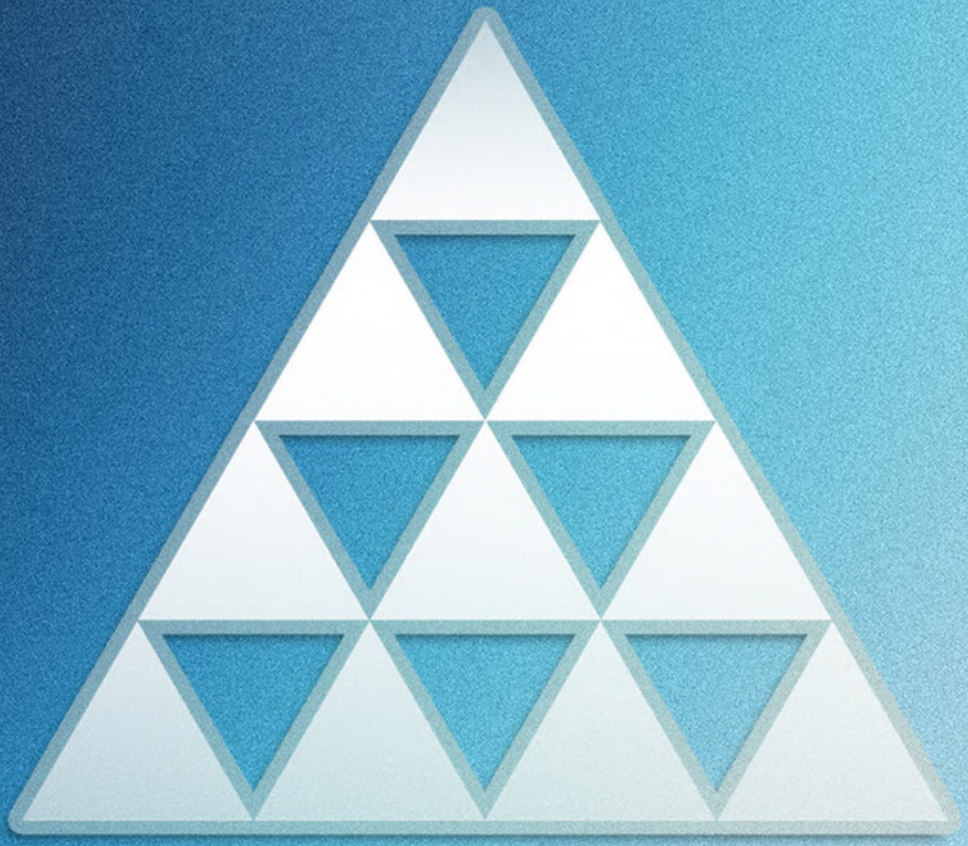
TENDENCIAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2025



Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar
(Editores)

SOMIDEM
Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

TENDENCIAS en la educación MATEMÁTICA 2025



Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

Tendencias en la Educación Matemática 2025

Editoras:

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Autores:

Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Alejando Zapoteco-Tepetate
Alberto León del Carmen
Alan Andres Cruz-Acevedo
Alberto Santana Ortega
Carlos Enrique Flores Gasca
Daniel Godoy-Caraballo
David Block Sevilla
Erwin Santana Ortega
Gerardo Salgado-Beltrán
Guadalupe Sánchez-Gómez
Homero Enríquez Ramírez
Javier García-García
Luis Manuel Cabrera Chim
Marcos Campos Nava
María Laguna
Oscar Nelson Lopez Lopez
Rosvel Rodríguez
Verónica Vargas Alejo
Yésica Liliana Islas Arias
Yesenia Castaño Torres



Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

Cada capítulo de este libro ha pasado por un riguroso proceso de evaluación para su publicación, implementando el sistema de dictaminación de doble ciego. Este método consiste en que tanto los autores como los revisores permanecen en anonimato durante todo el proceso, garantizando así una evaluación objetiva basada únicamente en la calidad y el mérito del contenido presentado. La evaluación fue realizada por académicos especialistas en cada uno de los temas abordados, quienes con su amplia experiencia y conocimientos contribuyeron a enriquecer y validar el contenido. Esta rigurosa práctica cumple con los estándares de transparencia editorial y ética, asegurando la integridad de los procesos y el valor académico de los trabajos publicados.



Esta obra es una publicación de acceso libre y está sujeta a los lineamientos de la Licencia Internacional Creative Commons Attribution 4.0. Esta licencia autoriza el uso, intercambio, adaptación, distribución y transmisión del material en cualquier medio o formato, siempre y cuando se otorgue el debido crédito al autor original, citando tanto su origen como la fuente del material gráfico

Comité editorial

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

María García González
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0001-7088-1075

Ernesto A. Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
https://orcid.org/0000-0002-8995-7962

Mario Sánchez Aguilar
Instituto Politécnico Nacional
https://orcid.org/0000-0002-1391-9388

Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
https://orcid.org/0000-0001-7897-7223

Yolanda Chávez Ruíz
Escuela Normal de Rincón de Romos, Aguascalientes
https://orcid.org/0000-0003-0955-4803

Carlos Valenzuela García
Universidad de Guadalajara
https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

Apolo Castañeda Alonso
Instituto Politécnico Nacional
https://orcid.org/0000-0002-7284-8081

Comité Científico Revisor de la obra

Francisco Javier Diez Palomar
Universidad de Barcelona
https://orcid.org/0000-0003-4447-1595

Eric Flores Medrano
Universidad Complutense de Madrid
https://orcid.org/0000-0002-6134-729X

Eduardo Carlos Solís Briseño
Universidad Autónoma de Zacatecas
https://orcid.org/0000-0002-2009-3879

Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander
Colombia
https://orcid.org/0000-0001-8580-2763

Lizzet Morales García
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0002-2295-2278

Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-2748-6042

Jesús Antonio Larios Trejo
Universidad de Colima
https://orcid.org/0000-0002-2207-003X

Francisco Samuel Mendoza Moreira
Universidad Bolivariana del Ecuador
https://orcid.org/0000-0001-9959-5240

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-9596-4253

Ruth Rodríguez Gallegos
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey
https://orcid.org/0009-0002-4230-9885

Erika García Torres
Universidad Autónoma de Querétaro
https://orcid.org/0000-0003-1764-7380

Leidy Hernández Mesa
Universidad Autónoma de Baja California
https://orcid.org/0000-0001-9955-7199

María del Socorro García González
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0001-7088-1075

Judith Alejandra Hernandez Sanchez
Universidad Autónoma de Zacatecas
https://orcid.org/0000-0003-0569-2037

Guadalupe Cabañas Sanchez
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-2471-0440

Nielka Rojas Gonzalez
Universidad Católica del Norte, Chile
https://orcid.org/0000-0002-3548-635X

Diana Zakaryan
Pontificia Universidad Católica de Valparaiso,
Chile
https://orcid.org/0000-0002-3400-8399

Renato Douglas G. L. Ribeiro
Instituto Federal de São Paulo,Caraguatatuba,
Brasil
https://orcid.org/0000-0003-4120-8994

Danilo Díaz Levicoy
Universidad Católica de Maule, Chile
https://orcid.org/0000-0001-8371-7899

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional
https://orcid.org/0000-0002-7269-8546

José Gabriel Sánchez Ruiz
Universidad Nacional Autónoma de México
https://orcid.org/0000-0002-4306-1431

Armando Alexander Aroca Araujo
Universidad del Atlántico, Colombia
https://orcid.org/0000-0003-2786-4848

Comité Científico Revisor de la obra

María Trigueros Gaisman
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0001-7527-6704

José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0003-2501-943X

Jenny Patricia Acevedo Rincón
Universidad Industrial de Santander
Colombia
https://orcid.org/0000-0003-3872-5130

Berny Salas Solano
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
https://orcid.org/0000-0001-8195-4110

Dinazar Isabel Escudero Avila
Universidad Complutense de Madrid
https://orcid.org/0000-0001-6380-9016

Catalina Navarro Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0001-5214-0062

Carlos Valenzuela García
Universidad de Guadalajara
https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0003-0658-4396

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://orcid.org/0000-0002-2857-0772

Yudi Andrea Ortiz Rocha
https://orcid.org/0000-0003-1831-1037

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. (SOMIDEM)

Título: Tendencias en la Educación Matemática 2025

Primera Edición, 2025 / Editorial SOMIDEM

Clasificación DEWEY. Materia: 001.4 – Investigación.
Tipo de Contenido: Ciencia y tecnología.

Clasificación thema: JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes.
Tipo de soporte: libro digital descargable

ISBN: 978-607-59819-7-0
DOI de la obra completa: https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01

Editorial SOMIDEM
Calle Adolfo Prieto
Colonia Del Valle
C.P. 03100, Alcaldía Benito Juárez
Ciudad de México
Correo electrónico: editorialsomidem@gmail.com
Sitio de internet: http://editorialsomidem.org.mx/
Registrado ante INDAUTOR como entidad editora: MID131003

Corrección de estilo y diseño editorial: Ingrid Eleonor Castañeda González
ingrideleonor@gmail.com

Diseño de portada: Valeria Franco Echavarría
valefranco97@outlook.com

Cita de la obra completa en APA 7:
Juárez Ruiz, E. L., & Hernández Rebollar, L. A. (Ed.). (2025). *Tendencias en la Educación Matemática 2025.* Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01

Índice

Presentación 13

PRIMERA TENDENCIA

APORTES AL ESTUDIO DEL SENTIDO NUMÉRICO

Dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de cálculo mental
Yésica Liliana Islas Arias, Marcos Campos Nava y Agustín Alfredo Torres Rodríguez 23

La fracción en la recta numérica: explorando el significado en estudiantes de educación primaria
Gerardo Salgado-Beltrán, Javier García-García y Alejando Zapoteco-Tepetate 49

SEGUNDA TENDENCIA

COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Explorando áreas de polígonos: conexiones matemáticas en estudiantes de Nivel Medio Superior
Alberto León-del Carmen, Javier García-García y Gerardo Salgado-Beltrán 69

Concepciones alternativas sobre el concepto de ángulo en estudiantes de nivel medio superior
Guadalupe Sánchez-Gómez, Gerardo Salgado-Beltrán y Javier García-García 93

TERCERA TENDENCIA

PENSAMIENTO FUNCIONAL Y COMPRENSIÓN GRÁFICA

Referentes teóricos para el diseño de situaciones variacionales.
un ejercicio reflexivo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional
Luis Manuel Cabrera Chim 113

Pensamiento Funcional desarrollado por estudiantes de secundaria
al resolver dos tareas asociadas al concepto de función escalonada
Carlos Enrique Flores Gasca y Verónica Vargas Alejo 135

Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes universitarios
Daniel Godoy-Caraballo, Javier García-García
y Gerardo Salgado-Beltrán 155

CUARTA TENDENCIA

HORIZONTES EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Colaboración entre docentes e investigadores en la enseñanza
de las matemáticas. Aportes para la formación docente
David Block Sevilla, Yesenia Castaño Torres, María Laguna
y Rosvel Rodríguez 179

Conexiones matemáticas establecidas por futuros profesores
de matemáticas sobre el Teorema de Pitágoras
Alan Andres Cruz-Acevedo, Gerardo Salgado-Beltrán
y Javier García-García 203

El método de Polya y el mapa conceptual híbrido como estrategias
didácticas para la resolución de problemas geométricos durante la
formación de futuras docentes de educación primaria
Alberto Santana Ortega, Oscar Nelson Lopez Lopez
y Erwin Santana Ortega 227

La orquestación y uso de recursos digitales para la enseñanza
de las matemáticas en la escuela primaria: un estudio diagnóstico
Homero Enríquez Ramírez 251

Presentación

Estimado lector,

La educación matemática es un campo disciplinar en constante evolución y crecimiento, y algunas de sus tendencias actuales en investigación se presentan en este libro. Los capítulos que lo conforman fueron expuestos en el XI Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación" (TEMBI 11), realizado en el mes de noviembre del año 2024. Estos trabajos pasaron por una revisión doble ciego, llevada a cabo por un conjunto de expertos en educación matemática. En esta ocasión, hemos identificado cuatro tendencias en la investigación en este campo. La primera, que hemos titulado aportes al estudio del sentido numérico, consta de dos trabajos, la segunda, que se ha titulado comprensión de conceptos geométricos en el nivel medio superior contiene dos trabajos también, la tercera, titulada pensamiento funcional y comprensión gráfica con tres trabajos, y la cuarta titulada horizontes en la formación docente en la que se presentan cuatro trabajos. A continuación, presentamos una reseña de los trabajos en cada tendencia.

Aportes al estudio del sentido numérico

El primer capítulo de esta sección, de los autores Yesica Liliana Islas Arias, Marcos Campos Nava y Agustín Alfredo Torres Rodríguez, explora las dificultades que presentan estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas en los que deben emplear cálculo mental, desde la perspectiva del desarrollo del sentido numérico. A través de un estudio de caso de corte cualitativo conformado por nueve estudiantes de tercero de secundaria, los resultados indicaron que cinco de ellos no cuentan con elementos suficientes para llevar a cabo actividades de cálculo mental. Los autores señalan que las

dificultades que presentaron los estudiantes al resolver los problemas aritméticos de cálculo mental involucraron: comprensión del significado de los números, composición y descomposición de los números, representaciones múltiples de los números y de las operaciones y comprensión del efecto relativo de las operaciones. También observaron en esta investigación que presentar la operación visualmente no resultó en una mejora de los procesos mentales de los estudiantes, contrario a otras investigaciones. Pese a los resultados obtenidos, los autores rescatan que los estudiantes, aunque con errores, resolvieron las operaciones con procedimientos no estándares, es decir, que los estudiantes saben que los algoritmos no son la única forma de dar respuesta a operaciones aritméticas mentales.

El segundo capítulo de esta tendencia es el presentado por Gerardo Salgado-Beltrán, Javier García-García y Alejando Zapoteco-Tepetate, quienes exploran los significados del concepto de fracción como punto en la recta numérica, en estudiantes de primaria. Este significado surge cuando se relacionan las fracciones con la ubicación de un punto específico en la recta numérica realizando las siguientes acciones: identifica entre qué números naturales consecutivos se ubica una fracción, utiliza y construye escalas para generar la partición congruente de la unidad, y utiliza la recta para representar y resolver problemas de aplicación. A través de un estudio cualitativo de análisis temático se aplicaron entrevistas basadas en cuatro tareas a 30 estudiantes de sexto grado de primaria. Los autores identificaron los siguientes atributos con sus correspondientes subtemas: *a*) rango de ubicación, con dos subtemas: convierte la fracción a su forma decimal, determina si la fracción es propia o impropia para ubicarla; *b*) uso y construcción de escalas, con tres subtemas: construye la escala de manera aproximada, la escala se concibe como la distancia entre dos números naturales en la recta numérica y, sin una escala definida; *c*) manejo de partición congruente con el siguiente subtema: la partición se construye de forma aproximada; y finalmente el criterio *d*) resolución de problemas mediante la recta numérica. Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes evidenciaron más frecuentemente los tres primeros atributos relacionados con el significado de la fracción como punto en la recta numérica, a saber: rango de ubicación, uso y construcción de escalas, y manejo de la partición congruente. Esto contrasta con los resultados sobre el cuarto atributo, el cual solo fue evidenciado por dos de los estudiantes participantes. Un resultado que resaltan los autores es la conversión que realizan la mayoría de los estudiantes de la fracción a su equivalente decimal, para determinar el intervalo delimitado por números naturales en el que debe ubicarse la fracción, lo cual evidencia la falta de comprensión de la fracción como número en sí mismo que se puede localizar de manera exacta en la recta numérica. Finalmente, los autores subrayan la necesidad de que los docentes amplíen su enfoque didáctico, más allá del

tratamiento procedimental, para incluir estrategias que fomenten la comprensión conceptual de la fracción en los estudiantes.

Comprensión de conceptos geométricos en el nivel medio superior

En esta sección se presentan dos capítulos que abordan la comprensión de los conceptos geométricos área de un polígono y ángulo en estudiantes del nivel medio superior. El trabajo de Alberto León del Carmen, Javier García-García y Gerardo Salgado-Beltrán estudia la comprensión del área de polígonos a través de la caracterización de las conexiones matemáticas que evidenciaron cinco estudiantes cuando respondieron a una entrevista basada en tareas. Los autores realizaron un análisis extenso de las conexiones que aparecieron en cada una de las tareas, así como las que mostraron cada uno de los entrevistados. De tal manera que les fue posible discutir sobre las conexiones más frecuentes por tarea y por estudiante. El tipo de conexiones que más se presentó fue el de procedimientos, que indica que los entrevistados recurrieron predominantemente a la aplicación de algoritmos y fórmulas para resolver problemas matemáticos. Llama la atención el caso de uno de los estudiantes, quien mostró siete tipos diferentes de conexiones, situación que sugiere que él es capaz de establecer vínculos diversos entre conceptos matemáticos. Mientras que otro que no mostró conexiones de los tipos representaciones diferentes y parte-todo permite a los autores concluir que él no descompone ni reconstruye las figuras geométricas para relacionar sus propiedades, y que esto puede ser un indicador de un bajo rendimiento en tareas de mayor complejidad. Esta investigación informa sobre las dificultades que prevalecen en estudiantes de nivel medio superior cuando trabajan con tareas sobre área de polígonos, da lugar a resaltar la importancia de diseñar tareas que promuevan el análisis de propiedades, la identificación de características de objetos matemáticos y la aplicación de teoremas asociados, así como tareas que requieran del uso de diferentes representaciones.

El segundo capítulo de esta sección trata sobre la comprensión del concepto de ángulo, también en estudiantes de nivel medio superior y a través de una entrevista basada en tareas. Los autores Guadalupe Sánchez-Gómez, Gerardo Salgado-Beltrán y Javier García-García se centran en las concepciones alternativas de ángulo que evidenciaron 20 estudiantes de dicho nivel educativo en una zona rural del estado de Guerrero, México. Ellos parten de analizar la problemática relacionada con la comprensión de este concepto, la cual se debe, por ejemplo, a su naturaleza multifacética, al enfoque procedimental y memorístico en su enseñanza, a la ambigüedad de las definiciones y a las explicaciones que se presentan en los libros de texto, entre otras. Además, para los autores, las concepciones alternativas de ángulo son interpretaciones que difieren de las aceptadas como correctas en el contexto matemático. Así, la investigadora y sus colegas identificaron cinco

concepciones alternativas: el ángulo como área, el signo del ángulo dependiendo de la dirección de sus lados, la medida de un ángulo como la medida del arco angular indicado en su representación o en función de la medida de la longitud de sus lados y el ángulo como distancia. Con base en sus resultados ellos concluyen que los participantes evidenciaron una comprensión limitada de este concepto y una visión estática del mismo, por lo que resaltan la necesidad de cambiar a un enfoque didáctico que promueva la naturaleza dinámica del ángulo y su relación con situaciones geométricas y cotidianas, pues también identificaron una desconexión entre la definición y su aplicación en situaciones concretas.

Pensamiento funcional y comprensión gráfica

En esta tendencia se presentan tres investigaciones relacionadas con el pensamiento funcional que consideran diferentes aspectos de este tipo de pensamiento tan importante en el aprendizaje de la matemática escolar.

El capítulo de Carlos Enrique Flores Gasca y Verónica Vargas Alejo analiza tipos de pensamiento funcional asociados con la función escalonada. Estos autores pusieron a prueba dos tareas en el contexto del movimiento de un automóvil y con uso del software SimCalc MathWorlds. La clasificación de tipos de pensamiento funcional que utilizaron tomó elementos de otros autores, pero se complementó con categorías que emergieron de sus datos, quedando como: Variación (recursividad), covariación cualitativa, covariación cuantitativa y regla de correspondencia. Entre sus resultados obtuvieron un desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes participantes, quienes pasaron de mostrar, en la primera tarea, recursividad y covariación cualitativa a covariación cuantitativa y correspondencia en la segunda tarea. Acerca del uso del software mencionan que, aunque este es intuitivo y permite crear tablas y gráficas a partir de animaciones de objetos, este podría sustituirse por otros, como GeoGebra, que es dinámico y de libre acceso.

En el capítulo de Luis Manuel Cabrera Chim se muestra cómo un esquema de desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional (Pylvar) es útil para analizar actividades que buscan promover este tipo de pensamiento. El análisis se complementa con una rúbrica de evaluación que amplía la versión publicada por el mismo autor en el año 2024. Según sus palabras, la rúbrica busca "operacionalizar el esquema de desarrollo al establecer criterios de desempeño sobre los que se debe obtener evidencia por parte del estudiante y que dan cuenta de un progreso en el desarrollo del Pylvar". Sin embargo, en esta investigación no se evalúa el desempeño de estudiantes, sino si este esquema y la rúbrica proporcionan elementos suficientes para diseñar o rediseñar situaciones que promuevan el desarrollo del Pylvar. Con esta nueva propuesta se analizó una tarea ya reportada en otra investigación y se obtiene que, aunque fue planteada para desarrollar el Pylvar, esta no

muestra todos los estadios del esquema, por lo que, el esquema y la rúbrica son una herramienta práctica para el diseño o rediseño de situaciones o actividades relacionadas con el pensamiento funcional enfocado en la variación.

El tercer capítulo de esta sección aborda la comprensión de las gráficas, importantes en el desarrollo del pensamiento funcional, pero, con un uso delimitado en el área de la estadística. A los autores de este trabajo, Daniel Godoy-Caraballo, Javier García-García y Gerardo Salgado-Beltrán les interesó analizar la comprensión de gráficos estadísticos de un grupo de estudiantes universitarios, debido a que consideraron que ha crecido la importancia de que los futuros profesionistas interpreten adecuadamente este tipo de gráficos. Los niveles de compresión que ellos tomaron en cuenta fueron los que propuso Cursio en el año 1987 : 1) Leer los datos, 2) Leer dentro de los datos, 3) Leer más allá de los datos, y 4) Leer detrás de los datos. La investigación fue un estudio de caso con ocho participantes y reportó que todos evidenciaron los dos primeros niveles, cinco de ellos mostraron el nivel tres y cuatro el nivel cuatro de comprensión. De lo anterior, concluyen que su estudio demuestra la necesidad de fortalecer el desarrollo de habilidades que permitan a un mayor número de estudiantes utilizar la información gráfica como una herramienta para la predicción y el análisis crítico de los datos. Por lo que, futuras investigaciones podrían plantear diseños didácticos que busquen promover niveles superiores de lectura de gráficos estadísticos (niveles 3 y 4). Los resultados de esta investigación serán muy útiles en esos diseños.

Horizontes en la formación docente

En esta tendencia se presentan cuatro capítulos que abordan estudios relacionados con el docente en formación y el docente en activo. El primer trabajo que se presenta es el de David Block Sevilla, Yesenia Castaño Torres, María Laguna y Rosvel Rodríguez quienes abordan los resultados de tres estudios que exploran la colaboración entre investigadores y profesores, enfatizando los aportes para la formación de los docentes participantes. Los estudios se llevaron a cabo, uno en preescolar sobre la enseñanza de tratamiento de la información, y dos en secundaria, sobre la enseñanza de la geometría y sobre la multiplicación de números racionales, respectivamente. Los resultados que obtuvieron del estudio en preescolar versaron sobre las transformaciones que realizaron dos maestras a las secuencias didácticas proporcionadas exprofeso.

Encontraron que las profesoras realizaron modificaciones a las secuencias didácticas, enriqueciéndolas, revelando la forma en que se apropiaron de las situaciones y cómo se propició la construcción de conocimientos didácticos-matemáticos con implicaciones en la práctica docente. El estudio sobre la geometría en secundaria versó sobre la propuesta de situaciones que plantean

un juego de comunicación, en el que participan dos equipos de estudiantes, uno de los cuales debe dibujar una figura geométrica con base en un conjunto de instrucciones escritas dadas por el otro equipo. Los autores muestran cómo se da lugar a la reflexión entre docentes que comparten el mismo proyecto de enseñanza, con el propósito de mejorarla. Finalmente, el tercer estudio sobre la multiplicación de números racionales en secundaria se centró en algunos aspectos de los procesos de apropiación por los que pasan los docentes a lo largo de la experiencia de implementar en el aula las secuencias didácticas propuestas por los investigadores. Se observó que los docentes tuvieron dificultades en la fase de la institucionalización con sus estudiantes de lo aprendido, incluso para aquellos con mayor experiencia.

El capítulo de Alan Andrés Cruz-Acevedo, Gerardo Salgado-Beltrán y Javier García-García, analiza las conexiones matemáticas que establecen estudiantes para profesor al resolver tareas sobre el teorema de Pitágoras, a través de un estudio de corte cualitativo. Las conexiones matemáticas que los autores estudian se refieren a relaciones entre ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados. A través de la entrevista basada en tareas, los autores pudieron identificar seis tipos de conexiones: del tipo procedimental, cuando conectan la longitud de los lados de un triángulo rectángulo y con la hipotenusa a través de la igualdad; de representaciones diferentes, cuando conectan el teorema de Pitágoras con la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos; de significado, cuando asignan un significado personal al teorema de Pitágoras como una fórmula para calcular magnitudes; de características, cuando atribuyen atributos o propiedades al teorema de Pitágoras, por ejemplo, que solo se cumple para triángulos rectángulos, que las ternas Pitagóricas son números enteros que satisfacen el teorema o que es una proposición que requiere demostración, de implicación, como la de que si en un triángulo se cumple el teorema de Pitágoras, entonces es un triángulo rectángulo; y lo que llamaron parte-todo, cuando ven el teorema de Pitágoras como un caso particular de una generalización como la ley de los cosenos, que es válida en cualquier triángulo, no necesariamente rectángulo.

El tercer capítulo de Alberto Santana Ortega, Oscar Nelson Lopez Lopez y Erwin Santana Ortega, versa sobre una investigación-acción desarrollada en dos ciclos, basada en la implementación de situaciones didácticas fundamentadas en el método de Polya en el primer ciclo y en el Mapa Conceptual Híbrido desde el enfoque ontosemiótico, en el segundo ciclo, para mejorar el nivel de resolución de problemas geométricos en estudiantes para profesora de primaria. Los resultados indican una mejora progresiva positiva de los procesos de resolución de las estudiantes para profesor. Específicamente, en el primer ciclo, el método de Polya les ayudó principalmente en la etapa inicial de comprensión del problema, el cual, a través

de las preguntas orientadoras: ¿qué me piden?, y ¿qué datos me dan?, se observó una mejora en la reflexión de las estudiantes y no responder apresuradamente sin comprender el problema. Los resultados del primer ciclo también evidenciaron que, aunque las alumnas comprendían los pasos para resolver problemas, no eran conscientes en algunos casos de los conceptos implicados, las propiedades o los argumentos usados en la resolución de los problemas, de ahí la necesidad de implementar el segundo ciclo. Los resultados de este último, con el uso de los mapas conceptuales híbridos permitió a las estudiantes para profesora comprender las conexiones entre conceptos e ideas matemáticas, así como identificar propiedades relevantes y construir argumentos para resolver el problema u otros similares. A lo largo del proceso, las alumnas mostraron una mejora notable en su capacidad para concebir y ejecutar un plan adecuado, así como para llegar a soluciones correctas. Los autores concluyen que el uso de los mapas conceptuales híbridos en combinación con los pasos de Polya, constituyen una estrategia sólida para fortalecer los procesos de resolución de problemas en estudiantes en formación docente.

El último capítulo de esta tendencia, realizado por Homero Enríquez Ramírez trata sobre una investigación exploratoria del uso de recursos digitales por profesores en la escuela primaria. Realizado en diez escuelas de la Mixteca Oaxaqueña, se observó que estas no cuentan con las computadoras necesarias o en su mayoría, se concentran en un aula de medios destinadas para clases de computación, por lo que no se disponen para uso didáctico de los profesores en su clase de matemáticas. Con respecto a la formación y experiencia de los profesores sobre el uso de los recursos digitales, casi todos los profesores encuestados (66 de 67 participantes) evidenciaron no poseer formación sobre el uso de tecnologías digitales para la enseñanza de las matemáticas, aunque 79% de ellos utilizan con poca frecuencia recursos digitales en su clase.

Las observaciones de clase a nueve de los 67 profesores participantes evidenciaron que la forma de orquestar los recursos digitales en la clase se corresponde con un uso como reemplazo y como amplificador principalmente, es decir, con explica-el-tema, explica-la-pantalla, repite-la-pantalla o copia-la-pantalla, según el marco teórico de la orquestación instrumental. No se observó el uso transformación de la tecnología, como, por ejemplo, discute-la-pantalla. De esta manera, el estudio observó un uso limitado de la tecnología debido a diversos factores como son: la formación de los docentes, al acceso de la tecnología digital en las escuelas, a los recursos digitales empleados y a las políticas escolares que rigen el uso de la tecnología.

Esperamos que los resultados de investigación que aquí se presentan sean de mucha utilidad, tanto para su desarrollo profesional como en sus investigaciones.

El Taller Internacional TEMBI es organizado anualmente por el Posgrado en Educación Matemática y el Cuerpo Académico "Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática" pertenecientes a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México.

Estela Juárez-Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar
(Editoras)

Puebla de Zaragoza, noviembre de 2025

PRIMERA TENDENCIA

APORTES AL ESTUDIO DEL SENTIDO NUMÉRICO

Dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de cálculo mental

Yesica Liliana Islas Arias [1]
Marcos Campos Nava [2]
Agustín Alfredo Torres Rodríguez [3]

Resumen

El cálculo mental es una de las competencias matemáticas que ha sido descrita por diversos autores, como un indicador del avance de los estudiantes de nivel básico. En el modelo educativo vigente, se encuentra considerado en el Sistema de Alerta Temprana (SisAT), que es un conjunto de indicadores y herramientas que permite a los docentes y autoridades educativas contar con información sistemática y oportuna sobre los riesgos de no alcanzar los aprendizajes esperados. Esta investigación gira en torno a las dificultades que presentan estudiantes de educación secundaria en México al resolver problemas en los que deben emplear el cálculo mental, este fenómeno se analiza desde la perspectiva del desarrollo del sentido numérico. La literatura sugiere que el desarrollo del sentido numérico puede dar significado a los conocimientos que los estudiantes elaboran en sus clases de aritmética. El enfoque metodológico es de tipo cualitativo y la estrategia utilizada fue el estudio de caso. Dentro de los resultados obtenidos se identificó que las dificultades que presentaron los estudiantes, estos se pueden dividir en dos tipos, el primero gira en torno a carencias del sentido numérico y el segundo al rezago educativo que presentan los estudiantes.

Palabras clave

Cálculo mental, sentido numérico, estudiantes, problemas, dificultades

[1] is477758@uaeh.edu.mx
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

[2] mcampos@uaeh.edu.mx
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

[3] agustin_torres@uaeh.edu.mx
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México

Islas Arias, Y. L., Campos Navas, M., & Torres Rodríguez, A. A. (2025). Dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de cálculo mental. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 23–48). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-01

Introducción

Desarrollar y consolidar habilidades matemáticas es de suma importancia para todo individuo. En el mundo actual numerosos procesos giran en torno a esta disciplina, las matemáticas están en todas partes, en los lugares más inesperados, conduciendo la rutina del ser humano, y a menudo no se es consciente de ello (Álvarez, 2006). Asimismo, apoyan el desarrollo de estructuras cognitivas, es decir, proveen de herramientas que desarrollan una estructura mental lógica que permiten enfrentar diversas circunstancias cotidianas (Gómez & Mireles, 2019).

Las matemáticas forman parte de muchas situaciones cotidianas importantes para la vida, en este orden de ideas, las personas se enfrentan a la necesidad de tener una competencia matemática básica. Leer cantidades, enumerar y agrupar objetos, u operar con números son algunos ejemplos de situaciones que viven a diario las personas (Álvarez, 2006). En esta línea, organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), consideran relevante que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas (OCDE, 2016).

Una de las competencias matemáticas utilizadas en la vida cotidiana de cualquier individuo es el cálculo mental, por lo que esta habilidad adquiere especial relevancia, ya que se emplea dentro como fuera del contexto escolar. Por ejemplo, al realizar compras, calcular cuotas y distancias, y planificar el gasto familiar, entre otras situaciones. En esta investigación, el interés se centra en la relevancia del cálculo mental dentro del contexto del aula, debido a que en este escenario se le considera como una herramienta básica del aprendizaje y un indicador que permite diagnosticar el nivel en el que se encuentran los estudiantes en esta habilidad matemática. Parra (1994) destaca que la enseñanza del cálculo mental en el contexto escolar se basa principalmente en la resolución de problemas de tipo aritmético (comprensión de los números y sus operaciones).

En este sentido, se adopta el concepto de cálculo mental de Parra (1994), quien lo define como un conjunto de procedimientos que permiten obtener resultados a través del análisis de los números involucrados, sin utilizar algoritmos, y haciendo uso de las particularidades del sistema de numeración, las operaciones y las relaciones existentes entre los números. A pesar de la relevancia del cálculo mental, dada su pertinencia para desarrollar habilidades en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017), se han observado resultados poco favorables en el desarrollo de tales habilidades a través de la aplicación de la prueba SisAT (Sistema de Alerta Temprana). Esta evaluación se aplica en todos los niveles de educación secundaria en México a partir del año 2013. Su propósito es contribuir a la prevención y

atención del rezago y el abandono escolar mediante la identificación de los alumnos en riesgo, a través de la exploración de las habilidades básicas para el aprendizaje (lectura, escritura y cálculo mental).

Un área evaluada dentro de estas pruebas es la asociada con las operaciones aritméticas básicas, la cual está directamente relacionada con el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes. Una posible explicación a este fenómeno la ofrece Berch (2005), quien señaló una relación entre el cálculo mental y el sentido numérico. La relación entre ambos conceptos no es simple, ya que algunos autores consideran que el cálculo mental forma parte del sentido numérico (Lemonidis, 2016), mientras que otros sugieren que están relacionados pero separados (Departament for Education, 2010; Heirdsfield, 2002). Por último, otros investigadores proponen una relación bidireccional, al sostener que las habilidades de sentido numérico influyen en las habilidades de cálculo mental, pero, al mismo tiempo, la práctica del cálculo mental también fomenta el sentido numérico (Ruiz & Balbi, 2018).

La enseñanza del cálculo mental ha ganado relevancia, porque distintos autores sugieren una relación con varias otras habilidades matemáticas como la mejora en la resolución de problemas, el razonamiento, así como una relación en el rendimiento del álgebra (Watson et al., 2018; Parra, 1994; Ruiz & Balbi, 2018).

Antecedentes

La literatura en torno al cálculo mental es amplia. Algunos estudios se enfocan en identificar las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse a problemas de cálculo, otros las relacionan con la habilidad para resolver problemas o con el desarrollo de otras destrezas, y algunos más analizan la enseñanza de esta habilidad como estrategia didáctica.

En un estudio de Rodríguez y Juárez (2019) con estudiantes de secundaria en México, se analizaron las estrategias mostradas por los estudiantes para el cálculo mental (CM en adelante) con sumas y restas. Asimismo el trabajo de Barrera et al. (2018), que tuvo como propósito identificar estrategias de CM utilizadas por los estudiantes en un contexto de juego (compra-venta), mostró que en un ambiente de juego y competencia se podía promover el aprendizaje. Gómez y Mireles (2019), también con estudiantes de secundaria en México, encontraron que los procesos de entrenamiento en CM resultan estrategias didácticas importantes para favorecer el aprendizaje.

En otros estudios realizados también en México, como los de Cortés (2004) y Mochón y Vázquez (1995), se encontraron varias dificultades al resolver pruebas de CM por parte de estudiantes de nivel primaria y secundaria. Se observó que hacía falta el diseño de estrategias instruccionales del docente, así como la falta de problemas o situaciones contextualizadas, para favorecer la comprensión de estos contenidos.

En el plano internacional, se revisaron trabajos como los de Reys et al. (1995) en Japón, que identificaron que las representaciones visuales incidían en la obtención de resultados más altos en el rendimiento en CM, o trabajos como el de Watson et al. (2018) en Portugal, quienes clasificaron algunos errores comunes de omisión y procedimiento en el CM de sumas y restas. Por su parte, Stauffer et al, (2020) implementaron en México actividades para la enseñanza del cálculo estimativo para el caso de las operaciones de multiplicación y división.

Otros estudios revisados se desarrollaron con futuros profesores de matemáticas, como el de Sengül (2013) en Turquía o el de Almeida et al (2014) en España, dónde se indagó acerca de la relación entre el sentido numérico y las estrategias para resolver problemas de CM, hallándose que, en general, no empleaban los componentes del sentido numérico en sus estrategias de solución.

Un tercer tipo de estudios abordan el diseño e implementación de programas de intervención, para que los docentes apliquen actividades para el desarrollo de las habilidades del CM, tenemos en este caso el trabajo de Ruiz y Balbi (2018) en Paraguay, o el de Pourdavood et al. (2020) en Estados Unidos, quienes investigaron la actividad del CM, y su relación con el pensamiento y razonamiento algebraicos, hallando que las estrategias de CM contribuyen al desarrollar el razonamiento superior y el pensamiento crítico, además de fortalecer el desarrollo del sentido numérico.

A partir de la revisión de la literatura, se reconoció que la mayoría de los trabajos se han enfocado en investigaciones sobre la identificación de estrategias utilizadas por alumnos de primaria y en una minoría en alumnos de secundaria al realizar tareas de cálculo mental o cálculo estimativo, así como también en el mismo nivel educativo la implementación de la enseñanza del cálculo como estrategia didáctica. Otro hallazgo relevante es que los estudiantes de primaria y secundaria tienden a utilizar métodos algorítmicos para resolver situaciones de cálculo, sin reconocer de manera clara algunos componentes del sentido numérico. Por lo anteriormente expuesto, esta investigación se enfoca en analizar y clasificar las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria en la resolución problemas de cálculo mental, así como en examinar la relación de tales dificultades con el empleo de algunos elementos del sentido numérico.

Referentes teóricos

El sentido numérico y el cálculo mental

Dos referentes conceptuales considerados en este trabajo son el del sentido numérico (SN) y el cálculo mental (CM). Para efectos de esta investigación se adopta la definición de SN propuesta por McIntosh et al. (1992), quienes lo describen como "... la comprensión general que una persona tiene

de los números y las operaciones, junto con la capacidad y la inclinación a utilizar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar los números y las operaciones…" (p.3). El SN incluye diferentes elementos de los números, las operaciones y sus relaciones, lo que ha propiciado diversas investigaciones y debates entre profesores de matemáticas, investigadores y diseñadores de currículum en la disciplina (Sengül, 2013). Al respecto Almeida et al. (2014) señalan que la clasificación de componentes del SN con mayor influencia en la educación matemática, es la propuesta por la National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989) la cual fue posteriormente ampliada por McIntosh et al. (1992) quienes desglosaron algunos componentes y añadiendo otros. En la tabla siguiente (tabla 1), se describen los siete componentes clasificados.

Tabla 1

Descripción de los componentes del sentido numérico

Componente	Descripción
1. Comprender el significado de los números	Implica la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las numerosas relaciones existentes entre los números
2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números	Se refiere a reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número, de una cantidad o de una medida en comparación con otro número, cantidad o medida. Incluye la comparación y el orden de los números y la identificación de números entre otros dos dados
3. Usar puntos de referencia	Estos puntos son valores que le resultan cómodos de manejar a un individuo en la realización de cálculos o comparaciones. Este componente incluye la habilidad para usar referentes mentales para usar números en la resolución de problemas
4. Utilizar la composición y descomposición de los números	Se refiere a la habilidad de composición y descomposición de los números, de manera equivalente, con el propósito de realizar operaciones con mayor fluidez
5. Usar múltiples representaciones de los números y sus operaciones	Este componente se manifiesta al utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas numéricos de forma práctica y flexible
6. Comprender el efecto relativo de las operaciones	Es la habilidad para identificar cómo las operaciones afectan al resultado final de problemas numéricos, normalmente se le nombra como "comprender el efecto relativo de las operaciones" y "saber relacionar las operaciones". Incluye el empleo de propiedades aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad) para simplificar expresiones y desarrollar estrategias de solución
7. Desarrollar estrategias adecuadas y evaluar lo razonable de una respuesta	Implica la selección de estrategias apropiadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.), así mismo incluye la habilidad para valorar lo razonable de un resultado

Nota. Elaboración propia con datos de Almeida et al (2014)

El concepto de CM que para fines del presente trabajo se adopta, es el de Parra (1994), quien lo define como un conjunto de procedimientos que permiten obtener resultados a través del análisis de los números involucrados,

sin recurrir a algoritmos y haciendo uso de las particularidades del sistema de numeración y de las operaciones, así como de las relaciones existentes entre los números. La relación entre el SN y el CM no es sencilla, ya que algunos autores consideran que el CM forma parte del SN, mientras que otros sostienen que están relacionados pero son independientes. Por otro lado, otros autores apoyan una relación bidireccional, sugiriendo que las habilidades de SN influyen en las habilidades de CM, pero, al mismo tiempo, la práctica del CM también fomenta el desarrollo del SN (Ruiz & Balbi, 2018). Para los fines de esta investigación se considera el CM como parte del SN de acuerdo con lo planteado en diversos estudios (NCTM, 1989; McIntosh et al., 1992; Almeida et al., 2014).

Metodología

Enfoque y diseño

En este trabajo se adoptó el enfoque metodológico cualitativo, dado que el propósito es analizar, a partir de las voces de un grupo de estudiantes, las dificultades que presentan al enfrentarse a problemas de cálculo mental. Este tipo de metodología permite estudiar y entender el significado que le da un sujeto o grupo social a un fenómeno determinado, utiliza palabras, preguntas abiertas, e implica la recolección de datos a través de la observación del entorno del participante. El análisis de datos se construye de manera inductiva desde lo particular a lo general. Aunque ciertos datos pueden cuantificarse, la mayor parte del análisis es interpretativo (Strauss & Corbin, 2002).

El diseño de investigación seleccionado fue el estudio de caso, ya que permite analizar con mayor profundidad a un grupo de estudiantes sobre las dificultades que presentan en la solución de problemas de cálculo mental. Al respecto de este tipo de diseño, Stake (1999) señala que posibilita un acercamiento a la realidad a través de su descomposición y análisis en variables significativas, supone una descripción densa del problema a estudiar y se caracteriza por su naturaleza inductiva, descriptivo y específico.

Sujetos de estudio

La investigación se realizó con nueve estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilaban entre 14-15 años, pertenecientes a una escuela secundaria pública situada en la ciudad de Tulancingo en el estado de Hidalgo, México. El estudio se llevó a cabo durante la segunda mitad del ciclo escolar 2023-2024. Los sujetos de estudio fueron seleccionados de forma intencionada. Se eligieron en proporciones iguales con base en los resultados que estos obtuvieron en la aplicación de la prueba SisAT al inicio del ciclo escolar, es decir, alumnos en nivel esperado, en desarrollo y que requieren apoyo. Este criterio permitió contar con una visión más amplia de

los resultados obtenidos debido a que son alumnos con diferente nivel de resultado en una prueba previa. Asimismo, en la selección de los sujetos se consideraron los resultados obtenidos en ciclos escolares anteriores. Los tres alumnos elegidos en cada nivel habían mantenido el mismo resultado en las tres aplicaciones correspondientes a los dos ciclos previo. Otra característica de la elección fue que los participantes provenían de distintos grupos de tercer grado, con el fin de asegurar una mayor diversidad de características entre ellos. Previo a la aplicación de la actividad, se notificó a los estudiantes y padres de familia, que los resultados de esta tarea forman parte de un proyecto de tesis de maestría. Por esta razón, se solicitó autorización para grabar en vídeo la actividad y se informó y que para proteger su identidad a cada estudiante se les asignaría un seudónimo.

Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Con relación a las técnicas de recolección de datos, se aplicó en primer lugar una prueba de cálculo mental diseñada expresamente para esta investigación, basada en la prueba SisAT, posteriormente se realizaron entrevistas semiestructuradas a los participantes, las cuales fueron videograbadas con el propósito de obtener información más precisa. Además se llevaron a cabo observaciones de campo durante la aplicación de la prueba y de las entrevistas. Las técnicas e instrumentos utilizadas en la recogida de datos fueron:

1. Aplicación de una prueba de CM. El instrumento consistió en el test y las hojas de anotación de respuesta de los estudiantes. La aplicación de esta prueba fue videograbada y posteriormente transcrita para el análisis de la información obtenida.
2. Observación. El instrumento fue una guía de observación que contenía elementos que permitieron al investigador centrar la atención en datos relevantes para la investigación.
3. Entrevistas. El instrumento fue una guía semiestructurada de preguntas que permitieron conocer las razones de las respuestas dadas a las situaciones de CM. Estas entrevistas fueron videograbadas con la finalidad de recabar información más detalladas. En los casos en que los participantes tuvieron dificultad para expresar de manera verbal los procedimientos realizados, se le solicitó realizarlos por escrito, utilizando lápiz y papel.

Diseño de la actividad a implementar

De acuerdo con el documento de orientaciones para el establecimiento del sistema de alerta temprana en escuelas de educación básica, de la Secretaría de Educación Pública en México (SEP), "El Sistema de Alerta Temprana (SisAT) es un conjunto de indicadores, herramientas y procedimientos que permite a los colectivos docentes, a los supervisores y a la autoridad educativa

local contar con información sistemática y oportuna acerca de los alumnos que están en riesgo de no alcanzar los aprendizajes clave o incluso de abandonar sus estudios" (SEP 2018, p. 6). El propósito de este sistema es contribuir a la prevención de rezago y la deserción escolar, mediante la identificación de los alumnos en riesgo. Dentro de los siete indicadores del SisAT, se localiza el de CM, denominado como un indicador de las habilidades básicas para el aprendizaje. Cada una de las pruebas de CM para secundaria consta de 2 ejemplos y 10 ítems. Para los fines de esta investigación, se diseñó una prueba original, basada en la estructura de la prueba SisAT. La prueba correspondiente al tercer grado de secundaria que se diseñó y aplicó para este estudio se presentan en la tabla 2.

Tabla 2

Prueba de CM para tercer grado (Fuente: Elaboración Propia)

No.	Pregunta	Respuesta
Ej. 1	20 más 18	38
Ej. 2	¿Qué número multiplicado por 5 da 40?	8
1	800 más 409	1209
2	220 menos 60	160
3	31 por 400	12, 400
4	5 por 12 entre 2	30
5	10 al cuadrado, menos 9	91
6	¿cuánto es $9x^2$ más $12x^2$?	$21x^2$
7	2 enteros menos $\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
8	3.75 más $\frac{1}{4}$	4
9	¿Qué fracciones siguen en esta serie: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, _, _, _$?	27/2 y 81/2
10	Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 89 y 42 grados respectivamente, ¿cuánto mide el tercer ángulo para que su suma de 180 grados?	49º

Según el manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental, herramienta para la escuela, de la SEP (2018), la prueba se aplica a un estudiante a la vez, se plantea cada pregunta en el orden establecido, iniciando con los ejemplos, si el estudiante lo requiere se le repite una vez más la pregunta. Se muestra la tarjeta de apoyo visual (cada pregunta está escrita en una tarjeta) en caso de que el estudiante dé una respuesta equivocada o se tarde más de 20 segundos en responder, en caso de que aun así no haya respuesta por parte del estudiante se debe pasar a la siguiente pregunta y así sucesivamente hasta culminar los 10 reactivos. En ningún caso se permite al estudiante el uso de apoyo externo y la aplicación

solo se interrumpe cuando el estudiante comete seis errores consecutivos. Las preguntas se evalúan con 1 en caso de ser correcta, con 1v cuando se le presenta el apoyo visual y con 0 cuando la respuesta es incorrecta o no hay respuesta. Al finalizar la aplicación, a cada estudiante se le debe asignar un nivel correspondiente al puntaje obtenido: (*i*) nivel esperado: de 8 a 10 puntos; (*ii*) en desarrollo: de 5 a 7 puntos y (*iii*) requiere apoyo: de 0 a 4 puntos.

Dado que esta prueba constituye la base de la presente investigación, en la tabla 3 se muestra la relación de cada ítem con el marco utilizado de los componentes del sentido numérico (Tabla 1. componentes del sentido numérico). Con el propósito de poder comprender con mayor profundidad la relación del SM y el CM a través de esta prueba, en la tabla 3 también vincula la estructura de las preguntas con la clasificación elaborada por Jiménez (2010) en un material titulado Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental.

1. Cálculo directo (CD): están presentes distintas operaciones y hay que operar con ellas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias)
2. Completar (COM): en estas, los estudiantes tienen que completar los espacios vacíos para que sea válida la expresión.
3. Interpretar (INT): aquí es necesario que los estudiantes identifiquen elementos, sustituyan un valor en una expresión, interpreten un texto o un símbolo, etc.

Tabla 3

Relación entre ítems de la prueba de CM y los componentes del SN

Ítem	Componente del SN	Tipo de pregunta
1	3, 4	CD
2	3, 4	CD
3	2, 3 ,4	CD
4	3, 4, 6	CD
5	5, 6	CD
6	1, 5	INT
7	4, 5	CD
8	4, 5	CD
9	2, 4, 6, 7	COM
10	1, 4	COM

Resultados

Para interpretar los resultados de la prueba aplicada a los estudiantes, se empleó un sistema de codificación que permitió clasificar el tipo de razonamiento que fue usado para cada una de las respuestas: si usaron algún

componente del sentido numérico (SN), si recurrieron únicamente a reglas o algoritmos (BR), si presentaron argumentos matemáticamente incorrectos o no ofrecieron justificación o argumentación alguna (OT), y si dejaron en blanco su respuesta (SR). Para dar iniciar el análisis de las respuestas, en la tabla 4 se presentan los resultados de cada ítem y el tipo de razonamiento llevado a cabo para dar solución a la prueba por parte del segundo grupo de estudiantes, tal como se mencionó previamente.

Tabla 4

Resultados de éxitos y estrategias de los ítems

Ítem	Éxito	Tipo de razonamiento						
		SN		BR		OT		SR
		C	I	C	I	C	I	I
1	$\frac{8}{9}$	5	0	0	1	3	0	0
2	$\frac{7}{9}$	4	1	0	1	3	0	0
3	$\frac{1}{9}$	0	3	1	5	0	0	0
4	$\frac{5}{9}$	3	0	1	2	1	2	0
5	$\frac{5}{9}$	5	0	0	0	0	1	3
6	$\frac{4}{9}$	4	0	0	0	0	1	4
7	$\frac{4}{9}$	4	0	0	0	0	2	3
8	$\frac{3}{9}$	3	0	0	0	0	1	5
9	$\frac{1}{9}$	1	0	0	3	0	4	1
10	$\frac{4}{9}$	4	2	0	0	0	1	2

C: correcto, I: incorrecto
SN: sentido numérico
BR: basado en reglas
OT: otros: incorrectos, incompletos, sin justificación;
SR: sin respuesta.

En relación con la tabla anterior, se puede observar que el éxito varía en función de los ítems. Evaluar cada uno como correctos o incorrectos permite identificar cuántos estudiantes contestaron de manera correcta a un determinado ítem lo que pudiera permitir también llegar a ciertas conclusiones o dar por cierto algunos resultados. Otro aspecto relevante es que, ningún estudiante contestó de manera correcta la prueba en su totalidad, así como también el mínimo de aciertos por pregunta es uno. En el análisis de cada

ítem, se presentan algunos diálogos que se consideraron de interés, los cuales fueron transcritos a partir de las videograbaciones de las entrevistas semiestructuradas, realizadas después de la aplicación de la prueba. Estos fragmentos permiten al lector comprender con mayor claridad sobre lo ocurrido durante la aplicación de los instrumentos de recolección de datos.

Es el ítem 1 consisten en realizar una suma en el orden de las centenas en ambos sumandos y donde se espera que utilicen la descomposición del segundo sumando para realizar el cálculo de manera más sencilla y rápida o bien cualquier otra descomposición que les facilite el cálculo. Asimismo pueden emplear como punto de referencia de la suma de los dígitos ocho y cuatro y agregar los ceros correspondientes más la unidad nueve. Este ítem es el de mayor éxito para los estudiantes, ocho de los nueve respondieron correctamente. De los cuales ninguno hizo consulta del apoyo visual. De los cinco estudiantes cuya respuesta está clasificada en SN, todas se basaron en la composición y descomposición de los números.

Estudiante 1: *Ahhh, pues lo primero que hice fue sumar 800+400, y luego le sumé el 9*

Estudiante 3: *Bueno, pues primero este pues solo es algo básico no, de 800 +400 se suman 1200 y luego sumé 9*

Estudiante 6: *Primero sumé los números enteros (refiriéndose al 8 y 4), y luego agregué el número, el número como se llama el dígito unitario que es el 9*

Para el segundo ítem corresponde a una resta en la que el minuendo se encuentra en el orden de las centenas y el sustraendo en el orden de las decenas. En esta operación los estudiantes al intentar resolverla pueden recurrir a la descomposición del 220 en 200 y 20 o en la descomposición del 60 en 40 y 20 o cualquier otra que le pueda facilitar el cálculo al estudiante. También pueden utilizar como referencia que el doble de 60 es 120 y que 200 es igual a 100 más 120.

Este ítem fue el segundo con mayor éxito, al haber sido contestado correctamente por siete de los nueve participantes. Seis estudiantes hicieron uso del apoyo visual, incluidas las dos respuestas incorrectas. Este hecho podría interpretarse como una evidencia de que esta operación generó mayor dificultad en comparación con la del primer ítem, probablemente debido a la naturaleza de la operación o de los números involucrados.

De las cuatro respuestas clasificadas en SN, tres se basaron en la composición y descomposición de las cantidades y el restante se basó en puntos de referencia. Las respuestas incorrectas se ubicaron dentro de las clasificaciones de SN y BR. En el caso del SN (E2), se observa que este componente está presente, sin embargo, la estudiante tiene dificultades para llevar completar el proceso con éxito, al intentar realizar composiciones y descomposiciones de los números de manera equivalente. Por su parte, en la respuesta BR (E4), la estudiante intentó efectuar mentalmente el algoritmo de la resta, aunque sin éxito.

Estudiante 2: *Ahhh, este pues primero haga de cuenta este conté cuanto era del 20 al 60, y ya después por ejemplo se lo resté al 260 y me dio 140, y pues según yo eso está bien, y eso fue lo que hice este del 20 conté cuanto era para 60 y eso se lo resté a 260*

Estudiante 4: *Una resta está empezando por este lado (señalando el lado izquierdo), o sea, si era un número mayor arriba bueno se le sumaba y este bueno, pero este cuando el número era mayor y el número de abajo era menor le prestaba al otro y este hasta que mediera como resultado todo eso y bueno así más o menos lo hice*

Las dos respuestas incorrectas fueron dadas por las estudiantes 2 y 4 cuyas respuestas fueron 140 y 180, respectivamente. La estudiante correspondiente a la respuesta BR manifestó durante la entrevista semiestructurada que, si la operación la hubiera hecho en papel y lápiz, podría haberla resuelto sin dificultad, ya que durante el proceso "se le fueron perdían los números en su mente" porque es de tipo visual. Este hecho permite interpretar que domina los algoritmos cuando cuenta con apoyos materiales. Con base a lo anterior, las dificultades observadas podrían atribuirse a una comprensión limitada de ciertos componentes del SN, como composición y descomposición de los números de manera equivalente, así como al uso de referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas.

El ítem 3 correspondió a la realización de una multiplicación donde uno de los factores está en el orden de las decenas mientras el otro factor en el orden de las centenas, siendo este último múltiplo de diez. Los estudiantes pudieron hacer uso de algunos componentes del SN para darle respuesta, una forma es considerar el 3 y el 4 para realizar la multiplicación y tener en consideración el valor posicional de los números, e incluir la unidad. Otra forma es considerar el punto de referencia de "tres por cien", repitiendo la suma o multiplicación las veces necesarias y considerando nuevamente el valor relativo o posicional de los números y la unidad. Otra alternativa de solución es descomponer el 31 en 10 + 10 + 10 + 1 o en cualquier otra que pueda facilitarles el cálculo y utilizar la propiedad distributiva. Así mismo pueden hacer uso de más de uno de estos componentes en conjunto, por ejemplo descomponer al 31 en 30 y 1 y solo considerar el valor absoluto del 4 para llevar efectuar la multiplicación utilizado la propiedad distributiva para que posteriormente considerar el valor posicional del mismo, es decir agregar los ceros correspondientes. O cualquier otra mezcla de estos componentes que les permitan realizar la operación mentalmente.

Este reactivo es uno de los que tuvo un menor número de respuestas correctas, solo uno de los nueve estudiantes (E6) lo resolvió con éxito. La totalidad de los estudiantes hicieron uso del apoyo visual. Estos resultados permiten inferir que realizar multiplicaciones mentales con las características de este ítem generó una mayor dificultad para el grupo de estudiantes. La

respuesta correcta dada por el estudiante E6 se clasificó en la categoría de BR. El propio estudiante comentó que una de las dificultades que tuvo para realizar el algoritmo mentalmente fue el espacio que debía dejar entre el resultado del primer producto y el segundo para realizar la suma.

Estudiante 6: *Estaba acomodando los números, porque eso era lo que se me dificultaba la multiplicación, en sí nada más la manera de acomodarlos porque es más fácil escribirlo en el papel porque ahí no se te olvida, tienes los dígitos ordenados y mentalmente como que se me dificulta acomodar los números para que se sumen al final de la multiplicación*

Entre de las respuestas incorrectas, tres se clasificaron en la categoría correspondiente al uso del SN. En ellas se observa que los estudiantes aplicaron este conocimiento, es decir, no estuvo ausente, sin embargo, presentan dificultades para terminar el proceso con éxito. Los cuales hicieron uso del valor absoluto de un dígito de uno de los factores (es decir, del factor 400 solo utilizaron el 4) para facilitar el cálculo. No obstante, la dificultad radicó en reconocer el valor relativo del mismo factor y en estimar correctamente el resultado, hecho se puede sustentar considerando a partir de los resultados obtenidos.

Estudiante1: *Pues primeramente fue porque como son mentales y son no sé, y es un número algo grande ¿no? Y pues la cantidad o resultado iba a ser como que medio no muy complicado, pero si iba a estar medio complicado hacer el resultado, y para yo poderlo resolver lo que hice fue multiplicar 31x4 y luego le sume los dos ceros, y fue el resultado que me dio*

Estudiante 7: *Primero quería multiplicar 40x3, y el resultado bueno 400x3 y al resultado se le agrega el otro cero del 30 y después sumarle la multiplicación del 400x1 pero se me dificultó poquito*

La respuesta que el Estudiante 1 dio para este ítem, fue 1240. Durante la entrevista semiestructurada, al explicar el procedimiento que siguió, proporcionó el resultado correcto, sin embargo, éste ya no fue considerado válido por haberse obtenido fuera del tiempo de aplicación de la prueba. Este hecho permite deducir que el Estudiante1 posee un desarrollo considerable del SN, lo cual se corroborar con el resto de sus resultados. No obstante, puede inferirse, que bajo condiciones de tiempo limitado y en situaciones similares a este ítem, podría presentar conflictos en su desempeño.

Por otro lado, las respuestas clasificadas en BR, los estudiantes explican el algoritmo que intentaron aplicar sin éxito para resolver al reactivo. Con estos hechos se puede suponer que estos estudiantes tienen carencia de algunos componentes del SN, como el uno y el cuatro que dicen respectivamente: comprender el significado de los números, composición y descomposición de los números de manera equivalente. También se evidencian dificultades en subcomponentes como el reconocimiento y la estimación del tamaño absoluto o relativo de un número, el uso de referentes

mentales (matemáticos o reales) para resolver problemas y la aplicación de propiedades aritméticas (conmutativa-asociativa-distributiva).

El ítem 4 fue el primero de la prueba que requirió dos operaciones para su solución. Por un lado, un producto de dos factores uno de ellos en el orden de las unidades y el otro factor en el orden de las decenas y después un cociente. En este ítem, los estudiantes pudieron emplear diversos componentes del SN como, usar puntos de referencia, por ejemplo, el resultado de diez por cinco y el de cinco por dos; utilizar la composición y descomposición de los números, una forma es descomponer al 12 en diez más dos, otra forma es descomponerlo en seis más seis o cualquier otra que al estudiante pudiera facilitarle el cálculo. También intervino el componente relacionado con la comprensión del efecto de las operaciones, en este caso la comprensión del cociente que puede interpretarse como, obtener la mitad de la cantidad involucrada, así como también el uso de propiedades aritméticas como la propiedad distributiva.

Este ítem tuvo éxito con seis de los nueve participantes, al ser contestado correctamente. Muy pocos estudiantes solicitaron el apoyo visual para responder. Las respuestas correctas se ubican dentro de las tres clasificaciones. Por una parte, los tres estudiantes que hicieron uso del SN para resolver, se observa que hacen uso de los componentes: uso de puntos de referencia, composición y descomposición de los números, y comprensión del efecto relativo de las operaciones.

Estudiante 1: *Bueno, sabemos que 5x10 son 50 y 5x2 son 10 y luego pues este, bueno sumé 50 más 10 y medió 60, y la mitad de 60 son 30*

Estudiante 3: *Pues primero multipliqué 5x10 y ya después por 2 y ya lo sumé y lo dividí*

Estudiante 7: *Primero multipliqué 5x10 y los 2 pues serían otros 5x2 entonces serían 50+10 y serían 60 y ya nada más lo divide entre 2 y dio 30*

Por otro lado, el Estudiante 4 no proporcionó suficientes elementos para conocer su proceso, sin embargo, lo que realizó lo hizo con éxito. En el caso del estudiante 6, su procedimiento consistió en la aplicación del algoritmo de la multiplicación.

Mientras que las respuestas incorrectas se ubicaron en las clasificaciones BR y en OT. En ambos casos puede asumirse que estos estudiantes presentaron dificultades en la comprensión de componentes del SN como el uso de puntos de referencia, la composición y descomposición de los números, y la comprensión del efecto relativo de las operaciones. Un aspecto importante en este ítem es que dadas las respuestas de los estudiantes cuyas respuestas están en la clasificación OT, puede inferirse que presentan una carencia significativa de diferentes componentes del SN, como los antes mencionados y también de algunos subcomponentes como, comprensión de las relaciones existentes entre los números, y el de valorar lo razonable de un resultado, estos aspectos se sustentan en las respuestas observadas.

Estudiante 8: *5x12 son…..mmmm son 56 y dividiéndole sería y darían 116*

Estudiante 9: *5x12 son mmm 110 y entre 2 es cuando se me dificultan las cosas*

En el caso del quinto reactivo, fue el primero de la prueba el cual tiene involucrado un exponente y también implica dos operaciones en su solución. Para este punto los estudiantes ya habían resuelto sumas, restas productos y cocientes. Para responder a este reactivo, se espera que los estudiantes transiten de la representación del 10^2 al 100 y viceversa, al mismo tiempo que comprendan el efecto relativo de las operaciones, es decir, que cobre sentido en ellos. Este ítem fue contestado de manera correcta por cinco de los nueve estudiantes. Los mismos cinco estudiantes que dieron respuesta correcta al ítem anterior. De ellos, cuatro no requirieron apoyo visual, el resto sí lo utilizó, incluidos los estudiantes que respondieron de manera incorrecta.

Todas las respuestas correctas se clasificaron dentro del SN. En este reactivo, los estudiantes emplearon componentes como el uso de múltiples representaciones de los números, al reconocer que 10^2 es igual a 100, y la comprensión del efecto relativo de las operaciones, al resolver de manera correcta la operación 10^2.

Estudiante 3: *10 al cuadrado menos 9, pues lo primero es ahora sí multiplicar diez x diez porque es 10 al cuadrado son 100 y ya 100 pues ya resté*

Estudiante 6: *Ahí primero al cuadrado significa que se multiplica por ese mismo número así que 10x10 es igual a 100, menos 9, 91*

Dentro de las respuestas incorrectas, tres están dentro de la clasificación de SR, es el primer reactivo de la prueba con el hecho de que un estudiante no da una respuesta o intenta realizar cálculos. Y en los tres casos la argumentación fue la misma, no sabían cómo operar el exponente.

Estudiante 2: *No, ahí si no tengo ni idea no puedo decir me puse nerviosa, ahí no tenía ni idea de qué hacer*

Estudiante 5: *mm…bueno no recuerdo bien como hacerla al cuadrado*

Estudiante 9: *mmm pues qué pues no, bueno por ejemplo en esas operaciones…no sé elevar las cosas al cuadrado y así y entonces por eso se me dificultan las cosas*

Por su parte, el Estudiante 8 cuya respuesta se clasificó en OT, tanto durante la aplicación como en la entrevista, basó sus respuestas en restar la base de la potencia con el sustraendo de distintas formas. Dentro de las respuestas que dio el estudiante, estuvieron 8^2, 9^2 y 1^2. Al solicitarle que repitiera de nuevo su respuesta, ésta fue cambiando, en la última, explicó que restó 10 menos 9 y conservó el exponente. También manifestó que la dificultad estuvo en resolver el exponente.

Con base en los hechos arriba descritos puede asumirse que tres de los cuatro estudiantes que no respondieron el ítem, presentan una carencia muy puntual en el componente 5 del sentido numérico, que se describe cómo utilizar diversas representaciones de los números, así como también en el

componente 6 que se refiere a comprender el efecto relativo de las operaciones. En el caso del estudiante 8, con base en sus respuestas, también puede inferirse una carencia en el componente 1, referido a comprender el significado de los números, así como también en los componentes arriba mencionados.

El ítem 6, para su solución implica sólo una suma de coeficientes puesto que se trata de términos semejantes. Lo interesante aquí es ver cómo para los alumnos esto cobra sentido. Para ello, se esperaba que comprendieran componentes del SN como la comprensión del significado de los números y el uso de múltiples representaciones de los números y de las operaciones.. Este ítem tuvo éxito por cuatro de los nueve participantes, lo que indica que casi la mitad del grupo logró resolverlo y la otra mitad no. En las respuestas correctas se observa para los estudiantes comprenden el sentido la literal (x) elevada al cuadrado y saben cómo operar con ella al menos en casos como este.

Estudiante 1: *9+12 ¿verdad? Pues nada más que nada sabemos que x al cuadrado es digamos, sería lo mismo, entonces pues no tiene caso como que sumarlos ¿no? Entonces lo que hice fue nada más sumar 9 +12 dándome un resultado de 21 y como tienen las dos están elevadas al cuadrado nada más sería 21 equis al cuadrado*

Estudiante 3: *pues solo sume 9 + 12 y ya lo pasé x al cuadrado*

Nuevamente en este ítem se repite el hecho de que algunos estudiantes no pudieron dar una respuesta al mismo, los argumentos fueron en dirección al no saber cómo operar la literal equis(x) al cuadrado.

Estudiante 2: *pues o sea no, no encuentro cómo, no tengo idea de cómo multiplicar 9 equis al cuadrado más 12 x al cuadrado no sé si tenga que verla, no sé que tenga que ver la x y lo del cuadrado fue lo que le dije que no, que me cuesta trabajo elevar al cuadrado o sea no entiendo*

Estudiante 5: *emm…pues por el procedimiento igual no recuerdo cómo, cómo se llama, elevar al cuadrado*

Por su parte, el Estudiante 4 intentó responder, pero no tuvo éxito en su proceso; trató de elevar al cuadrado tanto el doce como el nueve y, al final, sumar los resultados. En este reactivo de los cinco alumnos que no la respondieron de manera correcta, cuatro incluso ni siquiera pudieron dar una respuesta. Estos hechos nos permiten suponer presentan carencias en los componentes del SN 1 y 5, que corresponden respectivamente a la comprensión del significado de los números y al uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones.

En el caso del ítem 7, fue el primero de la prueba que involucra números no enteros, por un lado una fracción y por otro una cantidad entera, cuya solución implicaba una resta. Se espera que los estudiantes hicieran uso de componentes del SN, como la composición y descomposición de los números, así como el uso de múltiples representaciones de los números y sus operaciones.

Este ítem fue respondido correctamente solo por cuatro de los nueve estudiantes, de los cuales sólo uno hizo uso del apoyo visual, y cinco de los que respondieron de forma incorrecta o no dieron respuesta también hicieron uso del apoyo visual, lo cual puede representar que no fue de utilidad para realizar el proceso de solución, ya que los estudiantes carecen puntualmente de componentes del SN antes mencionados. Entre las respuestas correctas clasificadas en la categoría SN se observa que estos estudiantes muestran cierto nivel de desarrollo de estos componentes del SN.

Estudiante1: *bueno pues dos enteros menos un quinto, lo que hice fue quitar un entero, pero para poder resolverlo pues el entero lo dividí en cinco y le quité un quinto dándome un resultado de un entero cuatro quintos*

Estudiante3: *pues un entero lo dividí en quintos y a esos son 5 quintos le quité 1 y ya un entero cuatro quintos*

Dentro de las cinco respuestas consideradas incorrectas, dos se clasificaron como SR y tres como OT. En ambos casos es notoria la carencia de ciertos componentes del SN. Puesto que los estudiantes pudieron hacer uso de la composición y descomposición de cantidades, por ejemplo, descomponer los dos enteros en uno más uno o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo, o bien también utilizar múltiples representaciones de los números, como transitar de los dos enteros o representarlos de otra manera que les permitiera responder al ítem; asimismo, pudieron combinar ambos componentes.

Los estudiantes 2 y 5, que no dieron respuesta, manifestaron que su confusión radicó en la conversión de la fracción a número decimal, es decir, no comprendieron otra forma de resolver el problema más que mediante esa conversión, la cual no lograron realizar con éxito.

A partir de estas respuestas, puede interpretarse que el componente del SN referente al uso de múltiples representaciones de los números y las operaciones no estuvo complemente ausente, pues los estudiantes lograron percibir otra forma de representar a la fracción, sin embargo, no tuvieron los elementos suficientes para poder continuar con el proceso. Dentro de las tres respuestas clasificadas en OT llama la atención que dos estudiantes siguieron el mismo razonamiento al intentar restar los dos enteros menos el denominador. Y aunque el estudiante E9, dio una respuesta casi de manera inmediata, al final comentó que no sabía cómo hacerlo, retractándose de su respuesta.

Estudiante 4: *mm….como que restar el número, bueno el número entero por el más grande de la fracción*

Estudiante 8: *emm…..se me dificulta restarle los dos enteros se me dificulta restarle al 2, un quinto*

La solución para el ítem 8 implica una suma de números no enteros en diferentes representaciones, por un lado una fracción y por otro un número

decimal. Para este momento los estudiantes ya fueron enfrentados a un ítem similar. En este caso se espera que los estudiantes al darle solución usen componentes del SN como utilizar composición y descomposición de los números, una forma sería separar al entero tres de la parte fraccionaria, y el de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones. En este sentido, se podría representar el número decimal como fracción o viceversa, para para trabajar con un mismo tipo de número y facilitar la operación, o bien combinar ambos componentes. Este ítem es uno de tres, con menos éxito en toda la prueba, respondido por sólo tres de los nueve estudiantes de manera correcta. En este ítem, la totalidad de estudiantes requirieron apoyo visual. En las tres respuestas correctas clasificadas dentro del SN, se observa que los estudiantes hicieron uso de múltiples representaciones de los números al transitar del número decimal a la fracción y viceversa.

Estudiante 1: *bueno vemos que no se suman, digamos dos fracciones entonces tuve que hacer la conversión de 3.75 a fracción que más que nada, este 3.75 es 3 enteros tres cuartos, porque 75 es como digamos 25+25+25 da 100 entonces son 3x25 da 75 y luego me di cuenta que eran 3 enteros tres cuartos y ya 3 enteros 3 cuartos le sumé 1 cuarto*.

Estudiante 6: *amm… lo que quise especificar es que en teoría un cuarto en esas fracciones podría ser igual a 25, bueno a 25 milésimas 0.25 para así decir y ya sumando le simplifiqué quitando el cuarto, dándole entender cómo 0.25 y sumándolo a 3.75 dan el 4*

Hasta el momento, este ítem es el que tiene un mayor número de estudiantes que no dieron una respuesta. Al ser cinco de los nueve estudiantes al hacerlo. Dentro de las entrevistas realizadas los estudiantes explicaron que su dificultad está en la realización de las conversiones. Por otra parte, la respuesta clasificada en OT el Estudiante 8, para dar su respuesta sumó la parte entera del número decimal con el denominador de la fracción. lo que puede asumirse como una carencia marcada en la comprensión del significado de los números.

El ítem 9 es único por sus características dentro de la prueba. Se trata de una sucesión geométrica Se espera que puedan identificar el patrón de la serie para poder así dar los dos términos faltantes, para esto se necesita que los estudiantes tengan el desarrollo de subcomponentes del SN como: comparar y ordenar números; emplear propiedades de las operaciones aritméticas (conmutatividad - asociatividad - distributividad), y valorar lo razonable de un resultado. También se relaciona con componentes como la composición y descomposición de los números. Y al igual que el reactivo tres, este es otro ítem que causó mayor dificultad al ser un reactivo con menos respuestas correctas, al ser un solo alumno que lo contestó con éxito. Todos los participantes necesitaron apoyo visual para responder, incluso aquel que lo resolvió correctamente.

La respuesta correcta cae dentro de la clasificación de SN, el estudiante utilizó la comparación de las cantidades involucradas, composición y descomposición de números para efectuar las multiplicaciones necesarias de forma más sencilla, así como el uso de la propiedad distributiva.

Estudiante 1: *es que más que nada me dijo un medio, tres medios y nueve medios, pero como me pongo nervioso ehh no las puedo digamos contener bien en mi mente entonces lo que hice fue verlas para poder ver que o por que se multiplicaban para poder seguir la sucesión vi que 3x1 era 3, 3x3 eran 9 y entonces así seguía la sucesión lo que iba a multiplicar 9x3 era 27 y luego 27x3 igual…. a 81 y así supe cómo iba la sucesión*

De las respuestas incorrectas, tres se ubicaron en la clasificación de BR; cuatro en OT y una en SR. En todos los casos se puede asumir que las dificultades que se tuvieron para poder dar la respuesta correcta es la carencia de subcomponentes del SN tales como: comparar y ordenar números; emplear propiedades aritméticas (conmutatividad - asociatividad - distributividad); y valorar lo razonable de un resultado. También se asocian con componentes como la composición y descomposición de los números.

A partir de las explicaciones proporcionadas en las entrevistas semiestructuradas, se observa que una de las dificultades más marcadas fue la incapacidad para efectuar un producto entre dos factores; es decir, los estudiantes mostraron limitaciones en el componente de composición y descomposición de los números y en el uso de la propiedad distributiva. Si estos componentes del SN estuvieran más desarrollados, los participantes habrían tenido la posibilidad de resolver este ítem correctamente.

Estudiante 2: *según yo este…lo que se tenía que hacer era multiplicar 3 este o sea era todo multiplicado por 3 por ejemplo 3x1 daba 3 que era lo que según yo era y luego 3x3 que era 9 que daba y ya después multipliqué 9x3 que era pero este, ya al momento de multiplicar 27x3 fue lo que me costó trabajo la multiplicación*.

Estudiante 3: *se me dificultó pues porque lo que yo pienso que era una sucesión de multiplicando por 3 y se me dificultó así multiplicar el 9x3 y luego se me dificultó 27x3*

En el último ítem de la prueba se implicaron dos operaciones para su resolución. Por un lado, una suma y por otro una resta. Para llevar a cabo este reactivo se espera que los estudiantes puedan hacer uso de componentes del SN como: composición y descomposición de los números, por ejemplo, al descomponer la cantidad de 89 lo pueden hacer en (80 +9) o bien en (90-1) y la cantidad de 42 en (40 +2) o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo a los estudiantes. Posteriormente, pueden realizar la resta de 180 menos 131 mediante la misma estrategia de composición y descomposición de los números. Este ítem fue respondido de manera exitosa por cuatro de los nueve participantes. ninguno de los cuales requirió apoyo visual. En cambio, los estudiantes que no lograron resolverlo sí lo utilizaron. En las cuatro respuestas correctas clasificadas dentro del SN, los estudiantes

emplearon la composición y descomposición de los números para llevar a cabo las operaciones de una manera más conveniente para ellos.

Estudiante 2: *89 y 42…sumé los 80 más los 40 ya después este 80, 90, 100, fueron….dan 120 y ya después esos, a esos 120 les sumé los 9 y eran 129 y ya después les sumé los otros dos que eran 131, entonces si eran 131 pues yo encontré un número que al sumarlo diera 180 el cual fue 49*

Estudiante 3: *pues primero al 89 lo convertí en 90 y así ya luego le sumé 42 y ya al resultado le resté 1 y ya el resultado pensé más o menos en cuanto era el número que sumándolo me diera 180*

Estudiante 7: *le sumé al 180, le sumé los 40 que daban 120 y luego 9 + 2 eran 11 y entonces 120 + 11 eran 131, nada más ese valor restarle los 180. Al 180 le quité 130 y sobraban 50 y le quité 1 y entonces eran….49*

Mientras que, para las otras dos respuestas erróneas, que también se ubican en la clasificación SN, se puede suponer que el componente de composición y descomposición de los números, está presente en los estudiantes sin embargo, no se encuentra lo suficientemente consolidado para llevar a cabo con éxito todo el proceso.

Estudiante 1: *bueno primero sumé 80 + 40 dándome 120, más 9 más 2 me daba 131, y ese fue, bueno, fue el resultado de la suma y luego a 31 le quité bueno, a 180 le quité 131, 80 le quité 31 dándome el resultado de 59 no digo 49, 49 y ya luego le sumé 100*

El resto de las respuestas erróneas caen en las otras clasificaciones, uno en OT y dos más en SR. En el caso del estudiante 4, clasificado en OT, no proporcionó elementos suficientes para conocer qué realizó en su proceso de solución. Mientras que los estudiantes que su respuesta está en la clasificación SR, durante la entrevista semiestructurada explicaron que su dificultad estuvo en la palabra ángulos ya que no saben cómo medirlos u operarlos. Para ambos casos se puede deducir que no tienen desarrollado el componente de composición y descomposición de los números, así como una carencia en la comprensión de las relaciones existentes entre ellos.

Discusiones y reflexiones

El cálculo mental ha sido una actividad evaluada en México en educación básica desde 2013 y se mantiene en los planes y programas de 2022 como un propósito en educación secundaria, García (2014) menciona que existen carencias significativas en la comprensión, el uso y manejo de los números en educación básica. Cabe recordar que para efectos de esta investigación se consideró el CM como parte del SN. Como resultados finales de esta investigación y con base en la forma de evaluarlos, se obtuvo que cinco de los nueve estudiantes a los que se les aplicó el test están en el nivel de requiere apoyo, es decir, que no cuentan con elementos suficientes para llevar a cabo actividades de CM, esto, a su vez, sugiere que el desarrollo del SN en estos estudiantes es limitado.

En la literatura se identificó que al realizar preguntas de cálculo mental, la presentación visual de los ítems (mostrar el ítem produjo resultados más altos en estudios similares al realizado), como el de Reys et al. (1995), sin embargo en esta investigación se obtuvieron resultados opuestos, en ítems como el tres, ocho y nueve a pesar de mostrar el apoyo visual en la totalidad de los estudiantes fueron ítems con menor número de respuestas correctas, aunque en algunos casos el apoyo visual ayudó a los estudiantes a encontrar la respuesta, no representó una diferencia significativa en los resultados generales.

Por otro lado, dos estudiantes en dos ocasiones distintas, fuera de la aplicación de la prueba, es decir, durante la entrevista semiestructurada al explicar el proceso que llevaron a cabo para responder un ítem determinado el cual habían respondido de manera errónea, dieron la respuesta correcta, este hecho lo podemos entender en dos sentidos, por un lado que el tiempo que tuvieron para dar la respuesta influye en los resultados, cabe recordar que para cada ítem se tuvo un aproximado de 20 segundos, en otros estudios similares como el de Reys et al. (1995) mencionan que sus pruebas pilotos demostraron que 20 segundos eran suficientes para que casi todos los estudiantes llevarán a cabo los procesos mentales para dar respuesta, sin embargo, este hecho da elementos para suponer que si el tiempo hubiera sido mayor, estos estudiantes hubieran estado en posibilidades de responder acertadamente desde el principio. Por otro lado, este hecho puede entenderse como una evidencia de que el nivel de SN que poseen estos estudiantes aún se encuentra en proceso de desarrollo.

Otro punto importante a resaltar es que hubo un mayor número de reactivos que fueron respondidos con base en los componentes del SN ya sea de manera correcta o incorrecta esto en comparación únicamente con los reactivos que fueron respondidos basados en algoritmos, este hallazgo se podría explicar al considerar que estos estudiantes tienen dentro de su bagaje de conocimientos matemáticos componentes del SN que aplicaron en situaciones de CM (pensamiento aditivo), que en una minoría se podrían valorar que están consolidados y en otros que el SN es deficiente o nulo. En este orden de ideas, estos resultados son opuestos a los obtenidos en investigaciones como la de Almeida et al (2014) quienes señalan que los estudiantes suelen preferir procedimientos estándar de cálculo en actividades que podrían resolverse mediante el SN. Por otro lado, también resulta interesante rescatar que se está en posición de asumir que estos estudiantes comprenden que los algoritmos no son la única forma de dar respuesta a operaciones aritméticas mentales. Sin embargo si se considera únicamente las respuestas incorrectas en la clasificación de SN y las comparamos con las de las clasificaciones de OT y SR estas están muy por debajo, es decir, la mayoría de los estudiantes no pudo responder o no proporcionó elementos suficientes para

conocer su procedimiento. Este hecho ayuda a reafirmar lo antes mencionado que el SN de estos estudiantes es deficiente o nulo. Entre los componentes utilizados con éxito destaca el uso de la composición y descomposición de los números.

Esta investigación reafirma lo que investigadores como Garcia (2014) señalan, de que si la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes se centra en el uso de algoritmos, carece de sentido y genera deficiencias notorias en el manejo de los números y sus operaciones. En la misma línea, Almeida et al. (2014) exhortan a la reflexión sobre la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes en la educación obligatoria. Por su parte, Pourdavood et al. (2020) señalan la importancia de que los estudiantes tengan oportunidades de trabajar las habilidades y estrategias relacionadas al CM.

Conclusiones

En referencia a las preguntas que guiaron esta investigación

Respecto a la pregunta central de esta investigación ¿cuáles son las dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?, con base en las evidencias obtenidas, la respuesta que se puede dar está en torno a los componentes del SN, que son los siguientes:

a) Comprender el significado de los números;
b) Utilizar la composición y descomposición de los números;
c) Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones; y
d) Comprender el efecto relativo de las operaciones.

Mientras que para la pregunta, ¿cómo se clasifican las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental? con base en los resultados pueden definirse dos clasificaciones:

1. Carencias del SN. Se presume que esto pudiera ser originado porque los estudiantes están habituados al trabajo con lápiz y papel y al uso de algunas herramientas tecnológicas.
2. Rezago educativo. Esto debido a los tres casos de estudiantes que han obtenido el nivel de requiere apoyo, es decir muestran insuficiencia en sus resultados en la totalidad de las aplicaciones que hasta el momento de la prueba tenían, esto es un total de ocho aplicaciones. De este modo se puede suponer que la instrucción aritmética recibida por estos estudiantes no les ha permitido tener un avance relevante en la construcción de aprendizajes matemáticos requeridos para resolver preguntas de CM. En este punto, conviene enfatizar la relevancia de construir aprendizajes, en este caso matemáticos, a partir de los elementos con los que cuenta cada estudiante, es decir, de sus saberes previos, para que de esta forma se construyan aprendizajes significativos que les permitan a los estudiantes hacer uso de ellos y a su vez generar nuevos aprendizajes. Cuanto mayor sea la conexión

> entre los conocimientos previos y los nuevos, el aprendizaje será más significativo y duradero, al formar parte de una estructura mental y de la memoria a largo plazo (Ausubel, 1980)

Otro punto de interés es la importancia de que los estudiantes cuenten con un espacio en el aula para la socialización de estrategias utilizadas, ya que esto puede permitir que estudiantes con deficiencias matemáticas o no, conozcan y pongan en práctica otras estrategias usadas por sus pares e incluso por el docente. En este sentido, Garcia (2014) menciona que las confrontaciones o puestas en común que se proponen hacer a posteriori de que los estudiantes resuelvan un problema, es un atributo del enfoque de resolución de problemas que fomenta el desarrollo del SN. En esta línea de ideas, trabajar en el desarrollo del SN puede repercutir en las habilidades que el estudiante desarrolle para la resolución de problemas, y viceversa, trabajando en la solución de problemas se beneficia en el desarrollo del SN. Por su parte, Parra (1994) menciona que la capacidad gradual de resolución de problemas requiere de un progresivo dominio de recursos de cálculo. Desde esta investigación, se considera que la resolución de problemas, entendida como una perspectiva didáctica, posibilita crear y consolidar aprendizajes matemáticos, además de coadyuvar en la reducción del rezago educativo.

Por la naturaleza de esta investigación los resultados no pueden ser generalizados a gran escala, sin embargo, ofrecen a los profesionales de la educación matemática un panorama sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes del nivel en que se desarrolló esta investigación al resolver situaciones de CM. A su vez, estos hallazgos aportan elementos e ideas sobre aspectos esenciales para trabajar en el aula y favorecer un desarrollo más sólido del SN en los estudiantes.

Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

Una posible línea de investigación que podría derivarse de los resultados aquí presentados es el diseño y aplicación de estrategias para trabajar en el aula que contribuyan a reducir las dificultades identificadas, es decir, que posibiliten el fortalecimiento del desarrollo del SN a través de actividades que permitan, la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las diferentes relaciones existentes entre los números, el reconocimiento y estimación del valor absoluto y relativo de los números, fortalecer la composición y descomposición de los números, representar a los números de maneras diversas de acuerdo al contexto que se esté abordando, identificar el efecto de una operación así como el uso de propiedades aritméticas como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad.

Otra línea de trabajo posible consiste en aplicar pruebas similares en los otros dos grados de secundaria, con el fin de identificar similitudes o diferencias

en las dificultades observadas, en función del grado escolar. Así como también se sugiere trabajar con más estudiantes para que los resultados aporten más datos y los hallazgos sean más robustos.

Reflexiones finales

La aplicación de la prueba permitió indagar cómo los estudiantes ponen en práctica el sentido que le otorgan a los números y las operaciones realizando los cálculos de forma flexible y en diversas ocasiones fuera de los algoritmos convencionales.

Por otro lado, este trabajo permitió conocer a los autores los procesos que llevan a cabo los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de CM y tener un panorama sobre lo que se puede trabajar en el aula de manera transversal como lo sugieren algunas investigaciones (García 2014; Almeida et al 2014). En este sentido, los resultados de esta investigación pueden contribuir a una mejor comprensión de las dificultades que presentan los estudiantes, y servir como base para posteriores estudios sobre el desarrollo del SN y su relación con el CM.

En otro sentido, resulta relevante citar la importancia que tiene para los profesores el generar espacios en el aula para que los estudiantes puedan poner en práctica sus habilidades de comunicación sobre los procesos que llevan a cabo en la solución de problemas matemáticos y que a través de la práctica estas se vayan fortaleciendo.

Referencias

Almeida, R., Bruno, A. & Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 9–34.

Álvarez, Y. (2006). ¡Auxilio. No Puedo Con la Matemática!. Revista Iberoamericana de Educación *Matemática Equisangulo, 2*(1), 4–16.

Ausubel, D. (1980). *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo.* Editorial Trillas.

Barrera, F., Reyes, A. & Mendoza, J. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiante4s de secundaria. *Educación Matemática, 30*(3), 122–150.

Berch, D.B. (2005). Making sense of number sense. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Cortés, J., Backhoff, E. & Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes de nivel secundaria. *Educación Matemática, 16*(1), 149–168.

Departament for Education. (2010). *Teaching children to calculate mentally*. DFE, Department for Education UK.

García, S. (2014). *Sentido numérico, materiales para apoyar la práctica educativa.* Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gómez, M., & Mireles, A. (2019). Cálculo mental como estrategia para el aprendizaje de los contenidos matemáticos en la educación primaria. *Revista de Ciencias de la Educación, 3*(10), 8–19.

Heirdsfield, A. (2002). Mental methods moving along. *APMC, 7*(1), 4–8.

Jiménez, J. (2010). Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental. *Revista de Matemáticas*, 11–21.

Lemonidis, C. (2016). *Mental computation and Estimation: implications for mathematics, education research, teaching and learning*. Routledge.

McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

Mochón, S., & Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática, 7*(3), 93–105.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards.*National Council of Teachers of Mathematics. NCTM.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2016). *Panorama de la educación 2016: indicadores de la OCDE*. OCDE. https://doi.org/10.1787/eag-2016-es

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra, & I. Sainz, (Comps.), *Didáctica de Matemáticas, aportes y reflexiones.* Paidós.

Pourdavood, R., McCarthy, K., & McCafferty, T. (2020). The Impact of Mental Computation on Children´s Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning and Algebraic Thinking. *Athens Journal of Education, 7*(3), 241–254.

Reys, R., Reys, B., Nohda, N., & Emori, H. (1995) Mental Computation Performance and Strategy, use in japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(4), 304–326.

Rodríguez, T., & Juárez, L. (2019) estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria, el caso de Luisa. *Revista Números, 102,* 67–81.

Ruiz, C., & Balbi, A. (2018). The effects of teaching mental calculation in the development of mathematical abilities. *The Journal of Educational Research 112*(3), 315–326. https://doi.org/10.1080/00220671.2018.1519689

Sengül, S. (2013). Identification of Number Sense Strategies used by Pre-service Elemantary Teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(3), 1965–1974.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Plan y programas de estudio de educación Básica.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2018, febrero 20). *Manual de exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela. Educación secundaria*. SEP. https://bit.ly/4hm5HEI

Stauffer, S., Solares, D., & Broitman, C. (2020). Cálculo estimativo: un estudio con alumnos de 5to año de primaria. *Educación Matemática, 32*(2), 151–171

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Morata.

Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science, 240*(4852), 611–616.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación Cualitativa, Técnicas y Procedimientos para desarrollar la Teoría Fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquía.

Watson, S., Lopes, J., Oliveira, C., & Judge, S. (2018). Error patterns in portuguese students addition and substraction calculation tasks: implications for teaching. *Journal for Multicultural Education, 12*(1), 67–82. https://doi.org/10.1108/JME-01-2017-0002

La fracción en la recta numérica: explorando el significado en estudiantes de educación primaria

Gerardo Salgado-Beltrán [1]
Javier García-García [2]
Alejando Zapoteco-Tepetate [3]

Resumen

Este capítulo reporta los resultados de una investigación cuyo objetivo fue explorar el significado del concepto de fracción como punto en la recta numérica en un grupo de estudiantes de sexto grado de Educación Primaria. Para la recolección de datos, se aplicó una entrevista basada en tareas y se empleó el método de análisis temático para su respectivo estudio. Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes evidenció con mayor énfasis los primeros tres atributos relacionados con el significado de la fracción como punto en la recta numérica, a saber: rango de ubicación, uso y construcción de escalas, y manejo de la partición congruente. En contraste, el cuarto atributo, que se refiere a la resolución de problemas mediante la recta numérica, solo fue evidenciado por una minoría de los estudiantes. Estos hallazgos subrayan la necesidad de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las fracciones en la recta numérica, con el fin de ofrecer una formación integral que además de que permita a los estudiantes resolver procedimientos mecánicos, también desarrollar la comprensión de los significados asociados al concepto.

Palabras clave

Significado, fracción, recta numérica, entrevista basada en tareas

[1] 14251@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[2] jagarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[3] 23501276@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Salgado-Beltrán, G., García-García, J., & Zapoteco-Tepetate, A. (2025). La fracción en la recta numérica: explorando el significado en estudiantes de Educación Primaria. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 49–66). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-02

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones comienzan en las primeras etapas de la formación de los estudiantes (Andonegui, 2006; Valenzuela, 2018) y se extiende a lo largo del currículo de matemáticas en niveles educativos superiores. Por esta razón, el concepto de fracción se considera uno de los más relevantes dentro del currículo de matemáticas en el Nivel Básico Primaria (en adelante NBP) en México y en otros países (Fandiño, 2005). Su contribución al desarrollo de conocimiento de otros conceptos más avanzados, como la proporcionalidad o los números racionales, destaca la importancia de su aprendizaje (Flores, 2010) y relevancia en el plano investigativo.

Por más de cuatro décadas, la investigación en Educación Matemática sobre el concepto de fracción ha proporcionado hallazgos cuyo impacto ha sido decisivo para comprender este concepto (Freudenthal, 1983; Lamon, 2001; Kieren, 1988). Sin embargo, los múltiples significados asociados a este, así como las diversas formas en que puede representarse lo hacen un concepto difícil tanto en su enseñanza como en su consecuente aprendizaje (Adu-Gyamfi et al., 2019; Harvey, 2012; Lamon, 2020). A pesar de los avances en la investigación, la complejidad del concepto de fracción persiste, ya que involucra una amplia gama de interpretaciones y representaciones. Por lo tanto, es necesario seguir desarrollando enfoques didácticos que permitan a los estudiantes superar estas dificultades y lograr una comprensión más profunda del concepto.

Con el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de este concepto, se han identificado y documentado diversos errores y dificultades recurrentes que enfrentan los estudiantes al resolver actividades asociadas con el concepto fracción. Entre los más comunes se encuentran, la extrapolación inapropiada de las reglas y algoritmos de cálculo de los números naturales a los números racionales, el olvido o la alteración de los algoritmos correctos para operar con fracciones, el uso incorrecto de propiedades al simplificar fracciones, la dificultad para identificar la operación adecuada en ejercicios contextualizados o la realización de operaciones sin justificación, y la incapacidad para ubicar fracciones en la recta numérica o representarlas correctamente en figuras geométricas no estándar (DeWolf & Vosniadou, 2015; Fandiño, 2005; García, 2012; Melquiades, 2022; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Lo anterior se ha explicado desde diversas perspectivas, Mata y Porcel (2006) atribuyen esta situación a la enseñanza tradicional centrada en algoritmos que promueven el aprendizaje memorístico a través de la repetición. Por su parte, Valenzuela (2018) lo vincula a la naturaleza multifacética del concepto, mientras que, Carmen (2019) a la escasa comprensión lectora que

desarrollan los estudiantes, lo cual afecta su desempeño al resolver problemas de aplicación. Por su parte, Melquiades (2022) considera que el uso prominente del modelo de área para tratar el concepto de fracción en el NBP por los profesores limita la interiorización de distintos significados asociados a la fracción. Cada una de estas perspectivas resaltad aspectos que dificultan la comprensión de las fracciones, desde la enseñanza tradicional hasta los modelos representacionales limitados. En conjunto, estas dificultades evidencian la importancia de replantear las prácticas pedagógicas y adaptarlas a las necesidades cognitivas y conceptuales de los estudiantes para lograr un aprendizaje más profundo del concepto.

Como respuesta a la problemática, se han realizado diversas propuestas. Por ejemplo, Peña (2011) diseñó una ingeniería didáctica para que los estudiantes del NBP atribuyan significado al algoritmo de la suma de fracciones. Ruiz (2013), desde una perspectiva socioepistemológica, realizó una propuesta que utiliza los significados de parte-todo y cociente, abordando contextos reales en los que el concepto de fracción emerge de forma cotidiana. Por su parte, Castro (2014) propuso un diseño de actividades destinado a que los estudiantes de secundaria construyan el concepto de número fraccionario como una clase de equivalencia. Por su parte, Martínez y Meza (2017) desarrollaron una unidad didáctica que favorece la comprensión del proceso de adición entre fracciones, utilizando las regletas como herramienta para representar el concepto de parte-todo, centrado en estudiantes colombianos de cuarto grado. En dichas propuestas, los resultados han sido favorables, sin embargo, todas coinciden en que las dificultades persisten en todos diferentes los niveles educativos, tal como lo señalan Siegler et al. (2013).

En el estudio de Valenzuela (2018), se reportó que, en México, la mayoría de los estudiantes de primaria carecen de una comprensión consolidada sobre las fracciones, tanto en la recta numérica como en su concepción como número. Esto se debe a que su enseñanza se centra principalmente en el modelo de área, el cual dificulta el desarrollo de estos significados. En este contexto, subraya la necesidad de que futuras investigaciones exploren lo que los estudiantes de primaria realmente entienden acerca de la representación de fracciones en la recta numérica, después de haber recibido instrucción sobre el tema. Esta observación motivó la orientación del presente estudio hacia esa línea de análisis, tomando como objeto el significado de fracción como punto en la recta numérica.

A partir de los hallazgos previos y los problemas persistentes en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en el NBP, y con el objetivo de contribuir positivamente a su solución, se diseñó la presente investigación. El estudio tiene como propósito *explorar el significado del concepto de fracción como punto en la recta numérica en un grupo de estudiantes de sexto grado de primaria. Esto permitió responder la pregunta: ¿Qué atributos del significado de*

la fracción como punto en la recta numérica se evidencian en los estudiantes de primaria al resolver tareas relacionadas con este concepto?

Marco conceptual

Los referentes fundamentales sobre los que se basa este estudio son la definición de fracción y su significado como un punto en la recta numérica, conceptos que se abordan desde la literatura especializada en Educación Matemática. Estos elementos no solo constituyen la base del diseño del estudio, sino que también orientan la interpretación de los resultados obtenidos.

Definición de fracción

Según Freudenthal (1983), las fracciones son un recurso fenomenológico para introducir los números racionales en el ámbito escolar. A partir de esta introducción, se inicia un proceso gradual de construcción del concepto de número racional en los distintos niveles educativos (Valenzuela, 2018). Sin embargo, Behr et al. (1992) señalan que la falta de claridad en la distinción de los conceptos de fracción y número racional en los diversos elementos que intervienen en al ámbito escolar, son algunas de las principales razones por las que este concepto continúa representando un reto en la investigación en Educación Matemática.

Desde una perspectiva matemática, los números racionales se definen como el conjunto de clases de equivalencia de un campo de cocientes, donde las fracciones son los elementos que conforman estas clases (Andonegui, 2006). No obstante, desde un enfoque didáctico, los números racionales adoptan diferentes representaciones, para las cuales se ha utilizado una terminología variada, como: interpretaciones (Kieren, 1976), situaciones (Mamede & Nunes, 2008), usos y aspectos (Freudenthal, 1983), constructos (Kieren, 1988) y subconstructos (Behr et al., 1992).

Estas diferentes denominaciones reflejan la complejidad y riqueza de los números racionales en el contexto educativo, ya que no solo implican una formalización matemática, sino también diversas representaciones y situaciones en las que los estudiantes interactúan con ellos. Cada término resalta un aspecto particular del proceso de aprendizaje, destaca la relevancia de abordar los números racionales desde diferentes perspectivas, como objetos abstractos, como herramientas para resolver problemas, o como construcciones que se desarrollan a lo largo del tiempo en la práctica matemática (Kieren, 1988).

Significado de la fracción cómo punto en la recta numérica

De acuerdo con la literatura en Educación Matemática, existen catorce significados atribuibles al concepto de fracción (Fandiño, 2005; Flores, 2010), los cuales se abordan a lo largo del currículo matemático en México (Melquiades, 2022; Valenzuela, 2018). En el Nivel Básico, los estudiantes

comienzan a explorar estos significados, destacando especialmente la interpretación de la fracción como un punto en la recta numérica, lo que constituye un paso crucial hacia la comprensión de los números racionales (Fandiño, 2009). Este significado emerge al establecer la relación entre una fracción y la ubicación de un punto específico en la recta numérica (Andonegui, 2006), lo que implica reflexionar sobre las propiedades que rigen el conjunto de los números reales (Castro, 2014; Valenzuela, 2018).

En este contexto, Fandiño (2009) sostiene que el significado de la fracción como punto en la recta numérica se evidencia en la actividad del sujeto en acción cuando, al ubicar fracciones en la recta numérica, realiza varias acciones, identifica entre qué números naturales consecutivos se ubica una fracción, construye y utiliza escalas para establecer la partición congruente de la unidad, utiliza y construye la partición congruente de la unidad y utiliza la recta para representar y resolver problemas de aplicación (Melquiades-Martínez et al., 2023; Valenzuela, 2018). Estos elementos se emplean en esta investigación como criterios para analizar cómo los estudiantes construyen el significado de la fracción como punto en la recta, por lo que constituyen un referente teórico central en este estudio.

Metodología

Esta investigación es cualitativa con un alcance exploratorio, ya que interesa identificar los atributos del significado fracción como punto en la recta numérica que los estudiantes ponen en juego al resolver tareas que involucran al concepto de fracción.

Contexto de la investigación y selección de los participantes

La investigación se llevó a cabo en noviembre de 2024 en una escuela pública de NBP ubicada en la región centro del estado de Guerrero, México. Participaron 30 estudiantes (20 hombres y 10 mujeres) con edades entre 11 y 12 años, todos ellos legalmente inscritos en sexto grado de primaria. La participación fue voluntaria. Para realizar las entrevistas se obtuvo el consentimiento informado de los tutores de los estudiantes, así como la autorización del director de la institución. Durante las entrevistas, los participantes fueron acompañados por un observador perteneciente al personal docente de la institución. Se eligió este grado académico para garantizar que los estudiantes ya hubieran trabajado el concepto de fracción en la recta numérica, considerando el plan de estudios del NBP. A partir de este momento, los estudiantes serán referenciados como E1, E2, ..., E30.

Recolección de los datos

Se diseñó y aplicó una Entrevista Basada en Tareas (EBT), siguiendo los principios propuestos por Goldin (2000). Este tipo de entrevista se caracteriza por la interacción mínima entre el entrevistado, quien resuelve la tarea,

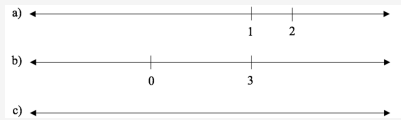
y el entrevistador, que representa a los investigadores. Se centra en una o varias tareas previamente definidas, que pueden incluir preguntas, problemas o actividades. Este método combina la entrevista, que permite explorar los procesos de pensamiento del individuo mediante sus respuestas verbales, con las tareas, que sirven como herramienta para identificar los procedimientos y las ideas que el entrevistado utiliza al abordar las tareas planteadas.

Se diseñaron cuatro tareas, las cuales fueron validadas por expertos, teniendo en cuenta aspectos como la claridad en la redacción, el nivel de dificultad y su pertinencia con respecto a los objetivos del estudio. Posteriormente, se llevó a cabo una prueba piloto con dos estudiantes de NBP para comprobar la coherencia de las redacciones, la accesibilidad de las tareas y su alineación con los planes de estudio. Esta prueba piloto tuvo una duración promedio de 60 minutos y fue grabada en video para su posterior análisis. A partir de los resultados obtenidos, se realizaron ajustes en dos de las tareas, que finalmente formaron parte del instrumento utilizado en el estudio. Por ejemplo, la tarea 3, que originalmente decía "Construye una recta numérica para cada fracción y ubica $\frac{3}{4}$ en una y $\frac{5}{3}$ en la otra", fue modificada a "Construye una recta numérica y ubica las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$".

El instrumento final consistió en las tareas descritas en la Tabla 1. El protocolo para el entrevistador incluyó preguntas generales aplicables a todas las tareas, tales como: ¿Qué significa este término?, ¿Puedes profundizar en lo que mencionas? y ¿Podrías realizar el dibujo? Asimismo, se realizaron preguntas específicas para explorar más a fondo el razonamiento y el entendimiento del participante sobre el significado de la fracción abordado en esta investigación. Estas preguntas se empleaban cuando las respuestas del entrevistado resultaban ambiguas, cuando su razonamiento carecía de fundamentos claros, o para incentivar la exploración de otras posibles soluciones que el participante pudiera aportar.

Tabla 1

Tareas planteadas a los estudiantes

Tarea 1. Explica, ¿Cuáles son los pasos que sigues para ubicar una fracción en la recta numérica?
Tarea 2. En cada inciso, identifica la escala, gradúa la recta numérica y ubica la fracción $\frac{2}{3}$ en cada una. 
Tarea 3. Construye una recta numérica y ubica las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$
Tarea 4. Carlos está corriendo una carrera de 10 kilómetros. Ya ha recorrido $\frac{3}{5}$ de la distancia. Utilizando la recta numérica, responde las siguientes preguntas: • ¿Dónde marcarías el punto que representa la distancia recorrida por Carlos hasta ahora? • ¿Cuántos kilómetros ha recorrido Carlos? • ¿Cuánto falta para que Carlos termine la carrera?

Análisis de los datos

Las entrevistas ofrecieron evidencia tanto escrita como verbal de los participantes, la cual fue registrada en hojas de trabajo y videograbaciones. Para analizar esta información, se empleó el método de Análisis Temático propuesto por Braun y Clarke (2012). Este enfoque incorporó un proceso de triangulación entre los investigadores, con el propósito de garantizar la confiabilidad, validez, credibilidad y rigor de los resultados. A través de este análisis, se identificaron patrones de significado (temas) que reflejaban las concepciones alternativas en las respuestas de los estudiantes a las tareas del protocolo de la EBT. El proceso consta de seis fases. En las tres primeras, cada investigador realizó el análisis de manera independiente; a partir de la cuarta fase, se llevaron a cabo sesiones de discusión para llegar a un consenso sobre las concepciones alternativas detectadas en este grupo de estudiantes. A continuación, se describen las fases.

Fase 1. Familiarización con los datos. Las entrevistas se transcribieron y las respuestas escritas se digitalizaron. Posteriormente, cada investigador llevó a cabo una lectura global de las respuestas con el fin de obtener una comprensión inicial de los atributos del significado fracción como punto en la recta numérica que ponen en juego los estudiantes al resolver tareas propuestas y familiarizarse con el lenguaje utilizado por los participantes.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. Se identificaron palabras, frases y/o cálculos empleados por los estudiantes para hacer referencia al significado de la fracción como punto en la recta numérica. Por ejemplo, en el extracto de E2 para la tarea 3, se destacaron en cursivas las expresiones o procedimientos que permitieron generar dos códigos iniciales: "Para ubicar la fracción divido la unidad en cuatro partes que se vean iguales mas o menos" y "Con la regla mido los cuatro segmentos para asegurar que sean iguales".

E2: *Bueno, voy a iniciar con la fracción* $\frac{3}{4}$ [traza la recta y ubica el 0 y el 1 en ella]. *Después, voy a dividir la unidad en cuatro partes iguales* [realiza las marcas a mano alzada] *y tomaré tres de ellas; ahí debe estar la fracción* $\frac{3}{4}$

Investigador: *¿Son iguales los cuatro segmentos en que divides la unidad?*

E2: *Se ven iguales más o menos. Si se fija, tomé tres partes para ubicar la fracción*

Investigador: *¿Cómo aseguras que sean iguales los segmentos?*

E2: *Con la regla, los mido, maestro*

En esta fase, se identificaron 143 códigos iniciales relacionados con las ideas expresadas por los estudiantes sobre el significado de la fracción como punto en la recta numérica. Sin embargo, en algunos casos, los estudiantes mencionaron más de dos ideas, lo que generó una codificación diferente, aunque solo emplearon una de ellas como estrategia principal para resolver la tarea. Este análisis se llevó a cabo con las respuestas de los treinta participantes.

Fase 3. Identificación de temas y subtemas. Se examinaron los códigos iniciales con el fin de agrupar aquellos que compartían un significado similar

o seguían un patrón de respuesta común, lo que permitió establecer subtemas. Estos subtemas se asociaron con un tema principal que representaba un atributo del significado de la fracción como punto en la recta numérica. Por ejemplo, a partir de los subtemas "Construye la escala de manera aproximada a mano alzada", "La escala se concibe como la distancia entre dos números naturales en la recta numérica" y "Sin una escala definida, se construye de manera flexible en la recta numérica" se construyó el tema "Uso y construcción de escalas".

Fase 4. Revisión de los temas y subtemas. Se realizaron dos niveles de revisión para garantizar la coherencia y validez de los temas identificados en los datos (Braun y Clarke, 2006). En el primer nivel, se verificó que todos los temas fueran claros y representaran adecuadamente todos los códigos generados. El objetivo de esta revisión fue asegurar que cada tema estuviera respaldado por un conjunto consistente de datos y que los códigos dentro de cada tema estuvieran estrechamente relacionados. En el segundo nivel, se realizó una revisión más detallada de todos los datos en función de los temas identificados. Esto permitió confirmar que los temas reflejaban de manera precisa el conjunto completo de datos, evitando superposiciones e inconsistencias entre los temas y subtemas. Cuando fue necesario, se crearon nuevos temas. Además, durante esta fase, los investigadores se reunieron para llevar a cabo una revisión entre pares, lo que contribuyó a mejorar la calidad y validez del análisis de los datos. Este proceso ayudó a afinar la identificación de los temas, que en este estudio correspondían a los atributos del significado de la fracción como punto en la recta numérica, y a reducir el sesgo de un solo investigador.

Fase 5. Definición y nombre de los temas y subtemas. En esta fase, se asignaron nombres a los temas identificados para facilitar la presentación de los hallazgos, los cuales, en este estudio, corresponden a los atributos del significado de la fracción como punto en la recta numérica. A cada tema se le proporcionó una definición clara y precisa que refleja las ideas expresadas por los estudiantes. Estos atributos se fundamentan en las respuestas escritas o verbales de los participantes.

Fase 6. Elaboración del informe. En esta sección se presenta el significado de la fracción como punto en la recta numérica a través de los atributos que lo evidencian (temas) junto con sus respectivos subtemas (ver Tabla 2). Para los fines de la investigación, los resultados se organizan y describen de acuerdo con cada atributo identificado.

Resultados

El análisis de las producciones escritas y orales de los participantes permitió identificar los cuatro atributos del significado tratado en esta investigación, los cuales emergieron durante el proceso de resolución de

tareas realizadas por los estudiantes de NBP (ver Tabla 2). Estos atributos son, rango de ubicación, uso y construcción de escalas, manejo de la partición congruente e interpretación de fracciones en la recta numérica. A continuación, se expone la descripción de cada uno de ellos.

Tabla 2

Atributos del significado de fracción identificados en las respuestas de los participantes

Atributos del significado	Definición	Subtemas	Frecuencia
Rango de ubicación	Hace referencia a la determinación del intervalo, delimitado por números naturales, en el que se debe ubicar una fracción.	• Convierte la fracción en su forma decimal para ubicar la fracción. • Determina si la fracción es propia o impropia para ubicar la fracción.	48
Uso y construcción de escalas	Se refiere al uso y construcción de escalas en la recta numérica para ubicar una fracción.	• Construye la escala de manera aproximada a mano alzada. • La escala se concibe como la distancia entre dos números naturales en la recta numérica. • Sin una escala definida, se construye de manera flexible en la recta numérica.	40
Manejo de la partición congruente	Hace referencia a la construcción y uso de la partición congruente para ubicar una fracción en la recta numérica.	• La partición se construye de forma aproximada.	37
Resolución de problemas mediante la recta numérica	Consiste en interpretar y resolver problemas de aplicación a través de la recta numérica.		18

Atributo 1. Rango de ubicación

Este atributo se refiere a la determinación del intervalo, delimitado por números naturales, en el que se ubica una fracción. Este tema emergió de las respuestas de todos los estudiantes al abordar las cuatro tareas. Dado que ellos manifestaron dos ideas relacionadas con este atributo, se desarrollaron dos subtemas que se detallan a continuación.

Convierte la fracción en su forma decimal

Este subtema se desarrolló a partir de las respuestas de todos los estudiantes al resolver las tareas que conforman el protocolo. A este respecto, veintidós de los estudiantes mostraron esta tendencia, y para ellos, un elemento clave es convertir la fracción a su forma decimal para poder determinar en qué intervalo de números naturales se ubicará en la recta. Esta idea se reflejó en afirmaciones como: "Se debe hacer la división para saber dónde se ubica", "la fracción $\frac{5}{3}$ = 1.66666 se encuentra entre 1 y 2", o "Necesito la forma decimal para ubicar la fracción" (ver extracto del diálogo con E1 para la T1). Esto sugiere que, para estos estudiantes, la conversión a decimal les proporciona una forma más intuitiva de entender y trabajar con las fracciones

en la recta, posiblemente debido a un enfoque de enseñanza que favorece el uso de números decimales por encima de las fracciones.

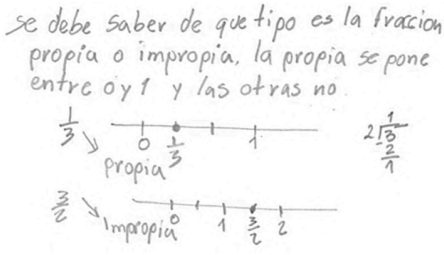
E1: *Primero hago la división, luego veo el resultado y, después, dibujo la recta*
Investigador: *¿Por qué haces primero la división?*
E1: *Porque así puedo saber entre qué números debo colocarla*

Determina si la facción es propia o impropia para ubicar la fracción

Este subtema se construyó a partir de las respuestas de los estudiantes E5, E7, E9, E12 y E25 en la tarea 1. En sus razonamientos, los estudiantes indicaron que, al ubicar una fracción en la recta numérica, lo primero que deben hacer es identificar el tipo de fracción. Si es propia, debe situarse entre 0 y 1; en cambio, si es impropia, este patrón no se aplica. Esta idea se reflejó en frases como: "Primero debo conocer el tipo de fracción", "Si es propia, será mayor que 0 y menor que 1", o "Si es impropia, la puedo poner en su forma mixta" (ver Figura 1). Este razonamiento parece indicar que los estudiantes intentan relacionar las propiedades numéricas de las fracciones con su representación en la recta numérica. Para algunos de ellos, el tipo de fracción juega un papel clave en la forma en que la ubican, lo que sugiere que esta clasificación funciona como un recurso para organizar visualmente la información de manera más clara y estructurada. Esto refleja una noción que va más allá de la simple localización en la recta, vinculando características matemáticas de las fracciones con su representación gráfica.

Figura 1

E9 explica cómo inicia la ubicación de fracciones en la recta en la tarea 1



Atributo 2. Uso y construcción de escalas

Este atributo alude al uso y la construcción de escalas en la recta numérica para ubicar una fracción. Esta idea surgió de las respuestas de todos los estudiantes al abordar las cuatro tareas. En sus razonamientos expresaron tres ideas relacionadas con este atributo, por lo cual, se desarrollaron tres subtemas que se detallan a continuación.

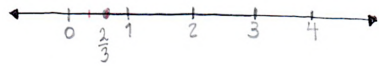
Construye la escala de manera aproximada a mano alzada

Este subtema se desarrolló a partir de las respuestas de quince estudiantes al resolver las tareas 2, 3 y 4, particularmente al ubicar fracciones en la recta

numérica. Un aspecto destacable fue que la mayoría de los estudiantes no utilizó la regla ni ningún otro instrumento que asegurara la precisión de sus trazos. En su lugar, la mayoría lo hizo de forma aproximada, a mano alzada (ver Figura 2). Este hallazgo probablemente esté relacionado la combinación de diversos factores, tales como la ausencia de una instrucción clara por parte del profesor, un enfoque que no enfatizó lo suficiente el uso de herramientas y la precisión, y la tendencia de los estudiantes a resolver este tipo de tareas de manera más visual o intuitiva.

Figura 2

E4 genera la escala en la recta para ubicar la fracción en la tarea 2



La escala se concibe como la distancia entre dos números naturales en la recta numérica

Este subtema se desarrolló a partir de las respuestas de diez estudiantes al resolver las tareas 1 y 2, quienes mostraron una tendencia común en sus razonamientos. Por ejemplo, al identificar la escala en una recta para graduarla y ubicar la fracción $\frac{2}{3}$, indicaron que, si se proporciona la ubicación de dos números cualesquiera en la recta, la escala queda determinada. Esto se debe a que la distancia entre esos números establece el patrón para ubicar los valores restantes y completar la graduación. A continuación, se presentan algunas frases que ilustran esta idea: "En el inciso a), se dan los números 1 y 2 en la recta, tomo la distancia con la regla para ubicar los que faltan" o "Solo necesito repetir la distancia entre los números dados" (ver extracto de diálogo con E7 para la Tarea 2).

E7: *En el inciso a), ya tengo los números 1 y 2, la escala es esa, maestro. Voy a usar la regla para medir la distancia entre esos dos números, luego la aplicaré para ubicar el 0.* [Con la regla, mide la distancia entre los números dados y continúa graduando la recta]

Investigador: *¿Por qué lo consideras así?*

E7: *Bueno, yo veo la escala como la separación entre dos números. Si me dan el 0 y el 3, la recta irá de tres en tres, y así sucesivamente*

Sin una escala definida, se construye de manera flexible en la recta numérica

Este subtema se construyó a partir de las respuestas de los estudiantes E9, E18, E21, E22 y E29, al resolver el inciso c) de la tarea 2. En sus respuestas, los estudiantes señalaron que, cuando en una recta numérica no se especifica una escala, tienen libertad para elegir la que consideren más adecuada según el contexto de la actividad. Este enfoque quedó reflejado en expresiones como: "Si no hay números, puedo colocarlos libremente", "Tomaré un espacio que me permita trabajar mejor" o "Colocaré los números como me convenga"

(ver extracto de diálogo con E18 para el c) de la tarea 2). Este hallazgo revela una interpretación flexible de la recta numérica, donde la libertad para elegir la escala parece ser vista como una ventaja. Para estos estudiantes, la recta no es algo rígido, sino una herramienta que puede adaptase a las demandas específicas de cada situación.

Investigador: *¿Qué sucede con la escala en ese caso?*

E18: *Bueno, no hay*

Investigador: *¿Qué crees que deberías hacer?*

E18: *Debo poner alguna. Voy a colocar el 0 y el 1* [representa los números en la recta]. *Sé que, si la recta no tiene números, puedo añadirlos de manera que queden distribuidos a la misma distancia. Para asegurarme de eso, puedo usar una regla o incluso la cuadrícula de mi cuaderno para que la distancia entre ellos sea la misma*

Atributo 3. Manejo de partición congruente

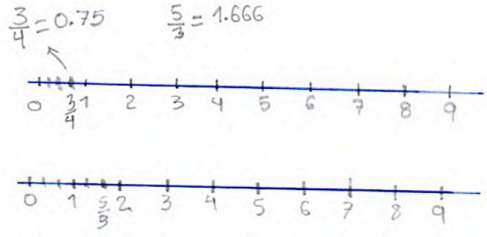
Este atributo se refiere a la construcción y uso de la partición congruente para ubicar una fracción en la recta numérica. Esta idea surgió en las respuestas de todos los participantes en el estudio al responder las tareas 2, 3 y 4. En sus razonamientos se manifestó una sola idea vinculada al atributo, por lo cual, se desarrolló un subtema que se detalla a continuación.

La partición se construye de forma aproximada

Este subtema se construyó a partir de las respuestas de veintiséis estudiantes. En sus razonamientos, se destacó la ausencia de un procedimiento general que garantizara una partición congruente en el proceso. No obstante, la mayoría logró verbalizar y evidenciar su enfoque. Algunos utilizaron una regla graduada, considerando que los trazos en la recta correspondían a múltiplos del denominador de la fracción a ubicar. Otros indicaron que necesitaban hojas milimétricas para realizar la partición, mientras que algunos simplemente llevaron a cabo el proceso a mano alzada (ver Figura 3). Estos hallazgos podrían vincularse con la falta de preparación docente para enseñar estas técnicas, así como el tratamiento limitado que los libros de texto otorgan al tema. Como resultado, los estudiantes siguen el proceso sugerido, pero no de una forma estructurada.

Figura 3

E25 genera la partición congruente en la tarea 3

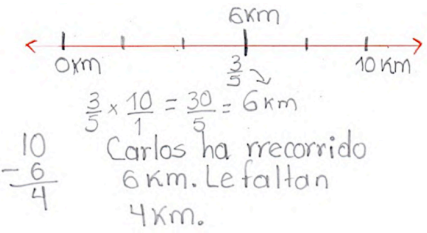


Atributo 4. Resolución de problemas mediante la recta numérica

Este atributo se refiere a la capacidad de interpretar y resolver problemas mediante el uso de la recta numérica. En las respuestas de los estudiantes a la tarea 4 se identificaron diversas manifestaciones de este atributo. Por ejemplo, los estudiantes E5 y E9 comprendieron que el total, entendido como unidad, correspondía a los 10*km* de distancia, de los cuales debían calcular $\frac{3}{5}$. Al utilizar la recta numérica, estos estudiantes indicaron que ajustarían la unidad de medida según el contexto del problema. En contraste, diez estudiantes se limitaron a centrarse exclusivamente en la fracción $\frac{3}{5}$, representándola en la recta sin tener en cuenta el contexto total del problema. Otros ocho estudiantes realizaron algunas operaciones con fracciones para resolver el problema, pero luego solo plasmaron el resultado en la recta sin integrarla a lo largo de todo el proceso. En cambio, solo los estudiantes E5 y E9 lograron resolver el problema de manera integral, utilizando la recta numérica durante todo el proceso (ver Figura 4).

Figura 4

E5 utiliza la recta numérica al resolver la tarea 4



Discusión y conclusiones

Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes evidenció con mayor frecuencia los primeros tres atributos relacionados con el significado de la fracción como punto en la recta numérica, a saber: rango de ubicación, uso y construcción de escalas, y manejo de la partición congruente. Esto contrasta con el cuarto atributo, que se refiere a la resolución de problemas mediante la recta numérica, el cual solo fue evidenciado por una minoría de los estudiantes. En general, los estudiantes parecen tener algunas bases para representar y entender fracciones en la recta numérica, pero manifiestan desafíos cuando se trata de resolver problemas de aplicación que exige la integración de la recta numérica para dar sentido tanto el procedimiento y como al resultado.

Aunado a lo anterior, estos desafíos pueden ser indicativos de la necesidad de un enfoque más profundo en la enseñanza de la resolución de problemas, donde no solo se aborden los aspectos conceptuales, sino también las habilidades prácticas para aplicar la recta numérica de manera efectiva en situaciones más complejas. Este hallazgo sugiere que, aunque los estudiantes

posean un dominio de los atributos relacionados con las fracciones, aún persisten brechas en la transferencia de ese conocimiento hacia situaciones que demandan razonamiento contextual y flexible.

En relación con el primer atributo, que se refiere a la determinación del intervalo, delimitado por números naturales en el que debe ubicarse una fracción, la mayoría de los estudiantes tendió a convertir la fracción en su equivalente decimal para inferir su posición en la recta. Este resultado es similar a lo reportado por Melquiades (2022) en estudiantes de quinto grado de primaria de una zona rural. Esto sugiere que los estudiantes recurren a un enfoque directo y visual, como el decimal, para facilitar la tarea. Sin embargo, este enfoque, aunque efectivo para ubicar rápidamente la fracción, restringe el desarrollo de una comprensión más profunda de la fracción como una entidad precisa en la recta numérica. Al depender de la conversión a decimal, los estudiantes podrían estar perdiendo la oportunidad de internalizar el concepto de la fracción como una representación exacta y única, lo que, a la larga, podría entorpecer su habilidad para abordar problemas más complejos que requieren un manejo más detallado y riguroso de las fracciones.

Además de lo mencionado, en relación con el segundo atributo, que se refiere al uso y la construcción de escalas en la recta numérica para ubicar fracciones, la mayoría de los estudiantes indicó que, al ubicar una fracción en la recta, esta debe contar con una escala definida, entendida como la distancia entre dos números naturales. Sin embargo, cuando la tarea requería que realizaran la graduación de una recta a partir de una escala dada, optaron por hacerlo de manera aproximada, a mano alzada. Este comportamiento, según Valenzuela (2018), puede atribuirse a dificultades técnicas en el proceso de partición congruente, las cuales se derivan de la escasa formalidad con la que algunos profesores enseñan las fracciones en la recta numérica. Lo anterior se reflejó cuando una minoría de participantes, al enfrentarse a una recta sin escala preestablecida, explicó y utilizó el razonamiento de que la escala puede construirse de forma flexible y ajustarse a las condiciones específicas de la tarea.

Además de lo señalado, en relación con el tercer atributo, que se refiere a la construcción y uso de la partición congruente para ubicar fracciones en la recta numérica, todos los participantes expresaron que la unidad correspondiente a la fracción debe dividirse en partes iguales, según el valor del denominador. Sin embargo, al llevar a cabo la tarea, emplearon estrategias que resultaron en particiones aproximadas, lo que pone de manifiesto el tratamiento limitado y exclusivo de este atributo en el discurso pedagógico de los profesores en la escuela. Este hallazgo resalta una carencia importante en la enseñanza de las fracciones, ya que la aproximación a la partición congruente parece ser solo superficial. Al limitarse a estrategias imprecisas, los estudiantes no logran internalizar correctamente la ubicación exacta de

las fracciones en la recta numérica. Esta enseñanza parcial, centrada en métodos aproximados, restringe la comprensión amplia del concepto, lo cual se traduce en dificultades para resolver problemas más complejos en el futuro. Como señalan Bharti (2022) y Newton (2008), esta deficiencia puede generar brechas en el aprendizaje matemático, afectando la capacidad de los estudiantes para abordar con éxito tareas que requieren un manejo preciso de fracciones.

En línea con las ideas previas, respecto al cuarto atributo, que consiste en interpretar y resolver problemas de aplicación que involucren fracciones a través de la recta numérica, los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes enfrentan dificultades para utilizarla con ese fin. En su lugar, tienden a centrarse en los algoritmos involucrados en el problema, priorizando el trabajo procedimental. Este hallazgo es similar al reportado por Özel (2013) en estudiantes de secundaria en Turquía, así como en estudiantes y profesores de primaria en Indonesia (Hariyani et al., 2022). Incluso, Melquiades-Martínez et al. (2023) encontraron resultados similares con estudiantes mexicanos de quinto grado.

Estos hallazgos, respaldados por investigaciones previas, subrayan la importancia de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la recta numérica, con el fin de ofrecer una formación integral que no solo permita a los estudiantes resolver procedimientos mecánicos, sino también comprender los conceptos subyacentes y aplicarlos en una variedad de contextos matemáticos. Es crucial que los docentes amplíen su enfoque pedagógico, más allá del tratamiento procedimental, para incluir estrategias que fomenten una comprensión conceptual en los estudiantes.

Finalmente, consideramos que futuras investigaciones deberían profundizar en los significados de la fracción que los docentes promueven durante la enseñanza. Además, sería pertinente diseñar intervenciones pedagógicas que favorezcan el desarrollo de los diferentes significados de la fracción en estudiantes de nivel básico, con el fin de enriquecer su comprensión y habilidad para trabajar con este concepto en diversos contextos matemáticos.

Referencias

Adu–Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R., & Bossé, M. J. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 507–528. https://doi.org/qbgm

Andonegui, M. (2006). *Fracciones I. Concepto y representación*. Beatriz Borjas.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En: D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). Macmillan Publishing.

Bharti (2022). Learning and Teaching Fractions at The Elementary Level. *Advanced Research and Publications, 5*(7), 8–13.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101. https://doi.org/fswdcx

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Eeds.), *APA handbook of research methods in psychology, vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Carmen, I. (2019). *Desarrollando la comprensión lectora en estudiantes de nivel básico para la resolución de problemas matemáticos* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Castro, M. (2014). *Propuesta de aprendizaje de número fraccionario como clases de equivalencia* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction, 37*, 39–49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettauli e didattici* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Bologna, Italia.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Magisterio.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional, México.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

García, I. (2012). *Un estudio sobre el concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior.* [Tesis de Licenciatura no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Hariyani, M., Herman, T., Suryadi, D., & Prabawanto, S. (2022). Exploration of student learning obstacles in solving fraction problems in elementary school. *International Journal of Educational Methodology, 8*(3), 505–515. https://doi.org/10.12973/ijem.8.3.505

Harvey, R. (2012). Stretching student teachers' understanding of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 24,* 493–511. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0050-7

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, & D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Research Workshop* (pap. 101–144). ERIC/ SMEAC.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From Fractions to Rational. En A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics* (pp. 146–165). National Council of Teacher of Mathematics.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Routledge.

Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and th 30 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 345–352). Cinvestav- UMSNH.

Martínez, Ma. Del C., & Meza, A. (2017). *Adición entre fracciones como parte de un todo utilizando el Juego con regletas A3* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

Mata, L., & Porcel, E. (2006). *Análisis de los errores cometidos en el algoritmo de la suma de fracciones por ingresantes a la facultad de ciencias exactas y naturales y agrimensura.* Editorial Magisterio.

Melquiades-Martínez, M. D. C., Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2023). La fracción como punto en la recta numérica en el saber de estudiantes de quinto grado de Primaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas,* (114), 63–81.

Melquiades, M. D. C. (2022). *Una intervención docente para favorecer el aprendizaje del significado de la fracción como punto en la recta en estudiantes de quinto grado* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers" Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal, 45*(4), 1080–1110.

Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions. *The Anthropologist, 16(*1), 1–5.

Peña, P. (2011). *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional, México.

Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Naturales, Colombia.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences, 17*(1), 13–19.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503–518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Valenzuela, C. (2018). *Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: estudio en comunidades* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav, México.

SEGUNDA TENDENCIA

COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Explorando áreas de polígonos: conexiones matemáticas en estudiantes de Nivel Medio Superior

Alberto León-del Carmen [1]
Javier García-García [2]
Gerardo Salgado-Beltrán [3]

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar las conexiones matemáticas que evidencian estudiantes de nivel medio superior al resolver tareas sobre el área de polígonos regulares. En ese contexto, una conexión matemática se entiende como el proceso mediante el cual un estudiante establece una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones o significados ya sea entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Esta investigación, de carácter cualitativa y enmarcada en un estudio de casos con alcance descriptivo, recurrió a entrevistas basadas en tareas para la recolección de datos. Los casos de estudio fueron cinco estudiantes de nivel medio superior del sur de México, cuyas producciones se analizaron mediante el análisis temático. Los resultados permitieron caracterizar conexiones matemáticas de tipo procedimental, de representaciones diferentes, parte-todo, característica, implicación e inter-conceptual. Sin embargo, su frecuencia varió entre tareas y entre casos de estudio.

Palabras clave

Conexiones matemáticas, áreas, entrevistas basadas en tareas, análisis temático, bachillerato

[1] 15289354@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[2] jagarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[3] 14251@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

León-del Carmen, A., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2025). Explorando áreas de polígonos: conexiones matemáticas en estudiantes de Nivel Medio Superior. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 69–91). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-03

Antecedentes

La literatura especializada reporta que establecer conexiones matemáticas es una forma en la que las personas intentan organizar ideas matemáticas en sistemas coherentes (Vargas-Herrera et al., 2024). La relevancia de las conexiones matemáticas reside, entre otros aspectos, en su capacidad para facilitar la integración de conocimientos y la interdisciplinariedad. Además, contribuye a la resolución de problemas, tanto prácticos como aquellos que no son de naturaleza matemática, y resultan importantes para alcanzar la comprensión matemática (Cawley & Foley, 2002; Eli et al., 2013; Gainsburg, 2008; Glass, 2002; García-García, 2019; 2024). También desarrollar la habilidad de establecer conexiones matemáticas puede incrementar las habilidades de razonamiento y comunicación matemática (Bingölbali & Coşkun, 2016; Baki et al., 2009).

Por otra parte, diversas investigaciones en Educación Matemática han evidenciado dificultades persistentes en los estudiantes de distintos niveles educativos respecto a la comprensión del área y el perímetro de figuras geométricas (Caviedes et al., 2019, 2022; D'Amore & Fandiño, 2007; Kospentaris et al., 2011). Entre estas se encuentran el uso mecánico de fórmulas, la limitada vinculación conceptual del área con sus representaciones geométricas y errores al estimar áreas sin datos numéricos explícitos. Estos resultados se alinean con lo que reporta la literatura desde el enfoque de conexiones, pues esta indica que la conexión procedimental es la que con mayor frecuencia emerge cuando los estudiantes resuelven problemas sobre diversos conceptos matemáticos (Bingölbali & Coşkun, 2016; Baki et al., 2009; Cawley & Foley, 2002; Eli et al., 2013; Gainsburg, 2008; Glass, 2002; García-García, 2019), lo que implica el uso de fórmulas y algoritmos. Sin embargo, esto no es suficiente para potenciar la comprensión matemática de los estudiantes.

La revisión de la literatura muestra que el estudio de las conexiones matemáticas en estudiantes de nivel medio superior ha recibido una atención limitada, a pesar de su reconocida importancia en el desarrollo de la comprensión matemática. Esta situación resalta la importancia de indagar cómo los estudiantes de este nivel las establecen al abordar tareas relacionadas con el cálculo del área de polígonos, un contenido que forma parte explícita del currículo de matemáticas en México (SEP, 2017, 2023). Analizar dichas conexiones no solo permite identificar los conocimientos que poseen los estudiantes, sino también las relaciones que construyen entre definiciones, procedimientos y propiedades geométricas.

En este sentido, resulta fundamental analizar cómo los estudiantes establecen conexiones matemáticas al resolver problemas geométricos, lo que posibilita identificar patrones en su razonamiento y proponer diseños

para el aula (Cruz-Acevedo & García-García, 2023; García-García et al., 2022) que fortalezcan la interrelación entre conceptos matemáticos y promuevan una compresión más articulada de conocimiento. Esto ayudaría a mejorar el desempeño de los estudiantes (Dogan et al., 2022; Novo et al., 2019) y a su capacidad para concebir las matemáticas como un sistema coherente e interrelacionado (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Koestler et al., 2013; Bahar et al., 2023). Por lo tanto, este estudio busca responder a la siguiente pregunta: ¿Qué conexiones matemáticas evidencian estudiantes mexicanos de nivel medio superior al resolver tareas que involucran el área de polígonos regulares? De esta pregunta se deriva el objetivo de caracterizar esas conexiones matemáticas que los estudiantes de nivel medio superior evidencian al resolver tareas que involucran el área de polígonos regulares.

Marco conceptual

Considerando la pregunta de investigación que guía a este trabajo, en esta sección se definen los elementos teóricos que juegan un doble propósito. Primero, sirven para el diseño de las tareas que fueron utilizadas para colectar datos y, segundo, para analizar las producciones escritas y verbales de los estudiantes. En ese contexto, se define el constructo conexiones matemáticas y se explican las tipologías consideradas en esta investigación.

Conexiones matemáticas

Este constructo se entiende en el sentido de García-García y Dolores-Flores (2018), quienes definen a las conexiones matemáticas como los procesos a través de los cuales un estudiante establece una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Esas relaciones verdaderas logran hacerse evidentes en las producciones escritas de un estudiante, así como en los argumentos verbales que ofrece.

La revisión de la literatura indica que no hay una única forma de estudiar conexiones matemáticas. Por ejemplo, Businskas (2008), Eli et al. (2013) y García-García y Dolores-Flores (2018; 2021a, 2021b) proponen algunas categorías para estudiarlas. Sin embargo, considerando el objetivo de la presente investigación, se adopta a priori la siguiente tipología de conexiones matemáticas, previstas para su identificación en la producción de los estudiantes de nivel medio superior.

Conexión matemática de tipo procedimental

Se presenta cuando el sujeto utiliza un procedimiento (reglas, algoritmos o fórmulas) para resolver alguna tarea que involucra un concepto matemático (Businskas, 2008; García-García & Dolores-Flores, 2021a). El procedi-

miento utilizado por el estudiante debe estar basado en argumentos válidos. Por ejemplo, cuando utiliza directamente una fórmula para encontrar el área de un polígono regular, evidencia este tipo de conexión matemática siempre que justifique su respuesta.

Conexión matemática de tipo representaciones diferentes

Puede ser de dos tipos: representaciones alternas o representaciones equivalentes (Businskas, 2008; García-García & Dolores-Flores, 2021a). Una representación alterna se presenta cuando un sujeto logra convertir, en el sentido de Duval (2017), un concepto matemático utilizando diferentes registros. Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de representar pictóricamente una figura geométrica teniendo las características descritas de la misma está empleando una representación alterna, pues convierte una representación geométrica a una pictórica. Por otro lado, una representación es equivalente cuando se realiza un tratamiento, también el sentido de Duval (2017), a un concepto matemático, es decir, éste se representa de formas distintas dentro de un mismo registro semiótico (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando el estudiante escribe la fórmula del área de un rectángulo como la suma de las áreas de los triángulos que lo componen, es decir, representa en el registro algebraico dos formas distintas de una misma expresión, lo que constituye una conexión de tipo representación equivalente.

Conexión matemática de tipo parte-todo

Esta tipología destaca la relación entre diferentes componentes o partes de conceptos matemáticos (Hatisaru et al., 2024). Se manifiesta cuando un sujeto establece relaciones lógicas entre conceptos matemáticos ya sea de generalización o de inclusión (Businskas, 2008; García-García & Dolores-Flores, 2021a). La primera relación ocurre cuando un concepto matemático es una generalización de otro, o bien, cuando un concepto matemático es un caso particular de otro y, la segunda relación, cuando un concepto matemático está incluido o cuando engloba a otro (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un estudiante reconoce que un triángulo equilátero es un caso particular de un triángulo isósceles, evidencia este tipo de conexión matemática.

Otro ejemplo se observa cuando un estudiante descompone un hexágono regular en partes más simples (triángulos equiláteros) cuando se le pide encontrar su área. Así, estará relacionando el cálculo del área del hexágono (todo) con el área de sus componentes (partes). Con ello, el estudiante estará evidenciando una comprensión del todo como una estructura compuesta por elementos con propiedades geométricas bien definidas.

Conexión matemática de tipo implicación

Esta conexión matemática se manifiesta cuando un concepto depende de otro de una manera lógica (Businskas, 2008), es decir, cuando se establece

una relación de la forma P⟹Q. En Hatisaru et al. (2024) a esta tipología se denomina "Si-Entonces", quienes explican que son conexiones derivadas de secuencias y relaciones lógicas, que permiten sacar conclusiones basadas en relaciones condicionales entre ideas matemáticas. Por ejemplo, se evidencia cuando un estudiante es capaz de establecer que, si dos polígonos son congruentes, entonces sus áreas son iguales. Este argumento revelaría una comprensión de la congruencia no solo como igualdad en forma y medida, sino también en sus consecuencias sobre propiedades métricas como el área. El razonamiento condicional en este contexto implica la comprensión de una relación lógica en la que el reconocimiento de la congruencia entre dos polígonos (P) conduce necesariamente, bajo el principio de conservación métrica, a la afirmación de igualdad de áreas (Q), siempre que la congruencia se cumpla plenamente.

Conexión matemática de tipo característica

Esta conexión se evidencia cuando se identifica propiedades o cualidades de los conceptos matemáticos que los hacen diferentes o similares de otros (Eli et al., 2013; García-García & Dolores-Flores, 2021a). En ese sentido, se centran en las características o propiedades esenciales de los conceptos matemáticos que permiten captar los aspectos fundamentales, características y atributos que definen estos conceptos (Hatisaru et al., 2024). De acuerdo con García-García (2024), esta conexión puede incluir la explicación verbal o escrita de ciertos elementos de una representación (ya sea algebraica, geométrica, gráfica, etc.), así como la identificación de características implícitas en definiciones, teoremas o procedimientos.

Un ejemplo de esta conexión se observa cuando un estudiante reconoce que el área de un polígono depende de características esenciales como la medida de sus lados o su apotema, y comprende que esta dependencia es una consecuencia directa de la estructura simétrica del polígono. Al identificar que el uso de la apotema no es arbitrario, sino que responde a una propiedad geométrica del polígono regular (la posibilidad de descomposición en triángulos isósceles congruentes), el estudiante articula las características definitorias del concepto de área en este contexto. Esta comprensión va más allá de la aplicación mecánica de una fórmula, ya que implica una apreciación de las propiedades que sustentan dicha fórmula, lo cual favorece una compresión más estructurada y significativa del conocimiento geométrico.

Conexión matemática de tipo significado

Esta conexión se manifiesta cuando el estudiante otorga sentido a un concepto matemático, es decir, lo que significa para él. Incluye aquellas en las que ofrece una definición que el estudiante ha construido para estos conceptos e incluso, cuando describe su contexto de uso (García-García &

Dolores-Flores, 2021a). Esta tipología también abarca respuestas en las que un individuo proporciona una definición formal de conceptos o teoremas matemáticos, considerando todas las características o propiedades matemáticas que puedan tener. A diferencia de la tipología anterior, en esta el estudiante es capaz de señalar todos los atributos, cualidades o propiedades, mientras que en el otro tipo el sujeto solo menciona algunos de estos.

Un ejemplo de esta conexión se observa cuando un estudiante define el área de un polígono como la medida de la superficie limitada por sus lados, cuantificada en unidades cuadradas, y calculada mediante una fórmula que depende del número de lados, la longitud de estos y la apotema en el caso de polígonos regulares. Esta formulación no solo incorpora una definición formal, sino que también refleja una comprensión del concepto como herramienta para cuantificar extensión, vinculada con propiedades geométricas específicas. Al integrar dimensiones semánticas (lo que significa el área), estructurales (cómo se calcula) y contextuales (cuándo y por qué se usa), el estudiante demuestra una conexión de tipo significado, lo cual evidencia un nivel avanzado de comprensión conceptual.

Conexión matemática de tipo inter-conceptual

Esta conexión se manifiesta cuando un estudiante establece una relación entre dos o más diferentes conceptos matemáticos (García-García, 2024) para resolver una tarea. Esta relación se construye porque los conceptos interconectados son indispensables para resolver ciertas tareas matemáticas. Las conexiones entre conceptos matemáticos son relevantes porque los estudiantes deben tener estas habilidades matemáticas previamente para alcanzar un mayor aprendizaje (Bahar et al., 2023).

Un ejemplo de esta conexión se presenta cuando el estudiante, para calcular el área de un triángulo equilátero donde solo se conoce el valor de los lados, aplica el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la altura y calcular así el área. Así, relaciona conceptos como área, altura y el teorema entre sí para resolver la tarea propuesta. El hecho de integrar estos conceptos en una secuencia lógica para dar solución al problema constituye evidencia de una conexión inter-conceptual, ya que el estudiante demuestra capacidad para coordinar e integrar distintos saberes en función de un objetivo matemático común.

Polígonos y su área

En el contexto de la geometría, se denomina polígono a una porción del plano delimitada por un conjunto finito de segmentos de rectas consecutivos, llamados lados del polígono. Estos segmentos se unen entre sí formando una figura cerrada, cuyos vértices corresponden a los puntos de intersección de los lados. Uno de los aspectos fundamentales en el estudio de los polígonos

es la medición de su superficie, conocida como área. Esta, según Wentworth y Smith (2003) se define como la medida de la superficie, expresada en unidades de superficie. Una unidad de superficie corresponde a la superficie de una figura tomada como referencia para medir otras superficies, comúnmente, se utiliza como unidad la superficie de un cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a la unidad de medida lineal.

En general, el cálculo o medición de áreas no se realiza mediante el conteo directo de cuadrados unitarios o sus partes que encajan en la figura cuya área se busca. En su lugar, se recurre a métodos indirectos, como la medición de ciertos elementos lineales de la figura (por ejemplo, base y altura) y la aplicación de procedimientos y fórmulas previamente establecidas. Asimismo, se pueden realizar razonamientos, propiedades geométricas e inferencias que conduzcan a deducir el área sin recurrir a procedimientos explícitos de medición.

Metodología

La presente es una investigación de naturaleza cualitativa que emplea el método de estudio de casos. Este método resulta pertinente en función al objetivo del estudio planteado. Esto porque permite investigar detalladamente una unidad social (un individuo, un grupo cultural, una institución, etc.), implicando la observación minuciosa y el análisis completo de un número limitado de sucesos o situaciones (Kothari, 2004). En particular, se emplea el estudio de caso intrínseco, puesto que busca un mejor entendimiento del caso en sí mismo y no persigue resolver un problema general (Stake, 2012).

En ese mismo sentido, la investigación posee un alcance descriptivo. Kothari (2004) considera que son aquellos estudios que se ocupan de describir las características de un individuo o de un grupo en particular. En línea con esta postura, Hernández (2014) indica que la meta del investigador en estas investigaciones consiste en describir fenómenos, situaciones, contextos y sucesos; es decir, detallar cómo son y se manifiestan.

Contexto y selección de los casos de estudio

El estudio se desarrolló en dos escuelas pertenecientes al nivel medio superior ubicadas al sur de México, ambas reconocidas como centros de calidad educativa, con procesos certificados y una gestión académica y administrativa respaldada por la normatividad institucional. Las dos instituciones cuentan con la infraestructura y planta académica suficiente para ofrecer una educación de calidad.

Para la selección de los casos de estudio se consideraron tres criterios, garantizando además que la identidad de los participantes quedaría en el anonimato: participación voluntaria, acceder a ser entrevistados y grabados,

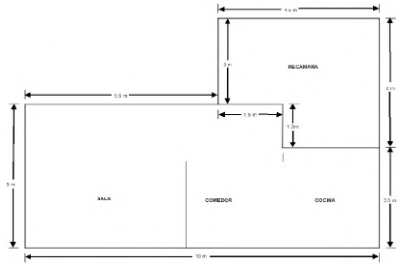
y haber cursado el recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático II que plantea el MCCEMS. Este último criterio aseguró que los estudiantes hubieran trabajado previamente el tema de área de polígonos. De esta manera, los casos de estudio elegidos fueron 5 estudiantes del segundo semestre. De ellos, cuatro son hombres y una es mujer, con edades de entre 16 y 17 años, así como con promedios de 9.0 a 9.9. De ahora en adelante se hará referencia a ellos como E1, E2, E3, E4 y E5.

Recolección de datos

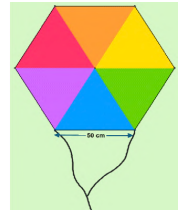
Para la recolección se datos se empleó la Entrevista Basada en Tareas (EBT). Esto porque este método permite centrar la atención directamente en los procesos (las conexiones matemáticas) de los casos de estudio al abordar tareas matemáticas, en lugar de sólo centrarse en los patrones de respuestas correctas e incorrectas de sus producciones. Para diseñar la EBT se consideraron los siguientes principios sugeridos en Goldin (2000): Plantear tareas que sean accesibles para los participantes, incluir tareas que incorporan ricas estructuras de representación, desarrollo de la entrevista descrita explícitamente y prever contingencias, elección previa del qué y cuánto grabar, diseño de la entrevista previendo posibilidades nuevas o imprevistas y, realización de una entrevista piloto.

Las tareas propuestas fueron algunas adaptadas de estudios previos (por ejemplo, Caviedes et al., 2019; Alfonso et al., 2016), mientras que otras fueron de autoría propia. Tras ser validadas por usuarios y expertos, las tareas seleccionadas para la recolección de datos fueron las siguientes:

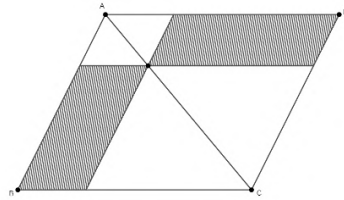
1. La figura muestra el plano de una casa. Todo el piso será cubierto de loseta, a excepción del piso de la recámara, el cual será cubierto con alfombra. Si el metro cuadrado de alfombra cuesta $170, ¿Cuánto se gastará en alfombra para cubrir por completo el piso de la recámara?



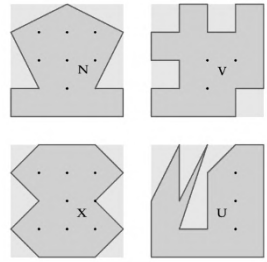
2. Kike participará en una competencia de papalotes y tiene en mente llevar el papalote que se ve en la imagen de al lado. En él, las varillas de madera que lo sostienen forman triángulos equiláteros. ¿Cuánto papel en total necesitará para hacer su papalote sin que le falte?



3. Por un punto de la diagonal del paralelogramo ABCD se trazan las paralelas a los lados de esta figura. ¿Qué relación hay entre las áreas de las superficies sombreadas? Justifica ampliamente tu respuesta.



4. Don Pánfilo tiene un terreno con forma cuadrada, cuyo lado mide 20 metros, y quiere sembrar cacahuate. Sin embargo, se dio cuenta que una zona no es cultivable porque es muy pedregosa. Si la zona cultivable corresponde a tres cuartos de la superficie total del terreno y construye una cerca en forma de polígono, decide cuáles de los siguientes dibujos podrían corresponder al terreno de don Pánfilo. Justifica tu respuesta.



Por otro lado, con el propósito de obtener la mayor cantidad de datos posibles de los casos de estudio, se formularon preguntas auxiliares mientras estos resolvían las tareas. Este proceso fue grabado en audio y video para su posterior análisis.

Análisis de datos

Los datos fueron analizados mediante el análisis temático, que permite identificar el significado de un conjunto de datos, además de examinar en profundidad un aspecto particular de un fenómeno (Braun & Clarke, 2012). Este método originalmente se divide en seis fases: Familiarizarse con los datos, Generación de códigos iniciales, Búsqueda de temas, Revisión de temas potenciales, Definir y nombrar temas, así como la Elaboración del

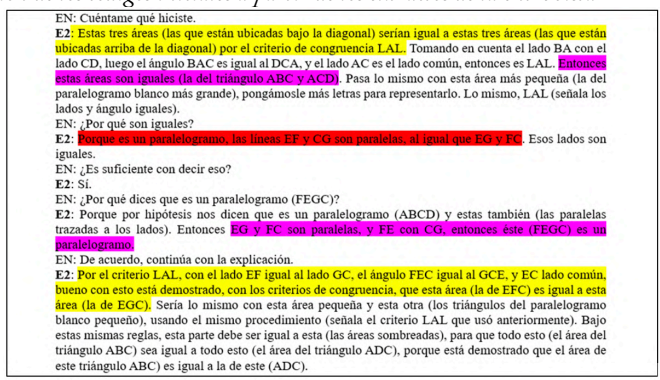
informe. Sin embargo, en esta investigación el análisis se realizó siguiendo una versión simplificada del procedimiento propuesto por García-García (2024) quien la adaptó a un estudio con un enfoque similar a este trabajo. Durante todo el proceso, se efectuó triangulación entre los investigadores para ganar confiablidad y validez de los resultados (Betrián-Villas et al., 2016). Las fases consideradas en el análisis fueron las siguientes:

Fase 1. Familiarización con los datos. Se transcribieron todos los argumentos y justificaciones ofrecidas por los casos de estudio en las producciones orales y escritas cuando resolvieron las tareas propuestas. Posteriormente, se efectuó una lectura exhaustiva de los datos, repitiendo las revisiones tantas veces como fue necesario para lograr una compresión detallada del lenguaje empleado por los casos de estudio.

Fase 2. Generación de códigos y temas iniciales. En esta fase, los temas se consideran como un tipo de conexión matemática. Para su desarrollo: (1) se llevó a cabo una revisión minuciosa de las producciones verbales y escritas de los casos de estudio, con el fin de identificar relaciones verdaderas (ver Figura 1) entre ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados, tanto dentro del ámbito matemático como en conexión con otras disciplinas o contextos de la vida cotidiana (García-García & Dolores-Flores, 2018); (2) estas relaciones verdaderas se categorizaron inicialmente como códigos abiertos, (3) luego, estos códigos fueron refinados y agrupados cuando compartían patrones de respuesta, mientras que aquellos que de forma individual contenían información relevante se conservaron por separado para responder a la pregunta de investigación; (4) finalmente, los códigos se clasificaron como tipos específicos de conexiones matemáticas, de acuerdo con el marco conceptual adoptado. Este proceso permitió identificar las primeras conexiones matemáticas evidenciadas por los casos de estudio al resolver las tareas propuestas (ver ejemplo en la Tabla 1).

Figura 1

Identificación de los códigos iniciales a partir de los extractos de la entrevista



EN: Cuéntame qué hiciste.
E2: Estas tres áreas (las que están ubicadas bajo la diagonal) serían igual a estas tres áreas (las que están ubicadas arriba de la diagonal) por el criterio de congruencia LAL. Tomando en cuenta el lado BA con el lado CD, luego el ángulo BAC es igual al DCA, y el lado AC es el lado común, entonces es LAL. Entonces estas áreas son iguales (la del triángulo ABC y ACD). Pasa lo mismo con esta área más pequeña (la del paralelogramo blanco más grande), pongámosle más letras para representarlo. Lo mismo, LAL (señala los lados y ángulo iguales).
EN: ¿Por qué son iguales?
E2: Porque es un paralelogramo, las líneas EF y CG son paralelas, al igual que EG y FC. Esos lados son iguales.
EN: ¿Es suficiente con decir eso?
E2: Sí.
EN: ¿Por qué dices que es un paralelogramo (FEGC)?
E2: Porque por hipótesis nos dicen que es un paralelogramo (ABCD) y estas también (las paralelas trazadas a los lados). Entonces EG y FC son paralelas, y FE con CG, entonces éste (FEGC) es un paralelogramo.
EN: De acuerdo, continúa con la explicación.
E2: Por el criterio LAL, con el lado EF igual al lado GC, el ángulo FEC igual al GCE, y EC lado común, bueno con esto está demostrado, con los criterios de congruencia, que esta área (la de EFC) es igual a esta área (la de EGC). Sería lo mismo con esta área pequeña y esta otra (los triángulos del paralelogramo blanco pequeño), usando el mismo procedimiento (señala el criterio LAL que usó anteriormente). Bajo estas mismas reglas, esta parte debe ser igual a esta (las áreas sombreadas), para que todo esto (el área del triángulo ABC) sea igual a todo esto (el área del triángulo ADC), porque está demostrado que el área de este triángulo ABC) es igual a la de este (ADC).

Nota. Los enunciados resaltados con un mismo color indica que tienen alguna característica en común.

Tabla 1
Identificación de los códigos y temas iniciales

Extracto	Código inicial	Temas
E2: …*dice que son triángulos equiláteros, todos sus lados son iguales…*	Los triángulos equiláteros son los que tienen todos sus lados iguales.	Conexión de significado
EN: *Esto es… ¿perímetro?* E2: *Sí es perímetro, sería la suma de todos los lados…*	El perímetro es la suma de todos los lados de la figura.	Conexión de significado
E2: *La apotema … es la distancia de la mitad de un lado al centro* [señala el vértice interior al hexágono de uno de los triángulos].	La apotema es la distancia entre el centro del hexágono y el centro de uno de sus lados.	Conexión de significado

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Fase 3. Revisión y definición de temas. En esta fase, se llevó a cabo una revisión de los temas iniciales identificados previamente, los cuales fueron contrastados con los códigos iniciales y las producciones de los estudiantes. A medida que se consolidó la comprensión de los patrones de significado expresados en sus procedimientos y argumentaciones, fue posible reconocer de manera objetiva, gracias a la triangulación entre investigadores, las conexiones matemáticas que lograron establecer los casos de estudio. Las definiciones de los temas son las que se asumieron en el marco conceptual.

Fase 4. Elaboración del informe. En esta fase se comenzó la preparación del informe de investigación. Como parte de su elaboración, se tomó en cuenta el marco conceptual, centrando el análisis exclusivamente en la caracterización de las conexiones matemáticas establecidas por los casos de estudio. Para lograrlo, se decidió presentar ejemplos ilustrativos (evidencias escritas o verbales) que representaran cada conexión matemática identificada en los casos de estudio. Estos fueron seleccionados por su representatividad y por mostrar con mayor claridad las conexiones matemáticas caracterizadas, esto también explica la distribución por tareas consideradas en la sección de resultados. Dado que el objetivo del estudio se enfocó únicamente en las conexiones matemáticas evidenciadas por los participantes, se decidió por no reportar las dificultades y errores que surgieron en las producciones, ya que no formaban parte del objetivo de la investigación.

Resultados

Los hallazgos permitieron identificar una variedad de conexiones matemáticas evidenciadas en los casos de estudio (Tabla 2). Estas se alinean con las previstas en el marco conceptual.

Los resultados de la Tabla 2 se detallan a continuación, explicando cada tipología de conexión matemática.

Tabla 2

Conexiones matemáticas identificadas en las producciones escritas y verbales de los casos de estudio

Caso de estudio	Tarea	Conexiones matemáticas identificadas
E1	1	Representaciones diferentes, procedimental, parte-todo y característica
	2	Representaciones diferentes, característica, implicación, inter-conceptual y parte-todo
	3	Implicación e inter-conceptual,
	4	Procedimental
E2	1	Representaciones diferentes, procedimental y parte-todo
	2	Representaciones diferentes, procedimental, significado, parte-todo, implicación e inter-conceptual
	3	Representaciones diferentes, procedimental, implicación y significado
	4	Representaciones diferentes, procedimental y parte-todo
E3	1	Representaciones diferentes, procedimental y parte-todo
	2	Representaciones diferentes, procedimental, inter-conceptual, significado, parte-todo y característica
	3	Representaciones diferentes, procedimental, implicación y significado
	4	Representaciones diferentes, procedimental y parte-todo
E4	1	Significado
	2	Procedimental e inter-conceptual
	3	Significado
	4	Implicación
E5	1	Representaciones diferentes y parte-todo
	2	Representaciones diferentes, procedimental, característica e inter-conceptual
	3	Representaciones diferentes, procedimental, implicación, característica y parte-todo
	4	Representaciones diferentes y procedimental

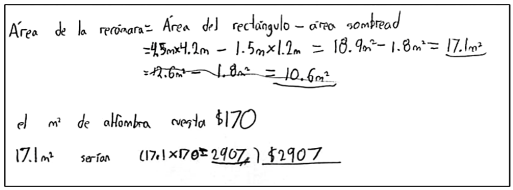
Nota. Fuente: Elaboración propia.

Conexión matemática de tipo procedimental

Esta conexión matemática mostró variaciones entre los casos de estudio. E4 la evidenció solo en la tarea 2; E1 en las tareas 1 y 4; E2 y E3 la mostraron en las cuatro tareas; y E5 en las tareas 2, 3 y 4. Un ejemplo se identifica en la tarea 1, donde E1 calculó el área de la recámara restando el área sombreada al área total del rectángulo. Para ello, aplicó implícitamente la fórmula del área de un rectángulo, determinó ambas áreas y luego realizó la resta para obtener el resultado (Figura 2).

Figura 2

Procedimiento empleado por E1 para encontrar el área de la recámara

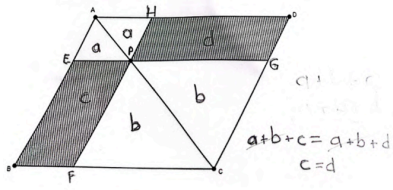


Conexión matemática de tipo representaciones diferentes

Esta conexión matemática se identificó en distintas tareas según el caso de estudio. E1 la evidenció en las tareas 1 y 2; E2, E3 y E5, en las cuatro tareas; y E4 no la utilizó. Por ejemplo, en la tarea 3, cuando E5, tras establecer la igualdad entre los triángulos ABC y ACD, afirmó que las áreas de los polígonos representados en la figura dada eran iguales. Al respecto, escribió "$a + b + c = a + b + d$", y, a partir de esta igualdad, aplicó propiedades algebraicas para resolver la tarea (Figura 3). En este caso, E5 transitó de un registro geométrico a uno algebraico y, operó con dos representaciones distintas dentro de este último registro para hacer referencia al área solicitada.

Figura 3

Representación geométrica y algebraica utilizada por E5 al resolver la tarea 3



Conexión matemática de tipo parte-todo

Esta conexión matemática emergió con mayor frecuencia en ciertas tareas y con distintos grados de profundidad según el caso de estudio. E2 y E3 la evidenciaron en las tareas 1, 2 y 4; E1 en las tareas 1 y 2; y E5 en las tareas 1 y 3. E4 no la evidenció en ninguna tarea. Un ejemplo se presenta en la tarea 2, cuando E3 argumentó que el área de cualquier triángulo (caso general) se calcula con la fórmula $A = \frac{bh}{2}$, y que, en un triángulo particular con base 1 y altura 3, el área es $\frac{3}{2}$. Esto se identifica en el siguiente extracto:

> E3: […] *Luego usando la fórmula de base por altura sobre dos* ($\frac{bh}{2}$) *en este triángulo de base 1 y altura 3, es igual a* $\frac{3}{2}$.

A partir del extracto, se observa que E3 vinculó un caso general (la fórmula para cualquier triángulo) con un caso particular (un triángulo específico de base 1 y altura 3). Esta relación entre lo general y lo particular caracteriza la conexión matemática de tipo parte-todo.

Conexión matemática de tipo implicación

Esta conexión matemática se evidenció en distintos momentos, dependiendo del caso de estudio. E1 y E2 la evidenciaron en las tareas 2 y 3; E3 y E5 en la tarea 3; y E4, solo en la tarea 4. Por ejemplo, en la tarea 4, E4 afirmó que un polígono es cuadrado, implica que sus 4 lados son iguales. Esto se identifica en el siguiente extracto:

> E4: […] *es de forma cuadrada* [refiriéndose al terreno descrito en la tarea 4], *entonces todos sus lados son iguales* […]

Otro ejemplo aparece con E1 en la tarea 3, al señalar que, si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces los ángulos de los vértices opuestos son iguales. En ambos casos, se establece una relación condicional entre una propiedad general y una consecuencia lógica, lo que caracteriza esta tipología de conexión.

Conexión matemática de tipo característica

Esta conexión matemática no se manifestó de forma uniforme entre los casos de estudio ni en todas las tareas. E1 la evidenció en las tareas 1 y 2; E5 en las tareas 2 y 3; y E3, solo en la tarea 2. E2 y E4 no la evidenciaron. Un ejemplo se presenta con E5 en la tarea 2, cuando afirmó que cualquier hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros iguales. Esto se identifica en el siguiente extracto:

> E5: […] *es un hexágono y que está formado por triángulos equiláteros, bueno eso es una característica de los hexágonos*

Otro caso es el de E3 en la tarea 2. Al respecto, E3 identificó una característica fundamental de los triángulos rectángulos al asociarlos con un ángulo de 90°, condición necesaria para aplicar el Teorema de Pitágoras. Esto se identifica en el siguiente extracto:

> Entrevistador: *Este Teorema ¿se puede aplicar a cualquier triángulo?*
> E3: *Eh no, no se puede aplicar para todos*
> Entrevistador: *¿Qué características tienen esos triángulos donde sí puedes aplicarlo?*
> E3: *Me parece que tienen un ángulo de 90°*
> Entrevistador: *¿Cómo se llaman?*
> E3: *No, la verdad no sé*

Conexión matemática de tipo significado

Esta conexión matemática se caracteriza por activar los conocimientos conceptuales que permiten atribuir sentido a un término o propiedad matemática, más allá de su uso mecánico. Su manifestación varió entre los casos de estudio, lo que refleja distintos niveles de apropiación conceptual. En particular, E2 y E3 evidenciaron esta conexión en las tareas 2 y 3, respectivamente, mientras que E4 lo hizo en la tarea 3. En contraste, E1 y E5 no mostraron indicios claros de establecer esta conexión matemática. Por ejemplo, en la tarea 2, E2 definió el perímetro de un polígono como la

suma de las magnitudes de todos los lados del polígono. Esta respuesta revela una comprensión del significado del concepto, más que un uso mecánico del mismo. El siguiente fragmento lo ilustra:

Entrevistador: *Esto es ¿perímetro?*

E2: *Sí es perímetro, sería la suma de todos los lados*

Otro ejemplo aparece con E4 en la tarea 3, al definir a los triángulos equiláteros como aquellos triángulos que tienen sus tres lados y sus tres ángulos iguales.

Conexión matemática de tipo inter-conceptual

Esta conexión matemática se define por la articulación de dos o más conceptos matemáticos distintos, con el fin de generar una comprensión integrada que contribuya a la resolución de una tarea. Se identificó en las producciones de E2, E3, E4 y E5 durante la resolución de la tarea 2, mientras que E1 la evidenció en las tareas 2 y 3. Un ejemplo se observa en la tarea 2 con E1, quien señaló que es posible aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el área de cualquier triángulo equilátero. Este razonamiento se basa en descomponer el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos, calcular la altura con el teorema y luego usarla para hallar el área. El siguiente fragmento lo ilustra:

Entrevistador: *¿Por qué ahí puedes usar el Teorema de Pitágoras?*

E1: *Porque aquí (dentro de un triángulo equilátero) se forma un triángulo rectángulo con la altura (del triángulo equilátero) que forma ángulo de 90° respecto de este lado del triángulo. Y el teorema de Pitágoras se puede utilizar en cualquier triángulo rectángulo*

Aquí, E1 estableció una relación verdadera entre el Teorema de Pitágoras y cálculo del área, ambos necesarios para resolver la tarea 2, que implicaba encontrar implícitamente encontrar el área de un hexágono. Otro ejemplo aparece en la tarea 3 cuando E1 utilizó el Teorema de Tales para demostrar la congruencia (caso particular de la semejanza) de triángulos que se forman entre los segmentos de rectas. Esto se identifica en el siguiente extracto:

Entrevistador: *A ver, ¿Qué fue lo que hiciste?*

E1: *Se trazó una paralela por este punto ¿no?, por teorema de Tales este triángulo es semejante al ABC* […]

Entrevistador: *¿Qué dice el teorema de Tales?*

E1: *Dadas dos rectas cualesquiera, si trazas rectas paralelas* [que intersequen a las rectas dadas] *se forman triángulos semejantes*

Entrevistador: *Eso que dices ¿para qué lo utilizaste?*

E1: *Para demostrar que estos ángulos son iguales* [fundamental para la resolución de la tarea 3]

En este caso, E1 articuló el conocimiento sobre semejanza de triángulos con propiedades angulares, a partir del Teorema de Tales, para sustentar una argumentación válida y con ello resolver consistentemente la tarea 3.

Discusión y conclusiones

La pregunta que orientó esta investigación fue ¿Qué conexiones matemáticas evidencian estudiantes mexicanos de nivel medio superior al resolver tareas que involucran el área de polígonos regulares? Los resultados mostraron que los casos de estudio lograron establecer las conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual siendo evidenciadas con mayor frecuencia las de tipo: procedimental, implicación e inter-conceptual, seguidas de las conexiones de tipo: parte-todo y representaciones diferentes (Tabla 3). Estas conexiones matemáticas han sido reportadas previamente cuando estudiantes resuelven tareas asociadas a diferentes conceptos matemáticos (por ejemplo, Campo-Meneses & García-García, 2020; García-García & Dolores-Flores, 2018, 2021) y en las producciones de profesores (por ejemplo, Businskas, 2008; Eli et al., 2013; Evitts, 2004; Rodríguez-Nieto et al., 2022).

Tabla 3

Conexiones matemáticas evidenciadas por los casos de estudio

Conexiones matemáticas evidenciadas	Caso de estudio				
	E1	E2	E3	E4	E5
Representaciones diferentes	•	•	•		•
Procedimental	•	•	•	•	•
Característica	•		•		•
Parte-todo	•	•	•		•
Implicación	•	•	•	•	•
Significado		•	•	•	
Inter-conceptual	•	•	•	•	•

Nota. Fuente: Elaboración propia.

En general, se observó que las conexiones de tipo procedimental fueron las más recurrentes en las tareas propuestas, lo que sugiere que los casos de estudio dependieron principalmente de la aplicación de algoritmos y fórmulas para resolver problemas matemáticos. Este hallazgo es consistente con los resultados de estudios previos (por ejemplo, García-García y Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Campo-Meneses & García-García, 2020), que han señalado que predomina el uso de procedimientos mecanizados en la resolución de problemas. Sin embargo, también se identificaron conexiones como de representaciones diferentes, parte-todo, de característica y de significado. Esto indica que algunos estudiantes logran establecer relaciones entre conceptos matemáticos más allá del uso de procedimientos, lo que evidencia un pensamiento matemático más estructurado.

Esta investigación evidenció que las conexiones se establecieron en diferentes momentos variaron según la tarea. En particular, se observó que se establecieron más conexiones matemáticas en las tareas 2 y 3, que en las tareas 1 y 4. El predominio de conexiones matemáticas en las primeras tareas puede atribuirse a su diseño, ya que fomentaban la exploración y el uso de conocimientos más amplios. Este enfoque permitió a los casos de estudio establecer relaciones entre diversos conceptos matemáticos (como el Teorema de Pitágoras, el Teorema de Tales, paralelogramos, así como las representaciones geométricas y algebraicas de estos) y abordar la solución de la tarea más allá de la aplicación mecánica de procedimientos previamente establecidos. En contraste, las tareas 1 y 4 no representaron un desafío significativo para los casos de estudio una vez que identificaron el procedimiento necesario para su resolución.

En cuanto al análisis individual, destaca el caso de E3, quien evidenció los siete tipos de conexiones matemáticas, lo que sugiere que su estructura cognitiva es capaz de establecer vínculos diversos entre conceptos matemáticos. Por otro lado, E4 evidenció menos conexiones, particularmente de los tipos representaciones diferentes, característica y parte-todo. Este resultado sugiere que E4 podría enfrentar desafíos en la resolución de tareas que requieren relacionar dos o más conceptos entre sí, dependiendo en gran medida de procedimientos mecánicos sin establecer conexiones significativas entre conceptos. La ausencia de conexiones matemáticas como parte-todo y de representaciones diferentes sugiere que E4 no tiende a descomponer ni reconstruir las figuras geométricas para vincular propiedades, lo que puede ser un indicador de un bajo rendimiento en tareas de mayor complejidad.

Los resultados evidenciaron que los casos de estudio presentan dificultades al trabajar con tareas que involucran el área de polígonos. Algunos de ellos no mostraron habilidad para vincular diferentes representaciones matemáticas del concepto, considerando las representaciones gráficas, algebraicas o geométricas, restringiendo su trabajo a un único enfoque de resolución. Esto se refleja en la baja aparición de conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes, lo que podría reflejar limitaciones en la capacidad de interpretar y traducir información entre distintos registros. Esta situación resulta relevante, pues Weinberg (2001) expresó que, la profundidad de la comprensión conceptual que un estudiante tiene sobre un concepto matemático particular es directamente proporcional a su capacidad para traducir y transformar las representaciones del concepto a través y dentro de una amplia variedad de sistemas de representación.

E4 mostró dificultades para identificar propiedades o características centrales de un objeto matemático, como las propiedades de un triángulo equilátero, necesarias para resolver las tareas propuestas. En ese sentido, el desempeño de E4 resalta la importancia de diseñar tareas que promuevan el

análisis de propiedades, la identificación de características de objetos matemáticos y la aplicación de teoremas asociados. Del mismo modo, destaca la necesidad de incluir actividades que favorezcan el uso de múltiples representaciones y promuevan una comprensión amplia de los conceptos, pues Duval (2006) considera que los sistemas de representaciones son fundamentales para el aprendizaje conceptual, pues influyen directamente en lo que el estudiante logra aprender. Así mismo, el uso de diferentes representaciones es una parte importante para hacer conexiones (Businskas, 2008; Mhlolo, 2012; Mhlolo et al., 2012; NCTM, 2014) y estas resultan importantes para lograr la comprensión matemática (Cawley & Foley, 2002; Eli et al., 2013; Gainsburg, 2008; Glass, 2002; García-García, 2024).

El caso de E4 invita a reflexionar sobre las diferencias individuales en la formación matemática previa y las posibles barreras cognitivas que limitan el desempeño del estudiante. Los casos de E1, E2 y E5 presentaron tendencias semejantes entre sí, lo que sugiere que, si bien estos no parecen tener definiciones sólidas de algunos conceptos matemáticos involucrados, logran apoyarse en conocimientos previos para resolver de manera consistente la mayoría de las tareas propuestas. Esto coincide con lo declarado por García-García y Dolores-Flores (2018) quienes sostienen que ofrecer una respuesta correcta, no implica necesariamente establecer conexiones matemáticas.

Aunque el análisis mostró que los casos de estudio establecieron conexiones matemáticas en todas las tareas, se evidenció que algunos de ellos no lograron completarlas de manera íntegra. Lo anterior coincide con los resultados de Maphutha et al. (2023). Este hallazgo sugiero que los casos de estudio tienen dificultades para resolver de forma consistente una tarea cuando no logran establecer suficientes conexiones matemáticas. Una de las probables causas a la que se le puede atribuir esta dificultad es la falta de conocimientos previos de los casos de estudio para resolver problemas geométricos. Estos resultados son interesantes porque los casos de estudio son alumnos con un promedio alto lo que sugiere que en alumnos con un rendimiento regular y bajo las conexiones matemáticas utilizadas podrían resultar menos elaboradas.

La falta de descomposición de polígonos en figuras más simples para analizar relaciones fundamentales, como las áreas de figuras compuestas, evidencia desafíos adicionales. Esto sugiere que se debe guiar a los estudiantes para que establezcan vínculos entre lo general y los casos particulares (Mhlolo, 2012). Asimismo, se evidenciaron dificultades en la identificación de características clave de los polígonos, lo que llevó a errores en la interpretación y aplicación de fórmulas. Otro hallazgo relevante fue la tendencia a emplear procedimientos rutinarios sin cuestionar su validez o sustento matemático, lo que limita el desarrollo de un pensamiento matemático más reflexivo e interconectado.

Caviedes et al. (2019; 2022) reportaron que, una de las causas de la dificultad al trabajar con tareas que involucran el área de polígonos es la tendencia de los estudiantes a usar la fórmula del área de memoria y asociar el concepto del área con el uso de fórmulas para su cálculo. Estos hallazgos resaltan la importancia de diseñar estrategias de enseñanza que fomenten la generación de conexiones matemáticas más allá del simple uso de fórmulas. Actividades que impliquen la conversión entre diferentes representaciones y la aplicación de principios matemáticos en contextos diversos podrían mejorar la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones entre conceptos matemáticos.

Los resultados de este estudio permitieron caracterizar las conexiones matemáticas que emergen en la resolución de tareas relacionadas con el área de polígonos. No obstante, aunque el estudio aporta evidencia de lo que hacen los estudiantes al resolver este tipo de tareas, presenta ciertas limitaciones, entre ellas, el tamaño reducido de la muestra y el enfoque en un contexto educativo específico (las dos escuelas de nivel medio superior), lo que restringe la posibilidad de hacer una generalización de los resultados.

Asimismo, los resultados sugieren que el enfoque actual en la enseñanza del área de polígonos en nivel medio superior podría enriquecerse mediante una mayor integración de estrategias que promuevan establecer conexiones matemáticas. En ese mismo sentido, los hallazgos de esta investigación sugieren que la formación docente debe fomentar una comprensión relacional del conocimiento matemático, donde los futuros profesores de matemáticas aprendan a identificar, promover y valorar distintas tipologías de conexiones matemáticas en el aula.

Esto último implica diseñar tareas que estimulen la articulación de conceptos, representaciones y significados, así como desarrollar habilidades diagnósticas para interpretar las producciones de los estudiantes más allá del acierto o error. Asimismo, se destaca la importancia de favorecer una enseñanza centrada en el significado de los conceptos trabajados y no solo en el procedimiento, mediante un enfoque reflexivo que reconozca el valor didáctico de las conexiones matemáticas en la comprensión profunda de los contenidos. Esto se podría lograr si se diseñan tareas que requieran relacionar conceptos geométricos y algebraicos empleando diferentes representaciones lo que fortalecería el razonamiento matemático y la comprensión del área de polígonos en los estudiantes de nivel medio superior. Asimismo, la capacitación del maestro en servicio para promover el establecimiento de conexiones matemáticas en el aula podría contribuir a la mejora del aprendizaje.

En conclusión, las conexiones matemáticas identificadas en los casos de estudio, así como las dificultades que experimentaron otros para su establecimiento, destacan la necesidad de replantear las estrategias didácticas vigentes en la enseñanza de la geometría y proponer nuevas que favorezcan

la construcción de conexiones matemáticas tal como se demanda actualmente en el currículum mexicano. Por ello, se recomienda en futuras investigaciones ampliar la muestra, incluir una mayor variedad de contextos educativos y proponer diseños para el aula basados en el desarrollo de conexiones matemáticas para evaluar su impacto en el aprendizaje de conceptos matemáticos tales como el área de polígonos. Esto podría ser fundamental para la mejora de la comprensión de los estudiantes.

Referencias

Alfonso, F., Benítez, N., Peralta, B.E., Ramírez, K. Y., & Restrepo, A. M. (2016). Cálculo de área de polígonos por el método de descomposición y recomposición. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 2* (pp. 13–75). Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes.

Bahar, R., Munadi, S., & Rosnawati, R. (2023). The Brainstorming Method on Pesantren Students' Mathematical Connection and Metacognition Skills. *Pegem Journal of Education and Instruction, 13*(3), 228–238.

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematics connections to the real-life. P*rocedia Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1402–1407. https://doi.org/b9rb5g

Betrián-Villas, E., Galitó-Gispert, N., García-Merino, N., Monclús, G. J., & Macarulla-Garcia, M. (2016). La Triangulación Múltiple como Estrategia Metodológica. REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia Y Cambio En Educación, 11(4). https://doi.org/10.15366/reice2013.11.4.001

Bingölbali, E., & Coşkun, M. (2016). A proposed conceptual framework for enhancing the use of making connections skill in mathematics teaching. *Education and Science, 41*(183), 233–249. https://doi.org/10.15390/EB.2016.4764

Businskas, A. (2008). *Conversations About Connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral no publicada]. Simon Fraser University.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Eds), *APA handbook of research methods in psychology, Vol. 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57–71). American Psychological Association.

Campo-Meneses, K., & García-García, J. (2020). Exploring mathematical connections associated with the exponential and logarithmic function in Colombian university students. *Educación Matemática, 32*(3), 209–240.

Caviedes, S., de Gamboa, G., & Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis, 15*(1), 69–87. https://doi.org/10.21676/23897856.2984

Caviedes, S., de Gamboa, G., & Badillo, E. (2022). Conocimiento movilizado por estudiantes para maestro, al comparar áreas de figuras 2D. *Uniciencia, 36*(1), 1–20. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.41

Cawley, J., & Foley, T. (2002). Connecting math and science for all students. *Teaching Exceptional Children, 34*(4), 14–19. https://doi.org/qbfp

Cruz-Acevedo, A. A., & García-García, J. (2023). Conexiones matemáticas promovidas en los libros de texto del telebachillerato sobre el concepto de pendiente. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 14*, e1825. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1825

D'Amore, B., & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 39–68.

Dogan, H., Shear, E., Contreras, A.F.G., & Hoffman, L. (2022). Linear independence from a perspective of connections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(1), 190–205.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics, 113*(3), 120–134. https://doi.org/qbfq

Evitts, T. (2004). I*nvestigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* [Tesis doctoral no publicada]. Pennsylvania State University College of Education.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 199–219. https://doi.org/d6fkm8

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. Números, 100, 129–133.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227–252.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal, 33*,1–22. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(2), 912–936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

García-García, J., Hernández-Yañez, M. E., & Rivera López, M. I. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 13*, 1–20. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v13i0.1485

García-García, J. (2024). Mathematical Understanding Based on the Mathematical Connections Made by Mexican High School Students Regarding Linear Equations and Functions. *The Mathematics Enthusiast, 21*(3), 673–717.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En: A. E. Kelly, & R. A. Lesh, (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Glass, B. (2002). Students connecting mathematical ideas: possibilities in a liberal arts mathematics class. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*, 75–85. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00104-9

Hatisaru, V., Stacey, K., & Star, J. (2024). Mathematical Connections in Preservice Secondary Mathematics Teachers' Solution Strategies to Algebra Problems. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 25,* 33–55.

Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill.

Kothari, C. R. (2004). Research Methodology: *Methods and Techniques.* New Age International.

Koestler, C., Felton, M. D., Bieda, K. N., & Otten, S. (2013). *Connecting the NCTM Process Standards and the CCSSM Practices*. National Council of Teachers of Mathematics.

Kospentaris, G., Spyrou, P. & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105–127.

Maphutha, K., Maoto, S., & Mutodi, P. (2023). Exploring grade 11 learners' mathematical connections when solving two-dimensional trigonometric problems in an activity-based learning environment. *Journal on Mathematics Education, 14*(2), 293–310. https://doi.org/10.22342/jme.v14i2.pp293-310

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in MST Education, 16*(2), 49–64

Mhlolo, M. K, Venkat, H., & Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras, 33*(1), 1–9.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* NCTM.

Novo, M., Berciano, A., & Alsina, A. (2019). Conexiones matemáticas de tipo conceptual en niños de 4 años. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 8*(2), 166–192. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3938

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., Font, V., & Morales-Carballo, A. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(6), 1231–1256. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior.* SEP. https://bit.ly/4hnA65w

Secretaría de Educación Pública (2023). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático II.* SEP.

Stake, R. E. (2012). Estudio de casos cualitativos. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Coords.), *Las estrategias de investigación cualitativa: Manual de investigación cualitativa* (Vol. 3, pp. 154–197). Gedisa.

Vargas-Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática, 25*,57–80.

Weinberg, S. L. (2001). *Is there a connection between fractions and division? Students' inconsistent responses.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Wentworth, J., & Smith, D. E. (2003). *Geometría plana y del espacio.* Editorial Porrúa.

Concepciones alternativas sobre el concepto de ángulo en estudiantes de nivel medio superior

Guadalupe Sánchez-Gómez [1]
Gerardo Salgado-Beltrán [2]
Javier García-García [3]

Resumen

Este capítulo presenta los resultados de una investigación cuyo objetivo fue identificar las concepciones alternativas sobre el concepto de ángulo en estudiantes de Nivel Medio Superior de una zona rural en el estado de Guerrero, México. Para la recolección de datos, se aplicó una Entrevista Basada en Tareas a 20 estudiantes, y se empleó un análisis temático para su procesamiento. Entre las concepciones alternativas encontradas, destacaron interpretaciones del ángulo como área, el signo del ángulo determinado por la dirección de sus lados, la medida del ángulo como la longitud del arco angular, la medida del ángulo en función de la longitud de sus lados y el ángulo interpretado como una distancia. Estos hallazgos revelan la diversidad de formas en que los estudiantes conciben al ángulo, lo que puede afectar significativamente el aprendizaje de otros conceptos matemáticos. Estos resultados proponen reflexionar sobre futuras investigaciones para favorecer una compresión más profunda de ángulo.

Palabras clave

Concepciones alternativas, ángulo, entrevista basadas en tareas, estudiantes, zona rural

[1] 23500994@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[2] 14251@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[3] jagarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Sánchez-Gómez, G., Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2025). Concepciones alternativas sobre el concepto de ángulo en estudiantes de nivel medio superior. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 93–110). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-04

Introducción

El concepto de ángulo es fundamental en el currículo de matemáticas, tanto en México como en otros países. Se introduce desde los primeros años de la educación primaria y se consolida en la secundaria (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Rotaeche & Montiel, 2017; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2023). Su estudio resulta importante para que los estudiantes analicen su entorno espacial y comprendan conceptos matemáticos más complejos (Pachuca & Zubieta, 2020; Agudelo y Planas, 2022). A pesar de su relevancia, la naturaleza multifacética del concepto de ángulo representa un reto relevante para los estudiantes (Kaur, 2020). Investigaciones previas han señalado que la enseñanza-aprendizaje del concepto de ángulo es limitado debido a que predomina un enfoque procedimental y memorístico, lo que restringe el desarrollo de su comprensión (Biber et al., 2013; Díaz & Kú, 2017; Itzcovich, 2005).

Aunado a lo anterior, el concepto de ángulo está relacionado con diversas situaciones de la vida cotidiana, razón por la cual es un elemento clave del pensamiento matemático (Pachuca & Zubieta, 2020; Torres y Sánchez, 2023). Sin embargo, en el ámbito escolar, suele abordarse de manera aislada y descontextualizada, lo que dificulta que los estudiantes comprendan sus propiedades y aplicaciones (Agudelo & Planas, 2022; Díaz & Kú, 2017). Además, las definiciones y explicaciones presentes en los libros de texto tienden a ser ambiguas o se centran exclusivamente en una concepción estática del ángulo (Alyami, 2023; Özen-Ünal & Ürün, 2021).

En complemento a lo anterior, las definiciones del concepto de ángulo suelen clasificarse en dos categorías principales, estática y dinámica. Cada una de estas categorías aborda situaciones distintas y presenta sus propias limitaciones, lo que dificulta su integración en una única definición (Bütüner & Filiz, 2017). Esta complejidad puede llevar a los estudiantes desarrollen concepciones alternativas acerca del concepto ángulo (Bütüner & Filiz, 2017; Agudelo & Planas, 2022). Entre las concepciones alternativas más comunes se encuentran ideas como que un ángulo se forma por la intersección de dos arcos o por la intersección de un rayo con un arco. Además, los estudiantes pueden asociar el tamaño de los ángulos con elementos como la longitud de sus lados, la longitud del arco comprendido entre ellos o incluso el área delimitada por un arco y sus lados (Bütüner & Filiz, 2017; Tanguay & Venant, 2016). Sin embargo, es probable que existan otras concepciones alternativas aún no documentadas, las cuales podrían influir de forma negativa en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y en su comprensión integral del concepto de ángulo. De ahí la relevancia de la presente investigación. El panorama anterior muestra que los estudiantes enfrentan dificultades para comprender el concepto de ángulo y su medida

desde los niveles básicos de educación (Alyami, 2023). Aunque se espera que esta problemática disminuya en niveles superiores, un estudio reciente realizado por Pachuca y Zubieta (2020) con estudiantes universitarios de Matemáticas y Física en México evidenció que muchos aún definen el ángulo como la abertura entre dos rayos o como una medida específica. Esto indica que, incluso en la educación superior, persisten dificultades significativas en torno al concepto de ángulo.

No obstante, los estudios previos sobre el concepto de ángulo se han llevado a cabo principalmente con estudiantes de zonas urbanas, mientras que esta investigación se enfoca en alumnos de una región rural en situación de vulnerabilidad. Según los resultados de la prueba Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [PLANEA] 2017, los estudiantes de áreas rurales en México obtuvieron puntajes más bajos en matemáticas en comparación con aquellos de zonas urbanas (PLANEA, 2018). Esta diferencia se atribuye a las deficiencias del sistema educativo, que contribuyen a acentuar el rezago en estas comunidades (Juárez & Rodríguez, 2016). Además, estas condiciones están relacionadas con los altos índices de deserción universitaria (López et al., 2014).

Según García-García (2014), en las zonas rurales, la enseñanza de las matemáticas suele desarrollarse a través de situaciones alejadas de la realidad cultural de los estudiantes, ya que se basa en un currículo nacional estandarizado. Además, el libro de texto es la herramienta principal utilizada en este proceso (López & Tinajero, 2011). Estos materiales, distribuidos por las autoridades educativas, presentan problemas matemáticos que no están conectados con la vida cotidiana de los estudiantes, lo cual impacta de forma negativa en su desempeño académico (Blanco & Blanco, 2009; García-García, 2014).

Por otro lado, Chhabra y Baveja (2012) destacan la importancia de comprender el pensamiento de los estudiantes, ya que sus concepciones influyen directamente en la forma en que aprenden (Lucariello et al., 2014). Esto ha llevado a que el estudio de las concepciones se convierta en un campo de investigación relevante. En este contexto, se han llevado a cabo estudios que analizan concepciones alternativas en diversos campos del conocimiento (An & Wu, 2012; Lucariello et al., 2014; Denbel, 2014; Kaplan et al., 2015; Serhan, 2015). Sin embargo, hasta ahora, no se ha investigado específicamente el concepto de ángulo en estudiantes de Nivel Medio Superior provenientes de zonas rurales.

Por las razones previas, el estudio de las concepciones alternativas es de gran relevancia, ya que muchas de estas son difíciles de modificar y pueden persistir incluso después de una instrucción cuidadosamente planificada (Chi et al., 2012; Denbel, 2014; Bostan, 2016). Por ello, identificar las concepciones alternativas de los estudiantes es un paso esencial para diseñar

estrategias de enseñanza que promuevan una comprensión más profunda del concepto de ángulo. En este contexto, la presente investigación busca responder a la pregunta: *¿Qué concepciones alternativas presentan los estudiantes de 12° grado de una zona rural al resolver tareas relacionadas con el concepto de ángulo?*

Marco conceptual

Concepciones alternativas

Thompson (1992) define las concepciones como un conjunto de creencias, teorías, significados y explicaciones que los estudiantes desarrollan respecto a las matemáticas. Estas concepciones, al diferir de los significados matemáticos aceptados convencionalmente, se denominan concepciones alternativas (Confrey, 1990; Yağbasan & Gülçiçek, 2003). Estas ideas representan formas distintas de comprender una tarea (Mevarech & Kramarsky, 1997), manifestándose de manera escrita o verbal como reflejo del pensamiento individual. Muchas tienen origen en el contexto escolar (Dolores, 2004) y se evidencian cuando las creencias de los alumnos contrastan con los conceptos aceptados socialmente (Kastberg, 2002). Estas concepciones suelen ser contradictorias o inconsistentes con las nociones científicas establecidas (Narjaikaewa, 2013; Salgado-Beltrán & García-García, 2024).

Las concepciones alternativas no son simples ideas aisladas, constituyen esquemas conceptuales integrados y coherentes que se desarrollan en la cognición de los estudiantes. Estos esquemas funcionan como filtros y catalizadores que influyen directamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Confrey, 1990; Lucariello et al., 2014). Por esta razón, es pertinente identificar estas concepciones, analizar sus orígenes y comprender los factores que favorecen su formación en los estudiantes (García, 2018).

Según Fujii (2020), las concepciones alternativas emergen cuando las ideas que los estudiantes tienen sobre las matemáticas entran en conflicto con los significados aceptados y establecidos en la disciplina. Por su parte, García (2018) las define como conocimientos que son inconsistentes con los conceptos matemáticos reconocidos como correctos por la comunidad matemática. Estas concepciones se manifiestan tanto en los argumentos que una persona utiliza al resolver tareas específicas como en sus producciones escritas. Para esta investigación, se adopta la definición de concepciones alternativas del ángulo (CAA) propuesta por García (2018), considerándolas como interpretaciones que difieren de las aceptadas como correctas en el contexto matemático.

Método

Contexto de la investigación y participantes

La investigación se llevó a cabo en noviembre de 2024 en una escuela pública de Nivel Medio Superior (NMS) ubicada en una zona rural del sur del estado

de Guerrero, México. Participaron de manera voluntaria 20 estudiantes (12 hombres y 8 mujeres), con edades entre 17 y 18 años, todos ellos oficialmente inscritos en el 12° grado. Los participantes indicaron que, durante la pandemia enfrentaron dificultades para tomar sus clases debido a la falta de acceso a internet, lo que consideran afectó la calidad de su formación. Todos los alumnos señalaron haber trabajado previamente con el concepto de ángulo en grados anteriores. A partir de este momento, los estudiantes se identifican como E1, E2, ..., E20.

Recolección de datos

Se diseñó y aplicó una Entrevista Basada en Tareas (EBT), siguiendo los principios establecidos por Goldin (2000). Este tipo de entrevista se distingue por una interacción mínima entre el entrevistado (quien resuelve la tarea) y el entrevistador (los investigadores), enfocándose en una o más tareas previamente elaboradas, que pueden incluir preguntas, problemas o actividades. Este enfoque combina la entrevista, que permite explorar los procesos de pensamiento del individuo a través de sus verbalizaciones, con un instrumento (las tareas) que facilita la identificación de los procedimientos y las ideas utilizadas por el entrevistado al abordar las tareas planteadas.

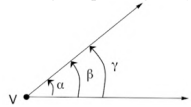
Se diseñaron cuatro tareas que fueron validadas por expertos, considerando aspectos como la claridad en la redacción, el nivel de dificultad y su relevancia en relación con los objetivos del estudio. Luego, se realizó una prueba piloto con tres estudiantes de NMS para verificar la coherencia en la redacción, la accesibilidad de las tareas y su alineación con el objetivo del estudio. La prueba piloto tuvo una duración promedio de 60 minutos y fue grabada en video para su posterior análisis.

A partir de los resultados obtenidos, se ajustaron dos tareas que finalmente formaron parte del instrumento utilizado en el estudio. Por ejemplo, en la tarea 2, la pregunta "¿Cómo identificas si un ángulo es positivo o negativo?"" fue modificada como "Dibuja un ángulo positivo y otro negativo. Explica tu respuesta".

El instrumento final se conformó por las tareas detalladas en la Tabla 1. Estas fueron diseñadas con el fin de identificar las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el concepto de ángulo. El protocolo para el entrevistador incluyó preguntas generales aplicables a todas las tareas, como: ¿Qué significa este término?, ¿Puedes explicar más sobre lo que mencionas? y ¿Puedes realizar el dibujo? Además, se incorporaron preguntas específicas para profundizar en el razonamiento y el conocimiento del participante sobre el concepto de ángulo. Estas preguntas se usaban cuando el entrevistado proporcionaba respuestas ambiguas, cuando su razonamiento no tenía bases claras, o para fomentar la exploración de otras posibles soluciones que conociera.

Tabla 1

Tareas planteadas a los estudiantes

Tarea 1. Explica, ¿qué significa el concepto de ángulo para ti?
Tarea 2. Dibuja un ángulo positivo y otro negativo. Explica tu respuesta.
Tarea 3. En la siguiente figura, ¿existe un ángulo que tenga mayor medida? Explica tu respuesta. 
Tarea 4. ¿Cuál de los siguientes ángulos tiene mayor medida? Explica tu razonamiento 

Análisis de datos

Las entrevistas generaron evidencia tanto escrita como verbal de los participantes, la cual fue registrada mediante hojas de trabajo y videograbaciones. Para el análisis de esta información, se empleó el método de Análisis Temático propuesto por Braun y Clarke (2012), el cual consta de seis fases. Este enfoque incluyó un proceso de triangulación entre los investigadores, lo que permitió garantizar la confiabilidad, validez, credibilidad y rigor de los resultados. Mediante este método, se identificaron patrones de significado (temas) en las respuestas de los estudiantes a las tareas del protocolo de la EBT, los cuales corresponden a concepciones alternativas. Durante las tres primeras fases del análisis, cada investigador trabajó de forma independiente; a partir de la cuarta fase, se llevaron a cabo sesiones de discusión para alcanzar consensos sobre las concepciones alternativas identificadas en este grupo de estudiantes. A continuación, se describen en detalle las seis fases que conforman este proceso.

Fase 1. Familiarización con los datos. Las entrevistas fueron transcritas y las respuestas escritas fueron digitalizadas. Luego, cada investigador realizó una lectura general de las respuestas para obtener una comprensión preliminar de las concepciones alternativas expresadas por los estudiantes y para familiarizarse con el lenguaje empleado por los participantes.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. Se identificaron palabras, frases y/o cálculos empleados por los estudiantes para hacer alusión al concepto de ángulo. Por ejemplo, en el extracto de E2 para la tarea 1, se destacaron en cursivas las frases que ayudaron a generar dos códigos iniciales: el ángulo es la región que hay entre las rectas que se cortan en el vértice y el ángulo es el área comprendida entre los lados que lo conforman.

Investigador: *Explica, ¿qué significa el concepto ángulo para ti?*

E2: *Es la parte que queda dentro de las rectas*

Investigador: *¿Puedes explicar un poco más tu respuesta?*
E2: *Es la región que hay entre las rectas que se cortan en el vértice* [dibuja el ángulo y colorea el área limitada por sus lados]
Investigador: *¿Te refieres al área?*
E2: *Sí*

En esta fase, se identificaron 155 códigos iniciales relacionados con las ideas manifestadas por los estudiantes sobre el concepto de ángulo. Sin embargo, en algunos casos, los estudiantes mencionaron más de dos ideas, lo que generó una codificación diferente, aunque solo se empleó una de ellas como estrategia principal para resolver la tarea. Este análisis se llevó a cabo con las respuestas de los veinte participantes.

Fase 3. Búsqueda de temas y subtemas. Se revisaron los códigos iniciales con el objetivo de agrupar aquellos que compartían un significado similar o mostraban un patrón de respuesta común, lo que dio lugar a la formación de subtemas. Estos subtemas se asociaron a un tema principal que reflejaba una concepción alternativa sobre el ángulo. Por ejemplo, a partir de los subtemas: un ángulo es positivo si abre hacia arriba y negativo si abre hacia abajo y un ángulo es positivo si abre a la derecha y negativo si abre a la izquierda se construyó el tema: el signo de un ángulo depende de la dirección en la que se orientan sus lados.

Fase 4. Revisión de los temas y subtemas. Se realizaron dos niveles de revisión, en el primero, se verificó que todos los temas fueran claros y reflejaran adecuadamente todos los códigos generados. El objetivo de esta revisión fue garantizar que cada tema estuviera respaldado por un conjunto coherente de datos y que los códigos dentro de cada tema estuvieran bien relacionados entre sí. En el segundo nivel, se llevó a cabo una revisión más profunda de todos los datos en relación con los temas identificados. Esto garantizó que los temas representaran de manera precisa el conjunto completo de datos, evitando superposiciones e inconsistencias entre los temas y subtemas; si era necesario, se crearon nuevos temas. Además, en esta fase, los investigadores se reunieron para realizar una revisión entre pares, lo que contribuyó a mejorar la calidad y validez del análisis de los datos. Este proceso permitió refinar la identificación de los temas, que en este estudio corresponden a las concepciones alternativas, y ayudó a minimizar el sesgo de un solo investigador.

Fase 5. Definición y nombre de los temas y subtemas. En esta fase, se asignaron nombres a los temas identificados para facilitar la presentación de los hallazgos, los cuales, en este estudio, corresponden a las concepciones alternativas sobre el ángulo. A cada tema se le proporcionó una definición clara y precisa que refleja las ideas expresadas por los estudiantes. Estas concepciones alternativas están fundamentadas en las respuestas escritas o verbales de los participantes.

Fase 6. Elaboración del informe. En esta sección se presentan las concepciones alternativas (temas) junto con sus respectivos subtemas (ver Tabla 2). Para los fines de la investigación, los resultados se describen según cada concepción alternativa identificada.

Resultados

El análisis de las producciones escritas y orales de los participantes permitió identificar cinco concepciones alternativas sobre el concepto de ángulo, que surgieron durante el proceso de resolución de tareas realizadas por los estudiantes de NMS (ver Tabla 2).

Tabla 2

Concepciones alternativas identificadas en los participantes

Concepciones alternativas	Definición	Subtemas	Frecuencia
El ángulo entendido como área	Se refiere a la concepción de que un ángulo es una región formada por el vértice y los lados o el vértice, los lados y el arco que conecta sus extremos.	• Un ángulo es la región comprendida entre sus lados y su vértice. • El ángulo es la región comprendida entre el vértice, los lados y el arco que conecta los extremos.	49
El signo de un ángulo depende de la dirección en la que se orientan sus lados	Se refiere a la concepción de que el signo de un ángulo está determinado por la dirección de sus lados, ya sea hacia la izquierda-derecha o hacia arriba-abajo.	• Un ángulo es positivo si abre hacia arriba y negativo si abre hacia abajo. • Un ángulo es positivo si abre a la derecha y negativo si abre a la izquierda.	45
La medida del ángulo como la longitud del arco angular	Se refiere a la concepción de asumir la medida de un ángulo como la medida del arco angular indicado en su representación.		23
La medida del ángulo en función de la longitud de sus lados	Se refiere a la concepción de concebir que la medida del ángulo depende del tamaño de los lados que lo conforman.		20
El ángulo interpretado como una distancia	Se refiere a la concepción del ángulo como la distancia entre los lados que lo conforman.		18

Nota. Fuente: Construcción personal

A continuación, se detalla en qué consiste cada una de las concepciones alternativas registradas en la tabla 2.

El ángulo entendido como área

Esta concepción alternativa se refiere a la interpretación del ángulo como una región formada por el vértice y sus lados, o bien como el área delimitada por el vértice, los lados y el arco que conecta sus extremos. Esta emergió de las respuestas de la mayoría de los participantes, con excepción de E6, E8, E12, E13 y E20 al abordar la tarea 1 y 4. Dado que los estudiantes expresaron dos ideas vinculads con la noción de ángulo como área, se desarrollaron dos subtemas que se detallan a continuación.

Un ángulo es la región comprendida entre sus lados y su vértice

Se construyó a partir de las interpretaciones que los estudiantes compartieron durante la entrevista sobre el concepto de ángulo. Para E1, E2, E3, E4, E5, E9, E10, E18 y E19, un ángulo se define como la región delimitada por sus lados y su vértice. Por ejemplo, sus respuestas incluyeron afirmaciones como: "El ángulo es el espacio entre las rectas y el vértice", "El ángulo es la abertura formada por los lados y un punto" y "El ángulo es la región interior". Estas interpretaciones evidencian una visión estática del ángulo, centrada en su representación espacial, y omiten la noción dinámica del ángulo como la amplitud de giro de una recta respecto a un punto fijo (ver extracto del diálogo con E1).

Investigador: *Explica, ¿qué significa el concepto de ángulo para ti?*

E1: *Bueno, el ángulo sería la abertura formada por los lados y un punto* [dibuja un ángulo e ilumina el área conformada por los lados y el vértice]

Aunado a lo anterior, al responder la tarea 4, que consistía en comparar la medida de dos ángulos dados, los estudiantes E3, E4 y E5 señalaron que el ángulo correspondiente al inciso b) era mayor por que el área contenida entre el vértice y los lados era más amplia que la del ángulo representado en el inciso a). Esta afirmación reforzó la concepción alternativa y evidenció las limitaciones conceptuales que los estudiantes tienen respecto a la comprensión del ángulo como medida de apertura, independiente de factores como el área o las dimensiones visuales asociadas.

El ángulo es la región comprendida entre el vértice, los lados y el arco que conecta los extremos

Al definir el ángulo, los estudiantes expresaron diversas ideas relacionadas con la noción de área. En particular, este subtema se desarrolló a partir de las interpretaciones de los estudiantes E7, E11, E14, E15, E16 y E17, quienes conciben el ángulo como la región delimitada por el vértice, los lados y el arco que conecta sus extremos. Por ejemplo, sus definiciones incluyeron frases como: "El ángulo es el área entre el vértice, los lados y un arco", "El ángulo es como la región interior de un sector" y "El arco que une dos rectas que se cortan limita el ángulo" (ver Figura 1).

Figura 1

E1 interpreta el ángulo como el área que se forma entre el vértice, los lados y el arco que los une para la tarea 1



Nota. Fuente: Obtenida de los datos.

El signo del ángulo depende de la dirección en la que se orientan sus lados

Esta concepción alternativa se relaciona con la relación entre el signo de la medida de un ángulo y la dirección en la que se orientan sus lados. Fue identificada en las respuestas de doce estudiantes al responder la tarea 2, en la cual debían dibujar un ángulo positivo y otro negativo. Debido a que surgieron dos interpretaciones relacionadas con la dirección. Una está asociada con los lados del ángulo que se abren hacia la derecha o la izquierda, y otra con los que se abren hacia arriba o hacia abajo. Se establecieron dos subtemas que se describen a continuación.

Un ángulo es positivo si de abre hacia arriba y negativo si abre hacia abajo

Este subtema incluye los criterios que los estudiantes emplean para determinar el signo de la medida de un ángulo. Para los estudiantes E1, E2, E5, E6, E9, E12 y E15, el criterio principal es la dirección en la que se abren los lados del ángulo. En sus respuestas, consideran que un ángulo es positivo si sus lados se abren hacia arriba, mientras que lo clasifican como negativo si se abren hacia abajo. Por ejemplo, algunos expresaron ideas como: "El ángulo es positivo si abre hacia arriba" y "El ángulo es negativo si abre hacia abajo" (ver extracto del diálogo con E6).

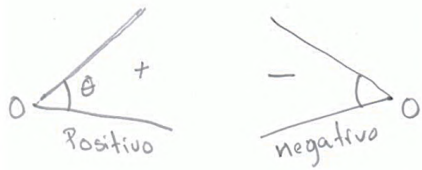
> Investigador: *Dibuja un ángulo positivo y otro negativo*
>
> E6: *Sí. El ángulo positivo debe tener sus lados para arriba* [dibuja un ángulo con lados orientados de forma ascendente desde el vértice], *mientras que el negativo debe abrir hacia abajo* [dibuja un ángulo con lados orientados de forma descendente desde el vértice]

Un ángulo es positivo si de abre a la derecha y negativo si abre a la izquierda

Este subtema se refiere a la concepción de que el signo de la magnitud de un ángulo está determinado por la dirección en la que sus lados se abren: hacia la derecha o hacia la izquierda. Esta interpretación fue manifestada por los estudiantes E7, E8, E10, E16 y E20, quienes emplearon expresiones como: "Un ángulo es positivo si abre a la derecha" y "Un ángulo es negativo si abre hacia la izquierda" (ver Figura 2). Esto refleja una concepción alternativa del concepto de ángulo, basada principalmente en percepciones visuales y no necesariamente en definiciones formales.

Figura 2

E10 dibuja un ángulo positivo y otro negativo en la tarea 2



Nota. Fuente: Obtenida de los datos.

La medida del ángulo como la longitud del arco angular

Esta idea fue identificada en cinco estudiantes: E10, E12, E14, E15 y E18, al resolver las tareas 3 y 4, que les pedían determinar, a partir de una figura, si existía un ángulo de mayor medida en la representación y comparar la magnitud de dos ángulos dados. En este contexto, los estudiantes interpretaron que los arcos angulares representados correspondían a ángulos distintos y concluyeron que el ángulo asociado al arco más grande era el de mayor magnitud. Esto se evidenció en afirmaciones como: "Cada ángulo posee un arco diferente, y por lo tanto, su medida también lo es"; "Los ángulos son distintos; si el arco es mayor, el ángulo también lo será"; y "A mayor arco, mayor ángulo asociado". Un ejemplo de esta concepción se presenta en el extracto de la entrevista con el estudiante E18 y su producción escrita (ver Figura 3).

La medida del ángulo como la longitud del arco angular

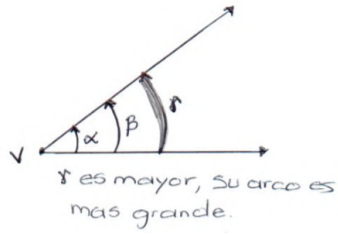
Esta idea fue identificada en cinco estudiantes: E10, E12, E14, E15 y E18, al resolver las tareas 3 y 4, que les pedían determinar, a partir de una figura, si existía un ángulo de mayor medida en la representación y comparar la magnitud de dos ángulos dados. En este contexto, los estudiantes interpretaron que los arcos angulares representados correspondían a ángulos distintos y concluyeron que el ángulo asociado al arco más grande era el de mayor magnitud. Esto se evidenció en afirmaciones como: "Cada ángulo posee un arco diferente, y por lo tanto, su medida también lo es"; "Los ángulos son distintos; si el arco es mayor, el ángulo también lo será"; y "A mayor arco, mayor ángulo asociado". Un ejemplo de esta concepción se presenta en el extracto de la entrevista con el estudiante E18 y su producción escrita (ver Figura 3).

Investigador: *En la figura, ¿existe un ángulo que tenga mayor medida?*

E18: *Bueno, el mayor debe ser γ, por que este arco es el más grande de los tres* [remarca el arco angular que denota a γ]. *Yo considero que la medida del ángulo queda determinada por la medida del arco*

Figura 3

E18 interpreta el ángulo como la medida del arco angular en la tarea 3



Nota. Fuente: Obtenida de los datos.

La medida del ángulo en función de la longitud de sus lados

Otra de las ideas que emergieron en las respuestas de los estudiantes al interpretar el concepto de ángulo fue la concepción alternativa de que su medida depende del tamaño de los lados que lo conforman. Este enfoque se evidenció en las respuestas de los participantes E1, E2, E7, E17 y E20 al abordar la tarea 4, donde expresaron ideas como: "El ángulo que tiene lados más grandes es mayor", "Los lados indican que es más grande el ángulo" y "El ángulo con lados más pequeños es menor" (ver extracto del diálogo con E20). A manera de hipótesis esta concepción alternativa pudiera surgir debido a la forma en que se introduce este concepto en el aula. Con frecuencia, los ángulos se presentan mediante dibujos donde los lados tienen longitudes específicas, lo que lleva a los estudiantes a asociar intuitivamente el tamaño de los lados con la magnitud del ángulo.

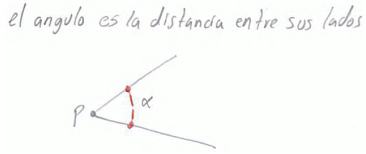
Investigador: *¿Cuál de los siguientes ángulos tiene mayor medida?*
E20: *Yo considero que el del b), porque si lo observamos tiene sus lados más grandes en comparación con el del a); bueno eso se puede ver en el dibujo*
Investigador: *¿Cómo medirías los ángulos?*
E20: *Con la regla, mido los lados*

El ángulo interpretado como una distancia

Esta concepción alternativa alude a la interpretación del ángulo como la distancia entre los dos lados que lo conforman. Se observó en los participantes E6, E8, E12, E13 y E20, especialmente al responder la tarea 1. Esta idea quedó manifestada mediante expresiones como: "El ángulo es la distancia que hay entre sus lados", "El ángulo es la longitud entre las rectas" o "El ángulo es la medida de la separación entre sus lados" (ver Figura 4). Esta interpretación refleja una comprensión limitada del concepto, ya que los estudiantes perciben el ángulo como una medida lineal, en lugar de entenderlo como una medida angular. Esto indica la necesidad de fortalecer la comprensión de este importante concepto matemático.

Figura 4

E20 interpreta el ángulo como la distancia entre sus lados en la tarea 1



Nota. Fuente: Obtenida de los datos.

Resultados

Los resultados revelan que los estudiantes presentaron diversas concepciones alternativas vinculadas con el concepto de ángulo. En total, se identificaron cinco concepciones alternativas: *el ángulo entendido como área, el signo de un*

ángulo depende de la dirección en la que se orientan sus lados, la medida del ángulo como la longitud del arco angular, la medida del ángulo en función de la longitud de sus lados y, el ángulo interpretado como una distancia. Estas concepciones reflejan una visión más estática que dinámica del concepto de ángulo, coincidiendo con los hallazgos de Agudelo y Planas (2022) en su revisión de la literatura, lo cual indica que los participantes tienen una comprensión limitada de este concepto, lo cual subraya la necesidad de un enfoque didáctico que promueva la naturaleza dinámica del ángulo y su relación con situaciones geométricas y cotidianas. Además, se evidencia una desconexión entre la definición formal de ángulo y su aplicación en contextos concretos.

La concepción alternativa más común entre las respuestas de los estudiantes fue la idea de *interpretar el ángulo como un área*. La noción del ángulo como la región formada entre sus lados-vértice o vértice-lados-arco que los conecta, se basa en una perspectiva estática del concepto (Clements & Burns, 2000). Sin embargo, esta definición por sí sola no permite construir una comprensión sólida, ya que necesita complementarse con una visión dinámica que conciba el ángulo como la amplitud de giro de una recta respecto a un punto en ella (Kim & Lee, 2014). Este hallazgo es consistente con lo reportado por Mitchelmore y White (2000), quienes señalan que los estudiantes de nivel preuniversitario suelen interpretar el ángulo como una región, lo que a menudo genera una comprensión limitada y da lugar a errores conceptuales (Torres & Sánchez, 2023).

En relación con la concepción alternativa de que *el signo de un ángulo depende de la dirección en la que se orientan sus lados,* doce estudiantes centraron su atención en la dirección de los lados del ángulo como criterio para identificar su signo. Este hallazgo coincide con lo reportado por Martínez-Tecolapa (2008) en estudiantes de una zona urbana de NMS, lo que sugiere que, independientemente del tipo de zona, la enseñanza y el aprendizaje del concepto de ángulo tienen poco alcance.

Un hallazgo relevante de este estudio fue *la interpretación del ángulo como la longitud del arco que lo define*. Aproximadamente una cuarta parte de los estudiantes sostuvo que la medida de un ángulo corresponde a la longitud del arco asociado, sugiriendo que, a mayor longitud del arco, mayor es el ángulo. Esta idea se asemeja a la concepción observada en estudiantes de nivel básico en investigaciones previas (Devichi & Munier, 2013; Mitchelmore, 1998). Es probable que esta concepción surja debido a las diversas definiciones presentadas en los libros de texto (Rotaeche & Montiel, 2017; SEP, 2023), donde el ángulo a menudo se introduce en el contexto de círculos y sectores circulares, lo que facilita una representación visual. Este hallazgo es preocupante, ya que refleja una comprensión limitada y distorsionada del concepto de ángulo entre los estudiantes.

En adición a lo anterior, otra concepción alternativa evidenciada por los estudiantes fue *la interpretación de la medida de un ángulo en función de la longitud de sus lados.* Esta idea puede surgir debido a una confusión entre las características geométricas de los ángulos y las de los segmentos que los forman. Al observar un ángulo, es común que los estudiantes perciban los lados como elementos clave para definir su tamaño, asociando erróneamente su longitud con la amplitud del ángulo. Esta concepción podría originarse por la influencia de representaciones visuales en los libros de texto o por experiencias previas (Rotaeche & Montiel, 2017; SEP, 2023), donde los ángulos se muestran en figuras en las que la longitud de los lados parece estar relacionada con la apertura del ángulo.

En la misma vertiente, otra concepción alternativa detectada en las producciones de los estudiantes es *la interpretación del ángulo como una distancia*. Este hallazgo resulta novedoso en la literatura sobre educación matemática respecto al concepto de ángulo y puede explicarse desde la perspectiva visual. Al observar un ángulo, los lados parecen alejarse a medida que el ángulo se abre, lo que podría llevar a los estudiantes a percibirlo como una medida de la distancia entre dichos lados. No obstante, esta interpretación se muestra insuficiente para ángulos de 0°, 180° y 360°, lo que la convierte en una visión parcial y sesgada del concepto (Casas & Luengo, 2005; Fyhn, 2007; Munier & Merle, 2009).

Los resultados de este estudio sugieren una similitud con hallazgos de investigaciones previas realizadas en diversas poblaciones. Esto nos lleva a formular la hipótesis de que la enseñanza de las matemáticas no logra integrar adecuadamente el contexto y la cultura de los estudiantes al abordar conceptos como el de ángulo. Esta carencia afecta directamente el proceso de aprendizaje y pone en evidencia la limitada influencia de la instrucción formal en la comprensión de dicho concepto. Además, resalta el rezago académico que enfrentan las comunidades rurales, marcado por las múltiples carencias que estas experimentan (Blanco & Blanco, 2009; Clarkson, 2004; Schemelkes, 2014; García, 2014).

Es fundamental que futuras investigaciones se centren en examinar el conocimiento que los profesores de matemáticas utilizan en su práctica educativa al enseñar conceptos como el de ángulo, especialmente en contextos rurales y en los distintos niveles educativos. También sería útil proponer diseños que integren las nociones matemáticas con las experiencias cotidianas de los estudiantes. Esta estrategia podría fortalecer el aprendizaje en estas comunidades, haciendo que los conceptos sean más relevantes y accesibles para los estudiantes.

Referencias

Agudelo, J. G. R., & Planas, N. (2022). Retos de alumnos de 11-15 años en el aprendizaje del concepto de ángulo: Una revisión de literatura para diseñar tareas profesionales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV (*pp. 479–487). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

Alyami, H. (2023). Defining radian: provoked concept definitions of radian angle measure. *Research in Mathematics Education, 25*(2), 154 –177.

An, S., & Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from assessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*0, 717 –753.

Biber, C., Tuna, A., & Korkmaz, S. (2013). The mistakes and the misconceptions of the eighth-grade students on the subject of angles. *European Journal of science and mathematics education, 1*(2), 50 –59.

Blanco, B., & Blanco, L. J. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números, 71*, 75–85.

Bostan, A. (2016). Conceptual level of understanding about sound concept: Sample of fifth grade students. *e-International Journal of Educational Research, 7*(1), 87–97.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Eds.), *APA handbook of research methods in psychology, vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Bütüner, S. Ö., & Filiz, M. (2017). Exploring high-achieving sixth grade students' erroneous answers and misconceptions on the angle concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(4), 533–554.

Casas, L., & Luengo, L. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(2), 201–216.

Chhabra, M., & Baveja, B. (2012). Exploring minds: Alternative conceptions in science. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 55*, 1069–1078. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.599

Chi, M. T. H., Roscoe, R. D., Slotta, J. D., Roy, M., & Chase, C. C. (2012). Misconceived causal explanations for emergent processes. *Cognitive Science, 36*(1), 1–61. https://doi.org/10.1111/j.1551-6709.2011.01207.x

Clarkson, P. C. (2004). Teaching mathematics in multilin-gual classrooms: The global importance of contexts. En I. P. Cheong, H. S. Dhindsa, I. J. Kyeleve, & O. Chukwu (Eds.), *Globalisation trends in science, mathematics and technical education* (pp. 9–23). Universiti Brunei Darussalam.

Clements, D. H., & Burns, B. A. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 31 –45.

Confrey, J. (1990). A review of research on students conceptions in mathematics, science and programming. En C. E. Cazden (Ed.), *Review of research in education* (pp. 3 –56). American Educational Research Association. https://doi.org/10.2307/1167350

Denbel, D. G. (2014). Students' misconceptions of the limit concept in a first Calculus course. *Journal of Education and Practice, 5*(34), 24–40.

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 1–19.

Díaz, L., & Kú, D. (2017). Construcción del concepto de ángulo en segundo grado de secundaria desde la teoría Apoe. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 2*, 436 –445.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas en estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(3), 195 –218.

Fujii, T. (2020). Misconception and alternative conceptions in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 625–627). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_114

Fyhn, B. (2007). A Climbing Class' Reinvention of Angles. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 19 –35.

García-García, J. (2014). El contexto cultural y la resolución de problemas: vistos desde el salón de clases de una comunidad Ñuu Savi. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(1), 50–73.

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario* [Tesis de Doctorado no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, México. https://www.researchgate.net/profile/Javier_Garcia-Garcia4

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Libros del Zorzal.

Juárez, D., & Rodríguez, C. R. (2016). Factores que afectan a la equidad educativa en escuelas rurales de México. *Pensamiento Educativo, 53*(2), 1–15. https://doi.org/10.7764/PEL.53.2.2016.8

Kaplan, A., Ozturk, M., & Ocal, M. F. (2015). Relieving of misconceptions of derivative concept with de- rive. I*nternational Journal of Research in Education and Science, 1*(1), 64–74. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED564414.pdf

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function* [Tesis de Doctorado no publicada]. University of Georgia, USA.

Kaur, H. (2020). Introducing the concept of angle to young children in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(2), 161–182.

Kim, O. K., & Lee, J. H. (2014). Representations of angle and lesson organization in Korean and American elementary mathematics curriculum programs. *KAERA Research Forum*, (1), 28–37.

López, G., & Tinajero, G. (2011). Los maestros indígenas ante la diversidad étnica y lingüística en contextos de migración. *Cuadernos de Comillas, 1*, 5–21.

López, L., Beltrán, A., & Pérez, M. A. (2014). Deserción escolar en universitarios del centro universitario UAEM Temascaltepec, México: estudio de caso de la licenciatura de Psicología. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 7*(1), 91–104.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable mis- conceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 33,* 30–41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001

Martinez-Tecolapa, D. (2008). *Un estudio de la evolución didáctica de las funciones trigonometricas: El caso del concepto de ángulo* [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Mevarech, Z., & Kramarsky, B. (1997). From verbal description to graphic representation: Stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*(3), 229–263. https://doi.org/10.1023/A:1002965907987

Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of Angle Concepts by Progressive Abstractions and Generalization. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 209–238.

Mithcelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction, 16*(3), 265–284.

Munier, V., & Merle, H. (2009). Interdisciplinary Mathematics-Physics Approaches to Teaching the Concept of Angle in Elementary School. *International Journal of Science Education, 31*(14), 1857–1895. https://doi.org/10.1080/09500690802272082

Narjaikaewa, P. (2013). Alternative conceptions of primary school teachers of science about force and motion. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 88*(2), 250–257.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council Teachers of Mathematics.

Özen-Ünal, D., & Ürün, O. (2021). Sixth grade students' some difficulties and misconceptions on angle concept. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 27,* 125–154. https://doi.org/10.14689/enad.27.7

Pachuca, Y., & Zubieta, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática, 32*(1), 38–66. https://doi.org/10.24844/EM3201.03

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2018). *PLANEA Resultados nacionales de logro en EMS. Lenguaje y comunicación, matemáticas.* INEE.

Rotaeche, R. A., & Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación matemática, 29*(1), 171–200.

Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2024). Concepciones alternativas sobre el concepto de pendiente en estudiantes de nivel medio superior de una zona rural. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 15*, e1942. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1942

Schmelkes, S. (2014). El derecho a la educación. En M. N. Orduña (Ed.), *El derecho a una educación de calidad. Informe 2014* (pp. 9-16). Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Secretaría de Educación Pública. (2023). *La Nueva Escuela Mexicana*. SEP.

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science, 1*(1), 84–88.

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM–Mathematics Education, 48*(6), 875–894. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). Macmillan.

Torres, R., & Sanchez, M. (2023). Tratamiento del concepto de ángulo en los textos escolares de enseñanza básica en Chile. Contextos Educativos. *Revista de Educación, 32*, 289–304.

Yağbasan, R., & Gülçiçek, A. G. Ç. (2003). Caracterización de los errores conceptuales en la enseñanza de las matemáticas. *Pamukkale üniversitesi eğitim fakültesi dergisi, 13*(13), 102–120.

TERCERA TENDENCIA

PENSAMIENTO FUNCIONAL Y COMPRENSIÓN GRÁFICA

Referentes teóricos para el diseño de situaciones variacionales. Un ejercicio reflexivo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional

Luis Manuel Cabrera Chim[1]

Resumen

Incorporar el estudio de la variación en el ámbito didáctico de la matemática es relevante para incidir en el aprendizaje de conocimientos matemáticos ligados con el cambio y para la formación matemática de las personas. Sin embargo, aún es una cuestión abierta cómo promover que los estudiantes desarrollen habilidades para estudiar la variación. Así, en este trabajo, fundamentado en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), se presenta un ejercicio de reflexión teórica sobre el empleo de un esquema propuesto para desarrollar el Pylvar y una rúbrica de evaluación elaborada con base en este, para determinar si proporcionan directrices para diseñar y/o rediseñar situaciones variacionales enfocadas en desarrollar tales habilidades. Para este ejercicio, se retoman actividades reportadas en la literatura diseñadas explícitamente bajo el Pylvar y se contrastan con lo establecido en el esquema y rúbrica señalados, determinando la pertinencia de tales situaciones o respectivas propuestas de cambio. Los resultados evidencian que las situaciones no cubren todos los estadios que componen al esquema, ni proporcionan evidencia completa del desarrollo del Pylvar. Ante esto, los niveles de desempeño de la rúbrica proporcionan referentes para rediseñar las situaciones y subsanar las dificultades detectadas.

Palabras clave

Situación variacional, pensamiento variacional, desarrollo, diseño

---

[1] luis.cabrera@inaoep.mx

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México

Cabrera Chim, L. M. (2025). Referentes teóricos para el diseño de situaciones variacionales. un ejercicio reflexivo desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 113–133). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-05

Introducción

El estudio de lo que cambia ha sido un aspecto central dentro de las ciencias y las matemáticas. Esto para poder generar modelos de fenómenos o situaciones dinámicas que permitan comprender, analizar y anticipar su comportamiento o intervenir en este. En este sentido, dentro de las matemáticas se han elaborado un sinfín de herramientas para poder desarrollar dichas acciones, que a la postre se han convertido en conceptos u objetos matemáticos. Por su parte, en los últimos años se ha propuesto que el análisis del cambio, es decir, la variación, es importante para poder resignificar los objetos matemáticos con fines didácticos, recuperando la importancia que tenía este análisis en su surgimiento y evolución histórica y que poco a poco quedó relegado (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017). Por ejemplo, se ha propuesto repensar el estudio de la función desde una concepción variacional (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022; Paoletti & Moore, 2018; Thompson & Carlson, 2017) o de la derivada desde dicha perspectiva (Antonio et al. 2019; Dolores, 2013). Por tanto, desarrollar habilidades o razonamientos que permitan comprender la variación de las variables e incorporar esto como parte de los procesos de enseñanza de los contenidos matemáticos incidirá en mejorar su aprendizaje. Sin embargo, cómo lograr el desarrollo de esto por parte de los estudiantes y la sociedad en general, aun es una cuestión abierta y en debate.

Para generar explicaciones teóricas y prácticas sobre cómo la incorporación de la variación en el trabajo didáctico matemático permite significar a los conocimientos matemáticos, se han desarrollado diferentes enfoques. Por ejemplo, el Razonamiento Variacional y Covariacional (Thompson & Carlson, 2017; Carlson et al., 2002), el Pensamiento Variacional (Jiménez-Rodríguez, 2020) y el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2019). Cada uno de estos enfoques, presenta resultados relevantes y propuestas teóricas para el trabajo de investigación y de aula. Sin embargo, cada uno se fundamenta en sus propios marcos teóricos y perspectivas educativas de la enseñanza, el aprendizaje y la matemática. Esto sucede incluso en los dos últimos enfoques mencionados antes, lo cual va más allá de solo una palabra en sus títulos. No obstante, los tres enfoques también tienen puntos de encuentro.

En concordancia con lo que establece Jiménez-Rodríguez (2020), postulamos que el pensamiento variacional y/o el pensamiento y lenguaje variacional involucra tanto al razonamiento variacional como al covariacional. Esto plantea una primera diferencia de tales enfoques con el Razonamiento Variacional y Covariacional (RVC). Por su parte, desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) se plantea que la significación de los saberes matemáticos depende del uso que se hace de dichos objetos en un escenario determinado (ver la siguiente sección), lo cual establece una diferencia con

el enfoque del Pensamiento Variacional y también del enfoque RVC. No obstante, los tres enfoques comparten su interés por comprender cómo las personas razonan sobre el cambio y cómo su estudio puede contribuir a transformar los procesos educativos de la matemática asociada al cambio.

El grado de desarrollo teórico también es diferente en cada enfoque. Por ejemplo, para el razonamiento variacional y covariacional, Thompson y Carlson (2017) plantean niveles de desempeño para cada tipo de razonamiento que permiten establecer fundamentaciones teóricas e inferencias sobre el desarrollo de estos razonamientos. En este mismo sentido, para el pensamiento variacional, Jiménez-Rodríguez (2020) plantea que, para desarrollar dicho pensamiento, el razonamiento variacional debe ser visto como una especie de nivel cero del razonamiento covariacional. Por su parte, acciones análogas se han comenzado a desarrollar para el Pylvar a través de trabajos como los de Cabrera y Zaldívar (2021), Cabrera y Martínez (2022), Cabrera et al. (2023) y Cabrera (2024). En estos se propone y emplea un esquema para el desarrollo del Pylvar para el análisis de actividades con este fin y para analizar el desempeño de los estudiantes al resolverlas (Cabrera & Zaldívar, 2021; Cabrera & Martínez, 2022), acciones que llevaron a la necesidad de formular una rúbrica de evaluación (Cabrera et al., 2023).

En este trabajo se pretende reflexionar y ejemplificar cómo el empleo de ambos referentes puede proporcionar directrices para el diseño de situaciones variacionales, así como para su análisis y posterior propuesta de rediseño o mejora. Con esto se busca pasar de una simple pretensión establecida al momento de formular ambos referentes, a dar evidencia, al menos teórica, de que sí pueden proporcionar tales directrices.

También se realiza un proceso de reflexión para explicar, sin ser exhaustivo, cómo algunos elementos de los otros enfoques son compartidos con el Pylvar y por tanto pueden reflejarse en los procesos y acciones que se desarrollan en los estadios del esquema. Con esto no se busca establecer si alguno de los enfoques es mejor que el otro, sino mostrar que aun basados en posturas diferentes comparten elementos en la forma de promover el desarrollo del pensamiento variacional o de los razonamientos variacional y covariacional, al menos desde un plano teórico y cada uno con sus propios objetivos.

Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional

El Pylvar establece que la construcción y la significación de varios saberes matemáticos (por ejemplo, funciones y derivadas) se fundamentan en el estudio del cambio situado en escenarios normados por prácticas predictivas (Cantoral, 2019). Por estas prácticas predictivas se hace referencia, en un sentido amplio, a aquellas acciones que deben desarrollarse con la finalidad de determinar estados o comportamientos desconocidos de una situación o

fenómeno dinámico. Por tanto, por Pylvar se entiende como la forma de pensar y comunicar el análisis de las variaciones de las variables que determinan el comportamiento de un fenómeno dinámico, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo (Cabrera & Zaldívar, 2021). Este se manifiesta y desarrolla cuando se enfrentan situaciones variacionales, es decir, aquellas donde el estudio del cambio de las variables tiene un rol central (Caballero, 2018). No obstante, cabe preguntarse ¿qué características deben tener esas situaciones variacionales para desarrollar el Pylvar?

La pregunta anterior motivó el desarrollo de un esquema que sintetizara varios elementos del Pylvar y sus relaciones, dando como resultado el esquema de la Figura 1. Este está organizado a partir de cuatro estadios, los cuales se proponen como unidades mínimas sobre las cuales puede fundamentarse el desarrollo del Pylvar (Cabrera & Zaldívar, 2021). El primer estadio denominado "Tomar conciencia de aquello que cambia" plantea la necesidad de que se pueda reconocer qué es lo que cambia en el fenómeno o situación que se analiza, es decir, reconocer esos cambios siendo parte de variables e identificar aquellas que pueden ser de interés para dicho análisis. En este primer estadio comienza el desarrollo del razonamiento variacional. Esto implica, según Jiménez-Rodríguez (2020), comprender que las cantidades varían, es decir, que no se producen únicamente cambios aleatorios en sus estados y que estos son únicos en cada estado (principio de unicidad), así como que estos se desarrollan bajo una continuidad (principio de continuidad). En estas acciones, la comparación de diferentes estados de las variables (a través de diferencias, cocientes, etc.), que ocurre en un primer momento de forma aleatoria o sin una estrategia estable, adquiere un papel relevante (estrategia variacional de comparación).

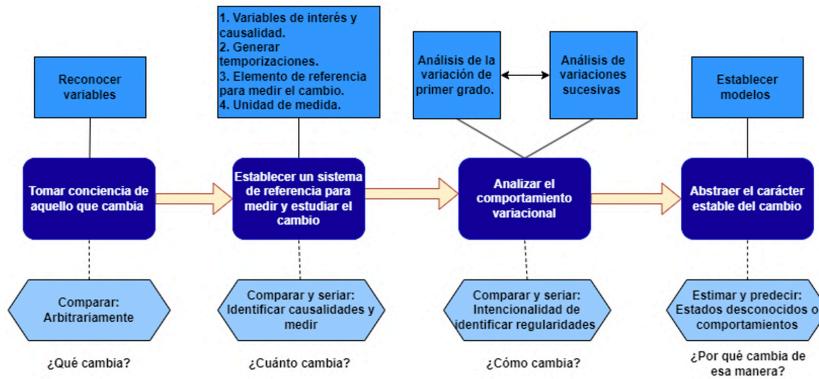
El segundo estadio denominado "Estudiar un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio" postula la necesidad de establecer los elementos necesarios para estudiar el cambio. Aquí se consolida el razonamiento variacional y comienza a desarrollarse el razonamiento covariacional, que de acuerdo con Thompson y Carlson (2017), implica la capacidad de identificar y comprender las relaciones dinámicas que se establecen entre dos variables, es decir, cómo las variaciones de una afectan a la otra, lo cual puede describirse cualitativa o cuantitativamente. En este sentido, desde el Pylvar se plantea que para que esto ocurra es necesario establecer un elemento de referencia (1) que permita reconocer cuantitativa o cualitativamente el cambio de las variables; establecer la unidad de medida (2) que permita establecer la intensidad de ese cambio, y generar temporizaciones[1] (3) de estados de tales

[1] Al hablar de temporización no implica que una de las variables sea el tiempo, sino determinar valores que la variable puede tomar en su continuo y que permitan comprender su variación.

variables (ya sea que se identifiquen o construyan). Estos elementos permitirán consolidar el razonamiento variacional según lo descrito antes, además que serán la base para comenzar a establecer y determinar la relación causal entre las variables (4), lo cual permitirá comprender el comportamiento de una situación o fenómeno dinámico. Una vez que se consoliden los cuatro elementos anteriores (indicados entre paréntesis), se podrá analizar el comportamiento covariacional de las variables a través del sistema de referencia variacional establecido (Caballero, 2018). En este estadio, comparar los valores que toman las variables en diferentes momentos y contrastar esos resultados para diferentes momentos (estrategia variacional de seriación), es la base para comprender la causalidad de las variables y comenzar a entender cómo covarían.

Figura 1

Esquema para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional



Nota: Tomado y ajustado de Cabrera y Zaldívar (2021)

El tercer estadio denominado "Analizar el comportamiento variacional" se enfoca en establecer las particularidades de la covariación de las variables bajo análisis. En este sentido, para determinar cómo están relacionados los cambios de una variable con los cambios en la otra, se procede a comparar algunos estados de la variable y, posteriormente, analizar o contrastar los resultados de esos cambios. Es decir, las estrategias variacionales de comparación y seriación se plantean como medios que permiten determinar dichas relaciones (comportamiento variacional). Esto puede realizarse desde la primera aplicación de las estrategias (variación de primer grado) o aplicar dichas estrategias a los resultados de las comparaciones tantas veces como sea necesario (variaciones sucesivas). Es en este momento, que se puede identificar la covariación que se establece entre las variables causales en análisis.

El último estadio denominado "Abstraer el carácter estable del cambio" establece que, con fines de desarrollar prácticas predictivas, es necesario

reconocer que el comportamiento variacional de las variables permite determinar, anticipar o intervenir en el comportamiento de la situación o fenómeno del que forman parte estas. De este modo, dicho comportamiento variacional, que puede presentarse de diferentes formas (gráfica, expresión algebraica, tabla, descripción, etc.) se convierte en un modelo que permite incidir en aquello que modela (Arrieta & Díaz, 2015). En consecuencia, el desarrollo de las estrategias de estimación o predicción (desarrollada según la precisión de esta acción que permite el modelo establecido) conducen este último estadio. Así, estudiar la covariación de las variables se presenta como un medio para intervenir en el fenómeno bajo análisis.

Como se señaló antes, se pretende que el esquema de la Figura 1 pueda servir de sustento teórico para el diseño de situaciones variacionales que permitan el desarrollo del Pylvar; a la vez que apoye a la construcción y significación de saberes matemáticos. Para esto último (que no es un objetivo de este trabajo), es necesario señalar que dicho desarrollo requiere generar situaciones variacionales en diversidad de contextos. Esto debido a que, derivado del origen y conexión del Pylvar con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se establece que los objetos matemáticos se construyen y significan a partir de su uso al enfrentar situaciones o fenómenos de cambio. Sin embargo, este uso puede adoptar características diferentes de acuerdo con las normas o formas de acción particulares que rigen a las comunidades (médicos, albañiles, ingenieros, etc.) dentro de las cuales se desarrollan dichas situaciones o fenómenos. Estos espacios junto con dichas normas son caracterizados como prácticas de referencia, las cuales se identifican a través de la triada: uso – usuario – contexto (Cantoral, 2019). De este modo, no se reconoce un único significado del conocimiento matemático, sino que este está vinculado con la práctica de referencia y, por tanto, la construcción de dicho conocimiento implica una constante significación (resignificación) de este a través de diferentes prácticas de referencia (Montiel & Buendía, 2012).

Rúbrica para valorar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional

Debido a que todo proceso de enseñanza y aprendizaje debe incorporar procesos de evaluación para determinar si se han alcanzado los objetivos establecidos, a partir del esquema de la Figura 1 se concibió el desarrollo de un instrumento para valorar el desempeño ante las situaciones variacionales que se elaboren bajo su sustento. Cabe recordar que el proceso de evaluación puede entenderse como la recopilación de evidencia del logro de ciertos criterios de referencia establecidos previamente y a partir de los cuales formular juicios de valor sobre los avances de aprendizaje (De la Orden, 2009; Chávez-Ruiz & Martínez-Rizo, 2018). Por tanto, para poder recopilar dicha evidencia, es necesario que desde el diseño mismo del proceso de

enseñanza y aprendizaje se defina la forma y los momentos para obtenerla (Cardeñoso, 2006; Sanmartí, 2007).

Con base en la perspectiva anterior, se elaboró la rúbrica de la Tabla 1, la cual fue validada por expertos en el Pylvar. Esta es una versión ampliada de la publicada en Cabrera (2024), con descripciones más detalladas de los niveles de desempeño de cada indicador y ejemplos de desempeños tipo para estos. Así, con esta rúbrica se busca "operacionalizar" el esquema de desarrollo al establecer criterios de desempeño sobre los que se debe obtener evidencia de su logro por parte del estudiante y que dan cuenta de un progreso en el desarrollo del Pylvar. Esto permitirá tanto valorar y retroalimentar el desempeño de los estudiantes (Andrade, 2000), como analizar el proceso seguido para alcanzar el objetivo evaluado (Savic et al., 2017). Estos dos aspectos no se abordan en este escrito.

Una consideración importante que debe realizarse sobre la rúbrica es que esta fue elaborada considerando que la situación variacional que se proponga a los estudiantes cubre todos los elementos y relaciones del esquema de la Figura 1. Sin embargo, es posible que, por las características de la situación, los objetivos de aprendizaje, el nivel de desarrollo de los estudiantes, entre otras razones, no suceda esto y no sea posible valorar todos los indicadores establecidos. En estos casos se deberá emplear solo la parte de la rúbrica correspondiente. Pero, si esto no se justifica de acuerdo con el objetivo de la situación, podría indicar que la situación variacional requiere rediseñarse para promover todos los elementos del esquema de la Figura 1.

Tabla 1

Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales

Indicador	**Niveles**			
	3	**2**	**1**	**0**
Identifica las variables y sus relaciones	Reconoce las variables que intervienen en el fenómeno o situación, así como sus relaciones de causalidad y puede argumentar cuáles son las más pertinentes en términos del estudio a realizar. *Por ejemplo: puede explicar por qué la relación entre altura del agua y tiempo o de volumen y tiempo, es la mejor para modelar gráficamente el llenado de los recipientes*	Establece las relaciones causales entre algunas de las variables del fenómeno o situación. Sin embargo, no es capaz de determinar si son las más pertinentes para describir o caracterizar su comportamiento e incluso puede resultar no serlo. *Por ejemplo: relaciona que la altura del agua cambia con respecto al tiempo, pero esto no le permite comprender el tiempo de llenado como si hubiera elegido el volumen con el tiempo*	Reconoce algunas de las variables que intervienen en la situación, pero no identifica las relaciones causales entre ellas. *Por ejemplo: puede identificar que la altura del agua cambia, así como el volumen de agua dentro del recipiente, pero no la relación de estas variables con el tiempo*	Identifica que hay elementos que cambian, pero no los reconoce como variables o que existen relaciones de dependencia entre ellas. *Por ejemplo: ante el llenado de recipientes y solicitud de graficar el comportamiento, solo señala que la altura del agua en el recipiente cambia*

Tabla 1

Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales (continúa)

Indicador	Niveles			
	3	2	1	0
Determina los valores de la variable para diferentes temporizaciones	Calcula o determina correctamente los valores de las variables o interpreta adecuadamente los valores de estas temporizaciones que le son dadas (tablas, gráficas, …) a la vez que puede determinar si en cada caso si los valores dados son o no suficientes para la tarea solicitada. Así, establece un adecuado sistema de referencia y puede determinar si los valores que tiene son pertinentes para la tarea solicitada. *Por ejemplo: Calcula o interpreta adecuadamente los valores de la altura del agua con respecto al tiempo y es capaz de argumentar si es, o no, necesario realizar otros cálculos para poder hacer análisis adecuados de los cambios de las variables*	Calcula o determina correctamente los valores que toma la variable independiente para diferentes temporizaciones o interpreta adecuadamente los valores de estas temporizaciones que le son dadas (tablas, gráficas, …). Así, se establece un adecuado sistema de referencia, pero los valores determinados no le permiten analizar los comportamientos variacionales de las variables. *Por ejemplo: Calcula o interpreta adecuadamente los valores de la altura del agua con respecto al tiempo, pero no se da cuenta que al estar desigualmente espaciados los tiempos, las comparaciones de las alturas podrían arrojar resultados incorrectos*	Calcula o determina incorrectamente los valores que toma la variable independiente para diferentes temporizaciones o interpreta incorrectamente los valores de estas temporizaciones que le son dados (tablas, gráficas, …). *Por ejemplo: establece de forma incorrectamente la altura que tendrá el agua en cierto momento al interpretar inadecuadamente el llenado o interpreta los datos de las tablas de manera acumulativa, siendo esto incorrecto; así, por ejemplo, al sumar dos tiempos considera que es el resultado de la altura en el tiempo resultante*	No es capaz de establecer cómo calcular o determinar los valores que toma la variable dependiente en diferentes temporizaciones (momentos de la situación o fenómeno) o no interpreta los valores que le son dados (tablas, gráficas, etc.) como temporizaciones de este. *Por ejemplo, se dan valores aleatorios respecto la altura del agua para diferentes tiempos o no logra interpretar la relación entre tiempo y altura que le es dada en gráficas o tablas*
Reconoce el comportamiento variacional de las variables	Caracteriza los comportamientos variacionales de grado dos o mayor e interpreta estos en términos del contexto de referencia y sus particularidades. *Por ejemplo: asocia los diferentes tipos de variación de la altura de llenado a sus respectivas formas o viceversa*	Es capaz de caracterizar el comportamiento (ya sea lineal y no lineal) de la variable, pero sólo puede interpretar la variación lineal en términos de la práctica de referencia. *Por ejemplo: al analizar el llenado de un recipiente no cilíndrico, puede señalar que su altura no crecerá de forma constante y puede caracterizar el crecimiento, pero no logra vincular que ese comportamiento aplica a recipientes con forma similar*	Reconoce que las variables tienen una variación lineal o no lineal. Así, no puede identificar características de la variación no lineal, ni interpretar la variación identificada en el contexto de referencia. *Por ejemplo: reconoce que la altura del agua cambia de forma constante, pero no es capaz de asociar que esto es por la particularidad del cilindro bajo estudio*	Compara valores de las variables para diferentes temporizaciones, pero no reconoce ningún patrón o regularidad de comportamiento de éstas. *Por ejemplo: al hacer las comparaciones de las alturas en diferentes momentos, se puede encontrar una constante, pero no logra interpretar qué significa esto o no le da importancia*

Tabla 1

Rúbrica para valorar el desempeño ante situaciones variacionales (continúa)

Indicador	Niveles			
	3	2	1	0
Establece o interpreta modelos para estimar o predecir	Establece uno o más modelos correctos del comportamiento variacional de las variables o interpreta correctamente los modelos dados y a partir de ellos estima o predice comportamientos para estimar o predecir valores de largo alcance, es decir, reconoce que estos caracterizan al comportamiento del fenómeno o situación en su totalidad. *Por ejemplo: reconocer que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante y es capaz de emplear esto y el modelo elaborado para calcular valores o comportamientos en cualquier* *momento. Además, reconoce que este comportamiento es para todos los cilindros, aunque con diferencias según su forma y tamaño*	Establece uno o más modelos correctos del comportamiento variacional de las variables o interpreta correctamente los modelos dados y a partir de ellos estima o predice comportamientos, pero solo de corto alcance del fenómeno o situación, es decir, cercanos al intervalo de estudio, no visualiza ese comportamiento como característica global del fenómeno. *Por ejemplo: sabe que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante y lo emplea para calcular valores de la altura en momentos próximos a aquel donde se hizo el estudio del llenado, Además, no puede extender este comportamiento a otros cilindros*	Establece un modelo incorrecto del comportamiento variacional de las variables o interpreta incorrectamente un modelo dado, por lo que sus estimaciones o predicciones del fenómeno o situación son incorrectas. *Por ejemplo: sabe que en el cilindro la altura de agua crece de forma constante, pero no se percata que para el valor que se solicita estimar, el intervalo no crece en la misma unidad de tiempo y eso lo lleva a cometer errores*	Identifica el comportamiento variacional de las variables, pero no puede emplear tales características para realizar estimaciones o predicciones del fenómeno o situación. *Por ejemplo, reconoce que en un cilindro la altura cambia de forma constante, pero no es capaz de emplear esta situación para estimar la altura del agua en un determinado momento del llenado. No sabe cómo emplear la relación encontrada para esta tarea*

Nota. Los ejemplos que se proponen se desarrollan considerando la actividad de graficar la altura de llenado de recipientes cilindros y cónicos. Elaboración propia

Por ejemplo, si una situación variacional parte de la presentación de datos a partir de tablas o gráficas, las variables de interés y su relación causal ya se proporcionan de forma explícita, lo que impide el desarrollo del primer estadio del esquema y, quizás de parte, del segundo estadio. No obstante, como se señala en Cabrera y Martínez (2022), el desarrollo de los dos primeros estadios es decisivo para interpretar correctamente los modelos que se puedan generar en el cuarto estadio y su empleo para intervenir en el fenómeno que se modela. En dicho trabajo se solicitó a estudiantes de secundaria elaborar el modelo gráfico del comportamiento de la altura del agua dentro dos recipientes cilíndricos con la misma capacidad, que son llenados con el mismo flujo constante. Cuando se preguntó a los estudiantes por qué ambos recipientes se llenan al mismo tiempo y cómo se refleja esto

en la gráfica, solo quien consideró como variables de interés a volumen-altura, y no a altura-tiempo, pudo explicar esta situación.

Análisis de situaciones variacionales y valoración de desempeño

Para el desarrollo de este trabajo se retomó un conjunto de situaciones variacionales diseñadas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) para bachillerato y bajo el enfoque del Pylvar, las cuales tenían como objetivo su desarrollo entre los estudiantes. Así, analizarlas bajo la perspectiva del esquema propuesto en la Figura 1 y de la rúbrica de evaluación de la Tabla 1, permitirá determinar si estos referentes están en correspondencia con dichas situaciones o si estas presentan las características necesarias para alcanzar el objetivo de desarrollar el Pylvar. Con base en estos análisis se espera determinar si tales referentes proporcionan directrices o elementos que deben ser considerados para el diseño de nuevas situaciones variacionales y/o cómo mejorar situaciones variacionales ya elaboradas.

Las situaciones variacionales desarrolladas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) se reportan en cuatro momentos:

> El primero se refiere al llenado de un recipiente cilíndrico a flujo constante, donde la atención se centra en identificar la cantidad de altura que aumenta cada segundo y la asociación con la gráfica correspondiente. En el segundo se trabaja el llenado de dos recipientes cilíndricos, comparando la velocidad de llenado al variar la forma del recipiente (más ancho menor pendiente, más angosto mayor pendiente). En el tercer momento, se compara el llenado de dos recipientes desde un enfoque numérico, con el fin de predecir cuál se llena primero. En el último momento se contrastan las gráficas del crecimiento de la altura de recipientes cilíndricos (a razón constante) con el llenado de recipientes de forma cónica, a modo de contrastar lo lineal con lo no lineal (p. 1070-1071).

Como puede observarse en la cita anterior, en los primeros tres momentos se habla del llenado de recipientes cilíndricos, fenómeno que se modela con funciones lineales y que constituye el contenido matemático de interés para los autores. Pero, en el cuarto momento, a partir de recipientes de forma cónica, se busca confrontar el comportamiento lineal y el no lineal, como recurso para profundizar en la comprensión de lo lineal. A continuación, por cuestiones de espacio y de que los resultados de los análisis entre momentos son similares (el primer y tercer momento y el segundo y cuarto momento), se presentan con detalle los análisis correspondientes con los momentos primero y segundo (ver Figuras 2 y 3) y una breve descripción de los otros dos momentos.

Para el primer momento, como puede observarse en la Figura 2, la segunda pregunta solicita establecer el tiempo de llenado del recipiente, lo cual corresponde con una práctica predictiva y que constituye un aspecto decisivo para el desarrollo del Pylvar. Ahora bien, tomando como base el esquema de la Figura 1, las preguntas de las situaciones y los análisis esta-

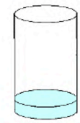
blecidos por los autores de la situación sobre los desempeños esperados de los estudiantes para resolverla, se puede observar que esta no establece condiciones para poder desarrollar las acciones involucradas en el estadio 1

Figura 2

Situación variacional para el primer momento de la propuesta de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017)

Primer Momento

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.



1. Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los *3* segundos.
2. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta
3. Realiza el bosqueja de la gráfica que muestra altura del líquido al paso del tiempo. Considera que el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la altura. Explica cómo es el crecimiento de la altura en este recipiente.

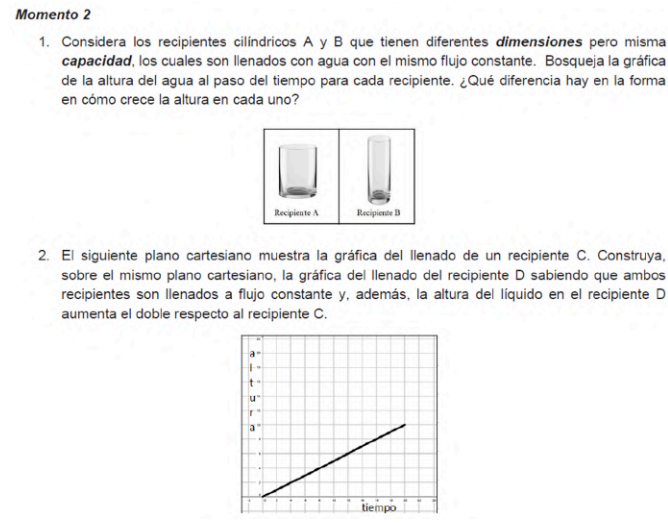
Las instrucciones de la situación variacional ya plantean el interés por la correlación entre la altura del agua en el recipiente y el tiempo transcurrido. Además, no se plantea ninguna pregunta o momento de reflexión para analizar si estas variables son pertinentes o en si en verdad están correlacionadas. En cuanto la pregunta 1, base para responder la pregunta 2, busca que los estudiantes comiencen a construir la forma en que están correlacionadas tales variables. En este sentido, los autores señalan que los estudiantes podrían dibujar en la botella el nivel de agua para diferentes momentos a partir de la marca dada de inicio, lo cual corresponde con establecer el sistema de referencia del estadio 2 del esquema. Cada marca del nivel de agua representa una temporización de estados del llenado y para realizar su adecuada medición e interpretación se requiere establecer un elemento de referencia, en este caso la base del recipiente. Así, sobreponer la altura de la marca de inicio e indicar que la nueva altura en cada superposición se alcanza al trascurrir la misma cantidad de tiempo (estrategia de comparación) son las acciones que se ponen en juego para desarrollar el estadio 2. A la par de esto, los estudiantes deben tomar conciencia de que lo anterior es posible porque el flujo de agua es constante y el recipiente es cilíndrico, lo que posibilita que la longitud de las alturas sea igual para el mismo periodo de tiempo. Es decir, comparar que las alturas son las mismas para los mismos tiempos (estrategia de seriación), permite llegar a estas conclusiones. Esto refleja el estadio 3 del esquema de la Figura 1 referente al análisis variacional a partir de la primera seriación. Por último, el reconocer que el comporta-

miento anterior será el mismo durante todo el proceso de llenado, corresponde con abstraer el carácter estable del cambio (estadio 4), y esto permitirá hacer el cálculo del tiempo que tardará el recipiente en llenarse. Es decir, dicho comportamiento se convierte en un modelo de la forma de llenado y este permite intervenir en la situación. Posterior a esto, para la pregunta 3 del primer momento, los estudiantes deben transformar este modelo en uno gráfico. Esto presenta desafíos propios de un cambio de representación a otro, lo cual no es objeto de este análisis, pero contribuye a desarrollar habilidades para manejar diferentes modelos que puedan ayudar a desarrollar prácticas predictivas.

En el momento 3 también se plantea una pregunta que conduce al desarrollo de prácticas predictivas y su análisis contrastado con el esquema de la Figura 1 evidencia que tampoco se desarrolla el estadio 1. En esta situación variacional se presentan tablas numéricas con datos faltantes, las cuales describen el llenado de dos recipientes cilíndricos iguales y se solicita determinar cuál recipiente se llenará primero. En este caso, también ya están dadas las variables relacionadas causalmente, ya se proporcionan los valores de las variables que deberán analizarse (las temporizaciones de interés ya están establecidas en la tabla) y ya está establecida la unidad de medida. Por tanto, el estadio 2 no se desarrolla por completo. Sin embargo, al igual que con la actividad anterior, los estadios 3 y 4 toman relevancia y permiten contestar lo solicitado. Además, la actividad permite que el modelo del llenado del cilindro pueda generalizar a cualquier otro cilindro.

Figura 3

Situación variacional para el segundo momento de la propuesta de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017)



Por su parte, en la situación variacional del segundo momento (Figura 3), el énfasis está en caracterizar el comportamiento covariacional de las variables y reflejarlo en su modelo gráfico. No se plantea ninguna pregunta o cuestión que lleve a realizar alguna práctica predictiva, lo cual contraviene el aspecto decisivo del Pylvar: su vínculo con tales prácticas. Para la primera pregunta, los autores dan por hecho que, dada la situación variacional planteada en el primer momento, los estudiantes podrán determinar que el crecimiento de la altura en cada recipiente es constante o reproducir parte del procedimiento realizado para el momento 1. De nuevo, las variables que están correlacionadas ya están establecidas: altura del agua y tiempo. Por tanto, las acciones asociadas con el estadio 1 del esquema de desarrollo del Pylvar no se desarrollan. Por otra parte, para diferenciar la forma en que crecen las alturas en cada recipiente, se podría dibujar la altura que alcanzaría el líquido al transcurrir un segundo en uno de los recipientes y determinar la altura que alcanzaría la misma cantidad de agua en el otro recipiente. A partir de esto se espera que se identifique que el incremento en el recipiente angosto es mayor que en el ancho. En este caso se comparan estados de un recipiente contra estados del otro para un mismo tiempo, es decir, se contrastan las temporizaciones realizadas. Esto implica poder establecer un elemento de referencia para realizar las mediciones: la base de los recipientes y la cantidad de agua que entra en cada recipiente en el mismo tiempo.

Esto permite desarrollar el estadio 2 al establecer un sistema de referencia variacional. A la par de este análisis, al considerar que el flujo de agua es constante y ambos recipientes son cilíndricos, se debe llegar a la conclusión de que el crecimiento de la altura es constante dentro de cada recipiente. Esto al comparar cuanto crece la altura del agua para los mismos tiempos (estrategia de seriación para un mismo recipiente). Asimismo, se llega a una segunda conclusión de que para el recipiente angosto la altura crece más rápido que para el recipiente ancho (estrategias de comparación y seriación entre recipientes). Esto se asocia con el análisis variacional establecido en el estadio 3 y permite responder a la primera parte del momento 2.

No obstante, aquí no hay preguntas que permitan generar evidencias de que los estudiantes reconocen que las conclusiones identificadas corresponden con un modelo del llenado, pues en este momento no se emplea este para incidir sobre la situación que se analiza (Arrieta & Díaz, 2015). No obstante, se pretende alcanzar lo anterior con la segunda parte de este momento. Para responder dicha parte, se debe reconocer que el comportamiento anterior (las dos conclusiones) se replican para cualquier par de cilindros, es decir, se consolida la idea del carácter estable del cambio para el llenado de cilindros con flujo constante y usar el comportamiento para generar la gráfica solicitada (modelo gráfico), es decir, "realizar una práctica predictiva". Esto abarca el desarrollo del estadio 4. Sin embargo, esta práctica

podría no realizarse, pues para realizar la gráfica solicitada es posible que los estudiantes solo sigan la regla ("aumenta el doble") de forma mecánica, sin percibir que esta es producto de abstraer cómo cambia el llenado del recipiente D, es decir, sin comprender que es su modelo de llenado. Esto puede ocurrir porque los procesos de graficación, por lo general, no se desarrollan bajo la perspectiva de modelación, sino de unir puntos del plano cartesiano que se generan a partir de una fórmula o regla. Conviene replantear la pregunta o la actividad en general para evitar el problema mencionado. Por ello, se señaló al inicio de este párrafo que no hay una práctica predictiva.

Para el momento cuatro, el proceso de resolución es similar a lo descrito para la primera pregunta del segundo momento, es decir, se centra en los estadios 2 y 3, y ofrece poca evidencia de que se alcance el estadio 4, pues no es claro si se abstrae el carácter estable del cambio del llenado de los recipientes cónicos bajo estudio. Los estudiantes deben concluir que el comportamiento de los recipientes cónicos no es lineal, aunque sigue un patrón identificado a partir del análisis variacional de cómo cambian sus alturas: "para el recipiente A [en forma de cono invertido] la altura crece cada vez menos" y "para el recipiente B [en forma de cono] la altura crece cada vez más".

El análisis anterior evidencia que solo en dos de las situaciones variacionales planteadas por Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) se promueven prácticas predictivas explícitas o alcanzables (momentos 1 y 3), en las cuales se desarrollan parcialmente las acciones establecidas en el estadio 2 y de forma completa las de los estadios 3 y 4. Por su parte, para las otras dos situaciones solo se solicita el planteamiento del modelo de cómo cambian las variables (momentos 2 y 4), pero no queda claro si el estudiante reconoce que el comportamiento identificado constituye un modelo, ya que este no se utiliza para intervenir en la situación modelada, es decir, desarrollar prácticas predictivas.

Este aspecto ha sido señalado por Arrieta y Díaz (2015) para la conformación de un modelo. Para estas dos situaciones sólo se establecen completamente las acciones del estadio 3 y parcialmente las del estadio 2 y 4. Sin embargo, en ninguna de las cuatro situaciones se trabaja el desarrollo de las acciones del estadio 1, correspondiente con tomar conciencia de lo que es una variable e identificar las distintas variables que se encuentran implícitas en diversas situaciones y fenómenos. Además, se dice que se trabaja parcialmente el estadio 2, pues las variables que están relacionadas causalmente (correlacionadas) ya se proporcionan como un dato de la situación variacional. Si bien es cierto que los estudiantes deben tomar conciencia de cómo es esa correlación, no se permite discutir qué variables serían las pertinentes para el estudio que se plantea. Esto último, como se señaló antes, resulta importante de acuerdo con los resultados de Cabrera y Martínez (2022).

Las reflexiones del párrafo anterior resultan relevantes. En primer lugar, porque dichas actividades fueron diseñadas para desarrollar el Pylvar como se declara explícitamente en Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017). En segundo lugar, los hallazgos coinciden con lo reportado por Cabrera et al., (2023) al analizar los libros de texto gratuitos de primaria en México. Estos autores señalan que en dichos libros existen actividades que requieren de estudiar como cambian las variables, lo que potencialmente puede desarrollar el Pylvar. Sin embargo, casi todas las actividades se centran en desarrollar lo establecido en los estadios 3 y 4 del esquema, y ninguna abre el espacio para reflexionar sobre las variables implicadas y las relaciones de causalidad entre ellas que son de interés para el estudio.

En tercer lugar, porque desde el planteamiento teórico del Pylvar se establece que identificar qué cambia y el desarrollo de prácticas predictivas constituyen la base del estudio del cambio (Cantoral, 2019). De acuerdo con estos resultados, el esquema de la Figura 1 se convierte en un referente teórico que permite analizar la pertinencia de las características de las situaciones variacionales para el desarrollo del Pylvar, pues ha permitido determinar vacíos o acciones que podrían no estarse promoviendo y que se consideran fundamentales para dicho desarrollo desde los aspectos teóricos.

Ahora, se ejemplificará cómo la rúbrica de evaluación (Tabla 1) puede ser empleada con un fin similar o complementario al análisis de la pertinencia de las características de las situaciones variacionales y, sobre todo, para su rediseño al establecer aspectos que, como se mencionó antes, operacionalizan el esquema de desarrollo del Pylvar (Figura 1). Esto permitirá que los elementos de evaluación se incorporen desde el diseño mismo de la planeación del proceso de enseñanza, como señalan Cardeñoso (2006) y Sanmartí (2007). Para esto, y por cuestiones de espacio, solo se analizará la situación variacional descrita en el primer momento (Figura 2). Como se indicó en el análisis anterior, esta situación no aborda las acciones correspondientes al estadio 1 del esquema de desarrollo del Pylvar. Este estadio se relaciona con el primer indicador de la rúbrica "Identifica las variables y sus relaciones" (Tabla 1), que establece entre sus niveles el reconocer las variables implicadas y determinación de cuáles son pertinentes para el análisis de la situación. Por tanto, para revertir la carencia identificada en la redacción de la situación variacional podría omitirse cuál es la variable independiente que interesa vincular con la variable dependiente: altura de llenado.

Así, se podría omitir la indicación de que se busca conocer la altura del agua al transcurrir el tiempo, cuestionar cuáles son todas las variables intervinientes y cuáles están relacionadas para describir el fenómeno (correlación). En el trabajo de Cabrera y Martínez (2022) se evidencia que cuando se realiza esto, es probable que algunos estudiantes establezcan como variable independiente al volumen de líquido dentro el recipiente. A su vez,

estos análisis permitirán que los estudiantes tomen conciencia de que las variables implicadas cambian de forma continua y que además no lo hacen de forma aleatoria, sino dependen de la situación. En otras palabras, se desarrollará el estadio 1. Además, esto será la base para establecer cuáles son las variables que están correlacionadas y para la cuales interesa conocer su correlación. Esto es importante para el desarrollo de las acciones del estadio 2, en particular determinar que los cambios en una variable afectan a la otra, lo cual es relevante para establecer un sistema de referencia variacional.

Con respecto al segundo indicador de la rúbrica "Determina los valores de la variable para diferentes temporizaciones", los autores de la situación señalan que para resolverla es necesario hacer temporizaciones del llenado a partir de dibujar en el cilindro segmentos de altura similar a la proporcionada en la imagen, es decir, es necesario determinar los "valores" de la variable en diferentes momentos. Estas acciones y las demás implicadas para realizar esto, permitirán valorar dicho indicador, pero, dados los descriptores de los niveles de desempeño establecidos, sería importante cuestionar, como parte de la situación variacional, qué altura se tendría para un tiempo que no sea múltiplo de tres segundos. Esto para poder obtener evidencia de si el estudiante solo reproduce la altura marcada en el cilindro o comprende cómo obtener los valores de la variable para diferentes temporizaciones. Otra acción que podría permitir lo anterior, sería proporcionar en la imagen un cilindro cuyo llenado no ocurra en un tiempo múltiplo de tres y poner énfasis en discutir la mejor estimación del tiempo de llenado.

Con respecto al indicador "Reconoce el comportamiento variacional de las variables", la situación variacional exige un análisis de la primera variación para identificar el comportamiento constante de la variable. Esto permitirá responder la pregunta 2 y se espera que facilite realizar la gráfica solicitada en la pregunta 3. Si bien, determinar este comportamiento constante es el objetivo de la situación variacional de este momento, las acciones implicadas podrían no ser suficientes para obtener evidencia que ubique a los estudiantes en alguno de los niveles de logro de este indicador, como lo muestran los descriptores de sus niveles de logro. Así, se tendría duda de si un estudiante que contesta correctamente se ubica en el nivel 1 o 2, pues no sería claro si reconoce que este comportamiento depende de las características del recipiente y no es solo para este recipiente en sí.

Para superar esta limitación y contribuir a profundizar en el desarrollo del Pylvar, podría cuestionarse a los estudiantes, en esta misma actividad, qué pasaría con la gráfica si el recipiente no fuera cilíndrico, es decir, ¿también podría ser una gráfica similar o cambiaría? Si bien esto se desarrolla en las situaciones variacionales de los momentos 2 y 4, incorporarlo en este momento podría reducir el número de actividades a plantear a los estu-

diantes y/o reforzar las discusiones de este punto. Por otra parte, cabe señalar que, por el objetivo de la actividad, no se lograría tener evidencia del nivel 3 de este indicador, pues no están implicadas variaciones sucesivas. Esto en sí no es problemático, pero es necesario considerar que deben plantearse situaciones variacionales que requieran poner en acción estas variaciones sucesivas, como en el momento 4; estudiar sólo fenómenos o situaciones de variación constante, sí sería problemático para el desarrollo del Pylvar. No obstante, también debe señalarse que el Pylvar no puede desarrollarse por completo a partir de una sola situación variacional.

Con respecto al último indicador de la rúbrica "Establece o interpreta modelos para estimar o predecir", ocurre algo similar a lo señalado en el indicador anterior en relación con la dificultad de alcanzar el nivel de desempeño más alto. Debido a las características de la situación de llenado y las preguntas formuladas, la predicción que se solicita puede considerarse de corto alcance y podría no aportar evidencia suficiente de si el estudiante puede reconocer que el comportamiento variacional está vinculado con la forma cilíndrica, sin importar su tamaño, o solo lo reconoce para el cilindro particular bajo estudio.

Por tanto, en caso de que un estudiante responda correctamente, solo se le podría ubicar en el nivel de desempeño 2 de la rúbrica para este indicador. La sugerencia dada antes, respecto a cuestionar a los estudiantes qué pasaría con la gráfica si el recipiente no fuera cilíndrico, podría llevar a asociar este tipo de comportamiento a cualquier cilindro, contribuyendo a avanzar hacia el nivel 3. De nuevo, si bien el nivel 3 puede ser alcanzado con la situación variacional del momento 2, incluir la pregunta en el momento 1 puede reducir el número de actividades que se plantean a los estudiantes.

Al combinar el análisis de la situación variacional mediante el esquema de desarrollo del Pylvar y la confrontación de los posibles desempeños de los estudiantes en la situación del primer momento utilizando la rúbrica, se puede establecer que, con dicha situación, si bien se abordan aspectos de los estadios 2, 3 y 4 del esquema de desarrollo del Pylvar, no siempre se reúne evidencia suficiente para determinar si el estudiante está desarrollando "altos niveles" de desempeño en los indicadores de la rúbrica correspondientes. Los descriptores de esos niveles altos sirvieron como base para proponer modificaciones a la situación y poder obtener evidencia más precisa del desarrollo del Pylvar.

Con base en las etapas de análisis de las situaciones variacionales desarrolladas aquí, se evidencia cómo el esquema de desarrollo del Pylvar y la rúbrica de evaluación permiten determinar la pertinencia de las preguntas y características que conforman una situación variacional y si los desempeños esperados de los estudiantes al resolverla dan evidencia de un buen desarollo de este pensamiento. En este sentido, los descriptores de los niveles de logro

orientan las modificaciones a realizar en tales situaciones variacionales para obtener evidencia suficiente de altos niveles de desarrollo del Pylvar.

Reflexiones finales

El ejercicio de reflexión desarrollado en este documento ejemplifica la importancia de contar con referentes teóricos y/o prácticos que orienten guiar el diseño de situaciones variacionales enfocadas en el desarrollo del Pylvar, los cuales no eran explícitos ni concretos antes de las propuestas descritas aquí (esquema y rúbrica). Esto quizá explica en parte las dificultades para incorporar el Pylvar al aula y su desarrollo en general entre los estudiantes. Si bien, como se señaló antes, no todas las actividades deben transitar por todos los estadios del esquema de desarrollo del Pylvar, pero sí es importante que el estudiante desarrolle las habilidades y formas de razonamiento que le permitan enfrentarlos todos. En este último sentido, la rúbrica desempeña un papel relevante, pues como se ejemplificó, sus niveles de desempeño se convierten en los criterios sobre los que se buscará evidencia de su alcance por parte del estudiante y si esta no se puede obtener, tales criterios orientan las modificaciones a realizar para obtenerla. Así, esto permite decidir qué preguntas, acciones o contextos podrían emplearse y/o plantearse dentro la situación variacional para generar y obtener dicha evidencia. Por tanto, el esquema de la Figura 1 y la rúbrica de la Tabla 1 sí proporcionan directrices para el diseño de situaciones variacionales que favorezcan el desarrollo del Pylvar y/o para analizar si situaciones variacionales ya diseñadas son pertinentes para esto o en su caso hacerles los cambios requeridos.

Por otra parte, los resultados de los análisis también dejan reflexiones relevantes para el desarrollo de la línea de investigación del Pylvar. Por ejemplo, las dificultades evidenciadas respecto al escaso desarrollo del estadio 1 para las situaciones variacionales analizadas aquí, diseñadas bajo el enfoque del Pylvar, son similares a las identificadas en Cabrera et al. (2023) al analizar las actividades de libros de texto de primaria, las cuales no fueron elaboradas bajo el Pylvar. Por tanto, cabe preguntarse, ¿por qué se presentan las mismas dificultades? Aunque responder a esto requiere análisis adicionales, demuestra la necesidad de referentes de diseño (el esquema y la rúbrica) en continua mejora y refinamiento. Asimismo, el identificar que pareciera que no siempre las prácticas predictivas guían las preguntas y acciones solicitadas en las situaciones variacionales, plantea la necesidad de cuestionar qué se está entendiendo por dichas prácticas[2] y qué papel tiene la caracterización de

[1] En el apartado de descripción del esquema de desarrollo del Pylvar se establece que las prácticas predictivas hacen referencia, en un sentido amplio, a aquellas acciones que deben desarrollarse con la finalidad de determinar estados o comportamientos desconocidos de una situación o fenómeno dinámico.

modelo establecida al momento de interpretar la frase "determinar … comportamientos desconocidos de una situación o fenómeno dinámico". Por ejemplo, ¿basta describir un comportamiento o es necesario que este comportamiento sea reconocido como un modelo, lo que implica intervenir en la situación bajo estudio? Por otra parte, se declara que comprender qué es lo que varía constituye el núcleo del desarrollo del Pylvar, pero no se atiende en las situaciones variacionales el desarrollo del estadio 1, donde esta comprensión se desarrollaría. Estos aspectos que deben ser discutidos en la comunidad de investigadores del Pylvar, también son aportes derivados de este trabajo.

Para finalizar estas reflexiones, postulamos como continuidad del trabajo realizado aquí, la pertinencia de pasar de un nivel teórico a un nivel práctico. En otras palabras, valorar y analizar si lo aquí desarrollado también tiene la misma utilidad y efecto en la práctica docente en el aula o, por el contrario, requiere mayores precisiones en los referentes mencionados para poder apoyar a los profesores en la promoción y alcance del desarrollo del Pylvar entre los estudiantes.

Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación por el financiamiento para el desarrollo de este trabajo a través de la estancia posdoctoral académica-continuidad para desarrollar el proyecto "Diseño de situaciones de aprendizaje como estrategia de desarrollo profesional docente".

Referencias

Andrade, H. G. (2000). Using Rubrics to Promote Thinking and Learning. *Educational Leadership, 57*(5), 13–18. https://bit.ly/49mNXmZ

Antonio, R., Escudero, I. & Medrano, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258–280. https://doi.org/10.24844/EM3101.10

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19–48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1811

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional* [Tesis de doctorado]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Caballero-Pérez, M. & Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. A*cta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, 1066–1074. https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf

Cabrera, L. M. (2024). Rúbrica para evaluar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 243–248). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-26

Cabrera, L., Ruiz, P., Galaviz, P., & González, J. (2023). Estudio exploratorio sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional en los libros de texto gratuitos de primaria en México. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 8*, 1–24 . https://doi.org/10.46618/iime.181

Cabrera, L. & Martínez, J. (2022). Esquema para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en secundaria. Un estudio exploratorio. En B. Rodríguez, E. García, & A. Cano (Coord.) *Los estudios sobre la enseñanza del Español y las Matemáticas en educación básica, hoy* (pp. 167–195). Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Querétaro y Benemérita Escuela Normal Veracruzana.

Cabrera, L. & Zaldívar, J. D. (2021). Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34*(2), 189–199. https://www.clame.org.mx/documentos/alme34_2.pdf

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Editorial Gedisa.

Cardeñoso, J. (2006). La evaluación como elemento de instrucción y sus peculiaridades en el área de matemáticas. En J. Chamoso, & J. Durán (Eds). *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas* (pp. 157–186). Ministerio de Educación y Ciencia de España.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Chávez-Ruiz, Y. & Martínez-Rizo, F. (2018). Evaluar para aprender: hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática, 30*(3), 211–246. https://doi.org/10.24844/EM3003.09

De la Orden, A. (2009). Evaluación y calidad: análisis de un modelo. *Estudios sobre Educación, 16*, 17–36.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada* (2.a ed.). Díaz de Santos.

Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics. En Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 301–304). Cinvestav, AMIUTEM y PME-NA. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Kafetzopoulos, G.I. & Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 67*, 10099. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993

Montiel G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas & A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexione*s (pp. 61–88). Lectorum.

Paoletti, T. & Moore, K. C. (2018) A covariational understanding of function: Putting a horse before the cart. *For the Learning of Mathematics, 38*(3), 37–43. https://digitalcommons.montclair.edu/mathsci-facpubs

Sanmartí, N. (2007). *10 ideas Clave. Evaluar para aprender* (1er. Ed). Editorial GRAÓ.

Savic, M., Karakok, G., Tang, G., Turkey, E. H., & Naccarato, E. (2017). Formative Assessment of Creativity in Undergraduate Mathematics: Using a Creativity-in- Progress Rubric (CPR) on Proving. En R. Leikin, & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and Giftedness, Advances in Mathematics Education* (pp. 23–46). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3_3

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Pensamiento funcional desarrollado por estudiantes de secundaria al resolver dos tareas asociadas al concepto de función escalonada

Carlos Enrique Flores Gasca [1]
Verónica Vargas Alejo [2]

Resumen
Este capítulo presenta los resultados de una investigación cualitativa cuyo objetivo fue identificar los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan estudiantes de secundaria al resolver tareas relacionadas con la función escalonada. El referente teórico utilizado se conforma de conceptualizaciones sobre el pensamiento funcional. Se diseñaron e implementaron dos tareas apoyadas en SimCalc MathWorlds, contextualizadas en el movimiento de un automóvil. Participaron seis estudiantes de tercer grado de secundaria. Los resultados muestran que los tipos de pensamiento funcional asociados con la recursividad y la covariación cualitativa, exhibidos en la primera tarea, se desarrollaron, de tal forma que en la segunda surgieron tipos de pensamiento funcional vinculados con la covariación cuantitativa y la correspondencia.

Palabras clave
Pensamiento funcional, función escalonada, nivel secundaria, tarea

---

[1] carlos.flores@unaq.mx
1Universidad Aeronáutica en Querétaro, Querétaro, México

[2] veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, Jalisco, México

Flores Gasca, C. E., & Vargas Alejo, V. (2025). Pensamiento funcional desarrollado por estudiantes de secundaria al resolver dos tareas asociadas al concepto de función escalonada. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 135–153). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-06

Introducción

Diversos estudios (Billings & McClure, 2005; De Villiers, 1988; Flores-Gasca & Vargas-Alejo, 2021, 2023, 2024; Kaput & Roschelle, 2013; Vargas-Alejo et al., 2016) han documentado las dificultades que enfrentan estudiantes de distintos niveles educativos al resolver problemas relacionados con funciones escalonadas. En particular, se ha identificado que este tipo de funciones, utilizadas con frecuencia para modelar fenómenos discontinuos en contextos reales, presentan retos significativos tanto en su interpretación como en su construcción gráfica.

Por ejemplo, Morge y Pusey (2010) reportan que estudiantes de secundaria experimentaron dificultades para transitar entre diversas representaciones, explicar el comportamiento de funciones definidas por partes e interpretar gráficas en contextos significativos. De manera similar, De Villiers (1988) y Vargas-Alejo et al. (2016) destacan que incluso en el nivel universitario persisten obstáculos cuando los estudiantes se enfrentan al análisis de funciones discontinuas o constantes. Vargas-Alejo et al. (2016) observó que algunos estudiantes universitarios tienen dificultades básicas como subdividir correctamente los ejes del plano cartesiano al representar gráficamente una función escalonada. Con frecuencia, transfieren mecánicamente los datos de una tabla a la gráfica sin considerar la naturaleza de la función, lo que da lugar a representaciones erróneas, como gráficas lineales, sin sentido en cuanto al comportamiento de la situación representada, ya que los estudiantes unen puntos mecánicamente o bien elaboran gráficas de barras.

Billings y McClure (2005) así como De Villiers (1988) vinculan estas dificultades con el enfoque tradicional de enseñanza del concepto de función y función escalonada, respectivamente, en el cual predomina la representación algebraica y se minimiza el análisis de la relación funcional subyacente. Este enfoque limita las oportunidades de los estudiantes para dar sentido a las variables involucradas, explorar la relación entre ellas y darles significado al construir conexiones entre distintas representaciones (gráficas, tabulares, verbales o algebraicas) de la función.

Ante este panorama, Smith (2008) señala la necesidad de ofrecer a los estudiantes, desde niveles escolares tempranos, experiencias distintas a las tradicionales que les permitan desarrollar pensamiento funcional, entendido como "una actividad cognitiva que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente en los tipos de pensamiento que, a partir de una relación específica, conducen a generalizaciones de esa relación entre instancias" (Smith, 2008, p. 143).

En esta línea, con la necesidad de ofrecer a los estudiantes experiencias distintas a las tradicionales que inclusive fueran más allá de comprender conceptos matemáticos complejos como el de función escalonada, está la

investigación de Kaput y Roschelle (2013) quienes en sus estudios buscan la democratización de la enseñanza del cálculo. Estos investigadores propusieron el uso del software *SimCalc MathWorlds* para, entre otros fines más complejos, facilitar el análisis de fenómenos al permitir que los estudiantes visualizaran cómo cambian las variables y cómo se relacionan entre sí. Estos investigadores señalan que conviene aprovechar la capacidad de la tecnología para vincular las representaciones gráficas con los fenómenos físicos y con ello conseguir el desarrollo de conocimiento por los estudiantes.

Derivado de lo anterior, el objetivo de esta investigación, de tipo estudio de caso, fue analizar el pensamiento funcional que exhiben estudiantes de secundaria de una escuela pública marginada al resolver tareas centradas en funciones escalonadas y apoyadas en el uso de la simulación del movimiento de un automóvil de SimCalc MathWorlds. Estas tareas fueron diseñadas a partir de las propuestas de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016). La pregunta que orienta este estudio es: ¿Cuáles son los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan estudiantes de nivel secundaria al realizar dos tareas relacionadas con la función escalonada y apoyadas en el uso de SimCalc MathWorlds?

Antecedentes

Los conceptos de función y función escalonada son relevantes en las matemáticas porque constituyen nociones básicas de la disciplina. Permiten interpretar, explicar y predecir fenómenos que ocurren con frecuencia a nuestro alrededor. Datey (2015), por ejemplo, encontró que la función escalonada permite interpretar el fenómeno de *flujo de caja*, entendido como movimiento de efectivo (ingresos y egresos) dentro y fuera de una empresa-durante un período de tiempo específico. Este investigador señala que, aunque en ocasiones es útil pensar en funciones continuas para describir el comportamiento de situaciones, la función escalonada puede ofrecer una descripción más precisa del flujo de caja. En su estudio, criticó varios enfoques matemáticos de otros investigadores por su dificultad para describir y explicar el fenómeno y como resultado propuso la función escalonada como base para explicar de manera más adecuada el comportamiento del fenómeno.

El concepto de función escalonada es también relevante en la educación matemática. Llaría (2011) menciona, por ejemplo, que las funciones escalonadas pueden servir como apoyo para el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, este concepto se aborda con poca frecuencia en los cursos de matemáticas previos al cálculo. Al respecto existen varias investigaciones que documentan experiencias sobre el aprendizaje de esta función en el aula.

Morge y Pusey (2010), por ejemplo, exploraron cómo estudiantes de secundaria y del nivel universitario concebían a las funciones no lineales, en particular las funciones escalonadas, al transitar entre distintas representa-

ciones (tablas, gráficas, expresiones). Estos investigadores otorgaron importancia al contexto para promover la comprensión profunda de las relaciones funcionales. Entre sus resultados encontraron que los estudiantes de secundaria usaron modelos físicos, diagramas y tablas. La mayoría identificó un patrón correcto, aunque señalaron que muchos de los estudiantes no lograron escribir una regla simbólica formal. En cambio, los estudiantes universitarios tendieron a usar reglas simbólicas rápidamente (dividir entre 3 y redondear hacia arriba), pero en ocasiones razonaron incorrectamente sobre los residuos.

En su estudio, Morge y Pusey (2010) concluyeron que trabajar con funciones escalonadas en secundaria es valioso, pero desafiante. Los contextos pertinentes y el uso de modelos físicos fueron útiles para el abordaje del problema, sin embargo, para futuras implementaciones, sugirieron incluir tablas y gráficos para favorecer la comprensión, ya que los estudiantes que representaron el problema de múltiples formas (tabla y gráfico) tuvieron más éxito.

Billings y McClure (2005) realizaron una investigación con estudiantes de séptimo grado de secundaria para ayudarlos en el desarrollo de una comprensión profunda de las funciones lineales y escalonadas. Utilizaron un contexto real significativo que permitiera a los estudiantes vincular las representaciones tabulares, gráficas, verbales y simbólicas de las funciones. Se basaron en la idea de que comprender una función implicaba analizar la relación entre variables, más allá de sus representaciones. Entre sus resultados identificaron que los estudiantes identificaron patrones en tablas (Peso vs. Número de hojas) y los emplearon para hacer predicciones precisas; comprendieron la diferencia entre funciones lineales (peso total en función del número de hojas) y funciones escalonadas (costo postal en función del peso). Lograron generalizar verbal y simbólicamente las relaciones: por ejemplo, al señalar que el peso del paquete se podía calcular como 0.16 × (número de hojas) + 0.53. Entendieron el concepto de que, en la función escalonada, el costo *salta* al siguiente nivel solo cuando se supera cierto umbral de peso.

Billings y McClure (2005) concluyeron que el contexto real y las representaciones, así como la manipulación de datos, la predicción de valores y la formulación de generalizaciones verbales y simbólicas resultan importantes para que los estudiantes, incluso de secundaria, construyan una comprensión profunda de las funciones lineales y escalonadas.

Kaput y Roschelle (2013), por su parte, exploraron cómo a través de tecnologías podría democratizarse el acceso al pensamiento matemático complejo, particularmente el de cambio y variación (asociado al cálculo), y transformar el currículo escolar de matemáticas para que más personas comprendan y apliquen las ideas fundamentales del cálculo. Utilizaron el software SimCalc MathWorlds para que estudiantes de secundaria mani-

pularan gráficas dinámicas vinculadas con animaciones (por ejemplo, elevadores o payasos que se mueven). Las tareas diseñadas contemplaban representar funciones de velocidad, comparar áreas bajo curvas (como distancia), y explorar conceptos de valor medio, continuidad y límite, a partir del movimiento real de los estudiantes y su representación gráfica digital. Entre las funciones trabajadas se incluyó la función escalonada.

Sus hallazgos indican que los estudiantes atribuyeron un significado más preciso a conceptos complejos del cálculo como el valor medio, continuidad y límites, mediante la experiencia corporal y visual, antes de trabajar con notación formal. Las gráficas, entre ellas las de funciones escalonadas, fueron comprendidas con mayor precisión en términos de los fenómenos físicos representados.

El proyecto SimCalc (Kaput & Roschelle, 1994), inspirado principalmente en James Kaput, se creó con el objetivo de hacer accesibles a todos los estudiantes, desde los niveles básicos, las ideas fundamentales del cálculo, como la tasa de cambio y acumulación. Su planteamiento no parte de símbolos abstractos, sino de representaciones basadas en movimientos familiares, mediante gráficos similares a juegos.

SimCalc MathWorlds se distingue de otros programas como GeoGebra (Mumcu, 2024) porque en lugar de generar gráficas y ecuaciones a partir de fórmulas escritas por los estudiantes, son las animaciones de los objetos creados en el *mundo matemático* las que generan automáticamente las tablas, gráficas y ecuaciones. Esto permite que los alumnos observen de manera simultánea cómo el cambio de posición y velocidad de los objetos (automóviles, por ejemplo) afecta la pendiente en las gráficas. SimCalc MathWorlds se describe, por lo tanto, como un entorno intuitivo y simultáneo.

Una investigación reciente en la que se utilizó SimCalc MathWorlds es la de Mumcu (2024) quien trabajó con 12 estudiantes de octavo grado para analizar el desarrollo de su pensamiento funcional a través de un experimento de enseñanza que integraba este software. Sus hallazgos mostraron un progreso en las estrategias para dibujar gráficas, escribir una ecuación de dos variables y hallar la pendiente de la gráfica y ecuaciones solicitadas. Además, aumentó el número de estudiantes que pudieron explicar la pendiente al observar la tabla, la gráfica y la ecuación. Concluyó que las tablas, gráficas y ecuaciones presentadas simultáneamente en los mundos matemáticos pudieron haber contribuido al desarrollo de su conocimiento. En su estudio se trabajó únicamente con la función lineal, no la escalonada.

En este estudio interesa, de manera específica, analizar el pensamiento funcional de estudiantes de secundaria, al resolver tareas apoyadas en SimCalc MathWorlds relacionadas con la función escalonada. Se toman como referentes teóricos las aportaciones de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016) sobre el Pensamiento funcional, a continuación, se describen.

Referentes teóricos

De acuerdo con Blanton y Kaput (2011), aprender matemáticas implica que los estudiantes construyan, relacionen, manipulen y generalicen patrones, relaciones y funciones mediante el uso y la transición entre distintas representaciones. En esta misma línea, Kaput (2008) y Smith (2008) señalan que también supone que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades que les permitan resolver "situaciones funcionales", entendidas como problemas cercanos a la vida cotidiana, que pueden describirse o predecirse a partir del uso de una o más funciones.

Pittalis et al. (2020) por su parte, señalan que, al involucrar a los estudiantes en la resolución de situaciones funcionales, desarrollan procesos cíclicos de conjeturas y acciones que les permiten: *a*) analizar el cambio cualitativo y cuantitativo de las variables involucradas, *b*) establecer la relación entre ellas y *c*) resolver la situación mediante dicha relación.

Pensamiento Funcional

Smith (2008) propuso un marco para describir los tipos de pensamiento funcional que pueden exhibir los estudiantes al participar en la resolución de situaciones problema asociadas a funciones. De acuerdo con este investigador, los tipos de pensamiento funcional (Tabla 1) son:

1) Pensamiento funcional de recursividad
2) Pensamiento funcional de covariación
3) Pensamiento funcional de correspondencia

Tabla 1

Tipos de pensamiento funcional

Tipos de pensamiento funcional	Descripción
Pensamiento Funcional de Recursividad	Se refiere a encontrar el patrón de una secuencia de valores de una variable
Pensamiento Funcional de Covariación	Se centra en el análisis de cómo dos o más cantidades varían simultáneamente y se analiza la forma en la que una varía con respecto a otra
Pensamiento Funcional de Correspondencia	Hace referencia sobre la relación entre pares de variables correspondientes. De acuerdo con Confrey y Smith (1995) este pensamiento ocurre cuando los estudiantes forman o relacionan las dos cantidades variables y construyen una regla que relacione la variable independiente y dependiente

Nota. Adaptado de Smith (2008)

Estos tipos de pensamiento funcional fueron ampliados por Panorkou y Maloney (2016), con base en investigaciones de Confrey y Smith (1995) y de Smith (2008), mediante una clasificación de los tipos de pensamiento funcional (Tabla 2) que también pueden exhibir los estudiantes. Los inves-

tigadores señalan que esta extensión posibilita clasificar "las respuestas de los estudiantes desde representaciones o descripciones menos sofisticadas a más sofisticadas" (Panorkou & Maloney, 2016, p. 96).

Tabla 2
Tipos de pensamiento funcional

Nivel	Tipo de Pensamiento Funcional
4	Correspondencia y Covariación
3	Covariación cuantitativa y visualización de la relación como una línea en el plano de coordenadas
2	Covariación Cuantitativa
1	Covariación Cualitativa

Nota. Extracto tomado de Panorkou y Maloney (2016)

Estos niveles de pensamiento funcional (Tabla 2) se utilizaron en esta investigación para analizar las respuestas de los estudiantes y a partir de los resultados se elaboró una nueva propuesta de niveles de pensamiento funcional, derivados y adaptados de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016), la cual se presenta en la sección de metodología (Tabla 3).

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa, específicamente un estudio de caso de carácter instrumental (Stake, 1994), ya que el objetivo fue comprender en profundidad cómo un grupo de estudiantes de secundaria de una escuela marginada exhibía y desarrollaba su pensamiento funcional al resolver tareas diseñadas con apoyo del software SimCalc MathWorlds. Según Stake (1994), los estudios de caso instrumentales permiten explorar un fenómeno particular para obtener una comprensión más profunda de un tema o problema educativo. En este caso, el fenómeno de interés fue el pensamiento funcional de los estudiantes en contextos de simulaciones matemáticas con tecnología educativa.

De acuerdo con Yin (2018), un estudio de caso se justifica metodológicamente cuando se busca responder preguntas del tipo "cómo" o "por qué". Los casos no deben considerarse como una muestra representativa, sino oportunidades para explorar y comprender un fenómeno en profundidad en contextos reales. Estas condiciones se cumplen en este estudio, en el cual se analizaron las producciones de los estudiantes durante su interacción con una herramienta tecnológica en el entorno escolar.

Participantes

El estudio de caso se llevó a cabo en una escuela secundaria pública. La población de estudio estuvo conformada por un grupo de seis estudiantes,

lo que permitió un análisis detallado de sus procesos de pensamiento. Los participantes provenían de diferentes grupos de tercer grado de secundaria, quienes fueron seleccionados aleatoriamente por el director de la institución. Una vez elegidos se les preguntó si deseaban participar, y aceptaron.

Las Tareas

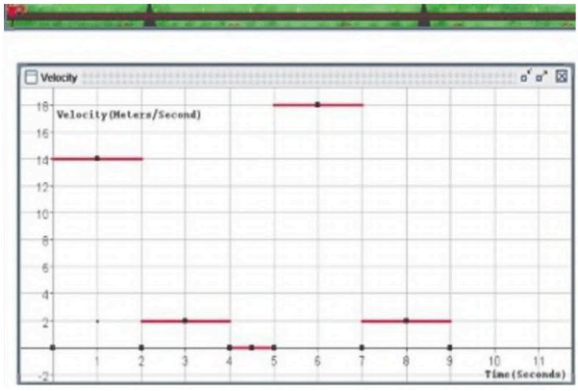
Se diseñaron dos tareas expresas para este estudio de caso. Estas tareas se relacionaban con el fenómeno del movimiento de un automóvil y fueron elaboradas por un investigador y un profesor-investigador. Para su diseño se consideraron los aportes de Smith (2008) y Panorkou y Maloney (2016). El propósito fue conocer cómo los estudiantes identificaban las variables, algún patrón de cambio, la covariación, es decir, si reconocían cómo las cantidades variaban de manera simultánea y, finalmente, si lograban construir la regla de correspondencia entre las variables. Estas tareas fueron implementadas mediante el software SimCalc MathWorlds, que posibilita la visualización de relaciones funcionales a través de representaciones gráficas y animaciones dinámicas.

La primera tarea consistió en:

a) Una simulación del movimiento de un automóvil en el programa Carsz de SimCalc MathWorlds (Figura 1) y una discusión grupal para describir de manera verbal el movimiento del automóvil en términos de las variables velocidad promedio y tiempo, involucradas en el contexto del problema. Los fenómenos simulados presentaban distintos comportamientos, es decir, variaciones en su velocidad promedio en distintos intervalos de tiempo.
b) Una hoja de trabajo (Figura 2) elaborada a partir del uso de una nueva simulación (Figura 3) del programa Carsz.

Figura 1

Simulación del Programa Carsz de SimCalc MathWorlds



Nota. Extracto tomado de Panorkou y Maloney (2016)

Figura 2

Extracto de Hoja de trabajo de la Tarea 1

1. ¿Cuáles son las variables que te permiten describir el movimiento del automóvil en la gráfica?

2. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

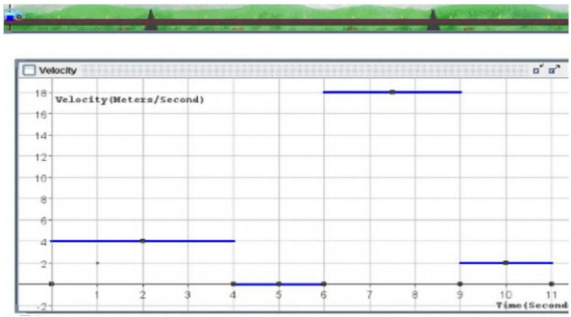
3. Describe el comportamiento del automóvil con base en la gráfica que se observa en el video. Es decir, ***describe*** ¿cómo varía la velocidad media del automóvil con respecto al tiempo?

4. Describe la velocidad media que lleva el automóvil en los intervalos de 0 a 4 segundos, de 4 a 6 segundos, de 6 a 9 segundos y de 9 a 11 segundos.
   ¿Cambió la velocidad media que llevaba el automóvil del segundo 5 al segundo 8? Si fue así, ¿cuánto cambio?

Nota. Imagen tomada de la Hoja de trabajo. Fuente propia

Figura 3

Extracto de la Simulación asociada a la hoja de trabajo de la Tarea 1



Nota. Imagen tomada de la simulación del programa. Fuente propia

La segunda tarea consistió en:

Una nueva hoja de trabajo elaborada exprofeso (Figura 4), donde los estudiantes tenían que responder varias preguntas a partir de la descripción del movimiento de un autobús durante un trayecto determinado.

Figura 4

Extracto de Hoja de trabajo de la Tarea 2

1. La siguiente tabla describe el movimiento de un autobús RTP que recorre la Av. Tláhuac desde la estación del metro Tezonco.

Tiempo (segundos)	Velocidad Media (metros/segundos)
(0, 3)	3
[3,5]	5
(6, 9]	1
(9, 10)	0

Describe con tus propias palabras el movimiento del RTP, en términos de lo que ocurre en cada intervalo. Escribe algebraicamente y gráficamente cómo es la velocidad del autobús RTP.

El objetivo de la implementación de ambas tareas fue analizar el pensamiento funcional de los estudiantes de secundaria, apoyado en la simulación SimCalc MathWorlds a la vez que se promovía su desarrollo.

La implementación

Un investigador y un profesor-investigador organizaron el cronograma de implementación de las tareas. Todas las tareas fueron resueltas de forma individual por los estudiantes de secundaria. La duración total de la implementación fue de dos horas con cincuenta minutos, distribuidas de la siguiente manera (Tabla 3), durante aproximadamente 140 minutos los estudiantes trabajaron individualmente y los últimos 30 minutos lo hicieron en forma grupal.

Tabla 3

Duración de la implementación de las tareas

Tareas	Descripción	Duración
Tarea 1	Implementación de la Tarea 1 y cierre de la Tarea 1.	80 minutos
Tarea 2	Implementación de la Tarea 2 y cierre de la Tarea 2.	60 minutos
	Cierre de la sesión Plenaria.	30 minutos

La implementación de la Tarea 1 consistió en lo siguiente. Inicialmente, el profesor-investigador realizó una simulación con el apoyo del programa SimCalc MathWorlds Carsz y preguntó a los estudiantes sobre el comportamiento del automóvil durante su recorrido. También les preguntó por las variables que intervinieron en este. Posteriormente, les proporcionó la hoja de trabajo de la Tarea 1 (Figura 2) para que la resolvieran individualmente.

Al concluir la resolución de la hoja de trabajo de la Tarea 1, el profesor-investigador organizó una discusión grupal donde los estudiantes compartieron y discutieron sus respuestas. A continuación, el profesor-investigador les proporcionó la hoja de trabajo de la Tarea 2 (Figura 4).

El papel del profesor-investigador durante la implementación fue formular preguntas a los estudiantes de secundaria que le brindaran información respecto a su pensamiento funcional, en términos de cómo resolvían las tareas: ¿qué estás haciendo? ¿entiendes la situación? ¿puedes describir este segmento de línea utilizando el contexto de la situación? Asimismo, promovió las interacciones grupales y las discusiones finales.

Recopilación de datos

De acuerdo con Yin (2018) es fundamental aplicar la triangulación de datos en los estudios de caso, es decir, recurrir a múltiples fuentes de evidencia (documentos, observaciones, etc.) para validar los hallazgos de un estudio y

obtener una visión más completa y profunda del caso. En esta investigación se recopiló información detallada durante las dos sesiones de implementación, mediante:

a) Observación directa del trabajo de los estudiantes.
b) Hojas de trabajo individuales.
c) Grabaciones de audio de las sesiones.
d) Notas de campo del profesor-investigador.

Los audios fueron transcritos para su posterior análisis, y las respuestas escritas se organizaron por tarea y por estudiante para facilitar la codificación.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se efectuó mediante una clasificación emergente (Tabla 4), derivada del examen sistemático de las respuestas de los estudiantes. La clasificación incorporó elementos de los tipos de Pensamiento Funcional (PF) propuestos por Panorkou y Maloney (2016) y por Smith (2008). Esta categorización permitió identificar patrones en la forma en que los estudiantes interpretaban y utilizaban relaciones funcionales en el contexto de las tareas propuestas.

Tabla 4

Tipos de Pensamiento Funcional

Pensamiento Funcional	Descripción	Tipo de Pensamiento Funcional
PF1	Variación	El estudiante exhibe pensamiento de recurrencia, es decir, puede identificar el patrón de cambio de una o más cantidad que varían en el contexto de un problema
PF2	Covariación Cualitativa	El estudiante no solo exhibe pensamiento de recurrencia, sino que identifica y relaciona las variables que están involucradas en la situación problema cualitativamente
PF3	Covariación Cuantitativa	El estudiante no solo exhibe covariación cualitativa, sino que identifica y relaciona cuantitativamente las variables que están involucradas en la situación problema
PF4	Regla de Correspondencia	El estudiante, además de exhibir covariación cuantitativa, puede establecer una relación (algebraicamente) entre el par correspondiente de la variable dependiente y la variable independiente

Nota. Tipos de pensamiento funcional, adaptado de Panorkou y Maloney (2016)

Resultados y Discusión

Se analizan y discuten los resultados derivados del estudio de caso. El análisis se presenta a partir del pensamiento funcional observado y su desarrollo.

Tarea 1. Pensamiento funcional inicial

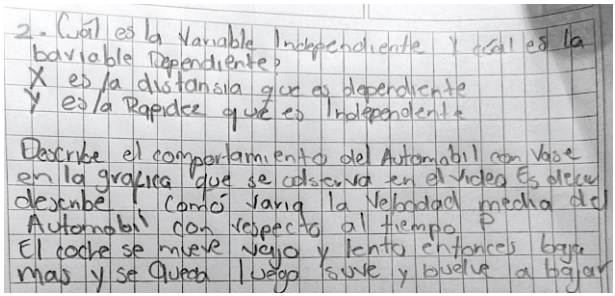
Se identificaron principalmente tres tipos de pensamiento funcional: PF1, PF2 y PF3 en las respuestas de los estudiantes a la Tarea 1 (Figura 2). Enseguida se describe en detalle al respecto.

Los estudiantes a_1 y a_2 describieron el comportamiento del automóvil en términos de la rapidez y la distancia. En la Figura 5 se observa cómo el estudiante a_1 identificó la rapidez como variable de tipo independiente y la distancia como variable de tipo dependiente [PF1]. Asimismo, logró describir el movimiento del automóvil cualitativamente al escribir *el coche…baja, luego sube y vuelve a bajar* [PF2]

Es decir, el estudiante a_1 exhibió pensamiento funcional de recurrencia, al identificar el patrón de cambio de las cantidades rapidez y distancia, que variaban en el contexto de un problema. Además, relacionó ambas variables, debido a la simulación observada en la que el automóvil se desplazaba.

Figura 5

Descripción del movimiento del automóvil por a_1



Nota. Respuestas de a_1 las preguntas 2 y 3 de la Tarea 1. Fuente propia

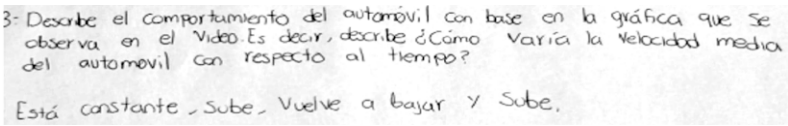
El estudiante a_2, por su parte, también describió el movimiento del automóvil en términos de rapidez y distancia. Esto se evidenció durante la sesión cuando el estudiante mencionó lo siguiente:

Estudiante a_2: *la rapidez del coche es constante y depende de la distancia que recorre* [PF1]

Asimismo, se observa en la Figura 6 que el estudiante describió el movimiento del automóvil cualitativamente al escribir que la rapidez de este *está constante, sube, vuelve a bajar y sube* de nuevo [PF2]. El estudiante relacionó las variables distancia y rapidez.

Figura 6

Descripción del movimiento del automóvil por a_2



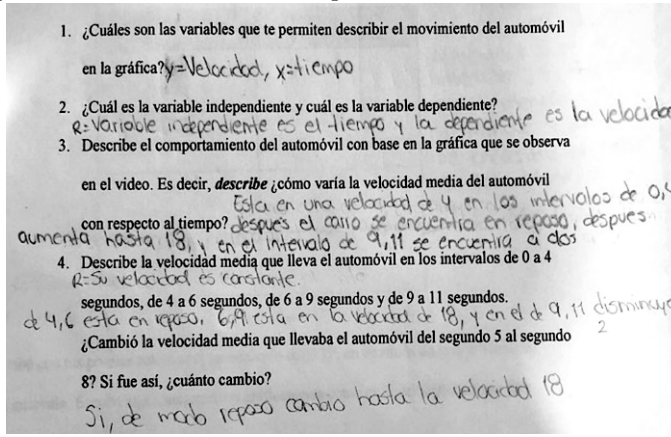
Nota. Respuesta de a_2 a la preguntas 3 de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes a_3, a_4, a_5 y a_6 por su parte, describieron el movimiento del automóvil en términos de la velocidad y el tiempo. Al respecto, en la

Figura 7 se observa cómo el estudiante a_4 describió el movimiento del automóvil en esos términos de la velocidad y tiempo [PF1]. Este estudiante al igual que logró describir cualitativa y cuantitativamente [PF2 y PF3] las variables involucradas en el contexto del problema.

Figura 7

Descripción del movimiento del automóvil por a_4

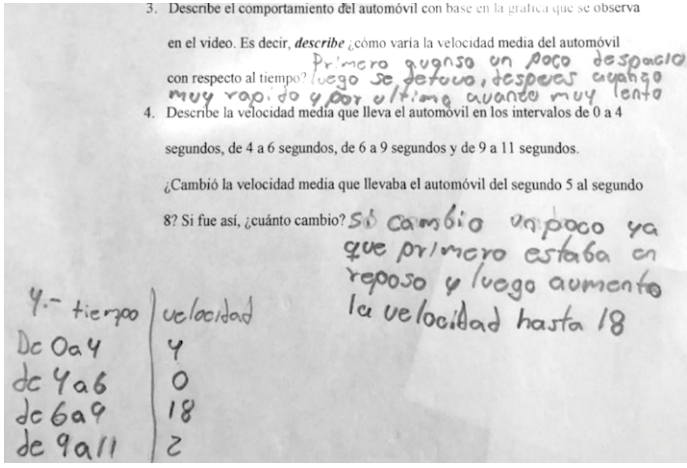


Nota. Respuestas de a_4 a las preguntas de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes a_5 y a_6 también lograron describir el movimiento del automóvil en términos de la velocidad y tiempo [PF1], sin embargo, ellos elaboraron, adicionalmente, tablas para responder a la pregunta cuatro (Figura 8 y Figura 9)

Figura 8

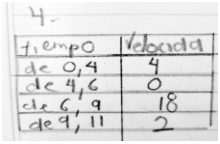
Descripción del movimiento del automóvil por a_5



Nota. Respuesta de a_5 a la pregunta 4 de la Tarea 1. Fuente propia

Figura 9

Tabla complementaria para describir el movimiento del automóvil por a_6



Nota. Respuesta de a_6 a la pregunta 4 de la Tarea 1. Fuente propia

Los estudiantes a_5 y a_6 lograron describir las variables involucradas en el contexto del problema de forma cualitativa y cuantitativa [PF2 y PF3] utilizando dos representaciones (escrita y tabular) para describir la situación.

Reflexión sobre las respuestas a la Tarea 1

Los estudiantes a_1 y a_2 describieron la situación de manera cualitativa, en términos de la rapidez y la distancia. Ambos emplearon la rapidez como sinónimo de velocidad, esto se constató cuando el profesor-investigador les preguntó *¿Qué es la rapidez?* A lo que ellos respondieron: *es la velocidad de un automóvil*. Esto coincide con los hallazgos de De Villiers (1988), en el sentido de que suele ser común que los estudiantes confundan el término de rapidez con el de velocidad cuando se encuentran describiendo un problema asociado a este concepto.

En la descripción de sus respuestas se observa un PF inestable, ya que sus respuestas fueron en términos de rapidez y velocidad y no las descritas en el contexto del problema, además se trató de respuestas escasas y cualitativas, por lo que podemos decir que los estudiantes se encuentran en un nivel PF1.

Los estudiantes a_3, a_4, a_5 y a_6 describieron sus respuestas en términos de la velocidad y el tiempo de forma cualitativa y cuantitativa. Sin embargo, se observa que presentaron dificultades para describir los extremos de los intervalos. Esto coincide con Kaput y Roschelle (2013), en el sentido de que los estudiantes suelen tener dificultades para describir los extremos de los intervalos cuando se describen funciones definidas a trozos. Otro aspecto relevante es que emplearon el término velocidad como sinónimo de velocidad media.

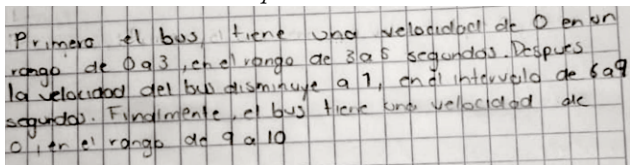
Tarea 2. Pensamiento funcional final

Se identificaron principalmente tres tipos de pensamiento funcional PF1, PF2 y PF3, en las respuestas de los estudiantes a la Tarea 2 (Figura 4). Enseguida se describe en detalle.

Los estudiantes a_1 y a_2 (Figura 10 y Figura 11) describieron el movimiento del autobús en términos de las variables velocidad y tiempo [PF1]. Se observa que relacionaron cualitativa [PF2] y cuantitativamente [PF3] las variables involucradas en el contexto del problema.

Figura 10

Descripción del movimiento del autobús por a_1



Nota. Respuesta de a_1 de la Tarea 2. Fuente propia

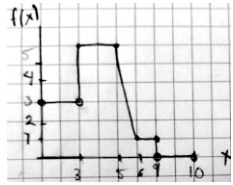
Complementariamente, ambos estudiantes construyeron una gráfica de tipo poligonal como la que se muestra enseguida (Figura 10), la cual fue difícil de explicar, como se puede observar en el siguiente extracto.

Profesor Investigador: *¿Qué representa la unión de los puntos en cada extremo dentro del contexto del problema?*

Estudiante: *No hay otra forma de describir funciones de este estilo, debe de ser continua*

Figura 11

Descripción gráfica del movimiento del autobús por a_2

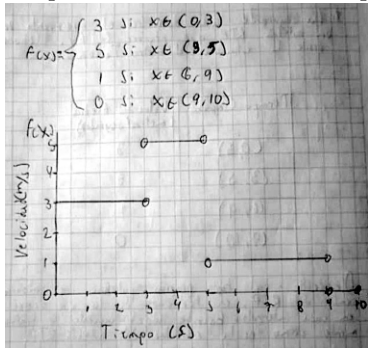


Nota. Gráfica poligonal construida por a_2. Fuente propia

Por su parte, los estudiantes a_3, a_4, a_5 y a_6 no solo describieron cualitativa y cuantitativamente la variable velocidad en función del tiempo, sino que además construyeron representaciones tabular y algebraica para complementar sus respuestas. En la Figura 12 y Figura 13 se observan procedimientos representativos de lo que hicieron estos cuatro estudiantes.

Figura 12

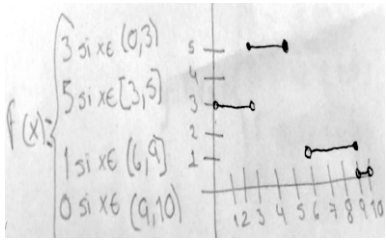
Descripción del movimiento del autobús por a_3



En el primer intervalo el bus se mueve a 3 metros sobre segundo, luego sube su velocidad a 5 m/s hasta el segundo 5, luego baja su velocidad media a 1 m/s de 6 a 9 s. Finalmente tiene velocidad media de 0 del segundo 9 al segundo 10.

Nota. Respuesta de de la Tarea 2. Fuente propia

Figura 13
Descripción del movimiento del autobús por a_6



Nota. Función representada en forma algebraica y gráfica, construida por a_6. Fuente propia

Los estudiantes establecieron una relación de correspondencia entre las variables involucradas en la Tarea 2, de manera gráfica y algebraica [PF4] para describir sus resultados. De esta forma construyeron la función escalonada subyacente a la situación problema.

Reflexión sobre las respuestas a la Tarea 2

Los estudiantes a_1 y a_2 desarrollaron su manera de pensar, sus descripciones para la Tarea 2 mejoraron respecto de las descripciones para la situación incluida en la Tarea 1. Las respuestas para la Tarea 2 se formularon en términos de la velocidad con respecto al tiempo, de forma cualitativa y cuantitativa, por lo que puede afirmarse que los estudiantes lograron exhibir un PF3. Sin embargo, sus respuestas de forma tabular las complementaron con una gráfica de tipo poligonal, la cual resultó difícil de explicar. Esto coincide con los hallazgos de De Villiers (1988) y Kaput y Roschelle (2013) en el sentido de que los estudiantes presentan dificultades para describir y representar funciones de carácter discontinuo y constante.

Por su parte, los estudiantes a_3, a_4, a_5 y a_6 describieron sus respuestas en términos de las variables velocidad y tiempo y las relacionaron de forma cualitativa y cuantitativa [PF3]. Además, establecieron una regla de correspondencia que expresaba sus resultados de forma algebraica lo cual indica que su pensamiento funcional evolucionó a un PF4.

Al finalizar la Tarea 2, el profesor-investigador dirigió una discusión de retroalimentación con los estudiantes sobre sus respuestas y los conceptos implicados. En esta retroalimentación aplicó un cuestionario de reflexión. Todos los estudiantes señalaron que les habían gustado mucho las tareas y la interacción con SimCalc MathWorlds. Además, pudieron describir lo aprendido. A manera de ejemplo, el estudiante a_3 escribió *aprendí qué es una gráfica de una función escalonada, sus representaciones algebraicas y tabulares; qué es una variable independiente y dependiente, así como qué es una función*. De forma verbal, los estudiantes a_5 y a_6 manifestaron que no podían creer que fueran capaces de graficar y expresar algebraicamente una función tan

extraña y linda. Los estudiantes a_2 y a_4 mencionaron que *la próxima vez que se suban a un autobús ya saben cómo describir su velocidad usando gráficos, tablas y de manera algebraica*. En general, señalaron que el uso del programa dinámico les permitió describir la función en términos de las variables involucradas en el problema.

Conclusiones

Mediante la descripción y discusión de los resultados, se respondió a la pregunta de investigación planteada en este capítulo: ¿Cuáles son los tipos de pensamiento funcional que exhiben y desarrollan los estudiantes de nivel secundaria al realizar dos tareas relacionadas con la función escalonada y apoyadas en el uso de SimCalc MathWorlds? Se observó que los estudiantes a_1 y a_2 comenzaron con un PF inestable al identificar, relacionar y describir variables, de forma cualitativa, y utilizar variables como rapidez y distancia, sin un entendimiento. Sin embargo, desarrollaron su manera de pensar al identificar las variables velocidad y distancia, y relacionarlas entre sí, cualitativa y cuantitativamente, por lo que puede afirmarse que iniciaron con PF1 y PF2 y finalizaron con un PF3. Además, recurrieron a una representación gráfica, aunque de tipo poligonal, lo que evidenció dificultades para describir una función de carácter discontinuo.

Los estudiantes a_3, a_4, a_5 y a_6 describieron inicialmente la situación mediante el uso de las variables velocidad y tiempo [PF3], acompañada, en el caso de los estudiantes a_5 y a_6 de una representación tabular. Sin embargo, aunque en la Tarea 1 presentaron dificultades para describir los extremos de los intervalos de la función, que representaban en el contexto del problema, posteriormente, los cuatro desarrollaron su manera de pensar y establecieron una relación de correspondencia que les permitió describir la situación mediante una función escalonada. En consecuencia, puede afirmarse que el PF del grupo de estudiantes evolucionó de un PF1, PF2 y PF3 a un PF4.

Los hallazgos de esta investigación, tipo estudio de caso, confirman por un lado, resultados previos como los descritos en la introducción, especialmente aquellos que mencionan que es común que los estudiantes enfrenten dificultades para describir situaciones problema que implican el uso de funciones de carácter discontinuo y constante.

Por otro lado, evidencia cómo el uso de SimCalc MathWorlds puede favorecer el desarrollo de ideas propias del pensamiento funcional de estudiantes de niveles básicos, en este caso de secundaria, quienes desarrollaron conocimiento sobre las funciones de carácter discontinuo y constante, así como aprendieron a representarlas con intervalos de tipo semiabierto. Esto permite sugerir que simuladores como SimCalc MathWorlds deberían seguir utilizándose en el aula para apoyar el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes, o bien que se recurra a simuladores semejantes

que describan de manera dinámica este y otros contextos, eventualmente construidos con GeoGebra, por ser un software de libre acceso.

Agradecimientos

Agradecimiento a SECIHTI por su apoyo de becas para posgrado, Campus Viviente por su apoyo para esta investigación y al director Ángel Gasca Borja y a la Escuela Secundaria Diurna No. 316 Francisco Gonzales Bocanegra por brindarnos el espacio para llevar a cabo la investigación en sus instalaciones.

Referencias

Billings, E. M., & McClure, M. S. (2005). Mailing a Publication: Exploring Linear and Step Functions in a Real-World Context. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(7), 349–355.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advance in Mathematics Education* (pp. 5–23). Springer.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Datey, V. C. (2015). Step Function Model For Forecasting Project Cash Flow. *International Journal of scientific research and management, 3*(5), 2812–2815.

De Villiers, M. D. (1988). Modelling with Step-Functions. *Mathematics in School, 17*(5), 8–10.

Flores-Gasca, C., E. & Vargas-Alejo, V. (2021). Interpretación de gráficas en contexto por estudiantes universitarios. En D. Olanoff, K. Johnson, & S. Spitzer (Eds.), *Proceedings of the 43th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1297–1305). PME-NA.

Flores-Gasca, C., E. & Vargas-Alejo, V. (2024). Pensamiento Funcional de estudiantes universitarios al resolver una tarea donde subyace la función escalonada. En K. Kosko, J. Caniglia, M. Zolfaghari, & G. Morri (Eds.), *Proceedings of the 45th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148–152). PME-NA.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–18). Routhledge.

Kaput, J. J., & Roschelle, J. (1994). *SimCalc MathWorlds* (Versión 6.1) [Software]. Center for Technology in Learning. https://simcalc.sri.com/index.html

Kaput, J. J., & Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En S. J. Hegedus, & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13–26). Springer.

Morge, S. P., & Pusey, E. L. (2010). Take time for action: Step Up to Nonlinear Functions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(6), 310–313.

Llaría, D. R. (2011). Piecewise-Defined Functions on the TI-Nspire. *MatheMatics teacher, 104*(8) 626–628.

Mumcu, K. T. (2024). *Investigating development of eighth-grade students' functional thinking through a SIMCALC MATHWORLDS integrated teaching experiment* [Tesis inédita de maestría]. Orta Doğu Teknik Üniversitesi.

Panorkou N., & Maloney A. (2016). Early algebra: Expressing Covariation and Correspondence. *Teaching Children Mathematics, 23*(2), 90 99.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631 674.

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grade*s (pp. 133–160). Routhledge.

Stake, R. E. (1994). Case studies. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236–247). Sage.

Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., V., & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática, 28*(2), 59–83.

Vargas-Alejo, V., & Flores-Gasca, C., E. (2023) Razonamiento covariacional por universitarios al usar SimCal MathWorlds. En S. Patrick, Y., Morales, & A. Ruíz (Eds.), *Comité Interamericano de Educación Matemática (2023). Educación Matemática en las Américas 2023* (pp. 347–354). CIAEM.

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6th ed.). Sage Publications.

Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes universitarios

Daniel Godoy-Caraballo [1]
Javier García-García [2]
Gerardo Salgado-Beltrán [3]

Resumen

La problemática radica en la creciente importancia de interpretar gráficos estadísticos, especialmente entre los futuros profesionistas, por lo que la presente investigación tuvo como objetivo analizar la comprensión de gráficos estadísticos de un grupo de estudiantes universitarios. Para ello, se adoptó el marco conceptual de Curcio sobre los niveles de lectura de gráficos estadísticos: 1) Leer los datos, 2) Leer dentro de los datos, 3) Leer más allá de los datos, y 4) Leer detrás de los datos. La investigación fue de enfoque cualitativo y alcance descriptivo, mediante un estudio de caso. La ruta metodológica siguió las siguientes etapas: selección de los casos de estudio, diseño, validación y aplicación de entrevistas basadas en tareas, y análisis de los datos. Los resultados indicaron que los ocho casos de estudio pudieron evidenciar sin dificultad los niveles 1 y 2, mientras que los niveles 3 y 4 fueron identificados en cinco y cuatro casos de estudio, respectivamente. Los hallazgos sugieren la necesidad de ampliar la muestra de participantes, incluir estudiantes de distintos niveles educativos y diseñar propuestas didácticas que promuevan la adquisición de niveles superiores de comprensión gráfica.

Palabras clave

Gráficos estadísticos, niveles de lectura, cultura estadística, estudiantes universitarios

[1] 17393191@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[2] jagarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[3] 14251@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Godoy-Caraballo, D., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2025). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes universitarios. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 155–176). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-07

Introducción

La cultura estadística se ha consolidado como una competencia esencial para la ciudadanía en el siglo XXI, dado el papel fundamental de los datos en la toma de decisiones informadas. Al respecto, Contreras et al. (2017) sostienen que la interpretación de gráficos estadísticos constituye una habilidad clave dentro de esta cultura, ya que dichos recursos visuales se difunden en medios de comunicación, informes científicos y espacios educativos. En esta misma línea, Rodríguez-Alveal (2017) subraya que la cultura estadística trasciende lo técnico, al integrar la capacidad de comunicar y comprender datos en diversos contextos. Sin embargo, algunos estudios (e.g., Rodríguez-Alveal, 2017; Contreras et al., 2017; Moros-Briceño, 2023) destacan las limitaciones en la comprensión gráfica.

Según Arteaga et al. (2011), solo un 13% de los adultos evaluados alcanza niveles altos de cultura estadística, mientras que un 22% se sitúa por debajo del nivel mínimo requerido. Moros-Briceño (2023) reporta que incluso en niveles de posgrado persisten dificultades para aplicar conceptos estadísticos en situaciones prácticas, lo que evidencia una brecha en la formación estadística a lo largo de toda la trayectoria educativa (Moros-Briceño, 2023; Rodríguez-Alveal, 2017; Contreras et al., 2017). Por su parte, Curcio (1987) señala que la comprensión gráfica suele reducirse a niveles básicos de interpretación, lo cual limita la capacidad de lectura gráfica. Incluso quienes poseen formación estadística previa enfrentan dificultades similares a quienes no la tienen, particularmente en la interpretación y comunicación de resultados, lo cual sugiere limitaciones en la enseñanza tradicional de la estadística (Tauber, 2010).

Para Contreras et al. (2017), los docentes con una sólida formación pueden desarrollar su propia cultura estadística, y a la vez, favorecer que sus estudiantes adquieran competencias para la interpretación de gráficos y datos estadísticos. Sin esta base, la capacidad de los estudiantes para desenvolverse en la sociedad actual, fuertemente orientada al análisis de datos, se ve limitada. Según Eudave (2009, p. 6), "la capacidad para leer y entender datos estadísticos es una necesidad social y educativa relativamente nueva". En el contexto mexicano, la interpretación de datos representados en tablas y gráficos se estudia desde niveles básicos hasta el nivel superior por lo que es una demanda curricular.

Al explorar la literatura especializada sobre los niveles de lectura de gráficos, se identifican estudios que analizan distintas poblaciones. Por ejemplo, investigaciones como las de Fernández et al. (2019) y García-García et al. (2019) muestran que algunos estudiantes universitarios suelen ubicarse en niveles intermedios en los niveles de lectura de gráficos estadísticos propuestos por Curcio (1987). Gea et al. (2017) y Camargo y Espinosa

(2021) coinciden en que la mayoría de los futuros docentes permanecen en los niveles más básicos, lo cual limita su capacidad para interpretar críticamente la información representada en gráficos.

Las dificultades reportadas en la literatura sobre la comprensión de gráficos estadísticos se explican, en parte, por debilidades en la formación docente. Al respecto, Rodríguez-Alveal (2017) y Contreras et al. (2017) señalan que muchos docentes en formación carecen de una preparación estadística suficiente, lo que repercute en la enseñanza y, por ende, en el desarrollo de competencias estadísticas en sus futuros estudiantes. Asimismo, estudios como el de Espinosa y Mayorga (2016) destacan la relación entre el desarrollo de habilidades gráficas y las competencias generales de lectura y escritura, lo que sugiere la necesidad de un enfoque interdisciplinario. Por otro lado, investigaciones como las de Arteaga et al. (2016) y Ruiz et al. (2009) han documentado errores frecuentes en la construcción de gráficos por parte de futuros docentes, relacionados con la escala, el tipo de variable y la adecuación semiótica. Estas dificultades afectan tanto la producción como la interpretación de representaciones gráficas, y evidencian la necesidad de fortalecer los programas de formación inicial docente.

En los niveles básicos también se observan deficiencias relevantes. Arteaga et al. (2017) y García-García et al. (2020) encontraron que los estudiantes de primaria y secundaria suelen ubicarse en niveles bajos de lectura gráfica, incluso con gráficos simples. Esta situación se asocia tanto a la falta de madurez cognitiva como a una limitada atención pedagógica hacia esta competencia. Por su parte, Díaz-Levicoy et al. (2015a, 2015b), al analizar materiales escolares de Chile, identificaron una alta presencia de gráficos de barras, pero poca diversidad de tipos de gráficos y un enfoque didáctico centrado en procedimientos, más que en la comprensión crítica, lo que puede limitar el desarrollo de niveles avanzados de lectura. En consecuencia, la lectura de gráficos estadísticos en distintos niveles educativos podría estar relacionada por las características de los materiales curriculares.

El desarrollo de habilidades estadísticas desde edades tempranas es importante en la educación, ya que favorece la comprensión de conceptos fundamentales y la capacidad para interpretar gráficos y representaciones visuales asociadas, especialmente en un contexto dominado por el análisis de datos (Batanero y Díaz, 2011). Este proceso contribuye al crecimiento académico individual y responde a la creciente demanda de competencias visuales y estadísticas en la sociedad contemporánea. Integrar estas habilidades en la formación académica son importante para asegurar que los estudiantes estén preparados para afrontar los desafíos de una cultura estadística. Por tal motivo, esta investigación se interesó por *analizar la comprensión de gráficos estadísticos en un grupo de estudiantes de nivel superior.*

En particular se planteó la pregunta: ¿Cuáles son los niveles de lectura de gráficos estadísticos que evidencian un grupo de estudiantes universitarios?

Este estudio aporta al campo de la educación matemática al ofrecer una caracterización detallada de los niveles de lectura de gráficos estadísticos evidenciados por un grupo de estudiantes universitarios de tres licenciaturas diferentes (Ingeniería Civil, Economía y Contabilidad), a partir de la Taxonomía de Curcio. Al identificar y analizar estos niveles, la investigación posibilita diagnosticar el estado actual de esta competencia en el nivel superior y establecer fundamentos para el diseño de estrategias didácticas que promuevan una comprensión más profunda y crítica de la información gráfica. Además, el estudio adquiere relevancia porque existen pocos trabajos de esta naturaleza en el contexto mexicano, por lo que permite información útil para futuras investigaciones.

Marco conceptual

Dado el objetivo de esta investigación, su fundamento se enmarca desde posicionamientos teóricos sobre los niveles de lectura. Estos serán descritos enseguida.

Niveles de lectura

La comprensión gráfica ha estado históricamente vinculada con la lectura e interpretación de gráficos. Para ello se consideran tres aspectos importantes sobre la comprensión gráfica: traducción, interpretación y extrapolación. Al respecto, Friel et al. (2001) explican que la comprensión o significado visual se refiere a una diversidad de acciones, que incluyen la lectura, explicación, análisis y proyección de información a partir de elementos gráficos. Según estos autores, este entendimiento se desarrolla a partir del diseño de representaciones gráficas de datos y de su aplicación en contextos donde se requiere interpretar la información y establecer relaciones entre los datos, más allá de simplemente crear gráficos o extraer información básica.

En el presente se adoptan los niveles de lectura de gráficos estadísticos descritos por Curcio (1987) y Friel et al. (2001). La elección de este marco obedece a que permite analizar el grado de comprensión que una persona demuestra al interactuar con representaciones gráficas de datos, desde una interpretación básica hasta un juicio crítico. Además, la literatura especializada ha confirmado su pertinencia en investigaciones centradas en el análisis de gráficos estadísticos. A continuación, se detallan estos niveles.

- *Nivel 1. Leer los datos*. Implica la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico. El lector identifica datos explícitos tal como aparecen, sin realizar inferencias ni cálculos adicionales. Por ejemplo, en un gráfico de barras que muestra la cantidad de libros leídos por mes, una pregunta típica sería: ¿Cuántos libros se

leyeron en marzo? La respuesta se obtiene directamente observando la altura de la barra correspondiente a marzo. Este nivel requiere reconocer los elementos del gráfico (ejes, etiquetas, escalas) y relacionarlos de forma directa con la información presentada.

- *Nivel 2. Leer dentro de los datos*. En este nivel, el lector aplica procedimientos matemáticos básicos para analizar relaciones entre los datos. Compara, ordena o realiza cálculos simples como sumas, restas o diferencias entre valores. Por ejemplo, una pregunta podría ser: ¿En qué mes se leyeron más libros que en enero, pero menos que en marzo? Este tipo de lectura requiere habilidades matemáticas elementales y una interpretación más activa del gráfico, aunque aún se basa únicamente en la información que está representada.
- *Nivel 3. Leer más allá de los datos*. Este nivel se presentan cuando se solicita información que no aparece representada explícitamente en el gráfico ni puede deducirse mediante operaciones o comparaciones. Aquí el lector realiza inferencias o predicciones a partir de los datos disponibles. Por ejemplo: ¿Qué podría pasar con la cantidad de libros leídos si el siguiente mes hay vacaciones escolares? En este caso, se espera que el lector relacione la información representada con conocimientos previos, experiencias o contexto, formulando hipótesis o proyecciones. Este nivel implica un pensamiento más abstracto y la habilidad de extender el análisis más allá de lo evidente.
- *Nivel 4. Leer detrás de los datos*. Este último nivel representa una lectura crítica y reflexiva que examina tanto el contenido como la representación del gráfico. Supone valorar críticamente la forma en que se recopilan los datos, las interpretaciones posisble y los sesgos en su recolección o presentación. Supone un conocimiento no sólo matemático, sino del contexto utilizado. Por ejemplo: ¿Qué limitaciones presenta un gráfico si los datos provienen únicamente de estudiantes de una única institución educativa? Este nivel demanda no solo competencias matemáticas avanzadas, sino también una comprensión del contexto sociocultural, metodológico y ético vinculado a la información estadística. Constituye, por tanto, un componente esencial en la formación de ciudadanos críticos capaces de interpretar con responsabilidad y profundidad los mensajes transmitidos por representaciones gráficas.

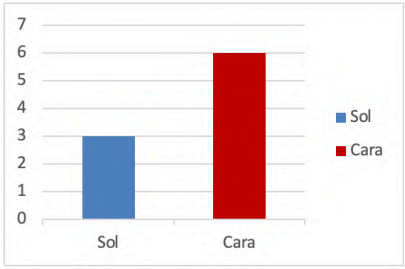
A continuación, se presentan otros ejemplos asociados a los niveles de lectura de gráficos estadísticos. El ejemplo 1 y sus incisos (Figura 1) nos permiten ejemplificar los primeros tres niveles.

Ejemplo 1. Daniel estaba jugando a lanzar una moneda al aire y registró la siguiente información.

a) ¿Cuántas veces Daniel obtuvo cara y sol al lanzar la moneda?

b) ¿Cuál es la diferencia entre las frecuencias de la variable cara y sol?
c) ¿Qué lado de la moneda predices que saldrá en el próximo lanzamiento? Argumenta tu respuesta.

Figura 1
Gráfico de barras sobre el lanzamiento de una moneda al aire



El nivel 1 de lectura gráfica, leer los datos, se presenta cuando el estudiante es capaz de identificar las veces que resultó cara o sol, lo que corresponde a una lectura literal y directa del gráfico. El nivel 2, leer dentro de los datos, se identifica cuando un estudiante al responder el inciso b de la tarea presentada, realiza una resta entre las frecuentas de que resulte sol y cara. Este nivel implica una interacción más profunda con el contenido gráfico, ya que requiere un análisis que va más allá de la simple observación. Por último, el nivel 3, leer más allá de los datos, se manifiesta cuando responde el inciso c de la tarea. Al respecto, el estudiante tiene que realizar una estimación de futuros datos, es decir, qué saldrá en el próximo lanzamiento de la moneda, si saldrá sol o cara, basándose en los datos previamente registrados en el gráfico.

El ejemplo 2, que se proporciona enseguida, nos permite ejemplificar el último nivel de la lectura de gráficos estadísticos (Figura 2).

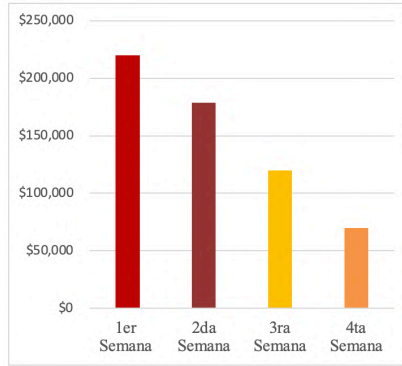
Ejemplo 2. El siguiente gráfico muestra la recaudación en taquilla de una película de acción en sus primeras semanas.
a) ¿En qué semana se recaudó más dinero? ¿Cuántos se recaudó en esa semana?
b) ¿Cuánto se ha recaudado en total?
c) Calcula la media del dinero recaudado en las cuatro semanas.
d) ¿Por qué crees que disminuyó la recaudación tras cuatro semanas? Argumenta tu respuesta.

En esta tarea se solicita al estudiante analizar un gráfico de barras que muestra la recaudación en taquilla de una película de acción. Una vez alcanzado los niveles 1, 2 y 3 (al responder consistentemente los incisos a, b y c, el estudiante debe expresar su opinión respecto a la conclusión derivada de los datos (incido d). En este caso, se invita al estudiante a reflexionar sobre una tendencia observada en el gráfico —la disminución de la recaudación a partir de la cuarta semana— y a proponer posibles causas o explicaciones

de ese fenómeno. Esto requiere una comprensión profunda del contexto en el que se sitúa la información (la taquilla de una película) y la movilización de conocimientos extramatemáticos, como aspectos del mercado cinematográfico, el comportamiento del público o la competencia entre producciones. Así, el inciso d promueve el desarrollo del pensamiento crítico y la capacidad de interpretar gráficamente fenómenos reales desde una perspectiva contextualizada, en correspondencia con las demandas cognitivas del nivel 4 de la taxonomía de Curcio.

Figura 2

Gráfico de barras sobre recaudación en taquilla de una película



Metodología

La presente investigación tiene un enfoque cualitativo y de alcance descriptivo. Para Marshall y Rossman (2014), esta metodología es de utilidad porque busca la exploración detallada de un fenómeno. En este estudio adquiere relevancia al centrarse en analizar en profundidad las interpretaciones de estudiantes universitarios cuando realizan la lectura de información estadística presentada en un gráfico. Asimismo, de desarrolló un estudio de casos ya que se orienta a examinar en profundidad las producciones de un grupo específico de estudiantes universitarios de tres licenciaturas distintas para comprender sus niveles de lectura de gráficos estadísticos.

Contexto de la investigación y selección de los casos de estudio

La investigación se realizó con estudiantes de dos universidades, una privada y otra pública, ubicadas al sur de México. Los casos de estudio fueron ocho estudiantes, entre ellos tres mujeres y cinco hombres con edades de 20 a 21 años, con promedios que abarcan de 9.0 a 9.5. Distribuidos de la siguiente manera: 2 de la carrera de ingeniería civil (hombres), 3 de economía (dos mujeres y un hombre) y 3 de contabilidad (dos hombres y una mujer). Se consideraron de diversas licenciaturas para explorar cómo su formación académica influye en la lectura de gráficos estadísticos. Los participantes

fueron elegidos también con el propósito de representar diversidad académica y ofrecer una visión más amplia del contexto regional. En adelante se les denomina como E1, E2, E3, …, E8.

Los criterios de selección de los casos de estudio fueron los siguientes, en primer lugar, se incluyeron únicamente los estudiantes que habían cursado y aprobado sus materias de matemáticas (incluidos cursos de estadística) hasta al menos la mitad de su plan de estudios, asegurando así un nivel adecuado de exposición a conceptos cuantitativos y habilidades analíticas. Segundo, que fueran estudiantes regulares, es decir, aquellos que no presentaban retrasos en su trayectoria académica ni adeudos de materias en su plan de estudios. Tercero, para preservar la confiabilidad y validez de la información recabada, se priorizó la selección de estudiantes que fueran voluntarios y estuvieran dispuestos a ser entrevistados mientras resolvían las tareas propuestas. La combinación de estos criterios garantizó que los casos seleccionados ofrecieran una representación precisa y contextualizada de la lectura de gráficos estadísticos a nivel universitario.

Instrumento para la recolección de datos

Para la recolección de datos se empleó una entrevista basada en tareas, siguiendo el enfoque de Goldin (2000). Esta elección se justifica por su capacidad para explorar las ideas y procesos matemáticos empleados por los casos de estudio al resolver diversas tareas. Este método consiste en una interacción entre el sujeto (quien resuelve la tarea, en este caso el estudiante) y el entrevistador, donde el sujeto evidencia sus pensamientos y razonamientos al enfrentarse a la tarea, ya sea durante o inmediatamente después de su resolución. De esta manera, se revela su comprensión, comportamiento y razonamiento en relación con la tarea propuesta. Además, no solo se analizan sus respuestas verbales, sino también su lenguaje no verbal (como movimientos de manos, miradas, expresiones, escritura, voces, etc.), lo que permitió al investigador observar e interpretar comportamientos complejos y registrarlos para su posterior análisis.

La entrevista basada en tareas puede adoptar una estructura definida o semiestructurada. Para los propósitos de esta investigación, el protocolo de la entrevista incluyó preguntas básicas para todas las tareas, tales como: ¿Por qué lo hiciste así?, ¿Qué te llevó a hacerlo así?, ¿Te apoyaste de algo en específico del gráfico para tu respuesta? y ¿Por qué aplicaste este procedimiento? Además, se incorporaron preguntas específicas según la respuesta del caso de estudio. Estas preguntas se plantearon en momentos en que se presentaban ideas confusas, o existía un bloqueo en la forma de proceder del caso de estudio o se buscaba activar diferentes vías de solución que pudiera éste realizar. Las entrevistas fueron grabadas en audio y video para su análisis posterior.

Para el diseño del instrumento, comprendió cinco tareas, cada una con un gráfico estadístico distinto, elaboradas tras varias sesiones de trabajo de autoría propia con el fin de asegurar su pertinencia y coherencia con los objetivos de la investigación. Se utilizaron datos registrados tanto de revistas como de periódicos para garantizar que las tareas tuvieran una conexión directa con la vida real y reflejaran situaciones contemporáneas. Esta combinación permitió elaborar un instrumento alineado con el análisis de los niveles de lectura de gráficos estadísticos. La validación se realizó con un grupo de estudiantes de último año de bachillerato y un estudiante universitario. El objetivo principal de esta validación fue asegurar que las instrucciones del instrumento fueran claras y comprensibles para los participantes, y que también existiera claridad en los gráficos y las preguntas planteadas, garantizando que las tareas propuestas fueran accesibles en cuanto a la interpretación de gráficos. Tras analizar los resultados de la prueba piloto, se procedió a rediseñar aquellas tareas que mostraron dificultades de comprensión o interpretación en los niveles de lectura de los gráficos.

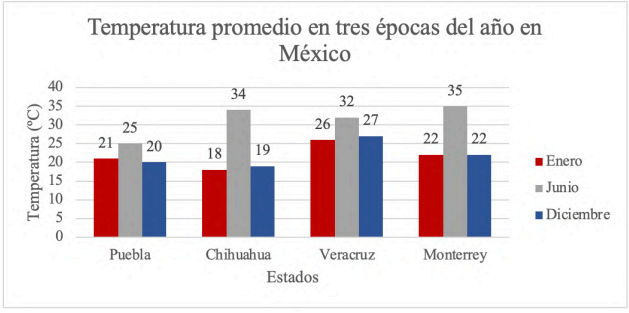
El instrumento final se estructuró de cinco tareas. A continuación, se presentan las tareas 1, 2 y 3 como ejemplo.

1. *Héctor piensa visitar algunos estados de la república mexicana en tres épocas diferentes del año; sin embargo, él está acostumbrado a la temperatura de su ciudad que es de 18 °C en enero, 20 °C en junio y 10 °C en diciembre. Con base en estos datos y los que se proporcionan en la gráfica, responde* (Figura 3).

a) *¿Qué estado debería visitar Héctor si desea pasar un clima más cálido en enero y en verano?*
b) *Si el promedio de la temperatura en Veracruz es de 28.3° C, ¿Cuál es la diferencia de los promedios de las temperaturas entre el estado de Veracruz y Monterrey?*
c) *Héctor desea pasar diciembre en un lugar con temperatura más baja a lo que está acostumbrado, ¿Será Puebla su mejor opción? ¿Por qué?*
d) *Considerando que Veracruz está ubicado en la costa del Atlántico, ¿Es posible que su temperatura llegue a ser igual que la del estado de Puebla? ¿Por qué?*

Figura 3

Gráfico de barras sobre temperaturas promedio



Nota. Fuente: https://cuentame.inegi.org.mx/default.aspx

2. *Usa el gráfico proporcionado para responder las preguntas* (Figura 4).

a) *¿Qué variación existe entre las ventas del año 2022 y las ventas esperadas del año 2026 de los países presentados en el gráfico?*

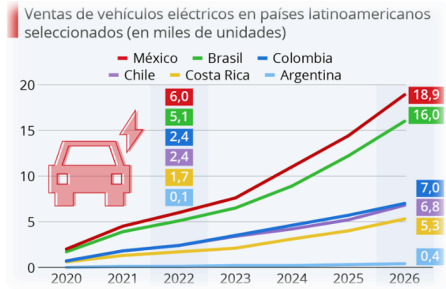
b) *Siguiendo el comportamiento de la gráfica, ¿Cuántas unidades de vehículos eléctricos consideras que se habrán vendido en el año 2028 en el país de México? ¿y en Colombia?*

c) *¿A qué crees que se debe que Argentina tenga pocas ventas de autos eléctricos?*

d) *¿Por qué en el año 2020 las ventas de autos eléctricos eran mínimas en todos los países presentados en el gráfico?*

Figura 4

Gráfico de vehículos eléctricos



Nota. Fuente: https://acortar.link/OO9x8w

3. *Usa el gráfico proporcionado para responder las preguntas* (Figura 5).

a) *Si la aplicación de Facebook se considera el 100%, ¿Qué porcentaje tiene la aplicación de Twitter? ¿Qué variación existe entre los porcentajes de Snapchat y TikTok?*

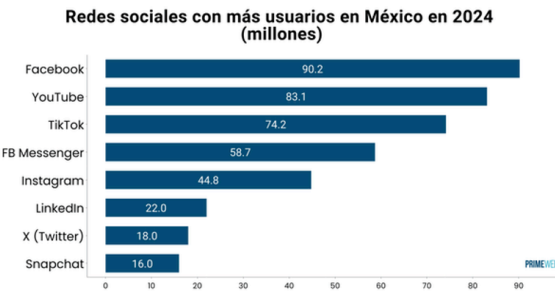
b) *Considerando que los datos de la gráfica abarcan el periodo de Enero-Abril del año 2024, ¿Cuánto usuarios crees que tendrá YouTube a principios del año 2025?*

c) *¿A qué se debe que las personas tengan preferencia por la aplicación de Facebook? ¿A qué se debe que la aplicación de Instagram no tenga tanto impacto que la de Facebook si son similares?*

d) *¿Cómo consideras que afecta o benefician las redes sociales a la educación?*

Figura 5

Gráfico de redes sociales



Nota. Fuente: https://www.primeweb.com.mx/redes-sociales-para-empresas

Análisis de los datos

Para el tratamiento de los datos se aplicó el análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006). Esta metodología permite identificar patrones de significado dentro de la información obtenida a partir de las respuestas de los casos de estudio en las tareas propuestas. La elección de este método se fundamentó en su pertinencia para realizar un análisis fundamentado teóricamente y adecuado al tratamiento de un conjunto de datos de tamaño reducido. El proceso del análisis temático se desarrolló en distintas etapas, incorporando triangulación entre investigadores para ganar confiabilidad y validez de los resultados. Este método se estructura en las siguientes fases.

Fase 1. Familiarización con los datos. Durante esta etapa se transcribieron íntegramente las entrevistas y se digitalizaron las producciones escritas de los casos de estudio. Posteriormente, se realizó una lectura general del contenido con el propósito de obtener una primera aproximación a los niveles de lectura identificados en los casos de estudio y comprender mejor el lenguaje empleado por los participantes. Este proceso de lectura se realizó las veces que fueran necesarias para ganar familiaridad con los datos.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. En esta etapa, se analizaron las respuestas de los casos de estudio con el propósito de identificar relaciones relevantes entre conceptos, definiciones e interpretaciones vinculadas con los gráficos presentados. Este proceso permitió establecer una serie de códigos iniciales, enunciados que describen acciones específicas sobre la lectura de los gráficos estadísticos, los cuales reflejaron los niveles de lectura evidenciados por los estudiantes (ver como ejemplo la Tabla 1).

Tabla 1

Códigos iniciales identificados en las respuestas de E3 al resolver la tarea 1a

Extracto	Códigos
I: *¿Cómo obtuviste ese resultado?* E3: […], *sumé los tres datos que ya me había dado de Monterrey y lo dividí entre 3 y, me dio un total de 26.3°. Ya nomás lo resté con el dato de Veracruz y me da un total de 0.2°*	1. Se suman las temperaturas de Monterrey 2. El resultado anterior se divide entre tres para encontrar el promedio 3. Para determinar la diferencia de temperaturas promedios entre Veracruz y Monterrey se restan los promedios

Fase 3. Búsqueda de temas y subtemas. En esta etapa, los códigos previamente definidos se agruparon y organizaron en categorías denominadas subtemas, con el fin de clasificar patrones de respuesta que compartían características similares. Cada subtema representa una acción específica vinculada con un nivel de lectura, derivado del análisis de los datos, mientras que cada tema corresponde a una categoría asociada con los niveles de lectura planteados en el marco conceptual (Tabla 2).

Tabla 2

Subtemas y temas iniciales construidos a partir de los códigos

Códigos	Subtema	Tema
1. Se suman las temperaturas de Monterrey. 2. El resultado anterior se divide entre tres para encontrar el promedio. 3. Para determinar la diferencia de temperaturas promedios entre Veracruz y Monterrey se restan los promedios	El promedio de un conjunto de datos se obtiene sumándolos y dividiendo entre la cantidad total de datos	Nivel 2. Leer dentro de los datos

Fase 4. Revisión de los temas. Una vez concluida la fase anterior, se realizó una revisión de cada subtema y tema construido en dos niveles analíticos. En el primer nivel, se examinaron los datos codificados dentro de cada subtema y tema, con el propósito de verificar la coherencia y consistencia de los patrones identificados. En el segundo nivel, el análisis se amplió para considerar la totalidad de los datos, asegurando que los subtemas y temas reflejaran fielmente la información obtenida. En esta fase algunos subtemas fueron refinados (ver como ejemplo la Tabla 3) y otros eliminados cuando no capturaban fielmente la respuesta de los casos de estudio. Como resultado, se alcanzó una mayor precisión en la identificación de los niveles de lectura.

Tabla 3

Subtemas refinados a partir de la revisión del conjunto de datos colectados

Subtema	Subtema modificado	Tema
El promedio de un conjunto de datos se obtiene sumándolos y dividiendo entre la cantidad total de datos	El promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los elementos y dividiendo el resultado entre el número total de datos	Nivel 2. *Leer dentro de los datos*
La diferencia entre dos promedios se obtiene calculando el promedio de las cantidades y restándolas	La diferencia entre dos promedios se determina calculando el promedio de cada conjunto de datos y luego restando uno del otro	

Fase 5. Definición y nombramiento de los subtemas y temas. En esta fase, se establecieron y asignaron nombres a los distintos niveles de lectura identificados en los datos. Los subtemas se describieron atendiendo al patrón de respuesta que representaban, mientras que los temas se definen en relación con los subtemas.

Fase 6. Elaboración del informe. Se elaboró el informe final, estructurando los subtemas dentro de los temas que agrupan los niveles de lectura. Con el objetivo de responder a los propósitos de la investigación, los resultados fueron presentados considerando el marco conceptual adoptado en el estudio.

Resultados

La pregunta que orientó esta investigación fue ¿Cuáles son los niveles de lectura de gráficos estadísticos que evidencian un grupo de estudiantes universitarios? Las respuestas, tanto escritas como verbales, permitieron determinar el nivel de lectura alcanzado por los casos de estudio, como se detalla en la Tabla 4. En el Nivel 1 (Lectura de los datos), todos los casos identificaron correctamente las variables, las frecuencias y el contexto general del gráfico. En el Nivel 2 (Lectura dentro de los datos), todos lograron hacer inferencias mediante procedimientos matemáticos como la resta, la regla de tres y el cálculo de promedios. En el Nivel 3 (Lectura más allá de los datos), cinco de los ocho casos lograron predecir datos futuros a partir del análisis del gráfico y formularon respuestas coherentes. Finalmente, en el Nivel 4 (Lectura detrás de los datos), cuatro de los ocho casos efectuaron una crítica fundamentada sobre el origen de los datos y las posibles causas del fenómeno representado.

Tabla 4

Niveles de lectura de gráficos estadísticos identificados en los casos de estudio

Niveles de lectura	Casos de estudio								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	Total
Nivel 1	*	*	*	*	*	*	*	*	8
Nivel 2	*	*	*	*	*	*	*	*	8
Nivel 3			*	*	*	*		*	5
Nivel 4			*	*	*	*			4

Los resultados de la tabla 4 se detallan enseguida.

Nivel 1: Leer los datos

En los ocho casos de estudio analizados se observó que todos lograron evidenciar este nivel en las cinco tareas propuestas. El nivel 1 permitió conocer la capacidad de los participantes para interpretar el contexto específico de cada gráfico, lo cual incluyó identificar el significado de las frecuencias presentadas y su relación con situaciones de la vida cotidiana. Las producciones de los casos de estudio permitieron construir los siguientes subtemas: *Las barras de mayor altura representan una mayor frecuencia, el título de un gráfico encapsula el contexto general de los datos presentados, las barras con igual altura indican frecuencias iguales, el patrón de una curva en un gráfico representa la frecuencia de los datos y permite la proyección de datos futuros. el eje vertical refleja la interpretación de las tendencias de los datos en períodos determinados, el eje vertical y el eje horizontal se interrelacionan para proporcionar una representación de la frecuencia de los datos y, el porcentaje representado en un gráfico indica la proporción de la frecuencia respecto al total.*

Por ejemplo, en los gráficos de barras (Tarea 1 y 4), los participantes identificación la relación entre las categorías del eje horizontal y las frecuencias representadas en el eje vertical (leer extracto de E6 al resolver la Tarea 4). Esta habilidad les permitió asociar las variables con escenarios concretos, integrando la información presentada de manera coherente, lo que permitió construir el subtema: el eje vertical y el eje horizontal se interrelacionan para proporcionar una representación de la frecuencia de los datos.

I: *Bueno, antes de iniciar, te plantearé una pregunta inicial. Ya que analizaste el gráfico ¿en qué periodo de edades hay más hombres que mujeres?*

E6: *En el periodo de 0 a 4 años.*

I: *¿De qué parte del gráfico te apoyaste para dar esta respuesta?*

E6: *Pues, aquí me da la cantidad de las personas y también sus edades* [señala el eje vertical]*, entonces solo vi cual era el menor y así*

Por otra parte, el subtema: Las barras con igual altura indican frecuencias iguales se puede identificar en la respuesta de E6 (leer extracto de E6 al resolver la Tarea 1) al resolver la tarea 1. Esto porque el estudiante E6 observó las etiquetas colocadas en la parte superior de cada barra para dar una respuesta, es decir, solo leyó la información proporcionada en la gráfica para ello.

I: *De acuerdo con el planteamiento del problema ¿cuál de los estados tiene temperatura similar a la que está acostumbrado Héctor?*

E6: […] [observa las barras y los datos indicados en ella para responder] *es el estado de Puebla*

Nivel 2: Leer dentro de los datos

Al igual que en el nivel anterior, todos los casos de estudio analizados lograron evidenciar el nivel 2 (leer dentro de los datos) en las cinco tareas propuestas. Sus producciones permitieron construir los siguientes subtemas: *El promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los elementos y dividiendo el resultado entre el número total de datos, la diferencia entre dos promedios se determina calculando el promedio de cada conjunto de datos y luego restando uno del otro, la variación entre dos cantidades se obtiene restando la cantidad menor de la cantidad mayor y, el porcentaje de un valor m en relación con el total n se obtiene dividiendo m por n y multiplicando el resultado por 100.*

Para ilustrar el subtema: *La variación entre dos cantidades se obtiene restando la cantidad menor de la cantidad mayor,* se toma como referencia el caso de E5, quien realizó correctamente los cálculos requeridos y explicó con detalle el procedimiento empleado (leer extracto de E6 al resolver la Tarea 2a). En la Tarea 2a, se le solicitó al E5 que identifique una información no presentada directamente en el gráfico, específicamente la cantidad que varía entre las ventas registradas en 2022 y 2026 de dos países diferentes: México y Argentina. Para ello, E5 efectuó una operación matemática (Figura 6), consistente en restar los valores registrados en el gráfico estadístico.

I: *¿Qué se te ocurre hacer?*

E5: *Es una diferencia que me pide entre, por ejemplo, en el año 2022 entre estos países Argentina y México y ya para el 2026 lo mismo*

I: *Ok, entonces para resolverla ¿qué es lo que harías?*

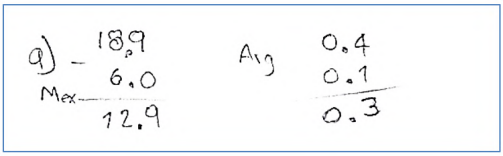
E5: *Una resta* [realiza el cálculo indicado]

I: *¿Qué fue lo que hiciste aquí para resolverlo?*

E5: *Bueno, en este caso, me pedía en el año 2022 y 2026, entre los países de Argentina y México, entonces anoté los datos de Argentina del año 2022 y de México, ya nada más las resté, pues hay una variación de 12.9 para México en esos años. Ahora, en el caso de Argentina anoté los datos e igual hice la resta y pues me dio de 0.3*

Figura 6

Respuesta escrita del E5 para el inciso a) de la Tarea 2



El procedimiento realizado por E5 demuestra su capacidad para leer e interpretar los datos, extrayendo información relevante que no se encuentra explícitamente presentada en el gráfico.

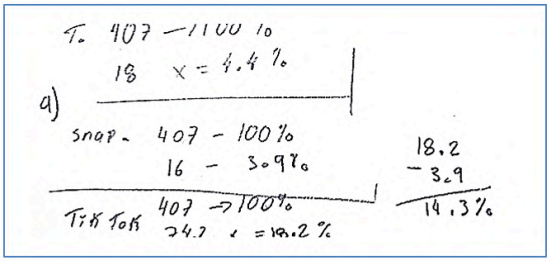
las respuestas de E5 para la Tarea 3a permiten ejemplificar el subtema: *El porcentaje de un valor m en relación con el total n se obtiene dividiendo m por n y multiplicando el resultado por 100.* En esta tarea se le pidió al estudiante obtener el porcentaje que tiene una aplicación (leer extracto de E5 al resolver la Tarea 3a y ver Figura 7), así como la variación en porcentaje de dos aplicaciones distintas. Para ello, E5 aplicó el algoritmo de la regla de tres para determinar el porcentaje de una cantidad específica respecto al total. El estudiante explicó que primero obtuvo la cantidad total sumando todas las frecuencias de los datos, donde la frecuencia correspondía al número de descargas de las aplicaciones más populares en México. Posteriormente, identificó la cantidad específica cuyo porcentaje desea calcular (18 millones de descargas de la aplicación de Twitter) y aplicó el procedimiento, multiplica esta cantidad por 100% y la divide entre el total de descargas, que asciende a 407 millones. De esta forma, E5 consiguió un porcentaje de 4.42%, que coincidió con la respuesta esperada para la pregunta (Figura 4).

I: *Bueno, para la primera pregunta, ¿Cómo lo resolviste?*

E5: *En ese caso, primero saqué el total. Como había mencionado, sumé todas las cantidades de usuarios que tiene cada aplicación, me dio un total de 407. Estamos hablando de millones, entonces, ahora para el porcentaje de Twitter pues usé la regla de tres. Mi 100% va a ser los 407 y yo quiero hallar qué porcentaje es el de Twitter. En este caso, Twitter tiene 18 millones de usuarios, entonces lo que hice fue multiplicar 18 por 100 y, luego lo que me diera, que en este caso fue 1,800 lo dividí entre 407*

E: *Y el resultado para esta primera pregunta, ¿Sería?*
E5: *De 4.42%*

Figura 7
Respuesta escrita del E5 para el inciso a) de la Tarea 3



Nivel 3: Leer más allá de los datos

El nivel 3 se presentó con menor frecuencia en comparación con los niveles 1 y 2, ya que solo cinco de los ocho casos de estudio lograron alcanzarlo (Tabla 4). Las producciones de los casos de estudio permitieron construir los siguientes subtemas: La frecuencia de los datos en relación con un período de tiempo facilita la proyección de tendencias futuras, a partir de los datos representados en el eje horizontal de un gráfico, se puede predecir tendencias estadísticas futuras y, el análisis del comportamiento de una curva, basado en la frecuencia de los datos, ofrece información para predecir estados futuros.

Para ilustrar el desempeño en este nivel, se tomará como referencia al subtema: La frecuencia de los datos en relación con un período de tiempo facilita la proyección de tendencias futuras. Al respecto, se considera el caso de E3 quien elaboró una proyección de los datos futuros a partir de la información presentada en los gráficos de las cinco tareas. En la tarea 4d, se pidió estimar el porcentaje de la tasa de mujeres y hombres en el estado de Guerrero a partir de la información dada en la gráfica. E3 consiguió hacer una predicción utilizando los datos reflejados en el gráfico (leer extracto de E3 al resolver la Tarea 4C).

E: *Para esta segunda pregunta, ¿Cuál sería tu respuesta?*
E3: […], *me guíe de los porcentajes que ya me proporciona la gráfica. Las mujeres para el año 2023 está en 52%, pero para el 2025, en el caso de Guerrero, yo siento que aumentaría porque el porcentaje de los hombres es menor aquí en el año 2023 y para el 2025 igual siento que va a estar más bajo. La situación de Guerrero no está tan buena […] con las mujeres porque hay mucha violencia y muchos se meten, se meten pues ahí en actos ilícitos*

Por otra parte, en la Tarea 2 el gráfico presentado es de barras e incluye una curva particular asociada a la frecuencia de los datos, relativa a las ventas de autos eléctricos en Latinoamérica, expresada en miles de unidades. Las producciones de los casos de estudio para esta tarea permitieron construir el

subtema *El análisis del comportamiento de una curva, basado en la frecuencia de los datos, proporciona información para predecir estados futuros.* Por ejemplo, E3 analizó el comportamiento de la curva dada en la tarea para estimar las ventas futuras en el año 2028 (leer extracto de la entrevista a E3 al resolver la Tarea 2b). Con base en esta información, el estudiante elaboró una estimación coherente con el comportamiento representado en el gráfico, calculando las ventas estimadas, en miles de unidades, específicamente para los países de México y Colombia (Figura 8).

I: *Para esta segunda pregunta, ¿Cuál sería tu respuesta?*

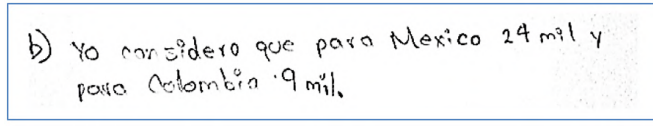
E3: *Yo considero que para México sí hay más incremento para el año 2028. Yo le pongo un aproximado de 24 000 unidades aproximadamente y para Colombia unas 9000 unidades*

I: *Respecto a estos datos que mencionas, ¿Te apoyaste de algo del gráfico para estimar estas unidades?*

E3: *Sí. Observando el gráfico, para el año 2020 al 2023 hay un incremento* [señala la curva de la frecuencia de los datos en el gráfico] *y para el 2023 al 2026 también, y yo considero que para el 2028 sí habrá más ventas de unidades*

Figura 8

Respuesta escrita del E3 para el inciso b) de la Tarea 2



Nivel 4: Leer detrás de los datos

Como se observa en la Tabla 4, sólo la mitad de los casos de estudio lograron alcanzar el nivel 4. Las producciones de estos permitieron construir los siguientes subtemas, Una lectura crítica de datos estadísticos considera variables ambientales, geográficas, sociales, económicas, tecnológicas y políticas y, una lectura crítica de datos estadísticos considera la diferenciación entre categorías relevantes del fenómeno estudiado y sus impactos sobre los resultados.

Para ilustrar este último subtema, Una lectura crítica de datos estadísticos considera la diferenciación entre categorías relevantes del fenómeno estudiado y sus impactos sobre los resultados, se toma como referencia el caso de E4. En la tarea 3c, este participante realizó un análisis crítico fundamentada sobre los datos proporcionados en el gráfico. E4 cuestionó la veracidad de los datos, reflexionando de manera autónoma y contrastándolos con su conocimiento previo, el contexto del gráfico y su propia perspectiva cultural. Respondió considerando lo que sabía sobre su entorno y la relevancia de las variables involucradas, explicando las posibles causas del fenómeno

representado y el comportamiento de los datos. No se limitó a analizar la información presentada, sino que también cuestionó la metodología utilizada para obtener los datos. Además, retomando aspectos del Nivel 3, E4 justificó cómo podrían comportarse los datos en el futuro, elaborando predicciones basadas en variables potencialmente implicadas (leer extracto de la entrevista a E3 al resolver la tarea 3c y ver Figura 9).

E4: *¿A qué se debe que los usuarios mexicanos tengan preferencia por Facebook? Yo pienso que es porque Facebook fue lanzada primero y, es preferido por todas las personas desde niños hasta un adulto mayor, ya que Facebook ofrece más que memes, permite hacer compras, te ofrece ver vídeos y todo lo que trae*

I: *Ok, ¿otro entretenimiento que se te ocurra que ofrezca Facebook?*

E4: *juegos también*

I: *Mencionaste algo de compras, ¿a qué te refieres con eso?*

E4: *Ajá, puedes subir tus productos y venderlos también, hacer publicidad y marketing de tus productos que vendas y así*

I: *El hecho de que Facebook tenga diversas actividades ahí, ¿Consideras que es un factor importante para decir que es preferida por los mexicanos? ¿Qué otro factor se te ocurre?*

E4: […] *Usan mucho el Facebook para divulgar la información así de todo tipo, político, social y cultural. Cuando pasa algún accidente o sucede algo en la ciudad ahí se acude (Facebook) para tener la información rápida*

I: *¿A qué se debe que Instagram no tenga tantos usuarios que Facebook si son similares?*

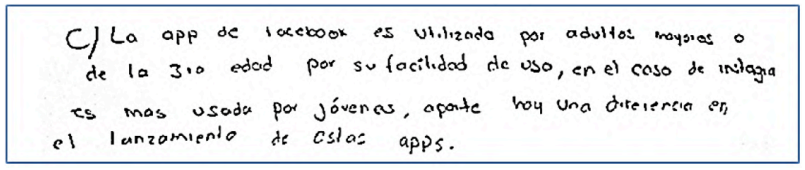
E4: *Instagram, yo siento que es más preferido por jóvenes de cierta edad. Aquí no lo usan tanto los niños, lo usan más los jóvenes de entre como 15 a 25 años, aproximadamente. Son los que más, pienso yo, quienes lo usan*

I: *Y, ¿Por qué consideras que es más usado por jóvenes y no tanto por gente adulta?*

E4: *Porque* […] *este Instagram es más para ver y subir fotos, y la gente mayor no lo utiliza tanto para subir fotos, nomás para verlas*

Figura 9

Respuesta escrita del E4 para el inciso c) de la Tarea 3



Las respuestas de E4 permiten identificar que reflexionó sobre las razones por las que Facebook supera en descargas a Instagram, pese a que ambas aplicaciones presentan características similares. Según E4, Instagram es más utilizada por jóvenes, ya que su uso es algo más complejo en comparación con Facebook. También señaló que Instagram fue lanzada al mercado mucho después que Facebook, lo que explica la diferencia en descargas. Además,

señalo que Instagram se centra en la fotografía, lo que la hace más atractiva para un público joven, pero restringe su alcance en comparación con Facebook.

Discusión y conclusiones

El presente estudio planteó la siguiente pregunta de investigación ¿Cuáles son los niveles de lectura de gráficos estadísticos que evidencian un grupo de estudiantes universitarios? A partir del análisis de los datos, se identificó que los ocho casos de estudio evidenciaron el nivel 1 y 2 de le lectura de gráficos estadísticos. En contraste, cinco evidenciaron el nivel 3 y cuatro el nivel 4. Estos resultados difieren de los hallazgos de Fernández et al. (2019) quienes observaron que la mayoría de una muestra de 36 estudiantes de matemáticas alcanzó niveles altos de comprensión gráfica (nivel 3 y 4). Sin embargo, son congruentes con los resultados de García-García et al. (2019) quienes realizaron un estudio comparativo con estudiantes universitarios de México y Chile, encontrando que únicamente el 31% de la muestra total logró acercarse al nivel 4, lo cual pone en evidencia una debilidad generalizada en los niveles más altos de lectura, independientemente del contexto nacional de los estudiantes.

En relación con el nivel 3 de la lectura de gráficos estadísticos, en esta investigación se observó que aquellos casos de estudio que no lograron evidenciarlo presentaron dificultades al realizar estimaciones de datos futuros a partir de la información proporcionada en el gráfico. Esta limitación sugiere que, si bien los participantes fueron capaces de interpretar los datos explícitos y efectuar cálculos básicos, enfrentaron desafíos al intentar proyectar tendencias o anticipar valores que no estaban directamente representados en la gráfica. Esta situación podría atribuirse tanto a su formación académica, como a sus conocimientos generales. Este hallazgo coincide con el señalado por Ben-Zvi y Garfield (2004) quienes sostienen que los estudiantes suelen experimentar dificultades al interpretar gráficos, especialmente cuando involucran comparaciones o inferencias, lo que limita su capacidad para reconocer patrones y comprender las relaciones entre variables.

Por otra parte, se identificó que los casos de estudio que no alcanzaron el nivel 4 de la lectura de gráficos estadísticos se debió en parte, a un conocimiento limitado sobre los contextos ambiental, geográfico, social, económico, tecnológico e, incluso, político, además de conocimientos estadísticos. Es decir, el contexto de la tarea influyó en algunos casos de estudio para analizar críticamente la información. Este resultado se alinea parcialmente con los hallazgos de Friel et al. (2001) quienes identificaron que algunos factores que afectan la comprensión gráfica son: el tipo de gráfico, la claridad del diseño y el contexto de la tarea. Asimismo, es consistente con los resultados de Curcio (1987), Gea et al. (2017) y García-García et al. (2019) quienes señalan que los estudiantes tienden a tener dificultades para llegar al nivel

de lectura crítica de datos. Este hallazgo es importante de resaltar, ya que los participantes de este estudio deberán desarrollar la capacidad de realizar análisis críticos de los datos para sustentar la toma de decisiones en su futura práctica profesional.

Por otro lado, los resultados de este estudio permiten reflexionar sobre la licenciatura cursada por los casos analizados. En particular, dos de los tres estudiantes de Economía (E3 y E4) y dos de Ingeniería (E5 y E6) lograron evidenciar hasta el nivel 4 de lectura de gráficos estadísticos, mientras que dos de los tres estudiantes de Contaduría (E1 y E2) solo alcanzaron los dos primeros niveles, con la excepción de una participante (E8), quien evidenció el nivel 3. Estos resultados sugieren que la formación académica, junto con los conocimientos previos en estadística y conocimientos generales, incide de manera significativa en el nivel de comprensión gráfica alcanzado. Asimismo, resulta relevante que tres de los cuatro estudiantes que alcanzaron el nivel más alto sean mujeres, en consonancia con lo reportado por Gómez-Sánchez et al. (2020), quienes señalaron un rendimiento académico percibido superior en el sexo femenino. Este hallazgo es de espacial interés, dado que los ocho casos de estudio presentaban buenos promedios académicos, por tanto, futuras investigaciones podrían explorar si esta tendencia se mantiene en estudios con muestras más amplias.

Los hallazgos de este estudio evidencian la necesidad de fortalecer el desarrollo de habilidades que permitan a un mayor número de estudiantes utilizar la información gráfica como herramienta para la predicción y el análisis crítico de los datos. Esta conclusión se alinea con las recomendaciones de Arteaga et al. (2017) y Moros-Briceño (2023), quienes destacan la importancia de fortalecer la educación estadística mediante programas de formación específicos y estrategias de apoyo educativo. En ese sentido, futuras investigaciones podrían plantear diseños para el aula basados en los resultados que se reportan en este estudio a fin de promover niveles superiores de lectura de gráficos estadísticos (nivel 3 y 4). Ello contribuiría al desarrollo de competencias indispensables para la vida académica, profesional y cotidiana. En un contexto en el que la información es presentada predominantemente a través de tablas y gráficos, resulta importante que los individuos adquieran las habilidades necesarias para interpretar, analizar y cuestionar los datos con un sentido crítico.

Finalmente, los resultados de esta investigación ponen de manifiesto la necesidad de promover nuevas investigaciones sobre la lectura de gráficos estadísticos en el contexto de la escuela mexicana, tanto en los diferentes niveles educativos como en los documentos curriculares, con el propósito de comprender la educación estadística que reciben los estudiantes y su evolución a lo largo de su trayectoria formativa. Fortalecer la habilidad de lectura de gráficos estadísticos en los estudiantes ayudará a formar ciudadanos más

informados y capaces de tomar decisiones fundamentadas en evidencia, favoreciendo así la construcción de una cultura estadística en la sociedad. Promover la alfabetización gráfica repercutirá positivamente en el desempeño académico de los estudiantes, además de propiciará una sociedad mejor preparada para interpretar y analizar la información que incide en ámbitos tan diversos como la educación, economía, la política, la salud y la tecnología.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como objetos culturales. *Números, 76,* 55–67.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., & Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 15–40.

Arteaga, P., Vigo, J. M., & Batanero, C. (2017). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de Formación Profesional. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 129–136). SEIEM.

Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3–15). Springer.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Camargo, L. P., & Espinosa, A. J. (2021). Niveles de interpretación de gráficos estadísticos. *Boletín Redipe, 10*(1), 312–319.

Contreras, J. M., Molina-Portillo, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207–216). SEIEM.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(*5), 382–393.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P., & Batanero, C. (2015a). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229–238). SEIEM.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M. D. M. (2015b). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa, 17*(4), 715–739.

Espinosa, A. J., & Mayorga, L. M. C. (2016). Lectura y escritura en la comprensión de gráficas estadísticas. *Boletín Redipe,* 5(9), 110–124.

Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación matemática, 2*1(2), 5–37.

Fernández, N. A., García-García, J. I., Arredondo, E. H., & López, C. (2019). Comprensión de una tabla y un gráfico de barras por estudiantes universitarios. *Areté*, *Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela, 5*(10), 145–162.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124–158.

García-García, J. I., Encarnación, E. J., & Arredondo, E. H. (2020). Exploración de la comprensión gráfica de estudiantes de secundaria. *IE Revista De Investigación Educativa De La REDIECH, 11*, e925.

García-García, J. I., Imilpán, I. A., Fernández, N. A., y Arredondo, E. H. (2019). Comprensión de una tabla estadística por estudiantes universitarios en México y Chile. *Revista Eletrônica de Educação Matemática, 14*, 1–16.

Gea, M. M., Arteaga, P., y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12,* 19–37.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez-Sánchez, D., Martínez-López, E. I., & Oviedo-Marín, R. (2020). Factores que influyen en el rendimiento académico del estudiante universitario. *TECNOCIENCIA Chihuahua, 5*(2), 90–97.

Marshall, C. & Rossman, G. B. (2014). *Designing qualitative research*. Sage.

Moros-Briceño, J. A. (2023). Alfabetización estadística en estudiantes de postgrado de la Universidad Nacional Experimental del Táchira. *Eco Matemático, 14*(1), 20–33.

Rodríguez-Alveal, F. E. (2017). Alfabetización estadística en profesores de distintos niveles formativos. *Educação & Realidade, 42*(4), 1459–1477.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano, (Ed.), T*endencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57–74). Gráficas San Pancracio, S.L.

Tauber, L. M. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas: Publicación de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, 1*(8), 53–74.

CUARTA TENDENCIA

HORIZONTES EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Colaboración entre docentes e investigadores en la enseñanza de las matemáticas. Aportes para la formación docente

David Block Sevilla [1]
Yesenia Castaño Torres [2]
María Laguna [3]
Rosvel Rodríguez [4]

Resumen

En este texto se explora la colaboración entre docentes e investigadores en didáctica de las matemáticas como un camino para la formación docente. Se presentan tres estudios sobre la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, uno en preescolar, sobre el tratamiento de la información, y dos en secundaria, orientados respectivamente a la geometría y a la multiplicación de números racionales. Después de una breve caracterización teórica y metodológica de los estudios, se muestran algunos resultados, con énfasis en los aportes que la experiencia tuvo para la formación de los docentes participantes. El análisis se basa en datos cualitativos de clases y reuniones colectivas, explorando las condiciones bajo las cuales los docentes se apropian de los aportes de la investigación y las formas en que su experiencia enriquece los diseños didácticos. Se argumenta que el análisis conjunto de los hechos ocurridos en el aula permite a los docentes profundizar en su comprensión del contenido matemático implicado, mientras se favorecen procesos de apropiación del enfoque didáctico subyacente.

Palabras clave

Trabajo colaborativo, formación docente, enseñanza de las matemáticas, educación secundaria, educación preescolar

---

[1] dblock@cinvestav.mx
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México

[2] yesenia.torres@cinvestav.mx
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México

[3] mgrios@cinvestav.mx
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México

[4] rosvel.castro@cinvestav.mx
Investigador independiente

Block Sevilla, D., Castaño Torres, Y., Laguna, M., & Rodríguez, R. (2025). Colaboración entre docentes e investigadores en la enseñanza de las matemáticas. Aportes para la formación docente. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 179–202). Editorial SOMIDEM.. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-08

Introducción

Desde el campo de la Didáctica de la Matemática se ha documentado que los diseños didácticos que derivan de la investigación no impactan en las prácticas de la enseñanza como se espera. Investigaciones al respecto (Bednarz, 2004; Bednarz et al., 2001) señalan que las transformaciones que sufren estos diseños cuando son experimentados en aulas comunes han dejado ver reiteradamente un alejamiento de las intenciones originales de los investigadores, así como la dificultad que implica para los docentes implementarlas en sus aulas (Artigue, 2011).

Gracias a diversos estudios sobre la práctica docente (Bednarz et al., 2001; Block et al., 2007; Mercado, 2002; Rockwell & Mercado, 1988), hoy en día sabemos que los maestros necesitan apropiarse de las propuestas didácticas para poderlas implementar y para ello, necesariamente las transforman a partir de sus conocimientos y de sus condiciones de trabajo. Al visibilizar la necesidad de los docentes de "ajustar" las propuestas que les llegan de la investigación, así como la singularidad de sus contextos de práctica y los condicionamientos que estos imponen a su enseñanza, se avanzó en la comprensión de cuestiones más profundas vinculadas a los procesos de formación y actualización docente, así como a las prácticas de investigación en didáctica de las matemáticas (Sadovsky, 2024). Así, con respecto a la formación, se observa que los cursos impartidos por expertos no han generado cambios significativos en las aulas, principalmente porque suelen estar desconectados de las prácticas reales de los docentes, de las dificultades que enfrentan y de las condiciones institucionales en las que se desarrollan (Block et al., 2013; Savoie-Zajc & Descamps-Bednarz, 2007); en cuanto a la investigación didáctica, la visión tradicional de investigadores y docentes ha reflejado un dualismo entre teoría y práctica. Los investigadores tienden a definir los problemas de enseñanza desde una postura teórica, mientras que los docentes, atrapados en su relación práctica con el trabajo (Morales et al., 2017; Sensevy, 2011), son considerados como ejecutores de las propuestas y de los productos generados por los investigadores.

Frente a lo anterior, se ha hecho visible la necesidad de estrechar la relación entre los componentes teóricos y prácticos de la enseñanza y, en consecuencia, que investigadores en didáctica y docentes se involucren juntos en el análisis de las cuestiones de este campo (Sadovsky, 2024), dando lugar a la producción de un conocimiento situado, vinculado a las necesidades de la práctica y a los contextos de acción específicos de los docentes. Los enfoques colaborativos aparecen como una alternativa para que docentes e investigadores, trabajando en conjunto, comprendan mejor la complejidad de las prácticas docentes y reformulen los problemas de enseñanza a partir de los aportes de unos y otros (Sadovsky, 2024). En ese sentido, la colaboración

constituye una oportunidad para impactar en la formación de todos los involucrados (Bednarz, 2004; Desgagné et al., 2001; Savoie-Zajc & Descamps-Bednarz, 2007).

En otros textos (Laguna et al., 2024; Castaño & Block, 2023) hemos discutido sobre la relevancia de este enfoque para construir conocimientos didáctico-matemáticos más ajustados a las necesidades de la práctica; en esta ocasión nos interesa destacar las contribuciones al desarrollo profesional de los profesores participantes identificadas en tres estudios colaborativos que involucran distintos niveles de escolaridad y conocimientos matemáticos específicos: el tratamiento de la información en preescolar, la geometría y los números racionales en secundaria. Centraremos el análisis en torno a la pregunta ¿De que maneras la participación de los docentes en proyectos colaborativos abona a su formación?

Marco teórico

La investigación colaborativa entre investigadores y docentes se caracteriza por el propósito de reducir la brecha entre investigación y práctica investigando "con los maestros" y no "sobre los maestros" (Bednarz, 2004; Desgagné et al., 2001), y por la intervención de los investigadores en el objeto de estudio (Roditi & Trgalova, 2016). Asimismo, puede vincularse con tradiciones de larga trayectoria como la investigación-acción educativa (Barbier, 1996) o la investigación basada en el diseño (Cobb et al., 2003).

En el caso de nuestros trabajos, dos referentes importantes han sido la investigación colaborativa de la escuela canadiense (Bednarz, 2004; Desgagné et al., 2001), en relación con el propósito de crear una sinergia entre la investigación y los procesos de formación de docentes, y la ingeniería cooperativa de la escuela francesa (Sensevy et al., 2013), en lo que respecta a la generación de conocimientos didácticos, incluyendo propuestas didácticas más viables de implementarse en aulas de enseñanza regular. Compartimos algunas ideas comunes a estos dos enfoques, como la conceptualización de los hechos didácticos, en la que maestros e investigadores se asumen como co-constructores de un saber vinculado a la práctica (Savoie-Zajc & Descamps-Bednarz, 2007) o como "ingenieros en didáctica" (Sensevy et al., 2013), cada uno con su propia lógica y especialidad, persiguiendo un mismo fin: la mejora de la enseñanza.

Subyace a estas corrientes una concepción del saber práctico docente como una construcción social dinámica, influenciada por experiencias, teorías y prácticas cotidianas (Mercado, 2002). Estos saberes evolucionan con la reflexión y la experiencia, permitiendo a los docentes adaptarse a las necesidades cambiantes de sus estudiantes. El proyecto de adaptar las propuestas didácticas conjuntamente con los investigadores, de manera que sean propicias para el aprendizaje de los alumnos y, al mismo tiempo, viables de imple-

mentarse en las aulas en las condiciones en las que se desarrolla la práctica de los docentes, descansa en una concepción del docente como un "actor racional" y sujeto de conocimiento (Tardif, 2004).

Para el análisis de los cambios que sufren las propuestas didácticas al pasar por el tamiz de los maestros y los investigadores y de los propios alumnos, en el marco de un proceso colaborativo, así como para desentrañar la manera en que este proceso aporta al desarrollo profesional de los docentes, retomamos de los estudios socioculturales de la práctica docente el concepto de apropiación de propuestas didácticas. La apropiación es concebida "como un proceso social activo en el que los maestros construyen y reelaboran sentidos y saberes a partir del uso de las nuevas herramientas que les son propuestas" (Espinosa & Mercado, 2009, p. 331). Con este concepto queremos poner en primer plano el hecho de que los maestros interpretan y transforman las propuestas para poderlas llevar a sus aulas, incluso cuando están vinculadas a un proceso de reconstrucción por un colectivo de investigadores y otros docentes. Estas transformaciones establecen una distancia entre las condiciones previstas en el diseño y lo que finalmente ocurre en las implementaciones (Laguna, 2016), y contribuyen a la construcción de saberes sobre las propuestas y sobre la propia práctica por parte del maestro.

Finalmente, para el análisis y rediseño de las situaciones didácticas que consideramos en nuestras experiencias, recurrimos a algunos conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD; Brousseau, 1998), empezando por la consideración constructivista que enfatiza el papel central de la resolución de problemas en el aprendizaje de las nociones matemáticas. Esto implica que la noción que se desea enseñar se pone en juego a través de interacciones con un medio "adidáctico" cuidadosamente planificado. Otras características de este tipo de situaciones son la posibilidad que ofrecen a los estudiantes para verificar por sí mismos si su resolución fue exitosa o no, y la necesidad de momentos de institucionalización, en los que los conocimientos que fueron puestos en juego en la resolución se vinculan explícitamente con los saberes culturales, y en los que el papel del docente es determinante, pues conduce los procesos de explicitación y socialización del conocimiento implícito que se ha desarrollado. Por otra parte, en cada estudio recurrimos a aportes de la investigación sobre los temas de matemáticas que se abordan.

Método

Los tres estudios, realizados en el marco de tesis de maestría (Castaño, 2021; Laguna, 2016; Rodríguez, 2024), comparten varias características metodológicas propias de la investigación colaborativa. Así, para la recolección de datos, se propuso a los docentes en servicio una secuencia didáctica sobre un contenido específico, la cual fue analizada previamente e imple-

mentada en sus grupos escolares, durante un periodo de tiempo breve entre cuatro y 15 semanas; los investigadores, y en algunos casos algunos maestros, observaron clases, las cuales fueron grabadas en video y posteriormente transcritas; y, finalmente, se sostuvieron reuniones colectivas y/o entrevistas, que también fueron grabadas y transcritas.

Para el análisis de los datos se consideraron dos fuentes: 1) las clases de los maestros, a partir de los presupuestos explicitados previamente —el propósito didáctico, los procedimientos esperados de los alumnos, las acciones del docente previstas— y teniendo en cuenta tanto la relación entre el desempeño de los alumnos y las características de las situaciones —relación anticipada desde los análisis previos de las situaciones—, así como las transformaciones que cada docente imprimió a la situación en la implementación, sus causas y efectos posibles; y 2) las reuniones colectivas, valoradas desde los aportes de los docentes e investigadores, identificando ciertas regularidades o tensiones que permitieron integrar los resultados de dichas implementaciones con la comprensión de la transformación activa que los docentes llevan a cabo durante la práctica.

Otras características metodológicas, en cambio, difieren entre los tres estudios. Por ejemplo, varió el formato presencial o virtual de los encuentros entre investigadores y maestros, así como las condiciones en las que se reflexionaba sobre las implementaciones de las secuencias: una reflexión colectiva entre el maestro y el investigador, o una colectiva, involucrando a todos los maestros participantes y a los investigadores de forma simultánea. También fueron distintos los recursos utilizados para enriquecer dicha reflexión: observaciones en el aula por parte de un investigador o de otro maestro, o entrevistas individuales a los docentes. Finalmente, la manera en que se concretó la condición de *iteración* (Sensevy et al., 2013) también fue distinta, con las clases implementadas por los diferentes docentes al mismo tiempo, o con una clase anticipada que los demás podían ver antes de implementar la propia. A continuación, se presentan algunas cuestiones metodológicas adicionales de cada uno de los estudios.

El estudio en preescolar. La experiencia se llevó a cabo entre mayo y junio de 2015 en el estado de Michoacán, México. Se implementó una secuencia de tratamiento de la información a lo largo de seis clases con dos grupos de tercer grado de preescolar de 4 a 5 años. Las titulares de ambos grupos, Emilia[1] y Ximena, con 10 años de servicio, tenían cierta familiaridad con el enfoque didáctico subyacente a la secuencia desarrollada. En este texto se presenta lo ocurrido con el grupo de la maestra Ximena, quien trabajaba en un jardín de niños con jornada de tiempo completo, 6 horas, en la ciudad de Morelia. La metodología que se empleó, Ingeniería de Desarrollo (Perrin-

[1] Los nombres de los docentes fueron cambiados en las tres investigaciones.

Glorian, 2011), incluyó la realización de un taller previo a la implementación, reuniones a lo largo del proceso, y entrevistas individuales con las maestras.

Los estudios en secundaria. La experiencia sobre la enseñanza de la geometría se llevó a cabo en 2019 con cuatro docentes: Lili, Ignacio, Sara, Fabio, provenientes de dos escuelas distintas, quienes contaban con más de 10 años de servicio. Los grupos de primer año tenían entre 35 y 40 alumnos y sus edades estaban entre los 13 y 14 años. La dinámica de trabajo con los docentes, que denominamos *dispositivo* en la investigación, consideró tres situaciones didácticas y se basó en la alternancia de las sesiones colectivas entre los investigadores y los maestros, y la implementación de la secuencia por parte de estos últimos con sus grupos de alumnos; todos los maestros implementaban la misma situación en la misma semana. Estas sesiones cumplían un doble propósito: analizar las clases recién impartidas y planear la clase siguiente.

En el estudio sobre la enseñanza de la multiplicación de números racionales participaron cinco docentes: Sara, Graciela, Tere, Lola, Aldo. La experiencia se llevó a cabo entre enero y abril del 2023. El *dispositivo* diseñado constó, para cada una de las tres situaciones didácticas estudiadas, de un ciclo conformado por cinco momentos: 1) una sesión colectiva de análisis previo de la situación que sería implementada; 2) la implementación por una sola profesora, con conocimiento y experiencia en el enfoque didáctico subyacente, de la situación en una "clase anticipada". Dicha clase fue filmada y distribuida entre los demás profesores, quienes pudieron verla y analizarla antes de implementar en sus grupos; 3) una sesión de análisis colectivo de la clase anticipada; 4) la implementación de la situación en las clases por los demás profesores; y 5) una sesión de análisis colectivo de las experiencias. Para esta investigación, las sesiones colectivas se desarrollaron de forma virtual.

Resultado

En este apartado analizamos algunos episodios de cada uno de los tres estudios, basándonos en las dos fuentes de datos, las clases de los maestros y las reuniones colectivas. Si bien cada estudio responde a preguntas de investigación específicas, aquí se enfatizan las aportaciones que se identificaron en la formación de los docentes.

El tratamiento de la información en preescolar

La investigación tuvo como propósito conocer las transformaciones que realizan dos maestras de preescolar en relación con propuestas didácticas de tratamiento de la información diseñadas exprofeso. Del proceso de reconstrucción de las secuencias se buscó indagar: ¿Qué se modifica?, ¿En qué medida las transformaciones enriquecen o debilitan la situación?, ¿Cómo

afectan al propósito original?, y ¿Qué factores las propician? Se encontró que, *i*) las transformaciones realizadas por las maestras no solo conservaron el sentido de las secuencias, sino que lo enriquecieron (Laguna & Block, 2020a); *ii*) al desviarse de lo previsto, se revelaron características únicas de la forma en que las educadoras se apropiaron de las situaciones; y *iii*) la reconstrucción de las situaciones favoreció la construcción de conocimientos didáctico-matemáticos que se configuraron como aportes a la práctica docente.

En este apartado se da seguimiento al caso de la maestra Ximena, cuando implementa la situación de la encuesta. Esta situación formaba parte de una secuencia más amplia en la que se articulaban tres recursos: la receta, la gráfica y la encuesta, en torno a la actividad de hacer gelatinas. Se presenta un ejemplo breve de las transformaciones que realizó la maestra Ximena al diseño inicial y de cómo estas modificaciones fueron conceptualizadas en reflexiones posteriores.

La situación de la encuesta. Con motivo de que los alumnos del grupo A prepararían gelatinas para los niños del grupo B, se planteó la elaboración de registros cuyo objetivo era identificar la preferencia de sabor entre dos opciones por parte de los niños del grupo B. Para obtener la información se propuso una organización por equipos —A-B—. Cada equipo encuestador tendría que decidir qué preguntar y cómo registrar la información obtenida del equipo encuestado.

Para el registro, se previó que los niños usarían numerales, marcas de conteo, dibujos, símbolos y/o escrituras. La relación entre los datos niños-sabores representaría el mayor reto: podría presentarse en forma de listado o en columnas y renglones, acercándose a un formato de tabla. Se buscó que los niños participaran en las tareas de manera autónoma, sin que las docentes propusieran anticipadamente formas específicas de registrar, organizar o recuperar la información. La elaboración de registros daría lugar a la institucionalización de "la encuesta" como una forma de obtener datos que reflejaran las preferencias de otros.

Se contemplaron tres momentos para validar el formato de la encuesta: primero, al reportar a la docente cuántas gelatinas necesitaban de cada sabor, donde se esperaba que los alumnos se dieran cuenta de si la forma en que obtuvieron la información les permitía reflejar la relación niños/sabor. En segundo lugar, al contrastar formatos de registro durante la puesta en común, identificando los más eficaces. Y finalmente con ayuda del registro, al entregar a cada niño del grupo B la gelatina del sabor que pidió.

Interpretación de la partitura: un ejemplo de apropiación de la maestra Ximena. A la diversidad de formas de desarrollar "buenas clases" a partir de una misma situación se le denominó "interpretación de la partitura", aludiendo al oficio de un director de orquesta que interpreta y adapta una

pieza musical según su visión particular, obteniendo así una "versión" de esta (Laguna et al., 2024). Para ilustrar la interpretación realizada en un grupo específico, el de Ximena, se retomaron dos momentos concretos, *i*) el planteamiento de la encuesta, que trajo consigo notables transformaciones respecto al diseño inicial, y *ii*) la recuperación de la segunda fase de validación, que parecía haberse diluido con los cambios.

Un inicio imprevisible: seguir las propuestas de los niños. En contraste con lo previsto en la situación de la encuesta, la maestra Ximena planteó el problema de manera grupal, lo que favoreció una discusión colectiva en lugar de un trabajo por equipos.

> Ximena: […] *¿Les gustaría que les hiciéramos una gelatina a los niños del grupo B?* [dicen que sí] *Oigan, pero ¿cómo vamos a saber si un niño quiere de uva o quiere de fresa?* [eran los sabores disponibles]

Derivado del planteamiento de su maestra, los alumnos comenzaron a aportar ideas para recuperar las preferencias de sabores del grupo B. A medida que surgían las propuestas, la docente devolvía la información al grupo para analizar su viabilidad, dando cause a las sugerencias: "¿Qué pregunta le vamos a poner? ¿Cómo podemos empezar?" (Ximena). La dinámica grupal los llevó a tomar decisiones conjuntas que se generalizaron para todos: encuestar uno a uno, anotar la información "en un papel", y definir "qué diría" ese papel. Estas decisiones provocaron transformaciones significativas en comparación con lo que se había previsto en el diseño inicial. Sin embargo, los niños pudieron asumir la responsabilidad del problema y organizarse para recabar la información, que era el objetivo de la actividad.

Al final, se obtuvo un formato de encuesta que se aplicó de forma individual, pero construido de forma colectiva, concluyendo lo siguiente: en la parte superior de la hoja de registro iría el nombre del encuestador, seguido de la pregunta: "Hay dos opciones de gelatina, fresa y uva; ¿de qué sabor quieres?". La respuesta del encuestado sería señalada con una marca de conteo [✓] encima del sabor elegido —dentro de la pregunta escrita—. El nombre del encuestado se registraría en la parte inferior.

Después de elaborar el formato, la maestra implementó una simulación de cómo harían la encuesta. Las demostraciones, ejemplificaciones y prácticas previas son acciones que conforman una singularidad de la práctica de la maestra Ximena, quien realizaba este tipo de intervenciones de manera constante para garantizar que sus alumnos comprendieran las consignas (Laguna, 2016). Debido a esta particularidad, le pudo resultar conflictivo "soltar" a los niños en la actividad con poca información previa, dejando las decisiones en manos de los equipos, lo que probablemente la llevó a generar y sostener la dinámica grupal. Estas acciones particulares constituyen un "repertorio" que refleja la identidad de los individuos en las prácticas cotidianas

(De Certeau, 1990) y, en este caso, son representativas de las formas en que la docente se apropia de un diseño.

Sin duda, estas transformaciones en la forma prevista de hacer la encuesta diluyeron la posibilidad de llevar a cabo el segundo momento de validación tal como estaba previsto. Sin embargo, aunque había un formato de encuesta predeterminado, algunos niños lo adaptaron a sus propias necesidades de registro: escribieron el sabor en lugar de marcarlo, omitieron la escritura de la pregunta y anotaron los nombres del encuestado y del encuestador de distintas formas (Laguna & Block, 2020b). Estas variaciones en el uso del formato grupal dieron pie a otro tipo de análisis que, como se verá a continuación, permitió recuperar la validación contrastando las diferentes formas de registro y las características del formato.

Un giro inesperado: recuperación del análisis de formatos. Al momento de recuperar la información individual de las encuestas —primera validación—, la maestra confrontó a los niños con una contingencia: algunos compañeros no asistieron ese día, pero el día anterior habían hecho su encuesta. Por lo tanto, era necesario recuperar la información de estos formatos para completar la tabla general.

En lugar de simplemente tomar la información de las encuestas de los niños ausentes, la educadora aprovechó esta situación para plantear una nueva actividad: repartió las encuestas entre equipos de dos o tres niños, quienes debían leer la información del formato y comunicársela a ella para que pudiera anotarla en la tabla. Aquí se resalta la flexibilidad de la secuencia como un atributo que admite modificaciones sin perder la estructura completa de la secuencia.

Como se ha señalado, las transformaciones que los docentes realizan a las propuestas didácticas son necesarias, pues permiten su viabilidad. En este caso, las modificaciones reflejan los saberes que la maestra Ximena ha construido con el tiempo, lo que le permite aprovechar las contingencias de las clases para dar lugar a experiencias singulares; incluso, para recuperar una fase importante de la secuencia que parecía perdida.

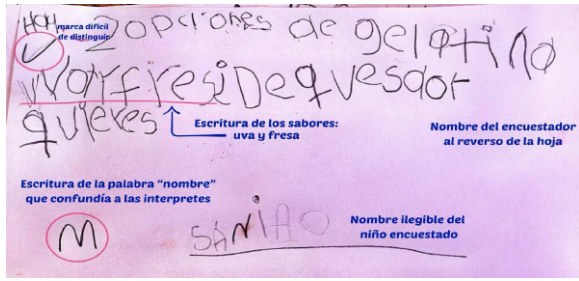
La lectura de formatos elaborados por otros generó discusiones enriquecedoras dentro de los equipos, debido a que no todos habían seguido las indicaciones "al pie de la letra" al momento del llenado. Debido a estas variaciones, requirieron un esfuerzo de interpretación por parte de los lectores. Este escenario marcó el inicio del segundo momento de validación. A continuación, se presenta un ejemplo ocurrido en un equipo conformado por dos niñas que no lograban interpretar los datos de la Figura 1.

En la Figura 1 se observa que los sabores están escritos sin espacios entre las palabras y que las representaciones de la ***u*** la ***v*** y la palomita ✓ son muy similares. Esto generó dificultad para que las niñas distinguieran los sabores escritos y determinaran cuál era el sabor elegido. La siguiente interacción

entre las niñas y la maestra Ximena evidencia las dificultades de interpretación y la forma en que la educadora las apoya sin resolverles directamente.

Figura 1

Encuesta "ajena" interpretada por dos alumnas



Ximena: *La persona que hizo la encuesta ¿si registró de qué sabor quería la gelatina?*
Alumna 1: *Parece que no porque yo no le veo uva ni fresa*
Alumna 2: *Aquí no se ve como el sabor*
Ximena: *Fíjense bien* [devolución] *y si no, me la regresan* [A1 y A2 discuten sobre la escritura y logran identificar las palabras: uva y fresa]
Alumna 1: *Maestra, aquí dice fresa y uva*
Ximena: *A ver, aquí encontraron que dice uva y fresa ¿dónde ven una señal* [brinda ayuda] *que marque algo del sabor?*
Alumna 2: *No se ve*
Alumna 1: *¿Uva?*
Ximena: *¿Por qué?* [A1 señala la marca arriba de la palabra uva] *Ah sí, ahí tiene la palomita*

Cuando las alumnas solicitaron ayuda debido a sus dificultades en la interpretación, la maestra les devolvió el problema: "fíjense bien" (Ximena), lo que las llevó a revisar detenidamente la encuesta. Esta segunda mirada les permitió a las alumnas discutir sobre la escritura de su compañero, alejándose de la idea estricta del formato y buscando dar sentido al texto y a las marcas escritas. Así, lograron distinguir las palabras "fresa" y "uva". Al acudir con la educadora para mostrar su avance, reciben un nuevo apoyo de la maestra: "¿dónde ven una señal?" (Ximena). Con el trabajo conjunto entre las niñas y la docente, cada una ejerciendo su rol, se pudo recuperar la información recabada por el encuestador, y agregarla a la tabla.

Después de elaborar la tabla, la maestra compartió las dificultades de cada equipo con el resto del grupo. El análisis derivado de la actividad propuesta por la educadora se centró en las dificultades que surgieron al utilizar el formato acordado, como la falta o la ilegibilidad de nombres encuestador-encuestado, la falta de claridad en el marcado o escritura del sabor preferido, y los pros y contras de las distintas formas de llenado. La docente enfatizó en que, aunque algunos registraron de otra manera, lo

relevante era que pudieran entender su información y establecieron acuerdos sobre aspectos importantes a considerar para futuros registros: escribir claramente para que otros puedan entenderlo, no olvidar poner el nombre del encuestado y del encuestador, así como la posibilidad de usar taches [**x**] en lugar de palomitas para evitar confusión.

Reflexiones de la maestra Ximena sobre su propia práctica. Posterior a la implementación, se dialogó con la maestra Ximena para comprender cómo interpretaba los cambios que realizó al diseño de la encuesta y cómo, a pesar de las amplias transformaciones, logró recuperar los propósitos previstos en la situación. De este proceso, se resaltan dos conceptualizaciones que permiten, por un lado, mostrar lo que resulta relevante para la maestra al apropiarse de la propuesta, y, por otro, explicar los aportes de estas transformaciones al enriquecimiento de la situación didáctica.

a) Flexibilidad en la práctica. Una característica constante en la práctica de la maestra Ximena es la facilidad con que adapta las secuencias a lo que ocurre en su grupo, tomando las contingencias que surgen en las actividades como oportunidades de problematización. Según explica, es importante "tener flexibilidad en esto de la práctica", y cuando ve aparecer propuestas de los niños, las incluye, a pesar de los cambios que esto implique.

b) Aprovechar el interés de los niños. Otra singularidad de Ximena es su postura frente a la planificación de un diseño didáctico, pues para ella es un marco de acción que no es necesario seguir "al pie de la letra" (Laguna & Block, 2020a). Es decir, antepone los intereses que surgen en el aula a la estructura de la situación. Como señala "muchas veces hago la planificación completa [...] y al último tengo que omitir actividades porque ya no se pudieron hacer o tengo que agregarle otras [...] porque los niños van diciendo opiniones [...] y sí tienen el interés, aprovecho" (Ximena). Entonces, si los alumnos están implicados en una actividad, los mantiene trabajando en torno a ese interés, como cuando se realizó el diseño grupal de la encuesta.

Comentario final. En esta experiencia se aprecia cómo la educadora hace ajustes in situ a la secuencia, alcanzando los resultados previstos. Además, a través de la interacción entre la investigadora y la maestra Ximena, se explicitó la lógica subyacente a dichos cambios, lo que generó una comprensión conjunta sobre lo ocurrido en la práctica. En ese sentido, se considera que la reconstrucción de las secuencias es fundamental en el proceso de apropiación, al posibilitar que los docentes adapten un diseño general a las particularidades de cada grupo y a su propia forma de enseñar. Debido a lo anterior, es recomendable que los diseños didácticos contemplen cierto grado de flexibilidad (Laguna & Block, 2020a), que permita los ajustes necesarios sin imposibilitar la recuperación del problema. Finalmente, vemos en estas transformaciones expresiones de libertad —entendida como agencia— y de creatividad, que se materializan cuando los docentes plantean

soluciones prácticas para superar las debilidades o dificultades que encuentran en las propuestas, reapropiándose así de los diseños a través de acciones específicas (De Certeau, 1990) que reflejan la singularidad de las prácticas docentes.

La geometría en secundaria

Esta investigación tuvo como objetivo contribuir al conocimiento sobre los procesos de formación de profesores de matemáticas en servicio, respecto a algunos aspectos de geometría en secundaria, bajo un enfoque didáctico específico (Castaño, 2021). Para ello, el análisis se centró en el funcionamiento del dispositivo implementado, particularmente en las dos fuentes de retroalimentación para los docentes, la que ofrece la implementación de las situaciones en el aula y la que ofrecen las reuniones colectivas. Este análisis se apoya en los intercambios entre maestros e investigadores ocurridos en estas últimas, a fin de destacar experiencias que contribuyeron a la formación de los docentes.

Las situaciones didácticas. Los investigadores propusieron a los docentes situaciones que plantean un juego de comunicación (Brousseau, 1998) en el que los alumnos se organizaban en equipos de dos integrantes y asumían el papel de emisores y de receptores de un mensaje escrito, de manera alternada. Los emisores tienen un dibujo de una figura y redactaban un mensaje a los receptores para que, sin verla, ellos pudieran reproducirla de manera idéntica. El juego lo ganaban los equipos que lograban la congruencia entre las figuras original y la reproducida; la validación se establecía por superposición de las dos figuras. Este tipo de situaciones ha sido ampliamente estudiado en el ámbito de la investigación, por ejemplo, Fregona (1995). Considerando los contenidos geométricos en estudio, se seleccionaron tres figuras geométricas, organizando una situación de comunicación para cada una. La situación 1 correspondía a configuraciones de rectángulos con alguna de sus diagonales o una línea paralela a uno de sus lados, la situación 2 implicaba a los paralelogramos, y la situación 3 a los triángulos. La implementación en el aula de estas situaciones por parte de los maestros fue la base de las discusiones y reflexiones que se generaron en el colectivo. A continuación, presentamos un ejemplo.

"Leer" colectivamente la experiencia en el aula. La clase de Lili. En la sesión colectiva, tras las implementaciones de la situación 1, los maestros compartieron su experiencia en el aula, resaltando aspectos que consideraron relevantes. A petición de los investigadores, incluyeron un comentario sobre las características de las producciones de sus alumnos; en casi todos los casos, compartieron ejemplos de los mensajes o de los dibujos reproducidos a partir de estos. En su intervención, la maestra Lili destacó un recurso que habían usado sus alumnos para reproducir la figura, el uso de dobleces de papel. En

el siguiente fragmento se presenta la interacción que se dio en el colectivo, a propósito de su intervención:

Lili: […] *Hubo otra situación, ¿verdad, maestro? [interpela al maestro Aldo, quien fue observador de su clase* [2]], *y es que hicieron este doblado* [toma varias hojas de color con dobleces que configuraban la misma forma de la figura modelo], *hicieron los doblados de papel y ¿cómo lo hicieron? ¡quién sabe!* [ríe]. *Aquí están, mírenlos* [los enseña a todo el colectivo]

Aldo: *Sí, varios* [alumnos]

[…]

Investigadora: [Toma una de las hojas] *¿Y este rectángulo lo recortaron* [los alumnos] *o los papelitos que les diste* [para trazar la figura] *eran de este tamaño?* [se refiere al tamaño de la hoja de color que tenía la misma forma rectangular de la figura modelo]

Lili: *Todos los papelitos los di a la mitad* [las hojas de colores que dio Lili era un medio del tamaño A4. Medidas: 21.5 cm por 14 cm aprox.]

Investigadora: *Ah, ok*

Aldo: *Ajá, era su material para escribir y dibujar* [el mensaje; la figura]

Lili: *Sí, para que no desperdiciaran tanto papel…Y así lo entregaron* [el rectángulo reproducido con los dobleces tenía el tamaño de la media hoja entregada por Lili], *pero a la hora de recoger y analizarlo yo les decía que el objetivo era que del mismo tamaño y la misma forma; entonces pues esto ya salía* [ya no era válido], *pero bueno, fue el producto que ellos me entregaron…* [Silencio por unos segundos] *Y sí, lo que pasa es que yo también trabajo con papel, le hago doblado y entonces ellos pensaron que de esa manera podían resolver la situación*

Aldo: *Aunque no se les haya dicho* [en la consigna]

Lili: *Ajá*

En su intervención previa a este episodio, el maestro Aldo compartió que, al instaurar la consigna en la clase, Lili presentó el objetivo del juego, destacó la restricción de no incluir dibujos en el mensaje, así como el método de validación por superposición de las figuras. Asimismo, no sugirió la toma de medidas ni indujo el uso de la regla como instrumento de medición. Las figuras modelo que entregó a los alumnos tenían el tamaño de las figuras presentadas en la ficha didáctica[3]. Para Aldo, la consigna de Lili fue clara y los alumnos no manifestaron dudas ni comentarios al respecto.

La interacción que se dio en el colectivo tras la intervención de Lili permitió reconstruir algunos aspectos asociados a su clase y a la estrategia usada por los alumnos para lograr el objetivo del juego: 1) el doblado posibilitó

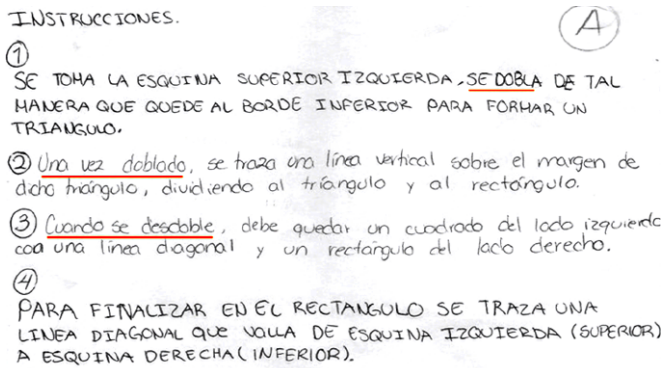
[2] Aldo tuvo una participación limitada en la investigación, pues fue observador de esta única clase y luego se retiró por incompatibilidad con los horarios.

[3] Los investigadores entregamos a los maestros una ficha didáctica de las tres situaciones donde presentamos aspectos generales de estas: objetivos, fases, consignas, ejemplos de posibles producciones y los dibujos de las figuras modelo que se disponían para cada situación. Las dimensiones del rectángulo que servía como figura modelo de la situación 1 eran 4.5 cm por 2.6 cm. De entrada, nosotros esperábamos que las hicieran más grandes, como de hecho ocurrió con las de los demás.

la reproducción de las figuras, misma forma, aunque de tamaño diferente, 2) doblar el papel no fue algo sugerido en la consigna; ya que de acuerdo con Aldo y Lili, ella precisó el objetivo de la igualdad entre las figuras original y reproducida y 3) el doblado surgió desde la formulación de los mensajes, como una estrategia que se complementaba con el trazo de líneas, ver Figura 2. Cuando Lili detectó que esto estaba pasando, no intervino y permitió a los alumnos continuar con su trabajo.

Figura 1

Ejemplo de un mensaje que apela al doblez del papel para reproducir la figura. Alumnos de Lili



Para Lili y Aldo, y para los demás integrantes del colectivo, el doblado del papel fue una estrategia sorprendente que no habría sido posible anticipar. La explicación que formuló Lili en su intervención muestra por qué los alumnos lo consideraron como una estrategia para alcanzar el objetivo del juego: en las clases de Lili la papiroflexia era una práctica cotidiana vinculada al estudio de la geometría. La meta de reproducir la figura, junto con las características del papel que Lili entregó para escribir el mensaje y trazar la figura a partir de este, y la forma rectangular que este papel tenía, llevaron a que los alumnos sobre entendieran que debían hacerlo en esa mitad de la hoja que habían recibido. Para ellos, el juego de comunicación era una actividad más en el marco de la práctica de la papiroflexia que caracterizaba a las clases de geometría y dado que el doblado del papel permite obtener figuras de formas variadas, la estrategia de los alumnos se configuraba un recurso viable para reproducir la figura modelo.

Al compartir su sorpresa por este tipo de producciones, al explicitar las condiciones en las que se formuló la consigna y una posible razón del porqué de estas, Lili da cuenta de un nivel de análisis más profundo, en el que articuló las acciones de los alumnos con sus prácticas y recursos de enseñanza. Esta reflexión se enriqueció con las aportaciones que hicieron uno de sus colegas y el investigador:

Ignacio: […] *Me llama la atención, por ejemplo, que ninguno* [de los maestros que integran el colectivo y que implementaron la S1] *tenemos lo que pasó con Lili y es porque Lili tiene mucho ese perfil del doblez. Y entonces cada maestro le va dando un matiz. Dependiendo de nuestras palabras,* [de] *nuestra forma de ser es que se comporta el grupo* [de alumnos] *de forma distinta*

[…]

Investigador: […] *Un concepto que puede venir a cuento de lo que pasó es el de contrato didáctico, un concepto también de la teoría de situaciones didácticas que tiene que ver con lo que los alumnos creen, y se imaginan que su profesor espera de ellos; siempre cuando se meten a una actividad, si están en la escuela y están en clase de matemáticas con cierto profesor, ellos consciente o inconscientemente saben que se espera de ellos cierto tipo de respuesta. Por eso, cuando queremos que sean muy libres y muy espontáneos tenemos que lograr debilitar esas expectativas para que se metan por su cuenta en el juego*

Para el maestro Ignacio, la explicación que había dado Lili le hacía mucho sentido, pues reconocía esta característica del doblez en su práctica de la enseñanza de la geometría[4] y, además, para ese momento, contaba con un referente más amplio: las experiencias de lo que había sucedido en su propia clase y en la de sus otros colegas al implementar la misma situación. En efecto, como señaló Ignacio, ninguna de las producciones que surgieron en su clase y en las clases de los demás maestros presentaba esta característica[5]. Los maestros, en sus reflexiones iniciales, atribuyeron las deficiencias principalmente a los alumnos, olvidaban los temas que ya vieron antes o desatienden la clase. Luego, con ayuda de los comentarios de los investigadores, como observadores de las clases, se fueron evidenciando características de las producciones tales como la falta de medidas en los mensajes u otra información faltante y un recurso persistente a la posición de las figuras. Para los maestros resultaba difícil ver, en los procedimientos y los errores de los alumnos, los conocimientos que ellos ponían en juego, así como los que demostraban no tener; pero más difícil les resultaba relacionarlos con su propia gestión (Block et al., 2013). De ahí que la reflexión de Lili construyera un avance en esa dirección.

Desde la perspectiva de los investigadores, no se conocía con antelación a la sesión lo que había sucedido en la clase de Lili; nuestra comprensión sobre las producciones de sus alumnos, su gestión y la relación entre estos, se fue construyendo en el marco de la interacción que se desarrollaba.

---

[4] Los maestros Lili e Ignacio trabajaban en la misma escuela y eran compañeros desde hacía más de 10 años en esta institución.

[5] De manera generalizada, las producciones de los alumnos se habían caracterizado por la tendencia a considerar la posición de la figura en la hoja como una característica geométrica de la figura. En las descripciones, identificamos un recurso persistente a la posición de las figuras —línea, horizontal, vertical, inclinada, línea a la derecha o a la izquierda de otra—, uso de términos no matemáticos y ambiguos. Incluso, en algunos casos, hubo omisión de medidas.

La discusión, nos permitió entender no solo la experiencia con el doblado, sino aportar a esta desde nuestros propios marcos de referencia: desde nuestra perspectiva, se estaba gestando una reflexión en torno a la noción de *contrato didáctico* (Brousseau, 1998) en términos de la relación didáctica que se da entre un profesor y las producciones de sus alumnos. Con ello se buscó otorgar legitimidad a las reflexiones que venían construyendo los maestros, al explicar que el conocimiento didáctico busca mostrar que las acciones de los alumnos no sólo responden a las intenciones expresadas en la consigna, sino que las prácticas cotidianas del aula los llevan a hacerse una idea de lo que está permitido y lo que no, con relación a cierta cuestión matemática (Castaño, 2021). Vemos cómo en el marco de un trabajo colaborativo, la experiencia en aula de los maestros se cruzó con las interpretaciones de los investigadores y de los otros maestros (Bednarz et al., 2001), constituyéndose en experiencias formativas para estos últimos (Castaño & Block, 2021); y más precisamente, en un conocimiento que se genera en torno a la situación didáctica, de los aspectos que funcionaron y los que no, por ejemplo, la necesidad de precisar con claridad el objetivo de la igualdad entre las figuras original y reproducida al instaurar la consigna, y la pertinencia de entregar papel blanco para las construcciones de la figura.

Comentario final. Con este episodio se buscó mostrar cómo se genera la reflexión sobre la práctica docente, a propósito de la experiencia propia en el aula y la de otros colegas que comparten el mismo proyecto de enseñanza, y de las reflexiones que se gestan en torno a esta por un colectivo de investigadores y maestros. La posibilidad de narrar la experiencia individual al implementar las situaciones, compartiendo los aspectos que resultaron sorprendentes en relación con las producciones de los alumnos e intentando formular explicaciones sobre estas; la posibilidad de conocer la mirada que un colega externo tuvo sobre la propia clase al observarla; de conocer aspectos de la experiencia de otros colegas con la misma situación —qué hicieron diferente, qué dificultades fueron compartidas, qué lograron con los alumnos, etc.— y; finalmente, la posibilidad de recibir las aportaciones de otros —colegas e investigadores— en un intento por profundizar y desentrañar los hechos de la práctica, constituyen formas de retroalimentación para todos los involucrados. Para los maestros en particular, esta retroalimentación representa la posibilidad de transformar la comprensión personal sobre su práctica y, a partir de ello, fortalecerla.

La multiplicación de números racionales en secundaria

Este estudio tuvo dos propósitos principales: 1) Explorar un dispositivo para la formación en didáctica de las matemáticas de docentes de secundaria, a través de una experiencia de adaptación, implementación y análisis grupal de una secuencia de situaciones didácticas sobre la multiplicación de números

racionales y 2) Contribuir al desarrollo de una secuencia didáctica sobre dicho tema que incorpore aportes tanto de la investigación didáctica, como de la experiencia de los docentes. En este texto se abordan algunos aspectos de los procesos de apropiación por los que pasaron los docentes a lo largo de la experiencia.

Las situaciones. Una de las principales dificultades para el aprendizaje de la multiplicación de números racionales es que esta operación asume significados distintos de los que tiene en los números naturales: deja de ser una operación que "agranda" todas las veces, y ya no corresponde siempre a una suma repetida, entre otras diferencias (Brousseau, 1981; Block, 2022). Estas dificultades se agravan porque en la escuela, la enseñanza tiende a privilegiar el algoritmo en detrimento del sentido. Las tres situaciones implementadas en este trabajo buscaron favorecer la comprensión de este nuevo sentido de la multiplicación.

En la situación 1A "Vueltas alrededor de un circuito I", se buscó establecer que tomar una *fracción de* una cantidad expresada por un número natural — $\frac{a}{b}$ de n unidades—, es uno de los significados de la multiplicación. El contexto era el de un tren que daba cierto número de vueltas, entero o fraccionario, alrededor de un circuito de 60 km. En la segunda situación, la 1B, "Vueltas alrededor de un circuito II", la medida del circuito era una fracción de hectómetro y conducía al cálculo de una fracción de fracción. Las dos situaciones anteriores se retomaron de un libro de texto (Block et al., 2018) y están basadas en la consideración, planteada por Freudenthal (1973), de usar contextos en los que las fracciones, alternadas con los naturales, indican números de veces, o de vueltas. Finalmente, en la tercera situación didáctica, "El rompecabezas", se trataba de ampliar las piezas de un rompecabezas a partir de saber que el lado que en el rompecabezas original medía 4 cm, en la ampliación debía medir 7 cm. La fracción jugaba el papel de un operador multiplicativo constante —factor de escala—. El diseño de la situación propiciaba una estrategia errónea muy común, la aditiva, pero a la vez permitía poner en evidencia el error, al constatarse que las piezas no embonaban. Esta situación se tomó de una secuencia diseñada por Brousseau (1981), para introducir a los racionales como aplicaciones lineales.

Procesos de apropiación. En este apartado se analizan los procesos de apropiación del enfoque didáctico que sustentaba a las situaciones vividas por los participantes. Primero se presenta el caso de una docente cuya práctica mostró transformaciones bastante visibles; después, se examina una característica del enfoque didáctico promovido, la institucionalización, la cual resultó difícil de implementar, incluso para los docentes con mayor experiencia.

Cambios importantes a lo largo de la experiencia. Se puso de manifiesto una diversidad de formas de implementar las situaciones didácticas por parte

de los docentes. Se expone aquí el caso de la maestra Tere. En la sesión grupal en la que se analizó la primera clase impartida por los docentes, la situación 1A, la maestra describió su experiencia como sigue:

> Tere: […] *Son niños muy disciplinados, trabajan muy bien en equipo* […] *Considero que fue un trabajo muy bonito,* […] *porque mis alumnos desde que les di las instrucciones,* […] *se integraron, porque sí les puse condiciones* […] [Les dije] *que les iba a contar el tiempo y la actividad* […] *El equipo que me entregaba más rápido, pues consideraría qué premio le vamos a dar*

Además, la profesora agregó que sus alumnos terminaron la actividad en 50 minutos. De acuerdo con este relato, todo funcionó bien, lo cual contrastaba con los relatos de los otros maestros acerca de las dificultades de sus alumnos, así como con el hecho de que ellos no pudieron ir más que la mitad de la lección en una sesión de 90 minutos. Durante la sesión se solicitaron a la maestra Tere ejemplos de producciones de sus alumnos, pero ella se limitó a decir que resolvieron "sin ningún problema". Añadió "los niños hacen todo mecánico, se van a obtener resultados, pero no [explican] cómo los obtuvieron". Se observa que la maestra tiene dificultad para identificar los procedimientos y errores de sus alumnos. Aprender a identificarlos implica un proceso de aprendizaje (Block et al., 2013).

En la segunda clase, donde se aplicó la situación 1B, la maestra Tere prestó mayor atención a los procedimientos de los alumnos, pero por la forma en que organizó la resolución, con un alumno al frente y los demás observando, sólo se registró un procedimiento, el convencional.

En la tercera aplicación se evidenció un cambio en la forma de llevar la clase por parte de la profesora: procuró dar más espacio al trabajo autónomo de los alumnos. Al respecto comentó: "yo sinceramente los dejé, los dejé, [y] dije: a ver hasta dónde llega alguno de ellos y [ver] algún comentario [procedimiento] diferente". Este hecho permitió que se manifestara el error aditivo esperado, como se puede ver en el siguiente fragmento del registro de la clase:

> Tere: *¿Alguno de los equipos que haya armado su rompecabezas nos podría decir qué observan?, ¿qué estrategia usaron?*
> Alumno 1: *Sumarle 3 a todas las medidas*
> Tere: *¿De qué se dieron cuenta?*
> Alumna 2: *De que no cuadra*
> Alumno 3: *No queda como el chiquito* [como la figura original]
> Alumna 1: *Que sobran espacios*
> Alumna 2: *Que está mal la pieza y no encajaba*
> Alumna 3: *Lo medimos mal y no quedaba*

De acuerdo con lo observado, más allá de "copiar" o "pasarse" un resultado, los alumnos dialogaban entre sí, para explicarse qué podían hacer para resolver la tarea. La discusión y el cuestionamiento propiciaron la construcción de procedimientos por algunos alumnos, obtener el valor unitario, la medida

que corresponde a 1 cm, $1\frac{3}{4}$ de cm o 1.75 cm, dividiendo una medida entre la otra, o "sacando mitades": si a 4 corresponde 7, a 2 corresponde 3.5…; obtener el incremento proporcional a las medidas: se suma a cada medida 75% de ella misma, o de ella; utilizar la regla de tres.

Es posible que este cambio en la forma de gestionar la clase, y en la participación de los alumnos, haya estado relacionado con características de la situación misma: el producto final no era un resultado numérico, sino un rompecabezas ampliado en el que las piezas deben embonar. Además, la profesora pudo constatar que casi todos los alumnos de la *clase anticipada* incurrieron en la estrategia aditiva. Pero es probable también que el cambio haya sido consecuencia de una reconsideración de su manera de conducir la clase. Su comentario, al final de la experiencia, acerca de lo que consideró haber aprendido, lo sugiere:

> Tere: *Muchas veces enseñamos para nosotros mismos, enseñamos algoritmos, pero no su significado. Esto a veces sucede por los tiempos, después de esta experiencia, me he puesto a reflexionar sobre eso, sobre cómo es que los alumnos aprenden eso que se les enseña. Ahora pongo atención en cómo es que el alumno aprende ciertos temas y cómo llegan a las respuestas que dan* […] *El proyecto fue una propuesta diferente que me permitió ver más allá de un simple algoritmo* [de la multiplicación de fracciones]. *Antes yo solo me iba directo a enseñar el algoritmo, como si estuviera encerrada en que solo hay esa forma de que los alumnos aprendan, pero con el proyecto me di cuenta de que va más allá, el alumno propone y construye su conocimiento*

Seguramente hacen falta más experiencias para que estas consideraciones se consoliden en su práctica. Este punto se retomará en las conclusiones.

Una fase compleja: la institucionalización. En un proceso de aprendizaje en el que una noción se construye como herramienta para resolver un problema, cuando los alumnos la han logrado poner en juego, con frecuencia no son conscientes de que están en posesión de un nuevo saber, y menos aún que se vincula con un saber cultural. En el proceso de aprender una noción de matemáticas, de acuerdo con la TSD, es necesario, en ciertos momentos, que el maestro ayude a dar un estatuto de saber cultural, universal al conocimiento que ha sido puesto en juego para resolver un problema determinado. Se trata de un proceso de descontextualización y de despersonalización del saber se denomina "institucionalización" (Brousseau, 1998).

En la experiencia analizada, las tres docentes que implementaron sus clases bajo un enfoque constructivista enfrentaron dificultades para llevar a cabo esta fase. Esto se ilustra con la primera situación, en la que la lección apelaba claramente a un momento de institucionalización, los alumnos habían logrado aplicar fracciones de vuelta a la medida del circuito que recorría un tren, 60 km, con un procedimiento ya conocido por ellos, para calcular $\frac{2}{5}$ de 60 km, dividir 60 km entre 5 y multiplicar el resultado por 2.

La institucionalización propuesta consistía en informar a los alumnos que, así como cuando el tren da 4 vueltas, el cálculo de los kilómetros recorridos consiste en multiplicar 4×60, también en el caso de un número de vueltas fraccionario, por ejemplo, $\frac{2}{5}$ de vuelta, la operación implicada es una multiplicación, por lo tanto, obtener de 60 km también es multiplicar.

La profesora Sara, quien impartió la clase anticipada y quien logró una conducción ejemplar en el proceso de propiciar que los alumnos resolvieran por sí mismos los problemas, no pudo cambiar su rol y asumir que ahora tenía que ser ella quien diera la información a los alumnos. Terminó desarrollando un episodio típico de preguntas/respuestas, con preguntas cada vez más inducidas.

La profesora Graciela optó por omitir esta parte y pasó directamente a la actividad siguiente en la que ya estaban planteadas multiplicaciones explícitas. La profesora Lola comentó que ella sí explicitó la información a sus alumnos, pero señaló que, a su parecer, los alumnos se mostraron sorprendidos y consideró que no aceptaron que se tratara de una multiplicación.

Si bien la dificultad tiene que ver con el hecho de que los alumnos de primer grado de secundaria ya tienen una idea muy arraigada de lo que es la multiplicación —idea que incluso, según Brousseau (1998), puede constituirse en un obstáculo para adquirir la noción de multiplicación por racionales—, también parece estar en juego una dificultad de los profesores que se comprometen con el acercamiento constructivista, para cambiar de rol, para pasar de la postura de "no informar", a la de sí hacerlo consciente y voluntariamente. Esta observación se puede relacionar con otras similares que se han hecho a lo largo de varios años, en estudios sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas que parten de la resolución de problemas (Bouazzaoui, 1982; Allard, 2015), lo que constituye evidencia adicional, de un fenómeno aún poco estudiado.

Comentario final. La experiencia de trabajo colaborativo brindó un escenario a los profesores para adquirir conocimientos sobre la noción de multiplicación de racionales, y sobre las situaciones problema que la implican. Asimismo, favoreció procesos de apropiación del enfoque didáctico subyacente, diferentes para cada participante. Se hicieron propuestas para mejorar las situaciones, y finalmente, se identificaron aspectos de las prácticas que resultaron problemáticos, en particular, el de la institucionalización.

Conclusiones

Las tres experiencias reportadas pusieron de manifiesto beneficios relevantes para los actores involucrados. Para los docentes, conocer las secuencias de situaciones, esto es, la manera en que los problemas involucran a las nociones matemáticas en juego y apelan a los conocimientos de los alumnos, imple-

mentarlas en el aula e identificar, a través de las respuestas de los alumnos, su potencial y sus dificultades, conocer la experiencia de otros maestros con las mismas situaciones; y recibir una retroalimentación del grupo de la forma en que se condujo la propia clase, son acciones que les permiten ampliar y profundizar su comprensión del contenido matemático implicado, al mismo tiempo que un conocimiento, no solamente teórico, sino también experiencial, de alternativas didácticas para abordar este contenido.

Para los investigadores, las experiencias hicieron posible conocer una diversidad de formas de implementar las secuencias por los docentes, debidas a características particulares de sus maneras de enseñar matemáticas, así como los cambios que algunos de ellos fueron mostrando a lo largo de la experiencia. Asimismo, fue posible analizar y documentar el conocimiento que se generó sobre las secuencias didácticas mismas, sobre los aspectos que no funcionaron como se esperaba desde su diseño y sobre las modificaciones que permitirían mejorarlas; esto constituye un conocimiento de ingeniería didáctica sobre las situaciones que emerge de la experiencia (Castaño & Block, 2023) y que es producto de la co-construcción del colectivo. No obstante, en los tres proyectos quedó pendiente reelaborar las situaciones a raíz de dichos aportes.

Por otra parte, el análisis de las experiencias también permitió reconocer los tramos del camino que aún deben recorrerse, formas en que la colaboración puede ser más fructífera desde la perspectiva de los distintos propósitos que le atribuimos. Una primera variable por considerar es la del tiempo. La duración de las experiencias, cuatro a 15 semanas, permite obtener algunos resultados valiosos como se mostró, sobre todo, hacía viable llevar a cabo la experiencia en las condiciones institucionales usuales tiempos disponibles de los maestros; tiempos de trabajo de campo accesibles para los investigadores, máxime si el trabajo de campo corresponde a tesis de maestría de estudiantes. Sin duda, el hecho de que las situaciones que se implementan estuvieran prediseñadas supuso una economía significativa de tiempo. Sin embargo, el número de sesiones es limitado desde el punto de vista de los aspectos de una noción de matemática que se pueden abordar y de la necesidad de reiteración de las mismas situaciones. El tiempo es limitado también para permitir a los docentes apropiarse de nuevas modalidades de trabajo con sus alumnos.

Realizar experiencias de largo plazo seis meses a un año, por ejemplo, permitiría incrementar de manera importante los beneficios. Sin embargo, para realizarse, estas acciones requerirían de acuerdos institucionales, así como de medidas administrativas que permitan incluir entre sus funciones la participación de los docentes en estas experiencias. Una mayor duración de los proyectos redundaría en la consolidación de los equipos de docentes e investigadores, la obtención de mayor confianza y mayor horizontalidad

(Sensevy et al., 2013) entre ellos. Si, además, las experiencias se repiten en años escolares sucesivos, como de hecho sucede en algunos proyectos —ver, por ejemplo, Sensevy et al., (2013)—, se gana la posibilidad de continuar perfeccionando las situaciones didácticas en un proceso cíclico, y la posibilidad de participación de un mayor número de maestros. Realizar un recuento y análisis de estas experiencias es otro pendiente.

Referencias

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire: le cas de l'enseignement des fractions* [Tesis doctoral], Université Paris Diderot.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, & F. Wozniak (Coords.), *Amont et en Aval des Ingénieries Didactiques. XV École d'Ètè de Didactique de Mathématiques* (Vol. 1, pp. 225–237). La Pensée Sauvage éditions.

Barbier, R. (1996). *La recherche-action.* Anthropos.

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S., & Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques: une nécessaire prise en compte des praticiens. En G. Lemoyne (Ed.), *Le génie didactique: usages et mésusages des théories de l'enseignement* (pp. 43–69). Presses de l'Université du Québec. https://shs.cairn.info/le-genie-didactique--9782804135409-page-43?lang=fr

Bednarz, N. (2004). Collaborative research and professional development of teachers in mathematics. En M. A. Niss (Ed.), *ICME-10 Proceedings: Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–15). Roskilde Universitet.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., & Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, XII*(33), 731–762. https://bit.ly/3Q6JMVm

Block, D., Martínez, P., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Educación Matemática, 25*(2), 31–59. https://doi.org/10.24844/EM

Block, D., García, S., & Corro, H. (2018). *Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más* (1.ª ed.). Ediciones SM.

Block, D. (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica* (1a ed.). Taverna librería editores.

Bouazzaoui, E. (1982). *Etudes de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération* [Tesis doctoral], IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37–127.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage.

Castaño, Y. (2021). *Trabajo colaborativo entre profesores de secundaria e investigadores. Una experiencia en torno a la caracterización y congruencia de figuras geométricas* [Tesis de maestría, Cinvestav]. Repositorio de tesis Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/2783

Castaño, Y., & Block, D. (2021). Interacciones entre maestros, y con investigadores, como recursos de formación. Algunos resultados de una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de la geometría. *Congreso Nacional de Investigación Educativa CNIE-2021*. https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v16/doc/1594.pdf

Castaño, Y., & Block, D. (2023). ¿Qué significa colaborar en el marco de un trabajo colectivo entre maestros e investigadores? En D. Solares Pineda & K. Hess Zimmermann (Eds.), *Aprendizajes y contexto La lengua y las matemáticas en la educación básica* (pp. 287–316). Comunicación Científica, 2023. https://doi.org/10.52501/cc.132

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

De Certeau, M. (1990). *The invention of the everyday 1. Artes de hacer.* (A. Pescador Trad.), Universidad iberoamericana-Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L., & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue Des Sciences de l'éducation, 27*(1), 33–64.

Espinosa, E., & Mercado, R. (2009). La mediación social en la apropiación de una nueva propuesta para la alfabetización inicial. *Educação e Pesquisa, 35*(2), 33–350.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. [Tesis doctoral], L'Universite Bordeaux I.

Laguna, M. (2016). *La enseñanza del Tratamiento de la información en preescolar. Un estudio sobre procesos de interpretación y reconstrucción de situaciones didácticas* [Tesis de maestría, Cinvestav]. Repositorio de tesis Cinvestav. https://bit.ly/3VC1ySx

Laguna, M., & Block, D. (2020a). Reconstrucción de situaciones didácticas de matemáticas en el aula. Un estudio en preescolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(3), 331–356. https://doi.org/10.12802/relime.20.2333

Laguna, M., & Block, D. (2020b). Haciendo gelatinas: dos situaciones didácticas sobre la creación y uso de registros con niños preescolares. *Educación Matemática, 32*(3), 8–38. https://doi.org/10.24844/em3203.01

Laguna, M., Castaño, Y., & Block, D. (2024). Cooperación de docentes e investigadores en la construcción de conocimiento en la enseñanza de las matemáticas: experiencias en preescolar y secundaria en México. Perspectiva Educacional, 63(3), 119–140. https://doi.org/p9pb

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños*. Fondo de Cultura Económica.

Morales, G., Sensevy, G., & Forest, D. (2017). About cooperative engineering: theory and emblematic examples. *Educational Action Research, 25*(1), 128–139. https://doi.org/10.1080/09650792.2016.1154885

Perrin Glorian, M. J. (2011). La ingeniería didáctica como interfaz de la investigación con la enseñanza. Desarrollo de recursos y formación de profesores. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds.), *Amont et en aval des ingénieries didactiques. XV École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Vol. 1, pp. 57–78). La Pensée Sauvage. https://bit.ly/368ePKg

Rockwell, E., & Mercado, R. (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Investigación en la escuela, 4*, 65–78.

Roditi, E., & Trgalova, J. (2016). Collectifs de professeurs et de chercheurs. En Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, C. Winsløw, & S. Besnier (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 183–202). La Pensée Sauvage. https://shs.hal.science/halshs-01403284

Rodríguez, R. (2024). *Una experiencia de trabajo colaborativo entre profesores de secundaria e investigadores sobre la enseñanza de los números racionales* [Tesis de maestría, Cinvestav]. Repositorio de tesis Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/5552

Sadovsky, P. (2024). ¿Para la enseñanza o para la investigación? Trabajo colaborativo entre maestros e investigadores en didáctica de la matemática. En A. Barreiro & M. Carretero (Eds.), *Construcción de conocimientos en el campo educativo: celebrando a Tono Castorina* (pp. 13–40). Tilde Editora.

Savoie-Zajc, L., & Descamps-Bednarz, N. (2007). Action research and collaborative research: Their specific contributions to professional development. *Educational Action Research, 15*(4), 577–596. https://doi.org/bw544c

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as specific design-based research. *ZDM Mathematics Education, 45*(7), 1031–1043. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4

Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Narcea.

Conexiones matemáticas establecidas por futuros profesores de matemáticas sobre el Teorema de Pitágoras

Alan Andres Cruz-Acevedo [1]
Gerardo Salgado-Beltrán [2]
Javier García-García [3]

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del teorema de Pitágoras. Se define una conexión matemática como una relación verdadera entre ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados, tanto entre sí como con otras disciplinas o situaciones de la vida cotidiana. Para la recolección de datos se utilizó una entrevista basada en tareas y el análisis temático para interpretarlos. Los resultados permitieron identificar seis tipos de conexiones matemáticas: procedimental, representaciones diferentes, significado, característica, implicación y parte-todo. Las dos últimas fueron las menos frecuentes, lo cual sugiere limitaciones de los futuros profesores en su futura práctica para enseñar el uso de estas conexiones a sus estudiantes lo que impactará en la comprensión del teorema de Pitágoras. Se recomienda que los programas de formación y actualización docente en México incluyan estrategias y actividades que permitan a los futuros profesores explorar de manera profunda las conexiones matemáticas relacionadas con el teorema de Pitágoras. Esto contribuirá a fortalecer tanto su comprensión conceptual como su capacidad para aplicarlo en su futura práctica docente.

Palabras clave

Conexiones matemáticas, teorema de Pitágoras, futuros profesores, entrevista basada en tareas

[1] 15285346@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[2] 14251@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

[3] jagarcia@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Cruz-Acevedo, A. A., Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2025). Conexiones matemáticas establecidas por futuros profesores de matemáticas sobre el Teorema de Pitágoras. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 203–225). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-09

Introducción

El análisis de las conexiones matemáticas es un tema clave en la investigación educativa, dado que forman parte del currículo de distintos países, en especial en México, donde resalta la importancia de crear un aprendizaje que vincule la matemática consigo misma y con otras ciencias (SEP, 2023). La habilidad de establecer conexiones matemáticas resulta relevante para promover un aprendizaje integral y la comprensión de distintos conceptos matemáticos (Calle et al., 2023; Campo-Meneses et al., 2023; Salgado-Beltrán & García-García, 2024). Sin embargo, establecer conexiones matemáticas requiere un profundo dominio matemático, pensamiento heurístico y creativo (Bingölbali & Coşkun, 2016).

En la última década, diversos estudios han analizado cómo las conexiones matemáticas contribuyen a la enseñanza y el aprendizaje (Businskas, 2008; Eli et al., 2011; García-García & Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Rodríguez-Nieto et al., 2022; García-García, 2024). También se han explorado conexiones con fenómenos del mundo real (Karakoç & Alacacı, 2015; Özgen, 2013), y con la comprensión a través de ellas (Mhlolo et al., 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021; Campo-Meneses & García-García, 2021). Estas investigaciones subrayan la importancia de continuar estudiando las conexiones matemáticas en estos ámbitos y con distintos conceptos matemáticos.

Existen evidencias de que los docentes tienen dificultades para promover en sus estudiantes la habilidad de establecer conexiones matemáticas (Moon et al., 2013), y en algunos casos, para establecerlas ellos mismos (De Gamboa & Figuerias, 2014; Dolores & García-García, 2017; García-García & Salgado-Beltrán, 2024). Esto repercute tanto en sus prácticas pedagógicas como en el aprendizaje de los estudiantes (Byerley & Thompson, 2017; Zuya & Kwalat, 2015), ya que el conocimiento del docente es determinante en estos procesos (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Byerley & Thompson, 2017; Salgado, 2020; Scheiner et al., 2019). Además, los profesores enfrentan dificultades para comprender los conceptos matemáticos de su nivel, lo que afecta su capacidad para enseñarlos (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Salgado-Beltrán & García-García, 2024; Zakaryan & Sosa, 2021).

Lo anterior sugiere que una parte significativa de la responsabilidad recae en la formación de futuros profesores de matemáticas (FPM), ya que es decisiva para el desarrollo de sus competencias docentes (Sherin et al., 2011). En particular, dicha formación influye en su habilidad para establecer y enseñar conexiones matemáticas de manera efectiva, lo cual es determinante para favorecer la comprensión en los estudiantes (NCTM, 2014; García-García & Salgado-Beltrán, 2024; García-García, 2019, 2024). Investigaciones previas enfocadas en futuros profesores reportan que estos enfrentan dificultades para establecer tales conexiones (Eli et al., 2011), encontrando

complicaciones, por ejemplo, al vincular diferentes representaciones (Moon et al., 2013) y al manejar los diversos significados asociados a los conceptos matemáticos (Rodríguez-Nieto et al., 2021). Estas complejidades dificultan la comprensión de diversos conceptos matemáticos, incluido el Teorema de Pitágoras (TP).

Aunado a lo anterior, el TP es un concepto central en el currículo de matemáticas tanto en México como en otros países (Font et al., 2007). Este teorema, que se aborda desde la Educación Secundaria Básica hasta el Nivel Superior, no solo favorece el aprendizaje de la geometría, sino que también actúa como un eje que permite conectar distintas ramas de la matemática con otras disciplinas científicas (Chaverri-Hernández et al., 2020; Strathern, 2014). Sin embargo, la formación que reciben los FPM sobre este concepto, se restringe al desarrollo de nociones procedimentales en detrimento del desarrollo conceptual, incluso se asume que con el simple hecho de conocer su demostración el FPM está capacitado para enseñarlo (Zazkis & Zazkis, 2016).

Como resultado de lo anterior, los logros en el aprendizaje del TP por parte de los estudiantes son poco alentadores. A este respecto, diversas investigaciones centradas en este concepto han documentado que los alumnos enfrentan dificultades persistentes (Mulyanti et al., 2018; Rothe, 2022; Khoerunnisa & Sari, 2021); entre las cuales, destacan errores algebraicos, como la incorrecta manipulación de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ (Sholeha et. al, 2021), así como errores numéricos, que incluyen la multiplicación inadecuada de la base por el exponente al elevar al cuadrado y, el redondeo erróneo de raíces cuadradas (Hutapea et al., 2015; Mulyanti et al., 2018). Adicionalmente, se ha observado que algunos estudiantes aplican el TP en triángulos que no son rectángulos, y que al abordar problemas de aplicación, con frecuencia se omite el contexto necesario para formular sus respuestas (Pambudi, 2020; Rohmah, 2020). Estos hallazgos revelan una comprensión limitada del concepto por parte de los estudiantes.

Lo anterior, ha motivado el desarrollo de propuestas didácticas destinadas a fortalecer la comprensión del TP, entre las cuales destacan aquellas que utilizan como recurso el planteamiento de materiales didácticos y/o softwares matemáticos como el GeoGebra (Barrantes et al., 2021; De Sousa et al., 2023; Escobar et al., 2020; Rosas & Amador, 2022; Vargas & Gamboa, 2013). Sin embargo, estas propuestas atienden parcialmente las necesidades identificadas en los estudiantes, ya que la mayoría se centra en ofrecer un tratamiento geométrico del teorema en busca de su validación; bajo la idea de que esto, proporciona una perspectiva diferente a las prácticas educativas predominantes, que a menudo se caracterizan por contextos poco favorables para la comprensión del TP (Chaverri-Hernández et al., 2020; Rosas & Amador, 2022).

En este estudio se asume que investigar las conexiones matemáticas que establecen los FPM sobre el TP es de gran relevancia, ya que la información obtenida permitirá inferir aspectos clave sobre la práctica docente de los FPM y la calidad de la enseñanza que impartirán a sus estudiantes en torno a este concepto importante (Avilés-Canché & Marbán, 2023; Zakaryan & Sosa, 2021). Además, dado que se encuentran en una etapa formativa, cualquier dificultad identificada en la comprensión de contenidos matemáticos podría ser abordada oportunamente desde la enseñanza, con el fin de asegurar que los FPM alcancen una comprensión de los conceptos que eventualmente impartirán. Por estas razones, este estudio tiene como objetivo *analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del teorema de Pitágoras. En particular, busca responder la pregunta: ¿Qué conexiones matemáticas evidencian los FPM al resolver tareas que involucran el TP?*

Marco conceptual

El fundamento de esta investigación se enmarca en enfoques teóricos sobre las conexiones matemáticas y sus tipologías.

Conexiones matemáticas

Los elementos teóricos que sustentan este trabajo son las conexiones matemáticas. Dicho constructo ha sido abordado desde diversas perspectivas en la literatura sobre educación matemática (Salgado-Beltrán & García-García, 2024); esto refleja la importancia de estas conexiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El primer acercamiento hacia una definición la proporcionó Brown (1993) describiéndolas como asociaciones causales o lógicas que se establecen entre conceptos matemáticos, destacando su papel en la construcción de conocimiento coherente. Con ello, Coxford (1995) amplió dicha definición, sugiriendo que las conexiones matemáticas son ideas o procesos amplios que permiten vincular conceptos, dotando así de una estructura que favorece la comprensión y resolución de problemas en la matemática.

Por otro lado, Garbín (2005) sostiene que las conexiones matemáticas son esenciales para identificar y establecer relaciones en problemas que requieren la transición entre el lenguaje matemático y diferentes registros de representación, lo que enriquece el proceso de aprendizaje y la capacidad de resolver problemas de forma precisa. Por su parte, Businskas (2008) asumió que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B. A partir de estas perspectivas, García-García y Dolores-Flores (2018) consideran a las conexiones matemáticas como una relación verdadera entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con los de otras

disciplinas o situaciones de la vida real, materializada a través del lenguaje (oral, escrito o icónico).En esta investigación, el concepto de conexión matemática se entiende en el mismo sentido que lo proponen García-García y Dolores-Flores (2018), dado que consideramos que esta postura plantea la esencia de las conexiones matemáticas y resulta pertinente para cuantificar las conexiones realizadas por los FPM.

Tipología de conexiones matemáticas

Con respecto a las conexiones matemáticas Businskas (2008) y García-García y Dolores-Flores (2021a), concuerdan que se generan cuando un individuo es capaz de relacionar o asociar conceptos matemáticos con otros o con otras áreas científicas para resolver algún problema. Por esta razón, el marco de referencia utilizado en esta investigación para estudiar las conexiones matemáticas se fundamenta principalmente en las contribuciones de Businskas (2008) y de García-García y Dolores-Flores (2018, 2021a, 2021b). Por ello, considerando el objetivo del estudio, este modelo de conexiones se compone de las siguientes tipologías:

- ***Procedimental***: se manifiesta cuando se utilizan reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática y proporcionan explicaciones que respaldan sus resultados. Por ejemplo, cuando señalan que *para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos y con hipotenusa se utiliza la igualdad* $a^2 + b^2 = c^2$.
- ***Representaciones diferentes***: se manifiesta de dos maneras: *a)* representaciones alternas, cuando se utilizan dos o más representaciones para interpretar el TP dentro de dos registros diferentes (algebraico-gráfico, verbal-algebraico, etc.); *b)* representaciones equivalentes, cuando los FPM expresan el TP de dos maneras diferentes dentro del mismo registro. Por ejemplo, cuando interpretan que *la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.*
- ***Característica***: esta se produce cuando los FPM identifican en el TP atributos o cualidades que lo diferencian o lo asemejan a otros conceptos. Permite discernir diversas simbologías matemáticas. Además, esta conexión se manifiesta cuando se describen las propiedades del TP. Por ejemplo, cuando establecen que el TP *se cumple solo en triángulos rectángulos.*
- ***Significado***: esta conexión ocurre cuando los FPM asignan un sentido personal al TP, es decir, lo que ese concepto significa para ellos. Puede incluir la definición que han construido para el concepto, y se diferencia de la conexión matemática característica en tanto que no describen propiedades ni cualidades. Por ejemplo, cuando definen el TP *como una fórmula para calcular magnitudes.*

- ***Parte-Todo***: se manifiesta cuando los FPM identifican relaciones lógicas entre el TP y otros conceptos matemáticos, ya sea a través de la generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (cuando un concepto está contenido dentro de otro). Por ejemplo, cuando identifican *el TP como un caso particular de la ley de cosenos.*
- ***Implicación***: esta conexión se produce cuando, a partir de una premisa A, se deriva lógicamente una premisa B. Se expresa en la forma "*si..., entonces...*". Por ejemplo, cuando los participantes infieren que *si en un triángulo se cumple el TP entonces el triángulo es rectángulo*.

Metodología

La investigación es de tipo cualitativa y corresponde a un estudio de caso. Este enfoque permite centrarse en la búsqueda de significados y la comprensión de conceptos matemáticos en el saber de los individuos, donde el resultado final es descriptivo (Merriam & Tisdell, 2016). Además, implica un proceso de búsqueda caracterizado por un análisis detallado, comprensivo y sistemático del fenómeno de estudio (Rodríguez et al., 1999).

Contexto de la investigación y selección de los casos de estudio

La investigación se llevó a cabo en una Facultad de Matemáticas de una universidad pública ubicada en el sur de México. Esta institución ofrece la Licenciatura en Matemáticas, con una duración de nueve semestres. El programa académico está estructurado en cuatro orientaciones o especialidades: Matemática Educativa, Matemáticas Básicas, Estadística y Computación. A partir del tercer semestre, los estudiantes eligen la orientación que desean seguir. Quienes optan por la especialidad en Matemática Educativa, en su mayoría, lo hacen con la intención de convertirse en docentes, proyectándose hacia un futuro profesional como profesores de matemáticas.

En este estudio participaron voluntariamente quince FPM, quienes estaban finalizando un curso correspondiente al séptimo semestre en el área de Matemática Educativa. Los casos de estudio se conformaron por diez hombres y cinco mujeres, con edades comprendidas entre los 21 y 24 años. Algunos de ellos habían tenido experiencias previas como docentes, aunque de manera breve, a través de actividades complementarias como el servicio social o la práctica docente. Por esta razón, se consideró que eran participantes idóneos debido a su formación académica y su proximidad a convertirse en profesores de matemáticas. A partir de este punto, se les identificará como FPM1, FPM2, FPM3, ..., FPM15.

Instrumento para la recolección de datos

Para lograr el objetivo planteado en esta investigación, se diseñó y aplicó una entrevista basada en tareas (EBT). Según Goldin (2000), la EBT

implica la interacción entre un entrevistador (quien plantea y realiza las preguntas) y un sujeto (quien resuelve), que discuten en torno a una o más tareas (preguntas, problemas o actividades). Durante este proceso, el sujeto expresa sus pensamientos mientras o inmediatamente después de resolver una tarea, lo que permite evidenciar su conocimiento y razonamiento. Este método se eligió porque permite centrar la atención en los procesos que siguen los FPM al resolver tareas matemáticas, en lugar de limitarse a considerar únicamente respuestas correctas o incorrectas. De esta manera, se profundiza en las producciones escritas y orales (argumentos) de los FPM, tanto en sus explicaciones como en los argumentos presentados durante la resolución de las tareas propuestas.

El protocolo para el entrevistador incluyó preguntas auxiliares básicas para todas las tareas, tales como: "¿Por qué lo hiciste así?", "¿Conoces otra vía de solución?", "¿A qué te refieres con este término?" y "¿Por qué utilizaste esa fórmula?". Además, se incorporaron preguntas específicas que facilitaron un conocimiento más profundo sobre el razonamiento y el entendimiento del TP. Estas preguntas se plantearon en momentos en que el participante expresaba ideas confusas, carecía de argumentos en su forma de proceder o se pretendía activar diferentes vías de solución que pudiera conocer.

Las tareas fueron diseñadas de acuerdo con el plan de estudios de Geometría Plana y Geometría Analítica de nivel superior, adaptándose a los casos de estudio y al objetivo de la investigación. Algunas tareas fueron creadas durante las sesiones de trabajo. El instrumento inicial se aplicó a dos FPM con el fin de validar su eficacia. Se verificó que las instrucciones del cuestionario fueran claras y comprensibles para los FPM, y que las tareas fueran adecuadas para su nivel. La validación tuvo una duración de entre 80 y 90 minutos, fue videograbada para su posterior análisis y permitió corregir imprecisiones en el instrumento. Tras analizar los resultados de la prueba piloto, se reestructuraron las tareas que presentaron dificultades de comprensión. Después de las modificaciones necesarias, se garantizó que las tareas permitieran identificar diversas conexiones matemáticas relacionadas con el TP. Tras la validación, el instrumento final quedó compuesto por seis tareas (Tabla 1).

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se utilizó el análisis temático (Braun & Clarke, 2012), un enfoque que facilita la identificación de patrones de significado (temas) en los datos a partir de las respuestas de los FPM a las tareas propuestas. Este método fue elegido por su utilidad para realizar un análisis fundamentado en teoría, como en este estudio, y por ser adecuado para trabajar con un conjunto de datos reducido. El análisis temático se estructura en las siguientes fases.

Tabla 1

Tareas planteadas a los FPM

T1. Explica, ¿qué significa el Teorema de Pitágoras para ti?
T2. Explica, ¿cómo se representa el Teorema de Pitágoras?
T3. Propón ejemplos de la vida real donde consideres que se aplique el teorema de Pitágoras
T4. Encuentra la distancia entre los puntos $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$. Argumenta tu respuesta.
T5. Si tienes una escalera de 20 metros y necesitas subirte al techo de tu casa que está a 10 metros del suelo ¿A cuántos metros se debe colocar el pie de la escalera sobre la superficie terrestre para que el extremo superior de está quede exactamente en el borde del techo?
T6. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: 1) $\overline{AC} = \overline{BC}$, 2) $\overline{AC} = l$ y 3) $2l^2 = g^2$. Argumentar que tipo de triángulo es ABC ▪ Calcular el valor de α ▪ Suponiendo que $g = \sqrt{2}$, hallar el valor de l y $sen\ \alpha$

Nota. Fuente: Elaboración propia

Fase 1. Familiarización con los datos. En esta fase, cada entrevista fue transcrita y las producciones escritas se digitalizaron. Posteriormente, se realizó una lectura global de las respuestas para obtener una visión inicial de las conexiones matemáticas establecidas por los profesores y familiarizarse con el lenguaje empleado por los participantes.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. Se identificaron en las respuestas de los casos de estudio, relaciones verdaderas entre conceptos, definiciones, teoremas y sus significados, lo que permitió generar códigos iniciales vinculados a las conexiones matemáticas relacionadas con el TP. Estos códigos son la primera evidencia para la generación de temas y subtemas, pues sirven para interpretar sus respuestas con respecto al marco de conexiones matemáticas (véase el proceso de codificación para la producción del FPM14 en la T2 del instrumento en Tabla 2).

Tabla 2

Tareas planteadas a los FPM

Extracto de entrevista	Códigos generados
FPM14: *Bueno, se ocupa un triángulo rectángulo, es una igualdad que involucra a sus lados profesor* Investigador: *¿A qué te refieres con es igualdad?* FPM14: *Bueno, si y son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa es , el TP se representa como* $a^2 + b^2 = c^2$. *. Aunque las letras que involucremos para llamar los lados pueden ser otras* Investigador: *¿Conoces otra forma de representarlo?* FPM14: *Sí, la suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa*	C1: *Si y son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa es , el TP se representa como* $a^2 + b^2 = c^2$. C2: *La suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa*

Nota. Fuente: Elaboración propia

Fase 3. Búsqueda de temas y subtemas. Los códigos relacionados fueron agrupados y organizados en familias (subtemas), lo que facilitó la agrupación

de patrones de respuesta similares. Cada subtema representa un tipo particular de conexión matemática sobre el TP, generado a partir de los datos, mientras que cada tema corresponde a una tipología de conexión matemática.

Fase 4. Revisión de los temas. Se llevó a cabo una revisión en dos niveles (Braun & Clarke, 2012). En el primero, se revisaron los datos codificados para cada tema, asegurando que los códigos generados formaran un patrón coherente. En el segundo, se realizó un análisis similar, pero abarcando todos los datos en su conjunto. En ambos niveles, se efectuó una revisión entre pares (investigadores del estudio) para mejorar la calidad y validez del análisis de datos. Este proceso permitió refinar la identificación de las conexiones matemáticas.

Fase 5. Definición y nombramiento de los temas. En esta etapa, se definió y nombró cada tipo de conexión matemática identificada en los datos durante las sesiones de análisis.

Fase 6. Elaboración del informe. Se preparó el informe final, incluyendo los subtemas definidos y organizados en temas que contienen las conexiones matemáticas identificadas sobre el TP. Para cumplir con los propósitos de la investigación, los resultados se presentan de acuerdo con la tipología de conexiones matemáticas detectadas.

Resultados

El análisis de las producciones escritas y verbales de los quince casos de estudio, permitieron construir trece subtemas asociados al concepto del TP, los cuales corresponden a las conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual. En cada una de las tareas emergieron más de una tipología de conexiones matemáticas (Tabla 3).

Conexión matemática de tipo procedimental

Esta conexión matemática se identificó en las respuestas de todos los casos de estudio, aunque su frecuencia varió según las tareas planteadas. Al abordar inicialmente el TP, los FPM orientaron su razonamiento hacia la expresión algebraica $c^2 = a^2 + b^2$, donde a y b representan los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (TR). Posteriormente, extendieron este razonamiento a otros contextos de uso. En este sentido, se identificó la conexión procedimental cuando los FPM, guiados por su noción del procedimiento vinculado al TP, lograron: determinar la magnitud de un lado faltante en un TR, calcular la distancia entre dos puntos en el plano y resolver problemas relacionados con una escalera apoyada en una superficie vertical, entre otros. Incluso, al definir el TP, la idea principal planteada por los casos de estudio fue la formulación de la igualdad algebraica; dichos razonamientos permitieron construir el subtema: *Para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos y con hi-*

potenusa se utiliza la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ (véase extracto de diálogo con FPM15 para la T1).

Investigador: *Explica, ¿qué significa el Teorema de Pitágoras para ti?*

FPM15: *Bien, es una igualdad que relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, si los catetos del triángulo son y , y la hipotenusa es , entonces se cumple que* $c^2 = a^2 + b^2$

Investigador: *Entonces ¿tu primera idea es la igualdad algebraica?*

FPM15: *Es que, en esencia, el teorema se define como la igualdad algebraica, ya que es la forma de hacerlo operativo y aplicable*

Investigador: ¿A qué te refieres?

FPM15: *Al final, lo importante es saber cómo hacerlo operativo para resolver ejercicios o problemas donde debamos calcular el lado faltante de un triángulo rectángulo. Por eso, considero que la igualdad algebraica es el medio principal, y, en mi opinión, es lo que realmente importa*

Tabla 3

Conexiones matemáticas sobre el TP en las respuestas de los FPM

Conexión	Subtema	Frecuencia
Procedimental	Para calcular los lados de un triángulo rectángulo de catetos y con hipotenusa se utiliza la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$	25
Representaciones diferentes	El TP se representa con la expresión algebraica $c^2 = a^2 + b^2$, donde , a, b y c son los lados del triángulo rectángulo	20
	La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa	18
	Una representación alternativa del TP en el plano cartesiano es la que involucra la distancia entre dos puntos $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$ con la expresión $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	12
	El TP se conecta con las ecuaciones de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	9
	En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, el TP se expresa como $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$	7
Característica	El TP se cumple solo en triángulos rectángulos	15
	Las ternas pitagóricas son números enteros que satisfacen el TP	10
	El TP es una proposición que requiere de demostración	12
Significado	El TP es una fórmula para calcular magnitudes	20
Implicación	Si en un triángulo se cumple el TP, entonces el triángulo es rectángulo	8
	Si un triángulo es rectángulo e isósceles, con catetos de longitud e hipotenusa , entonces el TP se expresa como $2l^2 = c^2$	5
Parte-Todo	El TP es un caso particular de la ley de cosenos	6

Conexión matemática de tipo representaciones diferentes

Esta conexión matemática se identificó en diversos momentos cuando la totalidad de los casos de estudio respondieron a las tareas 2 y 4. En este sentido, al explicar las múltiples representaciones aceptadas por el TP y al calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano, emplearon distintas formas de representación en sus respuestas. Indicaron que el TP se puede expresar como una igualdad algebraica en la cual se involucran las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, dicha idea fue evidenciada a través de expresiones como: *Es una igualdad que involucra los lados de un triángulo rectángulo cualquiera; es Si* $a^2 + b^2 = c^2$*; Si a y b son la medida de los catetos y la hipotenusa se cumple que* $a^2 + b^2 = c^2$. Lo anterior permitió construir el subtema *El TP se representa con la expresión algebraica* $a^2 + b^2 = c^2$*, donde a, b y c son los lados del triángulo rectángulo* (véase extracto de diálogo con FPM14 para la T2).

Investigador: *¿Cómo se representa el Teorema de Pitágoras?*

FPM14: *Bueno, se ocupa un triángulo rectángulo, es una igualdad que involucra a sus lados*

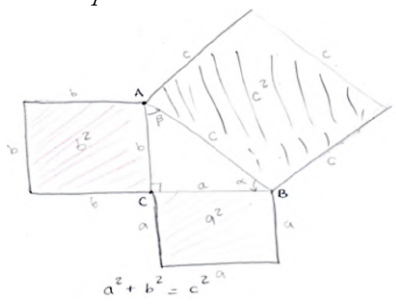
Investigador: *¿A qué te refieres con es igualdad?*

FPM14: *Bueno, si y son los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa en , el TP se representa como* $a^2 + b^2 = c^2$*. Aunque las letras que involucremos para llamar los lados pueden ser otras*

Otro grupo de FPM utilizó un enfoque diferente para representar el TP. En este sentido, los casos FPM1, FPM2, FPM3, FPM15 y FPM14 destacaron la posibilidad de emplear la noción de área como una herramienta para representar la proposición. Esto quedó reflejado en expresiones tales como: *Construyo cuadrados en los lados del triángulo rectángulo, luego las áreas cumplen la igualdad; Es una igualdad entre suma de áreas de cuadrados y otro más grande; La suma de las áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos equivale al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa. Lo anterior dio la pauta para desarrollar el subtema: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa* (ver Figura 1).

Figura 1

Representación geométrica del TP por el FPM1



Por otro lado, el subtema: *Una representación alternativa del TP en el plano cartesiano es la que involucra la distancia entre dos puntos A* (x_1, y_1) y *B* (x_2, y_2) *y con la expresión* $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$; se construyó a partir de las producciones de todos los casos de estudio, excepto FPM2, FPM6, FPM7 y FPM12 en la tarea 4. Durante el proceso de resolución, los casos de estudio indicaron que el TP admite otra representación que utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera en el plano, permitiendo determinar la distancia entre ellos. Esta idea se manifestó a través de expresiones como: *La medida de los catetos se expresa mediante diferencias y la medida de la hipotenusa en la distancia entre los puntos; La fórmula de la distancia es la ecuación pitagórica expresada de otra manera; La ecuación pitagórica queda como* $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (véase extracto de diálogo con FPM1 para la T4).

Investigador: *¿Cómo determinas la distancia entre A y B?*

FPM1: *Con los puntos A y B puedo trazar el segmento que los une, luego si trazo un segmento paralelo al eje que pase por B y una paralela al eje que pase por A, se forma un triángulo rectángulo*

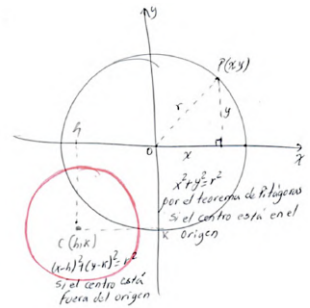
Investigador: *Entiendo ¿esa información cómo la utilizas?*

FPM1: *Si miramos bien, se forma un triángulo rectángulo, los catetos miden* $x_2 - x_1$ *y* $y_2 - y_1$*, mientras que la hipotenusa la denotamos como , pues bien, la ecuación pitagórica queda como* $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

En el mismo orden de ideas, la conexión de representaciones diferentes se hizo evidente desde otra perspectiva en los casos FPM13, FPM14 y FPM15 al resolver la tarea 4; en su razonamiento, conectaron el TP con las ecuaciones de la circunferencia en el plano cartesiano, interpretando el teorema en dos registros distintos. Esto se reflejó en expresiones como: *En el plano, el TP sirve para deducir las ecuaciones de la circunferencia; El TP se representa como* $x^2 + y^2 = r^2$ *en el contexto de la ecuación de la circunferencia; y Las ecuaciones* $x^2 + y^2 = r^2$ *y* $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ *son otra manera de ver el TP en Geometría Analítica. Estas ideas permitieron establecer el subtema: El TP se conecta con las ecuaciones de la circunferencia:* $x^2 + y^2 = r^2$ *y* $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (ver Figura 2).

Figura 2

Representación analítica del TP por el FPM15



Por otra parte, los casos FPM13 y FPM15 al responder la tarea 2 utilizaron otro tipo de representación para el TP, ellos establecieron que dicho teorema permite construir identidades pitagóricas en Trigonometría. En sus explicaciones incluyeron expresiones como: *El TP en Trigonometría se transforma como* $sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$ *en un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 1; y Otra forma de representar el TP es* $sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$ *siempre que la hipotenusa del triángulo mida 1. Lo anterior ayudó a construir el subtema: En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, el TP se expresa como:* $sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$. (véase extracto de diálogo con FPM13 para la T2).

Investigador: *¿Cómo se representa el TP? Explica a detalle las que conozcas*

FPM13: *Habitualmente, el TP se representa como una ecuación algebraica; sin embargo, existen otras. Por ejemplo, en Trigonometría si el triángulo rectángulo mide 1* [construye el triángulo y establece la unidad lineal para la hipotenusa] *y asumiendo que uno de los ángulos agudos interiores sea* α*, los catetos medirán* $sen\ \alpha$ *y* $cos\ \alpha$*. Luego otra forma de representar el TP es* $sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$.

Conexión matemática de tipo característica

Todos los casos de estudio emplearon esta conexión al identificar de manera sistemática cualidades y atributos del TP, características intrínsecas a su naturaleza. Esto permitió que dichas conexiones fueran aplicadas de forma consistente y coherente en el desarrollo y resolución de la totalidad de las tareas planteadas. Un ejemplo destacado entre las afirmaciones surgidas en los casos de estudio fue la determinación de que el TP es válido exclusivamente en triángulos rectángulos. Esta característica se evidenció de manera reiterada en diferentes momentos del proceso de resolución de las tareas, a través de expresiones como: *Si el triángulo no es rectángulo el TP no se cumple; El triángulo debe ser rectángulo para poder aplicar el TP; El TP es válido únicamente en triángulos rectángulos; El TP solo se aplica cuando el triángulo es rectángulo.* A raíz de lo anterior, se estableció el subtema: *El TP se cumple solo en triángulos rectángulos* (véase extracto de diálogo con FPM1 para la T6).

Investigador: *Observa el triángulo dado, en él se cumplen las tres condiciones descritas ¿Qué tipo de triángulo es?*

FPM1: *Bueno, por la condición 1 (*$\overline{AC} = \overline{BC} = l$*) es un triángulo isósceles dado que posee dos lados iguales*

Investigador: *Las otras condiciones ¿son relevantes en la determinación?*

FPM1: *A mi ver la 2 (*$\overline{AB} = g$*) no; pero la 3 (*$2l^2 = g^2$*) pienso que si*

Investigador: *¿Puedes compartir tu razonamiento?*

FPM1: *A ver, es que la igualdad* $l^2 + l^2 = g^2$ *me sitúa en el TP, el triángulo es isósceles pero también puede ser triángulo rectángulo (escribe, por ejemplo, el triángulo isósceles de lado igual a 1 con hipotenusa igual a* $\sqrt{2}$*), esto me hace pensar que es triángulo rectángulo*

Investigador: *¿Estás convencido?*

FPM1: *Sí, porque estoy convencido de que el TP es válido únicamente en triángulos rectángulos*

Aunado a lo anterior, otra característica del TP identificada en los argumentos presentados para la resolución de la tarea 3 de cinco casos de estudio, se refiere a las ternas pitagóricas. Estas fueron empleadas por los participantes para ilustrar ejemplos de la vida real donde el teorema es aplicable. En sus argumentos, identificaron a las ternas pitagóricas como un atributo central del teorema, ya que son concebidas como conjuntos de números enteros positivos(a, b, c), que representan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y es la hipotenusa. Esta cualidad, les permitió reconocer distintos contextos de aplicación del TP y, dio la pauta para construir el subtema: *Las ternas pitagóricas son números enteros positivos que satisfacen el TP* (véase extracto de diálogo con FPM4).

Investigador: *Podrías plantear ejemplos de la vida real donde se aplique el TP*

FPM4: *Sí. Habitualmente se utiliza para calcular distancias, pero las ternas pitagóricas son conjuntos de tres números enteros positivos que cumplen el TP y garantizan el trazado de triángulos rectángulos*

Investigador: *¿Cómo se usa en la vida real?*

FPM4: *De pronto, puede ser en la carpintería en la nivelación de ángulos rectos. Las ternas pitagóricas son útiles para garantizar que los ángulos en las esquinas de los muebles midan 90º; al instalar rampas, permiten calcular su longitud en relación con la altura y la base. De hecho, vinculo las ternas pitagóricas con el triángulo rectángulo y tiene una variedad de aplicaciones.*

Por otro lado, el subtema, El TP es una proposición que requiere demostración, se desarrolló a partir de las respuestas de los casos FPM1, FPM2, FPM9 y FPM15 en la tarea 1. Ellos al explicar el significado del TP, destacaron de que se trata de una proposición matemática cuyo cumplimiento no es evidente, a diferencia de un axioma, lo que justifica la necesidad de una demostración. Este hecho fue señalado como un atributo distintivo, ya que representa una característica central del TP. Tal idea quedó reflejada en expresiones como: *"El TP requiere demostración", "Es una proposición cuya verdad no es evidente", "El TP es un enunciado que debe demostrarse a diferencia de un axioma", y "Al demostrarlo, no habrá duda de que se cumple en cualquier triángulo rectángulo"*.

Conexión matemática de tipo significado

Esta conexión se evidenció en todos los casos de estudio, especialmente cuando se les preguntó: ¿Qué significa el TP para ti? En sus respuestas destacaron diversas interpretaciones del concepto, predominando *la idea de que el TP se concibe como una fórmula para calcular magnitudes*. Por ejemplo, el FPM7 comentó que desarrolló esta noción por primera vez al trabajar con el teorema en el bachillerato. Posteriormente, en el Nivel Superior, profundizó

su conocimiento sobre la proposición, aunque expresó que, desde su perspectiva, la esencia del TP radica en el cálculo de magnitudes asociadas a un triángulo rectángulo (véase el extracto de diálogo con FPM7 para la T1).

FPM7: *El TP, en esencia, proporciona un método para calcular distancias o magnitudes en un triángulo rectángulo*

Investigador: *¿Podrías explicar un poco más a qué te refieres?*

FPM7: *Para mí, el TP es como una fórmula que permite determinar magnitudes. Sé que este teorema tiene otros significados, pero considero que su esencia radica en eso*

Por otro lado, esta misma idea también emergió en diversas respuestas correspondientes a la tarea 5, en los casos FPM1, FPM7 y FPM10. Señalaron que, para resolver dicha tarea, *era necesario interpretar el TP como una fórmula para calcular la magnitud faltante en el triángulo rectángulo.* La tarea consistía en analizar un escenario donde una escalera de se apoyaba en el techo de una casa cuya altura era de . Coincidieron en que el uso del TP permitía determinar la distancia exacta entre el pie de la escalera y la base de la casa. Esto muestra cómo los FPM utilizan el teorema como una herramienta práctica para resolver problemas que involucran triángulos rectángulos. Además, las respuestas de estos casos destacan la tendencia de *interpretar el TP principalmente como una fórmula para el cálculo,* dejando en segundo plano otras posibles interpretaciones del teorema.

Conexión matemática de tipo implicación

Esta conexión se presentó con menor frecuencia en comparación con las anteriores. Se identificó en las respuestas de FPM1, FPM9, FPM13 y FPM15 al resolver las tareas 1, 5 y 6. En dichas respuestas, establecieron deducciones lógicas basadas en propiedades geométricas y relaciones matemáticas. Por ejemplo, reconocieron que, *si en un triángulo se cumple el TP, entonces necesariamente el triángulo es rectángulo*. Además, en la tarea 6, plantearon que, *si un triángulo es simultáneamente rectángulo e isósceles, con catetos de longitud y una hipotenusa de longitud , entonces el TP se expresa como:* $2l^2 = c^2$ (véase extracto de diálogo con FPM15 para la T6).

FPM15: *El triángulo dado es isósceles por la condición 1, ahora la condición 3 me dice que también es rectángulo* [escribe, $l^2 + l^2 = c^2$], *me recuerda el triángulo rectángulo isósceles de lados 1 e hipotenusa* $\sqrt{2}$. *Entonces el triángulo ABC es isósceles y rectángulo*

Investigador: *¿Me puedes dar una conclusión de las ideas que estableciste?*

FPM15: *Cuando un triángulo es a la vez rectángulo e isósceles, con catetos de longitud y una hipotenusa de longitud entonces el TP se representa como* $2l^2 = c^2$

Este tipo de conexión se destaca por requerir un razonamiento lógico más estructurado, ya que implica derivar conclusiones basadas en condiciones previas. Su menor frecuencia podría estar relacionada con el nivel de abstracción y análisis necesario para establecer estas deducciones.

Conexión matemática de tipo parte-todo

Las respuestas de FPM1, FPM5, FPM11 y FPM13 en la tarea 1 permitieron identificar esta conexión. Plantearon relaciones lógicas basadas en procesos de generalización o inclusión que involucraban tanto el TP como la ley de los cosenos. Por ejemplo, FPM1 al explicar qué es el TP, indicó que es un caso particular de la ley de los cosenos. Mientras que el FPM5 indicó que el TP está incluido en la ley de cosenos, ya que este último se cumple en cualquier triángulo y, cuando el ángulo opuesto al lado principal sobre el cual se plantea la ley de cosenos es de 90º, el triángulo se convierte en triángulo rectángulo y la relación deriva en la igualdad pitagórica. Por su parte, FPM11 señaló que el TP es parte de la ley de cosenos (ver Figura 3).

Figura 3

Conexión parte-todo evidenciada por FPM11 en la tarea 6



Las respuestas descritas por los casos permitieron construir el subtema: *El TP es un caso particular de la ley de cosenos*, donde la parte es el TP y la ley de los cosenos es el todo (concepto más general).

Discusión y conclusiones

El estudio se enfocó en analizar las conexiones matemáticas que un grupo de futuros profesores de matemáticas establece al resolver tareas que involucran el uso del TP. Estos resultados coinciden con aquellas investigaciones de conexiones matemáticas en estudiantes del nivel universitario, donde predominan aquellas conexiones del tipo procedimental, representaciones diferentes, característica y significado (Businskas, 2008; García-García & Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Mhlolo, 2012). Las conexiones identificadas en este estudio fueron clasificadas en las siguientes categorías: *procedimental, característica, representaciones diferentes, significado, implicación y parte-todo* (Tabla 4).

Tabla 4

Conexiones matemáticas establecidas por los casos de estudio

Tipo de conexión matemática	Casos de estudio (FPM)														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Procedimental	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Representaciones Diferentes	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Característica	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Significado	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Implicación	*								*				*		*
Parte-Todo	*				*						*		*		

Nota. * = Se utiliza la conexión matemática. Fuente: Elaboración propia basada en los datos

La conexión procedimental fue evidenciada en todos los casos de estudio, ya que los FPM emplearon razonamientos centrados en procedimientos asociados al TP para resolver las tareas propuestas. Esto puede explicarse por la familiaridad con los métodos adquiridos durante su formación preuniversitaria, la percepción de que son más fáciles de enseñar y la influencia de un sistema educativo que prioriza los algoritmos sobre las ideas conceptuales (Olfos et al., 2014; Reyes et al., 2017; Hutapea et al., 2015). Sin embargo, dado que estos FPM pronto asumirán la responsabilidad de enseñar matemáticas, este hallazgo pone de relieve la necesidad de fortalecer su formación. Es necesario que desarrollen no solo un dominio procedimental, sino también la comprensión del TP. Esto les permitirá integrar perspectivas más amplias y ayudar a sus futuros alumnos a construir un entendimiento sólido y conectado del TP. Esto es relevante porque, como indica la literatura, la capacidad de establecer conexiones matemáticas favorece la comprensión de los conceptos matemáticos (Tanişli & Kalkan, 2018; García-García & Dolores-Flores, 2021a; Campo-Meneses & García-García, 2021).

Por otro lado, *la conexión representaciones diferentes* se manifestó en las respuestas de todos los FPM, destacándose por la variedad de registros empleados para interpretar el TP. Sus respuestas y argumentos respaldaron esta conexión, que incluyó la igualdad algebraica, su equivalencia en términos de área, la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano, las ecuaciones de la circunferencia y una identidad pitagórica. Esto evidencia que los FPM en el nivel superior reciben una instrucción consistente sobre el TP, lo cual se contrapone a lo señalado por Zazkis y Zazkis (2016); y trasciende la simple definición y deducción (Cantoral et al., 2014). Sin embargo, una vez que algunos de los FPM se integran como profesores al sistema educativo,

sus prácticas didácticas en torno al teorema tienden a centrarse únicamente en el uso de la fórmula algebraica (Reyes et al., 2017). Este hecho invita a dar seguimiento a los FPM después de su transición a la docencia y reflexionar sobre los factores que influyen en su práctica educativa.

En adición a lo anterior, otra de las conexiones matemáticas evidenciadas por la totalidad de los casos de estudio fue la de *característica*, la cual se identificó cuando los FPM reconocieron atributos vinculados al TP. Por ejemplo, todos señalaron que el TP solo se cumple en triángulos rectángulos, lo cual contrasta con el razonamiento de estudiantes de grados inferiores, quienes aplican el TP incluso en triángulos que no son rectángulos (Pambudi, 2020; Rohmah, 2020). La asociación con ternas pitagóricas y el reconocimiento como una proposición o teorema que requiere demostración parecen ser el resultado del énfasis con el que la Geometría Euclidiana se trabaja en el nivel superior, donde la demostración constituye un eje central (Cantoral et al., 2014).

En relación con la *conexión matemática de significado*, los FPM atribuyeron un sentido propio al TP al explicarlo desde su perspectiva personal. A pesar del conocimiento demostrado, que permitió identificar conexiones previas, todos ofrecieron razonamientos a través de los cuales conceptualizaron el TP como una fórmula para resolver problemas o ejercicios matemáticos relacionados con el cálculo de magnitudes. Este hallazgo se alinea con lo observado en la práctica docente de profesores de bachillerato (Reyes et al., 2017) y, evidencia la resistencia al cambio en las concepciones formadas durante etapas tempranas de aprendizaje (Dolores & García-García, 2017).

Otra conexión utilizada con menor frecuencia que las anteriores es la de *implicación*, ya que solo cuatro casos de estudio establecieron proposiciones del tipo si $A \Rightarrow B$ vinculadas al TP. Un fenómeno similar ocurrió con la *conexión matemática parte-todo*: solo cuatro FPM señalaron que el TP es un caso particular de la ley de los cosenos. Esto podría explicarse por el hecho de que estas conexiones requieren una mayor demanda cognitiva, lo que sugiere que los FPM no siempre están preparados para establecerlas. Este hallazgo resalta la necesidad de que la formación de los FPM proporcione oportunidades para examinar el TP en lo que respecta a sus conexiones matemáticas, ya que ello favorece su comprensión (García-García, 2019, 2024). A su vez, esta comprensión más profunda incidirá de forma positiva en su futura práctica docente (Copur-Gençtürk, 2015).

Finalmente, es importante destacar que para futuras investigaciones sería relevante explorar las conexiones matemáticas que los docentes fomentan en el aula al abordar el TP, ya que esto podría proporcionar elementos valiosos para comprender las oportunidades que ofrecen a los estudiantes para alcanzar la comprensión. En este sentido, esta investigación aporta a la línea de investigación sobre las conexiones matemáticas y a su vez abre la posibi-

lidad a futuros trabajos en los que se diseñen actividades que permitan crear conexiones matemáticas más complejas como lo son las conexiones de *implicación o parte-todo*.

Referencias

Avilés-Canché, K., & Marbán, J. M. (2023). Perfiles de autoeficacia docente y conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 26*(2), 57–85. https://doi.org/10.6018/reifop.559321

Barrantes, M. C. M., Zamora, V. R., & Barrantes, M. M. (2021). Las demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras. *Revista de Educación Matemática, 36*(1), 27–42.

Bingölbali, E., & Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework For Enhancing The Use Of Making Connections Skill In Mathematics Teaching. *TED EĞİTİM VE BİLİM, 41(*183).

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher (Eds.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological* (pp. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620–004

Brown, L. (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles.* Clarendon Press.

Businskas, A. (2008). *Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral no publicada]. Faculty of Education-Simon Fraser University.

Byerley, C. & Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 168–193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia, 37*(1), 1–23. https://doi.org/p96d

Campo-Meneses, K. G. & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA, 16*(1), 25–56. https://doi.org/p96f

Campo-Meneses, K. G., García-García, J., & Font Moll, V. (2023). Mathematical connections associated with the exponential and logarithmic functions promoted in the mathematics curriculum. *International Journal of Instruction, 16*(4), 17–36. https://doi.org/10.29333/iji.2023.1642a

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91–116.

Copur-Gençtürk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(3), 280–330. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.3.0280

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House, & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3–12). National Council of Teachers of Mathematics.

Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J., Vallejos-Meléndez, D., & Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia, 34*(1), 88–110. https://doi.org/10.15359/ru.34–1.6

De Gamboa, G. & Figuerias, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M.T. González Astudillo, M. Codes Valcarce, D. Arnau Vera, & T. Ortega del Ricón (Coods.), *Investigación En Educación Matemática XVIII* (pp. 337–346). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

De Sousa, R. T., Dos Santos, M. G. M., & Alves, F. R. V. (2023). The Theory of Didactic Situations and the Generalization of Pythagoras' Theorem: An Experience Mediated by GeoGebra software. *Journal of Research in Science and Mathematics Education, 2*(3), 147–159. https://doi.org/p96h

Dolores, C. & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158–180. http://dx.doi.org/10.1590/1980–4415v31n57a08

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle–grades teachers through card–sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297–319. https://doi.org/10.1007/s13394–011–0017–0

Escobar, S. V., Tulcanaza, V. A., Mediavilla, L. J., Reyes, F. G., Castro, O. L., & Benavides, X. R. (2020). Gamification as a Didactic Tool in the Teaching of the Pythagorean Theorem. En A. Basantes-Andrade, M. Naranjo-Toro, M. Zambrano Vizuete, & M. Botto-Tobar (Eds.), *Technology, Sustainability and Educational Innovation (TSIE)* (pp. 171–182). Springer. https://doi.org/p96j

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto–semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2–14. https://doi.org/10.1007/s11858–006–0004–1

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169–193. https://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números, 100*, 129–133

García-García, J. (2024). Mathematical Understanding Based on the Mathematical Connections Made by Mexican High School Students Regarding Linear Equations and Functions. *The Mathematics Enthusiast, 21*(3), 673–718. https://doi.org/10.54870/1551–3440.1646

García-García, J. & Salgado-Beltrán, G. (2024). Creencias matemáticas y creencias sobre las conexiones matemáticas de futuros profesores mexicanos. *Bolema, 38*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230071

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227–252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Exploring pre–university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(6), 912–936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 1–22. https://doi.org/10.1007/s13394–019–00286–x

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task–based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum Associates.

Hutapea, M. L., Suryadi, D., & Nurlaelah, E. (2015). Analysis of students' epistemological obstacles on the subject of pythagorean theorem. *Jurnal Pengajaran MIPA, 20*(1).

Karakoç, G. & Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(1), 31–46.

Khoerunnisa, D. & Sari, I. P. (2021). Analisis kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal teorema phytagoras. *JPMI, 4*(6), 1731–1742. https://doi.org/10.22460

Merriam, S. B. & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4a ed.). Jossey-Bass.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16*(2), 176–191. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(3), 201–227. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794322

Mulyanti, N. R., Yani, N., & Amelia, R. (2018). Analisis kesulitan siswa dalam pemecahan masalah matematik siswa SMP pada materi teorema phytagoras. *PMI, 1*(3), 415–426. https://doi.org/10.22460/jpmi.v1i3.p415–426

NCTM (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics.

Olfos, R., Guzmán, I., & Estrella, S. (2014). Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. *Bolema, 28*(48), 341–359.

Özgen, K. (2013). Self-Efficacy Beliefs in Mathematical Literacy and Connections Between Mathematics and Real World: The Case of High School Students. *Journal of International Education Research, 9*(4), 305–316. https://doi.org/10.19030/jier.v9i4.8082

Pambudi, D. S. (2020). Exploration of students mathematical connections with negative attitudes in solving a contextual geometry problem. *Journal of Physics: Conference Series, 1663*(1), 1–8.

Reyes, R., Rondero, G., Acosta, H., Campos, N., & Torres, R. (2017). Reduccionismo Didáctico y Creencias de Profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 968–983

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Aljibe.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021). Exploring University Mexican Students Quality of Intra-Mathematical Connections When Solving Tasks About Derivate Concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(9). https://doi.org/10.29333/ejmste/11160

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Moll, V. F. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(6), 1231–1256. https://doi.org/p96k

Rohmah, A. S. (2020). Analisis kesalahan siswa MTs dalam menyelesaikan soal pada materi teorema pythagoras. *JPMI, 3*(5), 433–442.

Rosas, A. M., & Amador, L. K. T. (2022). Conocimientos antecedentes al Teorema de Pitágoras: ¿qué saben los alumnos? *Latin-American Journal of Physics Education, 16*(3), 1-6.

Rothe, J. (2022). Teaching and Learning Proofs of the Pythagorean Theorem during Distance Learning and in the Flipped Classroom. *Journal of Educational Research in Mathematics, 32*(4), 467–488. https://doi.org/p96m

Salgado, G. (2020). *Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Autónoma de Guerrero, México. https://bit.ly/47eSAR6

Salgado-Beltrán, G., & García-García, J. (2024). Conexiones Matemáticas utilizadas por profesores mexicanos de nivel medio superior al resolver tareas sobre la pendiente. PNA, 18(3), 255–283. https://doi.org/p96p

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino–Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17,* 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763–017–9859–6

SEP. (2023). *Recurso Sociocognitivo: Pensamiento matemático*. Secretaría de Educación Pública.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* Taylor & Francis.

Sholeha, V. A., Risnawati, R., & Habibullah, H. (2021). An Analysis of Student Difficulties in Mathematics Learning in terms of Student Mathematical Connection Ability on Pythagoras Theorem. *Prisma Sains: Jurnal Pengkajian Ilmu Dan Pembelajaran Matematika Dan IPA IKIP Mataram, 9*(1), 12–19. https://doi.org/10.33394/j-ps.v9i1.3510

Strathern, P. (2014). *Pitágoras y su teorema en 90 minutos.* Siglo XXI.

Tanişli, D., & Kalkan, D. (2018). Linear Functions and Slope: How Do Students Understand These Concepts and How Does Reasoning Support Their Understanding?. *Croatian Journal of Education: Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje, 20*(4), 1193–1260.

Vargas, G. V., & Gamboa, R. A. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. *Uniciencia, 27*(1), 95–118.

Zakaryan, D. & Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática, 33*(1), 71–97. https://doi.org/10.24844/em3301.03

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2016). Prospective Teachers' Conceptions of Proof Comprehension: Revisiting a Proof of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 777–803. https://doi.org/10.1007/s10763–014–9595–0

Zuya, H. E., & Kwalat, S. K. (2015). Teacher's knowledge of students about geometry. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 13*(3), 100–114.

El método de Pólya y el mapa conceptual híbrido como estrategias didácticas para la resolución de problemas geométricos durante la formación de futuras docentes de educación primaria

Alberto Santana Ortega [1]
Oscar Nelson Lopez Lopez [2]
Erwin Santana Ortega [3]

Resumen

Este estudio analiza el nivel de resolución de problemas geométricos en el curso "Geometría. Su aprendizaje y su enseñanza" de la Licenciatura en Educación Primaria, impartido en una escuela normal del estado de Puebla. Los resultados iniciales evidenciaron que la mayoría de las alumnas presentaban dificultades para comprender las consignas, mostraban un dominio limitado de los contenidos y, aunque en algunos casos lograban diseñar planes pertinentes, cometían errores durante la ejecución, lo que afectaba su desempeño. El objetivo de la investigación fue analizar estrategias didácticas orientadas a favorecer la resolución de problemas geométricos en estudiantes de tercer semestre. Para ello, se utilizó la metodología de investigación-acción, desarrollada en dos ciclos: en el primero, se propusieron situaciones didácticas fundamentadas en el método de resolución de problemas de Pólya, en el segundo, se incorporó el Mapa Conceptual Híbrido (MCH) desde el enfoque onto-semiótico. Como parte del análisis, se consideraron también resultados cuantitativos obtenidos en pruebas escritas aplicadas a las participantes. Los hallazgos reflejan una mejora significativa en los procesos de resolución: mayor comprensión de los problemas, elaboración de soluciones más estructuradas y aplicación más precisa de procedimientos. El uso del MCH, en particular, favoreció el desarrollo de la visión retrospectiva y fortaleció procesos de metacognición y reflexión, lo que permitió a las estudiantes ajustar sus estrategias y afianzar su aprendizaje. En conjunto, ambas estrategias demostraron ser efectivas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la formación de futuras docentes.

[1] jgsraso@gmail.com
Escuela Normal Rural "Carmen Serdán", Puebla, México

[2] oscarnelson2009@hotmail.com
Escuela Normal Rural "Carmen Serdán", Puebla, México

[3] chpoblano@hotmail.com
Escuela Normal Rural "Carmen Serdán", Puebla, México

Santana Ortega, A., Lopez Lopez, O. N., Santana Ortega, E. (2025). El método de Pólya y el mapa conceptual híbrido como estrategias didácticas para la resolución de problemas geométricos durante la formación de futuras docentes de educación primaria. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 227–249). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-10

Palabras clave
Enfoque onto-semiótico, formación de docentes de primaria, normalismo rural

Introducción

Desde sus orígenes, la geometría ha sido considerada una rama relevante de las matemáticas. García y López (2008) señalan que "[…]representó un cuerpo de conocimientos que eran verdaderos y que, además, podía demostrarse que lo eran[…]" (p. 29). En este sentido, el aprendizaje de la Geometría va más allá del cumplimiento de un programa educativo, pues implica reflexión, razonamiento y la búsqueda de la verdad a través de procesos lógicos y demostrables.

Para las estudiantes de la Licenciatura en Educación Primaria (LEPRI), la importancia de la geometría se potencia al reflexionar sobre la pregunta: ¿para qué enseñar Geometría? Ante este cuestionamiento, García y López (2008) destacan que enseñar esta disciplina contribuye a cultivar la inteligencia, desarrollar estrategias de pensamiento, explorar una materia tanto útil como formativa, estimular la sensibilidad estética, fomentar el trabajo experimental en Matemáticas y agudizar la percepción del mundo que nos rodea.

A partir de lo anterior, es importante aprender geometría además de comprender y dominar estrategias, métodos y enfoques adecuados para su enseñanza. Tradicionalmente, se ha cuestionado el enfoque ostensivo en la enseñanza de la geometría, donde el rol del docente se limita a transmitir información y el del estudiante a memorizar conceptos y propiedades (Serrato, 2018). En contraste, el enfoque basado en la resolución de problemas favorece la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades y prepara al alumno para enfrentar situaciones cotidianas y desafíos en su vida profesional (Guzmán & Moreira, 2014).

En la Licenciatura en Educación Primaria, Plan 2022, el programa del curso "Geometría, su aprendizaje y su enseñanza" del tercer semestre propone la resolución de problemas geométricos con un doble fin: primero, como medio para aprender matemáticas a través de la resolución de problemas; y segundo, como medio para enseñar matemáticas, con el fin de que las docentes en formación desarrollen competencias didácticas para enseñar contenidos matemáticos.

Con el propósito de conocer el nivel de comprensión y habilidades en la resolución de problemas geométricos de las futuras docentes, se realizó un diagnóstico a un grupo de alumnas de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEPRI) de la Escuela Normal Rural "Carmen Serdán" (ENRCS), durante el ciclo escolar 2023-2024. El instrumento consistió en un cuestionario compuesto por 10 problemas relacionados con temas de

geometría plana, tales como ángulos, simetría, áreas, perímetros, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, semejanza, teorema de Pitágoras, capacidad y volumen.

Dado que las participantes cursan estudios de nivel superior, se diseñaron problemas con un grado de dificultad correspondiente a los niveles de secundaria y bachillerato. Las preguntas eran abiertas y no se limitaban únicamente a la obtención del resultado; también se solicitaba a las alumnas que explicaran qué se les pedía, si contaban con un plan para resolver el problema, que describieran el procedimiento seguido y reflexionaran sobre las acciones para llegar a la solución.

Los resultados del diagnóstico revelaron un bajo desempeño general en la resolución de problemas geométricos, evidenciando dificultades tanto en la comprensión de las consignas como en la elaboración de estrategias pertinentes y en la ejecución de los procedimientos matemáticos.

Si bien los investigadores ya estaban familiarizados con los pasos propuestos por Pólya para la resolución de problemas, las alumnas en formación desconocían esta propuesta. Esta situación permitió reconocer una oportunidad para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en especial en lo que se refiere a la resolución de problemas.

Durante la revisión de la literatura, se identificó que, además del enfoque heurístico de Pólya, diversas investigaciones destacan el Mapa Conceptual Híbrido como una estrategia didáctica viable para favorecer la comprensión, estructuración y organización del pensamiento matemático. Con base en estos hallazgos, se decidió implementar ambas estrategias con el propósito de analizar sus efectos en el desarrollo de habilidades para resolver problemas geométricos en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria.

Así, el propósito de esta investigación fue analizar el aporte de dos estrategias didácticas al desarrollo de las habilidades para la resolución de problemas geométricos en futuras docentes de educación primaria. La primera estrategia fue el método de resolución de problemas propuesto por Pólya, y la segunda, el Mapa Conceptual Híbrido, fundamentado en el enfoque onto-semiótico.

Ambas buscan enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. A partir de ello, se articula una línea de investigación centrada en el estudio de metodologías basadas en la resolución de problemas como medio para fortalecer la formación inicial de futuras docentes de primaria.

A partir de este planteamiento, se formuló la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo incide la implementación de estrategias didácticas, como los pasos de Pólya y el uso del Mapa Conceptual Híbrido, en la mejora de los procesos de resolución de problemas geométricos en futuras docentes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria?*

Referentes teóricos y elementos conceptuales

Enseguida se describen algunos aspectos teóricos y conceptuales que permiten comprender el contexto y profundizar en las estrategias propuestas a las futuras docentes durante el trabajo con los problemas geométricos. Se describe brevemente el programa de estudios del curso, los rasgos del perfil de egreso de las alumnas, y las características generales del método de Pólya, del mapa conceptual híbrido y del enfoque onto-semiótico.

Programa de estudios para el curso Geometría. Su aprendizaje y su enseñanza

En el programa de estudio del tercer semestre de la LEPRI, Plan 2022, del curso "Geometría. Su aprendizaje y su enseñanza" (GAE) se establece como propósito general:

> Que las y los estudiantes normalistas consoliden saberes en torno a la geometría plana y espacial que les permitan implementar estrategias didácticas en educación primaria que fomenten el desarrollo de habilidades del pensamiento lógico, científico y crítico necesarias para realizar una intervención pedagógica y didáctica pertinente en diferentes contextos (SEP, 2022b, p. 5).

Para consolidar estos saberes en torno a la geometría es necesario que las docentes en formación sean capaces de resolver problemas matemáticos utilizando diversas estrategias de solución (Mancera & Basurto, 2016).

Además de esto es necesario que conozcan los rasgos del perfil de egreso de sus estudiantes con el propósito de reconocer cómo la resolución de problemas geométricos contribuye al logro de ese perfil y a la enseñanza de los contenidos en educación Primaria.

> *Perfil de egreso de las y los estudiantes de educación básica*
>
> Los rasgos globales del aprendizaje –perfil de egreso– ofrecen una visión integral de los aprendizajes que las y los estudiantes habrán de desarrollar a lo largo de la educación básica, en los que se articulan las capacidades y los valores expresados en los ejes articuladores con los conocimientos, actitudes, valores, habilidades y saberes aprendidos gradualmente en los campos formativos. En la reforma educativa de educación básica se plantean cuatro campos formativos: (1) Lenguajes, (2) Saberes y Pensamiento científico, (3) Ética, naturaleza y sociedades y (4) De lo humano y lo comunitario (SEP, 2022a).

Los contenidos matemáticos que se analizan en el curso GAE son abordados en situaciones problemáticas contenidas en proyectos del campo formativo Saberes y pensamiento científico,

> los cuales se establecen en los programas sintéticos de las fases 3, 4 y 5 –seis años de educación primaria– del sistema educativo mexicano y otros corresponden a contenidos básicos de geometría plana que las alumnas analizaron en sus cursos de matemáticas en nivel secundaria y nivel medio superior.

Las habilidades en la resolución de problemas no son simples o automáticas, Santos (1992) sostiene que "Aprender matemáticas es un proceso acti-

vo que requiere discusiones de conjeturas y pruebas" (p. 22), además menciona que uno aprende a resolver problemas con éxito en la medida en que se resuelve un gran número de problemas.

En el estudio de Mancera y Basurto (2016, p. 7) se indica que:

> La matemática no se aprende por repetición, si no por la realización de la actividad matemática, la cual se caracteriza por una indagación constante, el replanteamiento de lo elaborado, la búsqueda de una comprensión más profunda de los contenidos y la realización de esfuerzos para interactuar constantemente con los contenidos matemáticos.

Afirman además, que saber matemáticas implica saber resolver problemas, lo que evidencia la importancia de que las futuras docentes resuelvan problemas matemáticos para desarrollar sus competencias didácticas y cognitivas.

Para Mancera y Basurto, un problema es una situación cuya resolución no es inmediata, se está frente a un problema si no se sabe de manera inmediata la forma en la que se puede resolver y encontrar la solución exige tomar decisiones y poner en juego distintos saberes y recursos cognitivos.

Resulta muy útil entender que en el caso de estudiantes de LEPRI la resolución de problemas geométricos juega un papel muy importante pues deben consolidar sus saberes en torno a la Geometría, de acuerdo al Plan de estudios 2022 y fomentar a través de su enseñanza, formas de razonamiento en sus alumnos al resolver problemas. En el plan de estudios de educación básica (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2022a, p. 130) se establece que "[…]la enseñanza científica busca formar en las y los estudiantes la capacidad de analizar distintas concepciones del mundo con la finalidad de que tomen decisiones sobre la explicación más adecuada al momento de resolver cada problema concreto". Para la resolución de problemas matemáticos se proponen diferentes métodos, uno de ellos es el método de Pólya.

El método de Pólya

De acuerdo con Pólya (2004), el proceso de resolución de problemas matemáticos se puede desglosar en cuatro fases, cada una de las cuales desempeña un papel clave en el éxito del estudiante. Enseguida se describe cada una de las fases.

Fase 1: Comprensión del problema. Antes de intentar resolver un problema, es esencial que el estudiante comprenda plenamente su enunciado. Esto implica identificar los datos, lo desconocido y las condiciones que lo conforman. Además de la comprensión, se busca que el problema despierte interés y motivación en el estudiante, lo cual depende de selección y presentación pertinentes del problema. El docente debe facilitar este proceso mediante preguntas orientadoras y asegurarse de que el estudiante pueda reformular el problema con claridad.

Fase 2: Concebir un plan. Diseñar un plan consiste en determinar la estrategia o secuencia de pasos necesarios para alcanzar la solución. Esta etapa requiere reflexión, análisis de experiencias previas y conexiones con problemas similares. La aparición de una "gran idea" puede ser gradual o repentina, y el papel del docente es guiar discretamente al estudiante a través de interrogantes que estimulen el pensamiento crítico, la analogía, la generalización o la formulación de problemas auxiliares.

Fase 3: Ejecutar el plan. Una vez definido el plan, su ejecución exige perseverancia, precisión y verificación continua. El estudiante debe revisar minuciosamente cada paso, asegurando su validez tanto desde una perspectiva intuitiva como formal. La autonomía en la construcción del plan facilita su mantenimiento y comprensión, mientras que el docente debe insistir en la justificación rigurosa de cada argumento.

Fase 4: Visión retrospectiva. La última etapa consiste en revisar el procedimiento y el resultado obtenido. Esta retrospección fortalece el aprendizaje, propicia la transferencia de conocimientos a nuevos contextos y permite mejorar tanto la solución como su comprensión. El docente debe alentar a los estudiantes a identificar conexiones con otros problemas y a considerar la reutilización de métodos y resultados en situaciones distintas.

Este enfoque busca la resolución de problemas, además el desarrollo de habilidades cognitivas y analíticas indispensable para el aprendizaje matemático y la aplicación de los conceptos en diversas situaciones. Aunque el método de Pólya fue formulado hace más de ochenta años, sigue siendo un referente vigente en la investigación en matemática educativa. Estudios recientes confirman que su estructura metodológica conserva plena vigencia en contextos escolares y resulta aplicable a distintas áreas del conocimiento matemático.

En el ámbito de la educación básica, investigaciones como la de Barrón-Parado et al. (2021) y Sánchez-Cuastumal y Valverde-Riascos (2020) muestran cómo la implementación estructurada del método de Pólya favorece la comprensión y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de primaria y secundaria, destacando su valor para fomentar habilidades de pensamiento lógico y estrategias de resolución, especialmente cuando se combina con actividades guiadas y reflexión metacognitiva.

Desde una perspectiva más aplicada, Figueroa et al. (2023) analizan la utilidad del método en la resolución de problemas físicos, particularmente en el estudio del movimiento rectilíneo, lo cual evidencia su capacidad para trascender los límites de la matemática pura y servir como medio para la comprensión de fenómenos del mundo real. En una línea similar, Montoya (2024) reporta avances significativos en el fortalecimiento de competencias científicas mediante el uso del enfoque de Pólya en contextos de educación media.

Estudios como el de Gopinath y Lertlit (2017) revelan que el modelo sigue siendo vigente para fortalecer las habilidades de resolución de problemas en estudiantes de secundaria, siempre que se implementen estrategias didácticas activas y contextualizadas. Por otro lado, trabajos como el de Oliveros et al. (2021) reafirman el valor del método como técnica de resolución, pero además como una herramienta que favorece procesos de pensamiento matemático. Finalmente, en el contexto contemporáneo de la estadística y la ciencia de datos, de Carvalho (2024) retoma las enseñanzas de Pólya para proponer su adaptación a la modelación estadística, lo que demuestra la vigencia y versatilidad del enfoque incluso en áreas emergentes del conocimiento.

De esta forma la literatura reciente respalda la utilidad del método de Pólya como una estrategia didáctica flexible y eficaz. Su aplicación en distintos niveles educativos, contextos culturales y áreas disciplinares refleja no solo su solidez teórica, sino también su capacidad para adaptarse a las demandas actuales de la educación matemática.

El método de Pólya constituye una herramienta metodológica flexible y eficaz para abordar una amplia gama de problemas matemáticos; en este caso su aplicación se centró en la resolución de problemas geométricos. En este sentido, Mancera y Basurto (2016, p. 25) destacan una serie de elementos clave que deben considerarse al enfrentar este tipo de desafíos, aportando así una perspectiva complementaria que enriquece el enfoque propuesto por Pólya. Entre estos aspectos se incluyen, por ejemplo:

> […] los recursos (que se refiere a los contenidos matemáticos), la heurística (es decir, las estrategias que se poseen), el control (no basta poseer conocimientos y estrategias, es necesario saber cuándo y cómo utilizarlas), el sistema de creencias (las concepciones que se poseen sobre las matemáticas, sobre sí mismo, etc.).

Bajo esta consideración, en el curso GAE se buscó implementar una herramienta que favoreciera a las futuras docentes mejorar la comprensión de problemas, el dominio de contenidos, el uso de estrategias y el control a través del análisis y la reflexión. Al indagar sobre diferentes enfoques que permiten orientar el aprendizaje y enseñanza a través de la resolución de problemas se encontró el enfoque onto-semiótico, la elección de este enfoque se justifica porque ofrece un marco para reconocer los elementos implicados en la resolución de problemas y apoya a los estudiantes al tener un referente sobre los aspectos que deben considerarse, muchos de los cuales suelen pasar desapercibidos, pero que con su aplicación se hacen explícitos (Godino, 2022).

Enfoque onto-semiótico

El enfoque onto-semiótico propuesto por Godino et al. (2007) sostiene que en la resolución de problemas matemáticos están implícitos una serie de

objetos: conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos; en este modelo se propone que estos objetos pueden ser interpretados desde cinco perspectivas: (1) personal/institucional, (2) ostensivo/no-ostensivo, (3)expresión/contenido, (4) unitario/sistémico, e (5) intensivo/extensivo (Godino et al., 2007). Las dos perspectivas con mayor aporte a este trabajo son la personal-institucional y ostensivo-no ostensivo, ya que además presentaron menor aplicabilidad en el contexto del estudio.

La perspectiva personal-institucional tiene que ver con la idea de que en la resolución de problemas los alumnos novatos pueden presentar procedimientos que son argumentados desde una visión particular o personal. Cuando estos argumentos y procedimientos son presentados por expertos, se institucionalizan (Godino, 2022).

Moreno (2019) señala que ciertos procesos cognitivos pueden vincularse con las perspectivas duales del conocimiento. Por ejemplo, en la perspectiva ostensivo no ostensivo, es posible transitar de la idealización a la materialización de los objetos matemáticos y viceversa. Así, un concepto abstracto, es decir, no ostensible, puede representarse físicamente en papel mediante símbolos, gráficas o expresiones algebraicas que sí son ostensibles.

Este enfoque es altamente útil, ya que, al resolver problemas, los alumnos interactúan con diversos objetos matemáticos, como conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Sin embargo, en este curso se observó que las docentes en formación ejecutaban los procedimientos sin ser plenamente conscientes de los demás objetos que sustentan la resolución. Ante esta situación se implementó el mapa conceptual híbrido (MCH).

Mapa conceptual híbrido

Moreno (2019) propuso el uso del Mapa conceptual híbrido (MCH) para la enseñanza de la física, pero indica que puede ser implementado en la enseñanza de las matemáticas como apoyo en las fases de resolución de problemas. Se tienen referencias de su implementación en la solución de problemas matemáticos en educación básica en 2019.

La técnica del MCH combina características del Mapa Conceptual (MC) y del Diagrama de Flujo (DdF). El MCH "Se trata de una representación gráfica que presenta simultáneamente tantas redes jerárquicas de conceptos como distintos procesos o procedimientos" (p. 94).

El MC es una técnica gráfica que muestra de forma organizada el conocimiento, colocando en niveles superiores los conceptos más generales y en niveles inferiores los conceptos más particulares conectados con segmentos y frases de enlace. Muchas investigaciones muestran las ventajas del uso del MC como estrategia de aprendizaje en los alumnos y como estrategia de enseñanza para los docentes (Moreno, 2019). El DdF, por su parte permite representar de forma clara, esquemática y secuencial los pasos a seguir para

desarrollar un proceso, algoritmo o sistema (Universidad Internacional de La Rioja, 2022).

El uso del MCH hace visible el razonamiento de los estudiantes; las abstracciones y los conceptos que mantienen en mente se representan de manera física a través de estos mapas. De este modo los objetos matemáticos primarios (e.g., conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) pueden ser representados de manera ostensiva (i.e., lenguaje) mediante el MCH y éste puede ser interpretado como una representación ostensiva del sistema de prácticas discursivas y operativas que lleva a cabo un sujeto al resolver un problema (Moreno, 2019).

En la resolución de problemas, el MCH constituye una herramienta que permite identificar los conceptos, el lenguaje, las proposiciones, los argumentos y los procedimientos a los que alude el enfoque onto-semiótico, al integrar simultáneamente un diagrama de flujo y un mapa conceptual.

Metodología

La propuesta de intervención se llevó a cabo con 27 alumnas del grupo "A" de tercer semestre de la LEPRI en la ENRCS, una institución pública ubicada en Teteles de Ávila Castillo, Puebla. Las futuras docentes estudian bajo la modalidad de internado, lo que les brinda acceso gratuito a servicios académicos, alimenticios y de hospedaje.

Método de investigación

Se optó por utilizar el método de investigación-acción con la finalidad de mejorar una situación a través de la práctica. Latorre (2005, p. 26) define a la investigación-acción como:

> Una forma de indagación autorreflexiva realizada por quienes participan (profesorado, alumnado, o dirección, por ejemplo) en las situaciones sociales (incluyendo las educativas) para mejorar la racionalidad y la justicia de: *a*) sus propias prácticas sociales o educativas; *b*) su comprensión sobre las mismas; y *c*) las situaciones e instituciones en que estas prácticas se realizan (aulas o escuelas, por ejemplo).

Creswell (2012) indica que la investigación-acción "[…]se asemeja a los métodos de investigación mixtos, dado que utiliza una colección de datos de tipo cuantitativo, cualitativo o de ambos, sólo que difiere de estos al centrarse en la solución de un problema específico y práctico" (p. 577). La investigación-acción surge ante la necesidad de reflexionar sobre la práctica docente e intervenir en ella para fortalecerla, frente a una insatisfacción con el estado actual de las cosas (Vidal & Rivera, 2007). En este caso se buscó mejorar el proceso de resolución de problemas geométricos en 27 alumnas de tercer semestre.

Instrumentos de recolección

Hernández (2013) establece que las técnicas de recolección de datos comprenden procedimientos y actividades que le permiten al investigador obtener la información necesaria para dar respuesta a su pregunta de investigación y los instrumentos constituyen las vías mediante la cual es posible aplicar una determinada técnica de recolección de información.

Para recabar información sobre los procesos de aprendizaje de las alumnas, se utilizaron diferentes técnicas como la observación y encuestas, e instrumentos como guías de observación, dos cuestionarios con problemas geométricos para obtener un diagnóstico, un cuestionario al final del ciclo 1 y otro cuestionario al final del ciclo 2, registros anecdóticos y diarios de campo, mismos que permitían valorar la propia acción y hacer una identificar los aciertos y las limitaciones en el proceso.

Procedimientos

Latorre (2005) plantea que existe una espiral de la investigación-acción en forma cíclica. El proceso inicia con el diseño de un plan de acción sobre una realidad observada y diagnosticada, posteriormente se actúa sobre esa realidad, luego se observa la acción y al final se reflexiona sobre esa acción para iniciar nuevamente con otro ciclo. Aunque existen diferentes modelos de la investigación-acción, el más común es el de Kemmis, el cual identifica cuatro fases o momentos: (1) planificación, (2) acción, (3) observación, y (4) reflexión.Después de realizar un diagnóstico y búsqueda de información se propuso la siguiente hipótesis de acción: *Si se implementan estrategias didácticas como el método de Pólya y el uso del Mapa Conceptual Híbrido, entonces se favorecerá la mejora en los procesos de resolución de problemas geométricos en estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria.*

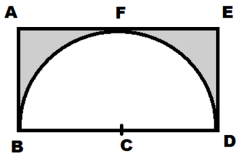
Entre los problemas geométricos analizados se incluyeron situaciones relacionadas con el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas, la identificación y clasificación de polígonos, la semejanza de triángulos, el cálculo de capacidad y volumen, así como la medición de ángulos y la identificación de propiedades en polígonos regulares e irregulares.

Los problemas propuestos conservaron las temáticas abordadas en el cuestionario inicial, pero fueron reformulados como preguntas abiertas buscaban obtener una respuesta numérica, sino también promover la reflexión sobre el proceso de resolución. Se incluyeron interrogantes orientadoras como: ¿qué es lo que se pide?, ¿tienes un plan para resolverlo?, ¿cuál es el procedimiento que seguiste? y ¿qué hiciste para resolver el problema?

Estas preguntas tenían como finalidad analizar el progreso o las dificultades del estudiantado en relación con las etapas propuestas por Pólya para la resolución de problemas. Un ejemplo del tipo de problemas propuestos es el siguiente (ver Figura 1).

Figura 1

¿Qué expresión representa el área sombreada si la base del rectángulo es 8 metros y AB=BC=CD?



El uso de problemas geométricos contextualizados y diseñados como preguntas abiertas permitió identificar los conocimientos previos y las dificultades conceptuales de las futuras docentes, además favorecer una actitud más reflexiva frente al proceso de resolución. Al incluir interrogantes inspiradas en las etapas de Pólya, se promovió que las estudiantes dejaran de centrarse exclusivamente en la obtención del resultado final y empezaran a valorar la planificación, el análisis y la revisión como partes esenciales del pensamiento matemático.

Esta estrategia reveló que muchas de las dificultades no se debían únicamente a la falta de conocimientos técnicos, sino a la ausencia de hábitos de pensamiento estructurado, lo cual es necesario para quien aspira a enseñar matemáticas. En este sentido, la intervención no solo aportó al desarrollo de habilidades geométricas, sino también a la formación de una mirada más metacognitiva sobre el propio aprendizaje, aspecto clave en la preparación de docentes reflexivas y conscientes de sus procesos.

Considerando el tiempo disponible se realizaron dos ciclos de intervención. En el primer ciclo, fase de planificación, se elaboró un plan de acción con secuencias didácticas en 5 sesiones de 2 horas cada una, basadas en la resolución de problemas a través del método de Pólya.

En la primera sesión se plantearon 4 problemas geométricos reflexionando sobre el paso 1 (i.e., comprensión del problema). En la segunda sesión, se plantearon 4 problemas geométricos haciendo énfasis en el paso 2 (i.e., concebir un plan). En la tercera sesión, se propusieron 4 problemas geométricos con énfasis en el paso 3 (i.e., ejecución del plan). En la cuarta sesión, se plantearon 4 problemas geométricos con énfasis en el paso 4 (i.e., visión retrospectiva). Finalmente, en la última sesión, se resolvieron problemas geométricos aplicando los 4 pasos propuestos por Pólya. Al final de este ciclo, se aplicó un cuestionario de 2 reactivos al inicio y al final del ciclo 1, para valorar los pasos en la resolución de problemas según la propuesta de Pólya.

Durante el segundo ciclo de intervención, se implementaron secuencias didácticas distribuidas en cinco sesiones de dos horas cada una, centradas en el uso del Mapa Conceptual Híbrido (MCH) y manteniendo las mismas temáticas consideradas en el diagnóstico y ciclo 1. El objetivo fue fortalecer la comprensión de los conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos

implicados en la resolución de problemas geométricos. Asimismo, se buscó que, al reflexionar sobre los procesos de solución, las estudiantes adquirieran más herramientas para abordar problemas de mayor complejidad.

En la primera sesión, se explicó la diferencia entre MC y MCH usando ejemplos mediante la resolución de problemas geométricos. En las sesiones 2 y 3, se trabajó en equipos para elaborar MCH en las libretas para resolver problemas geométricos. En las últimas dos sesiones, se buscó que la elaboración fuera individual.

Para la elaboración de los últimos MCH, se brindó orientación a las alumnas en el uso del software *Inspiration*, lo que permitió que los mapas fueran elaborados de forma digital. Al finalizar el segundo ciclo, se aplicó un cuestionario con 2 problemas geométricos considerando los mismos temas y buscando que tuvieran un grado de dificultad similar al de aquellos aplicados en el diagnóstico y al final del ciclo 1. Se valoraron también los pasos para resolver un problema usando el procedimiento de Pólya. Por ejemplo, un problema específico demandaba conocimientos básicos sobre la relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia, los cuales, en este nivel educativo superior, las alumnas deberían dominar con facilidad, dado que estos contenidos se trabajan desde la educación primaria, secundaria y media superior. No obstante, algunas alumnas enfrentaron dificultades para resolverlo.

Para analizar los datos se consideraron cinco categorías establecidas desde el diagnóstico de la problemática de modo que el aprendizaje de las alumnas se valoró cualitativamente a partir de los diarios de campo y registros anecdóticos, y cuantitativamente a partir de los resultados de los cuestionarios aplicados al final de cada ciclo. Este análisis se realizó en dos etapas, la primera después del ciclo de intervención 1 y la segunda etapa al finalizar el ciclo de intervención 2 (ver Tabla 1).

Tabla 1
Tipos de evaluación

Etapa o ciclo	Tipo de evaluación	
	Evaluación cualitativa	Evaluación cuantitativa
Inicial	Guías de observación, registros anecdóticos y diarios de campo	Cuestionario de diagnóstico
Primer ciclo		Cuestionario 1
Segundo ciclo		Cuestionario 2

Resultados

Los resultados de esta investigación se reportan por cada ciclo de intervención de acuerdo a las cinco categorías comprensión del problema, concebir un plan, ejecutar el plan, visión retrospectiva, plan y solución correcta, establecidas desde el diagnóstico de la problemática.

Resultados obtenidos en el Ciclo 1

A continuación se exponen los resultados obtenidos en el primer ciclo para cada una de las categorías anticipadas.

Categoría 1 [*Comprensión del problema*]: Con el análisis de la metodología de Pólya la comprensión de los problemas geométricos mejoró, como se muestra en el siguiente fragmento del registro anecdótico:

> […] me doy cuenta de que al principio muchas alumnas al leer el problema se apresuraban a identificar las operaciones que debían realizar sin considerar todos los datos del problema, ahora empiezan a tomar en cuenta todos los datos y la pregunta principal […]

La implementación de la metodología de Polya mostró un impacto favorable en la forma en que las alumnas abordaban los problemas geométricos, particularmente en la etapa inicial de comprensión. A partir de la aplicación sistemática de preguntas orientadoras como "¿qué me piden?" y "¿qué datos me dan?", se observó un cambio en la disposición cognitiva de las estudiantes. En las primeras sesiones, muchas tendían a apresurarse en la identificación de operaciones matemáticas sin detenerse a comprender completamente el enunciado.

Posteriormente, comenzaron a demostrar una actitud más reflexiva y analítica, mostrando mayor atención a los datos proporcionados y al planteamiento de la pregunta principal. Esto se reflejó tanto en sus explicaciones orales como en sus representaciones escritas del problema, donde lograban expresar con mayor claridad la situación a resolver. El registro anecdótico permitió constatar esta evolución, al documentar momentos en los que las alumnas verbalizaban su comprensión del problema antes de intentar resolverlo, señal de una mejor disposición hacia el pensamiento matemático fundamentado.

Categoría 2 [*Concebir un plan*]: En relación con la capacidad para concebir un plan de resolución, se identificó una mejora moderada, aunque significativa en términos cualitativos. La familiarización con la metodología de Pólya permitió que las alumnas reconocieran la importancia de anticipar un camino para resolver el problema, incluso antes de realizar cualquier operación. Sin embargo, el hecho de tener un plan no siempre garantizaba su pertinencia o efectividad, debido en parte a lagunas conceptuales que aún persistían. A pesar de ello, resultó relevante que las estudiantes comenzaran a representar sus estrategias mediante esquemas o descripciones textuales, lo que evidenció un avance hacia formas más estructuradas de resolución. Este proceso también fue favorecido por la exposición progresiva a diversos tipos de problemas geométricos y por las intervenciones del asesor, quien brindaba explicaciones que fortalecían los conceptos clave necesarios para desarrollar planes viables.

Categoría 3 [*Ejecutar el plan*]: La etapa de ejecución mostró avances graduales pero consistentes, principalmente en lo que respecta a la precisión y cuidado con que las alumnas aplicaban los procedimientos derivados del plan concebido. Aunque algunas continuaban cometiendo errores operativos, fue evidente que comenzaron a ser más conscientes de la necesidad de revisar y realizar con cuidado cada paso del proceso. La metodología de Pólya sirvió como guía estructural que les permitía mantener el foco durante la ejecución, lo cual se tradujo en una mayor coherencia entre el plan previsto y las acciones realizadas. El proceso de resolución pasó de ser una actividad impulsiva a una más deliberada, donde las alumnas mostraban mayor responsabilidad sobre sus decisiones operativas.

Categoría 4 [*Visión retrospectiva*]: La reflexión sobre el proceso seguido y la verificación de los resultados fueron aspectos que presentaron un progreso notable. Aunque no todas las alumnas llegaron a realizar una revisión completa de sus soluciones, muchas comenzaron a considerar esta etapa como parte integral del proceso de resolución. A través de preguntas específicas y guías de observación, se logró que tomaran consciencia de la importancia de revisar si su respuesta cumplía con las condiciones del problema planteado. Un cambio significativo fue que empezaron a plantearse preguntas sobre posibles errores, caminos alternativos o incluso modificaciones hipotéticas al problema. Esto indica un incipiente desarrollo de habilidades metacognitivas, aún poco consolidadas, pero claramente en proceso de fortalecimiento, lo cual representa un avance relevante en la formación de pensamiento matemático crítico y reflexivo.

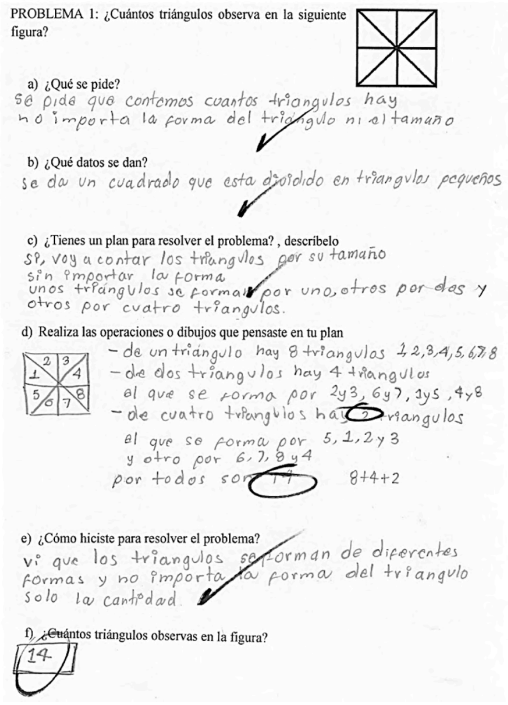
Categoría 5 [*Plan y solución correcta*]: Aunque el número de estudiantes que lograron llegar a la solución correcta a partir de un plan pertinentes fue aún limitado, se evidenció una tendencia positiva. En varios casos, las alumnas contaban con un plan pertinente, pero no lograban llegar a la respuesta correcta debido a errores operacionales. Esto sugiere que el desafío no radicaba únicamente en la concepción del plan, sino en la consolidación de habilidades básicas necesarias para su ejecución. Sin embargo, el hecho de que más estudiantes lograran articular un plan coherente es un indicio del fortalecimiento de procesos de pensamiento lógico-matemático, y representa un punto de partida prometedor para continuar desarrollando estrategias que integren la comprensión, la planificación, la ejecución y la verificación de manera articulada. Es importante reconocer que algunas alumnas, aunque tenían un plan pertinente no llegaron a la solución correcta, debido a errores en los algoritmos para encontrar la solución, como por ejemplo operaciones básicas mal empleadas.

En resumen, en el ciclo 1 se reconoce que hubo una mejora en la comprensión de los pasos para resolver problemas, pero aun algunas alumnas carecían de suficiente dominio de contenidos en la comprensión de conceptos

como áreas, perímetros, simetrías y ángulos, lo que motivó la incorporación de nuevas situaciones de aprendizaje en un segundo ciclo, pues era necesaria la reflexión sobre sus procesos de aprendizaje y no eran conscientes en algunos casos de los conceptos implicados, las propiedades o los argumentos usados en la resolución de problemas.

Figura 2

Aplicación del método Pólya



En este problema, las preguntas marcadas con los incisos a y b se vinculan con el primer paso del método de Pólya: *comprender el problema*. A través de ellas, se buscó que las alumnas identificaran con claridad qué se solicita y qué datos se proporcionan. Se constató una comprensión precisa del enunciado, evidenciada por afirmaciones como "no importa el tamaño y la forma", que reflejan no solo una correcta interpretación del problema, sino también el inicio de una estrategia de solución.

El inciso *c* permitió valorar el segundo paso: *concebir un plan.* A través de las respuestas se pudo verificar que la estudiante tenía una idea pertinente para abordar la resolución. Sin embargo, en el inciso d, correspondiente al tercer paso: *ejecutar el plan*, se evidenció una dificultad en la aplicación. Aunque el plan era correcto, su ejecución fue incompleta, ya que al calcular los triángulos formados dentro de la figura, solo consideró una diagonal del

cuadrado y omitió los triángulos generados por la segunda diagonal, lo cual afectó el resultado final.

El inciso e se asoció con el cuarto paso: *visión retrospectiva*, y permitió observar que la estudiante reflexionó sobre el procedimiento seguido, reconociendo aspectos que podrían mejorarse. Finalmente, el inciso *f* permitió evaluar la correspondencia entre un plan correcto y una ejecución precisa. La respuesta correcta era 16, sin embargo, pese a contar con un plan coherente, la ejecución incompleta condujo a una respuesta errónea.

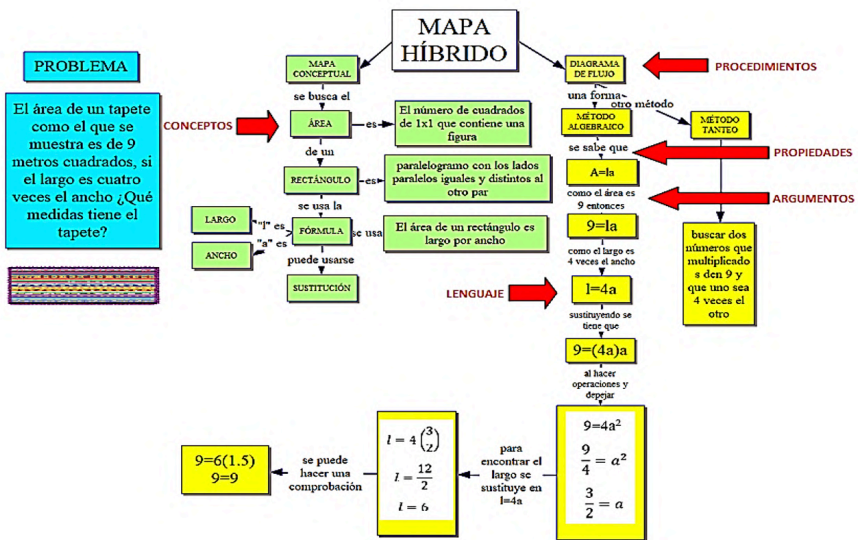
Esta primera experiencia formó parte de un proceso de investigación-acción orientado al fortalecimiento de la resolución de problemas geométricos en las alumnas. Si bien se observaron avances relevantes, los resultados también evidenciaron áreas de oportunidad que, tras una reflexión crítica sobre los logros y dificultades, sirvieron como base para planificar un segundo ciclo de intervención con mejoras focalizadas.

Resultados obtenidos en el Ciclo 2

A continuación, se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de los Mapas Conceptuales Híbridos (MCH) elaborados por las alumnas. En la Figura 3 se muestra un ejemplo representativo, donde se observa el uso preciso del lenguaje matemático, la aplicación correcta de conceptos, procedimientos y propiedades, así como una argumentación coherente en la resolución del problema. Este producto evidencia un avance en la comprensión y estructuración del pensamiento matemático.

Figura 3

Ejemplo de Mapa Conceptual Híbrido



Enseguida se presentan los resultados obtenidos en el segundo ciclo para cada una de las categorías declaradas.

Categoría 1 [*Comprender el problema*]: La revisión de los diarios de campo permitió identificar que, con el uso del MCH, las futuras docentes lograron reconocer que la resolución de problemas no implica únicamente realizar operaciones, sino que requiere comprender cómo los conceptos están interrelacionados. A través de esta herramienta, fueron capaces de visualizar conexiones entre ideas matemáticas, identificar propiedades relevantes y construir argumentos que no solo les ayudaron a resolver el problema en cuestión, sino que también resultaron útiles para enfrentar situaciones similares. Esta toma de consciencia evidenció un avance en la comprensión del problema, al reflejar una aproximación más estructurada, reflexiva y conceptual por parte de las estudiantes.

Categoría 2 [*Concebir un plan*]: La resolución de diversos problemas geométricos, junto con el análisis y la reflexión sobre los conceptos integrados en el MCH, propició una mejora notable en la capacidad de las alumnas para concebir un plan de solución. A medida que se familiarizaban con los elementos teóricos y su aplicación práctica, comenzaron a proponer estrategias más claras y estructuradas antes de iniciar la resolución. Esta evolución se reflejó en una mayor seguridad al plantear procedimientos y en la capacidad para anticipar posibles caminos hacia la solución, evidenciando un pensamiento matemático más organizado y consciente.

Categoría 3 [*Ejecutar un plan*]: La construcción del diagrama de flujo dentro del MCH permitió a las alumnas detallar de forma ordenada los pasos, operaciones y algoritmos necesarios para resolver el problema. Esta representación visual y secuencial favoreció una ejecución más precisa y consciente del plan previamente concebido. Al tener claridad sobre el procedimiento a seguir, las estudiantes mostraron mayor cuidado en la aplicación de los algoritmos y en la verificación de cada etapa del proceso, lo que fortaleció su desempeño en la fase de ejecución.

Categoría 4 [*Visión retrospectiva*]: El uso del MCH favoreció en las alumnas el desarrollo de procesos metacognitivos, al permitirles reconocer que un problema no es un caso aislado, sino que muchas veces forma parte de una familia de problemas con características similares. Esta comprensión les permitió ampliar su dominio conceptual y establecer conexiones entre distintas situaciones matemáticas. Al reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento y reconocer patrones comunes, las estudiantes comenzaron a abordar los problemas con mayor autonomía y profundidad, mostrando un avance significativo en su capacidad para transferir conocimientos a nuevas situaciones.

Categoría 5 [*Plan y solución correcta*]: A lo largo del proceso, las alumnas mostraron una mejora notable en su capacidad para concebir y ejecutar un

plan pertinente, así como para llegar a soluciones correctas. El uso de la metodología de Pólya, combinado con la herramienta utilizada, facilitó una comprensión más estructurada de los pasos a seguir, contribuyendo de manera significativa en las etapas de planificación, ejecución y resolución final. Al analizar los resultados, se observó que esta herramienta tuvo un impacto especialmente positivo en las categorías relacionadas con la concepción de un plan, la correcta ejecución de este plan y la obtención de la solución correcta. La capacidad de las estudiantes para integrar de manera más eficaz estos elementos en su proceso de resolución reflejó un avance sustancial en su enfoque hacia los problemas, permitiéndoles no solo mejorar sus respuestas, sino también sus métodos de trabajo.

Para concluir el análisis de resultados, es pertinente examinar los datos obtenidos en los tres cuestionarios aplicados: el diagnóstico, el correspondiente al ciclo 1 y el correspondiente al ciclo 2 (ver Tabla 2).

Tabla 2

Porcentajes de aciertos en cada evaluación escrita

Categoría	Diagnóstico (%)	Ciclo 1 (%)	Ciclo 2 (%)
Comprensión del problema	77.8	80.1	85.2
Concebir un plan	70.4	74.1	88.9
Ejecutar el plan	48.1	51.9	66.7
Visión retrospectiva	22.2	40.7	66.7
Plan y solución correcta	40.7	48.1	62.9

La comparación entre las tres evaluaciones muestra un progreso sostenido en todas las categorías analizadas, lo que evidencia el impacto positivo de las estrategias implementadas. En “Comprensión del problema”, las estudiantes pasaron de un 77.8 % en el diagnóstico a 85.2 % en el ciclo 2, reflejando una mejor interpretación de los enunciados. En “Concebir un plan", el avance fue notable, aumentando de 70.4 % a 88.9 %, lo que indica un desarrollo claro en la planificación estratégica. En “Ejecutar el plan”, aunque el progreso fue más moderado, se observa un aumento de 48.1 % a 66.7 %, mostrando una mejora en la aplicación de procedimientos. La categoría con mayor crecimiento fue “Visión retrospectiva”, que pasó de 22.2 % a 66.7 %, evidenciando un fortalecimiento en la reflexión y metacognición. Por último, en “Plan y solución correcta”, se registró un aumento de 40.7 % a 62.9 %, lo que sugiere que las estudiantes lograron integrar mejor los conocimientos y llegar a soluciones más precisas. En conjunto, estos resultados indican un avance relevante en las habilidades de resolución de problemas a lo largo del proceso formativo.

El análisis integrado muestra que el uso del MCH, en combinación con los pasos de Pólya, constituye una estrategia sólida para fortalecer los procesos de resolución de problemas en estudiantes en formación docente. Mientras que los pasos de Pólya ofrecen una estructura lógica y secuencial, el MCH complementa este enfoque al permitir una articulación conceptual más profunda y reflexiva. La combinación de ambos recursos no solo mejora los resultados cuantitativos, sino que también favorece el desarrollo de habilidades cognitivas superiores, como la metacognición, que son esenciales para formar docentes capaces de enseñar matemáticas de manera efectiva.

Este avance, sin embargo, no debe entenderse como una conclusión, es un punto de partida para continuar fortaleciendo la formación docente. Es necesario seguir trabajando en la práctica reflexiva, en el uso habitual de herramientas como el MCH, y en la generación de espacios donde las futuras maestras puedan seguir enfrentándose a situaciones problemáticas que requieran análisis, creatividad y revisión crítica. De esta manera, no solo se forman mejores estudiantes, sino también mejores educadoras.

Conclusiones

En respuesta a la pregunta de investigación, *¿Cómo incide la implementación de estrategias didácticas, como los pasos de Pólya y el uso del Mapa Conceptual Híbrido, en la mejora de los procesos de resolución de problemas geométricos en futuras docentes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria?*, se concluye que la implementación de estrategias didácticas, como el método de Polya y el uso del Mapa Conceptual Híbrido (MCH), tiene un impacto relevante en la mejora de los procesos de resolución de problemas geométricos en futuras docentes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria. Ambas herramientas se han demostrado efectivas para fortalecer las habilidades de resolución de problemas, no solo en el ámbito conceptual, sino también en el desarrollo de habilidades metacognitivas y en la comprensión profunda de los procesos involucrados.

Los resultados de la investigación confirman que tanto los pasos propuestos por Pólya (2004) como el MCH (Moreno et al., 2018) contribuyen de forma sustantiva al desarrollo de competencias en la resolución de problemas geométricos. Se observó una mejora notable en las diferentes fases del proceso de resolución, especialmente en la comprensión del problema y en la ejecución del plan. La utilización del MCH facilitó la identificación y la clarificación de conceptos clave, propiedades, procedimientos y argumentos dentro de los problemas, haciendo visibles aquellos elementos que, de otro modo, podrían haber pasado desapercibidos. Esta herramienta fue particularmente útil para integrar los aspectos del enfoque onto-semiótico, lo que permitió que las estudiantes pudieran ver y comprender mejor los procesos matemáticos y sus interrelaciones.

Además, el MCH promovió la reflexión y la metacognición, aspectos esenciales para un aprendizaje profundo y duradero. La capacidad de las estudiantes para visualizar las conexiones conceptuales y argumentativas subyacentes se vio enormemente fortalecida, lo que les permitió trascender los procedimientos mecánicos y lograr una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Este enfoque no solo impactó la resolución de problemas en el momento de la práctica, sino que también fortaleció su capacidad para hacer una retrospectiva crítica y analizar sus propios procesos de resolución.

Por otro lado, la aplicación de la metodología de Pólya permitió a las estudiantes fortalecer su desempeño respecto al diagnóstico inicial. Las fases estructuradas del método, que incluyen la comprensión del problema, la planificación de una estrategia, la ejecución del plan y la verificación de los resultados, ofrecieron un marco claro y accesible para abordar problemas geométricos. Esta estructura permitió que las estudiantes desarrollaran una mayor confianza y autonomía al enfrentar problemas, observándose un notable avance en su capacidad para concebir y ejecutar planes de solución pertinentes. La metodología de Pólya, en su enfoque heurístico, también contribuyó al fortalecimiento de la autonomía de las estudiantes, ayudándolas a manejar la incertidumbre y a tomar decisiones informadas a lo largo del proceso de resolución.

Es importante señalar que la mejora en la resolución de problemas geométricos no se logra simplemente a través de la repetición de ejercicios, sino que requiere una reflexión consciente sobre el proceso mismo. En este sentido, la integración habitual del MCH en las actividades formativas permite que las futuras docentes vayan más allá de los procedimientos automatizados, descubriendo las conexiones y relaciones entre los conceptos matemáticos de manera más significativa. Este enfoque didáctico también promueve la toma de consciencia sobre las propias estrategias de resolución, ayudando a las estudiantes a identificar áreas de mejora y a reorganizar su enfoque según las demandas del problema.

El desarrollo de estas habilidades en la resolución de problemas geométricos resulta determiante para la formación de futuras docentes, ya que no solo las prepara para abordar problemas matemáticos complejos, sino que también les brinda herramientas efectivas para intervenir pedagógicamente de manera más asertiva. Este tipo de formación impacta directamente en la capacidad de las futuras docentes para enseñar geometría de manera más comprensiva y eficiente, lo que, a su vez, repercute positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de educación básica, especialmente en el área de geometría.

El enfoque onto-semiótico, integrado con el MCH, permitió hacer visibles los procesos involucrados en la resolución de problemas matemáticos,

aportando una perspectiva analítica relevante que ayuda a descomponer y entender mejor las relaciones entre los conceptos. Esta perspectiva contribuyó a que las estudiantes desarrollaran un enfoque más reflexivo y detallado de sus procesos de pensamiento, algo esencial en la formación de docentes que deben ser capaces de guiar a sus futuros estudiantes a través de estos mismos procesos.

A nivel práctico, se recomienda continuar promoviendo este tipo de experiencias formativas en la formación de futuras docentes de primaria, ya que la exposición continua a este tipo de estrategias permite a las estudiantes enfrentarse a problemas y desafíos, lo que amplía la capacidad de las estudiantes para enfrentar problemas y retos incrementando sus oportunidades de aprendizaje. En investigaciones futuras, se sugiere profundizar en el estudio del uso del MCH en los procesos de enseñanza de las matemáticas, explorando nuevas formas de integrar enfoques visuales, cognitivos y tecnológicos en la resolución de problemas geométricos.

Finalmente, al abordar el diseño de propuestas didácticas para la resolución de problemas geométricos en la formación de docentes de primaria, se destaca la necesidad de integrar enfoques que combinen dimensiones visuales, cognitivas y tecnológicas. Aunque el método de Pólya (2004) sigue siendo un referente importante, las investigaciones recientes amplían esta perspectiva al incluir representaciones verbales, numéricas y visuales, como lo señalan estudios de Schoenfeld (2016), Duval (2006), Schindler y Lilienthal (2019), Lee y Wu (2018) y Eisenmann et al. (2017). Además, resulta importante identificar patrones mentales y gestionar la carga cognitiva mediante el uso de estrategias heurísticas, que requieren una enseñanza explícita para optimizar el rendimiento en la resolución de problemas geométricos. Este enfoque mejora el aprendizaje de las matemáticas, además de que potencia la capacidad de los futuros docentes para guiar a sus estudiantes en la comprensión profunda de los conceptos geométricos.

Referencias

Barrón-Parado, J., Basto-Herrera, I., & Garro-Aburto, L., (2021). Método Pólya en la mejorar del aprendizaje matemático en estudiantes de primaria. *593 Digital Publisher CEIT, 6(*5-1), 166–176. https://doi.org/qbf3

Creswell, J. (2012). *Investigación educativa: planificación, realización y evaluación de investigaciones cuantitativas y cualitativas.* Pearson.

de Carvalho, M. (2024). How to model it: Polya's forgotten lesson transcribed for statistics and data science. *CHANCE, 37*(3), 32–34. https://doi.org/qbf4

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Eisenmann, P., Ufer, S., & Kaiser, G. (2017). Heuristic strategies of problem solving: A review of theory and empirical research. *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 1–15.

Figueroa, E., Sánchez, M., Figueroa, F., & Zambrano, R. (2023). Aplicación del método Pólya para resolver problemas de movimiento rectilíneo. *Polo del Conocimiento, 8(*12), 726–739. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9254962.pdf

García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

Godino, J. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque onto-semiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), 1–24. https://reviem.com.ve/index.php/REVIEM/article/view/25/13

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127–135.

Gopinath, S., & Lertlit, S. (2017). The implementation of Polya's model in solving problem-questions in mathematics by grade 7 students. *Suranaree Journal of Social Science, 11*(1), 47–59. https://so05.tci-thaijo.org/index.php/sjss/article/view/93631/73304

Guzmán, S., & Moreira, Y. (2014). La resolución de problemas geométricos en matemática utilizando la computadora. *EduSol, 14*(46), 1–8. https://www.redalyc.org/pdf/4757/475747187009.pdf

Hernández, M. (2013). *Diferencia entre método, técnica, instrumento y metodología*. https://bit.ly/476rHjt

Latorre, A. (2005). *Conocer y cambiar la práctica educativa.* Graó.

Lee, C. Y., & Wu, C. C. (2018). How college students read geometric texts with illustrations: An eye-tracking study. I*nternational Journal of Science and Mathematics Education, 16*(3), 477–497.

Mancera, E., & Basurto, E. (2016). *Saber matemáticas es saber resolver problemas.* SIRVE.

Montoya, L. (2024). Método de Pólya para el Fortalecimiento de las Competencias Científicas en los Estudiantes del Grado 11. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 8*(1), 11301–11316. https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/view/10433/15339

Moreno, N. , Angulo, R., & Reducindo, I. (2018). Mapas conceptuales híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 113–130. http://funes.uniandes.edu.co/15749/1/Moreno2018Mapas.pdf

Moreno, N. (2019). Mapas conceptuales híbridos, una herramienta para investigación en la matemática escolar. A*cta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 93-101.

Oliveros, D., Martínez, L., & Barrios, A. (2021). Método de Polya: una alternativa en la resolución de problemas matemáticos. *Ciencia e Ingeniería, 8*(2), e5716273. https://doi.org/10.5281/zenodo.5716273

Pólya, G. (2004). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Sánchez-Cuastumal, L., & Valverde-Riascos, Y. (2020). Método heurístico de George Pólya en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de grado sexto. Revista *UNIMAR, 38*(2), 113–141. https://doi.org/10.31948/Rev.unimar/unimar38-2-art5

Santos, M. (1992). Resolución de problemas; El trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a considerar en la resolución de problemas. *Revista Educación Matemática, 4*(2), 16–24.

Schindler, M., & Lilienthal, A. J. (2019). Eye-tracking for studying reasoning processes: Methodological perspectives and an example of its application in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 100*(2), 123–141.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Education, 196*(2), 1–38.

Secretaría de Educación Pública. (2022a). *Plan de estudios de la educación básica 2022.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2022b). *Programa del curso Geometría. Su aprendizaje y su enseñanza.* SEP.

Serrato, J. (2018, 22 de febrero). *La enseñanza de la Geometría* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=NeHJ3F6tTwQ

Universidad Internacional de La Rioja (2022). *¿Qué es un diagrama de flujo?: Cómo hacerlo y para qué sirve*. https://mexico.unir.net/ingenieria/noticias/diagrama-flujo

Vidal, M., & Rivera, N. (2007). Investigación-acción. *Educación Médica Superior, 21*(4), 1-15. http://scielo.sld.cu/pdf/ems/v21n4/ems12407.pdf

La orquestación y uso de recursos digitales para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria: un estudio diagnóstico

Homero Enríquez Ramírez [1]

Resumen

A casi medio siglo de investigación y desarrollo de tecnología digital (TD) en el campo de la educación matemática, tiempo en el que se ha evidenciado su potencial para la transformación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, continúa existiendo un uso limitado y subaprovechamiento de esta tecnología en las escuelas, pues estos avances no han tenido el impacto esperado en la formación de los profesores ni en el currículo escolar. Sin embargo, los docentes, a su manera, han integrado esta tecnología en su práctica. Los resultados de esta investigación, realizada en diez escuelas primarias del estado de Oaxaca, muestran diversas maneras en que los profesores orquestan recursos digitales en su clase de matemáticas, las cuales evidencian usos de la tecnología limitados, como reemplazo y como amplificador, sin llegar al uso de la TD como transformador. Esta situación, que responde principalmente a la falta de formación docente, también se debe al limitado acceso a recursos digitales en las escuelas y a las políticas escolares sobre el uso de la TD del que disponen.

Palabras clave

Orquestación instrumental, uso de la tecnología, recursos digitales, educación primaria, enseñanza de las matemáticas

---

[1] homerenriquez07@gmail.com

Escuela Normal Experimental de Huajuapan, Oaxaca, México

Ramírez-Enriquez, H. (2025). La orquestación y uso de recursos digitales para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria: un estudio diagnóstico. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2025* (pp. 251–274). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2025/01-11

Introducción

Papert (1981), desde la década de los ochentas del siglo pasado, vislumbraba que, a partir de sus investigaciones y los rápidos avances tecnológicos, la integración de las computadoras en las escuelas traería importantes beneficios para la educación matemática. De la misma manera, en el ICMI de 1985 se preveían condiciones para promover el uso de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas, ya que el aumento del equipamiento escolar, la presencia más común de las computadoras en la sociedad y la mayor cantidad de software de alta calidad facilitarían su integración pedagógica en las aulas (Abboud-Blanchard, 2016), aunque esto exigía la formación de los profesores, un factor clave (Artigue, 1998). Sin embargo, 25 años después, en el ICMI del año 2010 se reconocía que el uso de la TD en la clase de matemáticas aún era escaso y limitado (Abboud-Blanchard, 2016), situación también reconocida en el congreso ICME-13 de 2016, donde, las investigaciones expuestas dieron cuenta del uso limitado y subexplotación de la TD para la enseñanza de las matemáticas que seguía existiendo en la educación primaria y secundaria (Ball et al., 2018).

En el caso de México, donde se han implementado diversos programas para promover la integración pedagógica de la TD en la educación primaria (Red Escolar, Enciclomedia, Habilidades Digitales para Todos, entre otros), la investigación muestra que también existe un uso limitado de recursos digitales en la clase de matemáticas (Santiago et al., 2013; Trigueros et al., 2014; Enríquez & Sacristán, 2019, 2020), situación que responde en gran medida a la falta de formación de los docentes, pues integrar el uso de recursos digitales en la clase es una tarea compleja que requiere apoyo sostenido.

La complejidad de la integración de TD en la clase de matemáticas

Ante tal problemática, sobre el uso limitado y subexplotación de TD en la enseñanza de las matemáticas, el llamado común de los investigadores es priorizar la formación de los docentes, ya que integrar el uso de recursos digitales en la clase es un proceso conflictivo y problemático (Abboud-Blanchard, 2016). Al respecto, Noss y Hoyles (1996), en su proyecto "The Microworlds Project", identificaron que, para los docentes de secundaria, debido a sus actitudes y formas de pensar en torno al uso de la TD y a sus prácticas consolidadas, la integración de LOGO en su clase fue un proceso lento y difícil, que los enfrentó a un choque con sus preocupaciones pedagógicas, al tener que abordar las nuevas matemáticas surgidas y verse en la necesidad de repensar su rol, de adaptarlo o modificarlo. De esta manera, Noss y Hoyles (1996) concluyen que, si bien el uso de la computadora en la clase de matemáticas puede ser problemático, también puede servir como un catalizador de las creencias personales, pedagógicas y profesionales de los docentes, dando lugar a innovaciones en su práctica (Noss & Hoyles, 1996).

Por su parte, Artigue (1997), en su investigación sobre la integración del software DERIVE para la enseñanza del álgebra en la educación secundaria, identificó otra problemática que enfrentan los docentes al integrar el uso de recursos digitales en su clase de matemáticas, regular el equilibrio entre las actividades productivas y reflexivas de los estudiantes, pues, es necesario reducir las primeras y promover las segundas, las más valiosas para el aprendizaje. En este sentido, Ruthven et al. (2005) mencionan que otra dificultad a la que se enfrentan los docentes es la de mantener un equilibrio entre el control de la clase y el aprovechamiento de los recursos digitales, ya que, en el afán de controlar lo que hacen los estudiantes y evitar situaciones difíciles, que puedan quedar fuera de su alcance, se puede reducir la dimensión exploratoria de la TD y limitar su potencial para el aprendizaje de las matemáticas. Otra situación conflictiva del uso de los recursos digitales se relaciona con las cuestiones pragmáticas y de tiempo de los docentes (Abboud-Blanchard, 2014), ya esto genera que los utilicen principalmente para practicar habilidades de temas ya estudiados y, cuando se trata de temas nuevos, tienden a simplificar las tareas o ayudar a los estudiantes a controlar y validar sus soluciones, limitando sus oportunidades para enriquecer su trabajo con el uso de la TD.

Laborde (2002) distingue tres las situaciones que obstaculizan el proceso de integración de recursos digitales en la clase de matemáticas: el tiempo que le toma al profesor aceptar que puede haber aprendizaje a partir de tareas que involucren el uso de la computadora; el desarrollo de la habilidad para generar situaciones de aprendizaje basadas en el recurso digital y; por último, la aceptación de cierta pérdida de control sobre los estudiantes respecto a sus actividades de aprendizaje. Al respecto, Abboud-Blanchard (2014) menciona que apropiarse del recurso digital, determinar su potencial y anticipar el tipo de ayuda que dará a los estudiantes, además de cotejar el tiempo contemplado en el plan de clase con el tiempo real de su desarrollo, son los aspectos que dificultan la integración de la TD en su práctica docente.

Como se ha mostrado, integrar el uso de TD en la clase de matemáticas es una tarea compleja y problemática para los docentes, por lo que es necesario y urgente atender su formación, de tal manera que estén en posibilidades de aprovechar el potencial de los recursos digitales, derivado de sus posibilidades para experimentar, visualizar y simular situaciones (Artigue, 2011, citada en Abboud-Blanchard, 2016). Además de la formación docente, es necesario considerar diversos factores que inciden en la integración de esta tecnología en la educación matemática.

Factores que posibilitan u obstaculizan la integración de la TD

Wachira y Keengwe (2011) mencionan que la integración de las tecnologías digitales significa incorporar en la práctica la tecnología apropiada en todos

los aspectos de la enseñanza y del aprendizaje: en los objetivos, en las lecciones y en las evaluaciones. Para que esta integración suceda es necesario que los docentes cuenten con el software matemático apropiado –como applets, softwares dinámicos, calculadoras gráficas, etc.—, que posea posibilidades computacionales, de construcción y de representación visual, de forma tal que ofrezcan contextos más realistas, donde los estudiantes amplíen la calidad de sus investigaciones y adquieran ideas matemáticas que de otra manera resultaría demasiado complejo (Wachira & Keengwe, 2011). Sin embargo, factores como la falta de disponibilidad y confiabilidad en el equipo tecnológico escolar, la ansiedad y desconfianza que genera el utilizar TD en la clase, la falta de conocimiento sobre su manejo y la falta de soporte y liderazgo tecnológico pueden obstaculizar la integración.

Por su parte, Thomas y Palmer (2014) y Virmani y Williamson (2016) distinguen dos tipos de obstáculos para la integración pedagógica de la TD: los extrínsecos, como la accesibilidad a recursos tecnológicos, así como con el apoyo y la formación de los profesores, presiones curriculares y soporte técnico; y los intrínsecos, relacionados con el conocimiento, habilidades, confianza, tiempo, valor y concepciones de los profesores sobre el uso de las tecnologías para la enseñanza.

A partir de lo expuesto se advierten tres cosas: que el mayor acceso a equipo digital en las escuelas, el desarrollo de software de alta calidad y la investigación sobre su potencial para la enseñanza y aprendizaje matemáticas no han tenido el impacto esperado para lograr la integración de esta tecnología en el aula de clases; que integrar el uso de recursos digitales en la clase es un proceso complejo, que requiere la formación docente y su acompañamiento; y que, además de la formación docente, existen factores internos y externos que es necesario considerar para lograr la integración de la TD en la clase de matemáticas.

Derivado de la problemática planteada, se realizó un estudio diagnóstico en escuelas primarias –fase inicial de una investigación de diseño—, con el objetivo de indagar: el acceso de los profesores a TD para su uso en el aula; su formación y percepción sobre el uso de esta tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y la manera de emplear los recursos digitales en su clase. Esto con la finalidad de conocer la condiciones materiales y necesidades profesionales de los docentes para la fase de intervención de la investigación. Aquí se presentan algunos resultados de este estudio diagnóstico.

Marco teórico

La orquestación instrumental y usos de la tecnología

La orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010) es uno de los referentes teóricos retomados para analizar la manera en que los profesores utilizan los recursos digitales en la clase de matemáticas. Este concepto, acuñado por

Trouche (2004), lo define Drijvers et al. (2010) como "la organización y el uso sistemático e intencional del profesor de los artefactos disponibles en el ambiente de aprendizaje —computarizados en este caso— dada la situación de una tarea matemática, con la intención de guiar la génesis instrumental de los estudiantes" (p. 214). Para comprender cómo los profesores orquestan los recursos digitales, Drijvers et al. (2010) sugiere considerar tres aspectos: *La configuración didáctica*, relacionada con los artefactos existentes y la manera en que están dispuestos en el ambiente de enseñanza; *el modo de explotación*, referido a la planificación del aprovechamiento de la configuración didáctica en el desarrollo de su clase, en particular, el papel que jugarán los recursos tecnológicos en las tareas de aprendizaje previstas; y, por último, el *desempeño didáctico*, concerniente a lo que hace el profesor en el desarrollo de la clase, la forma en que coordina las acciones previstas con los recursos existentes y su desempeño ante situaciones que se le presentan en el desarrollo de tareas, en el manejo de los recursos o en el surgimiento de nuevos objetivos.

Drijvers et al. (2010), a partir de sus investigaciones realizadas en contextos ricos en equipamiento digital, identifican seis maneras en que el profesor orquesta los recursos digitales en su clase:

- *Demostración técnica.* Esta orquestación consiste en la demostración técnica del uso del recurso digital, la cual se presentó en una configuración didáctica rica en tecnología, con facilidad de proyección a todo el alumnado. Esta orquestación se realiza con la intención de explicar la manera de utilizar el recurso digital ante un nuevo problema, o bien para explicar algún tipo de uso dado por uno de los estudiantes.
- *Explica la pantalla.* Esta forma de orquestación consiste en la explicación del contenido por parte del profesor, guiado por lo que ocurre en la pantalla del dispositivo. Esta manera de orquestar el recurso digital se da en un ambiente rico en tecnología, donde el punto de partida es la solución del profesor a cierta tarea, o bien, la solución dada por un estudiante y retomada para la explicación.
- *Vincula pantalla pizarrón.* En esta orquestación, el profesor explica el tema transponiendo lo que sucede en el ambiente digital a un ambiente convencional, es decir, hace una vinculación entre lo digital y lo convencional. La configuración didáctica en que sucedió esta orquestación fue en un ambiente rico en tecnología, donde también existe el pizarrón tradicional, lo que permite que suceda la exposición del profesor para explicar lo realizado por un alumno o a petición del grupo.
- *Discute la pantalla*. Esta estrategia consiste en la discusión grupal de lo que sucede en el ambiente tecnológico, promovida a partir de la solución de un estudiante, de un problema o una aproximación del

profesor, con el fin de favorecer la génesis instrumental colectiva. También esta orquestación se da en ambiente rico en tecnología y con posibilidad de proyección.

- *Indentifica y muestra* [Spot and show]. En esta forma de orquestar el recurso digital el profesor escoge, durante la preparación de la clase, el trabajo de uno de sus estudiantes para mostrar al grupo el razonamiento seguido y promover la discusión. Esto sucede en un ambiente rico en tecnología y con acceso a lo que realizan los estudiantes.
- *Sherpa trabajando* [Sherpa at work]. Esta forma de orquestación involucra la ayudantía de un estudiante para explicar su trabajo o hacer lo que el profesor le solicite. Este ayudante puede estar a cargo del manejo de recurso tecnológico del profesor, o bien puede encargarse de explicar al grupo ciertas formas de utilizar el recurso, a partir de lo que el profesor le indique. El ambiente donde se da este tipo de utilización es rico en tecnología.

Otro marco de referencia para analizar el uso de la TD fue el de Hughes (2005), quien clasificó tres formas de utilizarla en la clase:

- Como *reemplazo*, cuando se utiliza la tecnología sin realizar cambios en la manera de enseñar, manteniendo los mismos procesos y metas de aprendizaje. De acuerdo con Sandoval (2017) este uso de la tecnología en la clase de matemáticas implica actividades como *proyectar, explicar, ejemplificar, motivar, dirigir la clase, completar información*.
- Como *amplificador*, cuando es utilizada por el docente para realizar de forma más eficiente y efectiva las tareas de la clase, aunque éstas sigan siendo las mismas. En la clase de matemáticas este uso de la tecnología sucede cuando se emplea para *comprobar un resultado, realizar un cálculo más rápido, ilustrar o simular experimentos* (Sandoval, 2017).
- Como *transformador*, cuando su uso va acompañado de cambios en las prácticas de enseñanza, en las rutinas de aprendizaje y en los roles del profesor y los alumnos. Ejemplo de este uso de la TD en la enseñanza de las matemáticas sucede cuando se utiliza para *explorar, comparar, conjeturar, validar, trabajar en equipo/cooperativo y experimentar* (Sandoval, 2017), promoviendo así la comprensión de los contenidos matemáticos y en desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos.

Estos referentes teóricos constituyen la base para analizar la manera en que los docentes utilizan la TD en la clase de matemáticas.

Metodología de estudio

Como ya se mencionó, este estudio corresponde a la fase diagnóstica de una investigación de diseño, cuyos resultados fueron la base para la fase de

intervención, relacionada con el diseño e implementación de un curso para profesores de educación primaria, a fin de favorecer sus conocimientos para la integración de la TD en la clase de matemáticas e indagar este proceso. Para realizar este diagnóstico se accedió a diez escuelas primarias de la región Mixteca de Oaxaca, donde, se realizaron las siguientes acciones:

- *Entrevista* presencial a directores de las diez escuelas primarias (audiograbada), en la que se preguntó acerca del equipamiento digital con el que se contaban en su escuela, las modalidades de equipamiento y la finalidad de su uso. Esta entrevista fue acompañada por *observación directa* del equipo digital existente, para conocer las condiciones en que se hallaba el equipo. El análisis de esta entrevista permitió conocer las condiciones de acceso a TD con que cuentan los docentes, uno de los factores extrínsecos que inciden en la integración de esta tecnología en la clase de matemáticas.
- *Cuestionario* escrito a 67 de los profesores que laboraban en las escuelas primarias a las que se accedió, el cual estaba compuesto por preguntas abiertas y cerradas acerca de; su formación y percepción sobre el uso de la TD para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y sobre los recursos digitales que emplean en la clase de matemáticas y la manera de utilizarlos. El análisis de esta información permitió conocer dos de los factores que inciden en la integración de la TD: la formación de los profesores (factor extrínseco) y su experiencia y percepción (factor intrínseco).
- Observación de clase (videograbación) a nueve de los 67 profesores que respondieron el cuestionario, clases en las que utilizaron recursos digitales para tratar contenidos matemáticos. Esta observación estuvo acompañada por la aplicación de una entrevista cara a cara, posterior a la clase, en la que se preguntó acerca de los recursos empleados, de las actividades implementadas y de sus fines. La información obtenida con estos instrumentos permitió analizar las orquestaciones y usos de la TD dados por los profesores.

El análisis de los datos recabados se realizó en dos planos. Por una parte, a partir de los datos obtenidos en las entrevistas a directores y el cuestionario a los profesores, se hizo la cuantificación y clasificación del equipamiento digital disponible en las escuelas, las modalidades de este equipamiento digital (Sunkel et al., 2013) la cantidad de docentes con formación sobre uso pedagógico de la TD para la enseñanza de las matemáticas, los tipos de recursos digitales empleados y objetivos de su uso. Por otra parte, se llevó a cabo un análisis cualitativo de la información recabada en las observaciones de clase (videograbaciones) y entrevistas posteriores a los profesores (transcripciones), con la finalidad de indagar las orquestaciones instrumentales (Drijvers et al., 2010) y usos de la tecnología (Hughes, 2005).

Resultados

Resultados

En esta sección se presenta un análisis del contexto digital en las escuelas (el equipamiento, sus condiciones, modalidades de uso), de la formación de los profesores (sobre el uso de la TD para la enseñanza de las matemáticas), del tipo de recursos digitales que suelen emplear y de las orquestaciones y usos atribuidos a estos recursos en la clase.

El equipamiento digital de las escuelas y el acceso a TD

De acuerdo con los datos obtenidos, cada una de las escuelas del estudio presentaba una configuración digital propia (ver Tabla 1), pues, aunque se hallaron computadoras, proyectores y pizarrones electrónicos en las diez escuelas del estudio, así como el servicio de internet en cinco de ellas, existían diferencias en la cantidad de equipo, en sus características, su disposición dentro de la escuela y en las finalidades de su uso, elementos que inciden en su integración pedagógica.

Tabla 1

Configuración digital de las escuelas

		Escuelas urbanas				Escuelas rurales						Total
		EJMM	*EVG*	*EVGF*	*EJS*	*EVJ*	*ECMC*	*ECS*	*EMR*	*EPA*	*EJRP*	
Cantidad de computadoras por modalidad	Laboratorio de informática (aula de medios)	8	NA	24	NA	NA	NA	NA	14	NA	17	63
	TIC en el aula	2	2	2	2	2	7	1	2	2	2	24
	TIC itinerante	NA	NA	NA	NA	NA	NA	4	NA	3	NA	7
	Total	10	2	26	2	2	7	5	16	5	19	94
Población de alumnos		240	320	360	230	340	100	120	170	90	220	2190
Razón de alumnos por computadora		24:1	160:1	13.8:1	115:1	170:1	14.3:1	24:1	10.6:1	18:1	11.5:1	23.3:1
Proyectores		2	1	3	2	2	6	2	2	3	3	26
Pizarrones electrónicos		2	1	2	2	2	1	1	2	2	1	16
Internet		Red satelital	No	Red telefónica y Red de banda ancha "México conectado"	Red de banda ancha "México conectado"	Red telefónica Red de banda ancha" México conectado"	No	No	Red satelital	No	No	NA

De manera general en la Tabla 1 se advierte la existencia de computadoras en las diez escuelas, sin embargo, la cantidad de ellas es muy desigual —por

ejemplo, mientras que en una escuela se contaba con 26 computadoras (caso EVGF) en otras solo con 2 (casos EVJ y EJS)—, situación que incide en las posibilidades de brindar acceso a los estudiantes. Mientras que en la escuela con mejores posibilidades de acceso la razón de computadoras por alumno era de 1 a 10 (EJRP), en la escuela con menos posibilidades era de 1 a 170. Estos datos evidencian que las oportunidades de los profesores y los estudiantes para acceder a equipos de cómputo son desiguales y limitadas, ya que el ideal es contar con una computadora por niño (Sunkel et al., 2013).

Otro elemento que incide en el acceso al equipo digital se relaciona con el modelo de equipamiento: Laboratorio de informática, TIC en el aula o TIC itinerante[1]. Los *laboratorios de informática* identificados en cuatro de las escuelas (EJMM, EVGF, EMR y EJRP) consistían en un aula equipada con computadoras para que los estudiantes acudieran a clases de computación. Estos espacios, conocidos como "aula de medios", albergaban el 59% del total de las computadoras contabilizadas.

Otra modalidad de equipamiento existente en las diez escuelas era la de *TIC en el aula* –modelo implementado en las escuelas primarias para 5to y 6to grados, a través del programa Enciclomedia, vigente del año 2003 al 2011 (SEP, 2011)—, que consistía en aulas equipadas con una computadora, un proyector y pizarrón electrónico, cuyo propósito era que los profesores los emplearan para la enseñanza. Este modelo de equipamiento concentraba el 22.5% de las computadoras contabilizadas. Sin embargo, este equipo ya era antiguo y carecía de mantenimiento, por lo que algunos de sus componentes ya no funcionaran (p. ej. el pizarrón electrónico e internet) o en avanzado deterioro (e.g. los proyectores e impresoras).

Otro modelo de equipamiento, existente en dos de las escuelas (casos ECS y EPA), era el de TIC *itinerante*, el cual consistía en laptops y proyectores destinados para su uso pedagógico y dispuestos para que los profesores los llevaran a las aulas cuando los requirieran. Este equipo se encontraba en buenas condiciones, debido a que era nuevo, no obstante, su uso representaba dificultades para los profesores, debido a que sólo se podía contar con una computadora y un proyector para toda la clase, se carecía de contenido digital para el tratamiento de los contenidos curriculares y trasladar e instalar el equipo en el aula resultaba una tarea engorrosa y tardada.

De las modalidades de equipamiento, la que brindaba más posibilidades para su aprovechamiento pedagógico era el de TIC en el aula, debido a que era un equipo con contenido digital que se encontraba en las aulas de clase, destinado para el uso pedagógico. En cambio, las posibilidades de aprovecha-

[1] Los dos primeros modelos (Laboratorio de informática y TIC en el aula) son retomados de la clasificación hecha por Sunkel, et al (2014), sin embargo, el tercer modelo, TIC itinerante, fue nombrado por nosotros ante la falta de correspondencia con alguno de los modelos ya propuestos.

miento del modelo TIC itinerante eran menores, debido a la dificultad para su instalación en el aula y a su falta de contenido digital para el tratamiento de los contenidos. Por último, el modelo Laboratorio de informática, al que correspondían la mayor cantidad de las computadoras existentes en las escuelas, era el que ofrecía menos posibilidades para su aprovechamiento pedagógico, ya que estaba destinado para clases de cómputo.

Por otra parte, el acceso a internet fue otro componente de la configuración digital de cinco de las escuelas (ver Tabla 1). En tres de ellas (EVGF, EVJ y EJS) se contaba con una red de internet telefónica y del programa "México conectado", pero, el uso del primer servicio era exclusivo para el laboratorio de informática y/o para asuntos administrativos de la dirección escolar, mientras que el segundo servicio era libre, aunque no se utilizaba. Por otra parte, en dos escuelas (casos EJMM y EMR) se contaba con servicio de internet satelital, cuyo servicio resultaba demasiado lento, por lo que no había manera de aprovecharlo. Las características del internet existente en las escuelas, junto con las políticas escolares para su uso limitan su aprovechamiento pedagógico.

Esta revisión, de la configuración digital de las escuelas, muestra un panorama del acceso limitado y desigual de los profesores y estudiantes de educación primaria al uso de la TD para la enseñanza y el aprendizaje, ya que la cantidad y calidad del equipo, la proporción de estudiantes por computadora y las modalidades de equipamiento varían enormemente de una institución a otra. Ante esta situación, sigue existiendo la necesidad de contar con más equipo y software educativo de calidad dispuesto para su uso pedagógico en las aulas.

La formación de los docentes sobre el uso pedagógico de la TD

Los datos obtenidos revelan que la mayoría de los profesores de este estudio, a pesar de carecer de formación y tener un acceso limitado a equipo digital en las escuelas, hacen uso de TD en su práctica para la enseñanza de las matemáticas. De los 67 docentes encuestados 50 (74.6%) señalaron no haber tomado cursos sobre el uso pedagógico de la TD y 16 dijeron que sí (23.8%). Sin embargo, de estos 16 la mitad tomaron cursos relacionados con el uso pedagógico de la TD –siete mencionaron los cursos del programa Enciclomedia y uno señaló un curso sobre el uso de la tecnología y la enseñanza de las matemáticas—, mientras que de los otros ocho casos cuatro indicaron cursos de informática (e.g. "Habilidades básicas en informática, aula de medios y ofimática") y cuatro no especificaron el curso tomado.

A pesar de la escasa o nula formación la mayoría de los profesores (79%) hacía uso de recursos digitales en su clase de matemáticas, aunque esto sucediera con poca frecuencia, el 11% la utilizaba "casi siempre", el 44%

"ocasionalmente", el 24% "rara vez" y el 21% "nunca". Estas cifras se explican por sus limitaciones profesionales –"la falta de cursos", "al desconocimiento de estrategias", "Desconozco muchas herramientas o aplicaciones que puedan usarse en la enseñanza de esa materia", "la falta de preparación", y a las limitaciones para acceder a equipo digital, e.g. "No cuento con computadora y otras herramientas tecnológicas propias en el salón", "Carezco del equipo en la escuela, y mi computadora es la que llevo al salón, además que no hay energía eléctrica", "A que las computadoras están en mal estado y no se cuenta con el servicio de internet", según explicaron los docentes.

Los recursos digitales que se utilizan

De los 67 profesores encuestados 53 mencionaron utilizar TD en su clase (79% de la población), de los cuales solo 41 indicaron los recursos digitales que empleaban (61% de la población). De éstos trece (19%) señalaron el uso de videos, relacionados con conceptos, procedimientos o ejemplos sobre el tema en estudio, como apoyo para explicar, ampliar o ejemplificar el tema; catorce (21%) mencionaron documentos digitales con información del contenido, como "imágenes", "problemas" o "ejercicios"; cuatro hicieron referencia la uso de interactivos, como "programas de suma y resta interactivos" o "Interactivos de Enciclomedia, como los de fracciones, de operaciones aritméticas, de figuras geométricas"; diez (15%) señalaron el uso de material impreso ("ejercicios matemáticos" o "problemas de operaciones básicas") como otro de los recursos digitales a los que recurren para la clase; y, finalmente, dos profesores (3%) mencionaron el uso de la calculadora de bolsillo.

De acuerdo con Drijvers (2015), las funciones didácticas de la TD deben ser el hacer matemáticas, practicar habilidades y desarrollar la comprensión de conceptos, pero, para que tal cosa sea posible, según Sacristán et al. (2010), se requiere de recursos digitales que permitan múltiples representaciones simultáneas, capacidades computacionales y dinámicas, poder comunicativo y conexión de red, aspectos de los que carecían la mayor parte de los recursos digitales utilizados por los docentes. En el caso de los *videos* y los *documentos digitales* son recursos que carecen de capacidades computacionales y dinámicas para explorar, investigar o experimentar ideas matemáticas, por lo que sus posibilidades pedagógicas son limitadas. En cuanto a los interactivos, como juegos de operaciones aritméticas y simuladores, se trata de recursos digitales que poseen múltiples representaciones, pero con escasas capacidades dinámicas para explorar y experimentar ideas matemáticas.

Referente a la *calculadora* de bolsillo se puede decir que se trata de un recurso con capacidades computacionales para la exploración y experimentación (Blanco-Álvarez et al, 2023), aunque carece de múltiples representaciones y

de capacidades dinámicas. Finalmente, el material impreso no corresponde a un recurso digital, por lo que no posee características digitales.

De esta manera, se advierte que los recursos digitales utilizados por los docentes no cuentan con las características necesarias para cumplir con el objetivo didáctico de la TD (Drijvers, 2015), sin embargo, son los recursos digitales que han integrado en su clase de matemáticas, a pesar de su falta de formación y del acceso limitado a estos recursos digitales en sus escuelas. Veamos ahora la manera en que los profesores orquestan y usan este tipo de recursos en su aula para abordar contenidos matemáticos.

Las orquestaciones y usos de los recursos digitales

El análisis de las observaciones de clase y entrevistas a nueve profesores, Armando (Ar), Alicia (Al), Alfredo (Alf), Paola (P), Carmelo (Ca), Cristobalina (Cr), Rosi (R), Alexa (Alx), Hortensia (H); usando seudónimos, con escasa o nula formación sobre el uso de la TD para la enseñanza de las matemáticas y acceso limitado a recursos digitales en sus escuelas, permitió caracterizar las orquestaciones y usos de los recursos digitales en la clase de matemáticas, los cuales se presentan de acuerdo con el tipo de recurso (Ver Tabla 2).

El video

Este recurso fue utilizado por cuatro de los profesores observados (Ver Tabla 2): dos de los videos utilizados (casos H y Ar) consistían en explicaciones del tema, sobre medidas de tendencia central y sobre tipos de ángulos (ver Figuras 1 y 2), acompañadas de animaciones que ilustraban los procedimientos y/o conceptos tratados, uno más de los videos (caso Al) también consistía en la explicación del tema con el apoyo de animaciones, lectura y escritura de números de cuatro cifras, pero esta vez solicitaba la participación oral de los espectadores, dejando pausas para las respuestas, razón por la cual la docente lo llamara video interactivo (ver Figura 3); finalmente, el cuarto video (caso Cr) correspondía a una videograbación de una explicación realizada sobre un pizarrón, acerca de la conversión de una fracción a porcentaje (ver Figura 4). Las orquestaciones y usos de este recurso se dieron bajo distintas configuraciones didácticas y modos de explotación, como se muestra enseguida.

Las configuraciones didácticas utilizadas en el uso del video fueron dos. La primera, utilizada en tres casos (Ar, Cr y AI) consistió en disponer de una computadora y un proyector al centro del aula a fin de poder proyectar el video sobre el pizarrón, mientras los estudiantes permanecían sentados en filas. La segunda configuración, utilizada en un caso (H), se desarrolló en el laboratorio de informática (aula de medios), donde había una computadora por cada uno o dos alumnos, un servidor para administrar los equipos, un

proyector y una pantalla para las proyecciones, además de contar con el apoyo de personal técnico, encargado de esta aula.

Tabla 2

Orquestaciones y uso de los recursos digitales

Recurso Digital	Configuración didáctica	Modo de explotación del recurso digital	Desempeño didáctico (orquestación del recurso)	Uso de la TD (Hughes, 2005)
Video	La computadora y el proyector del equipo Enciclomedia existente en el aula de clases. (casos Ar, Cr) Una laptop y un proyector llevados al aula de clases (caso Al) Aula de medios (Una computadora por cada uno o dos estudiantes y un proyector) con el apoyo del profesor encargado (caso H)	Para corroborar el tema (caso Ar) Para comprender el tema (caso Cr) Para repasar el tema (caso Al) Para retroalimentar el tema (caso H)	Explica-el-tema (casos Ar, Cr, H y Al) Explica-la-pantalla (caso Al) Repite-la-pantalla (caso Al)	Reemplazo (casos Ar, Cr, H, Al)
Documentos digitales	Aula de medios (Una computadora para cada uno o dos estudiantes y un proyector) con el apoyo del profesor encargado (casos Ro, H y Alx) Una laptop y un proyector llevados al aula de clases y una calculadora del bolsillo para cada niño (caso Ca)	Para retroalimentar el tema (casos Ro, H y Alx) Para plantear problemas y discutir su solución, auxiliados con la calculadora (caso Ca)	Copia-la-pantalla (casos Ro, H y Alx) Discute-la-pantalla (caso Ca)	Reemplazo (casos Ro, H y Alx) Amplificador y Transformador (caso Ca)
Interactivo	Una laptop y un proyector llevados al aula de clases (casos Alf y Ca) Aula de medios (Una computadora para cada uno o dos estudiantes y un proyector) con el apoyo del profesor encargado (casos H y Alx)	Para practicar habilidades (casos Alf, Ca y H) Para ejemplificar el tema (caso Alx)	Demostración-técnica (Alf, Ca) Explica-la-pantalla (Alf, Ca, Alx) Sherpa-trabajando (Alf, Ca, H)	Reemplazo (casos Alx y H) Amplificador (casos Alf, Ca, H y Alx)
Material impreso	Ninguna (caso P)		---	---
Calculadora	Una laptop y un proyector llevados al aula de clases y una calculadora del bolsillo para cada niño (caso Ca)	Para apoyar la resolución de los problemas proyectados (caso Ca)	Detecta-y-muestra (caso Ca)	Amplificador y Transformador (caso Ca)

Por otra parte, el modo de explotación del video fue para distintos fines: uno para corroborar el tema (caso Ar), es decir, para que los estudiantes confirmaran los conceptos y procedimientos estudiados durante la clase; otro uso fue para retroalimentar el tema, es decir, proporcionando a los estudiantes más información sobre el contenido estudiado (caso H); un tercer uso fue para repasar el tema, es decir, para trabajar por segunda ocasión el tema visto (caso Al); y un cuarto uso fue para comprender el tema (caso

Cr), de modo que los estudiantes se apropiaran de los conceptos y/o procedimientos de la clase.

Respecto al desempeño didáctico, se identificaron tres maneras de orquestar el video: *explica el tema*, orquestación empleada por los cuatro docentes que utilizaron este recurso (Ar, Al, Cr y H), que consistió en la reproducción del video para que los estudiantes vieran, escucharan y, en el caso del video interactivo (caso Al), participaran en la explicación que se presentaba, mientras los profesores supervisaban este proceso; *explica la pantalla* fue otra manera de orquestar el video, que consistió en detenerlo en un punto para dar su propia explicación de lo ya explicado y, a la vez, cerciorarse de la comprensión del tema a través de preguntas (caso Al); y una tercera forma de orquestar el video fue *repite la pantalla*, que consistió en replicar con los alumnos las actividades mostradas en el video (caso Al), a fin de poner en práctica lo explicado y favorecer su comprensión (lectura y escritura de números de cuatro cifras).

Figura 1

Video animado con explicación sobre medidas de tendencias central. (Caso Ar)

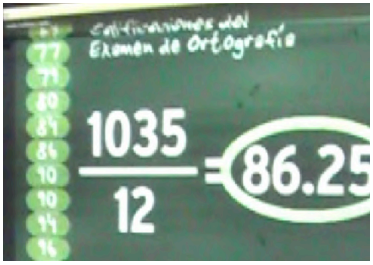
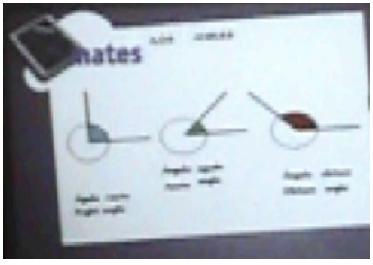


Figura 2

Video animado con explicación sobre los tipos de ángulos (caso H)



Esta orquestación del video revela un uso de la tecnología como reemplazo (Hughes, 2005), ya que los videos fueron empleados para realizar el mismo tipo de tareas, que suelen lleva a cabo los profesores sin el uso de este recurso, como explicar, ejemplificar y completar información sobre el tema en estudio, actividades que, de acuerdo con Sandoval (2017), corresponden a este uso de la TD.

Figura 3
Video interactivo sobre lectura y escritura de números de cuatro cifras. (caso Al)

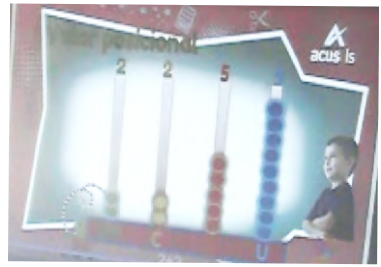
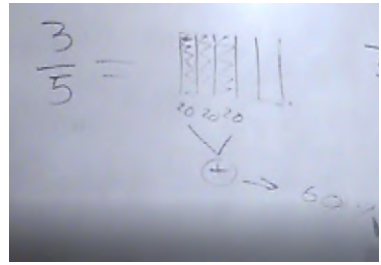


Figura 4
Video con explicación a mano alzada sobre el procedimiento para convertir una fracción a porcentaje. (Caso Cr)



Documentos digitales

Este recurso, utilizado por cuatro de los profesores observados (Ro, H, Alx y Ca), consistió en documentos digitales con información escrita y gráfica sobre el tema en estudio. En tres casos (Ro, H y Alx) se trataba de documentos enciclopédicos con definiciones, ejemplos e ilustraciones sobre el tema (ver Figura 5), mientras que en un caso (Ca) se trataba de un documento con problemas escritos acompañados de ilustraciones (ver Figura 7).

La configuración didáctica utilizada para el uso de este recurso consistió, en tres de los casos (Ro, H y Alx), en el equipo digital del laboratorio de informática (una computadora por cada uno o dos alumnos), donde se contó con el apoyo del responsable de este espacio. En el otro caso (Ca) se dispuso de un proyector y una laptop en el aula de clases (TIC itinerante), ubicados al centro del aula para proyectar el documento en el pizarrón, además de incorporar el uso de calculadoras de bolsillo para cada uno de los niños.

El modo de explotación de los documentos digitales permitió identificar dos objetivos didácticos: el de retroalimentar un tema ya estudiado (casos Ro, H y Alx) y el de plantear y resolver problemas para el estudio de un tema en desarrollo (caso Ca).

El desempeño didáctico de las tres profesoras que emplearon este recurso consistió en dar acceso a los estudiantes a documentos digitales con infor-

mación escrita y gráfica sobre el tema de estudio, la cual fue transcrita en sus cuadernos de trabajo (ver Figura 6), de modo que esta orquestación se identificó como *copia la pantalla*. Por otra parte, un segundo tipo de orquestación identificada fue discute la pantalla, la cual consistió en proyectar algunos problemas escritos (ver Figura 7), los cuales se analizaron y resolvieron de manera grupal con el apoyo de la calculadora de bolsillo. Esta última forma de orquestar el recurso digital se corresponde con la identificada por Drijvers et al. (2010), debido a que en ambos casos se discute lo que se muestra en la pantalla de la computadora, aunque la naturaleza de los recursos digitales utilizados fuera distinta –documentos digitales y calculadoras de bolsillo en este caso y un software con posibilidades dinámicas y computacionales en el otro (Algebra Arrows). En consecuencia, las discusiones también fueron distintas, pues con el software la discusión giró en torno a los elementos matemáticos evidenciados en el ambiente digital, mientras que el caso que aquí se presenta la discusión giró en torno a las estrategias de solución de los problemas.

Figura 5
Documento digital con información enciclopédica sobre lectura y escritura de fracciones (caso Ro)

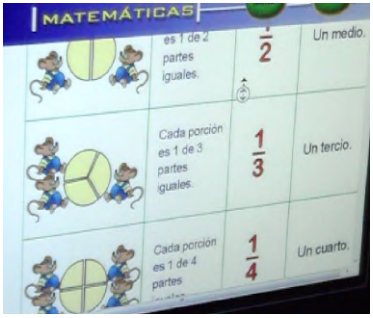
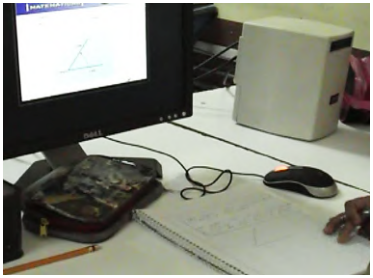


Figura 6
Documento digital con información enciclopédica sobre lectura y escritura de fracciones (caso Ro)



Estas orquestaciones de los documentos digitales muestran dos usos de la TD, como *reemplazo* (casos Ro, H y Alx), cuando se utilizó para transcribir

en el cuaderno la información escrita y gráfica de los documentos digitales (ver figura 6), una práctica cotidiana en la clase, y como *amplificador-transformador* (caso Ca) cuando se utilizó de manera combinada con la calculadora de bolsillo para analizar los problemas y explorar soluciones, actividades que, de acuerdo con Sandoval (2017), se enmarcan en el uso transformador de la TD.

Figura 7

Niños en el aula discutiendo y resolviendo los problemas del documento digital proyectado, auxiliándose de calculadoras de bolsillo (caso Ca)



Interactivos

Este recurso, utilizado por el 21% de los profesores, fue empleado en cuatro de las clases observadas. En dos casos (Ca y Alf) se trató de videojuegos para realizar operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicación y división), donde la velocidad de respuesta era importante para ganar (ver Figuras 8 y 9). En otro caso (Alx) se trató de un software que permitía la manipulación gráfica y numérica de fracciones (ver Figura 10) y en el cuarto caso (H) la aplicación posibilita la medición de ángulos mediante la manipulación de un transportador digital (ver Figura 11).

La configuración didáctica utilizada para el uso de los interactivos digitales, en dos de los casos (Alx y H), consistió en el equipamiento digital del laboratorio de informática, en los otros dos casos (Ca y Alf) se dispuso una laptop y un proyector al centro del aula, para proyectar en el pizarrón.

Respecto a los modos de explotación, el uso de los interactivos tuvo la intención de practicar habilidades, de cálculo mental en los casos Ca y Alf y de medición de ángulos en el caso H, así como ejemplificar el tema de la clase, fracciones equivalentes en el caso Alx (ver Figura 10).

Finalmente, respecto al desempeño didáctico, las orquestaciones de los interactivos se corresponden con tres de las reportadas por Drijvers et al. (2010): *Demostración técnica* (casos Alf y Ca), cuando los docentes explicaban a los estudiantes el uso de la computadora o del interactivo; *Explica la pantalla* (casos Alf, Ca y Alx), cuando explicaban las tareas matemáticas solicitadas en el juego (caso Alf y Ca) o las representaciones gráficas y

numéricas mostradas con el software (caso Alx); y *Sherpa trabajando* (casos Alf, Ca y H), cuando ponían a algunos niños a cargo del manejo de la computadora, ya fuera para realizar el juego de manera grupal (caso Alf y Ca) o para demostrar el uso del software (caso H).

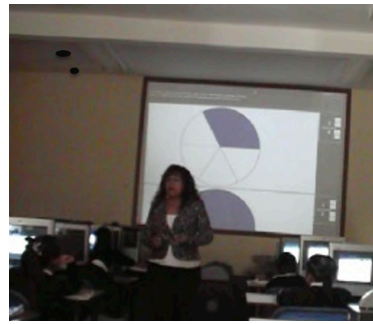
Figura 8
Juego interactivo de multiplicaciones y divisiones (caso Ca)



Figura 9
Juego interactivo de sumas y restas (caso Alf)



Figura 10
Interactivo de fracciones (caso Alx)



Estas orquestaciones de los interactivos muestran, en términos de Hughes (2005) y Sandoval (2017), dos usos de la TD: *como reemplazo*, cuando el interactivo solo se utilizó únicamente para explicar y ejemplificar el tema –fracciones equivalentes (caso Alx), o para reproducir una actividad cotidiana –medir ángulos con un transportador digital (ver Figura 11), y como *ampli-*

ficadora cuando se utilizó para hacer más eficiente el estudio del tema, por ejemplo, al ejercitar el cálculo mental con el apoyo de videojuegos (casos Alf y Ca), recursos que incentivaban la participación de los estudiantes y les permitían experimentar y verificar sus respuestas, o como el simular fracciones equivalentes para apoyar la explicación (caso Alx).

Figura 10
Interactivo para la medición de ángulos (caso H)



Material impreso

El uso de este recurso se identificó en la clase de una profesora (caso P), quien lo consideraba un recurso digital, debido a que se trató de un material obtenido de internet, que consistió en una hoja impresa con información numérica para realizar un juego de cálculo mental sobre sumas y restas. Dada la naturaleza de este recurso no se presenta un análisis desde la perspectiva de la orquestación o de los usos de la TD, sin embargo, resulta llamativo que una parte importante de los profesores (15%) consideren este material como un recurso digital, lo que refleja un desconocimiento atribuible a la falta de formación docente.

La calculadora

Este recurso digital fue empleado en combinación con documentos digitales en una de las clases observadas (caso Ca), como se explicó en el apartado relacionado con el uso de documentos digitales. Su orquestación denominada *discute la pantalla*, de acuerdo Sandoval (2017), se corresponde con el uso transformador de la TD), ya que se utilizó para explorar, experimentar y probar soluciones a los problemas proyectados con la computadora.

Esta revisión de las orquestaciones y usos de los recursos digitales evidencia la manera en que los profesores han integrado la TD en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en un contexto marcado por la falta de formación y de un acceso limitado a esta tecnología en sus escuelas, derivado del escaso equipamiento digital de las escuelas y de las políticas escolares que regulan su uso. Por otra parte, el desconocimiento de los docentes, derivado de su falta de formación, explica en gran medida el empleo de recursos digitales

técnicamente limitados (e.g. el video, documentos digitales), así como las orquestaciones de estos recursos (e.g. copia-la-pantalla, repite-la-pantalla, explica-la-pantalla, explica-el-tema), enmarcadas principalmente en el uso de la TD como reemplazo y como amplificador, pues estuvo orientado al reconocimiento de conceptos, procedimientos y a promover habilidades (e.g. cálculo mental, escritura de números, escritura de fracciones), pero no a hacer matemáticas, como se espera (Drijvers et al., 2010) .

Conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran un panorama de las condiciones de acceso que tienen los profesores y alumnos a la TD en las escuelas primarias, así como de las condiciones de formación y experiencia de los profesores sobre el uso de esta tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A partir de ello se presentan las siguientes conclusiones:

- Considerando que lo ideal es contar con una computadora por cada estudiante (Sunkel et al., 2013), los datos expuestos muestran que el acceso a TD en las escuelas primarias es muy limitado y desigual, pues mientras que en la escuela con mejores condiciones existía una computadora por cada diez alumnos en la escuela con peores condiciones había una computadora por cada 170 alumnos.
- La mayor parte de las computadoras existentes en las escuelas (59%), concentradas en los laboratorios de cómputo (aula de medios), no estaba destinada a su uso didáctico, sino para clases de computación. En contraste, gran parte del equipo digital destinado para el uso pedagógico se encontraba en mal estado y/o carecía de contenido digital educativo.
- El acceso a internet en las escuelas era limitado o inexistente. Los datos revelaron que, en cinco de las diez escuelas, donde se llevó a cabo el estudio diagnóstico, no se contaba con el servicio de internet, mientras que en las otras cinco sí, aunque en dos de ellas el servicio era satelital y prácticamente inservible, y en tres eran aceptable pero no estaba disponible para profesores y alumnos.

Con relación a la formación y experiencia de los profesores sobre el uso de TD para la enseñanza de las matemáticas se hacen las siguientes conclusiones:

- A pesar de la falta de formación de los profesores de educación primaria, sobre el uso de la TD para la enseñanza de las matemáticas, la mayoría ha integrado recursos digitales en su práctica. Los datos del estudio muestran que casi la totalidad de los profesores participantes en el estudio (66 de los 67 participantes) carecían de formación específica, sin embargo, el 79% de ellos utilizan recursos digitales en su clase de matemáticas, aunque con poca frecuencia.

- La falta de formación de los profesores y el acceso limitado a TD en las escuelas explican el uso de recursos digitales técnicamente restringidos para la exploración y experimentación de ideas matemáticas, y la manera de orquestar estos recursos en la clase (explica el tema, explica la pantalla, repite la pantalla, demostración técnica y sherpa trabajando), que se corresponde con usos limitados de la tecnología, como reemplazo y como amplificador principalmente.
- Las orquestaciones y usos de la TD se corresponden con el tipo de recurso empleado, ya que entre mejores características técnicas posea el recurso digital mayores serán las posibilidades para su orquestación y uso. Por ejemplo, en el caso de los documentos digitales y los videos no permiten emplear orquestaciones como discute la pantalla orientados a un uso transformador de la tecnología.
- Las orquestaciones de los recursos digitales en la clase de matemáticas evidenciaron usos limitados de la tecnología. En las clases observadas se identificaron orquestaciones de los recursos digitales (e.g. Explica el tema, Explica la pantalla, Repite la pantalla, Copia la pantalla) que muestran el uso de la TD como reemplazo y como amplificador principalmente.

En suma, los resultados de la investigación muestran que la orquestación y uso de la TD en la clase de matemáticas responden a diversos factores, a la formación de los docentes, a sus percepciones y actitudes; al acceso a TD en la escuela, a los recursos digitales empleados, y a las políticas escolares que regulan su uso.

Por otra parte, las orquestaciones y usos de la TD identificados en este estudio evidencian que, en el nivel de educación primaria, persiste un uso limitado y subaprovechamiento de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas, tal como lo han documentado otros investigadores en México (Santiago et al., 2013; Trigueros et al., 2014) y como se ha señalado en foros internacionales (Abboud-Blanchard, 2016; Ball et al., 2018). Esta situación requiere el trabajo conjunto de investigadores, profesores y responsables del sistema educativo mexicano, para emprender acciones que incidan en la formación de los profesores y en los factores externos que limitan la integración de la TD en la enseñanza de las matemáticas, una tarea que sigue estando pendiente a casi medio siglo de haberse iniciado.

Un objetivo de la investigación de diseño realizada, de la cual fue parte este estudio diagnóstico, fue precisamente la de promover la formación de los profesores, de ahí que los resultados aquí presentados permitieron el diseño e implementación de un curso sobre el uso de recursos digitales (software de programación, de geometría dinámica y simuladores) para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, dirigido a los docentes participantes en el estudio diagnóstico.

Agradecimientos

A los profesores de las escuelas primarias que me permitieron acceder a ellas y conocer su trabajo.

Referencias

Abboud-Blanchard, M. (2014). Teachers and Technologies: Shared Constraints, Common Responses. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 297–317). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_1

Abboud-Blanchard, M. (2016). Digital Technology and Mathematics Education: The Teacher Perspective in Mathematics Education Research—A Long and Slow Journey Still Unfinished. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 143–153). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_7

Artigue, M. (1997) Le Logiciel 'Derive' comme revelateur de phenomenes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics 33*(2), 133–169 (1997). https://doi.org/10.1023/A:1002996128978

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. En D. Tinsley & D. C. Johnson (Eds.), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 121–129). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35287-9_15

Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, H.-S., Tabach, M., & Vale, C. (Eds.). (2018). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Mosquera, E. & Mejía-Palomino, M. (2023, agosto 4). *La Calculadora en Educación Primaria. Una propuesta de enseñanza más allá de los algoritmos.* [Ponencia] Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Lima, Perú.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Drijvers, P. (2015) Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). en S. J. Cho (Ed.) *Select Regular Lectures from the 12th International Congress of Mathematics Education* (pp. 332-342). Springer https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Enríquez, H. & Sacristán, A.I. (2019). *Cómo Profesores de Primaria Enseñan Matemáticas con Tecnología Digital: Dos Estudios de Caso de una Zona de Oaxaca* [Ponencia en coloquio]. 5º Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa, DME-Cinvestav.

Enríquez, H., & Sacristán, A. I. (2020). Integrating digital resources to the documentation system of a mathematics teacher in a Mexican rural primary-school. En A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias, (Eds.) *Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2198–2207). PME-NA. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020-375

Hughes, J. (2005). The Role of Teacher Knowledge and Learning Experiences in Forming Technology-Integrated Pedagogy. *Journal of Technology and Teacher Education, 13*(2), 277–302. https://www.learntechlib.org/primary/p/26105/

Laborde, C. (2002) Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283–317. https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8

Papert, S. (1981). *Desafío a la mente. Computadoras y Educación.* Ed. Galápago.

Ruthven, K., Hennessy, S. & Deaney, R. (2005). Incorporating dynamic geometry into secondary mathematics: teacher perspectives and practice. En D. Hewitt, & A. Noyes (Eds), *Proceedings ofthe sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick* (pp. 152–159).

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Frienlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno, A., & Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning –and Learning Trajectories–of Mathematical Concepts. En C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, pp. 179–226). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_9

Sandoval, I. (2017). Matemáticas y tecnología digital: enseñanza y aprendizaje en la era digital. En M. Arredondo, (Coord.), *¿qué aprender? ¿cómo evaluar?* (pp. 126–133). UPN.

Santiago, G., Caballero, R., Gómez, D., & Domínguez, A. (2013). El uso didáctico de las TIC en escuelas de educación básica en México. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 43*(3), 99–131. https://www.redalyc.org/pdf/270/27028898004.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Libro Blanco Programa "Enciclomedia" 2006-2012*. SEP.

Sunkel, G., Trucco, D., & Espejo, A. (2013). *La integración de las tecnologías digitales en las escuelas de América Latina y el Caribe: Una mirada multidimensional.* Cepal.

Thomas, M. O. J., & Palmer, J. M. (2014). Teaching with Digital Technology: Obstacles and Opportunities. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 71–89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_4

Trigueros, M., Lozano, M.-D., & Sandoval, I. (2014). Integrating Technology in the Primary School Mathematics Classroom: The Role of the Teacher. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 111–138). Springer. https://doi.org/qbvn

Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281–307. https://doi.org/bhdzmj

Virmani, R., & Williamson, P. (2016). Lessons for teacher educators about learning to teach with technology. En C. Kosnik, S. White, C. Beck, B. Marshall, A. L. Goodwin, & J. Murray, (Eds.), *Building bridges: rethinking literacy teacher education in a digital era* (pp. 77–90). Springer.

Wachira, P., & Keengwe, J. (2011). Technology Integration Barriers: Urban School Mathematics Teachers Perspectives. *Journal of Science Education and Technology, 20*(1), 17–25. https://doi.org/10.1007/s10956-010-9230-y

“Tendencias en la educación matemática 2025", con la edición a cargo de Estela Juárez-Ruiz y Lidia Aurora Hernández Rebollar, fue publicado en formato digital PDF por Editorial de Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. La publicación tuvo lugar en la Ciudad de México en el año 2025.

La investigación en educación matemática continúa renovándose al ritmo de los desafíos que plantea la enseñanza, la incorporación de tecnologías y la formación docente. Este libro reúne once trabajos presentados en el XI Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 11), organizado por el Posgrado en Educación Matemática y el Cuerpo Académico Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Los capítulos, revisados mediante arbitraje doble ciego, se agrupan en cuatro ejes que reflejan tendencias actuales del campo: sentido numérico, conceptos geométricos en el nivel medio superior, pensamiento funcional y comprensión gráfica, y formación docente. Cada apartado ofrece resultados que abordan el aprendizaje, la enseñanza y la reflexión sobre la práctica desde perspectivas teóricas y metodológicas diversas.

Esta obra constituye un panorama actualizado de la investigación educativa en matemáticas en contextos latinoamericanos y una invitación a fortalecer los lazos entre la práctica docente y la generación de conocimiento didáctico.

SOMIDEM
Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

9 786075 981970



Estela de Lourdes Juárez Ruiz es Doctora en Ciencias Matemáticas; profesora-investigadora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; miembro del cuerpo académico "Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática"; pertenece al Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras



Lidia Aurora Hernández Rebollar es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); profesora de tiempo completo y, actualmente, coordinadora del Posgrado en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras.