funciones semi abiertas, MO, OM y casi interiores, son funciones del tipo abiertas. Por otro lado, las funciones fuertemente monótonas, a lo más monótonas, casi monótonas, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles, son del tipo monótonas. Finalmente, las funciones semiconfluentes, empalmantes, débilmente confluentes, atriódicas, pseudoconfluentes, frágilmente confluentes y frágilmente semiconfluentes, son funciones del tipo confluentes (la definición de cada una de estas funciones se puede consultar en [**4**]). Hoy en día, las funciones del tipo abiertas, monótonas y confluentes son muy estudiadas dentro de la teoría de continuos. Sin embargo, el inicio de la teoría de sistemas dinámicos trajo consigo la necesidad de comenzar a definir lo que hoy conocemos como funciones dinámicas. En 1912, G. D. Birkhoff [**8**] introduce el concepto de función minimal y en 1920 inicia el estudio de las funciones transitivas [**9**], quedando contenida la primera clase dentro de la segunda. Después del surgimiento de las funciones transitivas se empezaron a definir muchas otras que están relacionadas o son equivalentes a dicha clase. Una de las más estudiadas es la clase de las funciones caóticas. La palabra caos fue usada por primera ves en 1975 por T. Y. Li y J. A. Yorke [**19**] sin una definición formal, y aunque no existe una definición matemática universal de la palabra caos, la más utilizada es la dada por R. L. Devaney [**13**]. Otra clase muy estudiada en la teoría de sistemas dinámicos es la clase de las funciones mezclantes, definida en 1955 por W. Gottschalk y G. Hedlung [**16**]. Posteriormente, en 1967, H. Furstenberg [**15**] introduce una condición más débil que la de W. Gottschalk y G. Hedlung e inicia el estudio de las funciones débilmente mezclantes. Otras funciones del tipo transitivas son las funciones: exactas, totalmente transitivas, fuertemente transitivas e irreducibles.

A continuación, presentamos la definición de las funciones del tipo transitivas más conocidas y estudiadas dentro del área de los sistemas dinámicos.

Definición 3.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

(1) ***Exacta*** si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$.
(2) ***Mezclante*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N$.
(3) ***Transitiva*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
(4) ***Débilmente mezclante*** si $f^{\times 2}$ es trasitiva.
(5) ***Totalmente transitiva*** si f^s es transitiva, para cada $s \in \mathbb{N}$.

(6) ***Fuertemente transitiva*** si para cada subconjunto abierto no vacío U de X, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{k=0}^{s} f^k(U)$.
(7) ***Caótica*** si f es transitiva y $Per(f)$ es denso en X (esta definición corresponde al caos en el sentido de Devaney [**3**]).
(8) ***Minimal*** si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado e invariante.
(9) ***Irreducible*** si el único subconjunto cerrado A de X tal que $f(A) = X$ es $A = X$.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Irreducible} \arrow[dr] & \text{Exacta} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Débilmente mezclante} \\
 & \text{Sobreyectiva} & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \\
 & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1. Resumen de relaciones que se dan cuando X es un espacio topológico y $f : X \to X$ una función no necesariamente continua.

En el diagrama de la Figura 1, presentamos las relaciones que se dan de manera general entre las funciones dadas en la Definición 3.1. Es decir, considerando a X como cualquier espacio topológico y a $f : X \to X$ cualquier función (no necesariamente continua). La prueba de estas relaciones entre funciones se puede consultar en [**5**, Teoremas 3.1, 3.3, 3.5, 3.6 y 3.7].

Bajo ciertas hipótesis se pueden obtener otras relaciones entre las clases de funciones que presentamos en la Definición 3.1. En el diagrama de la Figura 2 mostramos algunos de estos resultados (con F. transitiva, Déb. M. y T. transitiva denotamos a las funciones fuertemente transitivas, débilmente mezclantes y totalmente transitivas, respectivamente). La prueba de las implicaciones que se muestran en el diagrama de la Figura 2 se pueden consultar en [**5**, Teorema 6.3] y [**25**, Teoremas 1.5.19 y 1.5.20].

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Irreducible} \arrow[dr, "(C.1)"] & \text{Exacta} \arrow[r, "(C.1)"] \arrow[d, "(C.1)"] & \text{Mezclante} \arrow[r, "(C.1)"] \arrow[d, "(C.1)"] & \text{Déb. M} \arrow[dl, "(C.2)"] \\
\text{Minimal} \arrow[ur, "(C.3)"] \arrow[dr, "(C.3)"] & & \text{Sobreyectiva} & \text{T. transitiva} \arrow[dl, "(C.1)"] & \\
 & \text{F. transitiva} \arrow[r, "(C.1)"] & \text{Transitiva} & \text{Caótica} \arrow[l, "(C.1)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2. Relaciones entre funciones con dominio compacto (y/o de Hausdorff) y f continua.

En el diagrama de la Figura 2, las condiciones (C.1), (C.2) y (C.3) son como sigue:

(C.1) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función $f : X \to X$.
(C.2) Para cualquier espacio topológico X y para cualquier función continua $f : X \to X$.
(C.3) Para cualquier espacio topológico X compacto y para cualquier función continua $f : X \to X$.

Como ya mencionamos, los sistemas dinámicos de la Definición 3.1 son los más conocidos y estudiados en el área de sistemas dinámicos. Sin embargo, existen otras nociones que también están relacionadas con la transitividad topológica, aunque no son tan populares como los anteriores. Por ejemplo, en 1967, H. Furstenberg [**15**] no solo introduce el concepto de función débilmente mezclante, también define los F-sistemas, sin embargo, estos últimos son menos conocidos que los sistemas débilmente mezclantes. Por otro lado, los tipos de sistemas dinámicos presentados en la Definición 3.1 han dado pie al surgimiento de nuevos sistemas. En 1997, P. Touhey [**26**] define una variante de las funciones caóticas en el sentido de Devaney, a esta clase de funciones las conocemos como funciones Touhey. Tres años después, F. Blanchard, B. Host y A. Maass [**10**] introducen el concepto de función dispersora y en el 2005, D. Kwietniak [**18**] inicia el estudio de las funciones exactamente Devaney caóticas. En su gran mayoría, los tipos de sistemas dinámicos que hemos mencionado fueron definidos entre continuos, espacios métricos compactos o espacios compactos y de Hausdorff. Recientemente, se han definido tipos de sistemas dinámicos sobre espacios topológicos. Por ejemplo, J. H. Mai y W. H. Sun, en el 2010 [**21**] inician el estudio de las funciones órbita-transitivas, estrictamente órbita transitivas y ω-transitivas. Finalmente, en el 2017, E. Akin, J. Auslander y A. Nagar [**2**] definen una clase más grande que la clase de las funciones minimales, la clase de las funciones minimales inversas sobre espacios métricos.

A continuación, presentamos más clases de funciones del tipo transitivas y vemos de que manera se relacionan con las funciones que presentamos en la Definición 3.1.

Definición 3.2. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es:

(1) ***Órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$.
(2) ***Estrictamente órbita-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$.
(3) ***ω-transitiva*** si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.
(4) ***TT_{++}*** si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $n_f(U, V)$ es infinito.
(5) ***Suavemente mezclante*** si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función transitiva, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.
(6) ***Exactamente Devaney caótica*** si f es exacta y $Per(f)$ es denso en X.
(7) ***Minimal inversa*** si para cada $x \in X$, el conjunto:
$$\left\{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\right\}$$
es denso en X.
(8) ***Totalmente minimal*** si para cada $s \in \mathbb{N}$, f^s es minimal.
(9) ***Dispersora*** si para cualquier espacio topológico Y y cualquier función minimal, $g : Y \to Y$, la función $f \times g$ es transitiva.
(10) ***Touhey*** si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existen un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$.
(11) **Un *F-sistema*** si f es totalmente transitiva y $Per(f)$ es denso en X.

En el diagrama de la Figura 3 mostramos relaciones entre las funciones de las Definiciones 3.1 y 3.2 para el caso general, es decir, cuando X es un espacio topológico y $f : X \to X$ cualquier función. Para las pruebas de estas inclusiones recomendamos revisar [**1, 5, 7**] y [**21**] (denotamos con T. transitiva, F. transitiva, E. Devaney caótica y E. órbita-transitiva a las funciones totalmente transitivas, fuertemente transitivas, exactamente Devaney caóticas y estrictamente órbita-transitivas, respectivamente).

En el Teorema 3.3 se presentan otras relaciones que no se muestran en el diagrama de la Figura 3. Incluimos su demostración ya que las pruebas no se siguen inmediatamente de la definición como en el caso de las funciones Touhey, exactamente Devaney caóticas, dispersoras, suavemente mezclantes y los F-sistemas.

Teorema 3.3. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

(1) Si f es exacta, entonces f es minimal inversa.
(2) Si f es minimal inversa, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es exacta. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que f es exacta, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$. Por otro lado, ya que x es un punto en X, por la igualdad anterior podemos concluir que $x \in f^k(U)$. Con esto último aseguramos la existencia de $u \in U$ tal que $f^k(u) = x$. Por lo tanto, $u \in \{y \in X : f^l(y) = x, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$. Así, f es minimal inversa.

Ahora supongamos que f es minimal inversa. Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X y $v \in V$. Ya que f es minimal inversa, el conjunto $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Esto implica que la intersección $\{y \in X : f^l(y) = v, \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U$ es no vacía. Así, existen $u \in U$ y $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l(u) = v$. Con lo cual podemos concluir que $f^l(u) \in f^l(U) \cap V$. Por lo tanto, f es transitiva. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
\text{Sobreyectiva} & \text{Exacta} \arrow[l] \arrow[dr] & & \text{Suavemente mezclante} \arrow[d] \\
& & \text{Mezclante} \arrow[r] \arrow[dl] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[ddl] \\
\text{Un } F\text{-sistema} \arrow[r] & \text{T. transitiva} \arrow[d] & \text{F. transitiva} \arrow[d] & \\
\text{Touhey} \arrow[r] & \text{Caótica} \arrow[r] & \text{Transitiva} & \omega\text{-transitiva} \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{E. Devaney caótica} \arrow[ur] & \text{TT}_{++} \arrow[ur] & \text{Dispersora} \arrow[u] & \text{E. órbita-transitiva} \arrow[d] \\
& & & \text{Órbita-transitiva}
\end{tikzcd}
$$

Figura 3. Resumen de relaciones que se dan de manera general.

Finalizamos esta sección mostrando ejemplos de las funciones presentadas en las Definiciones 3.1 y 3.2.

Ejemplo 3.4. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ como en el Ejemplo 2.9. De [**17**, Proposición 7.2], sabemos que T es exacta. Así, por el diagrama de la Figura 2, T también es mezclante, débilmente mezclante, totalmente transitiva y transitiva. Más aún, en [**17**, Proposición 7.3], se verifica que $Per(T)$ es denso en el intervalo $[0,1]$, por lo que T es caótica en el sentido de Devaney, exactamente Devaney caótica y un F-sistema. Finalmente, de [**21**, pág. 952], sabemos que las propiedades de ω-transitividad y transitividad son equivalentes para espacios topológicos con una base numerable, parcialmente compactos y pseudo-regulares y para cualquier función continua. En consecuencia, T también es ω-transitiva.

Ejemplo 3.5. Sea $R_\theta : S^1 \to S^1$ como en el Ejemplo 2.11. De [**25**, Proposición 1.6.14], tenemos que R_θ es minimal. Luego, por el diagrama de la Figura 2, concluimos que R_θ es además, irreducible, fuertemente transitiva y transitiva. Por otro lado, de [**25**, Ejemplo 2.3.12], tenemos que R_θ es TT_{++}. Además, no es difícil verificar que toda función minimal y continua es minimal inversa [**2**, pág. 26], con lo cual obtenemos que R_θ es minimal inversa. Finalmente, si $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z) = e^{2\pi i r\theta} z$. De aquí, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es también una rotación irracional. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{N}$, $R_\theta^r(z)$ es minimal. Consecuentemente, R_θ es totalmente minimal.

Ejemplo 3.6. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.19. Luego, f es órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(1, f)) = X$ [**21**, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 3.7. Sean $f : X \to X$ como en el Ejemplo 3.6 y $Y = [0, 1]$ con la topología $\tau = \{[0, t) : t \in (0, 1]\} \cup \{\emptyset, Y\}$. Definamos la función $F_1 : X \times Y \to X \times Y$ como sigue:

$$F_1((s,t)) = \begin{cases} (s,0), & t \neq 0; \\ (f(s),0), & t = 0. \end{cases}$$

Luego, F_1 es estrictamente órbita-transitiva ya que $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(F_1((1, 1)), F_1)) = X \times Y$ [**21**, Ejemplo 3.3].

Ejemplo 3.8. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -2x+3, & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ -x+2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Se cumple que f es caótica en el sentido de Devaney y Touhey [**12**, Ejemplo 1].

4. Propiedades dinámicas sobre productos

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Notemos que las Definiciones 2.1 y 2.3 dejan ver una relación muy natural entre los sistemas dinámicos $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué relaciones existen entre los sistemas dinámicos $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, cuando alguno de ellos tiene alguna propiedad dinámica?

Sabemos bien que para responder a esta pregunta, es conveniente analizar primero relaciones entre los espacios $\prod_{i=1}^m X_i$ y X_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y después, con ayuda de estos resultados, empezar a establecer relaciones entre las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por esta razón, en esta sección nos encargamos de estudiar algunas propiedades dinámicas en productos cartesianos.

Teorema 4.1. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Si $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, x_i es un punto transitivo de f_i.
(2) Si $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$.
(3) $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis,

$$\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^{m} f_i) \cap (\prod_{i=1}^{m} U_i) \neq \emptyset.$$

Se sigue que, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1^k(x_1), \ldots, f_m^k(x_m))$ y así, $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por lo tanto, $U_{i_0} \cap \mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0}) \neq \emptyset$ y $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Supongamos que $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $y_{i_0} \in X_{i_0}$, $k \in \mathbb{N}$, U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $y_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $y_j \in X_j$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De lo anterior obtenemos que, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1, \ldots, y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Así, por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ con

$l \geqslant k$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1,\ldots,x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por lo tanto, $y_{i_0} \in \omega(x_{i_0}, f_{i_0})$. Consecuentemente, $X_{i_0} = \omega(x_{i_0}, f_{i_0})$.

Supongamos que $(x_1,\ldots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. De aquí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Así, por la Observación 2.4, parte (1), para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) = x_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, x_i es un punto periódico de f_i. Así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) = x_i$. Sea $k = k_1 \cdots k_m$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) = x_i$. En consecuencia, $(f_1^k(x_1),\ldots,f_m^k(x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. Por lo tanto, $(x_1,\ldots,x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. $\square$

El Ejemplo 4.2 muestra que los recíprocos del Teorema 4.1, partes (1) y (2) no se cumplen en general.

Ejemplo 4.2. Sea $f : X \to X$ como en el Ejemplo 2.15. Notemos que:

(1) $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(1,f)) = X$ y $\mathrm{cl}_X(\mathcal{O}(2,f)) = X$. Sin embargo, $\mathcal{O}((1,2), f^{\times 2}) \cap \{1\}^2 = \emptyset$. En consecuencia, $\mathrm{cl}_{X^2}(\mathcal{O}((1,2), f^{\times 2})) \neq X^2$.

(2) $\omega(1,f) = X$ y $\omega(2,f) = X$. Sin embargo, $\omega((1,2), f^{\times 2}) \neq X^2$.

Existen condiciones bajo las cuales se cumplen los recíprocos del Teorema 4.1, partes (1) y (2). Una de estas condiciones es la que mostramos en el Teorema 4.3.

Teorema 4.3. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico y $x_i \in X_i$. Se cumple lo siguiente:

(1) Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sean $(y_1,\ldots,y_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1,\ldots,y_m) \in \mathcal{U}$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i, tal que $(y_1,\ldots,y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $l_i \geqslant k$ y $f_i^{l_i}(x_i) \in U_i$. Sea $l = \max\{l_1,\ldots,l_m\}$. Por el Lema 2.16, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1,\ldots,x_m)) \in \mathcal{U}$. También, notemos que $l \geqslant k$. Por lo tanto, $(y_1,\ldots,y_m) \in \omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ y así $\omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathcal{O}(x_i, f_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(x_i) \in U_i$. Sea $k = \max\{k_1,\ldots,k_m\}$. Por el Lema 2.16, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(x_i) \in U_i$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) = (f_1^k(x_1),\ldots,f_m^k(x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i$. De aquí, concluimos que, $\mathcal{O}((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i. \qquad \square$$

En el Teorema 4.1 vimos una manera natural de relacionar puntos transitivos, ω-límite y periodicos de las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Ahora podemos intuir lo que sucede con los respectivos conjuntos.

La prueba del siguiente corolario se sigue del Teorema 4.1.

Corolario 4.4. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:

(1) $trans(\prod_{i=1}^m f_i) \subseteq \prod_{i=1}^m trans(f_i)$.
(2) $\omega((x_1,\dots,x_m),\prod_{i=1}^m f_i) \subseteq \prod_{i=1}^m \omega(x_i,f_i)$.
(3) $Per(\prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m Per(f_i)$.

Teorema 4.5. Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea (X_i,f_i) un sistema dinámico. Se cumple lo siguiente:
(1) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$.
(2) $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Demostración. En virtud del Corolario 4.4, parte (1), es suficiente con verificar que

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\prod_{i=1}^m trans(f_i)\right) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Sean $(x_1,\dots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m trans(f_i))$ e $i_0 \in \{1,\dots,m\}$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\setminus\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Observemos que $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i \cap \prod_{i=1}^m trans(f_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1,\dots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $u_i \in trans(f_i)$. De aquí, $U_{i_0} \cap trans(f_{i_0}) \neq \emptyset$. Como U_{i_0} e $i_0 \in \{1,\dots,m\}$ son arbitrarios, tenemos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(trans(f_{i_0}))$ y en consecuencia, $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i))$. Por lo tanto:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\prod_{i=1}^m trans(f_i)\right) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Finalmente, por el Corolario 4.4, parte (1), tenemos que,

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(trans(\prod_{i=1}^m f_i)) \subseteq \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(trans(f_i)).$$

Sean $(x_1,\dots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$ e $i_0 \in \{1,\dots,m\}$. Veamos que $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$. Sea U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\setminus\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. Notemos que $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y que $\prod_{i=1}^m U_i$ es abierto en $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \cap (\prod_{i=1}^m U_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1,\dots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $u_i \in Per(f_i)$. De aquí, $u_{i_0} \in Per(f_{i_0}) \cap U_{i_0}$. Ya que U_{i_0} e $i_0 \in \{1,\dots,m\}$ son arbitrarios, obtenemos que, $x_{i_0} \in \mathrm{cl}_{X_{i_0}}(Per(f_{i_0}))$ y así, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $x_i \in \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. Por lo tanto, $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$.

Ahora, sean $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$ y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{U}$. Veamos que $\prod_{i=1}^m Per(f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Tenemos que, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $U_i \cap Per(f_i) \neq \emptyset$. Para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, sea $u_i \in U_i \cap Per(f_i)$. De aquí, $(u_1,\dots,u_m) \in (\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. En consecuencia, $\mathcal{U} \cap (\prod_{i=1}^m Per(f_i)) \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{U}$ es arbitrario, tenemos que $(x_1,\dots,x_m) \in \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i))$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\prod_{i=1}^m Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i))$. □

Observemos que en algunas condiciones dadas en las Definiciones 3.1 y 3.2, la densidad del conjunto de puntos periódicos juega un papel muy importante. Por ello, es conveniente conocer las condiciones bajo las cuales la densidad del conjunto $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ implica la densidad del conjunto $Per(f_i)$, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$ y viceverza.

Teorema 4.6. Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea (X_i,f_i) un sistema dinámico. Luego, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ si y sólo si, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Demostración. Supongamos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 4.5, parte (2), $\prod_{i=1}^m \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = X_i$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i.

Ahora supongamos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Así,

$$\prod_{i=1}^{m} \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

Por otro lado, por el Corolario 4.4, parte (3) y el Teorema 4.5, parte (2), $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{cl}_{X_i}(Per(f_i)) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}\left(\prod_{i=1}^{m} Per(f_i)\right) = \mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}\left(Per\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)\right)$. Esto implica que, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^{m} X_i}(Per(\prod_{i=1}^{m} f_i)) = \prod_{i=1}^{m} X_i$. Por lo tanto, $Per(\prod_{i=1}^{m} f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^{m} X_i$. □

El siguiente lema está motivado por la parte (4) de la Definición 3.2.

Lema 4.7. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si $j \in \{1, \ldots, m\}$ y U_j y V_j son dos subconjuntos abiertos no vacíos de X_j y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$, ponemos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$, entonces $n_{\prod_{i=1}^{m} f_i}(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j)$.

Demostración. Sea $k \in n_{\prod_{i=1}^{m} f_i}(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i)$. De aquí:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} U_i\right) \cap \left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)^{-k} \left(\prod_{i=1}^{m} V_i\right) \neq \emptyset.$$

Así, podemos tomar $(y_1, \ldots, y_m) \in (\prod_{i=1}^{m} U_i)$ tal que $(\prod_{i=1}^{m} f_i)^k((y_1, \ldots, y_m)) \in \prod_{i=1}^{m} V_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $(f_1^k(y_1), \ldots, f_m^k(y_m)) \in \prod_{i=1}^{m} V_i$. Luego, $y_j \in U_j \cap f_j^{-k}(V_j)$. Por lo tanto, $k \in n_{f_j}(U_j, V_j)$ y así:

$$n_{\prod_{i=1}^{m} f_i}\left(\prod_{i=1}^{m} U_i, \prod_{i=1}^{m} V_i\right) \subseteq n_{f_j}(U_j, V_j).$$ □

5. Propiedades dinámicas de funciones en productos

Es complicado dar una fecha exacta en la que inicia el estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Ya que en muchos trabajos, aunque no se habla de la dinámica de funciones producto como tal, se pueden encontrar algunos resultados que involucran alguna propiedad dinámica de estas funciones. En 1967, H. Furstenberg ya hablaba de dinámica topológica, producto de procesos y producto de flujos [**15**]. Años más tarde, W. Bauer y K. Sigmund, citando algunas ideas de H. Furstenberg, analizan la dinámica topológica de transformaciones inducidas sobre espacios de medida [**6**], en dicho trabajo, también se pueden encontrar algunos resultados encaminados al estudio de propiedades dinámicas de funciones producto. Es hasta el año 2010 cuando N. Değirmenci y Ş. Koçak le dan formalidad al estudio de propiedades dinámicas (principalmente el caos en el sentido de Devaney) en espacios producto [**12**]. En particular, analizan las condiciones bajo las cuales el producto de dos funciones (sobre espacios métricos) f y g caóticas en el sentido de Devaney es también una función caótica en el sentido de Devaney. Además, demuestran que si el producto $f \times g$ es mezclante, entonces f y g también lo son. Tres años después, R. Li y X. Zhou [**20**], considerando a $\mathcal{M}$ como alguna de las siguientes clases de funciones: sindéticamente transitivas, sindéticamente sensitivas, cofinitamente sensitivas, multi-sensitivas, ergódicamente sensitivas, mezclantes y transitivas, analizan las relaciones entre las condiciones: (1) $f \times g \in \mathcal{M}$ y (2) $f, g \in \mathcal{M}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: exacta, transitiva, débilmente mezclante, mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, irreducible, suavemente mezclante, minimal inversa, Touhey, totalmente minimal, dispersora, exactamente Devaney caótica o un F-sistema. Motivados por las ideas de N. Değirmenci, Ş. Koçak, R. Li y X. Zhou, en esta sección analizamos relaciones entre las siguientes condiciones: (1) $\prod_{i=1}^{m} f_i \in \mathcal{M}$ y (2) para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Teorema 5.1. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por la Observación 2.4, parte (2), $f_{i_0}^k(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es exacta.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exacta. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) = X_i$. Por otro lado, por el diagrama de la Figura 3, tenemos que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es sobreyectiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para cada $l \in \mathbb{N}$, $f_i^l(X_i) = X_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Se sigue que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = k_i + l_i$. Esto implica que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(U_i) = f_i^{l_i+k_i}(U_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(U_i)) = f_i^{l_i}(X_i) = X_i$. Finalmente, por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) = \prod_{i=1}^m f_i^k(U_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^m X_i$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta. $\square$

De los Teoremas 4.6 y 5.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es exactamente Devaney caótica si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i$ es exactamente Devaney caótica.

Teorema 5.3. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Luego, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante si y sólo si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$, para todo $k \geqslant N$. Sean $k_1 \geqslant N$ y $(a_1, \ldots, a_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Luego, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}((x_1, \ldots, x_m)) = (a_1, \ldots, a_m)$. Esto es, $f_{i_0}^{k_1}(x_{i_0}) = a_{i_0}$. Así, $a_{i_0} \in f_{i_0}^{k_1}(U_{i_0}) \cap V_{i_0}$. Consecuentemente, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N$. Por lo tanto, f_{i_0} es mezclante.

Ahora supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N_i$. Sean $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$ y $l \geqslant N$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^l(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Ahora, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos tomar $a_i \in U_i$ tal que $f_i^l(a_i) \in V_i$. Esto implica que, $(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^l(a_1, \ldots, a_m) \in \prod_{i=1}^m V_i$. En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l(a_1, \ldots, a_m) \in ((\prod_{i=1}^m f_i)^l(\prod_{i=1}^m U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Así, para cada $l \geqslant N$,

$$((\prod_{i=1}^m f_i)^l(\prod_{i=1}^m U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es mezclante. $\square$

Para el caso de las funciones transitivas, débilmente mezclantes, totalmente transitivas, fuertemente transitivas, caóticas en el sentido de Devaney, órbita-transitivas, estrictamente órbita-transitivas, ω-transitivas, TT_{++}, minimales inversas, Touhey, los F-sistemas, dispersoras y suavemente mezclantes no nos es posible establecer un resultado similar al de los Teoremas 5.1, 5.2 y 5.3, sin embargo, podemos establecer el siguiente:

Teorema 5.4. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, minimal inversa, Touhey, un F-sistema, dispersora o suavemente mezclante. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Sea $(u_1, \ldots, u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $f_{i_0}^k(u_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(u_{i_0}) \in f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0}$, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ y así f_{i_0} es transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times X_{i_0}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1, U_{i_0}^2, V_{i_0}^1$ y $V_{i_0}^2$ de X_{i_0} tales que $U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{U}$ y $V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = V_i^1 = V_i^2 = X_i$. Luego, $(\prod_{i=1}^m U_i^1) \times (\prod_{i=1}^m U_i^2)$ y $(\prod_{i=1}^m V_i^1) \times (\prod_{i=1}^m V_i^2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^m X_i) \times (\prod_{i=1}^m X_i)$. Por hipótesis, existen $((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times (\prod_{i=1}^m U_i^2)$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)\right)^k ((a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)) \in \left(\prod_{i=1}^m V_i^1\right) \times \left(\prod_{i=1}^m V_i^2\right).$$

Así, por la Observación 2.4, parte (1), $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k((a_{i_0}, b_{i_0})) \in V_{i_0}^1 \times V_{i_0}^2$. Más aún, $(a_{i_0}, b_{i_0}) \in U_{i_0}^1 \times U_{i_0}^2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times f_{i_0})^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{\times 2}$ es transitiva. Finalmente, f_{i_0} es débilmente mezclante.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es transitiva. Así, por el primer párrafo de la prueba de este teorema, se tiene que $f_{i_0}^s$ es transitiva. Por lo tanto, f_{i_0} es totalmente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente transitiva. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^m X_i = \bigcup_{k=0}^s (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i)$. Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y, para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Luego, existe $k_1 \in \{0, \ldots, s\}$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i)$. Así, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_1}(U_{i_0})$. Por lo tanto, $X_{i_0} = \bigcup_{k=0}^s f_{i_0}^k(U_{i_0})$ y así f_{i_0} es fuertemente transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica en el sentido de Devaney. Por el primer párrafo de la prueba de este teorema, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva. Además, por el Teorema 4.6, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es caótica en el sentido de Devaney.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es órbita-transitiva. De aquí, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por el Teorema 4.1, parte (1), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es estrictamente órbita-transitiva. Luego, existe $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por el Teorema 4.1, parte (1), para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$ y así, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva. De aquí, existe $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ tal que $\omega((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Así, por el Teorema 4.1, parte (2), para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por lo tanto, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es ω-transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De aquí, por el Lema 4.7, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i) \subseteq n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$. Además, por hipótesis, $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\prod_{i=1}^m U_i, \prod_{i=1}^m V_i)$ es infinito. Por lo tanto, $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, V_{i_0})$ es infinito y así f_{i_0} es TT_{++}.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal inversa. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, $x_{i_0} \in X_{i_0}$, U_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $x_i \in X_i$. De aquí, $\prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, tenemos que $\{A \in \prod_{i=1}^m X_i : (\prod_{i=1}^m f_i)^l(A) = (x_1,\ldots,x_m),\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap \prod_{i=1}^m U_i \neq \emptyset$. Sean $(u_1,\ldots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((u_1,\ldots,u_m)) = (x_1,\ldots,x_m)$. De la Observación 2.4, parte (1), $u_{i_0} \in \{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0},\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\} \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Así, el conjunto $\{y \in X_{i_0} : f_{i_0}^l(y) = x_{i_0},\ \text{para algún } l \in \mathbb{N}\}$ es denso en X_{i_0}. Puesto que $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, podemos concluir que f_{i_0} es minimal inversa.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0} y para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, pongamos $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i$ y $\prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existen un punto periódico $(x_1,\ldots,x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1,\ldots,x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Por el Teorema 4.1, parte (3), x_{i_0} es un punto periódico de f_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y por la Observación 2.4, parte (1), $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por lo tanto, f_{i_0} es Touhey.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema. Así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva y $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 4.6, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por lo tanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es un F-sistema.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es dispersora. Sean $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, Y un espacio topológico, $g : Y \to Y$ una función minimal y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $X_{i_0} \times Y$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i_0}^1$ y $U_{i_0}^2$ de X_{i_0} y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de Y tales que $U_{i_0}^1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $U_{i_0}^2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, sea $U_i^1 = U_i^2 = X_i$. Así, $\prod_{i=1}^m U_i^1$ y $\prod_{i=1}^m U_i^2$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva, existen $((u_1,\ldots,u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times V_1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $((\prod_{i=1}^m f_i) \times g)^k((u_1,\ldots,u_m), v_1) \in (\prod_{i=1}^m U_i^2) \times V_2$. De aquí, $(u_{i_0}, v_1) \in U_{i_0}^1 \times V_1$ y por la Observación 2.4, parte (1), $(f_{i_0} \times g)^k((u_{i_0}, v_1)) \in U_{i_0}^2 \times V_2$. Por lo tanto, $(f_{i_0} \times g)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así f_{i_0} es dispersora.

La prueba para las funciones suavemente mezclantes es análoga a la prueba dada para funciones dispersoras. □

El recíproco del Teorema 5.4 no es cierto en general. Veamos un ejemplo parcial de esto en el siguiente:

Ejemplo 5.5. Sea $f : [0,2] \to [0,2]$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -2x+3, & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ -x+2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

En [**12**, Ejemplo 1], se verifica que f es una función caótica en el sentido de Devaney. Además, se prueba que $f^{\times 2} : [0,2]^2 \to [0,2]^2$ no es transitiva y por lo tanto, no es caótica en el sentido de Devaney. Más aún, en [**1**] y [**21**], se verifica que para continuos y funciones continuas, las funciones: transitiva, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva y TT_{++} son equivalentes.

Por lo tanto, el recíproco del Teorema 5.4, para todas estas clases de funciones no se cumple en general.

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el Teorema 5.4 ya que para estas dos clases de funciones requerimos la continuidad de la función.

Teorema 5.6. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua y $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal.

Demostración. Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Puesto que f_{i_0} es continua, por [**21**, Proposición 6.2] es suficiente con verificar que, para cada $x \in X_{i_0}$, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Sean $x_{i_0} \in X_{i_0}$ y para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, $x_i \in X_i$. De aquí, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua, no es difícil verificar que $\prod_{i=1}^m f_i$ es una función continua. En consecuencia, $\prod_{i=1}^m f_i$ es continua y minimal. Así:

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Luego, por el Teorema 4.1, parte (1), para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. En particular, $\mathrm{cl}_{X_{i_0}}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$. Como $x_{i_0} \in X_{i_0}$ es arbitrario, de [**21**, Proposición 6.2], f_{i_0} es minimal. □

Corolario 5.7. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es continua y $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es minimal. De aquí, por la Observación 2.4, parte (1), $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es minimal. Así, por el Teorema 5.6, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal. □

Lema 5.8. Para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva, entonces $(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y que $f_i \times f_{m+1}$ es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos no vacíos de $(\prod_{i=1}^m X_i) \times X_{m+1}$. De aquí, existen subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de $\prod_{i=1}^m X_i$ y subconjuntos abiertos no vacíos V_1 y V_2 de X_{m+1} tales que, $\mathcal{U}_1 \times V_1 \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_2 \times V_2 \subseteq \mathcal{V}$. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2 de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}(U_i^1 \times V_1) \cap (U_i^2 \times V_2) \neq \emptyset$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $(u_i, v_i) \in U_i^1 \times V_1$ tal que $(f_i \times f_{m+1})^{k_i}((u_i, v_i)) \in U_i^2 \times V_2$. Consecuentemente, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(u_i) \in U_i^2$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in U_i^2$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $k = k_{i_0}$ y $v = v_{i_0}$. Así, $f_{m+1}^k(v) \in V_2$. Esto implica que, $((u_1, \ldots, u_m), v)) \in (\prod_{i=1}^m U_i^1) \times V_1$ y $((\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1})^k(((u_1, \ldots, u_m), v)) \in (\prod_{i=1}^m U_i^2) \times V_2$. Consecuentemente, $((\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1})^k(\mathcal{U}_1 \times V_1) \cap (\mathcal{U}_2 \times V_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times f_{m+1}$ es transitiva. □

Como mencionamos anteriormente, los conjuntos +invariantes juegan un papel muy importante para que el recíproco de varios de los resultados que presentamos en este trabajo se puedan verificar. Veamos por ejemplo la prueba del Teorema 5.9.

Teorema 5.9. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico y sea $\mathcal{M}$ alguna de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, Touhey, dispersora, un F-sistema o suavemente mezclante. Si, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$ y X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, entonces $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$.

Demostración. En toda la prueba estamos suponiendo que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i.

Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es transitiva. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por hipótesis, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Pongamos $k = \max\{k_1,\ldots,k_m\}$. Por el Lema 2.16, tenemos que, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. Esto implica que, $(u_1,\ldots,u_m) \in \prod_{i=1}^m U_i$ y $(f_1^k(u_1),\ldots,f_m^k(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1,\ldots,u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Finalmente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es débilmente mezclante. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2, V_i^1 y V_i^2 de X_i, tales que $\prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \mathcal{U}_1$, $\prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \mathcal{U}_2$, $\prod_{i=1}^m V_i^1 \subseteq \mathcal{V}_1$ y $\prod_{i=1}^m V_i^2 \subseteq \mathcal{V}_2$. Puesto que f_i es débilmente mezclante, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i^j) \cap V_i^j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1,2\}$. Para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea $a_i \in U_i^1$ tal que $f_i^{k_i}(a_i) \in V_i^1$ y $a_i' \in U_i^2$ tal que $f_i^{k_i}(a_i') \in V_i^2$ y pongamos $k = \max\{k_1,\ldots,k_m\}$. Luego, por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^k(a_i) \in V_i^1$ y $f_i^k(a_i') \in V_i^2$. Esto implica que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1,\ldots,a_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i^1$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((a_1',\ldots,a_m')) \in \prod_{i=1}^m V_i^2$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante.

Supongamos que, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es totalmente transitiva, tenemos que, para cualquier $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i^s)^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Esto implica que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^{sk_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Ahora, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, podemos tomar $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{sk_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1,\ldots,k_m\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $f_i^{sk}(u_i) \in V_i$. Así, $(f_1^{sk}(u_1),\ldots,f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m f_i^{sk}(U_i)$ y $(f_1^{sk}(u_1),\ldots,f_m^{sk}(u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Además, por la Observación 2.4, parte (1), tenemos que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1,\ldots,u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}(\prod_{i=1}^m U_i)$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^{sk}((u_1,\ldots,u_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i$. Consecuentemente:

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}((u_1,\ldots,u_m)) \in \left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sk}\left(\prod_{i=1}^m U_i\right)\right) \cap \prod_{i=1}^m V_i.$$

De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es transitiva y como $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es caótica en el sentido de Devaney. Así, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por la primera parte de la prueba de este teorema, tenemos que, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva y por el Teorema 4.6, $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica en el sentido de Devaney.

Supongamos que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, f_i es órbita-transitiva. Así, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (2),

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((x_1,\ldots,x_m), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es órbita-transitiva.

Supongamos que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es estrictamente órbita-transitiva. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(f_i(x_i), f_i)) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (2):

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left((f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Consecuentemente, $\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}\left(\mathcal{O}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)), \prod_{i=1}^m f_i\right)\right) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es estrictamente órbita-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es ω-transitiva. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\omega(x_i, f_i) = X_i$. Por el Teorema 4.3, parte (1), obtenemos que $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es ω-transitiva.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Puesto que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es TT_{++}, tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $k_i \in n_{f_i}(U_i, V_i)$. Así, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_i}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Se sigue que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $u_i \in U_i$ tal que $f_i^{k_i}(u_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(u_i) \in V_i$. De aquí, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((u_1, \ldots, u_m)) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i)$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Ahora, ya que, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $n_{f_i}(U_i, V_i)$ es infinito, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, podemos tomar $k_i' \in n_{f_i}(U_i, V_i)$ tal que $k_i' > k$. Sea $k_1 = \max\{k_1', \ldots, k_m'\}$. Por el Lema 2.16, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^{k_1}(u_i) \in V_i$. Se sigue que, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\prod_{i=1}^m U_i) \cap (\prod_{i=1}^m V_i) \neq \emptyset$. En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $k_1 \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ y $k_1 > k$. Continuando con este proceso, obtenemos que $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un conjunto infinito y como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son arbitrarios, concluimos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es Touhey. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Además, ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es Touhey, tenemos que, para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i, existen un punto periódico $x_i \in U_i$ y $k_i \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f_i^{k_i}(x_i) \in V_i$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Luego, por el Lema 2.16, obtenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i^k(x_i) \in V_i$. Por el Teorema 4.1, parte (3), podemos concluir que, $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es un F-sistema. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es totalmente transitiva y $Per(f_i)$ es denso en X_i. Por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva. Además, por el Teorema 4.6, sabemos que $Per(\prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es un F-sistema.

Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es suavemente mezclante. Sean Y un espacio topológico y $g : Y \to Y$ una función transitiva. Por hipótesis, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \times g$ es transitiva. Así, por el Lema 5.8, $(\prod_{i=1}^m f_i) \times g$ es transitiva. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es suavemente mezclante.

La prueba para las funciones dispersoras es análoga a la prueba dada para funciones suavemente mezclantes. $\square$

Las funciones minimales y totalmente minimales no las incluimos en el enunciado del Teorema 5.9 porque para estas dos condiciones volvemos a requerir la continuidad de la función.

Proposición 5.10. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y f_i es minimal y continua, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal.

Demostración. Supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal y que X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i. Por hipótesis tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es continua. Así, por [**21**, Proposición 6.2], solo hay que verificar que, para todo$(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$,

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Sea $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Ya que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es minimal, obtenemos que $\mathrm{cl}_{X_i}(\mathcal{O}(x_i, f_i)) = X_i$ y puesto que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i, por el Teorema 4.3, parte (2), tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\prod_{i=1}^m X_i}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es minimal. $\square$

Corolario 5.11. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y f_i es totalmente minimal y continua, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i^s es minimal y continua. Así, por la Proposición 5.10, $\prod_{i=1}^m f_i^s$ es minimal. Luego, por la Observación 2.4, parte (1), $(\prod_{i=1}^m f_i)^s$ es minimal. Finalmente, ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente minimal. $\square$

Con la elaboración de este capítulo esperamos, principalmente, que despierte en alguien el interés de seguir engrandeciendo el estudio de propiedades dinámicas de funciones en productos.

Agradecimientos: Los autores agradecemos de manera muy especial al árbitro por las sugerencias hechas para la mejora de nuestro trabajo.

Referencias

[1] Akin, E. y Carlson, J. D. (2012). Conceptions of topological transitivity. *Topology Appl.*, ***159*** (12), 2815-2830.
[2] Akin, E., Auslander, J. y Nagar, A. (2017). Dynamics of induced systems. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***37*** (7), 2034-2059.
[3] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. y Stace, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Month.*, ***99*** (4), 332-334.
[4] Barragán, F., Rojas, A. y Macías, S. (2017). Funciones Especiales Entre Continuos II. En J. Angoa, R. Escobedo y M. Ibarra. (Ed.), *Topolgía y sus aplicaciones 5* (pp. 3-23). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial.
[5] Barragán, F. y Rojas, A. (2019). Nociones relacionadas con la transitividad topológica. En J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra y A. Contreras (Ed.), *Topología y sus aplicaciones 7* (pp. 125-142). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección General de Publicaciones.
[6] Bauer, W. y Sigmund, K. (1975). Topological Dynamics of Transformations Induced on the Space of Probability Measures. *Monatsh. Math.*, ***79***, 81-92.
[7] Bilokopytov, E. y Kolyada, S. F. (2014). Transitive Maps on Topological Spaces. *Ukr. Math. J.*, ***65*** (9), 1293-1318.
[8] Birkhoff, G. D. (1912). Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. *B. Soc. Math. Fr.*, ***40***, 305-323.
[9] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 9. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
[10] Blanchard, F., Host, B. y Maass, A. (2000). Topological complexity. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.*, ***20*** (3), 641-662.
[11] Charatonik, J. J. (1964). Confluent mappings and unicoherence of continua. *Fund. Math.*, ***56*** (2), 213-220.
[12] Değirmenci, N. y Koçak, Ş. (2010). Chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***34*** (4), 593-600.
[13] Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City: Addison-Wesley.
[14] Fréchet, M. (1910). Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann.*, ***68***, 145-168.

[15] Furstenberg, H. (1967). Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation. *Math. Syst. Theory*, ***1*** (1), 1-50.

[16] Gottschalk, W. y Hedlund, G. (1955). *Topological Dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. 36. Providence: American Mathematical Society.

[17] King, J. y Méndez, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México: Prensa de Ciencias.

[18] Kwietniak, D. (2005). Exact Devaney Chaos and Entropy. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, ***6*** (1), 169-179.

[19] Li, T. Y. y Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***82*** (10), 985-992.

[20] Li, R. y Zhou, X. (2013). A note on chaos in product maps. *Turk. J. Math.*, ***37*** (4), 665-675.

[21] Mai, J. H. y Sun, W. H. (2010). Transitivities of maps of general topological spaces. *Topology Appl.*, ***157*** (5), 946-953.

[22] Mangang, K. B. (2017). Li-Yorke chaos in product dynamical systems. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, ***12*** (1), 81-88.

[23] Moore, R. L. (1924). Concerning Upper Semi-Continuous Collections of Continua. *Trans. Amer. Soc.*, ***27*** (4), 416-428.

[24] Rojas, A., Barragán, F. y Macías, S. (2020). Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products. *Turk. J. Math.*, ***44*** (2), 491-523.

[25] Rojas, A. (2017). *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados* (Tesis de Maestría). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, Oaxaca, México. `http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/13228.pdf`

[26] Touhey, P. (1997). Yet Another Definition of Chaos. *Amer. Math. Month.*, ***104*** (5), 411-414.

[27] Weyl, H. (1913). *Die Idee der Riemannachen Flache*, Leipzig: Teubner; tercera edición totalmente revisada, Stuttgart: Teubner, 1955; nueva edición por R. Remmert, Leipzig/Stuttgart: Teubner, 1997.

[28] Wu, X. y Zhu, P. (2012). Devaney chaos and Li-Yorke sensitivity for product systems. *Stud. Sci. Math. Hung.*, ***49*** (4), 538-548.

Correos electrónicos:

`franco@mixteco.utm.mx` (Franco Barragán),
`anacarrasco.rr@gmail.com` (Anahí Rojas).

Capítulo 9

Espacios débilmente compactos: separabilidad y compacidad

Ángel Rafael Barranco Carrasco y Luis Enrique Aponte Pérez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Un espacio topológico X tiene celularidad numerable; lo cual se denota $c(X) \leqslant \omega$, si toda familia de conjuntos abiertos y ajenos por pares de X es a lo más numerable, también es usual decir que un espacio X es ccc si el espacio satisface que $c(X) \leqslant \omega$. No es difícil verificar que todo espacio separable tiene celularidad numerable. Es bien sabido que el Axioma de Martin (MA) junto con la negación de la Hipótesis del Continuo ($\neg$CH) implican la Hipótesis de Suslin; esto es, que si uno asume MA + $\neg$CH, entonces todo espacio ordenable con celularidad numerable es separable.

El problema siguiente es planteado por Hajnal y Juhász (vea [**7**]).

Problema 1.1. Suponga MA + $\neg$CH. ¿Para qué clases de espacios son equivalentes las propiedades de separabilidad y el tener celularidad numerable?

Esta interrogante ha sido estudiada por diversos autores, particularmente en la década de los años 70's, y en la actualidad existen diversos resultados que responden parcialmente al problema anterior; por citar algunos:

- ([**12**]) (MA + $\neg$CH). Sea X un espacio compacto y T_2. Si cualquier subespacio discreto de X es a lo más numerable, entonces X es hereditariamente separable.
- ([**7**]) (MA + $\neg$CH). Sea X un espacio base–compacto y regular, con $c(X) \leqslant \omega$ y tal que:
  a) Cualquier subespacio cerrado de X es base–compacto;
  b) $\chi(X) = \alpha$ y $\alpha^+ < 2^\omega$.
  Entonces X es separable.
- ([**13**]) (MA + $\neg$CH). Sea X un espacio Tychonoff tal que X es la intersección de κ abiertos de βX, con $\kappa < 2^\omega$, y $c(X) \leqslant \omega$. Si $(\chi(X))^+ < 2^\omega$, entonces X es separable.
- ([**9**]) (MA + $\neg$CH). Si X es tal que
  a) Cualquier subespacio cerrado de X es π–completo;
  b) $c(X) \leqslant \omega,\ t(X)^+ < 2^\omega$, y
  c) $\pi\chi(p, X) < 2^\omega$ para cada $p \in X$.
  Entonces X es separable.

Vale la pena comentar que este último resultado (debido a Juhász), generaliza a varios de los que se han obtenido sobre el problema en cuestión.

En [**11**], Porter y Woods obtienen diversos resultados sobre la clase de los espacios que son débilmente compactos, entre otros, ellos demuestran que todo espacio débilmente compacto y perfecto tiene celularidad numerable (vea Proposición 4.2, en nuestro trabajo). De modo que una pregunta natural, planteada por Porter y Woods en el artículo citado, es la siguiente.

PROBLEMA 1.2. ¿Es cierto que, bajo (MA + ¬CH), todo espacio débilmente compacto, RC–perfecto es separable?

Hasta el momento los autores no conocemos una respuesta; sin embargo, el resultado principal de este trabajo, Teorema 4.15, da una respuesta parcial y afirmativa a dicha interrogante.

El material que exponemos en el presente trabajo está basado en la obra [**11**]; no obstante, no es solo una exposición detallada del mismo. En la Sección 3, se introduce la clase de los espacios débilmente compactos y se establecen, principalmente, algunas caracterizaciones de éstos. En la Sección 4, nos centramos en el problema planteado por Porter y Woods, de modo que el material presentado en esta sección, está formado por los resultados que conducen a la obtención del resultado principal, el Teorema 4.15.

Cabe mencionar que la teoría de los espacios débilmente compactos aún continua desarrollándose, como se puede verificar en [**1**], y en [**6**].

2. Preliminares

En el presente trabajo seguimos las notaciones y definiciones de [**10**] sobre Teoría de Conjuntos. El lector interesado en la temática del Axioma de Martin puede verificar el capítulo correspondiente en dicho texto ([**10**]).

Recordemos que para un conjunto S cualquiera, $|S|$ denota el número cardinal de S. Escribiremos ω para denotar el menor ordinal y cardinal numerable, ω_1 denotará el primer ordinal y cardinal no numerable. Además se usará $\mathfrak{c}$ ó 2^ω para denotar el cardinal $|\mathcal{P}(\omega)|$. Dado un conjunto A y un cardinal κ, $[A]^\kappa$ denota el conjunto $\{B \in \mathcal{P}(A) : |B| = \kappa\}$, similarmente, $[A]^{<\kappa}$ denota el conjunto $\{B \in \mathcal{P}(A) : |B| < \kappa\}$.

Una familia $\mathcal{C} \subseteq S$, donde S es un conjunto cualquiera, tiene la propiedad de la intersección finita si para toda subfamilia finita $\mathcal{C}'$ no vacía de $\mathcal{C}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. También se dice que $\mathcal{C}$ cumple la PIF.

Las notaciones y definiciones sobre Topología General son las empleadas en [**3**]. Para comodidad del lector, a continuación presentamos algunas nociones de Topología que pudieran no ser tan comunes y que serán empleadas con mucha frecuencia en este trabajo. X denota a un espacio topológico. V es una vecindad abierta de x, con $x \in X$, si V es un conjunto abierto que contiene a x.

Como es usual, un conjunto $E \subseteq X$ es denso en X si $\mathrm{cl}_X E = X$. Un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto numerable y denso en X.

Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, se dice que $\mathcal{C}$ es localmente finita si para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x de x tal que el conjunto $\{C \in \mathcal{C} : C \cap V_x \neq \emptyset\}$ es finito.

Dados $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $x \in X$, diremos que x es un punto límite de $\mathcal{C}$ si para cada vecindad V_x de x, se cumple que $|\{C \in \mathcal{C} : C \cap V_x \neq \emptyset\}| \geqslant \omega$.

En adelante y mientras no se diga lo contrario, entendemos por espacio o espacio topológico, a un espacio que tiene la propiedad de ser T_3.

Dado un espacio topológico (X, τ), definimos lo siguiente:

1. X es perfecto si cada abierto de X se puede escribir como una unión numerable de cerrados de X (equivalentemente si todo cerrado de X se puede escribir como una intersección numerable de abiertos de X). Además, el espacio se dirá perfectamente normal si es perfecto y normal.

2. $A \subseteq X$ se llama cerrado regular si es la cerradura de algún abierto.
3. El espacio se dice RC–perfecto si cada abierto de X se puede escribir como una unión numerable de cerrados regulares de X.
4. $A \subseteq X$ se dice ser un conjunto G_λ de X, con λ un cardinal, si es la intersección de λ abiertos de X. En particular si $\delta = \omega$, diremos que A es un conjunto G_δ.
5. Un espacio Hausdorff X es H–cerrado si para cualquier, Y, espacio Hausdorff que contiene a X se cumple que X es cerrado en Y.

Las siguientes propiedades sobre los espacios H–cerrados, serán de utilidad más tarde en el Ejemplo 4.7, la demostración se puede encontrar en la referencia [**14**].

Lema 2.1. Sea X un espacio topológico, no necesariamente T_3, entonces

1. X es H–cerrado si y solo si toda cubierta abierta de X contiene una subcolección finita cuya unión es densa en X.
2. Si X es H–cerrado, entonces es regular si y solo si X es compacto.

Enseguida presentamos algunas funciones cardinales que serán empleadas en el trabajo, particularmente en el Teorema 4.15. El lector interesado en esta temática puede consultar [**8**].

Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces:

1. Una π–base de X es una colección $\mathcal{V}$ de abiertos, no vacíos, en X tal que si U es un abierto (no vacío) en X, entonces $V \subseteq U$ para algún $V \in \mathcal{V}$.

   El π–peso de X, denotado por $\pi w(X)$, se define como:
$$\text{mín}\,\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es } \pi\text{–base de } X\} + \omega.$$
2. Si $p \in X$, entonces $\mathcal{V} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ es una π–base local para p en X si para cada vecindad abierta de U de p, sucede que $V \subseteq U$ para algún $V \in \mathcal{V}$.

   Con esto, $\pi\chi(p, X)$ será el cardinal siguiente:
$$\text{mín}\,\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es } \pi\text{–base local para } p \text{ en } X\}\,.$$
   El π–carácter de X, denotado por $\pi\chi(X)$ es:
$$\sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$
3. Para cada $p \in X$, definimos el siguiente cardinal $\chi(p, X)$ como:
$$\text{mín}\,\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es base local para } p \text{ en } X\}\,.$$
   Con esto, el carácter de X, que se denota como $\chi(X)$, es el cardinal siguiente:
$$\sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$
4. Ahora, si $p \in X$, se define
$$\begin{aligned} t(p, X) = \text{mín}\{\kappa :\ & \text{para cada } Y \subseteq X \text{ con } p \in \text{cl}_X Y, \\ & \text{existe } A \subseteq Y \text{ con } |A| \leqslant \kappa \text{ y } p \in \text{cl}_X A\}. \end{aligned}$$
   Luego, se tiene el cardinal $t(X)$ como:
$$\sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

3. Espacios débilmente compactos

Para iniciar introduciremos la clase de espacios que son la principal parte de estudio del presente.

Definición 3.1. Un espacio topológico X es débilmente compacto si cada familia localmente finita de abiertos de X es finita.

Caracterizaremos esta noción con el siguiente resultado.

Proposición 3.2. Para un espacio topológico X, son equivalentes:

a) X es débilmente compacto.
b) Si $\mathcal{C}$ es una colección numerable de abiertos que cumple la PIF, entonces
$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}_X C \neq \emptyset.$$
c) Si $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta numerable de X, entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}$ tal que
$$X = \bigcup_{C\in\mathcal{J}} \mathrm{cl}_X C.$$
d) Cada familia infinita de abiertos no vacíos ajenos dos a dos tiene un punto límite.

Demostración.
a) $\Rightarrow$ **b)**] Supongamos que existe una familia numerable de abiertos, $\mathcal{A}$, que cumple la PIF pero que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A = \emptyset$. Enumeramos a $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Usando recursión construiremos una sucesión de abiertos, $\mathcal{C}$. Primero, si $C_1 = A_1$ y, dado $n \in \mathbb{N}$ elegimos $C_{n+1} = C_n \cap A_{n+1}$, tenemos una sucesión decreciente $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$. Observemos que cada C_i, al ser una intersección finita de abiertos es abierto. También, cada C_i es no vacío pues $\mathcal{A}$ cumple la PIF. Además notemos que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}_X C = \emptyset$ ya que $\mathrm{cl}_X C_i \subseteq \mathrm{cl}_X A_i$ con lo cual $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}_X C \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A$. Lo anterior implica que para cada $x \in X$, $x \notin \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}_X C$, es decir existe $i_x \in \mathbb{N}$ para el cual $x \notin \mathrm{cl}_X C_{i_x}$.

Afirmación: $\mathcal{C}$ no es finita. En efecto, si $\mathcal{C}$ es finita, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geqslant n_0$, $C_n = C_{n_0}$. Por construcción, $C_{n_0} \subseteq A_n \subseteq \mathrm{cl}_X A_n$ para cada $n \leqslant n_0$; también, por la elección de n_0, si $n > n_0$, $C_{n_0} = C_n \subseteq A_n \subseteq \mathrm{cl}_X A_n$. Con esto, $C_{n_0} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A$, pero $C_{n_0} \neq \emptyset$, así que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis.

Afirmamos que $\mathcal{C}$ es localmente finita. En efecto, dado $x \in X$, el conjunto $V_x = X \setminus \mathrm{cl}_X C_{i_x}$, es una vecindad de x tal que para $i \geqslant i_x$, $V_x \cap C_i = \emptyset$; de lo contrario existe $y \in C_j \cap V_x$ para algún $j \geqslant i_x$, pero $y \notin C_{i_x}$ lo cual contradice que $C_{i_x} \supseteq C_j$. De lo anterior se tiene que $|\{C_i \in \mathcal{C} : C_i \cap V_x \neq \emptyset\}| \leqslant i_x$, es decir, se tiene que en efecto $\mathcal{C}$ es localmente finita.

Así que hemos encontrado una familia localmente finita de abiertos que no es finita, esto contradice el supuesto de que X es débilmente compacto.

b) $\Rightarrow$ **c)**] Sea $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ una cubierta abierta numerable de X. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $A_i = X \setminus \bigcup_{j=1}^{i}(\mathrm{cl}_X C_j)$ y denotemos $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Así, $\mathcal{A}$ es un familia numerable de abiertos. Notemos $\mathcal{A}$ es decreciente, pues, si $i < j$, entonces $\bigcup_{k=1}^{i}(\mathrm{cl}_X C_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{j}(\mathrm{cl}_X C_k)$. Observemos, además, que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(X \setminus \mathrm{cl}_X A)$, pues si $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$, entonces $y \in C_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y también $C_i \cap A_i = C_i \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \mathrm{cl}_X C_j) = C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \mathrm{cl}_X C_j = \emptyset$, pues $C_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{i} \mathrm{cl}_X C_j$, así que $y \notin \mathrm{cl}_X A_i$, con lo cual $y \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(X \setminus \mathrm{cl}_X A)$.

Tomando complementos de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(X \setminus \mathrm{cl}_X A)$ y recordando que $\mathcal{C}$ es cubierta abierta de X, se sigue que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A = \emptyset$; luego, $\mathcal{A}$ no cumple la PIF, de lo contrario, por b), debe suceder que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A}$ no cumple la PIF, existe $\mathcal{J}_0 \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ para el cual $\bigcap \mathcal{J}_0 = \emptyset$, digamos que $\mathcal{J}_0 = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$, entonces ya que la sucesión $\mathcal{A}$ es decreciente, si $r = \text{máx}\{i_1, \ldots, i_k\}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{J}_0 = \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = A_r = \emptyset$. Así, por construcción $A_r = X \setminus \bigcup_{j=1}^{r}(\mathrm{cl}_X C_j) = \emptyset$, por tanto elegimos $\mathcal{J} = \{C_1, \ldots C_r\}$ y por lo anterior cumple que $\bigcup_{C\in\mathcal{J}} \mathrm{cl}_X C = \bigcup_{j=1}^{r}(\mathrm{cl}_X C_j) = X$.

c) $\Rightarrow$ **d)**] Supongamos que existe una familia infinita $\mathcal{C}$ de abiertos no vacíos ajenos dos a dos que no tiene puntos límite. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{C}$ es numerable, enumerando a $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$. Como ningún punto de X es un punto límite de $\mathcal{C}$, entonces para cada $x \in X$, existe V_x, vecindad abierta de x, tal que V_x solo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$; así, el conjunto $F(x) = \{i \in \mathbb{N} : V_x \cap C_i \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{N}$ es finito para cada $x \in X$.

Ahora, si $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, definimos $A(F) = \bigcup\{V_x : x \in X \text{ y } F = F(x)\}$, cada $A(F)$ es claramente abierto y además $\mathcal{A} = \{A(F) : F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$ es una cubierta abierta numerable de X, así que por c) existe $\mathcal{J} = \{F_1, \ldots, F_k\} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ para el cual $X = \bigcup_{F\in\mathcal{J}} \mathrm{cl}_X A(F)$.

Afirmación: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n \cap \bigcup_{j=1}^{k} A(F_j) = \emptyset$. En efecto, si existe $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \bigcup \mathcal{J}$ tal que $C_{k_0} \cap \bigcup_{j=1}^{k} A(F_j) \neq \emptyset$, entonces, sea $p \in C_{k_0} \cap \bigcup_{j=1}^{k} A(F_j)$, luego, para alguna $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p \in C_{k_0} \cap A(F_i)$. Por definición existe $q \in X$ para el cual $p \in V_q$ con $F_i = F(q)$. Ya que $k_0 \notin F_i = F(q)$, entonces por la definición de $F(q)$ se sigue que $V_q \cap C_{k_0} = \emptyset$, lo cual contradice que $p \in V_q \cap C_{k_0}$. Por tanto, queda probada la afirmación.

Fijemos $n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup \mathcal{J}$ cualquiera. Ya que $C_n \neq \emptyset$, si $y \in C_n$ fijo, entonces $y \notin \mathrm{cl}_X(\bigcup_{F \in \mathcal{J}} A(F))$ pues C_n es una vecindad abierta de y que no cumple la definición. Como $\mathcal{J}$ es finito, entonces $\bigcup_{F \in \mathcal{J}} \mathrm{cl}_X A(F) = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{F \in \mathcal{J}} A(F))$. Por tanto $\bigcup_{F \in \mathcal{J}} \mathrm{cl}_X A(F) \neq X$, lo cual es una contradicción a c).

d) $\Rightarrow$ **a)**] Supongamos que no sucede a), entonces existe una familia $\mathcal{C}$ de abiertos localmente finita que no es finita, sin pérdida de generalidad supongamos que $|\mathcal{C}| = \omega$, enumeremos a $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sean $n_1 = 1$ y $x_1 \in C_1$, existe V_1 vecindad abierta de x_1 que intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, digamos que son $\{C_{k_1}, \ldots, C_{k_l}\}$ considerando ahora $n_2 = \text{máx}\{k_1, \ldots k_l\}+1$ tenemos que, para cada $n \geqslant n_2$, $V_1 \cap C_n = \emptyset$.

Para n_2 elegimos $x_2 \in C_{n_2}$ y, V_2, una vecindad abierta de x_2 que intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, similar al argumento anterior encontramos n_3 para el cual $V_2 \cap C_n = \emptyset$ para cada $n \geqslant n_3$; notemos que $n_3 > n_2$ por la elección de n_3 y porque $x_2 \in C_{n_2} \cap V_2$. Usando recursión construimos una sucesión creciente de naturales $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$, una sucesión de abiertos $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ y un subconjunto de $\mathcal{C}$ que es $\{C_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$.

A partir de lo anterior, construimos una familia, $\mathcal{G}$, de abiertos en X de la siguiente forma. Consideremos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $G_i = V_i \cap C_{n_i}$, y sea $\mathcal{G} = \{G_i : i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que, por construcción, $\mathcal{G}$ es una colección infinita de abiertos.

Afirmamos que $\mathcal{G}$ es localmente finita. Efectivamente pues si $x \in X$, entonces existe una vecindad, V_x, de x que intersecta solo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, supongamos que intersecta algunos de los C_{n_i}, entonces ya que $G_i \subseteq C_{n_i}$, se sigue que solo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{G}$.

También, afirmamos que los elementos de la familia $\mathcal{G}$ son ajenos dos a dos. En efecto, pues si existiera $x \in G_i \cap G_j$, entonces $x \in V_i \cap C_{n_i}$ y $x \in V_j \cap C_{n_j}$, sin perdida de generalidad si $i < j$, entonces sabemos que $V_i \cap C_n = \emptyset$ para $n \geqslant n_{i+1} > n_i$ y $n_j \geqslant n_{i+1}$ con lo cual $V_i \cap C_{n_j} = \emptyset$ lo cual contradice que $x \in V_i \cap C_{n_j}$.

Finalmente hemos exhibido una familia infinita $\mathcal{G}$ de abiertos no vacíos ajenos dos a dos, pero, ya que $\mathcal{G}$ es localmente finita entonces no podría existir $p \in X$ tal que cada vecindad de p intersecte una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{G}$, esto contradice d). $\square$

Definición 3.3. Un espacio topológico X es pseudocompacto si para cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$, f es acotada, es decir, $f[X] \subseteq [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Nota 3.4. Cabe aclarar que para fines de este trabajo, no es necesario que X sea un espacio Tychonoff para poder ser pseudocompacto.

Proposición 3.5. Para un espacio topológico X se cumple lo siguiente:

1. Si X es débilmente compacto entonces es pseudocompacto.
2. Si X es Tychonoff entonces es débilmente compacto si y solo si es pseudocompacto.

Demostración. 1] Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua, consideremos la familia de abiertos siguiente: $\mathcal{C} = \{f^{-1}[(z-1, z+1)] : z \in \mathbb{Z}\}$, veamos que es localmente finita. Sea $x \in X$, entonces $f(x) \in \mathbb{R}$. Fijemos $z_x \in \mathbb{Z}$ para el cual $f(x) \in (z_x - 1, z_x + 1)$. Como f es continua, entonces $V_x = f^{-1}[(z_x - 1, z_x + 1)]$ es una vecindad abierta de x; no es difícil ver que $\{C \in \mathcal{C} : V_x \cap C \neq \emptyset\}$ es finito pues de hecho $V_x \cap f^{-1}[(z-1, z+1)] = \emptyset$ para $z \in \mathbb{Z} \setminus \{z_x - 1, z_x, z_x + 1\}$. Se sigue así que $\mathcal{C}$ es localmente finita. Notemos que por el argumento inicial, $\mathcal{C}$ es claramente un cubierta abierta de X.

Dado que X es débilmente compacto, entonces $\mathcal{C}$ debe ser finita, digamos $\mathcal{C} = \{f^{-1}[(z_0 - 1, z_0 + 1)], \ldots, f^{-1}[(z_k - 1, z_k + 1)]\}$ entonces tomando $n_0 =$

mín$\{z_0 - 1, \ldots, z_k - 1\}$ y n_1 =máx$\{z_0 + 1, \ldots, z_k + 1\}$ se sigue que $f[X] \subseteq [n_0, n_1]$. En efecto, si $x \in X$, entonces por ser $\mathcal{C}$ una cubierta finita, $x \in \bigcup_{j=0}^{k} f^{-1}[(z_j - 1, z_j + 1)]$, luego, $f(x) \in \bigcup_{j=0}^{k}(z_j - 1, z_j + 1) \subseteq [n_0, n_1]$. Se tiene así la afirmación y con ello que f es acotada. Así, X es pseudocompacto.

2] $\Leftarrow$] Supongamos que no se cumple que X sea débilmente compacto, así que existe una familia infinita de abiertos no vacíos ajenos dos a dos que no tiene puntos límite (usando la parte d) de la proposición anterior), se sigue que la familia es localmente finita. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que la familia es numerable, digamos $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dado que X es Tychonoff, para cada $i \in \mathbb{N}$ fijamos $x_i \in C_i$, entonces, existe una función continua $g_i : X \to [0,1]$ tal que $g_i(x_i) = 0$ y $g_i[X \setminus C_i] \subseteq \{1\}$; ahora, la función $h_i : [0,1] \to [0,i]$ dada por $h(x) = i - ix$ es claramente continua, así que $f_i = h_i \circ g_i$ es continua, y $f_i(x_i) = i$, y $f_i[X \setminus C_i] \subseteq 0$. Consideremos a la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$. Veamos que f es continua y no acotada.

Sea $x \in X$, entonces si $x \in C_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) = f_i(x)$ pues $f_j(x) = 0$ para $j \neq i$ ya que $x \notin C_j$ pues los abiertos son ajenos dos a dos, en el caso que $x \notin C_i$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = 0$ por la elección de las f_i; con ello se sigue la continuidad de f a partir de la continuidad de las f_i. El hecho de que f no es acotada es claro, pues, si $a \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant a$, basta considerar a $x_n \in C_n$ y por lo anterior $f(x_n) = n > a$. Por tanto X no es pseudocompacto. □

Como veremos en el siguiente, la propiedad de ser débilente compacto se hereda a conjuntos cerrados regulares.

Proposición 3.6. Un subconjunto cerrado regular de un débilmente compacto es débilmente compacto.

Demostración. Sean X un espacio débilmente compacto y $A \subseteq X$, cerrado regular. Entonces $A = \mathrm{cl}_X G$, para algún conjunto abierto, G, de X. Supongamos que A no es débilmente compacto, luego, existe una familia infinita $\mathcal{C}$ de abiertos no vacíos en A y ajenos dos a dos que no tiene puntos límite, se sigue que entonces la familia es localmente finita. Como cada $C \in \mathcal{C}$ es abierto en A, entonces $C = A \cap G_C$ donde G_C es un abierto de X. Consideremos a $\mathcal{C}' = \{G \cap G_C : C \in \mathcal{C}\}$, observamos que $\mathcal{C}'$ es una familia de abiertos en X.

Afirmación: $\mathcal{C}'$ es localmente finita. En efecto, sea $x \in X$, si $x \in A$, entonces existe V_x vecindad abierta de x en A que interseca solo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$ pues ésta es localmente finita, digamos que a los que intersecta son $\{C_1, \ldots, C_n\}$; si $V_x = A \cap U_x$ donde U_x es abierto en X, podemos verificar que $\{G \cap G_C \in \mathcal{C} : U_x \cap (G \cap G_C) \neq \emptyset\} \subseteq \{G \cap G_{C_1}, \ldots, G \cap G_{C_n}\}$ con lo cual tenemos una vecindad abierta de x en X que intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}'$. Si $x \notin A$, entonces existe U_x vecindad abierta de x en X tal que $U_x \cap G = \emptyset$, así, tenemos que $\{G \cap G_C \in \mathcal{C} : U_x \cap (G \cap G_C) \neq \emptyset\} = \emptyset$, con lo cual este último conjunto también es finito. Por lo tanto $\mathcal{C}'$ es localmente finita.

De lo anterior y el hecho de que X es débilmente compacto, se tiene que $\mathcal{C}'$ es una familia finita de abiertos en X.

Ahora, si $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ está dada por $\varphi(C) = G \cap G_C$ tenemos que si $\varphi(C_1) = G \cap G_{C_1} = G \cap G_{C_2} = \varphi(C_2)$, entonces ya que $G \subseteq A$ se tiene que $G \cap G_{C_1} = G \cap (A \cap G_{C_1}) = G \cap C_1$ y de manera similar $G \cap G_{C_2} = G \cap C_2$ así que $G \cap C_1 = G \cap C_2$; notemos que $G \cap C_1 \neq \emptyset$ pues C_1 es no vacío, si $z \in C_1 = A \cap G_{C_1}$ se tiene que $z \in A = \mathrm{cl}_X G$, así que por definición $G_{C_1} \cap G \neq \emptyset$ y $G_{C_1} \cap G = G \cap C_1$; finalmente, supongamos que $C_1 \neq C_2$, por ser ajenos dos a dos los elementos de $\mathcal{C}$, tenemos que para $y \in G \cap C_1 = G \cap C_2$ ocurre que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ lo cual es imposible, por lo cual debe ocurrir que $C_1 = C_2$, demostrando así que φ es inyectiva y con ello $|\mathcal{C}| \leqslant |\mathcal{C}'|$, por tanto $\mathcal{C}$ es finita y esto contradice la elección de que $\mathcal{C}$ fuera infinita, con lo cual se concluye que A debe ser débilmente compacto. □

4. Compacidad débil y separabilidad

En la presente sección centraremos nuestra atención en los puntos siguientes:

a) El Problema 1.2. En este punto, con el Teorema 4.15, daremos una respuesta parcial y afirmativa.
b) Dar una respuesta a la siguiente cuestión natural: ¿Bajo qué condiciones un espacio débilmente compacto es compacto? (Vea Teorema 4.8)

El material expuesto en la presente sección es esencial para la obtención de los teoremas 4.8 y 4.15.

Es bien sabido que, si X es un espacio compacto y T_1, y si $\{p\}$ es un conjunto G_δ de X, con $p \in X$, entonces p tiene una base local numerable (vea [**8**]). El siguiente resultado es una generalización de este hecho.

Proposición 4.1. Sea p un punto del espacio débilmente compacto X. Si $\{p\}$ un conjunto G_δ de X, entonces p tiene una base local numerable.

Demostración. Como $\{p\}$ es un conjunto G_δ, entonces $\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde, para cada $n \in \omega$, U_n es abierto en X. Empleando recursión vamos a construir una sucesión de abiertos $\mathcal{V}$. Primero, sea $V_0 = U_0$; dado V_n, como X es regular entonces existe un abierto, U'_{n+1}, de X, tal que $p \in U'_{n+1} \subseteq \mathrm{cl}_X U'_{n+1} \subseteq V_n$ tomando $V_{n+1} = U_{n+1} \cap U'_{n+1}$. Así, se tiene la sucesión $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$.

Afirmación: $\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X V_n$. En efecto, la contención $\{p\} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} V_n$ se sigue por la elección de los V_n. Ahora, ya que claramente $V_n \subseteq U_n$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{p\}$, teniendo así la otra contención. Para concluir la afirmación, notemos que, para cada $n \in \omega$, $\mathrm{cl}_X V_{n+1} \subseteq V_n$, pues $\mathrm{cl}_X V_{n+1} = \mathrm{cl}_X(U_{n+1} \cap U'_{n+1}) \subseteq \mathrm{cl}_X U'_{n+1}$ y éste último es subconjunto de V_n por construcción; se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X V_n$.

Finalmente, afirmamos que $\mathcal{V}$ es la base local buscada. En efecto, sea W una vecindad abierta de p en X, dado que X es T_3, existe un abierto, W', de X, tal que $p \in W' \subseteq \mathrm{cl}_X W' \subseteq W$. Claramente $X = W' \cup (\bigcup_{n\in\omega}(X \setminus \mathrm{cl}_X V_n))$, como X es débilmente compacto, por *c*) de la Proposición 3.2 existe $J \in [\omega]^{<\omega}$ para el cual $X = \mathrm{cl}_X(W' \cup (\bigcup_{n\in J} X \setminus \mathrm{cl}_X V_n))$. Sea $r =$máx$\{k : k \in J\}$ se tiene que $\bigcup_{n\in J} X \setminus \mathrm{cl}_X V_n = X \setminus \mathrm{cl}_X V_r$, así que $X = \mathrm{cl}_X(W') \cup \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X V_r)$, ya que $\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X V_r) \subseteq \mathrm{cl}_X(X \setminus V_r) = X \setminus V_r$ entonces $X = \mathrm{cl}_X(W') \cup (X \setminus V_r)$, con ello $V_r \subseteq \mathrm{cl}_X W' \subseteq W$, lo cual queríamos probar . □

Proposición 4.2. Un espacio débilmente compacto y perfecto tiene celularidad numerable.

Demostración. Supongamos que existe una colección no numerable de abiertos de X no vacíos y ajenos dos a dos, $\mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{U}$ tiene cardinalidad ω_1; entonces $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Consideremos $H = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha) \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$; notemos que $H \neq \emptyset$, en efecto como X es débilmente compacto, existe $p \in X$ punto límite de $\mathcal{U}$, esto implica que $p \in \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)$, notemos que para cada $\alpha < \omega_1$, $p \notin U_\alpha$, de lo contrario se contradice que los U_α son ajenos dos a dos, con ello $p \in H$.

Observemos que H es cerrado, pues $X \setminus H = X \setminus (\mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha) \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha) = (X \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)) \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)$ es claramente abierto. Como X es perfecto, existe una sucesión numerable de abiertos $\{W_n : n \in \omega\}$ tal que $H = \bigcap_{n\in\omega} W_n$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión es decreciente, pues si no lo fuera basta tomar $W'_0 = W_0$ y $W'_{n+1} = W'_n \cap W_{n+1}$ y es claro que $\bigcap_{n\in\omega} W'_n = \bigcap_{n\in\omega} W_n$, además que $\{W'_n : n \in \omega\}$ sí es decreciente.

Para cada $n \in \omega$, $S_n = \{\alpha < \omega_1 : U_\alpha \setminus \mathrm{cl}_X W_n \neq \emptyset\}$.

Afirmación: Para cada $n \in \omega$, S_n es finito. Si S_k no es finito, para alguna $k \in \omega$, entonces $\mathcal{C} = \{U_\alpha \setminus \mathrm{cl}_X W_k : \alpha \in S_k\}$ es una colección infinita de abiertos no vacíos. Notemos que $\mathcal{C}$ es localmente finita, en efecto, sea $x \in X$, si $x \in U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 < \omega_1$ entonces U_{α_0} es una vecindad de x que, para cada $\beta < \omega_1$ y $\beta \neq \alpha_0$, cumple que $(U_{\alpha_0}) \cap (U_\beta \setminus \mathrm{cl}_X W_k) = \emptyset$, pues los elementos de $\mathcal{U}$ son ajenos dos a dos.

Supongamos que, para cada $\alpha < \omega_1$, $x \notin U_\alpha$. Si $x \in \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)$, entonces, $x \in H$, así que para cada $n \in \omega$, $x \in W_n$, en particular, $x \in W_k$. Luego, es claro que W_k es una vecindad abierta de x tal que, para cada $\alpha \in S_k$, $W_k \cap (U_\alpha \setminus \mathrm{cl}_X W_k) = \emptyset$. Por último, si $x \notin \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)$, entonces $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)$. Notemos que para cada $\alpha \in S_k$, $(X \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha)) \cap (U_\alpha \setminus \mathrm{cl}_X W_k) = \emptyset$.

Con esto, en cada caso, hemos exhibido una vecindad abierta para cada $x \in X$ que hace que $\mathcal{C}$ sea localmente finita, pero es infinita y esto contradice que X es débilmente compacto. Queda así probada la afirmación.

Empleando recursión, vamos a construir una sucesión de abiertos, $\mathcal{V}$. Puesto que ω_1 es regular, existe $\delta \in \omega_1 \setminus \bigcup_{n\in\omega} S_n$. Notemos que $U_\delta \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X W_n$. Por la regularidad de X, para $y \in U_\delta$ fijo, existe V_0 abierto no vacío de X tal que $y \in V_0 \subseteq \mathrm{cl}_X V_0 \subseteq U_\delta$; claramente $V_0 \cap W_0 \neq \emptyset$ pues $y \in \mathrm{cl}_X W_0$. También $V_0 \cap W_0 \cap W_1$ es denso en $V_0 \cap W_0$ ya que, si G es un abierto de X y $G \cap (V_0 \cap W_0)$ es un abierto no vacío de $V_0 \cap W_0$, entonces $[G \cap (V_0 \cap W_0)] \cap (V_0 \cap W_0 \cap W_1) = (G \cap V_0) \cap (W_0 \cap W_1) \neq \emptyset$ pues $\emptyset \neq G \cap V_0 \cap W_0 \subseteq V_0 \subseteq U_\delta \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X W_n$. Así que, usando la regularidad de X, escogemos un abierto, V_1, de X tal que $\emptyset \neq \mathrm{cl}_X V_1 \subseteq V_0 \cap W_0$, y como $\mathrm{cl}_X V_1 = (\mathrm{cl}_X V_1) \cap (V_0 \cap W_0) = \mathrm{cl}_{V_0\cap W_0} V_1 = \mathrm{cl}_{V_0\cap W_0}(V_1 \cap (V_0 \cap W_0 \cap W_1)) = \mathrm{cl}_X((V_1 \cap W_1) \cap (V_0 \cap W_0)) \cap (V_0 \cap W_0) \subseteq \mathrm{cl}_X(V_1 \cap W_1)$, se sigue que $\mathrm{cl}_X(V_1 \cap W_1)$ es no vacío y claramente $\mathrm{cl}_X(V_1 \cap W_1) \subseteq \mathrm{cl}_X V_1 \subseteq V_0 \cap W_0$.

De esta manera tenemos la sucesión $\mathcal{V}$, dada como: $\mathcal{V} = \{V_i : i \in \omega\}$. De la construcción se deduce que $\mathcal{V}$ es una sucesión decreciente; además, para cada $i \in \omega$, $\mathrm{cl}_X(V_{i+1} \cap W_{i+1}) \subseteq V_i \cap W_i$.

Sea $i \in \omega$, denotamos por A_i al conjunto $V_i \cap W_i$; y consideremos $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \omega\}$. Afirmamos que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \neq \emptyset$, en efecto, observemos que $\mathcal{A}$ cumple la PIF pues los elementos de $\mathcal{A}$ son no vacíos y para cada $i \in \omega$, $A_{i+1} \subseteq A_i$. Como X es débilmente compacto, entonces, por *b*) de la Proposición 3.2, se tiene la afirmación.

Finalmente, afirmamos que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \subseteq H \cap U_\delta$. En efecto, notemos que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \subseteq U_\delta$, por construcción. Resta probar que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \subseteq H$. Sea $z \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A$, entonces, para cada $n \in \omega$, $z \in \mathrm{cl}_X(A_n) = \mathrm{cl}_X(V_n \cap W_n)$ y ya que $\mathrm{cl}_X(V_{n+1} \cap W_{n+1}) \subseteq V_n \cap W_n \subseteq W_n$, se sigue $z \in W_n$ para cada $n \in \omega$, es decir $z \in \bigcap_{n\in\omega} W_n = H$. Concluyendo así la afirmación. Pero, como $H = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha) \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ entonces $H \cap U_\delta = \emptyset$, y de la afirmación se deduce que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues teníamos que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}_X A \neq \emptyset$. Se concluye que $c(X) \leqslant \omega$. □

Corolario 4.3. Sea X un espacio débilmente compacto y perfecto, entonces X es primero numerable y $c(X) \leqslant \omega$.

Demostración. La parte de que $c(X) \leqslant \omega$ se sigue de la proposición anterior. Dado que para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado y X es perfecto, entonces cada $\{x\}$ es una intersección numerable de abiertos. Luego, $\{x\}$ es un conjunto G_δ. Por la Proposición 4.1 se tiene que x tiene una base local numerable, con lo cual X es primero numerable. □

Es inmediato que todo espacio topológico compacto es débilmente compacto. Abordaremos el punto b) propuesto al inicio de esta sección. El Teorema 4.8, es una respuesta parcial, antes daremos una definición y lema.

Definición 4.4. $\mathrm{P}(\mathfrak{c})$ es la afirmación siguiente:

Si $\kappa < \mathfrak{c}$ y si $\{A(\alpha) : \alpha < \kappa\} \in [\mathcal{P}(\omega)]^\kappa$ es tal que $\bigcap_{\alpha\in F} A(\alpha)$ es infinita siempre que $F \subseteq \kappa$ finito, entonces existe un subconjunto $B \subseteq \omega$ infinito tal que $B \setminus A(\alpha)$ es finito para cada $\alpha \in \kappa$.

Nota 4.5. $\mathrm{P}(\mathfrak{c})$ es una consecuencia del Axioma de Martin (MA) como se muestra en III.3.22 de [**10**].

Lema 4.6. Asumiendo P($\mathfrak{c}$). Si X es débilmente compacto de π–peso numerable, y si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X con $|\mathcal{U}| < \mathfrak{c}$, entonces existe una subcolección finita $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}$ tal que:

$$X = \bigcup_{F \in \mathcal{J}} \mathrm{cl}_X F$$

Demostración. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ una π–base numerable, y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una cubierta abierta con $\kappa < \mathfrak{c}$. Para cada $\alpha < \kappa$, defínase:

$$A(\alpha) = \{n \in \omega : V_n \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$$

Notemos que para cada $\alpha < \kappa$, $A(\alpha) \neq \emptyset$. En efecto, dado que $\{V_n : n \in \omega\}$ es una π–base, existe $i \in \omega$ para el cual $V_i \subseteq U_\alpha$, luego, $i \in A(\alpha)$. Ahora, analicemos los siguientes casos:

1. Existe $I \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\bigcup_{\alpha \in I} A(\alpha) = \omega$. Afirmamos que $\mathcal{J}$ es el conjunto $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$. En efecto, sea $x \in X$ y sea G un abierto de X tal que $x \in G$. Sea $m \in \omega$ tal que $V_m \subseteq G$; por hipótesis, existe $\alpha_m \in I$ tal que $m \in A(\alpha_m)$. Entonces, $V_m \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$. Con ello $G \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$ y así $x \in \mathrm{cl}_X U_{\alpha_m} \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{J}} \mathrm{cl}_X F$.
2. Existe $I \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $G = \omega \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A(\alpha))$ es finito y $G \neq \emptyset$. Sea $m \in G$ y sea $p \in V_m$ un punto fijo, como $\mathcal{U}$ es cubierta, existe U_{α_m} tal que $p \in U_{\alpha_m}$. Así, $V_m \cap U_{\alpha_m} \neq \emptyset$. Denotemos por H al conjunto: $\{\alpha_m : m \in G\}$.

   Consideremos $I' = I \cup H$. Por lo anterior, para cada $n \in G$, se cumple que $V_n \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$, así $n \in A(\alpha_n)$. Con lo cual, $n \in \bigcup_{\alpha \in H} A(\alpha)$, luego, es evidente que $\omega = \bigcup_{\alpha \in I'} A(\alpha)$. Ya que I' es finito, entonces, de manera análoga a (1), se muestra que $\mathcal{J}$ es el conjunto $\{U_\alpha : \alpha \in I'\}$.
3. Para cada $I \in [\kappa]^{<\omega}$, $\omega \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A(\alpha))$ es infinito. Sea $I \in [\kappa]^{<\omega}$ entonces, para $\{\omega \setminus A(\alpha) : \alpha \in I\}$ es claro que el siguiente es infinito:

   $$\bigcap_{\alpha \in I} \omega \setminus A(\alpha) = \omega \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A(\alpha))$$

   Así que por P($\mathfrak{c}$), existe $B \subseteq \omega$ infinto tal que $B \setminus (\omega \setminus A(\alpha))$ es finito para cada $\alpha \in \kappa$. Observemos que $B \setminus (\omega \setminus A(\alpha)) = B \cap (\omega \setminus (\omega \setminus A(\alpha))) = B \cap A(\alpha)$.

   Denotemos por $\mathcal{B}$ a la familia infinita de abiertos $\{V_n : n \in B\}$. Afirmación: Existe $q \in X$ tal que, para cada vecindad G_q de q se cumple $|\{V_n \in \mathcal{B} : V_n \cap G_q \neq \emptyset\}| \geqslant \omega$. Si no existe $q \in X$ que cumpla la afirmación, entonces para cada $x \in X$ existe una vecindad G_x de x tal que $|\{V_n \in \mathcal{B} : V_n \cap G_x \neq \emptyset\}| < \omega$. Luego, se tiene que $\mathcal{B}$ es localmente finita, y como X es débilmente compacto, entonces $\mathcal{B}$ es finita, lo cual es una contradicción. Por tanto, es válida la afirmación.

   Dado que $\mathcal{U}$ es cubierta, existe $\alpha_q \in \kappa$ tal que $q \in U_{\alpha_q}$. Considerando U_{α_q} como vecindad de q, se tiene que $A(\alpha_q)$ es infinito. Además se sigue que $B \cap A(\alpha_q)$ es infinito, esto es una contradicción a la elección de B.

Por tanto, el tercer caso no puede ocurrir. La prueba está completa. □

Veremos a continuación un ejemplo de porque, en el Lema 4.6, es necesario pedir que X tenga π-peso numerable, ya que asumir algo más débil como la separabilidad, hace que el lema anterior falle.

Ejemplo 4.7. Asumiremos $\neg$CH. Sea 2 considerado como el conjunto $\{0, 1\}$, dotado con la topología discreta. Consideremos en el producto siguiente $Y = 2^{\omega_1}$ un punto fijo p, denotemos por $X = 2^{\omega_1} \setminus \{p\}$. Al ser 2 un espacio de Tychonoff con su topología discreta, entonces el producto Y conserva esta propiedad, así X por ser subespacio de Y, será $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ también. Además, 2 es separable, T_2 y como $\omega_1 < \mathfrak{c}$, entonces el producto 2^{ω_1} es separable (ver 16.4 c) de [**14**]) y dado que X es un abierto de Y, se sigue que también es separable.

X no es compacto, pues si $\mathcal{V}(p)$ denota la colección de vecindades del punto p en Y, entonces sabemos que $\mathcal{V}(p)$ es un filtro en Y, además $\{p\} \notin \mathcal{V}(p)$ pues es sabido que Y no tiene puntos aislados. Con esto, es claro que $\mathcal{V}_X(p) = \{U \cap X : U \in \mathcal{V}(p)\}$ es un filtro en X. Sabemos que p es un punto de acumulación del filtro $\mathcal{V}(p)$, verificaremos que $\mathcal{V}_X(p)$ no tiene puntos de acumulación, con lo cual X no podría ser compacto.Supongamos por contradicción que existe $q \in X$ tal que es punto de acumulación de $\mathcal{V}_X(p)$, entonces $q \in \bigcap_{A\in\mathcal{V}_X(p)} \mathrm{cl}_X(A)$, se sigue que $q \in \bigcap_{A\in\mathcal{V}(p)} \mathrm{cl}_Y(A)$, con lo cual q sería un punto distinto de p que cumple lo anterior, esto es una contradicción pues Y es T_2. Por tanto $\mathcal{V}_X(p)$ no tiene puntos de acumulación, así que X no puede ser compacto.

Por el Lema 2.1 tenemos que X no es H–cerrado, así que por el mismo lema debe existir una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tal que cualquier subcolección finita no es densa en X, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|\mathcal{U}| < \mathfrak{c}$.

Es claro, que existe $q \in Y$ tal que $q(\alpha) \neq p(\alpha)$ para cada $\alpha \in \omega_1$, así, considerando el Σ-producto $\Sigma(q)$ (el conjunto de todos los puntos (x_α) de Y que difieren de q en una cantidad numerable de $\alpha \in \omega_1$) debe suceder por construcción que $p \notin \Sigma(q)$, así $\Sigma(q) \subseteq X \subseteq Y$.

Como X es de Tychonoff, podemos considerar βX, su compactación de Stone-Čech. Por Teorema 2. de **[5]**, la compactación de Stone-Čech de un Σ-producto es el producto original (cuando dicho producto es compacto), luego, en particular tendríamos que $\beta\Sigma(q) = 2^{\omega_1}$. Ahora, claramente $\Sigma(q)$ es denso en Y, luego, es denso en X, así que por el Teorema 6.7 de **[4]** sucede que $\beta X = \beta\Sigma(q) = 2^{\omega_1}$. Es claro que $|\beta X \setminus X| = |p| = 1$, con lo cual X es un espacio casi-compacto, luego, por 7.F,3) de **[2]** es pseudocompacto. Dado que X es Tychonoff, el ser pseudocompacto es equivalente a ser débilmente compacto.

Por tanto, hemos construido un espacio X que es débilmente compacto, para el cual reemplazamos la condición tener π-peso numerable por el de ser separable, pero no se cumple la conclusión del Lema 4.6, pues $\mathcal{U}$ es una cubierta que es testigo de esto. Por lo cual, es importante la condición más fuerte de tener π-peso numerable.

El resultado siguiente es el prometido en el punto dos, en la introducción de la presente sección.

Teorema 4.8. (MA + $\neg$CH) Si X es un espacio separable, RC–perfecto y débilmente compacto, entonces X es compacto.

Demostración. Supongamos por un momento que X es Lindelöf. Entonces si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta, por ser X Lindelöf, $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta numerable. Luego por ser débilmente compacto tenemos una subcolección finita cuya unión es densa, se sigue por el Lema 2.1, que X es H–cerrado y dado que X es regular, por el mismo lema tendremos que X es compacto.

Probaremos que X es Lindelöf. Si X no es Lindelöf, entonces X tiene una cubierta abierta $\mathcal{U}$ que no admite subcubiertas numerables. Empleando inducción transfinita, probaremos que existen $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sucesión de puntos de X, $\{G_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sucesión de abiertos en X y $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sucesión de elementos de $\mathcal{U}$, que satisfacen:

I) $\forall\alpha < \omega_1 : x_\alpha \in G_\alpha \subseteq \mathrm{cl}_X G_\alpha \subseteq U_\alpha$.
II) $\forall\alpha < \omega_1 : x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\gamma<\alpha} U_\gamma$.

Primero, para la inducción; si $\alpha = 0$, elegimos $U_0 \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$ fijo, x_0 un elemento arbitrario de U_0, y como X es regular, tomamos G_0 como un abierto en X tal que $x_0 \in G_0 \subseteq \mathrm{cl}_X G_0 \subseteq U_0$. Ahora, sea $0 < \alpha < \omega_1$, supongamos que para cada $\beta < \alpha$ se tienen construidos elementos de las sucesiones, $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ puntos de X, $\{G_\beta : \beta < \alpha\}$ abiertos de X y $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ elementos de $\mathcal{U}$, de forma que i) y ii) se verifican. Construiremos x_α, G_α y U_α como sigue.

Dado que $\mathcal{U}$ no admite una subcubierta numerable, elegimos $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\delta<\alpha} U_\delta$. Ponemos $U_\alpha \in \mathcal{U}$ como el elemento de la cubierta para el cual $x_\alpha \in U_\alpha$, y por la regularidad de X, elegimos G_α abierto para el cual, $x_\alpha \in G_\alpha \subseteq \mathrm{cl}_X G_\alpha \subseteq U_\alpha$. Por construcción, x_α, G_α y U_α satisfacen i) y ii). Concluyendo así la inducción.

Sea $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$. Dado que X es RC–perfecto, existe una colección numerable de cerrados regulares de X, digamos $\{A_n : n \in \omega\}$, tal que $G = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Por la Proposición 3.6 cada A_n es débilmente compacto.

Afirmación: Para cada $n \in \omega$, A_n es separable. En efecto, como A_n es un cerrado regular, entonces $A_n = \mathrm{cl}_X B_n$, con B_n un abierto de X. Dado que X es separable, $\mathrm{int}_X A_n$ también lo es. Sea $D \subseteq \mathrm{int}_X A_n$ el conjunto que hace a $\mathrm{int}_X A_n$ separable. Veamos que D es denso en A_n. Notemos que $B_n \subseteq \mathrm{int}_X A_n$, así que sea $V = A_n \cap V_0$ un abierto no vacío de A_n con V_0 un abierto de X. Si $x \in V$, se sigue que $V_0 \cap B_n \neq \emptyset$ (pues B_n es denso en A_n), luego sea $y \in V_0 \cap B_n$, por lo dicho anteriormente $y \in V_0 \cap \mathrm{int}_X A_n \subseteq V_0 \cap A_n = V$, como $V_0 \cap \mathrm{int}_X A_n$ es un abierto de $\mathrm{int}_X A_n$, entonces usamos que D es denso en $\mathrm{int}_X A_n$ para concluir que $(V_0 \cap \mathrm{int}_X A_n) \cap D \neq \emptyset$, se sigue que $V \cap D \neq \emptyset$.

Es claro que por ser X un espacio RC–perfecto, X es perfecto. Con lo cual, por el Corolario 4.3 X es primero numerable, así que cada A_n también lo es. Es bien sabido que si un espacio es primero numerable y separable, entonces el espacio tiene π-peso numerable (basta unir todas las bases locales numerables de cada punto del denso para obtener una π-base numerable), en particular A_n tiene π-peso numerable. Así que por el Lema 4.6 aplicado a la cubierta abierta $\mathcal{U}_n = \{G_\alpha \cap A_n : \alpha < \omega_1\}$ de A_n (la cual cumple que $|\mathcal{U}_n| \leqslant \omega_1 < 2^\omega$) existe $J_n \subseteq \omega_1$ finito tal que $A_n = \bigcup_{j \in J_n} \mathrm{cl}_{A_n}(G_j \cap A_n)$, así $A_n \subseteq \bigcup_{j \in J_n} \mathrm{cl}_X(G_j \cap A_n)$.

Sea $J = \bigcup_{n \in \omega} J_n$, es claro que $G \subseteq \bigcup\{\mathrm{cl}_X(G_\alpha \cap A_n) : \alpha \in J \text{ y } n \in \omega\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} \mathrm{cl}_X(G_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Dado que $J \subseteq \omega_1$ es numerable, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha < \beta$ para cada $\alpha \in J$. Como el $x_\beta \in G_\beta \subseteq G$ por i), además $x_\beta \notin U_\gamma$ para cada $\gamma < \beta$, en particular, tenemos que $x_\beta \in G \setminus \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, lo cual es una contradicción pues probamos que $G \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Concluimos que X debe ser Lindelöf y por el análisis inicial, X es compacto. □

Del teorema anterior nace la siguiente pregunta:

PROBLEMA 4.9. Bajo MA + ¬CH. ¿Bajo qué condiciones sobre un espacio débilmente compacto, X, se tiene la separabilidad de éste?

Resulta que la compacidad puede reemplazarse por una propiedad más general, *completez*, lo cual no es extraño puesto que la propiedad de Baire está más relacionada con la *completitud* que con la compacidad.

Recordemos que una base de filtro $\mathcal{G}$ es llamada regular, si dados $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $\mathrm{cl}_X G \subseteq \mathrm{int}_X(G_1 \cap G_2)$.

Definición 4.10. Un espacio regular, X, es π–completo si existe una colección, $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de π–bases, con $\lambda < 2^\omega$, con la propiedad de que para cualquier $\mathcal{G} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$, base de filtro regular en X con $|\mathcal{G}| < 2^\omega$ tal que para todo $\alpha < \lambda$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$, ocurre que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

El siguiente teorema ilustra la definición anterior. Recordemos que un espacio Tychonoff, X, se dice G_λ absoluto si, X es la intersección de λ abiertos de βX. Como se puede consultar en [**13**], la propiedad de ser G_λ absoluto, se hereda a los subespacios cerrados de X.

Teorema 4.11. Si X es un espacio G_λ absoluto, entonces X es π–completo.

Demostración.

Por hipótesis existe una familia $\{V_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ de subconjuntos abiertos de βX tales que:

$$X = \bigcap\{V_\alpha : \alpha \in \lambda\}.$$

Denotamos, para cada $\alpha < \lambda$, $\mathcal{B}_\alpha$ al conjunto:

$$\{U \cap X : U \subseteq \beta X,\ \mathrm{int}_{\beta X}(U) \neq \emptyset \text{ y } \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq V_\alpha\}$$

Notemos que para cada $\alpha < \lambda$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una π–base en X. En efecto, sean $\alpha < \lambda$ y V un subconjunto abierto no vacío de X. Entonces existe un subconjunto abierto W en βX tal que $V = X \cap W$. Como βX es regular, existe un subconjunto no vacío de βX, W' tal que $\mathrm{cl}_{\beta X}(W') \subseteq W \cap V_\alpha$ (pues $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$). Claramente $X \cap W' \in \mathcal{B}_\alpha$ y $X \cap W' \subseteq V$; con todo, $\mathcal{B}_\alpha$ es una π–base en Y.

Finalmente mostremos que si $\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\lambda} \mathcal{B}_\alpha$ es una base de filtro regular con $|\mathcal{G}| < 2^\omega$ tal que para cada $\alpha \in \lambda$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Para cada $G \in \mathcal{G}$, existe $\alpha \in \lambda$ tal que $G \in \mathcal{B}_\alpha$; luego, existe $U_{(\alpha,G)} \subseteq \beta X$ tal que $G = X \cap U_{(\alpha,G)}$ y $\mathrm{cl}_X(U_{(\alpha,G)}) \subseteq V_\alpha$. Dado que $\mathcal{G}$ es una base de filtro regular, la colección $\mathcal{G}' = \{\mathrm{cl}_{\beta X}(U_{(\alpha,G)}) : G \in \mathcal{G}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados no vacíos que satisfacen la PIF; luego, por la compacidad de βX, tenemos que $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \bigcap \mathrm{cl}_{\beta X}(U_{(\alpha,G)}) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, de aquí que $x_0 \in X$. Dado que $\mathcal{G}$ es una base de filtro regular se tiene que $x_0 \in \bigcap \mathcal{G}$. Concluimos que X es π–completo. $\square$

Usaremos el siguiente lema para saber cuando un espacio π–completo es separable. Dicho lema se puede encontrar como corolario en la página 507 de [**9**], al igual que su prueba.

Lema 4.12. (MA + ¬CH) Si X es un espacio π–completo de celularidad numerable y $\pi w(X) < 2^\omega$, entonces X es separable.

Para un espacio topológico X, se define $t(X)^+$ como el menor cardinal regular κ que cumple que para cada $S \subseteq X$ y cada $x \in \mathrm{cl}_X S$, existe $T \subseteq S$ con $|T| < \kappa$ tal que $x \in \mathrm{cl}_X T$.

A continuación se enuncia un teorema que será usado para probar uno de los resultados principales de esta sección (Teorema 4.15). Debemos comentar que éste es una generalización a un resultado de Juhász (vea Corolario 4.14).

Teorema 4.13. (MA + ¬CH) Sea X un espacio topológico tal que:

a) Cualquier subespacio cerrado de X es π–completo,
b) $c(X) \leqslant \omega$, $t(X)^+ < 2^\omega$, y
c) $Y = \{x \in X : \pi\chi(x, X) < 2^\omega\}$ es denso en X.

Entonces X es separable.

Demostración.

Para cada $y \in Y$, denotamos por $\mathcal{B}_y$, a una π–base local de y tal que $|\mathcal{B}_y| < 2^\omega$. Denotemos por κ a $t(X)^+$. Para cada $U \subseteq X$ abierto no vacío de X, fijamos un $y_{(U)} \in U \cap Y$ y sea $y_{(\emptyset)}$ un elemento arbitrario de Y. También, para $A \subseteq Y$ definimos:

$$A^* = A \cup \{y_{(X\setminus \mathrm{cl}_X A)}\} \cup \{y_{(U\cap V)} : U, V \in \bigcup_{a\in A} \mathcal{B}_a\}$$

A continuación, definimos, empleando recursión, una colección $\{F_\xi : \xi \leqslant \kappa\}$ de subconjuntos de Y:

(I) $F_0 = \emptyset$.
(II) Para todo $\xi < \kappa$, $F_{\xi+1} = F_\xi^*$
(III) Si $\xi \leqslant \kappa$ es ordinal límite, no cero, $F_\xi = \bigcup_{\alpha<\xi} F_\alpha$

Observemos que la regularidad de $\kappa < 2^\omega$ y la definición de A^* implican que para todo $\xi \leqslant \kappa$, $|F_\xi| < 2^\omega$. Comprobemos lo siguiente:

(1): $c(F_\kappa) \leqslant \omega$. En efecto, sea $\mathcal{V}$ una familia no numerable de conjuntos abiertos de F_κ. Para cada $V \in \mathcal{V}$ elegimos un punto $p_V \in V$ y un conjunto abierto en X, U_V, tal que $V = F_\kappa \cap U_V$. Entonces, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $B_V \in \mathcal{B}_{p_V}$ tal que $B_V \subseteq U_V$. Como $c(X) \leqslant \omega$ existen V_1 y $V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $B_{V_1} \cap B_{V_2} \neq \emptyset$. Ahora, considerando que κ es un ordinal límite, existe $\xi < \kappa$ tal que $p_{V_1}, p_{V_2} \in F_\xi$; luego, $B_{V_1}, B_{V_2} \in \bigcup_{x\in F_\xi} B_x$.

Lo anterior implica que $y_{(B_{V_1}\cap B_{V_2})} \in F_\xi^* \subseteq F_\kappa$, además se tiene que $y_{(B_{V_1}\cap B_{V_2})} \in B_{V_1} \cap B_{V_2}$ con lo cual $y_{(B_{V_1}\cap B_{V_2})} \in B_{V_1} \cap B_{V_2} \cap F_\kappa \subseteq B_{V_1} \cap B_{V_2} \cap F_\kappa \subseteq U_{V_1} \cap U_{V_2} \cap F_\kappa = (U_{V_1} \cap F_\kappa) \cap (U_{V_2} \cap F_\kappa) = V_1 \cap V_2$ por lo tanto $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ y así $\mathcal{V}$ en realidad no es una familia celular y por tanto $c(F_\kappa) \leqslant \omega$.

(2): $\pi w(\mathrm{cl}_X F_\kappa) < 2^\omega$. Para probar esto, consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{B} = \{U \cap \mathrm{cl}_X F_\kappa : U \in \bigcup_{y\in F_\kappa} \mathcal{B}_y\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es una π–base para $\mathrm{cl}_X F_\kappa$. Sea, pues, V un abierto no vacío en $\mathrm{cl}_X F_\kappa$. Como F_κ es denso en $\mathrm{cl}_X F_\kappa$, existe $y_0 \in V \cap F_\kappa$; luego, dado que κ

es límite, existe $\xi < \kappa$ tal que $y_0 \in F_\xi$. Por otro lado, existe un abierto U_V en X de tal foma que: $V = \mathrm{cl}_X F_\kappa \cap U_V$. Como $y_0 \in U_V$ y $\mathcal{B}_{y_0}$ es π–base local de y_0, existe $B_V \in \mathcal{B}_{y_0}$ tal que $B_V \subseteq U_V$. Entonces $y_{(B_V)} \in F_{\xi+1} \subseteq \mathrm{cl}_X F_\kappa$; luego, $\mathrm{cl}_X F_\kappa \cap B_V \in \mathcal{V}$ y $\mathrm{cl}_X F_\kappa \cap B_V \subseteq \mathrm{cl}_X F_\kappa \cap U_V = V$.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es π–base para $\mathrm{cl}_X F_\kappa$. Además, MA + $\neg$CH implican que 2^ω es regular; luego como $|\mathcal{B}| \leqslant |\bigcup_{y\in F_\kappa} \mathcal{B}_y|$ y $|\mathcal{B}_y| < 2^\omega$ para cada $y \in F_\kappa$, también $|F_\kappa| < 2^\omega$, se sigue que $|\mathcal{B}| < 2^\omega$. Concluimos que $\pi w(\mathrm{cl}_X F_\kappa) < 2^\omega$.

(3): $\mathrm{cl}_X F_\kappa$ es separable. Por hipótesis, $\mathrm{cl}_X F_\kappa$ es π–completo y de (1) y (2), sabemos que $c(\mathrm{cl}_X F_\kappa) = c(F_\kappa) \leqslant \omega$ y $\pi\omega(\mathrm{cl}_X F_\kappa) < 2^\omega$; así, por el Lema 4.12, tenemos que $\mathrm{cl}_X F_\kappa$ es separable.

(4): $\mathrm{cl}_X F_\kappa = X$. Esto es pues $F_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} F_\xi$ y $\kappa = t(X)^+$, entonces tenemos que $\mathrm{cl}_X F_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} \mathrm{cl}_X F_\xi$. Luego, como $\mathrm{cl}_X F_\kappa$ es separable, existe $D \subseteq \mathrm{cl}_X F_\kappa$ denso numerable. La regularidad de κ, implica que existe $\xi_0 < \kappa$ tal que $D \subseteq \mathrm{cl}_X F_{\xi_0}$. Así, $\mathrm{cl}_X F_\kappa = \mathrm{cl}_{F_\kappa}(D) = \mathrm{cl}_X D \subseteq \mathrm{cl}_X F_{\xi_0} \cap \mathrm{cl}_X F_\kappa = \mathrm{cl}_X F_{\xi_0}$; de donde $\mathrm{cl}_X F_\kappa = \mathrm{cl}_X F_{\xi_0}$. De aquí que $F^*_{\xi_0} \subseteq F_{\xi_0+1} \subseteq F_\kappa \subseteq \mathrm{cl}_X F_\kappa = \mathrm{cl}_X F_{\xi_0}$. Luego, $F^*_{\xi_0} \subseteq \mathrm{cl}_X F_{\xi_0}$

Pero para $A \subseteq X$, ocurre que $A^* \subseteq \mathrm{cl}_X A$ solo cuando $\mathrm{cl}_X A = X$. Así que $\mathrm{cl}_X F_{\xi_0} = X$ y por lo tanto $\mathrm{cl}_X F_\kappa = X$.

Concluyendo así que X es separable □

Claramente, si X es un espacio topológico, entonces X es un subconjunto denso de X; luego, del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado propuesto por Juhász como teorema (sin demostración) en [**9**].

Corolario 4.14. (MA + $\neg$CH) Suponga que X es un espacio topológico tal que:

a) Todo subespacio cerrado de X es π–completo,
b) $c(X) \leqslant \omega$, $t(X)^+ < 2^\omega$, y
c) $\pi\chi(p, X) < 2^\omega$ para todo $p \in X$.

Entonces X es separable.

Ahora, estamos en posición de abordar el primer punto propuesto en la introducción de la presente sección.

Teorema 4.15. (MA + $\neg$CH). Si X es un espacio débilmente compacto, RC–perfecto y cada subespacio cerrado de X es π–completo. Entonces X es separable.

Demostración.
Como X es RC-perfecto, en particular X es perfecto. Además, X es débilmente compacto, así que por el Corolario 4.3 se tiene que X es primero numerable y que $c(X) \leqslant \omega$, es decir, $\chi(X) \leqslant \omega$. Además, como $t(X) \leqslant \chi(X)$ y $\pi\chi(X) \leqslant \chi(X)$, se deduce así que $t(X)^+ \leqslant \omega_1 < 2^\omega$ y $\pi\chi(p, X) \leqslant \pi\chi(X) < 2^\omega$ para cada $p \in X$. Es decir, podemos aplicar el corolario anterior para así obtener que X es separable. □

Los siguientes son consecuencias interesantes del Teorema 4.15.

Corolario 4.16. (MA + $\neg$CH) Suponga que X es un espacio débilmente compacto, RC–perfecto, tal que cada subespacio cerrado es π–completo, entonces X es compacto.

Demostración. Por el teorema anterior, X es separable y del Teorema 4.8 se sigue que X es compacto. □

La siguiente consecuencia presenta una alternativa al Problema 4.9.

Corolario 4.17. ([**11**], Theorem 3.6) (MA + ¬CH) Si X es un espacio débilmente compacto, G_λ absoluto, para algún $\lambda < 2^\omega$, y RC–perfecto, entonces X es compacto.

Demostración. Como X es G_λ absoluto, entonces por el Teorema 4.11, X es π–completo. Luego como cada subespacio cerrado también hereda el ser G_λ absoluto, entonces cada subespacio cerrado también es π–completo. Así que por el Teorema 4.15, se sigue que X es separable y con esto, por el Teorema 4.8, se sigue que X es compacto. □

Para un espacio X, consideramos

$$L(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad compacta}\}.$$

También fue demostrado por Porter y Woods en [**11**], que (bajo MA + ¬CH), si X es un espacio débilmente compacto, RC–perfecto y $L(X)$ es denso en X, entonces X es separable y, en consecuencia, compacto. Hasta el momento, los autores, no sabemos si este resultado se sigue del Teorema 4.15. En otras palabras, no conocemos una respuesta al problema siguiente.

PROBLEMA 4.18. ¿Es cierto que, bajo (MA), todo espacio X para el cual $L(X)$ es denso en X, es π–completo ?

Referencias

[1] R. B. Beshimov, *A Note on Weakly Separable Spaces*, Mathematica Moravica, Serbia, 2002.
[2] F. Casarrubias Segura y Á. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2015.
[3] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[4] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960.
[5] I. Glicksberg, *Stone-Čech Compactifications of Products*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), pp 369-382.
[6] O. Gutik, A. Ravsky, *On old and new classes of feebly compact spaces*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Mat. 85, (2018), pp 48–59.
[7] A. Hajnal and I. Juhász, *A consequence of Martin's axiom*, Indagationes Mathematicae 33, (1971), pp 457–463.
[8] R. Hodel, *Cardinal functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology (Kunen K. y Vaughan J. E., ed.), North-Holland, Amsterdam 1984, pp 1–61.
[9] I. Juhász, *Consistency Results in Topology*, Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, ed.), Amsterdam 1977, pp 503–522.
[10] K. Kunen, *Set Theory*, College Publications, London, 2013.
[11] J. R. Porter y R. Grant Woods, *Feebly Compact Spaces, Martin's Axiom, and "Diamond"*, Topology Proceedings 9 (1984), pp 105–121.
[12] E. Shapirovskii, *Martin's axiom and properties of topological spaces.* I, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Volume 213, Number 3, (1973), pp 532–535.
[13] F. D. Tall, *The countable chain condition versus separability–applications of Martin's Axiom.* General Topology and its applications 1974, vol. 4, pp 315–339.
[14] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

Correo electrónico:
angel_barranco3@hotmail.com (Ángel Rafael Barranco Carrasco),
luisenrique-11@hotmail.com (Luis Enrique Aponte Pérez).

Capítulo 10

Funciones que preservan métricas y ultramétricas

Reinaldo Martínez Cruz
Universidad Autónoma de Tlaxcala, Tlax., México
Emmanuel Hernández Piña
Universidad Autónoma de Tlaxcala, Tlax., México

1. Introducción

El concepto de función que preserva la métrica aparece por primera vez en el artículo de Wilson [**13**]. A partir de ese momento es investigado a fondo por muchos autores; ver por ejemplo, las citas [**1**], [**2**], [**6**], [**8**] y [**10**]. Grosso modo, la idea central en esta temática es la que establece el problema siguiente:

Pregunta. ¿Bajo qué condiciones una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisface que, para cualquier espacio métrico (X, d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica sobre X?

En la actualidad, existen otros tipos importantes de distancias, a saber, ultramétricas, pseudométricas, $\omega-$distancias, y $\tau-$distancias que aún no han sido exploradas o desarrolladas en relación con las funciones que preservan las métricas. Estas distancias tienen muchas aplicaciones en matemáticas; ver por ejemplo, $\omega-$distancias, y $\tau-$distancias en [**14**] y [**12**].

Luego, una inquietud natural, motivada por la pregunta anterior, es:

Pregunta general. ¿Bajo qué condiciones una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisface que, para cualquier ultramétrica, pseudométrica, $\omega-$distancia, o $\tau-$distancia d en X, se cumple que, $f \circ d$ es una ultramétrica, pseudométrica, $\omega-$distancia o τ-distancia en X?

El objetivo de este trabajo es analizar el problema general, centrados particularmente en el caso de las ultramétricas y las métricas. Deseamos aclarar que el escrito es de carácter expositorio y está basado, en su mayoría, en la obra [**10**], por Prapanpong Pongsriiam and Imchit Termwuttipong. Remarcamos que lo único nuevo en este trabajo es la forma de organizar y presentar los principales resultados conocidos de funciones que preservan métricas y ultramétricas. Deseamos que nuestra presentación motive o estimule la curiosidad para buscar más informacón acerca de este tópico y contribuya al desarrollo de está área.

Hemos dividido esta obra en dos secciones, como indicamos a continuación. En la primera, denominada Preliminares, proporcionamos los conceptos, ejemplos y resultados importantes que nos serán de utilidad para facilitar la lectura de los resultados posteriores. En la segunda, que da el título al trabajo, incluimos algunos aspectos del estado actual de las funciones que preservan métricas y ultramétricas.

Finalmente, comentamos que la noción de ultramétrica surge en el estudio de los números $p-$ádicos y en el análisis no arquimediano [**3**] y [**15**], en topología y en sistema dinámicos [**4**], en topología algebraica [**5**] y en teoría de informática [**11**].

2. Preliminares

Empezamos esta sección recordando las definiciones de métrica y ultramétrica.

Definición 2.1. Sea X un conjunto cualquiera no vacío.

A) Una métrica en X es una función $d : X \times X \to [0.\infty)$ que satisface las siguientes propiedades: para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

(1) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría),

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular).

B) Una ultramétrica en X, es una métrica, d, que además satisface la desigualdad fuerte (llamada desigualdad ultramétrica):

(U3) para cualesquiera $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leqslant max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

C) El par (X, d) es llamado espacio métrico si d es una métrica en X y dicho par es un espacio ultramétrico cuando d es una ultramétrica en X.

Ejemplo 2.2. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces $d^{'} = max\{1, d\}$ es un espacio métrico en X. Sean $x, y, z \in X$: (1) $d^{'}(x, y) = 0$ si y sólo si $max\{1, d(x, y)\} = 0$ si y sólo si $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(2) $d^{'}(x, y) = max\{1, d(x, y)\} = max\{1, d(y, x)\} = d^{'}(y, x)$;

(3) Supongamos que, $d^{'}(x, y) > d^{'}(x, z) + d^{'}(z, y)$ y consideremos los casos siguiente:

i) $d^{'}(x, y) = 1$, $d^{'}(x, z) = 1$ y $d^{'}(z, y) = 1$. Para este primer caso, tenemos que, $1 > 1 + 1$ lo cual es una contradicción;

ii) $d^{'}(x, y) = d(x, y)$, $d^{'}(x, z) = d(x, z)$ y $d^{'}(z, y) = d(z, y)$. Para este otro caso, tenemos que, $d(x, y) > d(x, z) + d(z, y)$, lo cual nos da nuevamente una contradicción;

iii) Si $d^{'}(x, y) = d(x, y)$, $d^{'}(x, z) = 1$ y $d^{'}(z, y) = d(z, y)$, entonces

$$d(x, y) > 1 + d(z, y) > d(x, z) + d(z, y),$$

pero esto viola la hipótesis de que d sea una métrica;

iv) $d^{'}(x, y) = 1$, $d^{'}(x, z) = 1$ y $d^{'}(z, y) = d(z, y)$, entonces $1 > 1 + d(z, y) > 1 + 1$ lo cual es un absurdo. Los otros casos tambien conducen a una falsedad. Así que, $d^{'}(x, y) \leqslant d^{'}(x, z) + d^{'}(z, y)$.

Ejemplo 2.3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Consideremos la distancia, d, definida para cada $x, y \in \mathbb{R}$ como sigue: $d(x, y) = |y - x|$. No es difícil de verificar que, d es una métrica. A ésta se le conoce como la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4. En $\mathbb{R}^2$ consideremos la siguiente función $d(x, y) = ||y - x||$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que d es una métrica para $\mathbb{R}^2$, en la literatura se le conoce como métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$.

En la demostración del Teorema 3.9, emplearemos el siguiente lema.

Lema 2.5. Sea (X, d) un espacio ultramétrico. Entonces

$$d(x_1, x_n) \leqslant \text{máx}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\},$$

para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_n) &\leqslant \text{máx}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_n)\} \\ &\leqslant \text{máx}\{d(x_1, x_2), \text{máx}\{d(x_2, x_3), d(x_3, x_n)\}\} \\ &= \text{máx}\{d(x_1, x_2), d(x_2, x_3), d(x_3, x_n)\}. \end{aligned}$$

Una aplicación repetida de la desigualdad ultramétrica como lo hicimos ver nos da el resultado deseado. □

Definición 2.6. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que:

i) X es *topológicamente discreto* si para cada $x \in X$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x,\epsilon) = \{x\}$, donde $B_d(x,\epsilon)$ denota la bola abierta con centro en x y radio ϵ;

ii) X es *uniformemente discreto* si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x,\epsilon) = \{x\}$ para cada $x \in X$.

Nota 2.7. Todo espacio *uniformemente discreto* X es *topológicamente discreto.*

El recíproco no siempre se cumple como veremos a continuación.

Ejemplo 2.8. Sea $X = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$. Considere la métrica usual en $\mathbb{R}$. Afirmamos que, (X, τ_X) es un espacio discreto, en efecto, sea $x \in X$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{1}{2^m}$. No es difícil verificar que si $\epsilon = \frac{1}{2^{m+2}}$, entonces $X \cap B_d(x,\epsilon) = \{x\}$. De aquí que, (X, τ_X) es discreto.

Sin embargo X no puede ser uniformemente discreto. Para justificarlo, observemos que, para todo $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que $B_d(\frac{1}{2^m}, \epsilon) \neq \{\frac{1}{2^m}\}$. Verifiquemos la validez de esta observación. Sea $\epsilon > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Tomemos $m \geqslant N$, entonces $\frac{1}{2^{m+1}} < \epsilon$; además, $|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}| = \frac{1}{2^{m+1}} < \epsilon$; de donde $\frac{1}{2^{m+1}} \in B_d(\frac{1}{2^m}, \epsilon)$. Así, X no es uniformemente discreto.

A continuación y para concluir esta sección, recordaremos algunas nociones que serán empleadas en el resto del trabajo; entre otras la de función que preserva la métrica. El lector interesado en profundizar en esta temática recomendamos el capítulo de libro: *Funciones que preservan la métrica* que puede consultar en la cita [**9**].

Definición 2.9. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función e $I \subseteq [0,\infty)$ un intervalo. Decimos que:

(a) f preserva la métrica si para cualquier espacio métrico (X,d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica. Además, f preserva la métrica fuertemente, si para cualquier métrica d, se tiene que, $f \circ d$ es equivalente a d.

(b) f es *creciente* en I si para cada $x, y \in I$ con $x < y$, tenemos que $f(x) \leqslant f(y)$;

(c) f es *estrictamente creciente* en I si para cada $x, y \in I$ con $x < y$, tenemos que $f(x) < f(y)$ La noción de que f sea decreciente y estrictamente decreciente se define de manera similar;

(d) f es *flexible* si y sólo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;

(e) f es *subaditiva* si para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ se cumple que $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$;

(f) f es *estrechamente acotada* si existe $v > 0$ tal que $f(x) \in [v, 2v]$ para toda $x > 0$;

(g) f es convexa si $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$ para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ y $t \in [0,1]$;

(h) f es cóncava si $f((1-t)x + ty) \geqslant (1-t)f(x) + tf(y)$ para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ y $t \in [0,1]$.

Los resultados siguientes serán empleados en las pruebas dadas en la siguiente sección.

Lema 2.10. Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es subaditiva.

Demostración. La prueba se puede consultar, por ejemplo, en [**9**], página 141. $\square$

Lema 2.11. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ creciente y flexible. Entonces f es subaditiva si y sólo si f preserva la métrica.

Demostración. Supongamos que f es subaditiva y sea (X,d) un espacio métrico. Verificaremos que $f \circ d$ es una métrica. Sean $x, y, z \in X$.

(1) Por ser f flexible, tenemos que $f(0) = 0$ y dado que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Entonces $(f \circ d)(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(2) $(f \circ d)(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = (f \circ d)(y,x)$

(3) Pongamos $a = d(x,y)$, $b = d(x,z)$ y $c = d(z,y)$. Se sigue por la desigualdad triangular que, $a \leqslant b + c$. Ahora, por ser f creciente y subaditiva, se concluye que, $f(a) \leqslant f(b) + f(c)$.

El recíproco se sigue del Teorema 2.10. $\square$

Lema 2.12. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ flexible y estrechamente acotada, entonces f preserva la métrica.

Demostración. La prueba puede ser consultada, por ejemplo, en [**9**] página 145. $\square$

El siguiente lema puede ser menos conocido, por lo que presentamos su prueba.

Lema 2.13. Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ flexible y cóncava, entonces la función $x \to \frac{f(x)}{x}$ es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Demostración. Sean $a, b \in (0, \infty)$ con $a < b$. Pongamos $x = 0$, $y = b$, $t = \frac{a}{b}$ y apliquemos la definición 2.9 inciso (h), entonces

$$\frac{a}{b}f(b) = \big(1 - \frac{a}{b}\big)f(0) + \frac{a}{b}f(b) \leqslant f\big(\big(1 - \frac{a}{b}\big)0 + \big(\frac{a}{b}\big)b\big) = f(a).$$

Luego, $\frac{f(b)}{b} \leqslant \frac{f(a)}{a}$. $\square$

3. Funciones que preservan métricas y ultramétricas

Para comenzar vamos a introducir las nociones que serán el objeto de estudio del presente trabajo.

Definición 3.1. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Decimos que

i) f preserva la ultramétrica si para cada espacio ultramétrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica;

ii) f preserva la métrica-ultramétrica si para cada espacio métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica;

iii) f preserva la ultramétrica-métrica si para cada espacio ultramétrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una métrica.

Denotemos por $\mathcal{M}$ el conjunto de funciones que preservan la métrica, $\mathcal{U}$ la colección de funciones que preservan la ultramétrica, $\mathcal{UM}$ el espacio de funciones que preservan la ultramétrica-métrica y $\mathcal{MU}$ la familia de funciones que preservan la métrica-ultramétrica.

Una primera inquietud o interrogante que podríamos hacernos es la siguiente.

Pregunta. ¿Existe alguna relación entre estas clases?

La proposición siguiente da una respuesta a la pregunta anterior.

Proposición 3.2. Las siguientes contenciones se satisfacen: $\mathcal{MU} \subseteq \big(\mathcal{U} \cap \mathcal{M}\big) \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{UM}$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{MU}$, entonces f preserva la métrica-ultramétrica. Así, para cada espacio métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica. Pero una ultramétrica es una métrica, de aquí que, $f \circ d$ es una métrica. En otras palabras, $f \in \mathcal{M}$ y así, $\mathcal{MU} \subseteq \mathcal{M}$. Si $f \notin \mathcal{U}$, entonces existe un espacio ultramétrico (X, d) tal que $f \circ d$ no es una ultramétrica, lo cual es una contradicción; así $f \in \mathcal{U}$. Esto otro demuestra que $\mathcal{MU} \subseteq \mathcal{U}$. Con todo llegamos que $\mathcal{MU} \subseteq (\mathcal{U} \cap \mathcal{M})$. Similarmente se demuestra que $\mathcal{U} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{UM}$. $\square$

Luego de lo establecido en la proposición anterior, la pregunta inmediata es:

Pregunta. ¿Son propias las contenciones dadas en la Proposición 3.2?

Entre otras cosas, en lo que resta de este trabajo haremos ver que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. Para lograrlo, vamos a caracterizar a las clases en cuestión. Iniciamos con la clase $\mathcal{U}$. Antes daremos algunas nociones y resultados auxiliares.

Teorema 3.3. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Entonces $f \in \mathcal{U}$ si y sólo si f es creciente y flexible.

Demostración. Supongamos que f preserva la ultramétrica. Por el Corolario 3.20, f es flexible. Veamos que es creciente. Sean $a, b \in [0, \infty)$ con $a < b$. Sean d_2 la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$ y $X = \{A, B, C\} \in \mathbb{R}^2$, donde $A = (-\frac{a}{2}, 0)$, $B = (\frac{a}{2}, 0)$ y $C = (0, \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2})$. Sea $d = d_2|_X$ la restricción de d_2 sobre X. Entonces $d(A, B) = a$ y $d(A, C) = d(B, C) = b$. Por lo que (X, d) es un espacio ultramétrico. Por hipótesis f preserva la ultramétrica, así $f \circ d$ es una ultramétrica. Esto implica que,

$$f(a) = f(d(A, B)) = (f \circ d)(A, B) \leqslant max\{(f \circ d)(A, C), (f \circ d)(B, C)\} = f(b).$$

Supongamos que f es creciente y flexible. Ahora, verificarémos que f preserva la ultramétrica. Sean (X, d) un espacio ultramétrico y $x, y, z \in X$. Como f es flexible, se sigue que, $(f \circ d)(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Dado que d es una ultramétrica, tenemos que,

$$d(x, z) \leqslant max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

De aqui que,

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) \quad \text{o} \quad d(x, z) \leqslant d(y, z).$$

Si sucediera el caso que, $d(x, z) \leqslant d(x, y)$, entonces

$$f(d(x, z)) \leqslant f(d(x, y)) \leqslant max\{(f \circ d)(x, y), (f \circ d)(y, z)\}.$$

Por otra parte, si fuera este el caso $d(x, z) \leqslant d(y, z)$, entonces

$$f(d(x, z)) \leqslant f(d(y, z)) \leqslant max\{(f \circ d)(x, y), (f \circ d)(y, z)\}.$$

En cualquier caso, tenemos que $(f \circ d)(x, z) \leqslant max\{(f \circ d)(x, y), (f \circ d)(y, z)\}$. Por la tanto, $(f \circ d)$ es una ultramétrica. Esto completa la prueba. $\square$

Corolario 3.4. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

(i) Si f es subaditiva y preserva la ultramétrica, entonces f preserva la métrica;

(ii) Si f es creciente en $[0, \infty)$ y preserva la métrica, entonces f preserva la ultramétrica

Demostración. (i) Supongamos que f es subaditiva y preserva la ultramétrica, entonces por el Teorema 3.3, f es creciente y flexible. Ahora, por el Lema 2.11, f preserva la métrica.

(ii) Supongamos que f es creciente en $[0, \infty)$ y preserva la métrica, entonces por el Corolario 3.20, f es flexible. Ahora, por Teorema 3.3, f preserva la ultramétrica. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{M}$.

Ejemplo 3.5. Sean $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dados por $f(x) = x^2$ y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Como f es flexible y creciente, entonces por el Teorema 3.3, f preserva la ultramétrica y g no lo hace. Sea d la métrica usual en $\mathbb{R}$, vemos que

$$(f \circ d)(2, 3) + (f \circ d)(1, 2) = 2 < 4 = f(2) = (f \circ d)(1, 3).$$

Así $f \circ d$ no es una métrica y por lo tanto por el Corolario 3.4, $f \circ d$ no preserva la ultramétrica. Como $g(x) \in \{1, 2\}$ para cada $x > 0$, se sigue que, g es estrechamente acotada, y por lo tanto, por el Lema 2.12, g preserva la métrica. Concluyendo $f \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$ y $g \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}$. Esto demuestra que $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{M}$. Este ejemplo tambien demuestra que las contenciones $\mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{M}$ en la Proposición 3.2 son propias.

A continuación, damos algunos resultados sobre la concavidad de las funciones en $\mathcal{U} \cup \mathcal{M}$.

Teorema 3.6. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Si f es flexible y cóncava, entonces f preserva la ultramétrica.

Demostración. Supongamos que f es flexible y cóncava. Demostremos que f es creciente. Primero observemos que, si $y > 0$, entonces $f(y) > f(0)$ ya que f es flexible. En lo que sigue, sea $0 < x < y$ y procedamos por contradicción suponiendo que $f(y) < f(x)$. Pongamos $t = \frac{f(y)}{f(x)}$, $x_1 = \frac{(yf(x) - xf(y))}{(f(x) - f(y))}$ y $x_2 = x$. Tenemos que, $t \in [0,1]$ y $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. Como f es cóncava, obtenemos que,

$$f(y) + (1-t)f(x_1) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leqslant f((1-t)x_1 + tx_2) = f(y).$$

Esto implica que, $f(x_1) = 0$ lo cual contradice el hecho que $x_1 > 0$ y f se flexible. Por lo que f es creciente. Luego, por Teorema 3.3, f preserva la ultramétrica. □

Corolario 3.7. Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es flexible y cóncava, entonces f preserva la ultramétrica y métrica.

Demostración. La primera parte viene del Teorema 3.6. La otra parte aparece en la literatura, pero aquí proporcionamos una prueba alternativa. Por los Teoremas 3.3 y 3.6 se tiene que f es creciente, así, por el Lema 2.11 solo resta verificar que f es subaditiva.

Sean $a, b \in (0, \infty)$. Por el Lema 2.13, tenemos que, $\frac{f(a+b)}{a+b} \leqslant min\{\frac{f(b)}{b}, \frac{f(a)}{a}\}$. Por lo que,

$$f(a+b) = a\Big(\frac{f(a+b)}{a+b}\Big) + b\Big(\frac{f(a+b)}{a+b}\Big) \leqslant a\Big(\frac{f(a)}{a}\Big) + b\Big(\frac{f(b)}{b}\Big) = f(a) + f(b).$$

□

El próximo ejemplo muestra que existe una función que preserva la métrica y la ultramétrica pero no es cóncava.

Ejemplo 3.8. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 & \text{si } x \in [1,10], \\ x-9 & \text{si } x \in (10,11), \\ 2 & \text{si } x \geqslant 11, \end{cases}$$

Es fácil verificar que f es flexible y creciente, así por el Teorema 3.3, f preserva la ultramétrica. Ahora, verificaremos que f preserva la métrica. Por el Lema 2.11 es suficiente demostrar que f es subaditiva. Observe que $f(x) \leqslant x$ y $f(x) \leqslant 2$ para cada $x \in [0, \infty)$. Sean $a, b \in [0, \infty)$ y consideremos varios casos

Caso 1). Si $a, b \in [0,1]$, entonces $f(a) + f(b) = a + b \geqslant f(a+b)$.

Caso 2). Si $a, b \in [1, 10]$, entonces $f(a) + f(b) = 2 \geqslant f(a+b)$. Similarmente, si $a, b > 10$, entonces $f(a+b) \leqslant 2 < f(a) + f(b)$.

Caso 3). Si $a \in [0,1]$ y $b \in [1,10]$, entonces

$$f(a) + f(b) = a + 1 \geqslant max\{1, a+b-9\} \geqslant f(a+b).$$

Caso 4). Si $a \in [0,1]$ y $b \geqslant 11$, entonces

$$f(a) + f(b) = a + 2 \geqslant 2 = f(a+b).$$

Caso 5). Si $a \in [1,10]$ y $b \in [10, \infty)$, entonces

$$f(a) + f(b) = b - 8 \geqslant 2 = f(a+b).$$

Los otros casos pueden ser obtenidos similarmente, por lo que f es subaditiva. De aquí que f preserva la métrica. Como $f(\frac{9+11}{2}) < \frac{(f(9)+f(11))}{2}$, se sigue que, f no es cóncava. Resumiendo $f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$ pero f no es cóncava. Además, f no es una constante en el semirrayo $(0, \infty)$. Este ejemplo también demuestra que $\mathcal{U} \cap \mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{MU}$ y la contensión $\mathcal{MU} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$ en la Proposición 3.2 es propia.

Nuestro próximo objetivo es caracterizar las funciones en $\mathcal{MU}$

Teorema 3.9. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Entonces f preserva la métrica-ultramétrica si y sólo si f es flexible y f es una constante en el intervalo $(0, \infty)$.

Demostración. Supongamos que f es flexible y es una constante en el intervalo $(0, \infty)$. Es decir, existe una constante $c > 0$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ c & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Para demostrar que f preserva la métrica-ultramétrica. Sean (X, d) un espacio métrico y x, y, z puntos X. Si $x = y$ o $x = z$ o $y = z$, entonces es fácil ver que,

$$(f \circ d)(x, y) \leqslant max\{(f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y)\}.$$

Si x, y, z son todos distintos, entonces $(f \circ d)(x, y) = c = (f \circ d)(x, z) = (f \circ d)(y, z)$ y asi,

$$(f \circ d)(x, y) \leqslant max\{(f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y)\}.$$

Esto demuestra que $(f \circ d)$ es una ultramétrica.

Ahora supongamos que, $f \in \mathcal{MU}$ y verificaremos que f es flexible y es una constante en $(0, \infty)$. Pero, por el Corolario 3.20, basta demostrar que f es una constante en el intervalo $(0, \infty)$. A lo largo de la prueba, d es la métrica usual de $\mathbb{R}$ y d_2 la métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Aplicaremos el Lema 2.13 repetidamente. Primero mostraremos que

$$f(1) = f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{m}{n}\Big) \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Así, sean $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Dado que $f \in \mathcal{MU}$, se sigue que, $(f \circ d)$ es una ultramétrica en $\mathbb{R}$. Por el Lema 2.13, tenemos que

$$\begin{aligned} f(1) = (f \circ d)(0, 1) &\leqslant max\Big\{(f \circ d)\Big(0, \frac{1}{n}\Big), (f \circ d)\Big(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big), \ldots, (f \circ d)\Big(\frac{n-1}{n}, 1\Big)\Big\} \\ &= max\Big\{f\Big(\frac{1}{n}\Big), f\Big(\frac{1}{n}\Big), f\Big(\frac{1}{n}\Big), \ldots, f\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} = f\Big(\frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Para ver la la otra desigualdad, pongamos

$$A = \Big(-\frac{1}{2n}, 0\Big), \quad B = \Big(\frac{1}{2n}, 0\Big) \quad \text{y} \quad C = \Big(0, \frac{\sqrt{4 - (\frac{1}{n})^2}}{2}\Big).$$

Como $f \in \mathcal{MU}$, se sigue que, $(f \circ d_2)$ es una ultramétrica en $\mathbb{R}^2$. De aquí que,

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = (f \circ d_2)(A, B) &\leqslant max\{(f \circ d_2)(A, C), (f \circ d_2)(C, B)\} \\ &= max\{f(1), f(1)\} = f(1). \end{aligned}$$

Luego, $f(1) = f\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

Similarmente, procedamos como antes

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = (f \circ d)\Big(0, \frac{m}{n}\Big) \leqslant max\Big\{(f \circ d)\Big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big) : k = \overline{1, m}\Big)\Big\} = f\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

La otra desigualdad se obtiene como sigue. Sean

$$A = \Big(-\frac{1}{2n}, 0\Big), \quad B = \Big(\frac{1}{2n}, 0\Big) \quad \text{y} \quad C = \Big(0, \frac{\sqrt{4(\frac{m}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2}}{2}\Big).$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = (f \circ d_2)(A, B) &\leqslant max\{(f \circ d_2)(A, C), (f \circ d_2)(C, B)\} \\ &= f\Big(\frac{m}{n}\Big). \end{aligned}$$

Así, $f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{m}{n}\Big)$.

En resumen lo que hemos probado hasta este momento es lo siguiente:

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = f\Big(\frac{m}{n}\Big) = f(1), \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras,

$$f(1) = f(q) \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad q \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty). \tag{10.1}$$

Sea $a \in \mathbb{Q}^c \cap (0, \infty)$. Ahora, mostraremos que, $f(a) = f(1)$. Para hacerlo, sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ tales que $q_1 < a < q_2$. Sean

$$A_1 = \Big(-\frac{q_1}{2}, 0\Big), \quad B_1 = \Big(\frac{q_1}{2}, 0\Big) \quad \text{y} \quad C_1 = \Big(0, \frac{\sqrt{4a^2 - q_1^2}}{2}\Big),$$

$$A_2 = \Big(-\frac{a}{2}, 0\Big), \quad B_2 = \Big(\frac{a}{2}, 0\Big) \quad \text{y} \quad C_2 = \Big(0, \frac{\sqrt{4q_2^2 - a^2}}{2}\Big),$$

Por la igualdad (10.1) y el hecho que $(f \circ d_2)$ es una ultramétrica en $\mathbb{R}^2$, obtenemos que,

$$\begin{aligned} f(1) = f(q_1) = (f \circ d_2)(A_1, B_1) &\leqslant max\{(f \circ d_2)(A_1, C_1), (f \circ d_2)(C_1, B_1)\} \\ &= f(a) = (f \circ d_2)(A_2, B_2) \\ &\leqslant max\{(f \circ d_2)(A_2, C_2), (f \circ d_2)(C_2, B_2)\} \\ &= f(q_2) = f(1). \end{aligned}$$

Esto demuestra que,

$$f(1) = f(a) \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad a \in \mathbb{Q}^c \cap (0, \infty). \tag{10.2}$$

De las ecuaciones (10.1) y (10.2), obtenemos que, $f(x) = f(1)$ para cada $x \in (0, \infty)$. La prueba esta completa. □

Sean d una métrica y f una función que preserva la métrica. Entonces o bien $f \circ d$ es una métrica equivalente con d ó $f \circ d$ es una métrica uniformemente discreta. Además, f es continua en $[0, \infty)$ si y sólo si es continua en 0 ver referencia [**2**] al [**8**]. Por el Teorema 3.9, obtuvimos que, cualquier función que preserva la métrica-ultramétrica es discontinua en 0 y $f \circ d$ es una métrica uniformemente discreta para toda métrica d. Enunciamos esto en el siguiente corolario.

Corolario 3.10. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función que preserva la métrica-ultramétrica. Entonces

i) $f \circ d$ es una métrica uniformemente discreta para cada métrica d,

ii) f es discontinua en 0 y es continua en $(0, \infty)$.

Demostración. Por el Teorema 3.9, existe una constante $c > 0$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ c & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Así, ii) se sigue inmediatamente. Para ver el inciso i), sea (X, d) un espacio métrico, entonces

$$(f \circ d)(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ c & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Pongamos $\epsilon = \frac{c}{2}$. Tenemos que $\epsilon > 0$ y $B_{f \circ d}(x, \epsilon) = \{x\}$ para cada $x \in X$. □

Para concluir este trabajo, centraremos nuestra atención en la clase $\mathcal{UM}$. Primeramente daremos una caracterización de ésta; para ello emplearemos la noción de tripletas triangulares.

Definición 3.11. Una tripleta triangular, es una terna (a, b, c) con $a, b, c \geqslant 0$ tales que $a \leqslant b + c$, $b \leqslant a + c$ y $c \leqslant a + b$. Denotemos por $\triangle$ el conjunto de las tripletas triangulares.

En la siguiente definición, introducimos un tipo especial de tripletas triangulares que nos serán de utilidad para caracterizar funciones que preservan las ultramétricas.

Definición 3.12. Una tripleta (a, b, c) con $a, b, c \geqslant 0$ será llamada tripleta ultra-triangular si $a \leqslant max\{b, c\}$, $b \leqslant max\{c, a\}$ y $c \leqslant max\{a, b\}$. Denotemos por $\triangle_\infty$ el conjunto de las tripletas ultra-triangulares.

Dado que, compararemos las propiedades de las funciones f en $\mathcal{UM}$ con las de $\mathcal{M}$, primero establecemos una caracterización de las funciones que preservan la métrica en términos de tripletas triangulares.

Teorema 3.13. Suponga que f creciente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalente
1) f preserva la métrica,
2) para cada $(a, b, c) \in \triangle$, se tiene que, $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle$,
3) para cada $(a, b, c) \in \triangle$, se tiene que, $f(a) \leqslant f(b) + f(c))$.

Demostración. La prueba puede ser consultada, en [**9**]. $\square$

De manera similar al Teorema 3.13, obtenemos una caracterización de las funciones en $\mathcal{UM}$ en términos de tripletas ultra-triangulares. Antes de hacerlo veamos los siguientes lemas.

Lema 3.14. Si $(a, b, c) \in \triangle_\infty$, entonces (i) $a \leqslant b = c$ o (ii) $b \leqslant c = a$ o (iii) $c \leqslant a = b$.

Demostración. Sea $(a, b, c) \in \triangle_\infty$ y supongamos que a, b, c son todos distintos. Sin perder generalidad, podemos suponer que $a < b < c$. Entonces $max\{a, b\} < c$ lo que contradice al hecho que $(a, b, c) \in \triangle_\infty$. Así, a, b, c no pueden ser todos distintos. Si $a = b$, entonces $c \leqslant max\{a, b\} = a$ y (iii) se satisface. Similarmente $a = c$, implica que, $b \leqslant max\{a, c\} = c$ y (ii) se cumple y si $b = c$, entonces lo hace (i). $\square$

Lema 3.15. Sean (X, d) un espacio ultra-métrico y x, y, z puntos en X, se sigue que, la terna $(d(x, y), d(x, z), d(z, y))$ es una tripleta ultra-triangular. Recíprocamente, si (a, b, c) es una tripleta ultra-triangular, entonces existe un espacio ultra-métrico (X, d) y puntos $x, y, z \in X$ tales que $(a, b, c) = (d(x, y), d(x, z), d(z, y))$.

Demostración. La primera parte se sigue de la desigualdad ultra-métrica de d. Para ver la otra parte, supongamos que, $(a, b, c) \in \triangle_\infty$. Por el Lema 3.14, podemos suponer que, $a \leqslant b = c$ (los otros casos pueden ser probados similarmente). Sean $X = \{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde $A = (-\frac{a}{2}, 0)$, $B = (\frac{a}{2}, 0)$ y $C = (0, \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2})$. Sea d_2 la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$ y $d = d_2|_X$. Entonces (X, d) es un espacio ultra-métrico y $(a, b, c) = (d_2(A, B), d_2(A, C), d_2(C, B))$. $\square$

Teorema 3.16. Suponga que f creciente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalente
1) f preserva la ultra-métrica,
2) para cada $(a, b, c) \in \triangle_\infty$, se tiene que, $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle$,
3) para cada $0 \leqslant a \leqslant b$, se tiene que, $f(a) \leqslant 2f(b)$.

Demostración. $1) \to 2)$. Sean $f \in \mathcal{UM}$ y $(a, b, c) \in \triangle_\infty$. Por el Lema 3.15, existe un espacio ultra-métrico (X, d) y puntos $x, y, z \in X$ tales que $(a, b, c) = (d(x, y), d(x, z), d(z, y))$. Como $f \in \mathcal{UM}$, entonces $(X, f \circ d)$ es un espacio métrico. De aquí que, por la desigualdad triangular de $f \circ d$, obtenemos que, $((f \circ d)(x, y), (f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y))$ es una tripleta triangular. En otras palabras, $((f \circ d)(x, y), (f \circ d)(x, z), (f \circ d)(z, y)) \in \triangle$.

$2) \to 3)$. Supongamos que 2) se satisface. Sea $0 \leqslant a \leqslant b$. Entonces $(a, b, b) \in \triangle_\infty$. Así, por el supuesto, $(f(a), f(b), f(b)) \in \triangle$. Por lo que, $f(a) \leqslant f(b) + f(b) = 2f(b)$.

$3) \to 1)$. Supongamos que 3) se satisface. Sea (X, d) un espacio ultramétrico. Como f es flexible y $(f \circ d)(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, entonces resta por demostrar que, la desigualdad triangular es válida para $f \circ d$. Sean $x, y, z \in X$ puntos cualesquiera. Por el Lema 3.15, obtenemos que $((f\circ d)(x,y),(f\circ d)(x,z),(f\circ d)(z,y))\in\triangle_\infty$. Ahora, el Lema 3.14, nos permite suponer que, $d(x,y)\leqslant d(x,z)=d(z,y)$ (los otros casos se prueban de manera similar). Por el supuesto 3), concluimos que,

$$\begin{aligned}(f\circ d)(x,y)=f(d(x,y))&\leqslant 2f(d(x,z))\\&=f(d(x,z))+f(d(x,z))\\&=(f\circ d)(x,z)+(f\circ d)(x,z),\end{aligned}$$

y la prueba esta completa. $\square$

Para finalizar con este capítulo, damos un ejemplo para mostrar que la contención $\mathcal{M}\cup\mathcal{U}\subseteq\mathcal{UM}$ dada en la Proposición 3.2 es propia.

Ejemplo 3.17. Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{si } x\leqslant 1;\\ \frac{1}{2}, & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Sea d la métrica usual sobre $\mathbb{R}$. Entonces

$$(f\circ d)\Big(\frac{2}{3},2\Big)+(f\circ d)\Big(1,\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1=f(1)=(f\circ d)(1,2).$$

Tenemos que, $f\circ d$ no es una métrica y así $f\notin\mathcal{M}$. Dado que f no es creciente, $f\notin\mathcal{U}$ véase Teorema 3.3. En lo que sigue, aplicaremos el Teorema 3.16, para verificar que $f\in\mathcal{UM}$. Sean $0\leqslant a\leqslant b$ y consideremos los casos siguientes:

Caso 1). Si $\frac{1}{2}\leqslant b$, entonces $f(b)=b\geqslant\frac{1}{2}$ y así $2f(b)\geqslant 1\geqslant f(x)$ para toda $x\in[0,\infty)$. En particular, $2f(b)\geqslant 1\geqslant f(a)$.

Caso2). Si $b<\frac{1}{2}$, entonces $a<\frac{1}{2}$ y así $f(a)=a\leqslant b=f(b)<2f(b)$. En cualquier caso, hemos obtenido que $f(a)<2f(b)$, así $f\in\mathcal{UM}$. Como $f\notin\mathcal{M}$ y $f\notin\mathcal{U}$, se sigue que, $\mathcal{M}\cup\mathcal{U}\subsetneq\mathcal{UM}$.

Observación 3.18. i) A partir de los Ejemplos 3.5, 3.8 y 3.17 concluimos que las contenciones $\mathcal{MU}\subsetneq\mathcal{U}\cap\mathcal{M}$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{M}\subsetneq\mathcal{U}$, $\mathcal{M}\subsetneq\mathcal{U}\cup\mathcal{M}$ y $\mathcal{U}\cup\mathcal{M}\subsetneq\mathcal{UM}$ dadas en la Proposición 3.2 son propias.

ii) Si reemplazamos $\frac{1}{2}$ por una constante c en la definición de f dada en el Ejemplo 3.17 (esto es, $f(x)=x$ si $x\leqslant 1$ y $f(x)=c$ si $x>1$), entonces $f\in\mathcal{UM}$ si y sólo si $c\geqslant\frac{1}{2}$.

No es tarea difícil verificar que si $f\in\mathcal{M}$, entonces f es flexible. Extendemos este hecho para el caso de cualquier función $f\in\mathcal{M}\cup\mathcal{MU}\cup\mathcal{UM}\cup\mathcal{U}$.

Proposición 3.19. Si $f\in\mathcal{UM}$, entonces f es flexible.

Demostración. Supongamos que $f\in\mathcal{UM}$, entonces f preserva la ultramétrica-métrica. Para demostrar que, f es flexible, sea $x\in[0,\infty)$ tal que $f(x)=0$. Sea $X=\{A,B,C\}\in\mathbb{R}^2$, donde $A=(-\frac{x}{2},0)$, $B=(\frac{x}{2},0)$ y $C=(0,\frac{\sqrt{3}x}{2})$. Sean d_2 la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$ y $d=d_2|_X$ la restricción de d_2 sobre X. Entonces

$$d(A,B)=d(A,C)=d(B,C)=x.$$

Pero, por hipótesis (X,d) es ultramétrico; así, $f\circ d$ es una métrica.

$$f(0)=f(d(A,A))=(f\circ d)(A,A)=0 \quad \text{y} \quad (f\circ d)(A,B)=f(d(A,B))=f(x)=0.$$

De aquí que $A=B$, o sea, $(-\frac{x}{2},0)=(\frac{x}{2},0)$. Luego, $x=0$. $\square$

Corolario 3.20. Si $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ está en $\mathcal{M}$, $\mathcal{MU}$, $\mathcal{U}$, o $\mathcal{UM}$, entonces f es flexible.

Demostración. Por la Proposición 3.2, $\mathcal{UM} = \mathcal{M} \cup \mathcal{MU} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{UM}$. Luego, el resultado se sigue de la Proposición 3.19. $\square$

Para dar continuidad con este tema de investigación, invitamos al lector a informarse si existe alguna cita donde den respuesta a las siguientes preguntas:

Pregunta 1: ¿Bajo qué condiciones una función $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisface que, para cualquier $\tau-$distancia d en X, se cumple que, $f \circ d$ es una τ-distancia en X?

Pregunta 2: ¿Bajo qué condiciones una función $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisface que, para cualquier $\tau-$distancia d en X, la función $f \circ d$ es una τ-distancia equivalente a d?

Referencias

[1] J. Borsik y J. Doboš, *On metric preserving functions*, Real Analysis Exchange, vol. 13, no. 1, (1988), 285-293.

[2] J. Borsik y J. Doboš, *Functions whose composition with every metric is a metric*, Mathematica Slovaca, vol. 31, no. 1, (1981), 3-12.

[3] S. Bosch, U. Guntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, vol. 261 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1984.

[4] M. Cencelj, D. Repovš, and M. Zarichnyi, *Max-min measures on ultrametric spaces*, Topology Appl., vol. 160, no. 5, (2013), 673-681.

[5] J.P. Coleman, *Nonexpansive algebras*, Algebra Universalis, vol. 55, no. 4, (2006), 479-494.

[6] P. Corazza, *Introduction to Metric-Preserving Functions*, Amer. Math. Montly, vol. 106, no. 4, (1999), 309-323.

[7] P. P. Das, *Metricity preserving transforms*, Pattern Recognition Letters, vol. 10, no. 2, (1989), 73-76.

[8] J. Doboš, *Metric Preserving Functions*, http://web.science.upjs.sk/jozefdobos/wpcontent /uploads/2012/03/mpf1.pdf.

[9] R. Martínez, J. E. Pérez y A. Galicia *Funciones que preservan la métrica.* Capítulo 6 en Topología y Sistemas Dinámicos IV. Editores: J. Angoa, J. Arrazola y R. Escobedo. Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, B. Universidad Autónoma de Puebla, 2011.

[10] P. Pongsriiam and Imchit Termwuttipong, *Remarks on Ultrametrics and Metric-Preserving Functions*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis vol 2014, Article ID 163258, 9 pages http://dx.doi.org/10.1155/2014/163258.

[11] S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, *Ultrametric spaces and logic progamming*, Journal of logic Programming, vol. 42, no. 2, (2000), 59-70.

[12] T. Suzuki, *ω-distances and τ-distances*, Nonlinear Functional Analysis and Applications, vol. 13, no. 1, (2008), 15-27.

[13] W. A. Wilson, *On certain types of continuous transformations of metric spaces*, American Journal of Mathematics, vol. 57, no.1, (1935), 62-68.

[14] K. Wlodarczyk y R. Plebaniak, *Contractions of Banac, Tarafdar, Meir-Keeler, Ćirić-Jachymski-Matkowski y Suzuki types and fixed points in uniform spaces with generalized pseudodistances*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 404, no.2, (2013), 338-350.

[15] E. Yurova, *On ergodicity of p-adic dynamical Systems for arbitrary prime p*, p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications, vol. 5, no. 3, (2013), 239-241.

Correos electrónicos:
`reinaldo.martinez.c@uatx.mx` (Reinaldo Martínez Cruz),
`hernandezpinaemmanuel@gmail.com` (Emmanuel Hernández Piña).

Capítulo 11

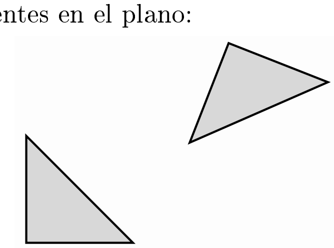
Espacios de convergencia. Parte I: ¿por qué?

Frédéric Mynard
New Jersey City University, Jersey City, USA

El propósito de esta nota es defender la propuesta que los espacios de convergencia, aunque mucho menos conocidos que los espacios topológicos, constituyen un mejor marco para considerar las preguntas que interesan a la topología como disciplina. Propongo también que la dificultad que experimentan muchos estudiantes ante el nivel de abstracción encontrado en una primera clase de topología no sería significativamente superior si se enseñara directamente la estructura más general pero también más natural de espacio de convergencia, considerando los espacios topológicos sólo como un importante caso particular. Por lo tanto, no me dirijo sólo a los docentes y estudiantes de postgrado ya cómodos con varias herramientas topológicas sino también a estudiantes que todavía no tienen ninguna familiaridad con la topología. Al pensar en ell@s tengo que empezar la presente discusión hablando de lo que se trata de hacer en topología. Así que voy a arriesgarme a charlar sobre el tema a grandes rasgos de manera informal y heurística, asumiendo sin vergüenza la parcialidad e ingenuidad de mi punto de vista, así como también sus omisiones, simplificaciones y aproximaciones. ([1])

1. ¿Cuál es el propósito de la topología?

A menudo se escucha que la topología es un tipo de geometría en la cual los objetos geométricos se pueden deformar como si fueran de caucho. Para entender este lema, consideren la situación familiar de dos triángulos congruentes en el plano:



[1]No intentamos de ninguna forma dar un panorama histórico del desarrollo de la teoría de espacios de convergencia, y tampoco pretendemos dar ningún resultado nuevo. Como la terminología ha cambiado con los años, nos quedamos con terminología y notaciones consistentes con las de **[3]** y no nos preocupamos por aclarar nombres alternativos que aparecieron en la literatura.

Todos estamos acostumbrados a considerarlos «el mismo triángulo». En términos más sofisticados, los interpretamos como iguales porque en geometría euclidiana consideramos objetos «módulo isometrías», es decir, si existe una isometría (una biyección que conserva las distancias) entre dos objetos, entonces tenemos dos versiones del mismo objeto. En topología también consideramos objetos módulo una cierta clase de transformaciones, pero esa clase es mucho más amplia: a veces son llamadas «deformaciones continuas» o más exactamente *homeomorfismos*, es decir, biyecciones que son continuas con función inversa también continua. En nuestro caso euclidiano, se pueden pensar esas deformaciones continuas como el tipo de transformación experimentada por un trozo de arcilla bajo la rueda del alfarero, mientras no se corta ni se pincha ni se pega nada.

Así consideramos como iguales muchos objetos que no son nada parecidos, desde el punto de vista del geómetra euclidiano, por usar una clase de funciones más amplia como estándar de igualdad. Esta situación da origen al chiste que presenta al topólog@ como alguien que no puede distinguir entre la superficie de una rosquilla y la de una taza de café, dos superficies homeomorfas y por lo tanto igualadas por topólog@s. Dentro de ese contexto una preocupación importante es *distinguir* objetos. Para conseguirlo se necesita identificar propiedades preservadas por deformaciones continuas o *invariables*. Al observar una discrepancia de ese tipo de propiedad entre dos objetos se encuentra una diferencia más profunda que lo que se puede identificar a primera vista si sólo nos enfocamos en cuestiones de medidas. El estudio de propiedades invariables y su uso para clasificar objetos módulo transformaciones continuas constituye una parte importante de la topología.

Un aspecto fundamental que hasta ahora hemos pasado por alto es el significado de *continua*. Dicho significado queda más o menos claro en el caso de una función entre espacios euclidianos por la presencia de una noción natural de distancia (euclidiana): la distancia entre las imágenes de dos puntos es tan pequeña como queramos si la distancia entre los puntos es lo suficientemente pequeña, es decir, simbólicamente,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

como lo hubiera visto el estudiante de cálculo en el bachillerato. El primer encuentro con la noción de continuidad es entonces en términos de preservación de límites, lo cual es la forma más natural de pensarla.

Una *topología* es una estructura sobre un conjunto que permite hablar de continuidad de forma abstracta, así como también de convergencia. Históricamente hubo otras estructuras propuestas para cumplir con el mismo propósito, pero la topología se impuso como la estructura adecuada, por su definición simple ([2]), las diversas formas equivalentes de describir la estructura, y su generalidad adecuada para capturar varios modos de convergencia encontrados en análisis que no podían capturar las distancias, como la convergencia puntual de sucesiones de funciones. Por lo tanto, la topología forma una parte importante de los fundamentos, no sólo de varios aspectos de geometría, sino también del análisis, y permite formalizar, como vimos, convergencia y continuidad, pero también nociones de «proximidad», de conectividad, de dimensión, y muchas más.

Sin embargo, vamos a ver que el marco topológico sufre de varias limitaciones e intuitivamente resulta poco natural. Por ejemplo, la continuidad de una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos se define de una forma que no se relaciona directamente con la preservación de límites:

[2]Una topología sobre un conjunto X es una familia de subconjuntos de X cerrada por intersecciones de un número finito de miembros y por uniones arbitrarias, que también cuenta con $\emptyset$ y X como miembros. Los miembros de la topología se llaman *abiertos*.

si O es un subconjunto abierto de Y, su pre-imagen

$$f^{-}(O) = \{x \in X : f(x) \in O\}$$

también es abierta en X. Si bien se puede caracterizar la continuidad en términos de preservación de límites, eso requiere una re-interpretación de la estructura, como veremos a continuación.

La propuesta que defiende las presentes notas es que sería más fácil describir la estructura directamente en términos de límites. Como veremos, la estructura que resulta es más general y sin embargo conlleva también muchas ventajas sobre estructuras topológicas.

2. ¿Qué objetos considerar para límites?

Mi tesis es que los *límites*, encontrados y manipulados en cálculo antes de que tenga lugar cualquier consideración topológica, deberían formar la noción primitiva del marco topológico. El primer encuentro con límites formales ocurre habitualmente en el contexto de sucesiones en espacios euclidianos, como en la recta real. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $\ell \in \mathbb{R}$, decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* ℓ, simbólicamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell,$$

si el ir lo suficientemente profundo en la sucesión nos permite asegurarnos que la distancia entre el límite ℓ y los puntos x_n de la sucesión sea tan pequeña como queremos. Formalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \iff \forall\epsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant k\ |x_n - \ell| < \epsilon. \tag{11.1}$$

La primera observación es que, si bien aparece naturalmente la consideración del límite de una sucesión y queremos una teoría que lo permita, ese límite no depende de la sucesión misma sino, en el caso de una sucesión sin repetición, solo del conjunto subyacente $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, porque (11.1) se reformula (en este caso) como

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \iff \forall\epsilon > 0\ \operatorname{card}(S \setminus (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)) < \infty.$$

La esencia de una sucesión (y de su generalización llamada «net» en inglés y red, en español) es el orden; sin embargo, el orden es irrelevante en lo que respecta a la convergencia: si $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ entonces también $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$ para cualquier permutación φ de los indices. Esto indica que las sucesiones (o las redes) no son los objetos adecuados para hablar de convergencia.

¿Qué objeto considerar entonces? Empezamos notando que la relación de convergencia (11.1) se puede ver como una relación entre dos familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$: la familia $\mathcal{B}(\ell) = \{(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon) : \epsilon > 0\}$ de las bolas centradas en ℓ y la familia $\mathcal{X} = \{\{x_n : n \geqslant k\} : k \in \mathbb{N}\}$ de las colas de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Explícitamente $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si cada miembro de $\mathcal{B}(\ell)$ contiene como subconjunto un miembro de $\mathcal{X}$. Esa observación nos lleva a la siguiente definición: si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos familias de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{A}$ es *mas fina que* $\mathcal{B}$ (o que $\mathcal{B}$ es mas *gruesa* que $\mathcal{A}$) y escribimos $\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B}$, si cada elemento de $\mathcal{B}$ contiene como subconjunto un elemento de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B} \iff \forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{A}\ A \subset B. \tag{11.2}$$

En esos términos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \iff \mathcal{X} \geqslant \mathcal{B}(\ell). \tag{11.3}$$

Resulta útil notar que la relación $\geqslant$ sobre el conjunto 2^{2^X} de las familias de subconjuntos de X es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica. El procedimiento estándar para obtener un orden es notar que la relación $\approx$ definida sobre 2^{2^X} por

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \geqslant \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \geqslant \mathcal{A}$$

es una relación de equivalencia y considerar el orden inducido sobre el conjunto cociente $2^{2^X}/\approx$. Al notar que

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^{\uparrow} = \mathcal{B}^{\uparrow},$$

donde

$$\mathcal{A}^{\uparrow} := \{C \subset X : \exists A \in \mathcal{A}\ A \subset C\},$$

el cociente $2^{2^X} / \approx$ se puede identificar con la familias *isotonas* de subconjuntos de X, es decir, las que satisfacen $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\uparrow}$. Así concluimos que la convergencia (11.1) que ya habíamos reformulado como (11.3) no se trata realmente de las familias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{B}(\ell)$ sino de las familias isotonas $\mathcal{X}^{\uparrow}$ and $\mathcal{B}(\ell)^{\uparrow}$. Se podría desarrollar una teoría de convergencias para familias isotonas, también llamadas a veces «stacks» en inglés, pero resulta en un marco demasiado general. Nos conviene más explotar una propiedad adicional común a $\mathcal{X}$ y a $\mathcal{B}(\ell)$: las dos familias son cerradas por intersecciones de un número finito de sus miembros. Así que $\mathcal{X}^{\uparrow}$ and $\mathcal{B}(\ell)^{\uparrow}$ son *filtros* en el sentido de la siguiente definición:

Definición 2.1. $\mathcal{F} \subset 2^X$ es un *filtro* (sobre X) si $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\uparrow}$ y

$$F_1 \in \mathcal{F} \wedge F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}.$$

Denotaremos $\mathbb{F}X$ el conjunto de todo los filtros sobre X.

El marco general es por lo tanto una teoría que permite considerar límites para filtros e implícitamente también para familias $\mathcal{B} \subset 2^X$ por las cuales $\mathcal{B}^{\uparrow} \in \mathbb{F}X$, como por ejemplo la familia $\mathcal{X}$ de colas de una sucesión, la cual determina la convergencia de la sucesión.

Tal familia $\mathcal{B}$ se llama una *base de filtro* o una base del filtro $\mathcal{B}^{\uparrow}$ *generado por* $\mathcal{B}$. Una familia $\mathcal{B} \subset 2^X$ es una base de filtro si y sólo si para cualesquier elementos B_1 y B_2 de $\mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ con $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Si restringimos la relación (11.2) a las bases de filtro, las bases de filtro equivalentes por $\approx$ generan el mismo filtro de tal forma que cada clase de equivalencia por $\approx$ contiene exactamente un filtro.

3. Un poco de topología desde el punto de vista de la convergencia

Aunque haya varias formas equivalentes de definir la estructura, la definición clásica de una topología es la siguiente:

Definición 3.1. Una *topología* τ sobre un conjunto X es una familia $\tau \subset 2^X$ de subconjuntos de X que satisface:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;
2. $U \in \tau$ y $V \in \tau \Longrightarrow U \cap V \in \tau$;
3. $\mathcal{A} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Los elementos de τ son llamados *abiertos* o *τ-abiertos* si se considera más de una topología a la vez. Un conjunto equipado con una topología se llama un *espacio topológico.*

Dado que queremos hablar de convergencia y continuidad, primero recordaremos las definiciones clásicas:

Definición 3.2. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos (X, τ) and (Y, θ) es *continua* si

$$U \in \theta \Longrightarrow f^{-}(U) \in \tau. \tag{11.1}$$

Definición 3.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X *converge a* $\ell \in X$ (en τ), denotado $\ell \in \lim_{n\to\infty} x_n$, si

$$\forall U \in \tau\, (\ell \in U \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant k\ \ x_n \in U)\,. \tag{11.2}$$

Será conveniente denotar

$$\mathcal{O}_\tau(x) := \{U \in \tau : x \in U\}$$

la familia de todos los conjuntos abiertos que contienen x, y notar que $\mathcal{O}_\tau(x)$ es una base de filtro. Clásicamente se llama *vecindad de x* a cualquier subconjunto de X que contiene un elemento de

$\mathcal{O}_\tau(x)$, es decir, la familia de todas las vecindades de x es el filtro $\mathcal{O}_\tau(x)^\uparrow$ que denotaremos $\mathcal{N}_\tau(x)$ y llamaremos *filtro de vecindades de* x.

Dada la discusión en la sección anterior, debería quedar claro que

$$\ell \in \lim_{n\to\infty} x_n \iff \mathcal{X} \geqslant \mathcal{O}_\tau(\ell) \iff \mathcal{X}^\uparrow \geqslant \mathcal{N}_\tau(\ell),$$

lo cual sugiere la siguiente definición:

Definición 3.4. Un filtro $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$ sobre un espacio topológico (X,τ) *converge a* $x \in X$ denotado $x \in \lim_\tau \mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{N}_\tau(x)$.

La convergencia de una sucesión se ve entonces naturalmente como la convergencia del filtro $\mathcal{X}^\uparrow$ asociado con la sucesión, porque como ya vimos, no depende de la sucesión misma sino del filtro $\mathcal{X}^\uparrow$.

Con esas notaciones, $\lim_\tau \mathcal{F}$ es el conjunto (potencialmente vacío) de todo los puntos a donde converge $\mathcal{F}$. Nos será útil notar que cuasi por definición

$$\mathcal{F} \geqslant \mathcal{H} \Longrightarrow \lim{}_\tau \mathcal{F} \supset \lim{}_\tau \mathcal{H}, \tag{11.3}$$

y

$$\forall x \in X \quad x \in \lim{}_\tau \{x\}^\uparrow \tag{11.4}$$

porque x pertenece a todos sus vecindades, es decir, $\{x\}^\uparrow \geqslant \mathcal{N}_\tau(x)$.

Por definición de vecindad, un conjunto es abierto si y solo si es vecindad de todos sus elementos:

$$O \in \tau \iff O \in \bigcap_{x\in O} \mathcal{N}_\tau(x). \tag{11.5}$$

En vista de la definición 3.4, (11.5) significa que si un filtro converge a un punto de O, o sea, $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{N}_\tau(x)$ con $x \in O$, entonces $O \in \mathcal{F}$. Así que se caracterizan fácilmente los conjuntos abiertos directamente en términos de límites:

$$O \in \tau \iff \left(\lim{}_\tau \mathcal{F} \cap O \neq \emptyset \Longrightarrow O \in \mathcal{F}\right). \tag{11.6}$$

Observe que la familia $\mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x)) \subset 2^X$ definida por

$$\mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x)) := \bigcup_{V\in\mathcal{N}_\tau(x)} \bigcap_{t\in V} \mathcal{N}_\tau(t), \tag{11.7}$$

es decir que $A \in \mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x))$ si existe $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tal que $A \in \bigcap_{t\in V} \mathcal{N}_\tau(t)$, es un filtro. Además,

$$\mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x)) = \mathcal{N}_\tau(x). \tag{11.8}$$

Para verlo se debe notar que $\mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x)) \subset \mathcal{N}_\tau(x)$ porque si $A \in \bigcap_{t\in V} \mathcal{N}_\tau(t)$ para algún $V \in \mathcal{N}_\tau(x)$, en particular $A \in \mathcal{N}_\tau(x)$ porque $x \in V$. Recíprocamente, si $V \in \mathcal{N}_\tau(x) = \mathcal{O}_\tau(x)^\uparrow$ existe $U \in \mathcal{O}_\tau(x)$ con $U \subset V$ y $U \in \mathcal{N}_\tau(\mathcal{N}_\tau(x))$ por (11.5).

Dada la definición 3.4, la continuidad se puede interpretar de la forma «correcta» y «natural». Para formularla necesitamos la noción de *filtro imagen* de un filtro $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$ bajo una función $f : X \to Y$:

$$f[\mathcal{F}] := \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}^\uparrow,$$

lo cual se puede también describir de forma equivalente como $\{B \subset Y : f^-(B) \in \mathcal{F}\}$.

Proposición 3.5. Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos (X,τ) y (Y,θ) es continua si y solo si

$$x \in \lim{}_\tau \mathcal{F} \Longrightarrow f(x) \in \lim{}_\theta f[\mathcal{F}], \tag{11.9}$$

para todo $x \in X$ y todo $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$. **Demostración.** Si $f : X \to Y$ es continua y $x \in \lim_\tau \mathcal{F}$, dado $U \in \mathcal{O}_\theta(f(x))$, vemos que $f^-(U) \in \mathcal{O}_\tau(x)$ por continuidad. Además $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{N}(x) = \mathcal{O}_\tau(x)^\uparrow$ así que

$f^-(U) \in \mathcal{F}$ y entonces $f(f^-(U)) \in f[\mathcal{F}]$. Notando que $f(f^-(U)) \subset U$ y $f[\mathcal{F}]$ es isotona, concluimos que $U \in f[\mathcal{F}]$ y por lo tanto $f[\mathcal{F}] \geqslant \mathcal{O}_\theta(f(x))$, es decir, $f(x) \in \lim_\theta f[\mathcal{F}]$.

Recíprocamente, supongamos que (11.9) es válido para todo $x \in X$ y $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$, y que $U \in \theta$. Vemos que $f^-(U) \in \tau$ vía (11.6): si $x \in \lim_\tau \mathcal{F} \cap f^-(U)$ entonces, por (11.9), $f(x) \in \lim_\theta f[\mathcal{F}] \cap U$ y, por (11.6), $U \in f[\mathcal{F}]$ porque $U \in \theta$, lo cual es equivalente a $f^-(U) \in \mathcal{F}$. Concluimos por (11.6) que $f^-(U) \in \tau$. $\square$

De la misma manera, la definición clásica de conjunto *cerrado,* a saber el complemento de un conjunto abierto, no da mucha idea sobre lo que significa la noción en términos de límites. Sin embargo, es fácil aclarar que «cerrado» significa lo que se espera que signifique, es decir, que está «cerrado por límites»:

Proposición 3.6. Un subconjunto C de un espacio topológico (X, τ) es cerrado si y sólo si

$$(\mathcal{F} \in \mathbb{F}X \wedge C \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \lim_\tau \mathcal{F} \subset C. \tag{11.10}$$

Demostración. Supongamos que C sea cerrado, que $C \in \mathcal{F}$ y que $x \in \lim_\tau \mathcal{F}$. Si $x \notin C$ entonces $x \in \lim_\tau \mathcal{F} \cap (X \setminus C)$ y $X \setminus C \in \mathcal{F}$ por (11.6), porque $X \setminus C$ es abierto. Es una contradicción con $C \in \mathcal{F}$ porque $\emptyset = C \cap (X \setminus C) \notin \mathcal{F}$.

Recíprocamente, si (11.10) queremos mostrar que $O = X \setminus C$ es abierto, vía (11.6), es decir, si $\mathcal{H} \in \mathbb{F}X$ y $x \in \lim_\tau \mathcal{H} \cap O$ necesitamos justificar que $O \in \mathcal{H}$. Si por el contrario $O \notin \mathcal{H}$, entonces $H \not\subset O$ para todo $H \in \mathcal{H}$ porque $\mathcal{H}$ es isotona. Por lo tanto $H \cap C \neq \emptyset$, para todo $H \in \mathcal{H}$, y entonces $\mathcal{F} = \{H \cap C : H \in \mathcal{H}\}^\uparrow$ es un filtro más fino que $\mathcal{H}$ con $C \in \mathcal{F}$. Por (11.10) y (11.3), concluimos que $\lim_\tau \mathcal{H} \subset C$, lo cual no es compatible con nuestra hipótesis que $x \in \lim_\tau \mathcal{H} \cap O$. Entonces $O \in \mathcal{H}$ y C es un conjunto cerrado. $\square$

Como cualquier unión de conjuntos abiertos es abierta, cualquier intersección de conjuntos cerrados es cerrada, así que, para todo subconjunto A de un espacio topológico existe el conjunto cerrado mas pequeño que lo contenga. Se le llama *cerradura de* A y lo denotaremos $\mathrm{cl}_\tau A$. Dado la proposición 3.6,

$$\mathrm{cl}_\tau A = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}X, A \in \mathcal{F}} \lim_\tau \mathcal{F}, \tag{11.11}$$

lo cual da una intuición clara de cómo formar la cerradura, agregando a A (que es un subconjunto de $\bigcup_{A \in \mathcal{F} \in \mathbb{F}X} \lim_\tau \mathcal{F}$ por (11.4)) los límites de filtros sobre A.

Observación 3.7. Es importante darse cuenta que en general no son suficientes las sucesiones para caracterizar la continuidad como en la proposición 3.5, o la cerradura como en (11.11). Por supuesto, funciones continuas preservan los límites de sucesiones (en el sentido clásico) y la cerradura de un conjunto contiene los límites de las sucesiones de sus elementos. Pero en ambos casos se necesitan filtros generales, y no sólo los asociados con sucesiones, para la otra dirección, como lo muestra el ejemplo siguiente.

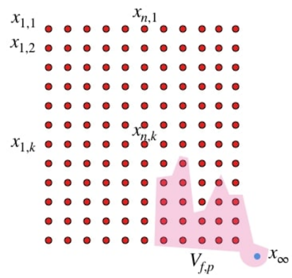
Ejemplo 3.8. Consideren la topología τ sobre

$$X = \left\{x_{n,k} : (n, k) \in \mathbb{N}^2\right\} \cup \{x_\infty\}$$

dada por todos los subconjuntos de $X \setminus \{x_\infty\}$ y los conjuntos

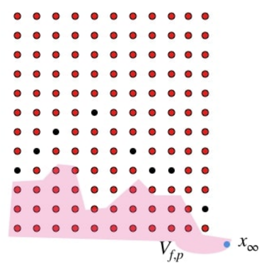
$$V_{f,p} = \{x_{n,k} : n \geqslant p, k \geqslant f(n)\} \cup \{x_\infty\},$$

donde $p \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.



Dejamos al lector verificar que τ es una topología.

Observemos que no hay ninguna sucesión de puntos de $X \setminus \{x_\infty\}$ que converja a x_∞, porque cualquier sucesión de ese tipo tendría que encontrarse con un número infinito de «columnas» $\{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ para poder encontrarse con los conjuntos $V_{f,p}$ cuando p es lo suficientemente grande. Entonces se podría encontrar una subsucesión cuyo conjunto subyacente se interseca con cada columna o bien solamente en un punto o en ninguno. Como subsucesión de una sucesión convergente a x_∞, también tendría que converger a x_∞. Pero eso es imposible, porque se puede formar un conjunto $V_{f,p}$ seleccionando en cada $\{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ solo los $x_{n,k}$ con k más grande que el punto de la subsucesión. El conjunto $V_{f,p}$ que resulta no tiene intersección con los puntos de la subsucesión.



Sin embargo, $x_\infty \in \mathrm{cl}_\tau(X \setminus \{x_\infty\})$ porque el filtro generado por

$$\left\{V_{f,p} \setminus \{x_\infty\} : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, p \in \mathbb{N}\right\}$$

converge a x_∞.

La función identidad de (X, τ) a $(X, 2^X)$ preserva los límites de sucesiones porque acabamos de ver que las únicas sucesiones que convergen en τ son las que se vuelven constantes después de un número finito de términos. Pero no es una función continua. Por ejemplo, para cualquier elección de p y f el conjunto $U = \{x_\infty\} \cup (X \setminus V_{p,f})$ es abierto en 2^X pero no en τ.

Recapitulando, vimos en esta sección que las nociones básicas de topología se pueden reformular en términos de una noción natural de convergencia de filtros, la cual permite interpretaciones que encontramos más intuitivas. Se podría (y en mi opinión se debería) plantear la estructura directamente en esos términos, como lo haremos a continuación.

En vista de (11.7) y (11.8), primera necesitamos una definición: si $\mathcal{N}(\cdot) : X \to \mathbb{F}X$ and $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$ definimos el *contorno de* $\mathcal{N}(\cdot)$ *a lo largo de* $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{x \in F} \mathcal{N}(x),$$

lo cual pertenece a $\mathbb{F}X$ ([3]).

[3] Si $A \subset B$ y $A \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \in \bigcap_{x \in F} \mathcal{N}(x)$ y entonces $B \in \bigcap_{x \in F} \mathcal{N}(x)$ porque cada $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x)^{\uparrow}$. Si $A \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ y $B \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ existen F_A y F_B en $\mathcal{F}$ con $A \in \bigcap_{x \in F_A} \mathcal{N}(x)$ y $B \in \bigcap_{x \in F_B} \mathcal{N}(x)$. Dado que

Definición 3.9. Una *función de vecindad* es una función $\mathcal{N}(\cdot) : X \to \mathbb{F}X$ que satisface

$$\mathcal{N}(x) \leqslant \{x\}^{\uparrow} \tag{11.12}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = \mathcal{N}(x) \tag{11.13}$$

para todo $x \in X$.

Cada función de vecindad $\mathcal{N}(\cdot)$ induce una noción de conjuntos abiertos dada por (11.5) y una de convergencia de filtros definida por

$$x \in \lim \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \geqslant \mathcal{N}(x). \tag{11.14}$$

La noción de función de vecindad (o la noción de convergencia asociada) ofrece una presentación equivalente de topologías:

Proposición 3.10. La familia τ de todos los conjuntos abiertos en el sentido de (11.5) por una función de vecindad $\mathcal{N}(\cdot)$ es una topología sobre X para la cual $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_\tau(x)$ para todo $x \in X$, de tal forma que (11.14) es la convergencia en τ.

Demostración. Queda claro que $X \in \bigcap_{x\in X} \mathcal{N}(x)$ porque X es un miembro de cada familia isotona, en particular de cada filtro. También $\emptyset \in \bigcap_{x\in\emptyset} \mathcal{N}(x) = 2^X$. Si $O \in \bigcap_{x\in O} \mathcal{N}(x) \subset \bigcap_{x\in V\cap O} \mathcal{N}(x)$ y $V \in \bigcap_{x\in V} \mathcal{N}(x) \subset \bigcap_{x\in V\cap O} \mathcal{N}(x)$ entonces $O \cap V \in \bigcap_{x\in V\cap O} \mathcal{N}(x)$ porque $\bigcap_{x\in V\cap O} \mathcal{N}(x)$ es un filtro como intersección de filtros. Si $O_i \in \bigcap_{x\in O_i} \mathcal{N}(x)$ para todo $i \in I$ entonces $\bigcup_{j\in I} O_j \in \bigcap_{x\in O_i} \mathcal{N}(x)$ para todo $i \in I$, porque $O_i \subset \bigcup_{j\in I} O_j$ y $\bigcap_{x\in O_i} \mathcal{N}(x)$ es un filtro. Por lo tanto, $\bigcup_{j\in I} O_j \in \bigcap_{x\in\bigcup_{j\in I} O_j} \mathcal{N}(x)$ y $\bigcup_{j\in I} O_j \in \tau$. Entonces τ es una topología. Finalmente, $\mathcal{N}_\tau(x) = \mathcal{N}(x)$ para todo $x \in X$, porque la condición $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = \mathcal{N}(x)$ implica que $\mathcal{O}_\tau(x)^{\uparrow} = \mathcal{N}(x)$: por definición $\mathcal{O}_\tau(x) \subset \mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) \subset \mathcal{N}(x)$. Recíprocamente, si $V \in \mathcal{N}(x)$, observemos que

$$x \in \operatorname{int} V := \{t \in X : V \in \mathcal{N}(t)\} \subset V.$$

Para concluir que $V \in \mathcal{O}_\tau(x)^{\uparrow}$ es suficiente ver que $\operatorname{int} V$ es abierto: Si $t \in \operatorname{int} V$ entonces $V \in \mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(\mathcal{N}(t))$ y $V \in \bigcap_{s\in U} \mathcal{N}(s)$ para algún $U \in \mathcal{N}(t)$, de tal manera que $U \subset \operatorname{int} V$, es decir, $\operatorname{int} V \in \mathcal{N}(t)$. ☐

4. Subespacios y cocientes topológicos

Acabamos de ver que las topologías se pueden caracterizar por la convergencia de filtros (11.14), convergencia que depende de una función de vecindad como en la definición 3.9. Antes de pasar a generalizaciones naturales, vamos a considerar uno de los fallos estructurales de las topologías como marco general (en el sentido que dentro de ese marco las operaciones estándares no se comportan bien): *los cocientes no son hereditarios.* ¿Qué significa eso? Empezaremos por hablar de *cocientes.*

Dado un espacio topológico (X, τ) y una relación de equivalencia $\sim$ sobre X, se quiere poner de forma canónica una topología sobre el conjunto cociente $X/\sim$. Naturalmente queremos que la sobreyección canónica $q : X \to X/\sim$ sea continua, lo cual significa que los conjuntos abiertos U de la topología θ sobre $X/\sim$ deben verificar $q^{-}(U) \in \tau$. La forma canónica de hacer eso que se ofrece es

$$U \in \theta \iff q^{-}(U) \in \tau,$$

lo cual define una topología llamada *topología cociente*. Cuando se considera un cociente de un espacio topológico se entiende que por defecto el conjunto cociente conlleva la topología cociente, que es la topología máxima sobre el conjunto cociente que vuelve la sobreyección canónica continua.

$F_A \cap F_B \in \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$, resulta que

$$A \cap B \in \bigcap_{x\in F_A\cap F_B} \mathcal{N}(x) \subset \mathcal{N}(\mathcal{F})$$

porque cada $\mathcal{N}(x)$ es un filtro.

Por otro lado, el adjetivo *hereditario* se refiere a *subespacios*. Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, se dota a A la ***topología*** $\tau_{|A}$ ***inducida por*** τ, definida por

$$O \in \tau_{|A} \iff \exists U \in \tau \ (U \cap A = O),$$

la cual convierte A en un *subespacio* (topológico) de X. Es útil notar que es la topología mínima que vuelve la función inclusión $i : A \to X$ (definida por $i(a) = a$ para todo $a \in A$) continua.

Regresando a cocientes: ¿En qué sentido podríamos considerar una forma de subcociente en esa situación? Tiene que ser un subconjunto B del cociente $X/\sim$, y tenemos dos formas naturales de ponerle una topología: la topología cociente por la restricción $q : q^{-}(B) \to B$ donde $q^{-}(B)$ tiene la topología inducida por la de X, o la topología inducida sobre B por la topología cociente de $X/\sim$. El cociente $X/\sim$ es *hereditario* si esas dos posibilidades resultan en la misma topología, para cualquier $B \subset X/\sim$. Como ya se anunció, los cocientes topológicos en general no son hereditarios, lo cual podemos ver hasta en espacios topológicos finitos:

Ejemplo 4.1. Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$ y $\sim$ la relación de equivalencia que identifica 3 y 2 de forma que la sobreyección canónica es $q : X \to Y = \{0, 1, 2\}$ con $q(0) = 0$, $q(1) = 1$, $q(2) = q(3) = 2$. La topología cociente sobre Y es la topología indiscreta $\{\emptyset, Y\}$, así que el subconjunto $B = \{0, 1\}$ de Y es indiscreto (con la topología $\{\emptyset, B\}$) como subespacio de Y, pero es discreto (con topología 2^B) con la topología cociente por $q : q^{-}(B) \to B$, cual es la topología inducida sobre B por X:

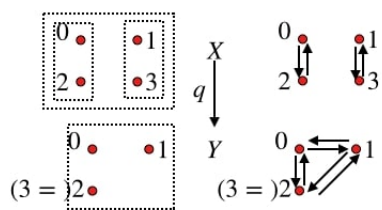


FIGURA 1. A la izquierda, los rectángulos representan los conjuntos abiertos no vacíos de X y de Y con la topología cociente. Los dos conjuntos abiertos no triviales de X son disjuntos pero «se juntan» en el cociente, porque $q^{-}(2)$ tiene puntos en cada uno. A la derecha, las flechas representan la convergencia de los filtros $\{x\}^{\uparrow}$ en esos dos mismos espacios.

¿Cómo arreglar ese tipo de fallo estructural de las operaciones topológicas? En muchos casos se puede pensar que el marco elegido es demasiado general y buscar condiciones adicionales para forzar el comportamiento esperado, pero en nuestro caso ya hemos observado el problema con espacios finitos, lo cual deja poca esperanza de encontrar una solución mediante la restricción del marco. Otra opción es pensar que el marco es demasiado pequeño para permitir que las operaciones se realicen de forma natural, un poco como a los números reales «les falta lugar» para factorizar, y los números complejos forman el marco más adecuado aún para considerar problemas formulados en los números reales.

5. Espacios pretopológicos

Para arreglar el problema encontrado en el ejemplo 4.1, vamos a considerar un primer nivel de generalización, a partir del punto de vista sobre topologías dado por las funciones de vecindad, pero después vamos a ver que no basta para aliviar todos los fallos estructurales de las topologías, lo cual nos va a llevar a la noción clave de espacio de convergencia.

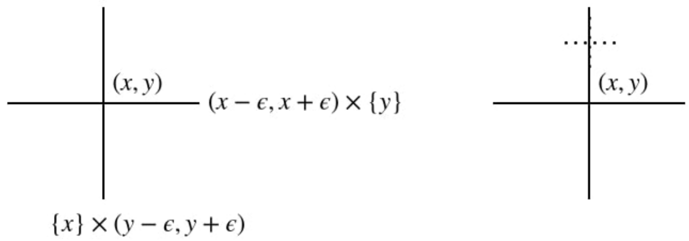


FIGURA 2. prevencidad de la pretopología de Féron

Definición 5.1. Una *pretopología* π sobre un conjunto X está dada por una función de *prevecindad* $\mathcal{V}_\pi(\cdot) : X \to \mathbb{F}X$ que solo tiene que satisfacer $\mathcal{V}_\pi(x) \leqslant \{x\}^\uparrow$ para todo $x \in X$.

De la misma manera que con una función de vecindad, una pretopología π induce una noción de convergencia similar a (11.14), explícitamente

$$x \in \lim_\pi \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \geqslant \mathcal{V}_\pi(x), \tag{11.1}$$

y una de conjunto *abierto* similar a (11.5), es decir,

$$O \ \pi\text{-abierto} \iff O \in \bigcap_{x \in O} \mathcal{V}_\pi(x),$$

pero ahora $\mathcal{N}_\pi(x) := \mathcal{O}_\pi(x)^\uparrow$ no tiene que coincidir con $\mathcal{V}_\pi(x)$.

La familia de los conjuntos π-abiertos forman una topología (con un argumento similar al usado en la proposición 3.10 que no repetiremos) llamada *modificación topológica de* π y denotada $\tau\pi$.

Observe que

$$\mathcal{N}_\pi(x) = \mathcal{N}_{\tau\pi}(x) \leqslant \mathcal{V}_\pi(x) \tag{11.2}$$

y entonces $\lim_\pi \mathcal{F} \subset \lim_{\tau\pi} \mathcal{F}$ para todo filtro $\mathcal{F}$, pero la inclusión recíproca puede fallar.

Ejemplo 5.2 (Una pretopología finita que no es una topología)**.** La pretopología π sobre $\{0,1,2\}$ dada por

$$\mathcal{V}_\pi(0) = \{0\}^\uparrow,\ \mathcal{V}_\pi(1) = \{0,1\}^\uparrow,\ \mathcal{V}_\pi(2) = \{1,2\}^\uparrow.$$

no es topológica:

$$\mathcal{V}_\pi(\mathcal{V}_\pi(2)) = \{\{0,1,2\}\} \neq \mathcal{V}_\pi(2),$$

lo cual significa que la función de prevecindad no es una función de vecindad. De hecho, los únicos conjuntos abiertos son $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$ y $\{0,1,2\}$. Entonces $\mathcal{V}_\pi(\mathcal{V}_\pi(0)) = \mathcal{V}_\pi(0) = \mathcal{N}_\pi(0)$, $\mathcal{V}_\pi(\mathcal{V}_\pi(1)) = \mathcal{V}_\pi(1) = \mathcal{N}_\pi(1)$ pero

$$\mathcal{V}_\pi(\mathcal{V}_\pi(2)) = \mathcal{N}_\pi(2) \ngeq \mathcal{V}_\pi(2),$$

así que $\lim_{\tau\pi} \mathcal{N}_\pi(2) = \{2\}$ mientras que $\lim_\pi \mathcal{N}_\pi(2) = \emptyset$.

Ejemplo 5.3 (Una pretopología sobre el plano que no es una topología)**.** Considere sobre $\mathbb{R}^2$ la función de prevecindad definida por

$$\mathcal{V}((x,y)) = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{y\} \cup \{x\} \times (y-\epsilon, y+\epsilon) : \epsilon > 0\}^\uparrow,$$

el filtro generado por «cruces» centradas en (x,y):

Note que el conjunto $V = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{y\} \cup \{x\} \times (y-\epsilon, y+\epsilon)$ es prevecindad de uno solo de sus elementos, (x, y), porque cualquier cruz centrada en otro punto de V tiene elementos fuera de V, como está ilustrado en la parte derecha de la Figura 5.3. Entonces, $\mathcal{V}(x, y)$ no puede tener una base de filtro formada por conjuntos abiertos y la pretopología no es topológica.

Decimos que una pretopología π es *más fina* que otra pretopología τ sobre el mismo conjunto X, o que τ es *más gruesa* que π, y escribimos $\pi \geqslant \tau$, si la función de identidad es continua de (X, π) a (X, τ), es decir, si $\lim_\pi \mathcal{F} \subset \lim_\tau \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$, de forma equivalente, si $\mathcal{V}_\pi(x) \geqslant \mathcal{V}_\tau(x)$ para todo $x \in X$. En esos términos, (11.2) significa que $\pi \geqslant \tau\pi$ para toda pretopología π.

Proposición 5.4. Dada una pretopología π, la topología $\tau\pi$ es la topología más fina dentro de las que son más gruesas que π.

Demostración. $\tau\pi$ es una topología más gruesa que π. Si τ es otra, entonces $\mathcal{N}_\tau(x) \leqslant \mathcal{V}_\pi(x)$ para todo x, y todos los conjuntos τ-abiertos son también π-abiertos, es decir $\tau \subset \tau\pi$, de forma equivalente, $\tau \leqslant \tau\pi$ (como pretopologías). □

Una consecuencia inmediata es que una pretopología π es una topología si y solo si $\pi = \tau\pi$, de forma equivalente, $\tau\pi \geqslant \pi$. Además de

(contractiva) $$\pi \geqslant \tau\pi$$

notamos que τ satisface también

(creciente) $$\pi \geqslant \tau \Longrightarrow \tau\pi \geqslant \tau\tau$$

y

(idempotente) $$\tau(\tau\xi) = \tau\xi.$$

Ahora que entendemos la diferencia entre una topología y la estructura más general de pretopología, consideraremos los cocientes pretopológicos.

Así como la topología cociente es la **topología** más fina sobre el cociente que vuelve la sobreyección canónica continua, la *pretopología cociente* es la **pretopología** más fina con la misma propiedad. De forma similar, la topología inducida sobre un subconjunto es la **topología** más gruesa sobre el subconjunto que vuelve la función de inclusión continua, y la *pretopología inducida* es la **pretopología** más gruesa con la misma propiedad.

Es importante notar que aunque la topología y la pretopología inducidas por una topología coinciden (corolario 5.6), la topología y la pretopología cocientes de un espacio *topológico* en general no son iguales (ejemplo 5.7).

Proposición 5.5. Sea π una pretopología sobre X y $A \subset X$. La pretopología $\pi_{|A}$ inducida sobre A por π se caracteriza por

$$\mathcal{V}_{\pi_{|A}}(x) = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}_\pi(x)\},$$

para todo $x \in A$.

Demostración. Como $x \in V \cap A \neq \emptyset$, para todo $V \in \mathcal{V}_\pi(x)$, y $\mathcal{V}_\pi(x) \in \mathbb{F}X$, también

$$\{V \cap A : V \in \mathcal{V}_\pi(x)\} \in \mathbb{F}.$$

En efecto, esa familia es cerrada por intersecciones finitas, y si $A \supset W \supset V \cap A$ por algún $V \in \mathcal{V}_\pi(x)$, entonces $W \cup A \supset V$ así que $W \cup A \in \mathcal{V}_\pi(x)$ y $W = (W \cup A) \cap A \in \{V \cap A : V \in \mathcal{V}_\pi(x)\}$. Además, es el filtro más grueso cuya imagen por la inclusión $i : A \to X$ es $\mathcal{V}_\pi(x)$. Concluimos que es el filtro de prevencidad de x por $\pi_{|A}$. □

Corolario 5.6. Sea una (pre)topología $\pi = \tau\pi$ sobre X y $A \subset X$. La pretopología inducida por π sobre A coincide con la topología inducida.

Demostración. Es suficiente observar que $\mathcal{V}_\pi(x) = \mathcal{N}_\pi(x)$ y que

$$\mathcal{N}_{\pi_{|A}}(x) = \{V \cap A : V \in \mathcal{N}_\pi(x)\}$$

define la topología inducida y comparar con la proposición 5.5. $\square$

Ejemplo 5.7 (Cociente pretopológico pero no topológico de un espacio topológico)**.** Consideren la situación del ejemplo 4.1. Noten que

$$\mathcal{N}_X(0) = \{0,2\}^{\uparrow} = \mathcal{N}_X(2) \text{ y } \mathcal{N}_X(1) = \{1,3\}^{\uparrow} = \mathcal{N}_X(3),$$

así que la pretopología π cociente sobre $Y = \{0,1,2\}$ no coincide con la topología cociente, cual es la indiscreta $\{\emptyset, Y\}$, porque $\mathcal{V}_\pi(0) = \{0,2\}^{\uparrow}$, $\mathcal{V}_\pi(1) = \{1,2\}^{\uparrow}$ y $\mathcal{V}_\pi(2) = \{\{0,1,2\}\}$.

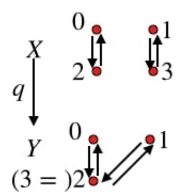


Figura 3. Esa figura se debe comparar con la figura 1. La convergencia de los filtros $\{x\}^{\uparrow}$ en X es por supuesto la misma, pero en la pretopología cociente, la identificación de 2 con 3 junta las flechas sin crear nuevas, en contraste con la situación de la figura 1 donde la convergencia depende de los conjuntos abiertos.

El problema de herencia encontrado en el ejemplo 4.1 desaparece en el ejemplo 5.7 cuando se usa la pretopología cociente en vez de la topología cociente: el subconjunto $\{0,1\}$ es discreto en X y en Y. No es una casualidad:

Teorema 5.8. Los cocientes pretopológicos son hereditarios.

Si $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ notaremos

$$\mathcal{F} \vee A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}^{\uparrow}.$$

Demostración. Sea (X,τ) un espacio pretopológico, $\sim$ una relación de equivalencia sobre X y $B \subset X/\sim$. Denotamos por π la pretopología cociente sobre $X/\sim$. Por la proposición 5.5, la pretopología $\pi_{|B}$ inducida por π sobre B satisface

$$\mathcal{V}_{\pi_{|B}}(b) = \mathcal{V}_\pi(b) \vee B = \mathcal{B}ig(\bigcap_{x \in q^-(b)} q[\mathcal{V}_\tau(x)] \mathcal{B}ig) \vee B = \bigcap_{x \in q^-(b)} (q[\mathcal{V}_\tau(x)] \vee B),$$

mientras $q^-(B)$ esta equipado con $\tau_{|q^-(B)}$ cuya función de prevecindad satisface $\mathcal{V}_{\tau_{|q^-(B)}}(x) = \mathcal{V}_\tau(x) \vee q^-(B)$. Por lo tanto $q : q^-(B) \to B$ induce la pretopología más fina sobre B que vuelve $q : q^-(B) \to B$ continua, es decir, la pretopología con función de vecindad dada por

$$\mathcal{V}(b) = \bigcap_{x \in q^-(b)} q[\mathcal{V}_\tau(x) \vee q^-(B)].$$

Concluimos con la observación que $q[\mathcal{V}_\tau(x) \vee q^-(B)] = q[\mathcal{V}_\tau(x)] \vee B$. $\square$

Sin embargo, los cocientes pretopológicos también conllevan problemas, por no ser *productivos*. Para considerar esa dificultad, tenemos que definir la *pretopología producto* $\pi \times \tau$ sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios pretopológicos (X,π) y (Y,τ), lo cual también necesita la consideración del producto de dos filtros. Si $\mathcal{F} \in \mathbb{F}X$ y $\mathcal{G} \in \mathbb{F}Y$ entonces

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \{F \times G : F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}^{\uparrow}$$

es un filtro sobre $X \times Y$. Por definición, $\pi \times \tau$ es la pretopología más gruesa sobre $X \times Y$ que vuelve las proyecciones $p_X : X \times Y \to (X, \pi)$ y $p_Y : X \times Y \to (Y, \tau)$ continuas, pretopología que se define por

$$\mathcal{V}_{\pi \times \tau}(x, y) = \mathcal{V}_\pi(x) \times \mathcal{V}_\tau(y).$$

Si, en ese contexto, $\sim_X$ y $\sim_Y$ son relaciones de equivalencias sobre X y Y, respectivamente, y los cocientes $W = X/\sim_X$ y $Z = Y/\sim_Y$ están equipados con las pretopologías cocientes π_W y π_Z, tenemos dos maneras naturales de poner una pretopología sobre $W \times Z$: la pretopología $\pi_W \times \pi_Z$, producto de las pretopologías cocientes, o la pretopología cociente θ de $(X \times Y, \pi \times \tau)$ por la relación de equivalencia $\approx$ definida sobre $X \times Y$ por

$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \iff x_1 \sim_X x_2 \text{ y } y_1 \sim_Y y_2.$$

Los cocientes pretopológicos no son productivos en el sentido que $\pi_W \times \pi_Z$ y θ en general no coinciden.

Ejemplo 5.9. Consideren

$$X = \left\{x_{n,k} : (n, k) \in \mathbb{N}^2\right\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

con la (pre)topología π dada por $\mathcal{V}_\pi(x_{n,k}) = \mathcal{N}_\pi(x_{n,k}) = \{x_{n,k}\}^\uparrow$ y

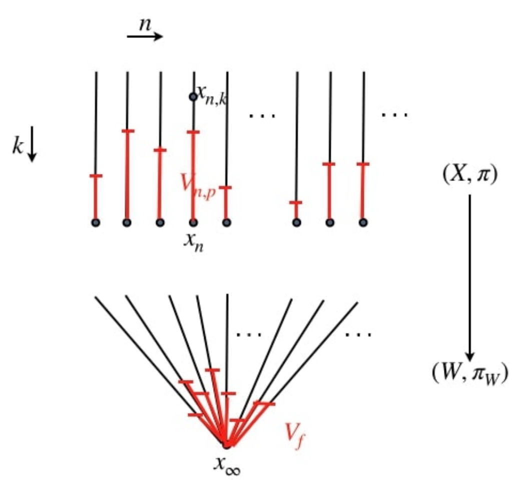
$$\mathcal{V}_\pi(x_n) = \mathcal{N}_\pi(x_n) = \{V_{n,p} = \{x_n\} \cup \{x_{n,k} : k \geqslant p\} : p \in \mathbb{N}\}^\uparrow.$$

Sea la relación de equivalencia $\sim_X$ que identifica todo los puntos x_n. El conjunto cociente correspondiente es

$$W = X/\sim_X = \{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : (n, k) \in \mathbb{N}^2\}$$

y la pretopología y la topología cociente coinciden en ese caso, y esa estructura es dada por

$$\mathcal{N}_{\pi_W}(x_{n,k}) = \{x_{n,k}\}^\uparrow,\ \mathcal{N}_{\pi_W}(x_\infty) = \left\{V_f = \{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : k \geqslant f(n)\} : f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\right\}^\uparrow.$$



Sea $Y = Z = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ con la (pre)topología $\mathcal{N}_\tau(y_n) = \{y_n\}^\uparrow$ y

$$\mathcal{N}_\tau(y_\infty) = \{\{y_\infty\} \cup \{y_n : n \geqslant k\} : k \in \mathbb{N}\}^\uparrow,$$

y $\tau = \pi_Z$.

Vamos a ver que $\pi_W \times \tau$ no es la pretopología θ cociente de $(X \times Y, \pi \times \tau)$ por

$$(x, y) \approx (x', y') \iff x \sim_X x' \text{ y } y = y'$$

sobre $W \times Z$. Sea $q : X \times Y \to W \times Z$ la sobreyección canónica. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\theta(x_\infty, y_\infty) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} q[\mathcal{V}_{\pi\times\tau}(x_n, y_\infty)] \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} q\left[\mathcal{V}_\pi(x_n) \times \mathcal{V}_\tau(y_\infty)\right] \end{aligned}$$

mientras que

$$\mathcal{V}_{\pi_W\times\tau}(x_\infty, y_\infty) = \mathcal{V}_{\pi_W}(x_\infty) \times \mathcal{V}_\tau(y_\infty).$$

Dada una sucesión p_n de números naturales con $p_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, el conjunto

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : k \geqslant p_n\} \times \{y_\infty\} \cup \{y_n : n \geqslant p_n\}\right)$$

pertenece a $\mathcal{V}_\theta(x_\infty, y_\infty)$ ([4]) pero no a $\mathcal{V}_{\pi_W\times\tau}(x_\infty, y_\infty)$. Para ver eso, noten que si S fuera miembro de $\mathcal{V}_{\pi_W\times\tau}(x_\infty, y_\infty)$, existiría $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_f \times \{y_\infty\} \cup \{y_n : n \geqslant k\} \subset S,$$

lo cual no es el caso: para cada n lo suficientemente grande, $p_n > k$ y entonces, $(x_{n,f(n)}, y_k) \notin S$, aunque pertenezca a $V_f \times \{y_\infty\} \cup \{y_n : n \geqslant k\}$.

6. Espacios de convergencia

6.1. Definiciones y propiedad de los cocientes. ¡Por fin llagamos a considerar espacios de convergencia! La raíz del problema en el ejemplo 5.9 es que las estructuras pretopológicas dependen de un solo filtro (el de prevencidad) en cada punto. En vez de dar la estructura local (en un punto dado) mediante un filtro (de prevencidad), basta decir cuáles son los filtros que convergen (en ese punto) y solo asumir lo mínimo heredado por la situación topológica, es decir, (11.3) y (11.4):

Definición 6.1. Una *convergencia* ξ sobre un conjunto X es una relación entre el conjunto $\mathbb{F}X$ de los filtros sobre X y X que denotamos $x \in \lim_\xi \mathcal{F}$ cuando $(\mathcal{F}, x) \in \xi$, que satisfice (11.3) y (11.4), es decir, $\lim : \mathbb{F}X \to 2^X$ preserva el orden de inclusión y los filtros principales de singulares convergen en el punto que los define. El par (X, ξ) es un *espacio de convergencia*.

La continuidad es simplemente preservación de los límites, es decir, una función $f : (X, \xi) \to (Y, \tau)$ es *continua* si

$$x \in \lim_\xi \mathcal{F} \Longrightarrow f(x) \in \lim_\tau f[\mathcal{F}]. \tag{11.1}$$

Denotamos $C(\xi, \tau)$ el conjunto de todas las funciones continuas de (X, ξ) a (Y, τ).

Ya vimos que toda topología se puede ver como una pretopología, y cada pretopología dada por una función de prevencidad $\mathcal{V}(\cdot)$ se puede ver como una convergencia $\xi_\mathcal{V}$ donde

$$x \in \lim_{\xi_\mathcal{V}} \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \geqslant \mathcal{V}(x).$$

Además, la continuidad en el sentido (pre)topológico y en el sentido de convergencia coinciden.

El orden entre (pre)topologías sobre el mismo conjunto X se extiende a las convergencias:

$$\begin{aligned} \xi \geqslant \theta \quad &\iff \quad \mathrm{id} : (X, \xi) \to (X, \theta) \\ &\iff \quad \lim_\xi \mathcal{F} \subset \lim_\theta \mathcal{F} \text{ para todo } \mathcal{F} \in \mathbb{F}X. \end{aligned}$$

[4]porque si se selecciona un elemento $F_i \in \mathcal{F}_i \in \mathbb{F}X$ para todo $i \in I$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} F_i \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i,$$

porque cada $\mathcal{F}_i$ es una familia isotona.

Ese orden vuelve el conjunto de todas las convergencias sobre X en un retículo completo cuyos supremos e ínfimos son dados por

$$\lim_{\bigvee_{\xi\in\Xi}\xi}\mathcal{F}=\bigcap_{\xi\in\Xi}\lim_{\xi}\mathcal{F}\text{ y }\lim_{\bigwedge_{\xi\in\Xi}\xi}\mathcal{F}=\bigcup_{\xi\in\Xi}\lim_{\xi}\mathcal{F}.$$

Las construcciones estándares de subespacio, cociente y producto siguen el patrón ya familiar en términos de estructura inicial o final en el sentido de las siguientes definiciones:

Definición 6.2. Dado $f:(X,\xi)\to Y$, existe ([5]) la convergencia más fina sobre Y que vuelve f continua. Se llama *convergencia final* para f y ξ y la denotamos $f\xi$.

De forma dual, dado $f:X\to(Y,\tau)$, existe la convergencia más gruesa sobre X que vuelve f continua. Se llama *convergencia inicial* para f y τ y la denotamos $f^{-}\tau$.

Para que $f:(X,\xi)\to Y$ sea continua se necesita que los filtros $f[\mathcal{F}]$ con $x\in\lim_{\xi}\mathcal{F}$ converjan en $f(x)$. Dado (11.3), los filtros más finos también tienen que converger. La forma más fina de lograrlo, es decir con menos filtros convergentes, define $f\xi$:

$$y\in\lim_{f\xi}\mathcal{G}\iff\exists x\in f^{-}(y)\,\exists\mathcal{F}\in\mathbb{F}X\,(x\in\lim_{\xi}\mathcal{F}\text{ y }f[\mathcal{F}]\leqslant\mathcal{G})\,. \tag{11.2}$$

De forma similar, vemos que

$$x\in\lim_{f^{-}\tau}\mathcal{F}\iff f(x)\in\lim_{\tau}f[\mathcal{F}]. \tag{11.3}$$

Una observación inmediata pero importante en el proceso de algebraización de muchas nociones topológicas que surge en el marco de los espacios de convergencia es:

$$f\in C(\xi,\tau)\iff f\xi\geqslant\tau\iff\xi\geqslant f^{-}\tau. \tag{11.4}$$

La *convergencia* $\xi_{|A}$ *inducida por* (X,ξ) *sobre* $A\subset X$ es $i^{-}\xi$ donde $i:A\to(X,\xi)$ es la inclusión. El espacio de convergencia $(A,i^{-}\xi)$ es un *subespacio de* (X,ξ). Dado (11.3), si $a\in A$ and $\mathcal{F}\in\mathbb{F}A$

$$a\in\lim_{\xi_{|A}}\mathcal{F}\iff a\in\lim_{\xi}\mathcal{F}^{\uparrow X}. \tag{11.5}$$

Si (X,ξ) es un espacio de convergencia y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, la *convergencia cociente* sobre $X/\sim$ es $q\xi$ donde $q:X\to X/\sim$ es la sobreyección canónica. De forma más general, cada sobreyección $f:X\to Y$ se puede interpretar como sobreyección canónica del cociente por la relación $x\sim t$ si y solo si $f(x)=f(t)$ y por lo tanto si $f:(X,\xi)\to Y$ es una sobreyección, la convergencia final $f\xi$ también se llama convergencia cociente.

Si (X,ξ) y (Y,τ) son dos espacios de convergencia, la *convergencia producto* $\xi\times\tau$ sobre $X\times Y$ es la más gruesa que vuelve las dos proyecciones $p_X:X\times Y\to(X,\tau)$ y $p_Y:X\times Y\to(Y,\tau)$ continuas, es decir,

$$\xi\times\tau=p_X^{-}\xi\vee p_Y^{-}\tau.$$

Este marco muy general pero simple formado por los espacios de convergencia no sufre de los problemas encontrados en los ejemplos 4.1 y 5.9.

Teorema 6.3. *Los cocientes de convergencia son hereditarios y productivos ([6]).*

Demostración. Sea $f:(X,\xi)\to(Y,f\xi)$ una sobreyección y $B\subset Y$. Para ver que los cocientes son hereditarios queremos mostrar que $f\left(\xi_{|f^{-}(B)}\right)=(f\xi)_{|B}$. Dado (11.2) y (11.5), si $y\in B$ y $\mathcal{G}\in\mathbb{F}B$,

$$y\in\lim_{(f\xi)_{|B}}\mathcal{G}\iff\exists x\in f^{-}(y)\,\exists\mathcal{F}\in\mathbb{F}X\left(x\in\lim_{\xi}\mathcal{F}\text{ y }f[\mathcal{F}]\leqslant\mathcal{G}^{\uparrow Y}\right), \tag{11.6}$$

mientras

$$y\in\lim_{f\left(\xi_{|f^{-}(B)}\right)}\mathcal{G}\iff\exists x\in f^{-}(y)\,\exists\mathcal{H}\in\mathbb{F}(f^{-}(B))\left(x\in\lim_{\xi}\mathcal{H}^{\uparrow X}\text{ y }f[\mathcal{H}]\leqslant\mathcal{G}\right). \tag{11.7}$$

[5] porque la topología indiscreta $\{\emptyset,Y\}$ hace f continua y el ínfimo de todas las convergencias sobre Y, que hacen f continua, también vuelve f continua.

[6] De hecho, en el contexto de espacios de convergencia, un producto de un número infinito de funciones cocientes es cociente.

En (11.6) $\mathcal{F}$ satisface $f[\mathcal{F}] \leqslant \mathcal{G}^{\uparrow_Y}$ y $B \in \mathcal{G}$ entonces, $B \cap f(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ así que $\mathcal{H} = \{F \cap f^{-}(B) : F \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{F}(f^{-}(B))$ genera sobre X un filtro más fino que $\mathcal{F}$ y entonces $x \in \operatorname{lím}_\xi \mathcal{H}^{\uparrow_X}$, lo cual da (11.7), porque $f[\mathcal{H}] = \{f(F) \cap B : F \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{G}$ dado $B \in \mathcal{G}$. Recíprocamente si (11.5) $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{\uparrow_X}$ satisface (11.6).

Consideren dos funciones cociente $f : (X, \xi) \to (Y, f\xi)$ y $g : (W, \theta) \to (Z, g\theta)$ y $f \times g : X \times W \to Y \times Z$ definida por $(f \times g)(x, w) = (f(x), g(w))$. Para ver que los cocientes son productivos es suficiente ver que la convergencia cociente para $f \times g$, es decir $(f \times g)(\xi \times \theta)$ es el producto $f\xi \times g\theta$ de las convergencias cociente:

$$
\begin{aligned}
(y,z) \in \operatorname{lím}_{f\xi \times g\theta} \mathcal{H} &\iff y \in \operatorname{lím}_{f\xi} p_Y[\mathcal{H}] \text{ y } z \in \operatorname{lím}_{g\theta} p_Z[\mathcal{H}] \\
&\iff \exists x \in f^{-}(y) \exists w \in g^{-}(z) \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}X \exists \mathcal{G} \in \mathbb{F}W \\
&\qquad x \in \operatorname{lím}_\xi \mathcal{F}, w \in \operatorname{lím}_\theta \mathcal{G}, f[\mathcal{F}] \leqslant p_Y[\mathcal{H}], g[\mathcal{G}] \leqslant p_Z[\mathcal{H}] \\
&\iff \exists x \in f^{-}(y) \exists w \in g^{-}(z) \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}X \exists \mathcal{G} \in \mathbb{F}W \\
&\qquad (x,w) \in \operatorname{lím}_{\xi \times \theta} \mathcal{F} \times \mathcal{G}, (f \times g)[\mathcal{F} \times \mathcal{G}] \leqslant \mathcal{H} \\
&\iff (y,z) \in \operatorname{lím}_{(f \times g)(\xi \times \theta)} \mathcal{H}.
\end{aligned}
$$

□

6.2. La ley exponencial. Las ventajas de los espacios de convergencia sobre las topologías no terminan en los cocientes. Tal vez la razón más importante por la cual es mucho más conveniente trabajar con convergencias en vez de topologías es porque los conjuntos de funciones continuas tienen una estructura de convergencia canónica que «se porta bien» en un sentido que vamos a aclarar a continuación, mientras que en general no existe tal topología ([7]). Para explicar esto, consideremos primero la *ley exponencial* para los conjuntos de funciones (sin considerar continuidad por ahora):

$$Z^{X \times Y} \equiv \left(Z^X\right)^Y . \tag{11.8}$$

¿Que significa esto? Si Z^X denota el conjunto de todas las funciones de X a Z, tenemos para cualquier terna de conjuntos X, Y y Z una biyección canónica $\exp : Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$ entre $Z^{X \times Y}$ y $(Z^X)^Y$ definida por

$$(\exp g)(y)(x) = g(x, y),$$

cuya biyección inversa $\widehat{\cdot} : (Z^X)^Y \to Z^{X \times Y}$ es dada por

$$\widehat{h}(x, y) = h(y)(x).$$

Si $e : X \times Z^X \to Z$ es la *evaluación* dada por $e(x, f) = f(x)$ tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \exp g"] \arrow[dr, "g"'] & X \times Z^X \arrow[d, "e"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times h"] \arrow[dr, "\widehat{h}"'] & X \times Z^X \arrow[d, "e"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

¿Que tipo de análogo a (11.8) podemos esperar en el contexto topológico o de convergencia? En esos marcos, queremos remplazar los conjuntos de funciones por conjuntos de funciones continuas, lo cual daría

$$C(\xi \times \tau, \sigma) \equiv C(\tau, C(\xi, \sigma)) \tag{11.9}$$

para toda terna (ξ, τ, σ) de espacios topológicos o de convergencia, donde $\equiv$ representa otra vez una biyección o aún mejor un homeomorfismo. Noten que en el caso donde ξ and τ son topologías

[7]En términos de teoría de categorías, la categoría de los espacios de convergencia y funciones continuas es cartesiana cerrada, mientras la categoría de los espacios topológicos(y funciones continuas) no lo es.

discretas, los conjuntos de funciones continuas considerados son los conjuntos de todas las funciones, así que la biyección coincide con (la restricción de) exp. Pero la fórmula (11.9) no tiene sentido sin ponerle a $C(\xi,\sigma)$ una estructura topológica o de convergencia θ, resultando en

$$C(\xi\times\tau,\sigma)\equiv C(\tau,\theta). \tag{11.10}$$

Tal estructura θ necesariamente vuelve la evaluación $e:(X,\xi)\times(C(\xi,\sigma),\theta)\to(Z,\sigma)$ continua, porque en el caso de $(Y,\tau)=(C(\xi,\sigma),\theta)$ en (11.10), la función identidad $\mathrm{id}_{C(\xi,\sigma)}$ se encuentra en el conjunto a la derecha, entonces su imagen bajo $\exp^{-1}$ está en el conjunto a la izquierda, es decir, $\widehat{\mathrm{id}_{C(\xi,\sigma)}}=e$ es continua.

Además, θ tiene que ser la estructura más gruesa que vuelve la evaluación continua porque si θ satisface (11.9), y θ' vuelve la evaluación $e:(X,\xi)\times(C(\xi,\sigma),\theta')\to(Z,\sigma)$ continua; entonces, con $(Y,\tau)=(C(\xi,\sigma),\theta')$ en (11.10), la evaluación e está en el conjunto a la izquierda, entonces $\exp(e)=\mathrm{id}_{C(\xi,\sigma)}\in C(\theta',\theta)$, es decir, $\theta'\geqslant\theta$.

La *convergencia* más gruesa sobre $C(\xi,\sigma)$ que vuelve la evaluación continua siempre existe: la continuidad implica que para cualquier par de filtros $\mathcal{F}\in\mathbb{F}X$ y $\mathcal{G}\in\mathbb{F}(C(\xi,\sigma))$ que converjan (a x y f respectivamente), la imagen $e(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$ converge a $f(x)$ en σ. Para obtener la estructura más gruesa que satisface esta condición, debemos pedir

$$f\in\operatorname{lím}\mathcal{G}\iff\forall x\in X,\forall\mathcal{F}\in\mathbb{F}X\,(x\in\operatorname{lím}_\xi\mathcal{F}\Longrightarrow f(x)\in\operatorname{lím}_\sigma e(\mathcal{F}\times\mathcal{G}))\,,$$

lo cual define una convergencia sobre $C(\xi,\sigma)$ llamada *convergencia continua* o *convergencia natural* y denotada $[\xi,\sigma]$. Además esta estructura da una ley exponencial general (por ejemplo, [**3**, Theorem XVI.5.5]):

Teorema 6.4. Dados tres espacios de convergencia (X,ξ), (Y,τ) y (Z,σ), la función exp es un homeomorfismo:

$$[\xi\times\tau,\sigma]\equiv[\tau,[\xi,\sigma]].$$

En contraste, hay topologías ξ y σ para las cuales no existe la topología más gruesa sobre $C(\xi,\sigma)$ que vuelva la evaluación continua, así que no se puede conseguir una ley exponencial general con sólo topologías.

7. Qué hacer con espacios de convergencias: adelanto de la parte II

El teorema 6.4 resulta muy importante y permite muchas aplicaciones, algunas de las cuales serán analizadas en la segunda parte. Este teorema es también la base de la poderosa aplicabilidad de la teoría de los espacios de convergencia al análisis funcional [**2, 1, 4**].

Al mismo tiempo la segunda parte se enfocará en un aspecto fundamental de la teoría que solo rondamos hasta ahora: una forma de algebraización de nociones topológicas, con el uso de *funtores.* Un ejemplo que vimos en el camino es la modificación topológica τ. Resulta que existen también modificaciones pretopológicas S_0, paratopológicas S_1 y pseudotopológicas S y todas ellas satisfacen las condiciones (contractiva), (creciente) y (idempotente) como τ, y además, como τ, preservan continuidad. Tales modificaciones de la estructura son *reflectores,* y son herramientas para capturar nociones topológicas técnicas con fórmulas simples.

Por ejemplo, ya vimos que los cocientes topológicos no se comportan bien en varios sentidos. Precisamente por esa razón, se introdujeron en topología varios tipos de funciones cocientes especiales, como los cocientes hereditarios, las funciones bicocientes y numerablemente bicocientes, las funciones quasi-abiertas y las funciones abiertas. Veremos que una sobreyección continua

$f : (X, \xi) \to (Y, \tau)$ entre espacios topológicos es

$$\begin{array}{rcl} \text{quasi-abierta} & \text{si} & \tau \geqslant f\xi \\ \text{bicociente} & \text{si} & \tau \geqslant \mathrm{S}(f\xi) \\ \text{numerablamente bicociente} & \text{si} & \tau \geqslant \mathrm{S}_1(f\xi) \\ \text{hereditariamente cociente} & \text{si} & \tau \geqslant \mathrm{S}_0(f\xi) \\ \text{cociente} & \text{si} & \tau \geqslant \tau(f\xi). \end{array}$$

Estas reformulaciones resultan muy útiles para obtener demostraciones transparentes de varias propiedades de esas clases de funciones.

También aparecen naturalmente modificaciones M de la estructura que preservan la continuidad (o sea, son funtores) y satisfacen (creciente) y (idempotente), pero en vez de (contractiva) satisfacen

(expansiva) $$\xi \leqslant M\xi.$$

Tales modificaciones son *coreflectores*. Veremos ejemplos importantes como la modificación I_1 de carácter numerable o la modificación localmente compacta $\mathcal{K}$.

Armados con estas herramientas veremos que varios conceptos fundamentales de topología se traducen en términos de desigualdades que toman la forma

$$\xi \geqslant RC\xi \text{ o } \xi \leqslant CR\xi,$$

donde R es un reflector y C un coreflector. Esta visión nos permitirá reducir muchas demostraciones técnicas a un simple cálculo de desigualdades con funtores.

Dicho método se vuelve particularmente fértil cuando se combina con la ley exponencial.

Una posible tercera parte podría tratarse de compacidad: el marco de los espacios de convergencia permite analizar un espectro amplio de fenómenos a través del lente de nociones de compacidad generalizada. El poder unificador de la compacidad en ese contexto la vuelve una noción aun más fundamental que en el marco topológico y permite analizar problemas formulados en topología de forma más clara, como el marco de los números complejos puede iluminar problemas formulados en los números reales.

Referencias

[1] R. Beattie and H. P. Butzmann. *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*. Kluwer Academic, 2002.

[2] E. Binz. *Continuous Convergence in $C(X)$*, volume Lecture Notes Math. 469. Springer-Verlag, 1975.

[3] S. Dolecki and F. Mynard. *Convergence Foundations of Topology*. World Scientific, 2016.

[4] Louis Nel. *Continuity theory*. Springer, 2016.

Correo electrónico:
`fmynard@njcu.edu` (Frédéric Mynard)

Capítulo 12

Encajes ordenados en el hiperespacio de hiperespacios de continuos

Pedro Contreras Chamorro
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú
William César Olano Diaz
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú
Javier Sánchez Martínez
Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

1. Introducción

Un *continuo*, es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X denotaremos por $C(X)$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos, cerrados y compactos de X, dotado con la métrica de Hausdorff (véase [**13**, p. 1]). Un resultado importante sobre la estructura topológica de $C(X)$ es el hecho de que dotado con la métrica de Hausdorff, $C(X)$ es un continuo (véase [**13**, Theorem 1.13, p. 65]). De este modo, para cada $A \in C(X)$, $C(A) \in C(C(X))$, así que podemos considerar el hiperespacio $\mathfrak{C}(X) = \{C(A) : A \in C(X)\}$ como subespacio del hiperespacio $C(C(X))$. El hiperspacio $\mathfrak{C}(X)$ fue definido y estudiado en el trabajo de tesis [**15**] y posteriormente en el artículo [**4**] que contiene los resultados originales del [**15**].

Por otra parte G. Andablo en [**1**], presenta el siguiente concepto.

Definición 1.1. Sean X y Y dos continuos. Decimos que $C(X)$ **se encaja ordenadamente en** $C(Y)$ si existe una función continua e inyectiva $\mathcal{H} : C(X) \to C(Y)$ tal que si $A, B \in C(X)$ y $A \subset B$, entonces $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(B)$.

En [**1**, p. 52], se muestra que $C(I)$ no puede ser encajado ordenadamente en $C(S^1)$, aún cuando estos dos espacios son homeomorfos, donde $I = [0, 1]$ y S^1 es el círculo unitario en el plano $\mathbb{R}^2$. Esto hace ver que la condición de encaje ordenado es más restrictiva que la de un encaje ordinario.

Otro tipo de función definida entre hiperespacios es la siguiente.

Definición 1.2. Dada una función continua entre continuos $f : X \to Y$, se define la **función inducida por** f, como la función $C(f) : C(X) \to C(Y)$ dada por $C(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$.

Se conoce que $C(f)$ es una función continua (véase [**14**, 4.27, p. 65]). Para una clase de funciones continuas definidas entre continuos $\mathcal{M}$, un problema general es determinar la relación entre las condiciones a) $f \in \mathcal{M}$ y b) $C(f) \in \mathcal{M}$; son múltiles los artículos en donde se ha estudiado este problema, por ejemplo [**7**]-[**11**].

Definición 1.3. Para dos continuos X y Y, una función $H : C(X) \to C(Y)$ se llama **inducible** si existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $H = C(f)$.

El concepto de función inducible fue introducido por J. J. Charatonik y W. J. Charatonik en [**2**], mostrando en [**2**, Theorem 2.2, p. 7] una caracterización de este concepto.

Como un camino natural, en el presente trabajo se estudian los encajes ordenados y las funciones inducibles, intercambiando el hiperespacio $C(X)$ por el hiperespacio $\mathfrak{C}(X)$.

2. Preliminares

Sea X un continuo con métrica d. Para cada $\delta > 0$ y $A \subset X$, definimos a la *nube de radio* δ *centrada en* A como el siguiente conjunto

$$N(\delta, A) = \{x \in X : \text{existe } y \in A \text{ tal que } d(x, y) < \delta\}.$$

Para cada $A, B \in C(X)$, se define

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

se sabe que H define una métrica para $C(X)$ (véase [**13**, Teorema 0.13, p. 10]) llamada *métrica de Hausdorff*.

Por otra parte, dada una colección finita $K_1, \ldots, K_r$ de subconjuntos de X, $\langle K_1, \ldots, K_r\rangle$ denota al siguiente subconjunto de $C(X)$:

$$\left\{A \in C(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{r} K_i \text{ y } A \cap K_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1 \ldots, r\}\right\}.$$

La familia de todos los subconjuntos de $C(X)$ de la forma $\langle K_1, \ldots, K_r\rangle$, donde cada K_i es un abierto en X, forma una base para una topología de $C(X)$ (véase [**13**, Teorema 0.11, p. 9]) llamada *Topología de Vietoris*, a los elementos de esta base se les llama *vietóricos*. Un hecho por demás útil, es que la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden (véase [**13**, Teorema 0.13, p. 10]).

Para un continuo X, podemos considerar el siguiente subespacio de $C(X)$,

$$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Es fácil ver que $F_1(X)$ es una copia topológica de X en $C(X)$, pues la función $f : X \to C(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$, es un encaje (más aún, un encaje isométrico).

Dada una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de un continuo X, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se definen *el liímite inferior* y *el límite superior*, de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotados por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, de la siguiente manera:

- $x \in \liminf A_n$ si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
- $x \in \limsup A_n$ si existe una sucesión creciente de números naturales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_{s_n}$ con la propiedad de que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$;

De la definición se tiene que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Se conoce que una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en $C(X)$ converge a $B \in C(X)$ si y sólo si $\limsup B_n \subset B \subset \liminf B_n$.
Dado un continuo X, consideramos la función inyectiva $C^*_X : C(X) \to C(C(X))$ dada por $C^*_X(A) = C(A)$, para cada $A \in C(X)$. Podemos notar que $C^*_X(C(X)) = \mathfrak{C}(X)$, por lo que $C^*_X : C(X) \to \mathfrak{C}(X)$ es una función biyectiva.

Observación 2.1. C^*_X es una función continua si para cada sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos A_n de X que convergen a un subcontinuo A de X, cualquier subcontinuo B de A es límite de subcontinuos B_n de A_n.

En relación a lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2. Un continuo X se dice que es C^**-suave en* $A \in C(X)$ si C^*_X es continua en el punto A. X es C^**-suave*, si C^*_X es continua en $C(X)$, es decir, es continua en cada punto $A \in C(X)$.

Se sabe que: cada continuo tipo-arco es C^*-suave (véase [**13**, Teorema 15.13, p. 525]), si X es un continuo C^*-suave entonces X es hereditariamente unicoherente (véase [**6**, Corolario 3.4, p. 203] y [**13**, Nota 1, p. 530]), por lo que se deduce que cada continuo arco conexo que es C^*-suave es un dendroide (véase [**13**, Teorema 15.19, p. 528]). En relación con esto, se sabe también que un continuo localmente conexo es C^*-suave si y sólo si es una dendrita (véase [**13**, Teorema 15.11, p. 522]).

Usando la Observación 2.1 y el hecho de que cada función continua y biyectiva definida entre un espacio compacto y un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo, se puede obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.3. Para un continuo X, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es C^*-suave;
2. C_X^* es un homeomorfismo;
3. $C(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(X)$;
4. $\mathfrak{C}(X)$ es un continuo;
5. $\mathfrak{C}(X)$ es un compacto.

Observación 2.4. Sea X un continuo. La *función unión* $\mathcal{U} : 2^{2^X} \to 2^X$ es la función dada por $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ (véase [**12**, Ejercicio 11.5, p. 91]). Denotemos por $\mathcal{U}_X = \mathcal{U}|_{\mathfrak{C}(X)}$. Con esta notación es claro que la función inversa de C_X^* es $\mathcal{U}_X : \mathfrak{C}(X) \to C(X)$, puesto que $\cup C(A) = A$ para cada $A \in C(X)$. Adicionalmente, de [**12**, Ejercicio 11.5 (2), p. 91] se tiene que $\mathcal{U}$ es una función continua, por lo que $\mathcal{U}_X$ es una función continua y biyectiva.

Observación 2.5. De la Observación 2.4, se sigue que si $\{C(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathfrak{C}(X)$ que converge a un punto $C(A) \in \mathfrak{C}(X)$, entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A en $C(X)$.

Para una función continua $f : X \to Y$ entre continuos, pordemos considerar la función inducida $\mathfrak{C}(f) : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$, como la única función que hace a los siguientes diagramas conmutar.

(12.1)
$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "C(f)"] \arrow[d, "C_X^*"'] & C(Y) \arrow[d, "C_Y^*"] \\ \mathfrak{C}(X) \arrow[r, "\mathfrak{C}(f)"'] & \mathfrak{C}(Y) \end{tikzcd}$$

(12.2)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(X) \arrow[r, "\mathfrak{C}(f)"] \arrow[d, "\mathcal{U}_X"'] & \mathfrak{C}(Y) \arrow[d, "\mathcal{U}_Y"] \\ C(X) \arrow[r, "C(f)"'] & C(Y) \end{tikzcd}$$

Observemos que $\mathfrak{C}(f)(C(A)) = C(f(A))$, para cada $A \in C(X)$. En caso de que $\mathcal{U}_X$ sea una función continua, del primer diagrama se deduce que $\mathfrak{C}(f)$ será una función continua, es decir, una condición suficiente para que $\mathfrak{C}(f)$ sea continua es que el dominio de f, sea un continuo C^*-suave. Para lectores interesados en las propiedades de la función $\mathfrak{C}(f)$, consultar [**4**].

3. Algunas propiedades de $\mathfrak{C}(X)$

Notación 3.1. Para un continuo X denotamos

$$F_1(C(X)) = \{\{A\} : A \in C(X)\}.$$

Definimos $\mathcal{F}_1(X) = \{\{\{x\}\} : x \in X\}$. Observemos que si $A = \{x\}$, entonces $C(A) = \{E \in C(X) : E \subset A\} = \{\{x\}\}$. Se sigue que $C(\{x\}) = \{\{x\}\}$. Así, $\mathcal{F}_1(X) \subset F_1(C(X)) \subset C(C(X))$ y $\mathcal{F}_1(X) \subset \mathfrak{C}(X)$.

Teorema 3.2. Para un continuo X se tiene que $\mathcal{F}_1(X)$ es una copia topológica del continuo X dentro del hiperespacio $\mathfrak{C}(X)$.

Demostración. Consideremos la función $h : X \to \mathcal{F}_1(X)$ dada por $h(x) = C(\{x\}) = \{\{x\}\}$. Es claro que h es una función biyectiva.

Veamos que h es continua. Para esto consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto x en X. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $\mathcal{F}_1(X)$ tal que $C(\{x\}) \in \mathcal{U}$. Usando la base para la topología de Vietoris en $C(C(X))$, se tiene que existe un conjunto abierto, $\mathcal{W}$, en $C(X)$ tal que $C(\{x\}) \in \langle\mathcal{W}\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{U}$. Notemos que $\{x\} \in \mathcal{W}$. Se sigue que existe un conjunto abierto, U, en X tal que $\{x\} \in (\langle U\rangle \cap C(X)) \subset \mathcal{W}$. Observemos que $x \in U$. En consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para cada $n \geqslant N$, lo que implica que

$$\{x_n\} \in (\langle U\rangle \cap C(X)) \subset \mathcal{W},$$

para cada $n \geqslant N$. Se sigue que $C(\{x_n\}) \in \langle\mathcal{W}\rangle \cap \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{U}$, para cada $N \geqslant \mathbb{N}$. Así $\{C(\{x_n\})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $C(\{x\})$ en $\mathcal{F}_1(X)$. Por lo tanto h es continua.

Por otro lado, tenemos que para cualquier conjunto abierto, U, en X se tiene que $h(U) = \{\{\{x\}\} : x \in U\} = \{\{\{x\}\} : \{x\} \in \langle U\rangle\} = \langle\langle U\rangle\rangle \cap \mathcal{F}_1(X)$, el cual es un conjunto abierto en $\mathcal{F}_1(X)$; se obtiene que h es una función abierta. Así, h es un homeomorfismo entre X y $\mathcal{F}_1(X)$. □

Usando los Diagramas (1) y (2), se puede ver de manera fácil la siguiente proposición.

Proposición 3.3. Sean X y Y continuos C^*-suaves. Si $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$.

En general el que $C(X)$ sea homeomorfo a $C(Y)$ no implica que $\mathfrak{C}(X)$ sea homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$ (Véase [**4**, observacion 4.6, p. 193]).

Teorema 3.4. Sean X y Y continuos. Si $\mathfrak{C}(X)$ es homeomorfo a $\mathfrak{C}(Y)$ y X es C^*-suave, entonces $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$.

Demostración. Sea $h : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ un homeomorfismo. Definamos $f : C(X) \to C(Y)$ por $f(A) = \mathcal{U}_Y(h(C^*_X(A)))$, para cada $A \in C(X)$. Note que $f = \mathcal{U}_Y \circ h \circ C^*_X$. Dado que $\mathcal{U}_Y$, h y C^*_X son funciones continuas y biyectivas se tiene que f es una función continua y biyectiva entre continuos. Por lo tanto, f es un homeomorfismo. □

4. Encajes y funciones inducibles en $\mathfrak{C}(X)$

De manera similar a las definiciones 1.1 y 1.3, presentamos los siguientes dos conceptos.

Definición 4.1. Sean X y Y dos continuos. Se dice que $\mathfrak{C}(X)$ **puede ser encajado ordenadamente en** $\mathfrak{C}(Y)$, si existe una función continua e inyectiva $H : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ tal que si $C(A) \subset C(B)$, donde $A, B \in C(X)$, entonces $H(C(A)) \subset H(C(B))$.

Definición 4.2. Sean X y Y dos continuos. Una función continua $\mathfrak{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ se llama **inducible** si existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}(f)$.

Observación 4.3. Notemos que dada una función $H : C(X) \to C(Y)$, es posible definir una función $\mathcal{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ usando un diagrama parecido a (1), de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[r, "H"] & C(Y) \arrow[d, "C_Y^*"] \\
\mathfrak{C}(X) \arrow[u, "\mathcal{U}_X"] \arrow[r, "\mathcal{H}"'] & \mathfrak{C}(Y)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{H}(C(A)) = C(H(A))$, para cada $A \in C(X)$, es decir $\mathcal{H} = C_Y^* \circ H \circ \mathcal{U}_X$. Debido a [**3**, Theorem 4.3, p. 126], la funición $\mathcal{H}$ será continua si $\mathcal{U}_X$ y H son funciones continuas; además H es continua siempre que $\mathcal{U}_X$, $\mathcal{U}_Y$ y $\mathcal{H}$ lo sean.

Observación 4.4. Por otra parte y de manera similar a la observación previa, si ahora se tiene una función continua $\mathcal{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$, con ayuda del diagrama (2), se puede definir a la función $H : C(X) \to C(Y)$ dada por $H(A) = \bigcup \mathcal{H}(A)$, para cada $A \in C(X)$. Es decir $H = \mathcal{U}_Y \circ \mathcal{H} \circ C_X^*$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathfrak{C}(Y) \arrow[d, "\mathcal{U}_Y"] \\
C(X) \arrow[u, "C_X^*"] \arrow[r, "F"'] & C(Y)
\end{tikzcd} \tag{12.1}$$

Por otra parte, es claro que, si $A, B \in C(X)$, entonces $C(A) \subset C(B)$ si y sólo si $A \subset B$. Con esto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.5. Sean X y Y dos continuos C^*-suaves. Se cumple que $C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$ si y sólo si $\mathfrak{C}(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $\mathfrak{C}(Y)$.

Demostración. Si $H : C(X) \to C(Y)$ es un encaje ordenado, la función de la Observación 2.1, $\mathfrak{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ es un encaje ordenado. La otra implicación es similar usando la Observación 4.4. $\square$

El siguiente resultado se sigue de manera directa de [**5**, Teorema 3.16, p. 55].

Teorema 4.6. Sean X y Y dos continuos y $H : C(X) \to C(Y)$ un encaje ordenado. Si $H(F_1(X)) \subset F_1(Y)$, entonces existe un encaje ordenado inducible $G : C(X) \to C(Y)$.

Con la notación de las Observaciones 2.1 y 4.4, podemos notar que $H : C(X) \to C(Y)$ cumple que $H(F_1(X)) \subset F_1(Y)$ si y sólo si $\mathcal{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ cumple que $\mathcal{H}(F_1(C(X))) \subset F_1(C(Y))$. Con esto y el Teorema 4.5, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.7. Sean X y Y dos continuos C^*-suaves. Si $\mathcal{H} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$ es un encaje ordenado tal que $\mathcal{H}(F_1(C(X))) \subset F_1(C(Y))$, entonces existe un encaje ordenado inducible $\mathcal{G} : \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(Y)$.

Debido a que los continuos hereditariamente indescomponibles son C^*-suaves [**6**, (2.4), p. 200], por [**5**, Toerema 3.17, p.55], se concluye lo siguiente.

Corolario 4.8. Sea X un continuo C^*-suave. Si Y es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces no existen encajes ordenados de $\mathfrak{C}(X)$ en $\mathfrak{C}(Y)$, $\mathcal{H}$, tales que $\mathcal{H}(F_1(C(X))) \subset F_1(C(Y))$.

Referencias

[1] G. Andablo, *Ordered embeddings of hyperspaces*, in Continuum Theory, Lecures notes in Pure and Applied Mathematics, 230, New York, Marcel Dekker (2002), 51-65.

[2] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Inducible Mappings between hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 46 (1998), 5-9.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966.

[4] R. Escobedo, V. Sánchez-Gutierrez and J. Sánchez-Martínez, *On the hyperspace* $\mathfrak{C}(X)$ *of continua*, Tsukuba J. Math. 40, No. 2, (2017), 187-201.

[5] A. Fuentes-Montes de Oca, *Funciones inducidas e inducibles entre hiperespacios*, Pesquimat, 21, (2018), No. 2, 49-57.

[6] J. Grispolakis, S.B. Nadler, E. D. Tymchatyn, *Some properties of hyperspaces with applications to continua theory*, Canad. J. Math., 31, (1979), 197-210.

[7] H. Hosokawa, *Induced mappings betwwen hyperspaces*, Bull. Tokio Gakugei Univ., 41 (1989), 1-6.

[8] H. Hosokawa, *Mappings of hyperspaces induced by refinable mappings*, Bull. Tokio Gakugei Univ., 42 (1990), 1-8.

[9] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces II*, Bull. Tokio Gakugei, Univ., 44 (1992), 1-7.

[10] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., 21, (1997), No. 1, 239-259.

[11] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces II*, Tsukuba J. Math., 21, (1997), No. 3, 773-783.

[12] A. Illanes, S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamental and Recent Advances* , Pure and Applied Mathematics, New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[13] S. B. Nadler Jr.,*Hyperspaces of Sets*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[14] S.B. Nadler Jr.,*Continuum Theory: An Introduction*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[15] V. Sánchez-Gutiérrez, *Sobre el hiperespacio de hiperespacios de un continuo*, Tesis de Maestría, Dirigido por R. Escobedo, BUAP, Puebla, 2015.

Correos electrónicos:

`pcontreras@urp.edu.pe` (Pedro Contreras),
`wolanod@unmsm.edu.pe`(William Olano),
`jsanchezm@unach.mx` (Javier Sánchez)

Capítulo 13

Un primer acercamiento al Lema de Yoneda

Daniel Joshua Anaya-Palacios, Juan Angoa-Amador, Ivan Fernando Vilchis-Montalvo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En este trabajo, se busca estudiar el Lema de Yoneda como uno de los primeros resultados destacados de la teoría de categorías, su demostración y algunas aplicaciones a la matemática moderna.

Detrás de la importancia matemática que tiene el Lema de Yoneda, este nos muestra en un lenguaje formal, el camino para levantar desde solo puntos (los elementos de un conjunto) un mundo de flechas (las transformaciones naturales entre un funtor y un funtor representable) o el trabajo inverso, bajar de un mundo de flechas a un mundo de puntos. Este doble camino es uno de los cotidianos trabajos de la mente humana, así que, situamos el Lema de Yoneda como la expresión matemática del doble camino de la razón que nos lleva de lo abstracto a lo concreto y de lo concreto a lo abstracto.

Esta es la razón por la cual el Lema de Yoneda aporta a la cultura humana una vía de comprensión y reproducción de la esencia de la razón.

2. Definiciones básicas

A continuación, introduciremos la notación que será empleada a lo largo de este trabajo.

Una *Categoría* $\mathscr{C}$ consiste en:

1. Una clase denotada por $Ob(\mathscr{C})$ cuyos elementos llamaremos *objetos de la categoría* $\mathscr{C}$. A veces escribiremos $A \in \mathscr{C}$ para referirnos a $A \in Ob(\mathscr{C})$.
2. Para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathscr{C})$, una clase $\mathscr{C}(A, B)$ cuyos elementos serán llamados *flechas de* A *a* B.
3. Para cada tres objetos $A, B, C \in \mathscr{C}$, una ley de composición:
$$\circ : \mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \longrightarrow \mathscr{C}(A, C);$$
donde $\circ((f, g))$ se escribirá como $g \circ f$, o simplemente, gf.
4. Para cada objeto $A \in Ob(\mathscr{C})$, una flecha $Id_A : A \to A$ que cumple los siguientes dos axiomas:
   (a) *Axioma de asociatividad*. Para cualesquier flechas $f \in \mathscr{C}(A, B)$, $g \in \mathscr{C}(B, C)$ y $h \in \mathscr{C}(C, D)$, la siguiente igualdad se cumple:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(*b*) *Axioma de identidad.* Para cualesquier flechas $f \in \mathscr{C}(A, B)$ y $g \in \mathscr{C}(B, C)$ se tiene que
$$Id_B \circ f = f \quad \text{y} \quad g \circ Id_B = g.$$

Definición 2.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$, definimos la *categoría opuesta de* $\mathscr{C}$, la cual denotamos por $\mathscr{C}^{op}$, como la categoría que tiene los mismos objetos que $\mathscr{C}$, es decir, $Ob(\mathscr{C}) = Ob(\mathscr{C}^{op})$, y las mismas flechas que $\mathscr{C}$, pero con dirección opuesta; esto es, para cada dos objetos $A, B \in Ob(\mathscr{C})$ y cada flecha $g \in \mathscr{C}(A, B)$, existe una flecha $\overline{g} \in \mathscr{C}^{op}(B, A)$. Además, si $\overline{f} \in \mathscr{C}^{op}(A, C)$, entonces la composición en $\mathscr{C}^{op}$ está definida por

$$\overline{f} \circ_{op} \overline{g} = \overline{g \circ f}.$$

Podemos pensar que existe una biyección entre $\mathscr{C}(A, B) \to \mathscr{C}^{op}(B, A)$ definida por $g \to \overline{g}$.

Definición 2.2. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{S}$ dos categorías. Decimos que $\mathscr{S}$ es una *subcategoría* de $\mathscr{C}$ si todos los objetos de $\mathscr{S}$ son objetos de $\mathscr{C}$, todas las flechas de $\mathscr{S}$ son flechas de $\mathscr{C}$ y la función composición de $\mathscr{S}$ es restricción de su similar en $\mathscr{C}$.

Definición 2.3. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $A, A' \in Ob(\mathscr{C})$. Decimos que una flecha $f \in \mathscr{C}(A, A')$ es un *isomorfismo* en $\mathscr{C}$ si existe $f' \in \mathscr{C}(A', A)$ tal que $f' \circ f = Id_A$ y $f \circ f' = Id_{A'}$.

Definición 2.4. Un *funtor* $\mathcal{F}$ de una categoría $\mathscr{C}$ a una categoría $\mathscr{D}$ consiste en:

1. Una función entre los objetos de $\mathscr{C}$ y los objetos de $\mathscr{D}$:

$$Ob(\mathscr{C}) \xrightarrow{\mathcal{F}} Ob(\mathscr{D})$$

   que asocia a cada $A \in Ob(\mathscr{C})$ con $\mathcal{F}\text{A} \in Ob(\mathscr{D})$.
2. Para cada flecha $g \in \mathscr{C}(A, A')$, una flecha $\mathcal{F}g \in \mathscr{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A')$, sujeta a los siguientes dos axiomas:
   a) Para cualesquier flechas $f \in \mathscr{C}(A, A')$ y $g \in \mathscr{C}(A', A'')$ se tiene que

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f.$$

   b) Para cada objeto $A \in \mathscr{C}$ se cumple que $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}A}$.

Definición 2.5. Se dice que un funtor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una *inmersión* si es inyectivo en objetos y, para cualesquier dos objetos $A, A' \in \mathscr{C}$, se cumple que

$$\mathcal{F} : \mathscr{C}(A, A') \to \mathscr{D}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}A')$$

es inyectiva ($\mathcal{F}$ es *fiel*) y suprayectiva ($\mathcal{F}$ es *pleno*).

Definición 2.6. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías con $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtores entre ellas. Una transformación natural, denotada por $\mathcal{U} : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, es una familia de flechas

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_C : \mathcal{F}C \to \mathcal{G}C \mid C \in Ob(\mathscr{C})\}$$

en $\mathscr{D}$, indicadas con los objetos $C \in Ob(\mathscr{C})$ tal que, para cada $f \in \mathscr{C}(C, C')$, el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}C \arrow[r, "\mathcal{U}_c"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}C \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}C' \arrow[r, "\mathcal{U}_{c'}"'] & \mathcal{G}C'
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\mathcal{U}_{c'} \circ \mathcal{F}f = \mathcal{G}f \circ \mathcal{U}_c$.

Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores, y $\mathcal{U} : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, $\mathcal{V} : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ transformaciones naturales, entonces $\mathcal{V} \circ \mathcal{U} : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}$ es una transformación natural definida, para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$, como $\mathcal{V}_A \circ \mathcal{U}_A$. Es claro que, para cada $f : A \to A'$ morfismo de $\mathscr{C}$, se tiene que los cuadrados del siguiente diagrama conmutan, por lo que, el rectángulo completo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\mathcal{U}_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[r, "\mathcal{V}_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}f"'] & \mathcal{H}A \arrow[d, "\mathcal{H}f"] \\
\mathcal{F}A' \arrow[r, "\mathcal{U}_{A'}"'] & \mathcal{G}A' \arrow[r, "\mathcal{V}_{A'}"'] & \mathcal{H}A'
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\mathcal{U} \circ \mathcal{V}$ es una transformación natural entre los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$.
Esto nos permite definir una categoría cuyos objetos son funtores, y que tiene como flechas a las transformaciones naturales entre ellos.

Definición 2.7. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Llamaremos categoría de funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, a la categoría $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ cuyos objetos son los funtores de la forma $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y que tiene por flechas a las transformaciones naturales $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$, para cada par $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$.

Proposición 2.8. Sea $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Entonces $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ si y solo si, para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$, $\mu_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, entonces existe una transformación natural $\mu' : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\mu' \circ \mu = Id_{\mathcal{F}}$ y $\mu \circ \mu' = Id_{\mathcal{G}}$, luego, para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$, tenemos que $\mu'_C \circ \mu_C = Id_{\mathcal{F}C}$ y $\mu_C \circ \mu'_C = Id_{\mathcal{G}C}$, por lo tanto, μ_C es un isomorfismo en $\mathscr{D}$ para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$.

($\Leftarrow$) Supongamos que, para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$, se tiene que $\mu_C : \mathcal{F}C \to \mathcal{G}C$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$, es decir, que existe $\mu_C^{-1} : \mathcal{G}C \to \mathcal{F}C$ en $\mathscr{D}$ tal que $\mu_C^{-1} \circ \mu_C = Id_{\mathcal{F}C}$ y $\mu_C \circ \mu_C^{-1} = Id_{\mathcal{G}C}$. Veamos que $\mu^{-1} : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ es una transformación natural. Sea $g \in \mathscr{C}(C, C')$. Verifiquemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}C \arrow[r, "\mu_C^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{G}g"'] & \mathcal{F}C \arrow[d, "\mathcal{F}g"] \\
\mathcal{G}C' \arrow[r, "\mu_{C'}^{-1}"'] & \mathcal{F}C'
\end{tikzcd}$$

Para ello, primero observemos que, como $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ es transformación natural, entonces el siguiente diagrama conmuta, para cada $g \in \mathscr{C}(C, C')$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}C \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}g"'] & \mathcal{G}C \arrow[d, "\mathcal{G}g"] \\
\mathcal{F}C' \arrow[r, "\mu_{C'}"'] & \mathcal{F}C'
\end{tikzcd}$$

De modo que, $\mu_{C'} \circ \mathcal{F}g = \mathcal{G}g \circ \mu_C$, lo que implica que $\mu_{C'}^{-1} \circ \mu_{C'} \circ \mathcal{F}g \circ \mu_C^{-1} = \mu_{C'}^{-1} \circ \mathcal{G}g \circ \mu_C \circ \mu_C^{-1}$. Así que, $\mathcal{F}g \circ \mu_C^{-1} = \mu_{C'}^{-1} \circ \mathcal{G}g$. Por lo tanto, $\mu^{-1} : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ es una transforamción natural. Es claro que $(\mu^{-1} \circ \mu)_C = \mu_C^{-1} \circ \mu_C = Id_{\mathcal{F}C}$ y que $(\mu \circ \mu^{-1})_C = \mu_C \circ \mu_C^{-1} = Id_{\mathcal{G}C}$. Por consiguiente, $\mu^{-1} \circ \mu = Id_{\mathcal{F}}$ y $\mu \circ \mu^{-1} = Id_{\mathcal{G}}$, es decir, $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. $\square$

Definición 2.9. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. Diremos que $\mathcal{F}$ es *naturalmente isomorfo a* $\mathcal{G}$ si existe un isomorfismo $\mu : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

Además de la categorá $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, existe otra categoría que se puede construir a partir de dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dadas; nos referimos a la *categoría producto*, que nos resultará muy útil en la siguiente sección.

Definición 2.10. Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, definimos su categoría producto, denotada por $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, como la categoría tal que

$$Ob(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = Ob(\mathscr{C}) \times Ob(\mathscr{D}) \quad \text{y}$$
$$\mathscr{C} \times \mathscr{D}((C,D),(C',D')) = \mathscr{C}(C,C') \times \mathscr{D}(D,D').$$

Es decir, los objetos de la categoría $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ son parejas de la forma (C,D) con $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$. Además, una flecha en $\mathscr{C} \times \mathscr{D}((C,D),(C',D'))$ es un par (f,g) tal que $f \in \mathscr{C}(C,C')$ y $g \in \mathscr{D}(D,D')$. También se tiene que, si (f,g) y (f',g') son flechas de $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, entonces su composición existe solo si $f' \circ f$ es una flecha en $\mathscr{C}$ y $g' \circ g$ es una flecha en $\mathscr{D}$. En este caso, dicha composición se define por $(f',g') \circ (f,g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. La identidad en un objeto (C,D) se define por $Id_{(C,D)} = (Id_C, Id_D)$.

3. Lema de Yoneda (presentación)

3.1. Ingredientes. Para entender el Lema de Yoneda, es necesario conocer algunas categorías, funtores y transformaciones naturales particulares. A continuación, presentaremos dichos conceptos.

1. **Set**. Es la categoría que tiene como objetos a la clase de todos los conjuntos, y cuyas flechas son todas las funciones entre ellos.
2. **Categoría localmente pequeña.** Diremos que una categoría $\mathscr{C}$ es localmente pequeña si, para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathscr{C})$, se tiene que $\mathscr{C}(A,B)$ es un conjunto.
3. **Funtores representables por C.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Para cada $C \in Ob(\mathscr{C})$ consideramos los funtores $h^C : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ y $h_C : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ definidos como sigue:
   a) Para cada $A \in \mathscr{C}$, se tiene que $h^C A = \mathscr{C}(C,A)$ y, para cada $f \in \mathscr{C}(A,B)$, la función $h^C f : \mathscr{C}(C,A) \to \mathscr{C}(C,B)$ se define por $(h^C f)(g) = f \circ g$.
   b) Para cada $A \in \mathscr{C}$, se cumple que $h_C A = \mathscr{C}(A,C)$ y, para cada $\overline{f} \in \mathscr{C}^{op}(A,B)$, la función $h_C \overline{f} : \mathscr{C}(A,C) \to \mathscr{C}(B,C)$ se define por $(h_C \overline{f})(g) = g \circ f$.
   Llamaremos *funtores representables por C* a los funtores h_C y h^C.

4. $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces denotamos por $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ a la categoría que tiene por objetos a todos los funtores de $\mathscr{C}$ a **Set**, y por flechas a todas las transformaciones naturales entre dichos funtores.

5. $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{C}$ es una categoría, entonces denotaremos por $\mathscr{H}$ a la subcategoría de $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ que tiene como objetos únicamente a los functores representables h^C con $C \in Ob(\mathscr{C})$, y como flechas a las transformaciones naturales entre ellos.

6. **Funtor de Yoneda.** Si $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña, le llamaremos el *Funtor de Yoneda* al funtor $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ que asocia a cada objeto $C \in Ob(\mathscr{C})$ con el funtor representable por C, h^C. Veamos cómo funciona este funtor en flechas: Para cada $\overline{g} \in \mathscr{C}^{op}(A,B)$, consideramos la tranformación natural $\mathcal{Y}(\overline{g}) : h^A \Rightarrow h^B$ que consiste en precomponer con $g \in \mathscr{C}(B,A)$. Es decir, $(\mathcal{Y}(\overline{g}))_C : h^A C \to h^B C$ es una función que se define como $(\mathcal{Y}(\overline{g}))_C(f) = f \circ g$ para cada $f \in \mathscr{C}(A,C) = h^A C$ y $C \in Ob(\mathscr{C})$. Notemos que $f \circ g$ es un morfismo en $\mathscr{C}(B,C) = h^B C$, ya que $f \in \mathscr{C}(A,C)$ y $g \in \mathscr{C}(B,A)$.

   De hecho, el Funtor de Yoneda $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ es una inmersión y la demostración de esta afirmación será un corolario del Lema de Yoneda.

4. Lema de Yoneda (desarrollo)

Lema 4.1 (Lema de Yoneda)**.** Consideremos la categoría $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ con $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Entonces, para cada objeto $\mathcal{F} \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ y cada $C \in \mathscr{C}$, existe una biyección

$$f_{C,\mathcal{F}} : \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}C.$$

Más aún, esta biyección es natural en $\mathcal{F}$ y C en el siguiente sentido: Dados $C, C' \in Ob(\mathscr{C})$, $g \in \mathscr{C}(C, C')$, $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ y $\mathcal{U} \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F}) \arrow[r, "f_{C,\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\mathcal{Y}(\overline{g}),\mathcal{U})"'] & \mathcal{F}C \arrow[d, "\mathcal{U}_{c'} \circ \mathcal{F}g = \mathcal{F}'g \circ \mathcal{U}_{c'}"] \\
\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^{C'}, \mathcal{F}') \arrow[r, "f_{C',\mathcal{F}'}"] & \mathcal{F}'C'
\end{tikzcd} \quad (1)$$

conmuta en $\mathbf{Set}$, donde si $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$, entonces $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\mathcal{Y}(\overline{g}), \mathcal{U})(\alpha) = \mathcal{U} \circ \alpha \circ \mathcal{Y}(\overline{g})$, con $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ el Funtor de Yoneda y $\overline{g} \in \mathscr{C}^{op}(C', C)$.

Demostración. Sean $\mathcal{F} \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ y $C \in Ob(\mathscr{C})$. Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_{C,\mathcal{F}} : \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C,\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F}C \\ \alpha &\longmapsto \alpha_C(Id_C) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t_{C,\mathcal{F}} : \mathcal{F}C &\longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F}) \\ a &\longmapsto T_a \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$, es decir, $\alpha : h^C \Rightarrow \mathcal{F}$ es una transformación natural. Entonces $\alpha_C : h^C C \to \mathcal{F}C$ es una función que puede ser evaluada en $Id_C \in h^C C$. Ahora, para cada $a \in \mathcal{F}C$, definamos $T_a : h^C \Rightarrow \mathcal{F}$ de la siguiente manera: si $B \in Ob(\mathscr{C})$, entonces $(T_a)_B : h^C B \to \mathcal{F}B$ es la función tal que, para $g \in \mathscr{C}(C, B)$, se tiene que $(T_a)_B(g) = \mathcal{F}g(a)$, donde $\mathcal{F}g : \mathcal{F}C \to \mathcal{F}B$. Para asegurar que T_a es una transformación natural, debemos demostrar que, para cada $l \in \mathscr{C}(A, B)$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h^C A \arrow[r, "(T_a)_A"] \arrow[d, "h^C l"'] & \mathcal{F}A \arrow[d, "\mathcal{F}l"] \\
h^C B \arrow[r, "(T_a)_B"'] & \mathcal{F}B
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\mathcal{F}l \circ (T_a)_A = (T_a)_B \circ h^C l$. Para ello, consideremos $k \in h^C A$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}l \circ (T_a)_A)(k) &= \mathcal{F}l((T_a)_A(k)) \\
&= \mathcal{F}l(\mathcal{F}k(a)) \\
&= (\mathcal{F}l \circ \mathcal{F}k)(a) \\
&= \mathcal{F}(l \circ k)(a) \\
&= (T_a)_B(l \circ k) \\
&= (T_a)_B((h^C l)(k)) \\
&= ((T_a)_B \circ h^C l)(k).
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores se siguen de las definiciones de h^C y T_a, así como del hecho de que $\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}k = \mathcal{F}(g \circ k)$, esto último, debido a que $\mathcal{F}$ es funtor.
Ahora veamos que $f_{C,\mathcal{F}}$ y $t_{C,\mathcal{F}}$ son inversas la una de la otra. Para esto, observemos que

$$(t_{C,\mathcal{F}} \circ f_{C,\mathcal{F}})(\alpha) = t_{C,\mathcal{F}}(\alpha_C(Id_C)) = T_{(\alpha_C(Id_C))}.$$

Además, notemos que, para cada $B \in Ob(\mathscr{C})$ y cada $t \in h^C B$, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} h^C C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "h^C t"'] & \mathcal{F}C \arrow[d, "\mathcal{F}t"] \\ h^C B \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{F}B \end{tikzcd}$$

conmuta en **Set**. Por lo que,

$$\begin{aligned} \left(T_{\alpha_C(Id_C)}\right)_B(t) &= \mathcal{F}t(\alpha_C(Id_C)) \\ &= \alpha_B((h^C t)(Id_C)) \\ &= \alpha_B(t \circ Id_C) \\ &= \alpha_B(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(t_{C,\mathcal{F}} \circ f_{C,\mathcal{F}})(\alpha) = \alpha$.
Asimismo, al desarrollar la otra composición, obtenemos la identidad en $\mathcal{F}C$. En efecto, si $a \in \mathcal{F}C$, entonces

$$\begin{aligned} (f_{C,\mathcal{F}} \circ t_{C,\mathcal{F}})(a) &= f_{C,\mathcal{F}}(T_a) \\ &= (T_a)_C(Id_C) \\ &= \mathcal{F}(Id_C)(a) \\ &= Id_{\mathcal{F}C}(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Por último, vamos a demostrar la naturalidad de la biyeccion en $\mathscr{F}$ y en $\mathscr{C}$. Para esto, sea $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$, $g \in \mathscr{C}(C, C')$ y $\mathcal{U} \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, entonces

$$\begin{aligned} f_{C',\mathcal{F}'}(\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\mathcal{Y}(\overline{g}), \mathcal{U})(\alpha)) &= f_{C',\mathcal{F}'}(\mathcal{U} \circ \alpha \circ \mathcal{Y}(\overline{g})) \\ &= (\mathcal{U} \circ \alpha \circ \mathcal{Y}(\overline{g}))_{C'}(Id_{C'}) \\ &= \mathcal{U}_{C'} \circ (\alpha \circ \mathcal{Y}(\overline{g}))_{C'}(Id_{C'}) \\ &= \mathcal{U}_{C'} \circ \alpha_{C'}(Id_{C'} \circ g) \\ &= \mathcal{U}_{C'}(\alpha_{C'}(g)) \\ &= \mathcal{U}_{C'}(\alpha_{C'}(g \circ Id_C)) \\ &= \mathcal{U}_{C'}(\alpha_{C'}(h^C(g)(Id_C))) \\ &= \mathcal{U}_{C'}((\alpha_{C'} \circ h^C(g))(Id_C)) \\ &= \mathcal{U}_{C'}((\mathcal{F}g \circ \alpha_C)(Id_C)) \\ &= (\mathcal{U}_{C'} \circ \mathcal{F}g)(\alpha_C(Id_C)) \\ &= (\mathcal{U}_{C'} \circ \mathcal{F}g)(f_{C,\mathcal{F}}(\alpha)). \end{aligned}$$

Por lo que, el diagrama (1), de la conclusión del Lema, conmuta. □

Corolario 4.2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Entonces el Funtor de Yoneda $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ es un una inmersión.

Demostración. Por la Definición 2.5, necesitamos demostrar que $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ es inyectivo en objetos y que

$$\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op}(C, C') \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$$

es un isomorfismo de conjuntos, donde, si $\overline{g} \in \mathscr{C}^{op}(C, C')$, entonces $\mathcal{Y}(\overline{g}) : h^C \Rightarrow h^{C'}$ es la transformación natural definida de la siguiente manera: para cada $B \in Ob(\mathscr{C})$ y cada $f \in \mathscr{C}(C, B)$, se tiene que $(\mathcal{Y}(\overline{g}))_B(f) = f \circ g$ donde $(\mathcal{Y}(\overline{g}))_B : h^C B \to h^{C'} B$ es un morfismo de conjuntos. Sea $\mathcal{F} = h^{C'}$ en el contexto del Lema 4.1. Recordemos que en la demostración de este lema, para $g \in \mathcal{F}C = h^{C'}C$, consideramos la biyección

$$t_{C,h^{C'}} : h^{C'}C \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$$

$$g \longmapsto T_g$$

donde $T_g : h^C \Rightarrow h^{C'}$ es la transformación natural definida de la siguiente manera: para cada $B \in Ob(\mathscr{C})$, la función $(T_g)_B : h^C B \to h^{C'} B$ es tal que, si $f \in \mathscr{C}(C, B)$, entonces $(T_g)_B(f) = (h^{C'} f)(g) = f \circ g$. Por lo tanto, las transformaciones naturales $\mathcal{Y}(\overline{g})$ y T_g son iguales. Ahora, por el mismo lema, tenemos que $t_{C,h^{C'}} : h^{C'}C \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$ es una biyección, así que, si $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in \mathscr{C}^{op}(C, C')$ con $\overline{g_1} \neq \overline{g}_2$, entonces $g_1 \neq g_2$ con $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(C', C)$, lo que implica que $T_{g_1} \neq T_{g_2}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}(\overline{g_1}) \neq \mathcal{Y}(\overline{g_2})$. De este modo, podemos concluir que la función de conjuntos $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op}(C, C') \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$ es inyectiva. Consideremos ahora $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$. Entonces existe $g \in h^{C'}C = \mathscr{C}(C', C)$ tal que $T_g = \alpha$. Por otro lado, como $\overline{g} \in \mathscr{C}^{op}(C, C')$ y $T_g = \mathcal{Y}(\overline{g})$, se infiere que $\mathcal{Y} : \mathscr{C}^{op}(C, C') \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, h^{C'})$ es suprayectiva.

Para ver que el Funtor de Yoneda es inyectivo en objetos, consideremos $\mathcal{Y}C = \mathcal{Y}C'$, es decir, $h^C = h^{C'}$. Por lo que $Id_C \in h^{C'}C$, entonces, necesariamente, $C = C'$. □

La siguiente proposición nos dice que, si $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña y $C \in Ob(\mathscr{C})$, entonces cualquier $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$ está completamente determinada por el elemento $\alpha_C(Id_C)$ de $\mathcal{F}C$.

Proposición 4.3. Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña, $C \in Ob(\mathscr{C})$ y $\mathcal{F} \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$. Si $\alpha : h^C \Rightarrow \mathcal{F}$ es una transformación natural, entonces, para todo $B \in Ob(\mathscr{C})$ y cada $f \in h^C B = \mathscr{C}(C, B)$, se tiene que $\alpha_B(f) = \mathcal{F}f(\alpha_c(Id_C))$.

Demostración. Sabemos que $\alpha = \{\alpha_B : h^C B \to \mathcal{F}B \mid B \in Ob(\mathscr{C})\}$. Consideremos $B \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in h^C B = \mathscr{C}(C, B)$. Como $\alpha : h^C \Rightarrow F$ es una transformación natural, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} h^C C \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "h^C f"'] & \mathcal{F}C \arrow[d, "\mathcal{F}f"] \\ h^C B \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{F}B \end{tikzcd}$$

En particular, $(\alpha_B \circ h^C f)(Id_C) = (\mathcal{F}f \circ \alpha_C)(Id_c)$. Luego

$$\alpha_B((h^C f)(Id_C)) = \mathcal{F}f(\alpha_C(Id_C)).$$

Finalmente, recordando que $(h^C f)(Id_C) = f$, se concluye que

$$\alpha_B(f) = \mathcal{F}f(\alpha_C(Id_C)).$$

□

Proposición 4.4. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorias, $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor fiel y pleno entre ellas y $C, C' \in Ob(\mathscr{C})$. Entonces $\mathcal{F}C$ es isomorfo a $\mathcal{F}C'$ en $\mathscr{D}$ si y solo si C es isomorfo a C' en $\mathscr{C}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{F}$ es fiel y pleno tenemos que, en particular para $C, C' \in \mathscr{C}$, la función $\mathcal{F} : \mathscr{C}(C, C') \to \mathscr{C}'(\mathcal{F}C, \mathcal{F}C')$ obtenida mediante el funtor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, es inyectiva y suprayectiva. Además, estamos suponiendo que $\mathcal{F}C$ es isomorfo a $\mathcal{F}C'$ en $\mathscr{D}$, así que podemos considerar $f : \mathcal{F}C \to \mathcal{F}C'$ un isomorfismo en $\mathscr{D}$, y entonces existe $f^{-1} : \mathcal{F}C' \to \mathcal{F}C$ tal que $f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{F}C}$. Por hipótesis, existen $g : C \to C'$ y $h : C' \to C$ en $\mathscr{C}$ tales que $\mathcal{F}g = f$ y $\mathcal{F}h = f^{-1}$. Como $\mathcal{F}(Id_C) = Id_{\mathcal{F}C}$ y $\mathcal{F}(h \circ g) = f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{F}C}$, entonces $h \circ g = Id_C$ por inyectividad. Análogamente, $gh = Id_{C'}$. Por lo tanto, C es isomorfo a C' en $\mathscr{C}$.

($\Leftarrow$) Es cierto para cualquier funtor. $\square$

Corolario 4.5. Sea $\mathscr{C}$una categoría localmente pequeña. Entonces h^C es isomorfo a $h^{C'}$ en $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ si y solo si C es isomorfo a C' en $\mathscr{C}$.

Demostración. Es una consecuencia del Corolario 4.2 a la par de la Proposición 4.4. $\square$

Lo que el Corolario 4.5 junto con la Proposición 2.8 nos dice es que, cuando se quiere verificar que dos objetos $A, B \in Ob(\mathscr{C})$ son isomorfos, bastará con demostrar que, para cada objeto $X \in Ob(\mathscr{C})$, hay una biyección $f_X : \mathscr{C}(A, X) \to \mathscr{C}(B, X)$ que es natural en X. Es decir, que para cada $X' \in Ob(\mathscr{C})$ y toda $g : X \to X'$, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(A,X) \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "h^A g"'] & \mathscr{C}(B,X) \arrow[d, "h^B g"] \\
\mathscr{C}(A,X') \arrow[r, "f_{X'}"'] & \mathscr{C}(B,X')
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathbf{Set}$.

Ahora veremos que el Lema de Yoneda nos da un isomorfismo que es natural en dos instacias, a saber, en C (objetos de $\mathscr{C}$) y $\mathcal{F}$ (objetos de $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$). Los siguientes funtores relacionan estas dos instancias, uno es el funtor evaluación:

$$\mathcal{E}v : \mathscr{C}^{op} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$$
$$(C, \mathcal{F}) \longmapsto \mathcal{F}C$$

y el otro es una composición de otros dos funtores:

$$\mathcal{G} = \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\_, \_) \circ (\mathcal{Y}, Id_{\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}}) : \mathscr{C}^{op} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$$

donde el funtor $(\mathcal{Y}, Id_{\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}}) : \mathscr{C}^{op} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{H} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ toma una pareja $(C, \mathcal{F})$ en $\mathscr{C}^{op} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ y lo envía al par $(\mathcal{Y}C, Id_{\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}}(\mathcal{F})) = (h^C, \mathcal{F})$, y el funtor $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(\_, \_)$ toma una pareja $(h^C, \mathcal{F})$ y la manda a $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$, y si $h(\bar{g}) : h^C \Rightarrow h^{C'}$, $\eta : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}'$ con $g : C' \to C$, entonces $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})(\alpha) = \eta\alpha\overline{h(\bar{g})}$ para $\alpha : h^C \to \mathcal{F}$. En resumen, tenemos la siguiente situación:

$$\mathscr{C}^{op} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{H} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$$
$$(C, \mathcal{F}) \longmapsto (h^C, \mathcal{F}) \longmapsto \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$$

De modo que, si $\mathscr{C}$ es localmente pequeña, entonces las hipótesis del Lema de Yoneda se cumplen y, por lo tanto, $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^C, \mathcal{F})$ es un conjunto y $\mathcal{E}v \cong \mathcal{G}$, es decir son isomorfos en el sentido de la Definición 2.9. Es decir, existe una transformación natural entre $\mathcal{G}$ y $\mathcal{E}_v$, que es isomorfismo, lo que devela el misterio de la *naturalidad* en el enunciado del Lema de Yoneda.

A continuación demostraremos un resultado muy conocido de la teoría de grupos usando el Lema de Yoneda. Somos conscientes de que dicho teorema es mucho más fácil de demostrar dentro de la teoría de grupos que como una aplicación del Lema de Yoneda en la teoría de categorías, pero creemos que es un magnífico ejemplo para mostrar la generalidad, la utilidad y la concreción del Lema de Yoneda en matemáticas.

Teorema 4.6 (Teorema de Cayley)**.** Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo del grupo de sus permutaciones S_G.

Demostración. Consideremos $\mathscr{C}$ una categoría con un solo objeto X, y tal que $\mathscr{C}(X,X)=G$, es decir, las flechas de $\mathscr{C}$ son los elementos de G, y la composición está dada por la operación del grupo. En esta categoría todas las flechas son biyectivas y la identidad está dada por el neutro del grupo. Es claro que $\mathscr{C}$ es localmente pequeña, por lo que, el Lema de Yoneda nos asegura que

$$f_{X,h^X} : \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X) \to h^X(X)$$

es una biyección natural en X y en h^X. Esto a su vez, nos da una biyección entre $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, hX)$ y $h^X(X)=G$. Además, recordemos de la demostración del Lema 4.1, que

$$t_{X,h^X} : h^X(X) \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X),$$

definida por $t_{X,h^X}(a)=T_a$ donde $T_a : h^X \Rightarrow h^X$ es la transformación natural tal que

$$\begin{aligned}(T_a)_X(g) &= h^X(g)(a)\\ &= ga,\end{aligned}$$

con $g,a \in h^X(X)=G$, es el inverso de la biyección anterior. Ahora exploremos con detenimiento al funtor $h^X : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$. Notemos que dicho funtor determina una acción izquierda de G en G, es decir, la multiplicación en G. Por lo que, una transformación natural $\mu \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X)$ no es otra cosa que un morfismo de G acciones izquierdas, ya que, para todo $c,b \in h^X(X)$, por la naturalidad de μ, se tiene que $\mu_X(cb) = c\mu_X(b)$. Es claro que, para cada $\mu \in \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X)$, se cumple que $\mu_X : G \to G$ es una biyección. De hecho, $\mu_X(c) = c\mu_X(e_G)$ para todo $c \in G$ donde e_G denota al neutro de G. Finalmente, notemos que $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X)$ es un subgrupo de S_G y que

$$t_{X,h^X} : h^X(X) \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X)$$

es un morfismo de grupos. Así que, podemos concluir que

$$G \cong \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}(h^X, h^X) \leqslant S_G.$$

□

5. Conclusiones

Desde su aparición, la teoría de categorías ha crecido aceleradamente, de tal forma que, en la actualidad, resulta una tarea sumamente difícil estudiar todo lo que se ha escrito al respecto. No obstante, nosotros creemos que, afortunadamente, es posible comprenderla y al hacerlo, como consecuencia, nos acercamos profundamente a la matemática. Tambien creemos que el Lema de Yoneda es la llave para entrar al recinto de las relaciones entre los objetos y dejar por fin de estudiar a los objetos mismos. Estamos convencidos que el camino elegido es el correcto, sobre todo para los que gustan de «*navegar en mares profundos y desembarcar en costas agrestes*».

Referencias

[1] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics,New York, (5), (1971).

[2] Leinster, T., *Basic Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, (143), (2014).

[3] van Oosten, J., *Basic Category Theory*, Utrecht University, The Netherlands, (2002).

Correos electrónicos:
danielanayapalacios1905@gmail.com (Daniel Joshua Anaya-Palacios),
jangoa@fcfm.buap.mx (Juan Angoa-Amador),
vilchis.f@gmail.com (Ivan Fernando Vilchis-Montalvo).

Topología y sus aplicaciones 8
coordinado por: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo y Manuel Ibarra Contreras, está a disposición en formato PDF en la página de libros digitales de la Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2.9 mb
librosdigitales.buap.mx