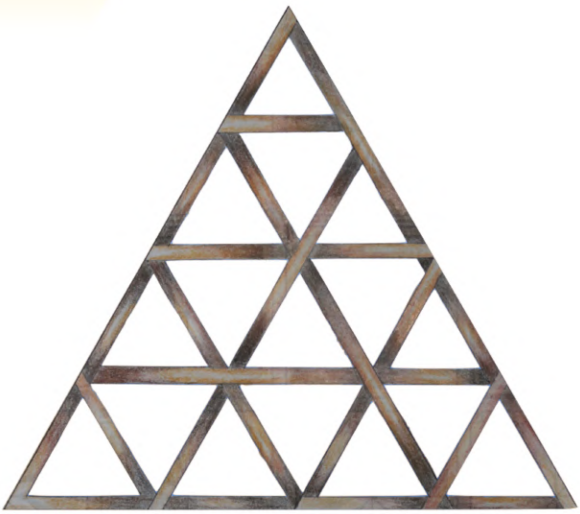
TENDENCIAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2024



EDITORAS

Estela de Lourdes Juárez Ruiz

Lidia Aurora Hernández Rebollar

Editorial SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

TENDENCIAS
en la educación
MATEMÁTICA
2024

SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

Tendencias en la Educación Matemática 2024

Editoras:

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Autores:

Alejandro Esparza Godinez
Carlos Valenzuela García
Adrián Gómez Árciga
Claudia Margarita Orozco Rodríguez
Eddie Aparicio-Landa
Landy Sosa-Moguel
Camila Magaña Flores
Maleni Padilla Pérez
Ingrid Quilantán Ortega
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
Josip Slisko
Ljerka Jukić Matić
Martha Patricia Velasco Romero
Verónica Vargas Alejo
Luis Montero Moguel
Marta E. Aguiar Barrera

SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

Cada capítulo de este libro ha pasado por un riguroso proceso de evaluación para su publicación, implementando el sistema de dictaminación de doble ciego. Este método consiste en que tanto los autores como los revisores permanecen en anonimato durante todo el proceso, garantizando así una evaluación objetiva basada únicamente en la calidad y el mérito del contenido presentado. La evaluación fue realizada por académicos especialistas en cada uno de los temas abordados, quienes con su amplia experiencia y conocimientos contribuyeron a enriquecer y validar el contenido. Esta rigurosa práctica cumple con los estándares de transparencia editorial y ética, asegurando la integridad de los procesos y el valor académico de los trabajos publicados.

Comité editorial

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.

Comité Científico Revisor

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. (SOMIDEM)

Título: Tendencias en la Educación Matemática 2024

Primera Edición, 2024 / Editorial SOMIDEM

Clasificación DEWEY. Materia: 001.4 – Investigación.
Tipo de Contenido: Ciencia y tecnología.

Clasificación thema: JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes.
Tipo de soporte: libro digital descargable

ISBN: 978-607-59819-4-9
DOI de la obra completa: https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02

Editorial SOMIDEM
Calle Adolfo Prieto
Colonia Del Valle
C.P. 03100, Alcaldía Benito Juárez
Ciudad de México
Correo electrónico: editorialsomidem@gmail.com
Sitio de internet: http://editorialsomidem.org.mx/
Registrado ante INDAUTOR como entidad editora: MID131003

Corrección de estilo y diseño editorial: Ingrid Eleonor Castañeda González
ingrideleonor@gmail.com
Diseño de portada: SOMIDEM

Cita de la obra completa en APA 7:
Juárez Ruiz, E. L., & Hernández Rebollar, L. A. (Ed.). (2023). *Tendencias en la Educación Matemática 2024.* Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02

Índice

Presentación

Estimado lector,

La educación matemática es un campo disciplinar en constante evolución y crecimiento, y algunas de sus tendencias actuales en investigación se presentan en este libro. Los capítulos que lo conforman fueron expuestos en el X Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación" (TEMBI 10), realizado en noviembre del año 2023. Estos trabajos pasaron por una revisión doble ciego, llevada a cabo por un conjunto de expertos en educación matemática.

Hemos identificado cuatro tendencias en investigación, cada una con dos trabajos. La primera, acerca de la creatividad en la educación matemática; la segunda versa sobre la comprensión de conceptos matemáticos; la tercera, sobre la construcción de modelos mentales en matemáticas; y finalmente, la cuarta concerniente al papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas. A continuación detallamos cada una de ellas.

Tendencia sobre la creatividad en educación matemática

Con respecto a esta tendencia, el primer capítulo presenta los resultados de una investigación exploratoria cuyo objetivo fue analizar el pensamiento creativo de un grupo de estudiantes y profesores en activo al resolver problemas geométricos con diversas soluciones. La base de la investigación fue un taller compuesto por dos sesiones de trabajo. En la primera sesión se presentaron a los participantes argumentos sobre la importancia del pensamiento creativo para la vida personal, profesional y social, y se incluyeron ejemplos de problemas matemáticos que promueven el pensamiento creativo. En la segunda sesión los participantes resolvieron problemas geométricos con cerillos, aportando sus soluciones de forma colaborativa en tiempo real. Los resultados evidenciaron soluciones no reportadas en la literatura, lo cual demuestra que las actividades con cerillos pueden ser un tipo de tareas idóneas y divertidas para fomentar la creatividad en las aulas.

En el segundo capítulo en esta tendencia, titulado “Fostering mathematical creativity in school: Selected approaches illustrated with examples”, la autora presenta ejemplos de algunos enfoques aplicables en el aula que fomentan la creatividad matemática, como la apertura, las tareas matemáticas abiertas, las tareas de soluciones múltiples, el planteamiento de problemas y el uso de trípticos que simbolizan la conexión del humor con el descubrimiento y el descubrimiento con el arte. Con respecto a estos últimos, la primera parte de humor tiene como objetivo despertar la risa y la alegría; la segunda de descubrimiento conduce a una comprensión más profunda; y la tercera introduce al estudiante al mundo de la maravilla y la sorpresa. Asimismo, establece el ambiente en el aula como una condición fundamental para el desarrollo de la creatividad matemática, pues fomenta la fluidez y flexibilidad en los estudiantes, componentes importantes de la creatividad. Concluye con algunas reflexiones en torno al papel de los profesores para fomentar la creatividad en el aula, afirmando que se necesita una nueva pedagogía que fomente un ambiente abierto en el aula, integre actividades dirigidas a la creatividad y se base en ideas interdisciplinarias y experiencias del mundo real.

Tendencia de estudios sobre la comprensión de conceptos matemáticos

En esta tendencia se presentan dos investigaciones que aportan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, una en el nivel de la educación secundaria, con el aprendizaje de función lineal, razones y proporciones y la otra, con el estudio de la comprensión de propiedades de la integral definida en los niveles medio superior y superior.

El capítulo 3, “Abordando la educación para el desarrollo sostenible desde la modelación matemática” se enmarca en una de las tendencias más actuales y solicitadas por los profesores de matemáticas, pues aborda el aprendizaje de la función lineal, proporciones y razones desde la perspectiva de modelos y modelación en un contexto de sostenibilidad ambiental. Considerando la necesidad de fomentar el desarrollo de conocimiento, conciencia y acción en la educación de los individuos para empoderar a las personas para transformarse a sí mismas y transformar las sociedades, planteada por la UNESCO, los autores eligieron una situación de tala de árboles en una comunidad indígena para el diseño de su actividad. Es así como esta investigación contribuye a lo que también solicita la Nueva Escuela Mexicana, ya que ofrece una forma de trabajar conceptos matemáticos a partir de situaciones que involucren aprendizajes de otras ramas del conocimiento, en este caso, de la sostenibilidad ambiental. Aunque la actividad fue aplicada a estudiantes de posgrado, los conceptos matemáticos necesarios para resolver la problemática son del nivel básico (secundaria) y del medio superior. Por esta razón, la investigación que se reporta en este capítulo podría inspirar a los profesores de matemáticas de dichos niveles educativos.

En el capítulo 4 titulado "Aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en estudiantes para profesor de matemáticas" los autores analizan el aprendizaje conceptual de contracción y traslación de la integral definida de un grupo de futuros profesores de matemáticas. Para alcanzar su objetivo, los autores diseñaron una secuencia de tareas y, tanto el diseño como el análisis de las mismas se fundamentaron en la abstracción reflexiva, aunque también consideraron diferentes representaciones semióticas, en particular, la geométrica y la analítica. Los autores exponen que las propiedades de contracción y traslación de la integral definida tienen una atención mínima en los cursos de Cálculo Integral, a pesar de ser importantes para el estudio de la invarianza de acumulaciones. También, que con las tareas resueltas por los estudiantes lograron el aprendizaje de las propiedades por abstracción reflexiva, llegando, en el caso de la traslación, a su generalización para cualquier tipo de funciones. Por estas razones, este capítulo resulta de gran utilidad para profesores de nivel medio superior y superior, pues al reportar un ciclo completo de diseño, implementación y análisis, ofrece la oportunidad de replicar este estudio. Así, los autores aportan a la docencia y a la investigación en educación matemática.

Tendencia sobre la construcción de modelos mentales en el aprendizaje de las matemáticas

La importancia de la construcción de objetos mentales en matemáticas se refleja en los dos capítulos que se presentan en esta tendencia. El capítulo 5 titulado "Objetos mentales sobre números decimales: Un estudio con alumnos de educación secundaria" se sustenta en la teoría de los modelos teóricos locales, que permite al investigador centrar el estudio de un objeto matemático en sujetos y situaciones específicas. El trabajo se centra en la construcción e implementación en estudiantes de segundo de secundaria (13-14 años) de los cuatro componentes de esta teoría, el modelo de competencia formal, el modelo de enseñanza, el modelo de comunicación y el modelo de cognición. Al desarrollar estos modelos para el tema de números decimales con actividades y situaciones específicas, proporciona información valiosa a docentes de matemáticas e investigadores, acerca de cómo abordar este tema atendiendo a las dificultades reportadas en la literatura.

El capítulo 6 titulado "El problema del árbol quebrado: La relación entre los dibujos generados por los estudiantes y sus respuestas" presenta el análisis de las representaciones gráficas situacionales y matemáticas que realizaron estudiantes de bachillerato y su relación con las respuestas proporcionadas por ellos, al resolver el típico problema del árbol caído. Los investigadores discriminan entre un dibujo situacional, que es un dibujo de bajo nivel de abstracción, llamado pictórico, y un dibujo matemático, que es el que estructura las variables del problema buscando una figura o modelo matemático en donde se puede planificar la solución. Los resultados indicaron que hubo un avance significativo en las respuestas grupales con respecto a las realizadas individualmente, y que los dibujos matemáticos, dobles (dos representaciones gráficas separadas conformadas por un dibujo situacional y un dibujo matemático) y mixtos (un dibujo matemático encima de un dibujo situacional) predominaron con respecto a los dibujos situacionales, siendo en estos últimos donde se dieron mas respuestas incorrectas, confirmando lo reportado en la literatura. Esta investigación fortalece la idea de que el desarrollo de habilidades en la creación de representaciones matemáticas en los estudiantes puede contribuir en su proceso de resolución de problemas matemáticos.

Tendencia sobre las herramientas tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas

La incorporación de la tecnología en el aula de matemáticas es una tendencia que se acrecentó con la pandemia. Sin embargo, desde hace más de dos décadas se investiga su efecto en el aprendizaje y se proponen diferentes formas de uso.

Es por esto que esta sección resulta muy interesante, ya que contiene dos capítulos, que reportan el uso de GeoGebra y la hoja de cálculo como herramientas didácticas para el aprendizaje de la función logística y los sistemas de ecuaciones lineales, respectivamente.

En el capítulo 6 titulado, “GeoGebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística”, se buscó promover la comprensión de la función logística en un grupo de estudiantes de tercer grado de secundaria. Las autoras destacan la importancia de estudiar el aprendizaje de la función logística en el nivel básico de secundaria, ya que esta se utiliza en la materia de ciencias del primer año de este nivel y el estudio de funciones, en la asignatura de matemáticas, se posterga al tercer año. Debido a esto, ellas identificaron la necesidad de diseñar actividades que mitigaran las dificultades de los estudiantes al abordar funciones que no son ni lineales ni cuadráticas. La investigación se fundamentó en la modelización y se apoyó en GeoGebra, siguiendo la recomendación de diversos autores que han explorado el uso de esta herramienta por ser un software interactivo que relaciona conocimientos de cálculo, geometría, álgebra y estadística para la enseñanza de la matemática escolar en diversos niveles educativos. Uno de los resultados más importantes de su investigación fue que los estudiantes reconocieron propiedades y representaciones características de la función logística, y establecieron vínculos de esta función con otros conceptos matemáticos. Para finalizar, las autoras también plasmaron recomendaciones para los docentes que deseen replicar las actividades implementadas.

En el capítulo 7 titulado, “La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo”, los autores presentan una investigación muy relevante en la que la pregunta guía fue ¿cómo un grupo de futuros profesores resuelven un problema mediante la hoja de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales? Los informantes fueron cuatro estudiantes de un posgrado en enseñanza de las matemáticas, el tipo de estudio fue un caso de tipo instrumental y el marco conceptual fue el propuesto por Artigue y conocido como Tarea-Técnica-Teoría. Así, este estudio no solo informa de las técnicas que emplearon los profesores entrevistados para abordar un problema que involucra sistemas de ecuaciones lineales y a la hoja de cálculo, sino que nos acerca a la forma en que ellos vivieron la experiencia diseñada por los autores. En los resultados se menciona que algunos docentes utilizaron técnicas básicas como organización de los datos, reconocer las incógnitas y establecer relaciones, así como trabajo rutinario en papel y lápiz. Otros, incorporaron a la hoja de cálculo y GeoGebra. En la discusión grupal los participantes analizaron las diferentes técnicas y las compararon entre ellas y con las usadas en la literatura. Por lo que, los autores concluyen que, las reflexiones hechas en la discusión grupal, llevó a los docentes a valorar el uso de la hoja de cálculo en la construcción de significados algebraicos y el uso de objetos simbólicos.

Esperamos que los resultados de investigación que aquí se presentan sean de mucha ayuda, tanto para su desarrollo profesional como en sus investigaciones.

El Taller Internacional TEMBI es organizado anualmente por el Posgrado en Educación Matemática y el Cuerpo Académico de Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México.

Estela Juárez-Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar
(Editoras)

Puebla de Zaragoza, noviembre de 2024

PRIMERA TENDENCIA

CREATIVIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El pensamiento creativo en la resolución de dos acertijos geométricos con cerillos: Los resultados prometedores de un taller

Josip Slisko [1]

Resumen

El pensamiento creativo es una de las más importantes habilidades del siglo XXI. En la educación matemática se puede fomentar mediante la resolución de problemas que permiten diferentes soluciones. Aunque en los acertijos geométricos con cerillos es posible buscar y encontrar diferentes soluciones, la gran mayoría de los autores de libros y de páginas de internet no las mencionan. En este capítulo se presentan los resultados prometedores de un taller sobre el pensamiento creativo en la educación matemática, realizado en el X taller internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación" TEMBI. En la segunda sesión del taller, los participantes buscaban "en tiempo real" diferentes soluciones posibles para dos acertijos geométricos con cerillos. El primero era de Sophus Tromholt publicado en su libro "Juegos con cerillos" en el año 1889. El segundo era un popular acertijo que se presenta actualmente en muchas páginas de internet. La creatividad de las soluciones presentadas por los participantes superó tanto la creatividad individual de Tromholt como la creatividad colectiva de muchos presentadores del segundo acertijo en internet. Estos resultados son una evidencia prometedora del gran potencial que tienen los acertijos geométricos para que los estudiantes practiquen y mejoren su pensamiento creativo.

Palabras clave

Acertijos con cerillos, Pensamiento creativo, Fomento de creatividad, Soluciones múltiples.

---

[1] jslisko@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
https://orcid.org/0000-0002-5805-4808

Slisko, J. (2024). El pensamiento creativo en la resolución de dos acertijos geométricos con cerillos: Los resultados prometedores de un taller. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 19–36). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-01

Introducción

El siglo XXI se caracteriza por muchos cambios tecnológicos, que son profundos, acelerados y, a menudo, inesperados. Esos cambios generan desafíos en todos ámbitos de la vida, desde lo personal y social hasta lo profesional y económico. Para enfrentarlos de manera exitosa, las personas necesitan poseer las llamadas "habilidades del siglo XXI". Entre tales habilidades, con mayor frecuencia, se mencionan: el pensamiento crítico, habilidad colaborativa, habilidad comunicativa y pensamiento creativo (Trilling & Fadel, 2009; Pellegrino & Hilton, 2012).

Las personas con el pensamiento crítico analizan y evalúan las ideas y relaciones, tomando en cuenta detenidamente los hechos conocidos y sus relaciones establecidas o posibles. La habilidad colaborativa implica poder trabajar, de manera respetuosa, con otras personas para lograr resolver problemas de interés común. La habilidad comunicativa se relaciona con el talento de expresar propias ideas de manera clara mediante palabras, habladas o escritas, y recursos visuales (dibujos, esquemas y gráficas). Las personas creativas buscan resolver problemas, dándoles nuevos enfoques que abren posibilidades para nuevos caminos hacia las soluciones.

El Foro Económico Mundial (World Economic Forum) determina periódicamente la evolución de la demanda de las diferentes habilidades en el mundo laboral. En su reporte en el año 2020, se predijo que para el año 2025, las cinco habilidades más buscadas serán: (1) Pensamiento analítico e innovaciones; (2) Aprendizaje activo y estrategias de aprendizaje; (3) Resolución de problemas complejos; (4) Pensamiento crítico y análisis y (5) Creatividad, originalidad e iniciativa (World Economic Forum, 2020, p. 36)

En el año 2023, según las encuestas investigativas con los empresarios sobre las demandas del mercado laboral, los primeros cinco lugares ocuparon las siguientes habilidades fundamentales: (1) Pensamiento analítico; (2) Pensamiento creativo; (3) Resiliencia, flexibilidad y agilidad; (4) Motivación y autoconocimiento y (5) Curiosidad y aprendizaje permanente (World Economic Forum, 2023, p. 38).

Sin embargo, para el periodo 2023 - 2027, según su crecimiento en la importancia económica, la predicción del orden futuro es diferente: (1) Pensamiento creativo; (2) Pensamiento analítico; (3) Cultura tecnológica; (4) Curiosidad y aprendizaje permanente y (5) Resiliencia, flexibilidad y agilidad (World Economic Forum, 2023, p. 39). La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], en su documento sobre "Educación 2030", destaca la importancia de adquisición de las capacidades necesarias para el desarrollo sostenible:

> Además de insistir en las capacidades específicas para el mundo laboral, ha de hacerse hincapié en el desarrollo de capacidades superiores

> transmisibles, tanto cognitivas como no cognitivas, como son: resolución de problemas, pensamiento crítico, creatividad, trabajo en equipo, habilidades comunicativas y resolución de conflictos, que pueden aplicarse a una gran variedad de ámbitos profesionales. Además, es preciso que los estudiantes tengan posibilidades de actualizar sus conocimientos permanentes mediante el aprendizaje a lo largo de toda la vida. (UNESCO, 2017, pp. 12–13)

En el año 2022, la importancia del pensamiento creativo fue enfatizada, también, en el proyecto PISA (Proyecto de evaluación internacional de estudiantes, por su sigla en inglés), que es la más importante evaluación internacional de "los conocimientos y las habilidades para la vida" que poseen los alumnos de 15 años. Aparte de evaluar los logros en la lectura comprensiva y habilidades matemáticas y científica, también se abordó, por primera vez, el pensamiento creativo e innovación. PISA define el pensamiento creativo como:

> la competencia para participar de forma productiva en la generación, evaluación y mejora de ideas que pueden dar lugar a soluciones originales y eficaces, avances en el conocimiento y expresiones de la imaginación (Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, 2022, p. 6).

Es importante citar lo que se dice en el marco teórico del proyecto PISA 2022 sobre la resolución de problemas y su relación con el pensamiento creativo:

> No todos los casos de resolución de problemas requieren pensamiento creativo: la resolución creativa de problemas es un tipo distinto de resolución de problemas caracterizada por la novedad, la no convencionalidad, la persistencia y la dificultad durante la formulación del problema… El pensamiento creativo se hace especialmente necesario cuando el alumnado se enfrenta al reto de resolver problemas fuera de su ámbito de especialización y cuando las técnicas con las que está familiarizado no funcionan... (Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, 2022, p. 12)

El desarrollo del pensamiento creativo en la educación: Los avances y los obstáculos

El desarrollo del pensamiento creativo de los estudiantes fue, desde hace tiempo, un objetivo importante de los sistemas educativos. Sin embargo, la implementación didáctica de tal objetivo y, aún más, la evaluación de sus resultados no fue fácil (Treffinger et al, 1971). La principal causa estaba relacionada con la falta de una definición precisa y operativa del pensamiento creativo. Donald J. Treffinger y sus colaboradores encontraron 120 definiciones de creatividad en artículos que exploraban los "rasgos", las "características" y otros "atributos" personales que distinguían a los individuos altamente creativos de sus pares (Treffinger, Young, Selby & Shepardson, 2002). Para facilitar su tratamiento didáctico, los agruparon en cuatro categorías amplias:

(1) generar ideas;
(2) profundizar en las ideas;
(3) apertura y coraje para explorar ideas y
(4) escuchar la propia "voz interior"

Las ideas generadoras. Esta categoría incluye las características cognitivas comúnmente denominadas pensamiento divergente o habilidades de pensamiento creativo y pensamiento metafórico. Las características específicas de esta categoría incluyen fluidez, flexibilidad, originalidad, elaboración y pensamiento metafórico.

La profundización en las ideas. Esta categoría incluye características cognitivas comúnmente denominadas pensamiento convergente o pensamiento crítico. Las características de esta categoría incluyen analizar, sintetizar, reorganizar o redefinir, evaluar, ver relaciones, desear resolver ambigüedades o poner orden en el desorden, y preferir la complejidad o comprender la complejidad.

La apertura y el coraje para explorar ideas. Esta categoría incluye algunos rasgos de personalidad que se relacionan con los intereses, experiencias, actitudes y confianza en uno mismo. Las características de esta categoría incluyen sensibilidad a los problemas, sensibilidad estética, curiosidad, sentido del humor, alegría, fantasía e imaginación, asunción de riesgos, tolerancia a la ambigüedad, tenacidad, apertura a la experiencia, sensibilidad emocional, adaptabilidad, intuición, voluntad de crecer, falta de voluntad. Aceptar afirmaciones autoritarias sin examen crítico e integración de dicotomías u opuestos.

Escuchar la propia "voz interior". Esta categoría incluye rasgos que implican una comprensión personal de quién eres, una visión de hacia dónde quieres ir y un compromiso de hacer lo que sea necesario para llegar allí. Las características de esta categoría incluyen conciencia de la creatividad, persistencia o perseverancia, autodirección, locus de control interno, introspectiva, libertad de estereotipos, concentración, energía y ética de trabajo.

Otro modelo del pensamiento creatividad, de cinco dimensiones, como la base para su implementación y evaluación en las escuelas, fue desarrollado por el conocido educador británico Bill Lucas (Lucas, 2016). Según tal modelo, el pensamiento creativo debe ser:

Inquisitivo. Es evidente que las personas creativas son buenas para descubrir y abordar cuestiones interesantes y valiosas en su ámbito creativo.

Imaginativo. En el centro de una amplia gama de análisis de la personalidad creativa está la capacidad de encontrar soluciones y posibilidades imaginativas.

Persistente. Las personas creativas no se dan por vencidas fácilmente.

Colaborativo. En el mundo actual, los desafíos complejos (por ejemplo, desentrañar el ADN o comprender el cambio climático) requieren una colaboración creativa. Los individuos creativos reconocen la dimensión social del proceso creativo.

Disciplinado. Como contrapeso al lado más intuitivo de la creatividad, existe la necesidad de conocimiento y habilidad para dar forma al producto creativo y desarrollar la experiencia.

Otro avance importante fue el reconocimiento de los ocho elementos centrales de un entorno de aula que fomenta creatividad de los alumnos (Harrington, 1990): (1) La oportunidad de jugar y experimentar/explorar; (2) Una atmósfera no amenazante en la que los niños se sientan lo suficientemente seguros como para correr riesgos y cometer errores; (3) Actividades presentadas en contextos interesantes o inusuales; (4) Oportunidad para el pensamiento generativo, donde las ideas se reciben abiertamente; (5) Oportunidad para la reflexión crítica en un entorno de apoyo; (6) A los niños se les da un sentido de compromiso y propiedad de ideas y tareas; (7) Respeto por la diferencia y la creatividad de los demás; (8) Opciones dadas a los niños en términos de recursos y métodos.

Los obstáculos para tener más creatividad en la educación se generan por los mensajes, explícitos o implícitos, que emiten las prácticas comunes de las y los docentes. De manera irónica, Nickerson (2010) enlista "sugerencias" para desalentar e inhibir el pensamiento creativo en el aula:

1. Perpetua la idea de que existe una forma correcta de realizar cualquier tarea en particular y que hay una y sólo una respuesta correcta para cada pregunta. Enfatice la importancia primordial de tener razón. Insista en que los estudiantes devuelvan en los exámenes exactamente lo que les han dado en clase. No tolerar desviaciones. Promueve la creencia de que todos los errores y equivocaciones son malos: motivos de vergüenza.

   No pierda tiempo tratando de descubrir la base (a menudo racional) detrás de las soluciones incorrectas a los problemas y asegúrese de que los estudiantes no se hagan la idea de que los errores a veces dan evidencia de ingenio y pensamiento altamente creativo, y casi siempre pueden ser oportunidades para aprender.
2. Refuerza la idea de que si algo está escrito en un libro, debe ser verdad.
3. Desengaña a los estudiantes de la noción de que deben aspirar a tener pensamientos originales. Promueve la creencia de que el genio

es una cualidad poco común, que pocas personas nacen con él y que el resto – la gran mayoría – debe contentarse con repetir los pensamientos de otras personas y no debe aspirar a originar ninguno propio.

4. Desalienta la curiosidad y la indagación.
5. Nunca permitas que aprender o resolver problemas sea divertido.

Una taxonomía similar de las creencias erróneas que impiden el pensamiento creativo de las personas fue propuesta por Von Oech (1990, p. 9). Algunas de tales creencias son: "La respuesta correcta", "Errar está mal", "Jugar es frívolo" y "No soy creativo".

La primera y la más importante creencia errónea "La respuesta correcta" se resume de la siguiente manera:

> Gran parte de nuestro sistema educativo nos ha enseñado a buscar la única respuesta correcta. Este enfoque está bien para algunas situaciones, pero muchos de nosotros tendemos a dejar de buscar una respuesta alternativa correcta después de haber encontrado la primera. Esto es desafortunado porque a menudo es la segunda, tercera o décima respuesta correcta la que necesitamos para resolver el problema de una manera innovadora. (Von Oech, 1990, p. 26).

Los acertijos geométricos con cerillos y el desarrollo del pensamiento creativo

Los acertijos geométricos con cerillos parecen tener muchos atributos de las tareas ideales que pueden fomentar pensamiento creativo en las escuelas:

> Las tareas creativas son atractivas, pueden tener una naturaleza abierta deliberada, alientan a los estudiantes a explorar múltiples soluciones a problemas dentro de parámetros y limitaciones que aclaran los objetivos y, sin embargo, siguen siendo relativamente flexibles para permitir que los estudiantes los aborden con un cierto nivel de agencia. (Vincent-Lancrin et al, 2019, p. 30)

El atributo más importante es la existencia de múltiples soluciones en muchos acertijos con cerillos. Para encontrar las soluciones más creativas es necesario "romper" las restricciones autoimpuestas por el pensamiento rutinario. Tal atributo está en resonancia con los problemas que se usan para investigar el pensamiento creativo en geometría (Levav-Waynberg & Leikin, 2012).

Lamentablemente, tal potencial para el desarrollo del pensamiento creativo de los que resuelven tales acertijos no se aprovecha. Los autores de los libros con acertijos, libros de texto de matemáticas y los presentadores de los acertijos en numerosas páginas de Internet generalmente publican solamente una solución. De tal manera, en el ámbito de los acertijos cerillos, se fomenta la falsa y obstaculizante creencia que "cada acertijo tiene una y solamente una solución".

El objetivo, la metodología y el contexto de la investigación

El objetivo de esta investigación cualitativa (Báez & De Tudela, 2009) fue explorar los detalles del pensamiento creativo de un grupo conveniente de las personas al resolver los acertijos geométricos con cerillos que tienen diferentes soluciones.

Las personas que participaron en la investigación fueron inscritas en el taller "*Pensamiento creativo en la educación matemática: La importancia social y los problemas para fomentarlo*", que fue parte del X Taller Internacional "*Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación*". Las dos sesiones virtuales del taller, en que se realizó la investigación, se llevaron a cabo en 15 y 16 de noviembre de 2023. Asistieron 24 participantes (2 estudiantes de doctorado, 3 estudiantes de maestría, 3 estudiantes de licenciatura y 16 maestras y maestros de matemáticas en niveles pre-universitarios.

La plataforma de realización para llevar a cabo el taller y la investigación fue un grupo secreto y cerrado de Facebook. Los participantes publicaban, en tiempo real, sus contribuciones verbales y visuales en el muro del grupo.

En la primera sesión se presentaron varios argumentos sobre la importancia del pensamiento creativo para la vida personal, profesional y social. En tal sesión se incluían, también, algunos problemas que sirven para ilustrar las características que deben tener todos los problemas matemáticos para que puedan promover el pensamiento creativo de los estudiantes (Sliško, 2022).

En la segunda sesión se presentaron dos clases de acertijos geométricos con cerillos. La primera clase eran acertijos históricos e ilustrativos cuyo objetivo fue informar a los participantes sobre sus características y los usos en la educación matemática, en los libros sobre creatividad y en la investigación.

La segunda clase eran acertijos geométricos con cerillos que exploraban, en tiempo real, los detalles del pensamiento creativo de los participantes mediante sus publicaciones en el muro del grupo. En lo que sigue se presentan los tipos de los cerillos usados en diferentes fases del desarrollo del taller que fue el contexto de esta investigación cualitativa.

Los acertijos geométricos con cerillos usados en el taller de manera informativa

Se comentó que el primer acertijo de tal tipo fue publicado en la revista familiar "*The Family Friend*" en el año 1849: "Corta 17 tiras de papel o madera de igual longitud y ponlas en la mesa para formar 6 cuadrados como en el diagrama. Retira 5 tiras para dejar solamente 3 cuadrados."

El diagrama que acompañaba el acertijo, creado con cerillos, fue como en la Figura 1. La solución dada fue como en la Figura 2.

Figura 1

El primer acertijo geométrico

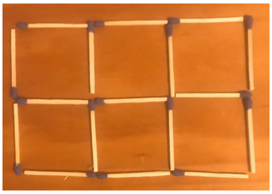
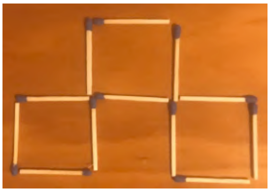


Figura 2

La solución del primer acertijo geométrico



Se enfatizó la falta de la segunda solución (dos cuadrados arriba y un cuadrado abajo). Ese defecto sigue vigente en la mayoría de las actuales presentaciones de tal acertijo.

También se han presentado y comentado algunos acertijos geométricos y aritméticos con cerillos usados en la educación matemática (Buckeye & Ginther, 1971; Langbort & Thompson, 1985).

Para ilustrar la preocupante existencia del síndrome de "una sola solución" en los acertijos geométricos con cerillos, que disminuye su potencial de promover el pensamiento creativo, se dio a los participantes el ejemplo publicado en el libro que, supuestamente, ¡promueve "mega-creatividad"! La configuración inicial de los cerillos está en la Figura 3. El acertijo dice: Aquí está la figura hecha de unos cuantos cerillos. Remover tres cerillos para que queden cuatro cuadrados.

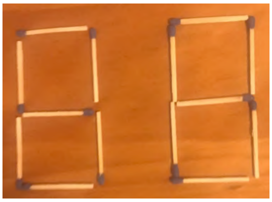
Figura 3

La configuración inicial del acertijo de Aleinikov

La única solución dada está en la Figura 4 (Aleinikov, 2002, pp. 90 – 91). Sin embargo, hay otras cuatro soluciones diferentes.

Figura 4

La configuración inicial del acertijo de Aleinikov



A los participantes se informó, también, sobre los principales resultados de una extensa investigación realizada por George Katona (1901- 1981), un psicólogo estadounidense de origen húngaro. Katona investigó experimentalmente la psicología del aprendizaje y de la enseñanza de la resolución de problemas usando acertijos geométricos con cerillas. El énfasis estaba en la transferencia de lo aprendido en la prueba posterior de la resolución de los mismos y nuevos problemas (Katona, 1940). Los resultados más importantes son los siguientes:

1. Se ha demostrado que es totalmente erróneo el modelo de enseñanza en el que a los participantes que no han resuelto el acertijo se les presenta, sin comentarios, sólo una serie de pasos que conducen a la solución. En pruebas posteriores, dichos participantes no podían recordar la solución presentada de esta manera.
2. Se logró un "aprendizaje" mucho mejor mediante el modelo de enseñanza en el que los participantes conocieron la "lógica de las soluciones". Se probaron los resultados de dos formas de presentación de la "lógica de solución". La forma numérica se basaba en contar el número de cerillos en las configuraciones inicial y requerida. La forma estructural se centró en determinar el significado del cambio solicitado en el número de "elementos estructurales". Por ejemplo, si se requiere mover tres cerillas de cinco cuadrados existentes para obtener cuatro cuadrados, entonces el análisis y la comprensión estructural llevan a la conclusión de que los movimientos deben ser tales que los dos cuadrados existentes se "descompongan" y sólo se forme un cuadrado nuevo. Los resultados obtenidos por Kantona dieron mayor prioridad a la exposición de la forma estructural de la "lógica de las soluciones".
3. Katona presentó todas las posibles variantes de solución en los acertijos geométricos probados. Por ejemplo, en el conocido rompecabezas que requiere mover tres cerillas de cinco cuadrados para formar cuatro cuadrados (Figura 5) hay cuatro soluciones igualmente correctas (Figura 6).

Figura 5

Configuración de los cerillos para acertijo "mover tres cerillos para obtener cuatro cuadrados"

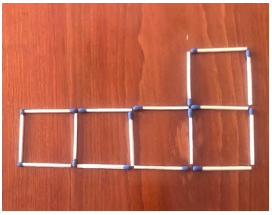
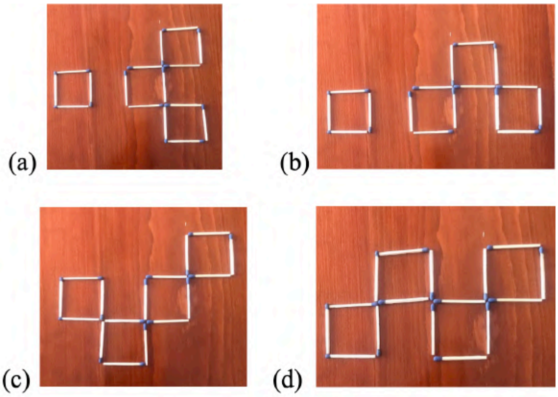


Figura 6

Cuatro soluciones correctas del acertijo geométrico "mover tres cerillos para forma cuatro cuadrados"



Lamentablemente, en muchos libros y en las páginas de internet solo se presenta la solución (d).

Los dos acertijos geométricos con cerillos usados para explorar la creatividad de los participantes

Después de haber conocido la importancia de las soluciones múltiples de los acertijos geométricos con cerillos para la promoción del pensamiento creativo, los participantes eran preparados para las exploraciones de sus propios potenciales creativos. En este capítulo se presentan solamente los resultados cualitativos (mejor dicho, las publicaciones visuales en el muro del grupo de Facebook) de tales exploraciones para dos acertijos geométricos. En el primer acertijo se compara la creatividad de los participantes en la investigación con la creatividad individual de un famoso autor y en el segundo acertijo la comparación es con la creatividad colectiva de un gran número de presentadores en Internet de un popular acertijo.

El primer acertijo

El primer libro dedicado completamente a los acertijos con cerillos fue publicado en el año 1889 por el maestro y el conocido investigar de la luz polar *Sophus Tromholt* (1851- 1896). El título en alemán era "Streichholzspiele" ("*Juegos con cerillos*"). La primera edición (Tromholt, 1889) contenía 253 acertijos y juegos. En las ediciones posteriores el número de acertijos y juegos aumentó a 300. En año 1907 salió su traducción rusa ¡nunca se tradujo al inglés!. Es importante destacar que en la formulación de varios acertijos Tromholt mencionaba la existencia de las soluciones múltiples y las presentaba en la segunda parte del libro. Debido a eso, es sorprendente que en el acertijo número 3 (Tromholt, 1889, p. 2) no se mencionó la existencia de cuatro soluciones posibles.

La configuración de los cerillos para el acertijo 3 está en la Figura 7. El acertijo decía: Reubicar 2 cerillos para formar 5 cuadrados iguales. A los participantes del taller se informó que Sophus Tromholt había dado solo una solución, la de la Figura 8.

Figura 7

La configuran inicial de los cerillos para el acertijo 3

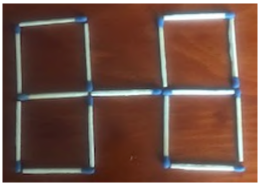
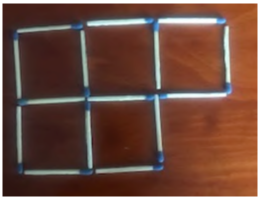


Figura 8

La única solución dada por Tromholt (tres cuadrados arriba y dos cuadrados abajo en el lado izquierda)



La tarea creativa de los participantes era encontrar las tres soluciones que no presentó Tromholt.

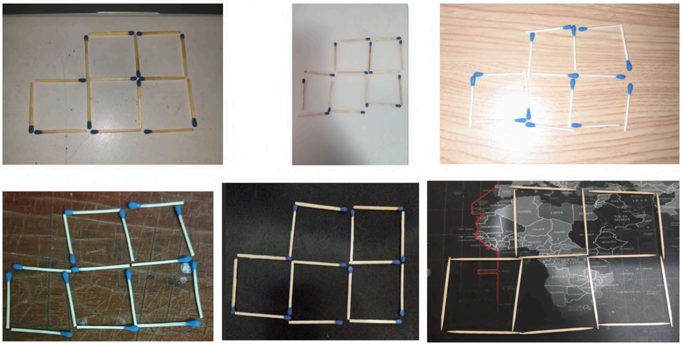
Las soluciones adicionales que encontraron los participantes para el primer acertijo

Los resultados son los siguientes:

Seis de los participantes encontraron la solución adicional en que hay dos cuadrados arriba en el lado derecho y tres cuadrados abajo (Figura 9).

Figura 9

La solución adicional con dos cuadrados arriba en el lado derecho y tres cuadrados abajo



Una participante encontró otra solución adicional con dos cuadrados arriba en el lado izquierdo y tres cuadrados abajo (Figura 10).

Figura 10

La solución adicional con dos cuadrados arriba en el lado izquierdo y tres cuadrados abajo

Las dos participantes han sido capaces de encontrar las tres soluciones que no logró imaginar Tromholt.

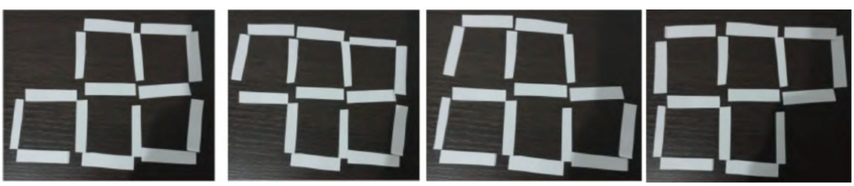
Una de ellas presentó solamente esas tres soluciones faltantes (Figura 11), mientras la otra presentó todas las soluciones posibles, las primeras tres son las faltantes y la cuarta es de Tromholt (Figura 12).

Figura 11

Las tres soluciones faltantes para el acertijo 3 de Tromholt

Figura 12

Las cuatro soluciones del acertijo 3 de Tromholt



Estos resultados son muy prometedores, pues la creatividad de los participantes, aunque no conocían este tipo de acertijos geométricos con cerillos, superó la creatividad individual de Tromholt, quien fue el autor del primer libro dedicado completamente a los acertijos y juegos con cerillos.

El segundo acertijo

Segundo acertijo es muy popular en las páginas de internet. Aparece incluso ¡impreso en playeras! La configuración inicial de los cerillos está en la Figura 13. El acertijo dice: Mover 2 cerillos para obtener 3 triángulos.

Figura 13

La configuración inicial de los cerillos para el segundo acertijo

La tarea para los participantes era: Existen dos soluciones. ¿Cuáles son?

La tarea fue formulada de tal manera porqué yo mismo conocía solamente dos soluciones y no tenía idea de que existen otras soluciones adicionales. La primera solución consiste en transformar el triángulo interno con los lados de dos cerillos en dos triángulos con los lados de un cerillo. La segunda solución consiste en formar dos triángulos con los lados de tres cerillos usando los lados del triángulo interno con los lados de dos cerillos.

Las soluciones que encontraron los participantes para el segundo acertijo

Los participantes eran capaces de encontrar las dos soluciones que yo esperaba. Cinco de ellos presentar la primera solución esperada (Figura 14).

Figura 14

Las cinco formas de la primera solución esperada que presentaron los participantes

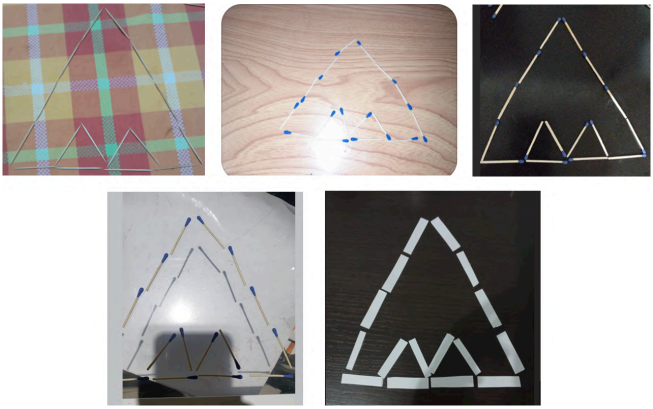


Figura 15

Las dos formas de la primera solución esperada que presentaron los participantes

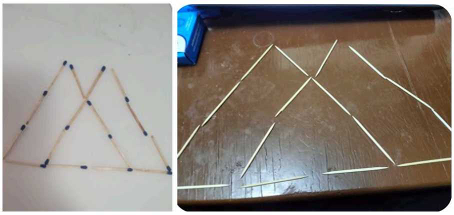
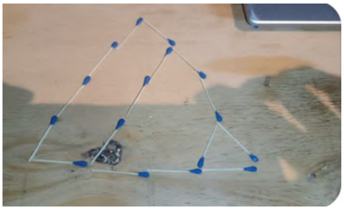
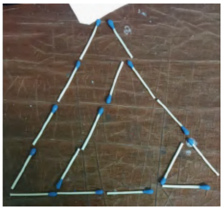


Figura 16

Las dos formas de la primera solución inesperada que presentaron los participantes





La segunda solución inesperada fue presentada por una participante (Figura 17).

Figura 17

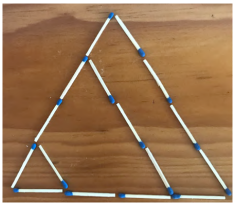
La forma de la segunda solución inesperada que presentó una participante

El seguimiento dado a las soluciones del segundo acertijo encontradas por los participantes

La existencia de las soluciones inesperadas me puso trabajar en dos tareas de seguimiento. La primera tarea era averiguar la existencia de las soluciones adicionales. En el caso de la primera solución inesperada (Figura 16), es posible encontrar, mediante una rotación, su "solución gemela" (Figura 18).

Figura 18

La "solución gemela" de la primera solución inesperada que se obtiene mediante una rotación



Ambas de estas soluciones tienen cinco posibles sub-versiones: El segundo triángulo equilátero con el lado de un cerillo se puede formar en tres vértices del triángulo con lados de 3 cerillos y en dos vértices del triángulo con los lados de 4 cerillos.

La segunda solución inesperada (Figura 17) tiene tres posible sub-versiones: El segundo triángulo equilátero con el lado de un cerillo se puede formar en tres vértices del triángulo con los lados de 4 cerillos.

Las dos soluciones esperadas (Figuras 14 y 15) no tienen sub-versiones. Personalmente aprendí que este acertijo geométrico con cerillos tiene cinco tipos de soluciones. Dos tipos no tienen sub-versiones, dos tipos tienen cinco sub-versiones y un tipo tiene tres sub-versiones. Eso da, en total, 15 soluciones diferentes. En la encuesta sobre posibles soluciones de este acertijo, que posteriormente publiqué en el muro del grupo Facebook "COMUNIDAD FCFM BUAP", una estudiante envió ¡todas esas 15 soluciones diferentes!

La segunda tarea del seguimiento fue una investigación documental sobre las soluciones presentadas para el segundo acertijo. Fue posible encontrar que tal acertijo aparece solamente en el libro "Creative matchstick puzles. Innovative solutions" (Chaudhuri, 2022). El autor presenta solamente una solución (Figura 14) y, además, afirma que tal solución es la única porque no es posible mover los cerillos del triángulo grande (Chaudhuri, 2022, p. 34).

La búsqueda en Internet, arrojó los siguientes resultados:

- En las 7 páginas, los presentadores del acertijo publican solamente la primera solución (Figura 14).
- En las 36 páginas, los presentadores del acertijo publican solamente la segunda solución (Figura 15)
- En las 2 páginas, los presentadores publicaron ambas soluciones (Figuras 14 y 15).
- Solamente en una publicación de Facebook se presentaron tres soluciones (Figura 19).

Figura 19

Las tres soluciones del acertijo

Nota: Fuente: https://www.facebook.com/watch/?v=849605015808719

Fue muy grato saber que tal página de Facebook pertenece a "El callejón del gañán", que es un espacio cultural con enfoque multidisciplinario que trabaja desde el 2015 en el barrio de Xonaca en la ciudad de Puebla.

De tal manera, los participantes en el taller demostraron una creatividad que supera la creatividad colectiva de todos los presentadores de este acertijo en 47 páginas de Internet. ¡Ninguno de ellos pudo encontrar la solución que fue para mí la primera solución inesperada (Figura 16)!

Conclusiones

Aunque no contaban con las experiencias en resolver los acertijos geométricos con cerillos, los participantes en esta investigación cualitativa revelaron un gran nivel de creatividad. Con mucho entusiasmo, usando diferentes formas de crear y presentar sus soluciones (con cerillos, palillos y tiras de papel), lograron superar la creatividad individual de Sophus Tromholt, el autor del primer libro sobre acertijos y juegos con cerillos, y la creatividad colectiva de numerosos presentadores del segundo acertijo en Internet.

Tales resultados prometedores sugieren que los acertijos con cerillos, tanto geométricos como aritméticos, para cuales existen diferentes soluciones, pueden ser un tipo de tareas idóneas y divertidas para combatir la falsa creencia de los estudiantes de que cada problema matemático tiene una y solamente una solución. Como ya se comentó, tal idea es el mayor obstáculo para tener más creatividad en las aulas de matemática.

Me parece pertinente terminar el capítulo con unos comentarios de los participantes sobre lo experimentado y aprendido en el taller. Esos comentarios voluntarios se solicitaron en la parte final de la segunda sesión. Los participantes los publicaron en el muro del grupo cerrado y secreto de Facebook, creado para tener interactividad en tiempo real en la realización del taller que fue el contexto en que se realizó esta investigación. Los comentarios selectos son:

> *Este taller me permitió reflexionar en torno a nuestra labor como docentes, en relación con la oportunidad que tenemos de generar espacios que permitan fortalecer su creatividad y validar las diferentes formas de solucionar un mismo problema, y no coartar su libertad de pensamiento, induciendo o guiando a una única solución...*
>
> *Este taller ha sido divertido y entretenido. Considero que la creatividad es algo muy importante y que debemos fomentar a través de problemas que tengan varias soluciones para ver a cuántas pueden llegar.*
>
> *Aprendí que puedo proponer diferentes actividades con herramientas simples como cerillos o palillos, para ayudar a que los estudiantes tengan un razonamiento más analítico.*
>
> *Muchas gracias… por excelente taller que permite despertar la creativa en los chicos. Lo llevaré a cabo con mis alumnos de nivel superior.*
>
> *Me gustaron mucho todas las actividades… Me parecieron muy buenas las actividades de cerillos, realmente promueven el pensamiento creativo.*
>
> *Un taller muy interesante y divertido, que nos pone a reflexionar sobre la importancia de la creatividad y que debería ponerse más en práctica en las aulas.*
>
> *Me gustaron mucho las actividades con cerillos. Me llevo la tarea de aplicarlas con los estudiantes.*
>
> *Me gustó mucho el taller y pienso poner en práctica que mis estudiantes propongan soluciones alternas a los problemas que se plantean en clase.*

> *Al explorar las fronteras del pensamiento creativo en la educación matemática, hemos descubierto la esencia de un enfoque más allá de fórmulas y ecuaciones. La creatividad no solo abre las puertas a soluciones innovadoras, sino que también transforma la percepción de las matemáticas en un instrumento poderoso para comprender y abordar los desafíos en el aula. Pienso que emplearé actividades con palillos.*

Agradecimientos

Agradezco a los participantes en el taller quienes compartieron en el muro del grupo de Facebook sus ideas creativas. El agradecimiento va, también, a mi estudiante doctoral la M. en C. Matha Patricia Velasco Romero por la administración del taller y el manejo de su página de Facebook.

Referencias

Aleinikov, A. G. (2002). *Megacreativity: Five steps to thinking like a genius.* Walking Stick Press.

Báez, J., & De Tudela, P. (2009). *Investigación cualitativa.* Esic Editorial.

Buckeye, D. A. & Ginther, J. L. (1971). *Creative Mathematics.* Canfield Press.

Chaudhuri, A. (2022). *Creative matchstick puzles. Innovative solutions. Play with matches for creative fun.* Atanu Chaudhuri.

El Callejón del Gañán. (2024, octubre 12). *2 Palillos 3 Triángulos*. Facebook. https://www.facebook.com/watch/?v=849605015808719

Harrington, D. (1990). The ecology of human creativity: a psychological perspective. En M. Runco, & R. Albert (Eds.), *Theories of creativity*. Sage.

Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing. Studies in the psychology of learning and teaching*. Columbia University Press.

Langbort, C. & Thompson, V. H. (1985). *Building Success in Math.* Wadsworth Publishing Company.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73-90.

Lucas, B. (2016). A five-dimensional model of creativity and its assessment in schools. A*pplied Measurement in Education, 29*(4), 278-290.

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (2023). *PISA 2022. Marco conceptual de Pensamiento Creativo*. Secretaría General Técnica.

Nickerson, R. S. (2010). How to discourage creative thinking in the classroom. En R. A. Beghetto, & J. C. Kaufman (Eds.), *Nurturing creativity in the classroom* (pp. 1–5). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511781629.002

Pellegrino, J. W. & Hilton, M. L. (2012). *Educating for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century.* National Academies Press.

Sliško, J. (2022). Kreativno mišljenje u učenju matematike – važnost problema s višestrukim postupcima rješavanja i s više točnih rješenja [Pensamiento creativo en el aprendizaje de las matemáticas: la importancia de los problemas con múltiples métodos de resolución y con más de una solución correcta]. *Matematika i škola, 114*, 147–155.

Treffinger, D. J., Renzulli, J. S., & Feldhusen, J. F. (1971). Problems in the assessment of creative thinking. *Journal of creative Behavior, 5*(2), 104-112.

Treffinger, D. J., Young, G., Selby, E., & Shepardson, C. (2002). *Evaluación de la creatividad: una guía para educadores*. El Centro Nacional de Investigación sobre Superdotados y Talentosos.

Trilling, B. & Fadel, C. (2009). *21st century skills: Learning for life in our times.* Jossey-Bass.

Tromholt, S. (1889). *Streichholzspiele*. Verlag von Otto Spammer.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO]. (2017). *Desglosar el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4: Educación 2030*. UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246300_spa

Vincent-Lancrin, S., González-Sancho, C., Bouckaert, M., de Luca, F., Fernández Barrerra, M., Jacotin, G. , Urgel, J., & Vidal, Q. (2019). *Fostering Students' Creativity and Critical Thinking. What it means in school.* OECD Publishing.

Von Oech, R. (1990). *A whack on the side of the head: How to unlock your mind for innovation*. Warner Books.

World Economic Forum (2020). *Future of jobs report.* World Economic Forum

World Economic Forum (2023). *Future of jobs report*. Insight report. World Economic Forum.

Fostering mathematical creativity in school: Selected approaches illustrated with examples

Ljerka Jukić Matić [1]

Abstract

Creativity is considered an important skill of the twenty-first century, alongside critical thinking, collaboration, and communication. By developing these skills, students can prepare for future jobs, unpredictable social challenges, and future technology use. Moreover, creative individuals have an advantage in the classroom because they can apply what they have learned in new contexts and create new connections between different knowledge and skills. Creativity has also been recognized in mathematics education as an important skill for the 21st century. Thus, the past decade has seen a significant increase in mathematical creativity research, far outpacing previous years' efforts. Open-endedness in classrooms is one of the most popular teaching approaches to foster mathematical creativity and divergent thinking. This paper, provides examples of classroom-applicable approaches that encourage mathematical creativity: multiple solution tasks, multiple outcome tasks, problem-posing, and triptych.

Keywords

Mathematical creativity, Multiple solution tasks, Multiple outcome tasks, Problem posing, Triptych.

---

[1] ljukic@mathos.hr
School of Applied Mathematics and Informatics, University of Osijek, Croatia
https://orcid.org/0000-0002-8947-6333

Jukić Matić, Lj. (2024). Fostering mathematical creativity in school: Selected approaches illustrated with examples. In E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 37–54). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-02

Introduction

Enhancing the development of 21st-century skills such as critical thinking, creativity, collaboration, or communication (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019) is the best way to prepare students for jobs that do not yet exist, social challenges that cannot be foreseen, and the usage of technologies that have not yet been invented. Educators and researchers in mathematics education have recognized the importance of cultivating creativity as an essential 21st-century skill (Leikin & Sriraman, 2016). Creative individuals have an advantage in the classroom because they can apply what they have learned in new contexts and create new connections between different knowledge and skills (Leikin & Elgrably, 2022). Mathematics education has also recognized creativity as a vital skill for the 21st century (Leikin, 2009; Sriraman, 2005). Thus, the past decade has seen a significant increase in mathematical creativity research, much outpacing previous years' efforts. This increased focus has prompted educators and researchers to investigate identifying, developing, and refining tasks specifically tailored to foster and enhance mathematical creativity in the classroom. Researchers also investigated the advantages of creative-directed activities for students' cognitive abilities and affective characteristics (e.g., Schukajlow & Krug, 2014; Tabach & Levenson, 2018). Through these research efforts, the educational community attempted to uncover the complexity of mathematical creativity, to use this understanding to improve students' learning experiences and equip them with the skills needed to tackle the challenges of the 21st century. This paper aims is to provide examples of some classroom-applicable approaches that encourage mathematical creativity. Therefore, the questions guiding the literature search were: 1. What is mathematical creativity? 2. What approaches encourage mathematical creativity in school mathematics?

Mathematical creativity

The study of creativity dates back to the seminal work of American psychologist Guilford (1950), who investigated the essence of intelligence. He investigated divergent and convergent thinking and argued that both are necessary for creative problem-solving: convergent thinking refers to exploring of variability, whereas divergent thinking refers to creating variability. He characterized creativity as divergent thinking and the ability to generate multiple ideas, create new patterns, transform knowledge and meaning, or apply object functions. Divergent thinking, characterized by fluency, flexibility, originality, and elaboration, laid the foundation for subsequent assessments of creativity, most notably the Torrance Tests of Creative Thinking (Torrance, 1974, in Elgrably & Leikin, 2021). These tests sought to provide a quantitative measure of creativity, influencing various domains, including mathematics education. Components identified by Guilford and Torrance were also used to evaluate mathematical creativity; Silver (1997) refined the definition of creativity-enhancing problem solving and proposed the following components: fluency is developed by generating multiple ideas, multiple answers to a problem (when such exist), exploring situations, and raising multiple ideas; flexibility is advanced by generating new solutions when at least one has already been produced; novelty is advanced by exploring many solutions to a problem and generating a new one.

Some scholars, like Sriraman (2009), have drawn upon the mathematical creativity model proposed by mathematician J. Hadamard (1945, in Sriraman, 2009). Hadamard's model delineates mathematical creativity through four stages: preparation, incubation, illumination, and verification, offering a structured perspective on the creative process. The first stage involves putting great effort into getting insights into the problem. The second stage, incubation, refers to putting the problem aside and engaging the mind in solving other problems. The third stage, illumination, happens when the solution emerges suddenly while the individual does other unrelated activities. Finally, the last stage is comprised of verifying the result by making it precise and expressing these ideas in writing or oral form. During the last stage, verification, individuals seek other alternatives, extensions, or solutions. Hadamard constructed his model based on Wallas' gestal framework (1926, in Sriraman, 2009). This model is frequently utilized as a benchmark when interpreting mathematical advancements.

Nevertheless, a universally accepted definition of mathematical creativity still needs to be discovered due to the fact that definitions of mathematical creativity are constructed based on characteristics of general creativity (Bicer, 2021). Additionally, this impacted research in mathematics education, as various researchers directed their attention towards distinct facets of creativity. While there is a need for more agreement among scholars regarding the precise definition of mathematical creativity, certain common aspects have been identified. Bicer (2021) performed a systematic literature review to synthesize the definitions of mathematical creativity. According to this review, mathematical creativity in mathematics education is defined as "novel mathematical ideas or products, which are new to the person but may not necessarily be new to others" (Bicer, 2021, p. 3).

Historically, mathematical creativity was predominantly associated with expert mathematicians (Hadamard, 1945, in Sriraman, 2009) and was thus regarded as an absolute trait inherent to a select few. However, contemporary researchers advocated a broader view. Scholars like Leikin (2009) argue that mathematical creativity is not exclusive to experts but can also be identified in students, in their processes, or in the products of their work, suggesting a more relative interpretation of creativity. This expanded view acknowledges that creativity in the context of school mathematics is distinct from the creativity observed among professional mathematicians. Mathematical creativity in school is evaluated in relation to prior experiences and the performance of other students with a comparable educational background (Sriraman, 2005). Moreover, scholars like Gregoire (2016) argue that mathematical creativity is teachable. This approach underscores the importance of contextual factors in evaluating creativity, recognizing that it can manifest in various forms and levels across different educational landscapes.

Recent studies revealed that mathematical creativity is domain-specific, not general (e.g., Kattou et al., 2015). By combining thinking with creativity, flexibility, and various ideas, mathematics becomes more engaging (Boaler, 2016). Furthermore, creativity should be encouraged in the mathematics classroom because mathematical creativity impacts the quality of mathematical knowledge (e.g. Bicer et al., 2020; Tabach & Friedlander, 2013). Namely, the ability to solve mathematical problems through varied approaches and from multiple perspectives deepens students' understanding of mathematical concepts and fosters a more integrated knowledge, and connects mathematics with various mathematical domains.

Teaching approaches to foster mathematical creativity

Specific teaching approaches have been suggested to cultivate mathematical creativity in the classroom. One of the most advocated teaching approaches to foster mathematical creativity and divergent thinking the utilization of open-endedness in classrooms (Pehkonen, 1995; Klein & Leikin, 2020; Levenson et al., 2018). Open-ended or open tasks lend themselves to many solution paths and strategies (Pehkonen, 1995). Open tasks contrast a traditional task where one very specific method is deemed correct by the teacher. Open-mindedness also allows students to hear diverse and divergent thinking patterns from peers. Solving open mathematical tasks is indeed a creativity-directed activity because it stimulates and demands mental flexibility and affords multiple opportunities to produce new ideas (Klein & Leikin, 2020). New information is forged by combining mathematical structures, processes, strategies, and creative thinking (Vale et al., 2018). Open tasks can be seen as an umbrella class that includes problems of three major types based on the openness of the starting situation (open-start problems) and the openness of the goal situation (open-end problems) defined by the task (Pehkonen, 1995). Leikin (2018) classified open tasks into several categories open start, open end, and combined problems:

- Multiple Solution Tasks —These tasks have an open starting point. That is, there are a variety of possible solution methods to the problem, each resulting in the same solution.

- Multiple outcome tasks—Solving these tasks results in multiple answers. They are either open-ended or combined (open-ended and open-start).
- Investigation Tasks — These tasks can be both open-start and open-end tasks, as they can be approached in various ways (at the beginning) and can result in various discoveries (at the end).
- Sorting Tasks also combine open start and end when criteria for sorting mathematical objects are not provided. Students must invent sorting criteria, and various sorting criteria result in distinct sorting outcomes — categories of mathematical objects.
- Problem Posing Tasks - combine open-start and open-end tasks. Participants are required to formulate problem statements that are novel to the poser, based on a given set of conditions.

Open tasks require general and specific cognitive skills (Vale et al., 2018). The following section outlines various open tasks that promote (and allow assessment of) mathematical creativity in the classroom.

Fostering creativity using open tasks

Multiple solution tasks

Multiple Solution Tasks (MST) are open tasks that contain explicit requirements to be solved using different methods. Leikin (2009) used MSTs to introduce the operational definition of mathematical creativity in a school context. At the school level, mathematical creativity can be regarded as (mental) flexibility (1) to solve a particular problem with multiple methods, (2) to implement strategies from various mathematical domains, and (3) to produce insightful solutions to a problem. These indicators can be observable in the context of MST as students solve problems by 1) using different representations of mathematical objects, 2) using different definitions or theorems of mathematical concepts, and 3) using different properties of mathematical objects in different disciplines and in real life (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Leikin (2009) suggested a notion of solution spaces that enables researchers to examine the various aspects of problem-solving performance using MSTs. The individual solution space represents all sets of solutions generated by a person without the assistance of another person; a collective solution space represents solutions generated by a group of participants; and an expert solution space represents solutions produced by expert mathematicians (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Furthermore, expert solution spaces can be both conventional and unconventional. In contrast to unconventional solution spaces, conventional solution spaces are recommended by the curriculum, displayed in textbooks, and taught by teachers (Leikin, 2009).

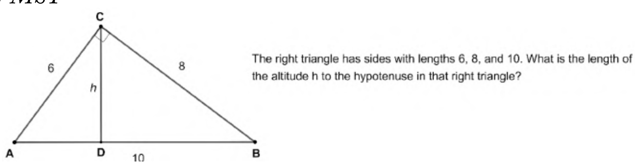
To assess mathematical creativity through MSTs, Leikin proposed a scoring scheme predicated on solution spaces. The scheme includes fluency as the number of appropriate solutions, flexibility as solution categories, and originality of solutions—judged by relative and absolute criteria. Originality is estimated by the uniqueness of the solution methods, with a method deemed original if it appears in 15% or fewer of the collected solutions. Details of the scoring scheme can be found in Leikin (2009).

As a measure of mathematical creativity, MSTs were used in various studies. MST served as a research instrument to assess geometry knowledge and mathematical creativity among high-ability and regular-ability students (Levav-Waynberg & Leikin, 2012), to examine the relationship between mathematical creativity, mathematical ability, and general giftedness (Leikin & Lev, 2013), or to investigate connections between creativity and mathematical knowledge among middle-school students (Tabach & Friedlander, 2013). Moreover, the MST examined the creative processes that arise when solving problems (Schindler & Lilienthal, 2020). Research on the effectiveness of MST in promoting mathematical creativity among school students has yielded encouraging results. Studies reported positive effects on the coherence of mathematical knowledge, abilities of problem-solving, and higher-order thinking skills (e.g., Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Tabach & Friedlander, 2018).

The example of MST in Figure 1 was taken from Jukić Matić & Sliško (2024). The task can be found in various materials, like school textbooks, exam preparation manuals, and online student tutorials. However, those materials do not usually ask for multiple solution methods.

Figura 1

Example of MST



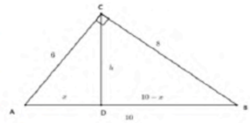
The study's authors converted it into MST, posing the requirement for multiple solution methods. The task can be solved with knowledge of secondary school mathematics, which makes it accessible to a wide range of secondary students, not just gifted or high-ability ones. The expert solution space of the above task consists of nine solution methods; eight solution methods were classified as conventional, while the ninth method was classified as non-conventional (Figure 2). Eight conventional methods within the collective solution space were identified in the study. The most used methods were the Pythagorean theorem and the Area of the right-angle triangle.

Figura 2

Expert solution space from Jukić Matić & Sliško (2024)

Expert solution methods

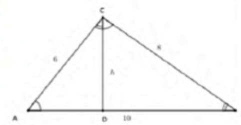
Solution method 1. Pythagorean Theorem
Applying Pythagorean Theorem twice on two smaller triangles ADC and DBC, the following system of equations is obtained:
$6^2 = x^2 + h^2$, $8^2 = (10 - x)^2 + h^2$.
Solving this system we obtain $x = 3.6$, and $h = 4.8$.



Solution method 2. Area of right-angle tringle
If we denote with a and b the length of legs, the area of right-angled triangle can be calculated as $P = \frac{a \cdot b}{2} = 24$. Then from general formula for triangle area $P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$ follows $h = 4.8$.

Solution method 3. Heron's formula
Let us denote $a = 8$, $b = 6$, a $c = 10$. From Heron's formula $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ the area P =24 is obtained. Then from the general formula for triangle area $P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$ follows $h = 4.8$.

Solution method 4. Similarity of triangles
Triangles ADC and ABC have two angles with same sizes e.g. $\angle DAC$ is joint angle, and both triangles are right-angled ones. Thus, these triangles are similar according to the Angle-Angle Theorem. In the same way, we conclude that triangles DBC and ABC are also similar. Consequently, triangles ADC and DBC are similar. Using ratios of the corresponding side lengths, e.g. $h : 6 = 8 : 10$, one obtains $h = 4.8$.



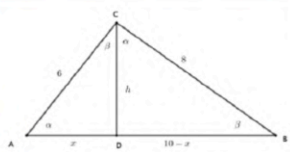
Solution method 5. Altitude geometric mean theorem (Theorem of Euclid)
Let us denote $p = |AD|$ *and* $q = |DB|$. Further let us denote $a = 8$, $b = 6$, and $c = 10$. From geometric mean theorem: $a = \sqrt{cq}$, $b = \sqrt{cp}$ i $h = \sqrt{pq}$, it follows $p = \frac{b^2}{c} = \frac{36}{10}$, $q = \frac{a^2}{c} = \frac{64}{10}$. Length of the altitude h is obtained as $h = \sqrt{pq} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4.8$.

Solution method 6. Trigonometric ratios
Determine angle sizes from trigonometric ratios. For instance, we determine α from $\sin\alpha = \frac{8}{10}$, $\cos\alpha = \frac{6}{10}$ or $\tan\alpha = \frac{8}{6}$. $\alpha = 53°7'$.
Using trigonometric ratios on smaller triangle ADC, the altitude h is obtained from $\sin 53°7' = \frac{h}{6}$ as $h = 4.8$.

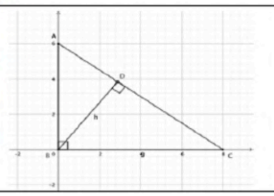
Solution method 7. Law of cosines and law of sines
Utilization of Laws of sines or cosines as generalizations of trigonometric ratios on any given triangle.

For instance, let's denote $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$. Using the Law of cosines ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$) we determine $\cos\alpha$ and $\cos\beta$. Now from $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, and the fact that $\alpha, \beta \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, we determine $\sin\alpha$ and $\sin\beta$. The length of altitude h follows from the Law of sines $\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\beta} \Rightarrow h = 4.8$.

Solution method 8. Trigonometric ratios and same angles in different triangles
This solution method uses trigonometric ratios in smaller triangles and the fact that smaller triangles have angles of the same size.
For instance: let us find $\cos\alpha$ and $\cos\beta$.
First β: $\cos\beta = \frac{10-x}{8}$ and $\cos\beta = \frac{h}{6}$. From these two equations, we get $\frac{10-x}{8} = \frac{h}{6}$ or $10 - x = \frac{8h}{6}$ (*). Then α: $\cos\alpha = \frac{x}{6}$ and $\cos\alpha = \frac{h}{8}$. From these two equations, we get $\frac{x}{6} = \frac{h}{8}$ or $x = \frac{6h}{8}$ (**)
Substituting x from (**) into (*), we obtain: $10 - \frac{6h}{8} = \frac{8h}{6}$. The altitude follows as $h = 4.8$.



Solution method 9. Coordinate geometry
Place the triangle ABC into the coordinate system, with legs on the x and y axis. Now triangle vertices have coordinates $A(0{,}6)$, $B(0{,}0)$ and $C(8{,}0)$. Determine equation of line AC from coordinates of A and C: $y = \frac{-3}{4}x + 6$. Line BD is perpendicular to line AC: $y = \frac{4}{3}x$. Point D is the intersection of lines AC and BD. Coordinates of point D are (2.88, 3.84). Segment $\overline{BD}$ is the altitude of triangle ABC: $|BD| = \sqrt{2.88^2 + 3.84^2} =$ 4.8.



Multiple outcome tasks

Levenson et al. (2018) examined mathematical creativity using open tasks with a requirement to generate as many answers as possible. Although Levenson et al. call these tasks open tasks, we will use the term Multiple

Outcome Tasks (MOT), relying on Leikin's (2018) categorization. To assess mathematical creativity using MOT, Molad et al. (2020) propose a model based on fluency, which refers to the number of correct but noncongruent answers; flexibility, which considers answer categories; and originality, which is determined by frequency and insight. Generally, an answer that is present in 15% or less of the solutions is considered original. Tasks like MOT offer better opportunities to promote flexibility in the school environment because a task intended for use in a specific environment should also be evaluated by analyzing the outcomes of its implementation in that environment (Levenson et al., 2018). Example 1 is an example of MOT taken from Molad et al. (2020). The students' solutions to this task included various convex and non-convex polygons, regular and irregular ones. The methods students used to create shapes with the required area were counting squares of grid paper or calculating the area of a particular shape. Some students generated almost 50 shapes, but researchers only considered some to be appropriate. The task itself has infinite solutions.

Example 1: Construct multiple polygons with an area of 15 square units.

Certain MOTs, such as the one presented above, facilitate the utilization of a wide array of problem-solving strategies and lead to the discovery of various solutions. This dual focus allows educators and researchers to assess both the products and processes of creativity. By analyzing the solutions that students generate, one can gauge the creativity of the outcomes—this reflects the product aspect of creativity. On the other hand, evaluating the different strategies students employ to arrive at these solutions offers insights into the creative process itself, similar to the approach with MSTs (Levenson et al., 2018). Klein and Leikin (2020) caution that while MSTs are inherently open-start tasks, MOTs are not always open-end tasks. However, to qualify as a task that fosters creativity, MOT must be open-ended (Bicer et al., 2020). Example 2 shows an example of MOT, which cannot necessarily be considered an open-ended task because it requires a complete set of outcomes (Leikin & Elgraby, 2022).

Example 2: Construct all possible rectangles for which the area is 120 square units, and the sides' lengths are whole numbers of units.

Problem posing

Problem posing is an open task, which can serve as a method to stimulate creativity, especially when there is an explicit requirement that the person posing the problem poses as many problems as possible for the given situation. According to Bevan and Capraro (2021), this approach not only leverages students' prior knowledge but also encourages the integration of real-world scenarios, promoting critical and adaptable thinking. However, not all problem-posing activities are creativity-directed activities. To understand that, let us examine approaches to problem-posing. Research on problem-posing reveals two theoretical frameworks: Stoyanova and Ellerton (1996) and Silver (1994). The first theory categorizes problem-posing into free, semi-structured, and structured categories. Structured problem-posing asks for reshaping a previously solved problem or changing the conditions or questions of given problems. In constrast, semi-structured problem-posing requires students to complete an open scenario using previous mathematical knowledge and experience. Free problem-posing involves students creating their problems based on given situations. Silver (1994) defines problem-posing as either restating or introducing new problems. Restatement of an existing problem entails describing the problem in a new way by changing the problem statement of a solved problem. While both theoretical frameworks are used by researchers, Stoyanova and Ellerton's (1996) approach has received more attention (e.g., Bonotto, 2013; Bonotto & Dal Santo, 2015; Van Harpen & Presmeg, 2013). Moreover, semi-structured or unstructured situations foster mathematical creativity more than structured ones because such situations stimulate student sensitivity to a problem (Bonotto & Dal Santo, 2015).

When posing problems, one can also assess components of mathematical creativity such as fluency, flexibility, and originality (Van Harpen & Sriraman, 2013). Fluency can refer to the number of posed problems, flexibility to the diversity of posed problems (e.g., in terms of different mathematical ideas or strategies to be applied), and originality to the rareness of the posed problems compared within the solution space of a peer group. If 10% or more of the participants in that group proposed the problem, it is considered original. Problem posing has other advantages. If teachers allow students to pose problems, they can gain valuable insight into students' mathematical viewpoints, their prior knowledge, and current understanding of the concepts used (Kiliç, 2017).

Figure 2 is an example of PP used in intervention among elementary school students in a study by Bicer et al. (2020).

Figura 3

Example of problem-posing activity

Make up as many problems as possible by using the menu shown below.
You and a friend go to lunch with $20. Set up your solutions.

Menu	
Pork Tenderloin	$ 8.99
French Dip	$ 7.47
Reuben	$ 6.50
Turkey Club	$ 5.49

The students who were assigned to the problem-posing group showed an increase in mathematical creativity compared with results before the intervention. Moreover, the study indicates that integrating problem-posing strategies into elementary mathematics classrooms (grades 3–5) can help students develop creative abilities.

Another approach to mathematical creativity

Prabhu and Czarnocha (2014) advocate for a more comprehensive approach to the study of mathematical creativity, stressing the importance of incorporating students from underprivileged communities and those with negative feelings toward the subject. They emphasize how crucial it is to create a stimulating environment and turn negative experiences into positive ones. Specifically, Prabhu (2016) found that affective barriers—rather than cognitive barriers—are the main obstacles that underprivileged communities encounter in mathematics classrooms. Students' self-perception of mathematical failure hindered them more than actual comprehension gaps. Additionally, Czarnocha (2014) emphasizes the significance of sudden understanding, or the 'Aha moment,' especially among marginalized students. He argues that this instant insight is a crucial part of creativity, which is frequently overlooked in earlier discussions. This concept aligns with Koestler's (1964, in Czarnocha, 2014) definition of creativity, highlighting the spontaneous nature of creative insights.

Koestler views creativity as a key element within a problem-solving context, defining it as moving from an initial situation to a desired goal. He focuses on the 'Aha moment' or bisociation, which he describes as a sudden cognitive leap that often leads to insights. This Aha moment requires what Koestler calls a bisociative frame. This mental framework connects two seemingly unrelated sets of ideas or experiences to uncover a hidden analogy, the core of creative insight. According to Czarnocha (2014), Koestler's idea of bisociation integrates insights from three different fields: humor, discovery, and art, identifying bisociation as the common thread that underpins the Aha moment across these fields. This idea is presented through a triptych that symbolizes the connection of humor with discovery and discovery with art:

comic comparison ↔ objective analogy ↔ poetic analogy

The first part of the triptych aims to awaken laughter and cheerfulness; the second leads to a deeper understanding; and the third introduces the world of wonder and surprise. After recognizing the humorous dimension and the core of the concept, it is necessary to delve into its deeper layers for a complete understanding and finally interpret it through the prism of art. Although the emotional and expressive tone changes within the triptych, the basic concept of bisociation is consistent across all domains. Czarnocha et al. (2018) point out that bisociation provides a solution to the classic division of creativity into specific and general, arguing that both aspects coexist at the base of every creative phenomenon: the universal principle of bisociation works in parallel with its specific application within a particular domain. Considering its form, the triptych also represents an open task. As an example of the triptych, we present one from the domain of statistics (Czarnocha et al., 2016):

trailblazer ↔ outlier ↔ originality
↔ sampling ↔
↔ probability ↔
↔ confidence interval ↔
↔ law of large numbers ↔

The given triptych illustrates the idea, and students should fill in the left and right sides e.g., probability.

Prabhu and Czarnocha (2014) point out that tasks in the form of a triptych allow students to identify connections between key mathematical concepts and actively participate in the learning process. This method is beneficial because it encourages all students to get involved and contribute, even those who face internal barriers, such as the belief that they cannot do it. Czarnocha (2021) contends that when analyzing Aha moments in mathematics, the focus should be on their ability to advance their understanding of specific mathematical ideas rather than their appearance. Analyzing Aha moments allows us to be understand better how they deepen students' conceptual knowledge and lead to a more comprehensive understanding of mathematics. Furthermore, Czarnocha proposes qualitative indicators for evaluating the depth of Aha moments based on the concept of bisociation. Mild bisociation involves only one conceptual connection or analogy. This includes the process in which discovering a hidden analogy involves elementary conceptions. Normal bisociation refers to cognition, in which several elementary concepts are coordinated to form a functional whole. A functional whole is defined as creating an internal schema that leads to a solution or a higher level of understanding. Strong bisociation contains at least two steps or cycles in the development of understanding. In this way, one can assess the depth of the Aha moment during and immediately after its duration. Czarnocha further argues that by focusing assessment on change in student understanding, external constraints on what counts as creative are eliminated, and creativity can be assessed at whatever level it occurs.

It seems that Czarnocha has created an alternative assessment of creativity that is not based on flexibility and fluency. Moving away from fluency and flexibility, on the one hand, can be convenient and useful, because Leikin and Lev (2013) indicated a decrease in originality during an experiment based on Torrance's definition, which included flexibility, fluency, and originality.

Classroom environment

As noted in the previous section, the learning environment significantly impacts mathematical creativity. Numerous studies have examined which factors, apart from suitable tasks, impact the development of creativity. One is the interaction among students in the classroom (Molad et al., 2020; Levenson & Molad, 2022). In their study, Molad et al. (2020) investigated postsecondary students' mathematical creativity through individual and collaborative work. The researchers discovered that students who had engaged in group work exhibited higher levels of fluency and flexibility in their work than those who had performed individual work. Additionally, group activities helped students learn new mathematical concepts that they would later use independently. Furthermore, students had the chance to learn about different ideas and ways to solve problems, to think critically, and to expand their knowledge of math topics. Levenson and Molad (2022) detected that collaborative groups are capable of producing unexpected, novel solutions. They found that flexibility increases with greater collaboration among group members; likewise, collective fluency improves when a diverse group of students collaborates in a manner that allows everyone to contribute.

Other factors are also influential in the school environment. Cho (2007) points out that students ought to have the autonomy to engage in creative activities without fear of the consequences of failure; teachers should encourage unanticipated responses and honor original ideas. Similarly, Kaufman & Sternberg (2006) argue that students should be encouraged to express their creative ideas, notwithstanding the potential for dissent from other students. Another element that promotes the development of mathematical creativity is parental and academic support. Teachers and parents should create an atmosphere free from tension and anxiety wherein students are encouraged to commit errors and encounter setbacks (Pham & Cho, 2018).

Classroom environment

This paper presents various open tasks appropriate for promoting mathematical creativity in a school environment. Open tasks were selected as the focus over other approaches available, given their partial inclusion in school textbooks (e.g., Bingolbali, 2020; Cai & Jiang, 2017; Yang et al., 2017). Namely, research shows that the tasks used in mathematics lessons are similar to those in the textbooks (Schmidt, 2012). Therefore, teachers' ability to integrate creativity-directed tasks into their mathematics instruction partly depends on the textbooks they use. Some studies found that as students move up the grade levels, the number of creativity-directed activities in general and open tasks in particular decreases (Bicer et al., 2021; Hadar & Tirosh, 2019), giving the impression that creativity is the domain of younger students. When it comes to encouraging mathematical creativity, teachers have the final say in selecting and implementing activities within the classroom (Freiman, 2009). Yet, challenges persist, including teachers' resistance to open tasks due to a lack of recognition of their benefits, difficulties in assessment, and the need for flexibility in posing and implementing such tasks (Klein & Leikin, 2020; Mihajlović & Dejić, 2015). Additionally, the emphasis on standardized assessment further inhibits the incorporation of creativity-directed tasks (Brookhart, 2013; Long et al., 2022).

A new pedagogy is needed to cultivate mathematical creativity effectively: one that fosters an open classroom atmosphere, integrates creativity-directed activities, and draws upon interdisciplinary ideas and real-world experiences (Schoevers et al., 2019). This approach requires a paradigm shift in teacher education and educational policy. First and foremost, education policies must be revised. Policies should encourage the inclusion of creativity-focused tasks at all grade levels, challenging the myth that creativity is only for younger students. Policymakers should advocate for curriculum standards and assessment methods that promote and measure creativity. Furthermore, professional development programs should provide teachers with the knowledge and skills they need to recognize the value of mathematical creativity, design and implement creativity-directed tasks, and effectively assess creative work. Training should also focus on increasing teachers' confidence in dealing with the complexities and uncertainties of such tasks. This should include creating a classroom environment that promotes risk-taking, collaboration, and open discussion.

References

Bevan, D., & Capraro, M. M. (2021). Posing creative problems: a study of elementary students' mathematics understanding. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3), em0654. https://doi.org/10.29333/iejme/11109

Bicer, A. (2021). A systematic literature review: Discipline-specific and general instructional practices fostering the mathematical creativity of students. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology, 9*(2), 252–281. https://doi.org/10.46328/ijemst.1254

Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 457–485. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8

Bicer, A. Marquez, A., Valesca, Colindres, K. V. M., Schanke, A. A., Castellon, L. B., Audette, L. M, Perihan, C. & Lee, Y. (2021). Investigating creativity-directed tasks in middle school mathematics curricula. *Thinking Skills and Creativity, 40*, 100823 https://doi.org/10.1016/j.tsc.2021.100823

Bingolbali, E. (2020). An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(5), 669–687. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1606949

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing student's potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching.* JB Jossey-Bass.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5

Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 103–123). Springer.

Brookhart, S. M. (2013). The use of teacher judgement for summative assessment in the USA. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 20*(1), 69–90, https://doi.org/10.1080/0969594X.2012.703170

Cai, J., & Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(8), 1521–1540. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9758-2

Cho, S. (2007). Nurturing creative problem solving ability of the gifted in Confucian society. *Journal of Gifted/Talented Education, 17*(2), 392–411.

Czarnocha, B. (2014). O kulturi kreativnosti u matematičkom obrazovanju [Sobre la cultura de la creatividad en la educación matemática]. *Inovacije u nastavi - časopis za savremenu nastavu , 27*(3), 31–45. https://doi.org/10.5937/inovacije1403031C

Czarnocha, B. (2021). Assessment of the depth of knowledge acquired during an Aha! moment insight. In B. Czarnocha, & W. Baker (Eds.), *Creativity of an Aha! moment and mathematics education* (pp. 110–138). Brill Publisher.

Czarnocha, B., Baker, W., & Dias, O. (2018). Creativity research in mathematics education simplified: using the concept of bisociation as Ockham's razor. In P. Ernest (Ed.), *The philosophy of mathematics education today. ICME-13 Monographs* (pp. 321–332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_20

Czarnocha, B., Baker, W., Dias, O., & Prabhu, V. (2016). *The creative enterprise of mathematics teaching research*. Sense Publishers.

Elgrably, H., & Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem solving expertise: Posing new problems through investigations. *ZDM, 53*(4), 891–904. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3

Freiman, V. (2009). Mathematical enrichment: Problem-of-the-week model. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 367–382). Sense Publishers.

Grégoire, J. (2016). Understanding creativity in mathematics for improving mathematical education, *Journal of Cognitive Education and Psychology, 15*(1), str. 24–36. https://doi.org/10.1891/1945-8959.15.1.24

Guilford, J. P. (1950). *Creativity. The American Psychologist, 5*(9), 444–454.

Hadar, L. L., & Tirosh, M. (2019). Creative thinking in mathematics curriculum: An analytic framework. *Thinking Skills and Creativity, 33*, 100585. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2019.100585

Jukić Matić, Lj., & Sliško, J. (2024). An empirical study of mathematical creativity and students' opinions on multiple solution tasks. I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(9), 2170–2190. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2129496

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? In K. Kaiser & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1016–1023). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Kaufman, J. C., & Sternberg, R. J. (Eds). (2006). *The international handbook of creativity.* Cambridge University Pres

Kiliç, C. (2017). A new problem-posing approach based on problem-solving strategy: Analyzing pre-service primary school teachers' performance. *Educational Sciences: Theory and Practice, 17*(3), 771–789.

Klein, S. & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel? *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 349–365. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–135). Sense Publishers.

Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 387–397). Springer.

Leikin, R. & Elgrably, H. (2022). Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: focusing on problem posing through investigations. *ZDM, 54*(1), 35–49. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01319-1

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM, 45*(2), 183–197. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8

Leikin, R., & Sriraman, B. (2016). Introduction to Interdisciplinary Perspectives to Creativity and Giftedness. In R. Leikin, & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (pp. 1–3). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*1(1), 73–90. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Levenson, E. S., & Molad, O. (2022). Analyzing collective mathematical creativity among post high-school students working in small groups. *ZDM, 54*(1), 193–209. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01321-7

Levenson, E., Swisa, R., & Tabach, M. (2018). Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: Definitions and measurements. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 273–294. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1450777

Long, H., Kerr, B.; Emler, T. E., & Birdnow, M. (2022). A critical review of assessments of creativity in education. *Review of Research in Education, 46*(1), 288323. https://doi.org/10.3102/0091732X221084326

Mihajlović, A., & Dejić, M. (2015). Using open-ended problems and problem posing activities in elementary mathematics classrooms. In F. M. Singer, F. Toader, & C. Voica (Eds.), *Proceedings of the 9th Mathematical Creativity and Giftedness international conference* (pp. 34–41). Nanyang Technological University.

Molad, O., Levenson, E. S., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post–high school students. *Educational Studies in Mathematics, 104*(2), 201–220. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09952-5

Organization for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2019). *OECD future of education and skills 2030: OECD learning compass 2030.* OECD.

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of open-ended problems. *ZDM, 27*(2), 55–57.

Pham, H. L. & Cho, S. (2018). Nurturing mathematical creativity in schools. *Turkish Journal of Giftedness and Education, 8*(1), 65–82.

Prabhu, V. (2016). The creative learning environment. In B. Czarnocha, W. Baker, O. Dias & V. Prabhu (Eds.), *The creative enterprise of mathematics teaching research* (pp. 107–126). Sense Publishers.

Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2014). Democratizing mathematical creativity through Koestler's bisociation theory. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicole, & D. Allan (Eds.). (2014). *Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3) (pp. 1–8). PME.

Schindler, M., & Lilienthal, A. (2020). Students' creative process in mathematics: Insights from eye-tracking-stimulated recall interview on students' work on multiple solution tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 1–22.

Schmidt, W. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 143–160). Springer.

Schoevers, E. M., Leseman, P. P. M., Slot, E. M., Bakker, A., Keijzer, R., & Kroesbergen, E. H. (2019). Promoting pupils' creative thinking in primary school mathematics: A case study. *Thinking Skills and Creativity*. *31*, 323–334. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2019.02.003

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 497–533.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Sriraman, B. (2005). Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*, 20–36. https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM, 41*(1–2), 13–27. http://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle grade level: How are they related? *ZDM, 45*(2), 227–238.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2018). Instances of promoting creativity with procedural tasks. In M.F. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students* (pp. 83–114). Springer.

Tabach, M. & Levenson, E. (2018). Solving a task with infinitely many solutions: Convergent and divergent thinking in mathematical creativity. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: a focus on technology, creativity and affect* (pp. 219–242). Springer.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2018). The power of seeing in problem solving and creativity: An issue under discussion. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 243–272). Springer.

Van Harpen, X., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 117–132. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 201–221. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5

Yang, D. C., Tseng, Y. K., & Wang, T. L. (2017). A comparison of geometry problems in middle-grade mathematics textbooks from Taiwan, Singapore, Finland, and the United States. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(7), 2841–2857. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00721a

SEGUNDA TENDENCIA

COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Abordando la educación para el desarrollo sostenible desde la modelación matemática

Verónica Vargas Alejo [1]
Luis Montero Moguel [2]

Resumen

Ante la situación de crisis de sostenibilidad ambiental, la UNESCO señala la necesidad de fomentar el desarrollo de conocimiento, conciencia y acción en la educación de los individuos para empoderar a las personas para transformarse a sí mismas y transformar las sociedades. Este estudio cualitativo tuvo como objetivo analizar los modelos matemáticos generados por estudiantes al resolver una actividad en el contexto de una situación ambiental de tala de árboles en una comunidad indígena. Entre los conceptos matemáticos subyacentes se encuentran proporciones y funciones lineales. La perspectiva de modelos y modelación fue el sustento teórico. Los participantes del estudio fueron nueve estudiantes de posgrado que estaban tomando un curso de Modelación. Como resultado, se identificó que los modelos matemáticos construidos para resolver la actividad en el contexto de una situación ambiental integraron dos aspectos fundamentales 1) reflexiones sobre el tema de sostenibilidad ambiental y 2) conocimientos y habilidades matemáticas para usar razones, proporciones y función lineal.

Palabras clave

Modelación, Reforestación del bosque, Actividad provocadora de modelos, Proporciones, función lineal.

---

[1] veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-7431-0568

[2] luis.monteromoguel@utsa.edu
Universidad de Texas en San Antonio, Texas, USA
https://orcid.org/0000-0002-9009-1377

Vargas Alejo, V., & Montero Moguel, L. (2024). Abordando la educación para el desarrollo sostenible desde la modelación matemática. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 57–79). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-03

Introducción

En un mundo interconectado e interdependiente, se intensifican las preocupaciones respecto a amenazas ecológicas, económicas y sociales que se presentan (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization [UNESCO], 2017). La UNESCO (2016, 2020) emite un llamado urgente a los países del mundo para que prioricen la integración de la Educación para el Desarrollo Sostenible [EDS] y la ciudadanía global en sus agendas. Esta llamada implica un distanciamiento de la enseñanza dogmática y mecanicista, así como del aprendizaje meramente memorístico. En su lugar, propone una educación que se vincule con cada uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible [ODS] de la Agenda 2030.

Tomando como ejemplo el ODS que se enfoca en "proteger, restaurar y promover el uso sostenible de los ecosistemas terrestres, gestionar los bosques de forma sostenible, combatir la desertificación y detener e invertir la degradación de la tierra y la pérdida de la biodiversidad" (UNESCO, 2020, p. 1), se destaca que la educación puede contribuir al desarrollo de habilidades y al aumento de "la capacidad para mantener medios de vida sostenibles y conservar los recursos naturales y la biodiversidad, especialmente en entornos amenazados" (UNESCO, 2016, p. 6). Por tanto, una función esencial de la educación es "fomentar capacidades para transformar el mundo, permitiendo realizar más plenamente nuestra humanidad y la preservación del entorno biofísico del que dependemos" (UNESCO, 2017, p. 15).

La UNESCO (2017) destaca la necesidad de realizar más investigaciones que consideren esta estrategia y la posibilidad de propiciar que los estudiantes desarrollen conocimientos y habilidades de la disciplina, como las matemáticas. De manera simultánea, busca que los estudiantes aprendan cómo contribuir al logro de una transformación sostenible de la sociedad. Finalmente, señala la necesidad de desarrollar materiales educativos que fomenten una educación de calidad para el desarrollo sostenible.

La Modelación es uno de los enfoques actuales mediante el cual varios investigadores (Vorhölter & Siller, 2023) están participando ante el llamado de la UNESCO (2017). Estos investigadores señalan que, en países como Alemania, se ha encontrado que estos enfoques pueden ser de utilidad para que los estudiantes aprendan matemáticas y estrategias útiles para enfrentarse a situaciones o fenómenos cotidianos como aquellos relacionados con contextos de sostenibilidad. Vorhölter y Siller (2023) proponen que se investigue con más profundidad al respecto. Por ejemplo, mencionan que es necesario analizar qué preguntas incluir en los problemas o cómo formularlas para promover la EDS.

Lo anterior, entre otros elementos, justifica el interés en este estudio por utilizar como Marco Teórico, elementos de la perspectiva de modelos y modelación (MMP, por sus siglas en inglés, Models and Modeling Perspective), como las MEAs (por sus siglas en inglés, Model Eliciting Activities), las cuales se diseñan bajo principios que definen cómo plantear problemáticas del entorno cotidiano a los estudiantes. Se ha encontrado, por ejemplo, que las MEAs permiten promover tanto el conocimiento disciplinar como formas de pensamiento flexibles —que posibilitan a los estudiantes aprender más allá de los contextos escolares, de tal manera que se formen individuos en la escuela, capaces de abordar los problemas actuales y los retos del futuro (Lesh & Doerr, 2003; Sevinc & Lesh, 2021). Investigadores como English (2021) Sevinc y Lesh (2021) han señalado que, a través de estas actividades se puede promover conocimientos y habilidades requeridas en este siglo de grandes transformaciones. Los estudiantes pueden reconocer el valor de las matemáticas y aprenderlas de manera interdisciplinaria al resolver problemas cercanos a la vida real (Lesh, 2010), como sugiere la UNESCO (2017).

Una estrategia que la UNESCO propone para promover el desarrollo de la EDS es el uso de actividades tipo estudio de caso. La MMP, la cual se describirá con más amplitud en la siguiente sección, propone que los estudiantes aborden, de manera colaborativa, situaciones-problema tipo estudio de caso (MEAs) cercanas a la vida real (Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh & Doerr, 2003; Sriraman & Lesh, 2006). Entre los objetivos del diseño e implementación de las MEAs se encuentran el de revelar el pensamiento de los estudiantes, apoyar el desarrollo y la profundización de conocimiento matemático y de otras disciplinas, así como fomentar el desarrollo de habilidades matemáticas para interpretar, describir y predecir el comportamiento de fenómenos. Las MEAs posibilitan que los estudiantes construyan herramientas conceptuales útiles no solo para dar sentido a sus experiencias, sino también para crear nuevas realidades y experiencias (Lesh & Doerr, 2003).

Investigaciones como Moore et al. (2013) y Montero-Moguel et al. (2022) han informado que el diseño de las MEAs conduce a los estudiantes desarrollar procesos de modelación en los cuales el contexto de la actividad tiene un papel relevante. En consecuencia, consideramos que las MEAs pueden ser una herramienta poderosa para explorar el proceso de desarrollo de conocimiento relacionado con la función lineal de los estudiantes a medida que discuten y reflexionan sobre situaciones ambientales. Por lo tanto, en este estudio, interesa analizar los resultados de la implementación de una MEA en el contexto de una iniciativa de reforestación en una comunidad indígena, como respuesta a la tala de árboles. El objetivo fue identificar qué conocimientos relacionados con la función lineal usaron los estudiantes al abordar la situación y, simultáneamente, qué reflexiones, emergieron en torno a la situación ambiental. Este estudio se vincula estrechamente con las dos dimensiones clave mencionadas por la UNESCO (2017): fomentar un aprendizaje, "donde los estudiantes adquieren conocimientos y habilidades de la disciplina y, de manera simultánea, aprenden cómo contribuir a una transformación sostenible de la sociedad -aprenden a convivir con profundo respeto con el medio ambiente y la dignidad de todos" (p. 19).

La pregunta de investigación que guió el estudio fue: ¿en qué medida la MEA Propuesta de reforestación contribuye al uso del conocimiento sobre la función lineal a la vez que promueve la reflexión sobre la situación ambiental planteada? Desde la definición de Rodgers (2002) nos referimos con reflexión al proceso que desarrollan los estudiantes que les permite transitar desde una comprensión inicial hacia una comprensión más profunda que relaciona y conecta con otras experiencias.

Marco Teórico

La MMP, desarrollada por Lesh y colaboradores (Doerr, 2016; Lesh, 2010, Lesh et al., 2000; Lesh et al., 2007; Lesh & Doerr, 2003), señala que aprender matemáticas puede entenderse como un proceso social de desarrollo de modelos, los cuales están en constante cambio, modificación, extensión y refinamiento a medida que los individuos (ya sea estudiantes, profesores, investigadores o administradores, entre otros) interactúan entre sí y están inmersos en ambientes donde se tiene que resolver algún problema. Es decir, la MMP concibe al conocimiento como un sistema complejo y dinámico, en constante adaptación y auto-regulación (Lesh & Yoon, 2004; Sriraman & Lesh, 2006).

Esta perspectiva fomenta el aprendizaje de las matemáticas de manera integral, en colaboración con otras áreas de conocimiento, reconociendo que los conceptos no pueden ser comprendidos de manera aislada de otros conceptos y fenómenos interrelacionados. De acuerdo con la MMP (Lesh, 2010, p. 18) un modelo se define como: "un sistema para describir algún otro sistema para algún propósito en específico".

> Los modelos son sistemas conceptuales que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas de tal manera que el otro sistema pueda ser explicado o pronosticado. (Lesh & Doerr, 2003, p. 10)

Los modelos residen tanto en la mente como en los medios representacionales (Lesh & Carmona, 2003). Las representaciones permiten conocer aspectos esenciales del modelo que los estudiantes han construido en su mente (Lesh & Doerr, 2003). Las herramientas tecnológicas son un medio para la construcción de estas representaciones. Los modelos pueden ser situados, útiles sólo para el contexto o compartibles y reutilizables (Lesh, 2010).

La MMP, como se mencionó en la introducción, propone el uso de MEAs (Lesh et al., 2000; Lesh & Kelly, 2000), intencionalmente diseñadas con un contexto relevante para satisfacer las necesidades de un cliente específico (Hamilton et al., 2008). Las MEAs propician que los estudiantes construyan y refinen modelos matemáticos que les permitan comprender, describir, explicar, predecir y controlar el comportamiento de fenómenos (Lesh & Doerr, 2003). Estas descripciones y explicaciones generadas por los estudiantes no son procesos simples que ellos usan en el proceso de producción de una respuesta o solución a un problema (Montero-Moguel & Vargas-Alejo, 2022). Tampoco son reflexiones o comentarios que los estudiantes elaboran después de producir una respuesta.

El proceso de elaborar modelos, es decir, de crear descripciones y explicaciones es lo más importante en la MMP, "el proceso es el producto" (Lesh & Doerr, 2003, p. 3). Durante este proceso, parte del refinamiento de los modelos incluye que los estudiantes profundicen en la comprensión de las necesidades del cliente propuesto en la MEA (Lesh, 2010). Se espera que los estudiantes traten de elaborar una herramienta útil en ideas y procedimientos para los fines del cliente, que incorpore explicaciones necesarias, que la hagan lo más simple, clara y bien organizada para que ellos la puedan utilizar, y para que otros puedan usarla en situaciones similares.

Se busca que "los estudiantes vayan más allá de pensar con la herramienta para también pensar sobre ella, al identificar supuestos subyacentes" (Lesh, 2010, p. 33) y que reconozcan las fortalezas y debilidades de estas en comparación con otras alternativas posibles. Por ejemplo, se podría esperar que un estudiante, al abordar una MEA, construya alguna herramienta conceptual para interpretar y explicar la situación-problema. Esta herramienta conceptual, que puede componerse de una o más grandes ideas matemáticas como razones, variación lineal, usualmente primero posibilitaría pensar en la situación, pero posteriormente, podría pensarse en ella como un objeto o conjunto de objetos matemáticos con su propia definición y características. Es decir, el estudiante podría discernir las fortalezas y debilidades del objeto matemático (función lineal, por ejemplo) en comparación con otros objetos matemáticos y aprender a identificar qué tipo de situaciones o fenómenos puede describirse o explicarse con esta herramienta. Este proceso puede requerir que los estudiantes participen en más de una MEA (Lesh & Doerr, 2003).

Otro elemento importante de las MEAs es que, con la implementación de ellas en el aula, se busca también propiciar que los estudiantes participen en experiencias de modelación al resolver situaciones-problema cercanas a la vida real en ambientes colaborativos, inclusivos y equitativos donde se promueva el pensamiento crítico, la creatividad, la autonomía y la colaboración, habilidades del siglo XXI (Sevinc, 2022).

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa. Se desarrolló un proceso de análisis temático el cual permite "identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos" (Braun & Clarke, 2006, p. 79). Específicamente este método posibilitó la identificación y análisis en los modelos de los estudiantes tanto de los temas vinculados al conocimiento sobre la función lineal como los temas relacionados a los procesos de reflexión desarrollados por los estudiantes sobre el contexto ambiental de reforestación. Es decir, en términos de Rodgers (2002), los procesos que desarrollan los estudiantes para transitar desde una comprensión inicial del fenómeno hacia una comprensión más profunda que relaciona y conecta con discusiones y/o experiencias sobre el tema ambiental de reforestación del bosque.

Para este estudio se eligió un grupo de nueve estudiantes de posgrado con experiencia como profesores o tutores de matemáticas en los niveles de secundaria y bachillerato. Estaban tomando un curso de Modelación matemática y resolución de problemas. Como antecedente, meses antes, en un curso previo del programa de posgrado los participantes habían resuelto la MEA Deforestación (Vargas-Alejo et al., 2018) y la MEA Gigante Bondadoso (Lesh & Doerr, 2003) la cual fue adaptada a un contexto cercado para los estudiantes (Vargas-Alejo & Montero-Moguel, 2023). Los estudiantes fueron agrupados en un equipo y tres binas. El equipo A conformado por tres estudiantes (A1, A2 y A3) y las binas C (C1 y C2), D (D1 y D2) y E (E1 y E2). La bina D tenía experiencia docente en bachillerato. El resto de los estudiantes tenían experiencia como tutores o docentes de alumnos de secundaria. Previo a la implementación los estudiantes expresaron que sus métodos de enseñanza sobre la función lineal era tipo tradicional, es decir, mediante explicaciones y ejercicios. Pero, tenían la experiencia de abordar el problema del Gigante Bondadoso en uno de sus cursos previos de posgrado.

Para este estudio, los estudiantes resolvieron la MEA titulada Propuesta de reforestación, la cual fue diseñada con base en los seis principios señalados por Lesh et al. (2003). Esta MEA forma parte de una secuencia que incluye a la MEA Deforestación (Vargas-Alejo et al., 2018). El contexto de ambas actividades se basa en el cambio del tipo de suelo y la tala de árboles del bosque michoacano, fenómenos que durante los años 2016-2019 recibieron mucha atención en periódicos locales, nacionales y redes sociales. La MEA Propuesta de reforestación consistió en una nota periodística, preguntas sobre el contexto y el problema (Figura 1). El problema podía resolverse mediante conceptos como razones, proporciones y función lineal.

La MEA se implementó en cuatro fases. Las tres primeras son sugeridas por la MMP (Lesh & Doerr, 2003), mientras que la cuarta fase se añadió con el objetivo de propiciar que todos los estudiantes construyeran reflexiones y participaran en la discusión de los modelos. Para esta última fase, los estudiantes tuvieron la oportunidad de revisar de manera individual cada modelo construido por sus compañeros y analizarlo. Las fases fueron:

1. Lectura y discusión de la nota periodística en equipo y binas,
2. Resolución del problema en equipo y binas,
3. Presentación y discusión grupal de los modelos y
4. Escritura de reflexiones personales en un foro creado en Moodle.

La recolección de datos se realizó a través de las cartas escritas por los estudiantes, archivos de Word y Excel, las notas escritas por los estudiantes en el foro y la bitácora del investigador. Todas las cartas de los modelos de los estudiantes fueron organizadas y revisadas minuciosamente y las notas en el foro fueron agrupadas.

Figura 1

Problema incluido en la MEA Propuesta de reforestación

La superficie de Cherán es de 22,313 ha, y la superficie de bosque es de 12,288 ha. Se estima que en el bosque de Cherán la cantidad de árboles por hectárea son 202.53, de los cuales 83.19 son pinos, 94 son encinos y 25.34 son otras especies hojosas. La superficie prioritaria para reforestación es de 1,404 ha.

El plan de Martín es reforestar las 1,404 hectáreas con pinos y encinos en menos de dos años. Se le ocurre presupuestar cierta cantidad inicial para la compra de árboles. ¿Le convendría pedir 1,000,000.00? ¿Para cuántos pinos y encinos podría alcanzarle esa cantidad de dinero, de tal manera que la reforestación sea en la misma proporción que la identificada en el bosque? ¿Qué superficie de área podría reforestar?

Ayúdale a Martín a encontrar algún método o procedimiento para dar respuesta a estas preguntas. Escríbele una carta donde le expliques tu procedimiento. Trata de que ese procedimiento siempre funcione para cualquier superficie de área que se quisiera reforestar, sin importar la cantidad de dinero inicial.

Resultados

En esta sección se describen las características de los modelos que fueron construidos por los estudiantes del equipo A y las binas C, D y E al resolver el problema incluido en la MEA Propuesta de reforestación. El análisis de las características de cada uno de los modelos permitió reportarlos de la siguiente manera: interpretación del contexto a partir de sus experiencias personales, cómo ello influyó en la construcción de los modelos, tipo de representaciones y conocimiento matemático utilizado y reflexiones finales en cuanto a la situación de reforestación y la actividad (Tabla 1).

Tabla 1

Características de los modelos

Temas	Equipo A	Bina B	Bina C	Bina D
Uso del contexto	Los tres equipos utilizaron el contexto para elaborar el modelo.			
	Aprovechamiento de cada hectárea de la superficie para reforestarla con los 202 árboles, sin considerar el dato de la cantidad de especies hojosas en el modelo		Aprovechamiento de cada hectárea de la superficie para reforestarla más de los 202 árboles al considerar que muchos árboles no llegan a la edad adulta Incorporación en el modelo del costo del transporte por planta, la reforestación con pala plantadora y el deshierbe manual	Aprovechamiento de cada hectárea de la superficie para reforestarla con los 202 árboles, sin considerar el dato de la cantidad de especies hojosas en el modelo
Identificación de las necesidades del cliente	Omitieron la necesidad fundamental del cliente por reforestar las 1,404 hectáreas en dos años.			Satisficieron la necesidad fundamental del cliente por reforestar las 1,404 hectáreas en dos años.
	Respondieron que con 1,000,000 de pesos solo es posible reforestar 90.055ha.	Respondieron que el presupuesto inicial es muy poco y se tendría que solicitar 15,566,148.00 para reforestar 1,404 ha.	Respondieron que para cubrir las 1,404 hectáreas se requieren entre treinta y dos y treinta y tres millones de pesos, todo depende de qué otros gastos puedan emerger.	Respondieron que para reforestar la superficie de 1,404 hectáreas en dos años se requiere una inversión mensual de 633,999.60 además de la inversión inicial de 1,000,000 de pesos
Conocimiento Matemático	Razones y proporciones			Razones, proporciones y Función lineal
Representaciones	Verbal, numérica	Verbal, tabular	Verbal, tabular y algebraica	Verbal, tabular y gráfica
Reflexión sobre la situación ambiental	Reflexión sobre su bosque cercano y la situación actual de deforestación	Reflexión sobre la responsabilidad propia para evitar el daño al bosque	Reflexión sobre su bosque cercano y los percances ambientales que ha sufrido	Reflexión sobre la empatía con el ambiente y el contexto que nos rodea.

Descripción de los modelos del equipo A y bina B

El equipo A dirigió su carta a Martín y en ella le explicó cómo debería proceder para conocer cuánta superficie de bosque podría reforestar con 1,000,000 de pesos (Figura 2). El modelo propuesto por el equipo A consistió en entregar a Martín una herramienta general útil para encontrar las respuestas a las preguntas identificadas en el problema, como la cantidad de hectáreas a reforestar, el presupuesto para comprar pinos y encinos, y el costo de estos árboles.

Figura 2
Sección de Carta del equipo A

Puedes utilizar esta herramienta cada vez con diferentes valores para la cantidad de pinos o encinos por hectárea, o también con otros costos de los árboles o cantidad de hectáreas a reforestar. Solo basta que sustituyas las cantidades según correspondan en cada paso del procedimiento. De hecho, puedes resumirlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\textit{pinos por hectárea} \times \textit{cantidad de hectáreas} \times \textit{costo por pino} \\ &\quad + \textit{encinos por hectárea} \times \textit{cantidad de hectáreas} \times \textit{costo por encino} \\ &\quad = \textit{costo total para reforestación} \end{aligned}$$

Esta forma sintetizada es una fórmula que puedes utilizar para calcular la cantidad de hectáreas que puedes reforestar con cualquier cantidad de dinero, por ejemplo, con $1' 000, 000.00. Lo que debes hacer es escribir cada valor que conozcas donde corresponde. Para el caso de Cherán, la fórmula quedaría así

$$95.081 \times \textit{cantidad de hectáreas} \times 48 + 107.219 \times \textit{cantidad de hectáreas} \times 61 = 1'000{,}000$$

después multiplica y simplifica

$$4\,563.88\ \textit{cantidad de hectáreas} + 6\,540.359\ \textit{cantidad de hectáreas} = 1'000{,}000$$

por último, suma las cantidades y divide el número de la derecha entre la suma, así

$$\textit{cantidad de hectáreas} = \frac{1'000{,}000}{11\,104.239} = 90.055$$

Por tanto, con 1'000,000.00 solo es posible reforestar 90.055 ha, y como sabes que en cada una de ellas de haber 95.081 pinos y 107.219 encinos, entonces, en 90.055 ha habrá

$$95.081\,\frac{pinos}{ha} \times 90.055\ ha = 8\,562.519\ pinos,\ \text{y}$$

$$107.219\,\frac{encinos}{ha} \times 90.055\ ha = 9\,655.6\ encinos$$

No siendo más por el momento, nos despedimos de usted deseándola un feliz día.

Su carta se compone de un conjunto ordenado y sistematizado de pasos que Martín podría seguir para resolver el problema. En el primer paso, los estudiantes le sugirieron identificar la cantidad de árboles (pinos, encinos y especies hojosas) por hectárea que podría "soportar el suelo" a reforestar (202.3 árboles). En el segundo paso, describieron cómo calcular cuántos pinos y encinos plantar, conservando la proporción entre pinos y encinos, pero sin considerar las especies hojosas. La discusión acerca de la importancia de las especies hojosas, definió las condiciones iniciales del procedimiento a seguir. Calcularon que debían plantar 95.081 pinos/ha y 107.219 encinos/ha, sumando así el total de 202.3 árboles/ha.

En el tercer paso, explicaron a Martín cómo calcular cuántos pinos (133,493.724) y encinos (150,535,476) debía comprar para reforestar la superficie de 1,404 hectáreas. Con esta información, en el cuarto paso le indicaron cómo obtener el costo total para reforestar las 1,404 ha.

Hicieron la observación que 1,000,000 de pesos era insuficiente y agregaron en su carta la fórmula general siguiente para explicar a Martín cómo calcular la cantidad de hectáreas a reforestar para cualquier cantidad de dinero. Finalmente, explicaron cómo se podía usar esta fórmula para los datos específicos en el problema (Figura 2).

$$\begin{aligned}&Pinos\ por\ hectárea\ \times\ cantidad\ de\ hectáreas\ \times\ costo\ por\ pino\\ &\quad +\ encinos\ por\ hectárea\ \times\ cantidad\ de\ hectáreas \times costo\ por\ encino\\ &\quad = costo\ total\ para\ reforestación\end{aligned}$$

Figura 3

Sección de Carta de la bina B

Costo pinos por ha.	Costo de encinos por ha.	Suma total gastada
$4,560.00	$6,527.00	$11,087.00

Se requiere de una inversión de $11,087.00 por cada hectárea. Enseguida haremos una proyección para ver cuántas hectáreas se pueden cubrir con $1'000,000.00. Si dividimos el presupuesto entre la inversión por cada hectárea, obtenemos el número de has.

$$\frac{1'000,000}{11,087} = 90.1957\ has.$$

Según nuestro cálculo, nos alcanzaría para reforestar 90.1957 has. Si multiplicamos las 90.1957 has por el número de pinos y encinos que se requieren por hectárea, obtenemos el número de árboles de cada especie que alcanzamos a comprar: 8,568 pinos y 9,650 encinos

En la siguiente tabla observaremos cómo aumenta paulatinamente el presupuesto requerido conforme aumentan las hectáreas a reforestar, así como también se incluye el porcentaje de superficie cubierta.

Núm. Has.	Costo de encinos por ha.	Costo de pinos por ha.	Suma total gastada	Porcentaje de superficie reforestada
20	130,540.00	91,200.00	221,740.00	1.42
40	261,080.00	182,400.00	443,480.00	2.85
60	391,620.00	273,600.00	665,220.00	4.27
80	522,160.00	364,800.00	886,960.00	5.70
85	554,795.00	387,600.00	942,395.00	6.05
86	561,322.00	392,160.00	953,482.00	6.13
87	567,849.00	396,720.00	964,569.00	6.20
88	574,376.00	401,280.00	975,656.00	6.27
89	580,903.00	405,840.00	986,743.00	6.34
90	587,430.00	410,400.00	997,830.00	6.41
90.1	588,082.70	410,856.00	998,938.70	6.42
90.19	588,670.13	411,266.40	999,936.53	6.42
90.1954	588,705.38	411,291.02	999,996.40	6.42
91	593,957.00	414,960.00	1,008,917.00	6.48
92	600,484.00	419,520.00	1,020,004.00	6.55
1404	9,163,908.00	6,402,240.00	15,566,148.00	100.00

De acuerdo con este análisis, considero que el presupuesto inicial que deseas pedir es muy poco, debido a que sólo te alcanzaría para reforestar el 6.55% de tu meta, para cumplirla tendrías que solicitar $ 15,566,148.00.

Sin más que agregar, nos despedimos esperando que los procedimientos detallados con anterioridad te sean de utilidad.

El modelo de la bina B consistió también en mostrar un procedimiento a Martín para obtener respuestas. Describieron cómo debía proceder para saber cuánta superficie de bosque podría reforestar con 1,000,000 de pesos (Figura 3) y cuánto dinero necesitaba realmente para reforestar 1,404 hectáreas. Al igual que el equipo A, la bina B discutió la relevancia de las especies hojosas y optó por reforestar la superficie de una hectárea con 202 pinos y encinos.

La bina no incluyó una fórmula como el equipo A, pero decidieron usar cantidades enteras. Para ellos no tenía sentido usar cantidades con decimales para referirse a la cantidad de árboles. Por lo tanto, los estudiantes de la bina A utilizaron cantidades enteras de pinos (95) y encinos (107). Elaboraron tablas de datos para mostrar cómo aumentaba el costo por reforestar hectáreas, hasta completar las 1,404 hectáreas (Figura 3). Incluyeron en su carta el siguiente comentario:

> *Martín de acuerdo con nuestro análisis necesitarías una inversión total de $15,566,148.00 para reforestar al 100%. Si el presupuesto de $1,000,000.00 estás pensando en pedirlo cada mes, te alcanzaría perfectamente para reforestar en menos de dos años las 1,404 has. que son prioridad, pero si estás pensando que ese sería un presupuesto único, hagamos una proyección para estimar cuántos árboles podrías comprar y qué porcentaje de área con respecto a las 1,404 has podrás reforestar.*

Conocimiento matemático y representaciones observadas en los modelos A y B

El conocimiento matemático utilizado por los estudiantes de la bina A fue razones y proporciones. Construyeron su modelo para explicar a Martín cómo resolver el problema con los datos dados y sugirieron que esta herramienta podría utilizarse para resolver problemas parecidos, con datos distintos. Así lo manifestaron en el siguiente extracto tomado de la Figura 3.

> *Puedes utilizar esta herramienta cada vez con diferentes valores para la cantidad de pinos o encinos por hectárea, o también con otros costos de árboles o cantidad de hectáreas a reforestar.*

El conocimiento matemático utilizado por los estudiantes de la bina B también fue razones y proporciones. Construyeron su modelo para explicar a Martín cómo resolver este problema tomando en cuenta los datos contenidos en el problema.

Tanto el equipo A como la bina B obtuvieron la superficie de bosque que podría reforestar Martín con un millón de pesos; además, exploraron cuánto le costaría a Martín reforestar las 1,404 hectáreas. En los modelos, los estudiantes explicaron a detalle el proceso a seguir para resolver el problema, de tal manera que cada paso del proceso fuera entendido por Martín. Además, se apoyaron en tablas de datos, fórmulas escritas con lenguaje común y símbolos matemáticos. Estas representaciones fueron utilizadas por los estudiantes pensando en todo momento cómo sugerir o explicar a Martín un procedimiento claro y entendible para resolver el problema, así lo explicaron en la discusión grupal.

Reflexiones relacionadas con el tema de reforestación

Durante el proceso de solución del problema incluido en la MEA, surgieron diversas reflexiones en el equipo A y en la bina B relacionadas con el tema de deforestación, los datos del problema y el proceso de modelación. Cada una de estas reflexiones permitió a los estudiantes emprender el proceso de construcción del modelo, modificarlo, ampliarlo y refinarlo; como lo describe la MMP (Lesh, 2010).

Específicamente, en cuanto al contexto de reforestación y su influencia en la construcción del modelo, los alumnos del equipo A discutieron el tema de reforestación con pinos, encinos y hojosas, lo que les llevó a reflexionar sobre la pertinencia de considerar las especies hojosas y tomar la decisión de considerar la cantidad total de 202 árboles, sin considerar estas especies. Esto tuvo una influencia significativa en los modelos construidos.

Otras reflexiones de los integrantes del equipo A giraron alrededor de la importancia del tema de reforestación. Los estudiantes del equipo A mencionaron a través del Foro lo siguiente.

Estudiante A1: *En este caso, la MEA es altamente significativa para mí, ya que, si bien no hay una comunidad aquí cerca de Guadalajara que subsista gracias a la madera, existe el bosque de la primavera que se ha quemado continuamente en los últimos años y necesita reforestación. Este bosque es un regulador de clima para la ciudad.*

Estudiante A2: *Es una problemática que también se vive en mi país y en parte de Sudamérica. Por ejemplo: Brasil, Perú, Paraguay, entre otros.*

Por su parte, los estudiantes de la bina B mencionaron lo siguiente.

Estudiante B1: *Creo que en esta MEA se maneja una situación que está muy cercana a nuestro contexto ya que todos alguna vez hemos estado en un bosque y sabemos lo importante que es su conservación, además, que los bosques no es responsabilidad únicamente de la Comisión Nacional Forestal, o de la SEDEMA, también uno como ciudadano tiene la responsabilidad de no dañarlos.*

Estudiante B2: *La MEA me resultó significativa porque me recordó un familiar cercano, él constantemente nos expresaba su orgullo por el clima templado de la ciudad de Guadalajara, su teoría era que gracias al lago de Chapala y el bosque de la Primavera podíamos disfrutar de esta característica.*

Estas reflexiones ponen de manifiesto la importancia que los estudiantes otorgaron al contexto presente en la nota periodística de la MEA, al conectar la problemática abordada con la de algún bosque cercano a su ciudad.

Destacaron que existe una situación similar de deforestación que demanda atención, no únicamente por parte de las autoridades gubernamentales, sino también por parte de los habitantes que se benefician del bosque.

Modelo de la bina C

La bina C escribió su carta para Martín con la explicación de cómo debería proceder para calcular el costo por reforestar 1,404 hectáreas de bosque (Figura 4). Para elaborar el modelo, los estudiantes, interesados en la problemática, buscaron en internet más información de la que contenía la nota periodística de la MEA. Encontraron costos e implicaciones relacionadas con el proceso de reforestación que maneja la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR) y en su modelo incluyeron gastos más allá de solo la compra de árboles. Por ejemplo, consideraron el costo de: el transporte por cada planta, la reforestación mediante pala plantadora y el deshierbe manual con machete por hectárea. Con base en ello propusieron un procedimiento para obtener el costo de reforestación por hectárea. Esto pudo observarse en el extracto siguiente tomado de la Figura 4.

> *De manera que para obtener el costo de reforestación de una hectárea es necesario multiplicar el costo de cada especie por el número de la misma, los costos relacionados a todas las plantas multiplicarlos por la suma de todas las especies y añadir los costos que estén dados por hectárea, por lo que se tiene que el costo de reforestación para una hectárea de bosque está dado por la siguiente relación:*

$$Z = X_P \cdot Y_P + X_E \cdot Y_E + X_H \cdot Y_H + (X_H + X_P + X_E) \cdot (Y_T + Y_R) + C_D$$

Los estudiantes de la bina C describieron en su carta (Figura 4) el significado de cada letra (por ejemplo, X_P, X_E *y* X_H representan la cantidad de pinos, encinos y especies hojosas, respectivamente). Señalaron que esta relación puede cambiar dependiendo de otros gastos regionales emergentes. Finalmente, ejemplificaron cómo puede usarse esta relación para calcular la cantidad de hectáreas que se pueden reforestar con la cantidad inicial de dinero.

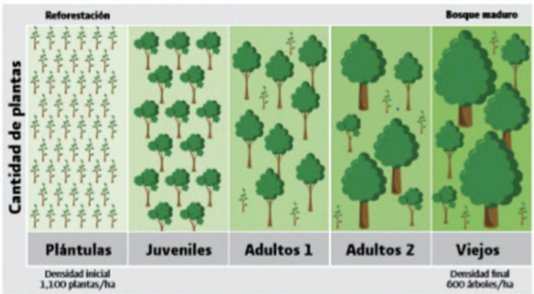
$$W = \frac{V}{Z}$$

Donde señalaron que W representa a las hectáreas reforestadas, V la cantidad de dinero inicial disponible en pesos y Z el costo de reforestación en pesos por hectárea. Elaboraron una tabla de datos y encontraron que con 1,000,000 de pesos se pueden reforestar 43.68 hectáreas y que “se requieren entre treinta y dos y treinta y tres millones de pesos” para reforestar las 1,404 hectáreas.

Figura 4

Sección de la Carta de la bina C

Con base en lo anterior, para mantener la cantidad de cada especie de árbol aproximadamente igual a la que encontró en su investigación, le proponemos que considere que por hectárea se plantarían 168 pinos y 188 encinos, en este caso se redondeo la cantidad de pinos a un número entero. Asimismo, sugerimos considerar a las especies hojosas debido a que pueden ser importantes para el desarrollo de los otros árboles, y se plantarían 48 árboles de esta especia.



La información que se tiene del costo de las plantas es que cada árbol con un costo de $48.00 y $61.00 respectivamente, además se indagó en los costos unitarios promedio nacionales para las obras de reforestación que reportó la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR) de acuerdo a lo que el transporte por planta tiene un costo de $0.43, la reforestación con pala plantadora de $2.10 también por planta y el deshierbe manual con machete de $2460 por hectárea.

De manera que para obtener el costo de reforestación de una hectárea es necesario multiplicar el costo de cada especie por el número de la misma, los costos relacionados a todas las plantas multiplicarlos por la suma de todas las especies y añadir los costos que estén dados por hectárea, por lo que se tiene que el costo de reforestación para una hectárea de bosque está dado por la siguiente relación:

$$Z = X_P * Y_P + X_E * Y_E + X_H * Y_H + (X_H + X_P + X_E) * (Y_T + Y_R) + C_D$$

En la que Z representa a el costo de reforestación de la superficie en pesos/ha, X_P, X_E y X_H la cantidad de pinos, encinos y especies hojosas plantados en la superficie, respectivamente, Y_P, Y_E y Y_H los precios por unidad de pino, de encino y de especies hojosas, respectivamente, Y_T el costo de transporte por planta, Y_R el costo de reforestación con pala plantadora por planta y C_D el costo de deshierbe manual con machete.

Conocimiento matemático y representaciones observadas en el modelo de la bina C

El conocimiento matemático utilizado por los estudiantes de la bina C fue razones y proporciones. Al igual que los estudiantes del equipo A y bina B construyeron su modelo para explicar a Martín cómo resolver el problema, pero no sólo con los datos dados, sino que sugirieron considerar más información pertinente para llevar a cabo el proceso de reforestación. Advirtieron a Martín que su procedimiento podría utilizarse para resolver problemas parecidos, con datos distintos e inclusive con más información. Así lo manifestaron en el siguiente extracto tomado de la Figura 4.

> *Es necesario mencionar que el presupuesto (Z) puede variar de acuerdo con los costos reales de la región para el momento en que se realice la reforestación, ya que para obtener el resultado con el que se ejemplifica fueron utilizados datos promedio del país para el 2017.*

Esta bina obtuvo la superficie de bosque que podría reforestar Martín con un millón de pesos; y también exploró cuánto le costaría a Martín reforestar las 1,404 hectáreas. En el modelo se nota cómo los estudiantes explicaron de manera minuciosa el proceso a seguir para resolver el problema, de tal manera que cada paso del proceso fuera entendido por Martín. La información real que incluyeron en su modelo les permitió hacer sugerencias adicionales a Martín, a quien explicaron el procedimiento apoyándose de tablas de datos y relaciones escritas con lenguaje algebraico.

Reflexiones relacionadas con el tema de reforestación

Durante el proceso de resolución del problema incluido en la MEA, surgieron diversas reflexiones relacionadas con la temática ambiental de la reforestación que fueron fundamentales para la construcción de los modelos. Los estudiantes de la bina C avanzaron de una experiencia a la siguiente, desarrollando una comprensión cada vez más profunda del contexto, los datos, las relaciones y las conexiones con otras experiencias e ideas.

Se observó cómo los estudiantes, partiendo de su experiencia relacionada con la necesidad de reforestar áreas boscosas, reflexionaron sobre la relevancia de las especies hojosas y señalaron que podrían "ser importantes para el desarrollo de los otros árboles". Basándose en esta reflexión, decidieron incorporar información sobre estas especies en su modelo y redactaron la carta fundamentando sus ideas en informes de la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR).

En su modelo se evidencia cómo incorporaron las recomendaciones de la CONAFOR sobre el crecimiento de los árboles, la densidad adecuada para la siembra y los aspectos esenciales previos a la reforestación, como el deshierbe de la zona. En el Foro, un miembro de la bina compartió lo siguiente:

Estudiante C1: *La MEA está contextualizada en un escenario real, ya que la situación que describe realmente existe y está documentada en sitios oficiales de información. Además, para el contexto de nuestro grupo, que es en Guadalajara, existe el bosque de La Primavera que también ha sufrido percances ambientales.*

Estas reflexiones revelan la importancia que los estudiantes otorgaron al contexto presentado en la nota periodística de la MEA. Investigaron la veracidad de la situación y descubrieron que algo similar, en términos de la necesidad de llevar a cabo procesos de reforestación, estaba ocurriendo en el bosque cercano a su ciudad. Además, señalaron la existencia de problemas ambientales en este otro bosque.

Modelo de la bina D

La bina D escribió su carta para Martín en la cual explicó cómo debería proceder, no sólo para calcular cuánto podría reforestar con 1,000,000 de pesos, o el costo por reforestar 1,404 hectáreas de bosque, sino que le propuso cómo podría emprender una proyección de inversión a dos años para la reforestación. Esto con base en que en el problema se señala que "El plan de Martín es reforestar las 1,404 hectáreas con pinos y encinos en menos de dos años" (Figura 1).

La bina propuso dos procedimientos consecutivos. En el primero consideró la cantidad de pinos, encinos y hojosas dadas en el problema. Pero, como el precio de las hojosas no estaba incluido en el problema y además se pretendía reforestar con pino y encinos, calculó el costo total para reforestar 1,404 hectáreas con sólo pinos y encinos (13 656 876.48 pesos). Esto le llevó a considerar una reforestación con 177.19 árboles por hectárea y no 202.53 árboles.

En el segundo procedimiento (Figura 5) tomó en cuenta los 202.53 árboles por hectárea. Por lo tanto, el costo incrementó. Los estudiantes obtuvieron que se requerían 15,581,990.74 pesos para reforestar 1,404 hectáreas con sólo pinos y encinos. En ambos procedimientos tomaron en cuenta la proporción de pinos a encinos, de tal manera que por cada encino se requería plantar 0.885 pinos.

Figura 5

Sección de Carta de la bina D

1404 ha *4 512 pesos = 6 343 743.74 pesos	1404 ha * 6 588 pesos = 9 238 246.99 pesos
6 343 743.74 + 9 238 246.99 = 15 581 990.74 pesos para las 1404 hectáreas con sólo pinos y encinos.	

INVERSION:

INVERSION INICIAL	$	1,000,000.00
DIFERENCIA	$	14,581,990.74
23 MENSUALIDADES	$	633,999.60

Monto total= Inversión + 23 (monto mensual)

Debido a que 1,000,000 de pesos era insuficiente para reforestar las 1,404 hectáreas y se requerían alrededor de 15 millones de pesos, los estudiantes propusieron a Martín un plan de inversión a dos años. Este consistía en invertir el primer mes 1,000,000 de pesos y enseguida 23 mensualidades de $633,999.60. Esta propuesta de inversión la representaron en forma gráfica para el mejor entendimiento de Martín.

Finalmente, construyeron un procedimiento en Excel para que Martín pudiera obtener presupuestos para cualquier superficie que deseara reforestar (Figura 6). El modelo construido por los estudiantes de la bina D (Figuras 5 y 6) puede ser usado para los datos incluidos en el problema o para diferentes datos correspondientes a situaciones similares de reforestación.

Figura 6

Sección de Carta de la bina D

	A	B	D	E	F
1–4	PARA ENCONTRAR LA CANTIDAD DE INVERSIÓN TOTAL QUE SE REQUIERE PARA REFORESTAR EL BOSQUE, INTRODUCE LA CANTIDAD DE HECTAREAS QUE DESEAS REFORESTAR, LA CANTIDAD DE ARBOLES POR HECTAREA, ASÍ COMO EL COSTO DE CADA ARBOL.				
5					
6	CANTIDAD DE BOSQUE A REFORESTAR	1404			
7					
8					
9	ARBOLES	CANTIDAD DE ARBOLES POR HA	ARBOLES NECESARIOS DE COMPRA	PRECIO DE ARBOLES	TOTAL DE GASTO
10	PINOS	0.47	132,161.33	$ 48.00	$ 6,343,743.74
11	ENCINOS	0.53	151,446.67	$ 61.00	$ 9,238,246.99
12	HOJOSAS		-		$ -
13	OTRAS				
14				TOTAL DE INVERSION	$ 15,581,990.74
15					
16–18	PARA ENCONTRAR LA CANTIDAD DE ARBOLES Y AREA CUBIERTA INTRODUCE LA INVERSION.				
19					
20	CANTIDAD INICIAL	$ 1,000,000.00			
21	CANTIDAD DE PINOS	8,481.67			
22	CANTIDAD DE ENCINOS	9,719.34			
23	HECTAREAS CUBIERTAS	90.10			
24					
25	INVERSION INICIAL	$ 1,000,000.00			
26	DIFERENCIA	$ 14,581,990.74			
27	23 MENSUALIDADES	$ 633,999.60			
28					
29					

Conocimiento matemático y representaciones observadas en el modelo de la bina D

En la carta se puede apreciar cómo la bina D utilizó su conocimiento sobre razones, proporciones y funciones lineales. Los estudiantes construyeron representaciones gráficas, además de las representaciones verbales y tabulares, para explicar a Martín cómo se comportaría su inversión. La bina D consideró la información siguiente dada en el problema: "El plan de Martín es reforestar las 1,404 hectáreas con pinos y encinos en menos de dos años", "se le ocurre presupuestar cierta cantidad inicial" en el problema (Figura 1). Esto le permitió pensar en la cantidad de 1,000,000 de pesos como cantidad inicial y hacer una proyección para dos años. La tabla de Excel elaborada (Figura 6) se puede reutilizar para planear y predecir costos de reforestación a partir de otros datos distintos. Así lo manifestó la bina D.

Nuestra idea es que la hoja de cálculo en Excel permita a Martín manipular el modelo y usar su forma dinámica para observar que pasaría con diferentes valores tanto de hectáreas, precio, e incluso inversiones.

Esta bina calculó desde el inicio de la resolución de la MEA cuánto le costaría a Martín reforestar las 1,404 hectáreas. En el modelo se nota cómo los estudiantes explicaron en detalle el proceso a seguir para resolver el problema. Cada paso del proceso fue numerado o acompañado con alguna representación para un mejor entendimiento de Martín. En la tabla final elaborada con Excel (Figura 6) sintetizaron todos los cálculos para compartir con Martín un proceso general reutilizable para calcular diferentes presupuestos, dependiendo de la situación a resolver.

Reflexiones relacionadas con el tema de reforestación

Durante el proceso de resolución del problema planteado en la MEA, los estudiantes de la bina D reflexionaron sobre los datos, las relaciones entre los mismos. Sin embargo, su reflexión sobre la situación ambiental fue distinta a la del resto del grupo, surgió posterior a la discusión grupal. Identificaron que Martín requería reforestar 1,404 hectáreas con pinos y encinos en menos de dos años y se enfocaron en esta necesidad. El reconocimiento de la relevancia de reforestar el bosque y la falta de recursos económicos los llevó a buscar alternativas para sugerirle a Martín cómo obtener estos recursos. Por lo tanto, al conectar el problema con sus experiencias y conocimiento sobre inversiones, propusieron a Martín un modelo detallado sobre cómo emprender una posible proyección de inversión a dos años para garantizar el éxito de la reforestación. Adicionalmente, la discusión de los modelos de forma grupal fue fundamental para que los estudiantes incluyeran en sus reflexiones la necesidad de abordar estos temas sociales en los salones de clases de matemáticas. En el Foro compartieron sus reflexiones:

Estudiante D1: [La MEA es] *una actividad llena de experiencias diferentes y valiosas, donde no solo la construcción del conocimiento matemático sale a flote, sino también, las habilidades sociales y de empatía con el ambiente y el contexto que nos rodea.*

Estas reflexiones evidencian la importancia que los estudiantes otorgaron al contexto presentado en la nota periodística de la MEA, al reconocer su potencial para fomentar la empatía hacia el cuidado del medio ambiente. Señalaron, además, que este contexto brinda una oportunidad invaluable para comprender las realidades asociadas a vivir cerca de un bosque.

Discusión y conclusiones

Respecto a la pregunta de investigación: ¿En qué medida la MEA Propuesta de reforestación contribuye al uso del conocimiento sobre la función lineal a la vez que promueve la reflexión sobre la situación ambiental planteada? La MEA Propuesta de reforestación contribuyó a la conexión de reflexiones y conocimiento matemático como razones, proporciones y función lineal para abordarla. Los modelos se conformaron por distintas representaciones aritméticas, tabulares, gráficas y algebraicas. Como señalan Lesh y Doerr (2003) y Lesh y Carmona (2003) los significados —en este caso, de la función lineal— estuvieron distribuidos en las distintas representaciones.

Cada modelo presentó diferencias únicas y reflejó la interpretación propia de cada equipo o bina sobre el fenómeno. Esta observación se alinea con lo expuesto por Lesh (2010), English (2021) y Lesh y Kelly (2000) con respecto a la naturaleza compleja de las MEAs. Parte de esta complejidad se manifiesta en la emergencia de una diversidad de modelos, como ocurrió durante la resolución de la MEA Propuesta de reforestación, por parte de los estudiantes.

Los estudiantes expresaron y articularon sus experiencias personales, conocimiento matemático y reflexiones a través de los distintos modelos construidos, donde por ejemplo le dieron o no importancia a las especies hojosas y determinaron si sólo debían plantar la cantidad de árboles descrita en el problema. Los estudiantes tenían claro que el cliente era Martín y que requería una herramienta matemática útil que le permitiera reforestar el bosque cercano a su comunidad. La identificación de quién era el cliente e interpretación de qué necesitaba también fue fundamental al abordar estas MEA, porque definió la construcción del modelo, su modificación, ampliación y refinamiento, aspectos esenciales en la MMP (Lesh & Yoon, 2004).

En la descripción de cada modelo se destaca cómo los estudiantes utilizaron su conocimiento matemático y cómo, de manera organizada y estructurada, a través de pasos claros y coherentes, presentaron a Martín una herramienta para responder sus dudas. Esto usualmente ocurre cuando los estudiantes han tenido experiencias previas con la resolución de MEAs, según lo planteado por Lesh y Yoon (2004), ya que estas experiencias anteriores sirven como punto de referencia. En este caso particular, varios meses atrás, los estudiantes habían abordado la MEA titulada El Gigante Bondadoso y la MEA Deforestación, estas MEAs pueden revisarse en Vargas-Alejo et al. (2018) y Vargas-Alejo y Montero-Moguel (2023).

Los estudiantes incorporaron en su modelo las explicaciones que consideraron necesarias, tratando de que fueran lo más simple, claras y bien organizadas para que Martín, e incluso otros interesados pudieran usarlasen situaciones similares. Identificaron y explicaron a Martín a partir de qué condiciones iniciales (por ejemplo, en cuanto a cantidad de pinos, encinos y hojosas) estaban construidos los modelos, las relaciones matemáticas entre los datos y las operaciones realizadas, a fin de que el modelo pudiera ser modificado. Los modelos integraron otras áreas de conocimiento como administración y manejo de recursos naturales. De esta manera se observó en el proceso de solución de la MEA la dimensión de conocimiento matemático sugerida por la UNESCO (2017) necesaria para fomentar una educación con calidad, una Educación para el Desarrollo Sostenible.

Los estudiantes mostraron empatía ante la situación problema. Mencionaron que no solo las instancias de gobierno son responsables, sino que todos los ciudadanos (incluidos ellos) deberían participar. En este sentido, se observa cómo la MEA contribuye a la segunda dimensión importante mencionada por UNESCO (2017) para promover la Educación para el Desarrollo Sostenible, relacionada con contribuir a "una transformación sostenible de la sociedad", permitiendo a los estudiantes aprender a vivir juntos con un profundo respeto por el medio ambiente y la dignidad para todos.

Utilizando los términos de Rodgers (2002) se observó que las ideas de los estudiantes evolucionaron a partir de la primera interpretación sobre el fenómeno a través de la lectura y la actividad de identificar datos y variables. Reflexionaron sobre la pertinencia del uso o no de cierta información para resolver el problema y tomaron decisiones. Establecieron relaciones y realizaron cálculos. Reflexionaron sobre cómo comunicar el modelo por escrito y redactaron la carta con ideas más elaboradas en comparación con las iniciales. Al final de todo el proceso señalaron que su interpretación matemática de la situación se amplió al observar los modelos de sus compañeros.

Finalmente, podemos concluir que la MEA Propuesta de reforestación puede contribuir al uso del conocimiento matemático en situaciones complejas y a la reflexión sobre la situación ambiental de cuidado del entorno. Esta actividad puede estimular el desarrollo creativo y emocional de los estudiantes. Mediante ella se pueden comunicar valores culturales a las nuevas o futuras generaciones como el respeto y cuidado hacia la naturaleza. Es un recurso educativo que puede ser considerado entre los materiales para lograr una educación con calidad, una Educación para el Desarrollo Sostenible.

Limitaciones y Futuras Investigaciones

Aunque esta investigación aporta a la comprensión de los efectos de las MEAs en estudiantes de posgrado, somos conscientes de la necesidad de formar a los estudiantes desde una edad temprana bajo un enfoque sostenible. Por lo tanto, consideramos que futuras investigaciones podrían abordar el impacto de las MEAs en contextos de estudiantes de niveles básicos, permitiendo así comprender el refinamiento de ideas matemáticas y reflexiones sobre el impacto social desde temprana edad.

Agradecimiento

Reconocimiento al apoyo brindado por Conahcyt a través del programa de becas asignadas a estudiantes de posgrado, y a la Universidad de Guadalajara.

Las opiniones, hallazgos y conclusiones expresadas pertenecen a los autores y no reflejan necesariamente las de este programa. Este documento es resultado del proyecto Educación basada en la modelación como respuesta a los desafíos globales.

Referencias

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology, 3*(2), 77–101. http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197–205). National Council of Teachers of Mathematics.

English L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 3–23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Brilleslyper, M. (2008). Model-eliciting activities (MEAs) as a bridge between engineering education research and mathematics education research. *Advances in Engineering Education, 1*(2), 1–25.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application, 1*(2), 16–48.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: *Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35–58). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En M. Hoover, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Routledge.

Lesh, R., & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. En R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 71–96). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Kelly, A. E. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197–230). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 205–226. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_7

Lesh, R., Yoon, C., & Zawojewski, J. (2007). John Dewey revisited: Making mathematics practical versus making practice mathematical. En R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 315–348). Lawrence Erlbaum Associates.

Moore, T., Miller, R. L., Lesh, R. A., Stohlmann, M. S., & Kim, Y. R. (2013). Modeling in engineering: The role of representational fluency in students' conceptual understanding. *Journal of Engineering Education, 102*(1), 141–178. https://doi.org/10.1002/jee.20004

Montero-Moguel, L., & Vargas-Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Revista Educación Matemática, 34*(1), 214–248. https://doi.org/10.24844/EM3401.08

Montero-Moguel, L. E., Vargas-Alejo, V., Lima, C., & Carmona, G. (2022). Potential of an MEA to advance business students' modeling skills. En A. E. Lischka, E. B. Dyer, R. S. Jones, J. N. Lovett, J. Strayer, & S. Drown (Eds.), *Proceedings of the forty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1657–1665). Middle Tennessee State University.

Rodgers, C. (2002). Defining reflection: Another look at John Dewey and reflective thinking. *Teachers College Record, 104*(4), 842–866.

Sevinc, S. (2022). Toward a reconceptualization of model development from models-and-modeling perspective in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 109*(3), 611–638.

Sevinc, S., & Lesh, R. (2021). Preservice mathematics teachers' conceptions of mathematically rich and contextually realistic problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*,1–29. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09512-5

Sriraman, B., & Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM, 38*(3), 247–254.

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (2016). *Global education monitoring report. Education for people and planet: Creating sustainable futures for all*. UNESCO. https://gem-report-2016.unesco.org/en/chapter/introduction/

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (2017). *Textbooks for sustainable development: A guide to embedding*. UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259932

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (2020). *Education for Sustainable Development: A roadmap*. UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000374802

Vargas-Alejo, V., & Montero-Moguel, L. (2023). Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica. En A. Castañeda (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en educación matemática* (pp. 69–95). SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-03

Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A., & Cristóbal-Escalante, C. (2018). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos. *Épsilon, Revista de Educación Matemática, 99*, 7–28. http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon99.pdf

Vorhölter, K., & Siller, H. S. (2023). Modelling as an approach to implementing Education for Sustainable Development in mathematics teaching. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1371–1378). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest – ERME. https://hal.science/hal-04416559

Aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en profesores de matemáticas en formación

Eddie Aparicio-Landa [1]
Landy Sosa-Moguel [2]
Camila Magaña Flores [3]
Maleni Padilla Pérez [4]

Resumen

Las propiedades de contracción y traslación de la integral definida son importantes para el estudio de la invarianza de acumulaciones. Sin embargo, su enseñanza y tratamiento en libros de cálculo es mínima o nula. Por tal razón, se analizó la posibilidad de propiciar el aprendizaje conceptual de ambas propiedades en profesores de matemáticas en formación mediante la abstracción reflexiva a partir de la resolución de tareas geométrico-analíticas. Se contó con la participación de 19 estudiantes que ya habían acreditado sus cursos de cálculo diferencial e integral. El análisis de los datos se hizo con base en las fases cognitivas implicadas en la abstracción reflexiva. Los resultados muestran que los participantes logran aprender por abstracción reflexiva las propiedades, llegando en el caso de la traslación, a su generalización para cualquier tipo de funciones, hecho que no ocurre en el caso de la contracción. En consecuencia, se sugiere fomentar el análisis de la relación geométrica entre el coeficiente del argumento de las funciones y sus transformaciones gráficas en las tareas sobre la contracción.

Palabras clave

Aprendizaje conceptual, Profesores en formación, Propiedades de la Integral definida, Abstracción reflexiva.

---

[1] alanda@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0003-4400-3919

[2] smoguel@correo.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0000-0002-8771-0800

[3] magana.camila@hotmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0006-8912-6970

[4] padillamaleni@outlook.com
Universidad Autónoma de Yucatán, México
https://orcid.org/0009-0002-1357-0144

Aparicio-Landa, E., Sosa-Moguel, L., Magaña Flores, C., & Padilla Pérez, M. (2024). Aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en estudiantes para profesor de matemáticas. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 81–99). Editorial SOMIDEM.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-04

Presentación

A menudo, en libros de cálculo y en prácticas de profesores de cálculo en educación media superior, está ausente el uso de la indagación o del razonamiento como una forma en la que los estudiantes pueden construir y significar los conceptos del cálculo, sus propiedades y métodos. Y, aunque el enfoque en el tratamiento del contenido sea procedimental, “tampoco se realiza un análisis del campo de validez de las técnicas, de su eficacia” (Contreras de la Fuente et al., 2010, p. 372). Así, resulta difícil lograr que los estudiantes transiten del pensamiento matemático elemental al pensamiento avanzado, lo cual es uno de los objetivos de la enseñanza del cálculo en el último año de estudios de educación media superior o en los primeros años de la educación superior. En general, es necesario que los estudiantes de estos niveles educativos desarrollen formas de pensamiento más sofisticadas porque en la educación matemática superior, “la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar, formalizar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar” (Mateus-Nieves & Rojas, 2020, p. 69).

Reconocer, visualizar y aplicar las propiedades de la integral definida son tareas difíciles de realizar por la mayoría de los estudiantes universitarios que han cursado Cálculo. En el estudio de Zimmermann y Cunningham (1991) se muestra que la mayoría de los estudiantes egresados de un curso universitario de cálculo tienen dificultades para identificar propiedades de la integral de forma correcta, tal como la propiedad de traslación de la integral definida o, dicho de otro modo, la propiedad de invarianza por traslaciones de la integral definida. En uno de los ítems del cuestionario de este estudio (Figura 1), los estudiantes dieron respuestas erróneas al seleccionar una opción distinta al inciso c), en el que se establece la propiedad de traslación.

Figura 1

Ítem de un cuestionario sobre propiedades de la integral

Suponga que f es una función continua. ¿Cuál de las opciones siguientes es correcta?

a) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a-k}^{b-k} f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_a^b f(x+k)dx$

c) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$

d) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x+k)dx$

e) Ninguna de las anteriores

Nota. Fuente: Zimmermann y Cunningham (1991)

Entre las explicaciones que proporcionan los autores sobre esta clase de dificultades en los estudiantes, se encuentra la falta de habilidad de visualización matemática. De este modo, quienes tienen dificultades para responder correctamente el ítem muestran dificultades de visualización y desconocimiento de dicha propiedad. Las dificultades reportadas por Zimmermann y

Cunningham (1991) además de ser relativas a los estudiantes, también acontecen en profesores de Cálculo. Por ejemplo, Aparicio et al. (2017) reportan que profesores de educación media superior enfrentan dificultades para realizar tareas relacionadas con la propiedad de dilatación o contracción de la integral definida como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Evaluación de una integral definida conociendo el valor de otra

Si $\int_0^4 f(x)dx = 8$, determinar el valor de $\int_0^2 f(2x)dx$

Nota. Fuente: Fuente: Aparicio et al. (2017), p. 9

Los profesores manifestaron dificultades procedimentales y conceptuales para determinar el valor solicitado y eso se debe, entre otros factores, a una conceptualización inadecuada del cambio de variable con relación al concepto de función compuesta para el caso de la integral definida. Una forma alternativa de resolver la tarea planteada es precisamente usando la propiedad de dilatación o contracción de la integral definida, lo cual en símbolos se traduce en:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

o equivalentemente:

$$k\int_a^b f(x)\,dx = \int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx$$

En efecto, si se usa el valor de $k = \frac{1}{2}$ se tiene que si,

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 8$$

entonces,

$$2\int_0^2 f(2x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx = 8$$

de donde,

$$\int_0^2 f(2x)\,dx = 4$$

Por tanto, de los resultados de ese estudio se puede concluir que los profesores tienen dificultades para reconocer lo que pasa cuando se alteran los límites de integración por dilataciones o contracciones.

Lo anterior sugiere que en la enseñanza usual del Cálculo, se deja fuera el estudio e inferencia de algunas propiedades de la integral definida que son importantes para la comprensión de la invarianza de acumulaciones o bien, su aprendizaje carece de una base conceptual. Los símbolos en matemáticas presuponen una connotación dual de su uso, como procesos y como objetos. En el caso del cálculo integral, con la expresión simbólica $\int f(x)\,dx$, se hace referencia tanto al proceso de integración como al concepto de integral. Además, como afirman Tall et al. (2001), "Los símbolos ocupan una posición central entre los procesos que hay que realizar y los conceptos que hay que pensar. Nos permiten realizar tanto problemas matemáticos como pensar en relaciones matemáticas" (p. 81). Por consiguiente, es preciso que en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, así como de sus propiedades, el uso de los símbolos esté acompañada de una articulación adecuada entre el carácter procedimental y conceptual del conocimiento matemático. Si bien incorporar el uso de distintos registros de representación semiótica es muy útil para esto (Duval, 2006), también se requeriría implicar a los estudiantes en procesos de razonamiento matemático y argumentación. Pues al resolver tareas de integración no suelen ofrecer justificaciones matemáticas sobre los procedimientos y técnicas que utilizan, por ejemplo, las conversiones entre integrales y áreas (Nilsen & Knutsen, 2023).

Lograr compaginar comprensión y razonamiento en los cursos de Cálculo resulta complejo si la mayoría de los profesores que los imparten tienen objetivos de enseñanza que atañen a una visión mecanicista de esta área de las matemáticas. Es decir, "ven" al cálculo como un conjunto de reglas y procedimientos que precisan de ser memorizados para después aplicarlos en tareas rutinarias (Eichler & Erens, 2014). Por otro lado, es sabido que el aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes está estrechamente relacionado con la forma en que el profesor comunica los conceptos en el aula (Ely, 2021) y los materiales curriculares que emplea, tales como los libros de texto (Grossman & Thompson, 2008). Más aún, la comprensión y los conocimientos conceptuales de los profesores de cálculo son fundamentales para una educación matemática de calidad y una enseñanza centrada en lo conceptual no demerita el desarrollo de habilidades procedimentales en los estudiantes de educación media superior (Chappell & Killpatrick, 2003). Por tanto, el conocimiento que para la enseñanza del cálculo tenga el profesor o el futuro profesor es decisivo para que los estudiantes alcancen una comprensión profunda de sus conceptos, propiedades y métodos (Walshaw, 2012).

Es difícil concebir que los profesores de Cálculo favorezcan una comprensión profunda en sus estudiantes, si durante su formación profesional no disponen de experiencias de construcción de conocimiento que les permitan entender la naturaleza conceptual y operacional de los conceptos y símbolos del Cálculo, así como los procesos cognitivos que pueden apoyar el desarrollo de dicho conocimiento. En consecuencia, tal como sostiene Walshaw (2012, p. 185) "cuando los futuros profesores demuestran una comprensión limitada o confusa de los conocimientos de la asignatura relevantes para la clase, a menos que se rectifique, sus futuros estudiantes tendrán dificultades para dar sentido a los conceptos matemáticos relevantes".

Es precisamente en esta problemática sobre el aprendizaje y conocimiento del futuro profesor de matemáticas que este capítulo aboga por un cambio en la forma en que se les enseña y aprenden cálculo los profesores de matemáticas en formación. Más concretamente, se plantea la necesidad de explorar tratamientos alternativos de enseñanza que fomenten el aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva de propiedades de la integral definida a partir de tareas que articulen algunas representaciones geométricas y analíticas de estas. De este modo, el objetivo fue analizar en qué medida profesores de matemáticas en formación evidencian aprendizaje conceptual de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida.

Aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva

En este trabajo se entiende que el aprendizaje conceptual en matemáticas por abstracción reflexiva es un proceso de desarrollo de abstracciones nuevas y más fuertes que se dan mediante la actividad matemática del sujeto. Piaget (2001) caracterizó a la abstracción reflexiva como el proceso mediante el cual las estructuras mentales de nivel superior podían desarrollarse a partir de estructuras de nivel inferior y consta de dos fases cognitivas, una fase de proyección en la que las acciones de un nivel se convierten en objetos de reflexión en el siguiente y una fase de reflexión en la que tiene lugar una reorganización. Este proceso no es necesariamente de modo consciente aun cuando incluya actividades cognitivas del sujeto tales como esquemas y coordinación de acciones.

Dubinsky (2002) refiere que la abstracción reflexiva de Piaget (2001) consiste en una coordinación general de acciones más que en coordinaciones específicas de acciones relativas a la conceptualización de ciertos "objetos" (en este caso, objetos matemáticos), por lo que él plantea un modelo instruccional-teórico para el aprendizaje matemático basado en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget, conocido como teoría APOE (acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Este modelo conduce a desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático avanzado de conceptos matemáticos específicos tales como el de función, en donde el primer mecanismo de la abstracción reflexiva consiste en extraer propiedades de acciones mentales o físicas en un determinado nivel de pensamiento para posteriormente ser interiorizadas como procesos a partir de la reflexión. A su vez, son transformados por la acción en objetos y así sucesivamente, este proceso es cíclico en forma de espiral y puede iniciarse en cualquier parte de este. Para fines de este estudio, se situó a los participantes en un proceso de abstracción reflexiva de las propiedades de la integral definida.

Desde la teoría APOE, un estudiante evidencia aprendizaje de las propiedades de la integral definida en la medida que este logre transitar entre las diversas etapas mentales consideradas en dicha teoría. Este tránsito ocurre por medio de mecanismos mentales que forman parte de la abstracción reflexiva: Interiorización, Coordinación, Encapsulación y Generalización. En la interiorización se realizan pasos de un procedimiento y se reflexiona sobre el procedimiento. En la coordinación se examinan dos procesos diferentes y se integran en uno coordinado. En la encapsulación se encapsula un concepto construyendo un significado individual de este. La generalización consiste en ampliar y aplicar lo encapsulado a una colección más amplia de problemas matemáticos.

En el aprendizaje de un objeto matemático también se precisa de una asociación entre elementos semióticos y conceptuales del mismo objeto (Fischbein, 1993), tal asociación se favorece usando representaciones semióticas diferentes de un mismo objeto matemático, ya que ello obliga a explicitar las características comunes o no del objeto representado mediante procesos cognitivos. Como menciona Duval (2017, p. 22) "la asociación entre las representaciones y el objeto en sí, las palabras y las cosas designadas, una obra y su modelo, etc., aparece como el proceso cognitivo fundamental para 'dar sentido' y verificar y, por tanto, adquirir nuevos conocimientos".

Se decidió usar tareas basadas en representaciones semióticas por su relación de complementariedad con la abstracción en el aprendizaje matemático. En palabras de Dreyfus (2002): "Por un lado, un concepto a menudo se abstrae de varias de sus representaciones; por otro lado, las representaciones son siempre representaciones de algún concepto más abstracto" (p. 38). Según este autor, la abstracción de un concepto en el aprendizaje requiere la integración y cambio flexible entre representaciones. En particular, en las tareas se consideraron representaciones geométrico-analíticas para la generalización y abstracción de los aspectos conceptuales asociados a la integral definida y las propiedades tratadas. Estas incluyen la relación entre la variación de una variable y la conservación o transformación que produce en la acumulación de los valores o cantidades de otra variable (función) que depende de esta, a través de su representación como área bajo una curva. Se partió del hecho de que la mayoría de los estudiantes que han estudiado cálculo, conciben a la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

como la representación de una forma espacial cerrada (usualmente delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$), el eje de las abscisas en el plano cartesiano y la función $f(x)$, cuya medida de área es el valor de la integral (Jones, 2015). Es decir, hay una imagen prototipo geométrico-analítica en la mente de los estudiantes que hace corresponder al área bajo una curva con el concepto de integral definida (Jones, 2018).

Método de estudio

El estudio es cualitativo exploratorio ya que se carece de investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en profesores de matemáticas en formación. Los estudios de alcance exploratorio indagan en temas o problemas de investigación poco estudiados o que no han sido abordados con anterioridad e identifican relaciones potenciales entre variables y establecen rumbo para investigaciones posteriores más rigurosas (Salinas y Cárdenas, 2009). En particular, se exploró el aprendizaje conceptual de las propiedades referidas mediante la abstracción reflexiva y el uso de tareas geométrico-analíticas como una forma de promover tal abstracción.

Los participantes en este trabajo fueron 19 profesores de matemáticas en formación con un rango de edad de 20 a 24 años e inscritos en su último año de estudios de su carrera profesional y disponían de conocimientos de cálculo diferencial e integral. No obstante, previamente a la implementación de las tareas no conocían las propiedades de contracción y traslación de la integral definida, eso se determinó con base en una entrevista a una parte del mismo grupo de estudiantes.

Diseño de las tareas

Para analizar en qué medida los profesores de matemáticas en formación logran aprender conceptualmente las propiedades de contracción y traslación de la integral definida se diseñaron secuencias de tareas que detonen procesos de abstracción reflexiva. Kieran et al. (2021) sugieren que favorecer el desarrollo de conceptos como parte de una abstracción reflexiva, no necesariamente está asociado con que los estudiantes "hagan un salto" en la resolución de algún problema, sino con el hecho de que una determinada secuencia de tareas provea la oportunidad de construir una abstracción a través de una actividad ya disponible. Por ende, las secuencias de tareas se diseñaron siguiendo los dos principios de Kieran et al. (2021) para propiciar el aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva:

1. Identificar una actividad potencial que ya esté disponible para el estudiante y pueda servir de referencia para la abstracción esperada (el objetivo de aprendizaje identificado).

   Este principio se consideró en el diseño de las tareas a partir de la representación y comparación geométrica de las áreas de pares de trapecios definidos por la región delimitaba bajo la gráfica de funciones lineales, el eje de las x y rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. En la secuencia de tareas sobre la propiedad de contracción, la actividad consistió en establecer que, en cada par de trapecios, uno tiene la mitad del área que el otro, y esta misma relación se cumple para las alturas (límites de integración) de los trapecios de cada par. Analíticamente, esta relación se representa como

$$\int_6^8 x\,dx = \int_{3(2)}^{4(2)} x\,dx = \int_3^4 2x\,dx$$

para el caso particular en que $f(x) = 2x$, $a = 3$, $b = 4$ y $k = 2$. Esto serviría de base para abstraer que, en general,

$$k\int_a^b f(x)\,dx = \int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$$

En la secuencia sobre la propiedad de traslación, la actividad potencial consistió en establecer relaciones de conservación de áreas entre pares de trapecios. Los primeros trapecios estaban formados por la gráfica de funciones lineales de la forma $y = f(x) = 2x$, el eje de las x y distintos segmentos comprendidos por rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. los segundos trapecios resultaban de trasladar horizontalmente unidades a la izquierda o a la derecha tanto la gráfica de la función lineal como las rectas $x = a$ y $x = b$. De allí, se esperaba que analíticamente se abstrajera la relación de conservación entre las áreas para establecer en general que:

$$\int_a^b f(x-k)\,dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx$$

2. Diseñar tareas que susciten la actividad disponible y favorezcan la abstracción reflexiva (una anticipación aprendida soportada por actividades con representaciones externas a ejecuciones mentales) (Kieran et al., 2021, p. 51).

   Para favorecer la abstracción de las propiedades de contracción y traslación, en el diseño de las tareas se usaron representaciones geométrico-analíticas de la integral definida como una forma de promover el reconocimiento de los aspectos conceptuales inmersos en las propiedades. Esto bajo el supuesto de que tratar en paralelo con dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático posibilita la actividad cognitiva de reconocimiento y abstracción de tal objeto, es decir, la conexión y cambio entre su representación matemática y mental (Dreyfus, 2002; Duval, 2017). Así, desde un punto de vista semiótico, se consideraron tareas que impliquen coordinar la representación geométrica de la integral definida como área bajo una curva y su representación analítica. Específicamente, en las tareas se trabajó con la representación geométrica del área bajo la curva de pares de trapecios definidos como se describió en el principio 1), y el tránsito a la representación analítica de las relaciones invariantes entre las áreas de los trapecios al variar la función lineal o los valores de a y b. De este modo, se esperaba que los participantes abstrajeran las propiedades de la integral definida mediante el análisis y generalización de casos particulares de tales relaciones con apoyo cognitivo en su representación geométrico-analítica.

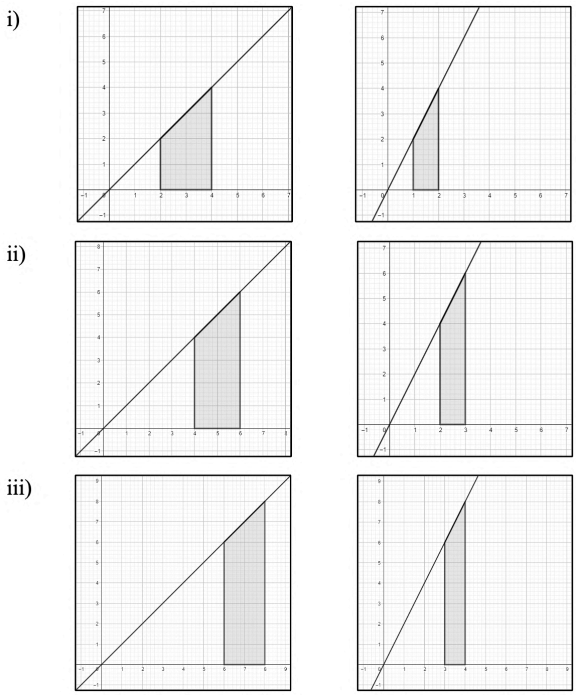
A continuación, se presenta y describe la secuencia de tareas empleadas para el caso de la propiedad de contracción. El caso de la propiedad de traslación se presenta posteriormente y, en su estructura, es equivalente a la secuencia de contracción.

Secuencia de tareas para la propiedad de contracción

Tarea 1. En la Figura 3 se muestran tres pares de trapecios sombreados en color gris. Analiza cada par, posteriormente indica si identificas alguna relación y explícala. En caso contrario, también indícalo.

Figura 3

Tres pares de trapecios dispuestos sobre el eje para el caso de contracción



Tarea 2. Considerando que un trapecio como los de la Tarea 1 se ubica en el intervalo [100, 102] del eje horizontal, determina el intervalo en el cual se ubica el otro trapecio. Además, indica las medidas de sus respectivas áreas.

Tarea 3. Considerando que las medidas de las áreas del primer par de trapecios en la Tarea 1 están dadas respectivamente por:

$$\int_2^4 x\,dx \text{ y } \int_1^2 2x\,dx$$

Determina las integrales definidas que estarían representando las medidas de las áreas de los pares de trapecios dados en ii) y iii) de la Tarea 1.

Tarea 4. Determina las integrales definidas para el par de trapecios referidos en la Tarea 2.

Secuencia de tareas para la propiedad de contracción

En la Tarea 1 se muestran tres pares de trapecios dispuestos en forma horizontal. Los de la izquierda están formados por la gráfica de la función $y = f(x) = x$, el eje de las x y distintos segmentos comprendidos entre rectas de la forma $x = a$ y $x = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ (Figura 3), además puede observarse que sus alturas miden dos unidades. Los de la columna de la derecha están formados de manera similar a los de la izquierda, pero cambia la función lineal a $y = f(x) = 2x$, y las alturas de los trapecios miden una unidad. En esta tarea se esperaba que los participantes llevaran a cabo acciones de comparación de las formas y áreas de los trapecios para reconocer similitudes y diferencias entre estas, al variar tanto la función $f(x)$ como los valores de a y b (límites de integración). Las Tareas 2 a 4 se diseñaron de tal forma que detonaran los procesos de la abstracción reflexiva.

En la Tarea 2 se buscaba propiciar la *interiorización* de la relación invariante entre las áreas de los tres pares de trapecios dados en la Tarea 1, a saber, los trapecios de la derecha tienen la mitad de las áreas que los de la izquierda. Para ello, se solicitó calcular las medidas de un nuevo par de trapecios a partir de información relacionada con el hecho de que uno de ellos se encuentra comprendido entre las rectas $x = 100$ y $x = 102$. Se proporcionaron valores grandes para a y b, a fin de hacer necesario analizar y reflexionar sobre la relación invariante entre las áreas de los trapecios presentados en la tarea previa, ante la insuficiencia de alguna acción concreta para responder la tarea. Asimismo, con la Tarea 2 se buscó facilitar el paso a la coordinación de dos procesos para integrarlos en uno que sirviera de base en el análisis de la propiedad de contracción, lo cual se requeriría en la tarea siguiente.

En la Tarea 3, se pretendía suscitar la *coordinación* de dos procesos, uno geométrico y el otro analítico, del cálculo de áreas de los trapecios en uno solo (integración), apoyado por representaciones externas. Con este propósito, se solicitó determinar las integrales definidas que representen las medidas de las áreas de dos pares de los trapecios presentados en la Tarea 1. En esto se esperaba que la solicitud de calcular las medidas de áreas fuera de ayuda, pues si bien dicho cálculo puede hacerse con la fórmula conocida en geometría:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

las representaciones utilizadas en las tareas también sugieren pensar en la integral definida como una alternativa del cálculo de la medida de un área, sobre todo si está definida bajo una curva (Jones, 2015). Con la Tarea 3, también se buscó dar lugar a la *encapsulación* indicada en la teoría APOE de modo que, al determinar las integrales definidas solicitadas y articular sus representaciones con lo realizado en las tareas previas, la propiedad de contracción emergiera como resultado de la abstracción reflexiva. Para verificar si esto último se lograba, se diseñó la cuarta y última tarea.

En la Tarea 4 se esperaba que los participantes dieran significado a la contracción no sólo en términos geométricos de la reducción o ampliación del área de los trapecios, sino analíticamente como efecto (gráfico) de la varianza de los coeficientes de x en la expresión algebraica de la función $f(x)$ y de los límites de integración. Esto les permitiría *encapsular* sus procesos geométrico-analíticos de cálculo y el establecimiento de relaciones de áreas como un objeto: la propiedad de contracción de la integral definida, la cual podrían expresar como una relación de igualdad entre integrales definidas. De esta encapsulación y lo realizado anteriormente con casos particulares de trapecios e integrales definidas, con lo que se pedía en esta tarea, se pretendía que los participantes llegaran a una *generalización* de dicha relación para cualquier función y límites de integración. Esto es, la personalización de la propiedad de contracción y su expresión algebraica general. Este proceso cognitivo estaría respaldo por las "transformaciones" perceptibles de las representaciones geométrico-analíticas implicadas en cada tarea.

Secuencia de tareas para la propiedad de traslación

Tarea 1. En la Figura 4 se muestran tres pares de trapecios sombreados en color gris. Analiza cada par, posteriormente indica si identificas alguna relación y explícala. En caso contrario, también indícalo.

Tarea 2. Considerando que un trapecio como los de la Tarea 1 se ubica en el intervalo [100, 102] del eje horizontal, determina el intervalo en el cual se ubica el otro trapecio. Además, indica las medidas de sus respectivas áreas.

Tarea 3. Considerando que las medidas de las áreas del primer par de trapecios en la Tarea 1 están dadas por:

$$\int_1^2 2x\,dx \text{ y } \int_2^3 2(x-1)\,dx$$

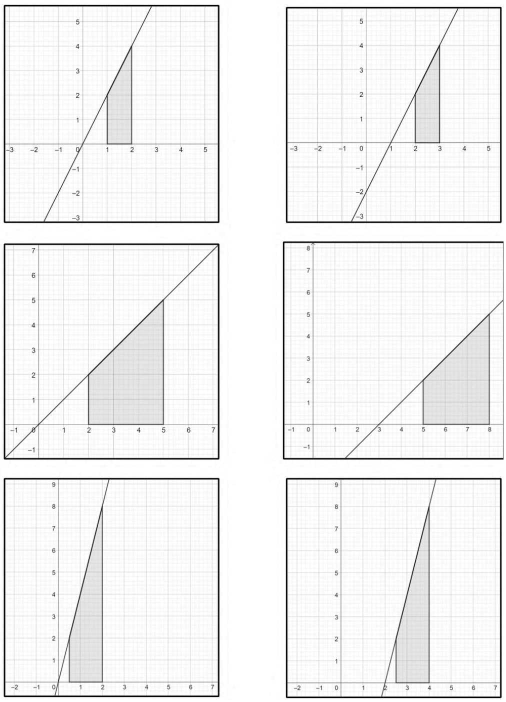
y , respectivamente. Determina las integrales definidas que estarían representando las medidas de las áreas de los pares de trapecios dados en ii) y iii) de la Tarea 1.

Tarea 4. Determina las integrales definidas para el par de trapecios referidos en la Tarea 2.

Figura 4

Tres pares de trapecios dispuestos sobre el eje x para el caso de la traslación

i)
ii)
iii)



Recolección de datos

Las tareas fueron resueltas individualmente y por escrito en un tiempo máximo de dos horas. Los datos se recabaron mediante las hojas de respuestas de los participantes. En cada secuencia de tareas los procesos de resolución fueron analizados para establecer quienes habían logrado abstraer la respectiva propiedad de la integral definida y las características que la componen. Por tanto, las respuestas fueron clasificadas en dos grupos, las que sí mostraban la abstracción de la propiedad y las que no.

Análisis e interpretación de los datos

Para determinar en qué medida se lograba un aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva, se analizaron los datos en términos de los procesos cognitivos de interiorización, coordinación, encapsulación y generalización que, de acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001), son algunas de las formas en que puede darse la construcción de conceptos matemáticos avanzados mediante la abstracción reflexiva. De este modo, en las resoluciones de cada una de las tareas se buscaron indicios de interiorización, coordinación, encapsulación e incluso, de generalización por parte de los participantes.

Tabla 1

Análisis proceso cognitivo de la abstracción reflexiva por tarea y estudiante en la contracción

E1	E2	E3
Tarea 1. Actividad Potencial: invarianza en la relación de áreas		
Los primeros trapecios poseen el doble de área respecto de los segundos.	El trapecio T1 tiene el doble del área del trapecio T2.	Las áreas de los trapecios de la izquierda siempre son el doble que los de la derecha. Así, $A_{T_1} = \frac{(4+2)\cdot 2}{2} = 6$ y $A_{T_2} = \frac{(4+2)\cdot 1}{2} = 3$
Tarea 2. Interiorización – Coordinación		
Los primeros tres trapecios se generan por la función $f(x) = x$. Los intervalos son de la forma $[2n, 2n+2]$ para cualquier n- ésimo intervalo. El área para la posición n será: $AT_n = 4n + 2$. Los segundos tres trapecios se generan con la función $f(x) = 2x$. El intervalo será de la forma $[n, n+1]$. El área para la posición n será: $AT_n = 4n + 1$. Si un trapecio está en [100, 102] entonces, $2n = 100$ por tanto, $n = 50$. Y el otro trapecio estará en [50, 51] y su área es 101. El área del otro será: $4(50) + 2 = 202$	T1 es una figura delimitada por $y = x$ entre x_i y $x_j \in [a, b]$. T2 es delimitada por $y = 2x$, x_l y $x_j \in [c, d]$, donde $a = 2c$ y $b = 2d$. Si uno de los trapecios se ubica en [100, 102], entonces el otro estará en [50, 51]. Sus áreas estarán dadas por: $\int_a^b x\,dx = 2\int_c^d 2x\,dx$ Es decir, el área del primero es 101 u^2 y del segundo será 202 u^2.	Si $P(0, 0)$ y $Q(2, 2)$ son puntos de la recta en el trapecio 1 de la Tarea 1, así $m_{PQ} = 1$ y $y - 0 = 1(x - 0)$, de modo que $y = x$. Análogamente para su trapecio par, se tiene $y = 2x$. Las rectas de la izquierda son $y = x$ y de la derecha son $y = 2x$. Así, para [100, 102] se tiene que $\int_{100}^{102} x\,dx = A = 202$ Por tanto, el intervalo del trapecio de la derecha será [50, 51] dado que el del primero es [100, 102] y su área será 101
Tarea 3. Coordinación – Encapsulación		
Se tiene que: $f(x) = x$ y $g(x) = 2x$ Por lo que: $\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = 4n + 2$ y $\int_{n}^{n+1} g(x)\,dx = 2n + 1$ para un inciso n.	ii) $\int_4^6 x\,dx$ y $\int_2^3 2x\,dx$ iii) $\int_6^8 x\,dx$ y $\int_3^4 2x\,dx$	ii) $\int_4^6 x\,dx$ y $\int_2^3 2x\,dx$ iii) $\int_6^8 x\,dx$ y $\int_3^4 2x\,dx$
Tarea 4. Encapsulación – "Generalización"		
Lo que se está "generalizando es" $g(x) = 2f(x)$, donde $f(x) = x$. $\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = 2\int_{n}^{n+1} g(x)\,dx$ para los casos donde los intervalos de $f(x)$ son el doble a los de $g(x)$	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{50}^{51} 2x\,dx$ De lo realizado se puede concluir que: $\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2f(x)\,dx$	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{50}^{51} 2x\,dx$ Se satisface que: $\int_a^b x\,dx = 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2x\,dx$ En general, ¿se cumple la regla de sustitución? Como se acomoda más rápido en los segundos trapecios (el doble), el intervalo se reduce a la mitad

Con relación con la actividad potencial de la Tarea 1, se detectó que la totalidad de los estudiantes lograron establecer que los trapecios de la derecha tienen la mitad de las áreas que los de la izquierda, sus expresiones fueron como las mostradas en la Tabla 1. En cuanto a la Tarea 2 y el proceso de interiorización, se identificó que la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la interiorización (realización de procesos internos para dar sentido a la actividad previa, en este caso, la reflexión que es evidenciada en el uso consistente de representaciones semióticas) y la coordinación (interrelación entre acciones o procesos de cálculo de medidas de áreas para configurarlos en una acción o proceso para realizar otra acción o proceso). La coordinación inicia con una relación entre lo geométrico y lo numérico o algebraico mediado por el cálculo geométrico de las medidas de áreas y el cálculo algebraico-analítico de las mismas.

Con relación con la Tarea 3, puede verse en la Tabla 1 que, mientras la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la coordinación y encapsulación, solo algunos (ejemplificado con E1), iniciaron un proceso de encapsulación de la propiedad de contracción de la integral definida. Fueron estudiantes como E1 quienes empezaron a personificar la noción de contracción al darle un significado a sus operaciones (mentales y semióticas) mediante el cálculo de medidas de áreas de los trapecios en relación con las integrales definidas (entendidas como áreas bajo las curvas, en este caso: $y = f(x) = x$ y $y = f(x) = 2x$. También empezaron a encapsular sus procesos en un objeto como es la propiedad de contracción de la integral definida. En las representaciones de E1 puede observarse cómo el estudiante inicia sin llegar a concretar la encapsulación de la propiedad de contracción, al poner en estrecha relación la varianza de los límites de integración con las medidas de las áreas. Es así como se inicia, sin concluirse, la encapsulación de la propiedad de contracción.

La generalización podía haberse producido en el sentido de extender la noción de invarianza observada entre las áreas de los trapecios. Es decir, invariantemente unas áreas son el doble de las otras, ya sea en los trapecios o en las integrales definidas. Respecto de la Tarea 4, es perceptible que, al no lograrse una adecuada encapsulación de la propiedad de contracción, los pocos estudiantes que mostraron algún tipo de intento de generalización no lograron extender la idea o propiedad de contracción para ser aplicada a otros tipos de funciones distintas a las tratadas en las tareas. Particularmente se observa que los estudiantes no analizaron la transformación en el argumento de la función, esto puede deberse a que en las tareas se usaron funciones lineales y en ellas se verifica la linealidad (propiedad de homogeneidad o escalamiento: $f(ax) = af(x)$. Dicho de otro modo, en las funciones empleadas se cumple que si $f(x) = x$, entonces, $2f(x) = f(2x)$. Ejemplo de ello está en lo dicho por E1: “lo que se está generalizando es $g(x) = 2f(2x)$, donde $f(x) = x$", sin atender el argumento. Esto mismo se observa en E2. Solo en el caso de E3 se identifica un intento de análisis más general al plantearse si: "¿en general, se cumple la regla de sustitución?" y su intento de análisis lo lleva a prestar atención en las acumulaciones y las formas en que éstas tienen lugar: "como se acomoda (se refiere a las áreas) más rápido en los segundos trapecios (el doble), el intervalo (se refiere a los límites de integración) se reduce a la mitad".

Tabla 2

Análisis proceso cognitivo de la abstracción reflexiva por tarea y estudiante en la traslación

E1	E2	E3
	Tarea 1. Actividad Potencial: invarianza de áreas	
El área de ambos trapecios para cada caso es el mismo	Las áreas son iguales. Los trapecios tienen las mismas alturas (es el mismo tamaño del intervalo)	El área es la misma en cada caso
	Tarea 2. Interiorización – Coordinación	
El otro trapecio se ubica en $[104, 106]$ y las medidas de sus áreas son iguales: 606 u^2	El otro trapecio está en $[101, 103]$. Ambos tienen la misma área:404	Está en $[103, 105]$ y tienen la misma área: 202
	Tarea 3. Coordinación – Encapsulación	
ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$	ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$	ii) $\int_2^5 x\,dx;\ \int_5^8 (x-3)\,dx$ iii) $\int_{0.5}^2 4x\,dx;\ \int_{2.5}^4 4(x-2)\,dx$
	Tarea 4. Encapsulación – "Generalización"	
$\int_{100}^{102} 3x\,dx$ y $\int_{104}^{106} 3(x-4)\,dx$ Al sumar o restar una cantidad c al valor de x en una función $f(x) = kx$, de modo que se transforme en: $f(x) = k(x + c)$ y al realizar la operación inversa en los límites de la integral definida (sumar si $c < 0$, restar si $c > 0$), entonces la nueva integral definida es equivalente a la original	$\int_{100}^{102} 2x\,dx$ y $\int_{101}^{103} 2(x-1)\,dx$ En general observo que: $\int_a^b x\,dx = \int_{a+c}^{b+c} (x-d)\,dx$ donde c y d son números reales y lo mismo ocurre con múltiplos: $\int_a^b e(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} e(x-d)\,dx$ Las funciones sufren una traslación que ocasiona que las áreas sean las mismas. Las integrales son equivalentes	$\int_{100}^{102} x\,dx$ y $\int_{103}^{105} (x-3)\,dx$ Puedo concluir que: $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$ Ya que los nuevos vértices de la base del trapecio son la suma del valor del valor del desplazamiento

Con relación con la actividad potencial de la Tarea 1, se encontró que la totalidad de los estudiantes lograron establecer que los trapecios de la derecha tienen las mismas medidas de áreas que los de la izquierda, ello lo expresaron como se muestra en la Tabla 2. Respecto de la Tarea 2 y el proceso de interiorización, se identificó que la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la interiorización (reflexión apoyada en el uso consistente de representaciones semióticas) y la coordinación (interrelación entre acciones o procesos de cálculo de medidas de áreas para configurarlos en una acción o proceso para realizar otra acción o proceso). Lo dicho se puede inferir de la diversidad de funciones empleadas en la tarea, generando así, diversos intervalos y medidas de áreas (ver Tabla 2) que conservan la relación invariante en la medida de las áreas de los trapecios considerados. De este modo, la coordinación inicia con una relación entre lo geométrico y lo numérico o algebraico mediado por el cálculo geométrico de las medidas de áreas y el cálculo algebraico-analítico de las mismas.

En lo concerniente a la Tarea 3, puede verse en la Tabla 2 que, si bien la mayoría de los estudiantes se situaron en un tránsito entre la coordinación y encapsulación al dar respuestas satisfactorias, prácticamente nadie hace un intento de ir más allá de lo solicitado en la tarea. Es así como la encapsulación no tiene lugar en este momento de la tarea y es hasta la última en donde se identifican expresiones lingüísticas que hacen suponer un proceso de encapsulación y generalización de la propiedad tratada en la secuencia de tareas.

Las respuestas dadas a la Tarea 4 muestran que los estudiantes encapsularon la propiedad de traslación de la integral definida e incluso, hubo quienes no tuvieron problemas en expresar de manera algebraica y general dicha propiedad, tal es el caso de E3 o E1 en la Tabla 2. Sin embargo, también se detectaron casos como E2 que, a pesar de tener claridad sobre la propiedad, ésta no es correctamente expresada de manera algebraica, pues no hay consistencia entre los parámetros empleados para denotar las transformaciones en los límites de integración en relación con las transformaciones en los argumentos de las funciones.

Resultados

El presente trabajo consistió en analizar en qué medida profesores de matemáticas en formación logran aprender conceptualmente las propiedades de contracción y traslación de la integral definida por abstracción reflexiva a partir de un tratamiento alternativo de enseñanza de dichas propiedades basado en una secuencia de tareas que articulen el uso de distintas representaciones semióticas para el cálculo de medidas de áreas de trapecios situados en el plano cartesiano.

El aprendizaje conceptual de la propiedad de contracción por abstracción reflexiva se puede decir que sólo se logró para el caso de las funciones empleadas en las tareas, sin llegar a una generalización de la propiedad para otro tipo de funciones, es decir, sin llegar a una extensión para cualquier función en general. Es posible afirmar que el aprendizaje de la propiedad de contracción para los casos particulares abordados tuvo lugar toda vez que los estudiantes coordinaron sus diferentes acciones y procesos durante su actividad matemática situada en la medición y relación de áreas a partir de distintas representaciones semióticas de trapecios e integrales definidas. No obstante, se observa la necesidad de incorporar una tarea que promueva el análisis de la relación geométrica entre el coeficiente del argumento de las funciones y sus transformaciones gráficas.

El aprendizaje conceptual de la propiedad de traslación se logró en su totalidad y fue más allá de los casos particulares abordados en las tareas. Esta propiedad al parecer fue más notoria -visualmente hablando- para los estudiantes y pudieron establecer una adecuada relación entre la conservación de medidas de las áreas de los trapecios y las transformaciones en el argumento de las funciones, así como en los límites de integración en el caso de las respectivas integrales definidas. Con base en este hecho, es posible afirmar que la propiedad de traslación es más fácil de abstraer y generalizar por parte de los estudiantes al tratarse "únicamente de un aparente movimiento rígido en el plano" de una forma geométrica y, por tanto, la conservación de áreas es "fácilmente generalizable".

Conclusiones

Considerando que los participantes en este estudio no conocían a priori las propiedades de contracción y traslación de la integral definida, los resultados sugieren que la secuencia de tareas empleada favorece su aprendizaje conceptual por abstracción reflexiva. Sin embargo, como puede verse en el caso particular de la contracción, es necesario pensar en cómo tratar el tema de la linealidad de las funciones (propiedad de homogeneidad o escalamiento) de modo que los cambios en los argumentos de las funciones sean también un elemento de análisis por parte los estudiantes. Adicionalmente, se detectó que la mayoría de los estudiantes no suelen reflexionar o cuestionar sus propias acciones más allá de lo indicado en las tareas, este dato es importante si se desea modificar las tareas con la intención de mejorar la experiencia de aprendizaje, particularmente en el caso de la propiedad de contracción.

Los resultados sugieren la posibilidad de enriquecer la comprensión de las propiedades abordadas en este trabajo si se promueve que los estudiantes analicen lo que permanece invariante cuando se transforman ciertas representaciones geométricas y algebraicas de un mismo objeto matemático, en este caso, la integral definida entendida como la medida de un acumulado. En particular, se concluye que el registro geométrico apoya la observación y el análisis de los elementos cambiantes en procesos de acumulación al proporcionar una conexión tangible para comprender cómo se comportan las funciones bajo operaciones geométricas y cómo estas modifican a la integral definida, y viceversa. Este tipo de comprensión precisa, entre otras cosas, poder establecer relaciones variacionales sin descuidar qué es lo que cambia y cómo cambia, como lo hicieron los participantes en este estudio, pero también, prestar atención a aquello que se mantiene invariante de lo que se desea cuantificar bajo ciertas condiciones o transformaciones.

Referencias

Aparicio, E., Cabañas, G., & Sosa, L. (2017). Reconceptualización de saberes y pensamiento didáctico en matemáticas. *Revista Ciencias Básicas CIIDET,* (9), 6–12. https://sites.google.com/site/eaecbpublicaciones/revista-09

Chappell, K., & Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of calculus. *PRIMUS, 13*(1), 17–37. https://doi.org/10.1080/10511970308984043

Contreras de la Fuente, Á., Ordóñez, L., & Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), 367–384. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.63

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275–282). Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM, 46*(4), 647–659. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM, 53*(3), 591–604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concept. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Grossman, P., & Thompson, C. (2008). Learning from curriculum materials: Scaffolds for new teachers? *Teaching and Teacher Education, 24*(8), 2014–2026. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.05.002

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann-sum based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 46*(5), 721–736. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.1001454

Jones, S.R. (2018). Prototype Images in Mathematics Education: The Case of The Graphical Representation of The Definite Integral. *Educational Studies in Mathematics, 97*(3), 215–234. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9794-z

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2021). Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: An ICMI study 22* (pp. 19–81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Mateus-Nieves, E., & Rojas, C. (2020). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae, 22*(3), 65–81. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5667

Nilsen, H.K., & Knutsen, K.H. (2023). First-Year Engineering Students' Interpretations of Differentials and Definite Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*, 173–200. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00208-6

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315800509

Salinas, P., & Cárdenas, M. (2009). *Métodos de investigación social.* Editorial Quipus CIESPAL

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 81–104. https://doi.org/10.1080/14926150109556452

Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal Mathematics Teacher Education, 15*(3), 181–185. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9217-0

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor´s introduction: What is mathematical visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1–8). Mathematical Association of America.

TERCERA TENDENCIA

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MENTALES EN LAS MATEMÁTICAS

Objetos mentales sobre números decimales: un estudio con alumnos de educación secundaria

Alejandro Esparza Godinez [1]
Carlos Valenzuela García [2]
Adrián Gómez Árciga [3]
Claudia Margarita Orozco Rodríguez [4]

Resumen

El estudio de los números decimales es fundamental en la educación básica, siendo un tema crucial para entender la matemática de ese nivel educativo y la de niveles más avanzados. Sin embargo, resultados de investigación también reconocen a los números decimales como una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por ello, es muy importante seguir indagando sobre esa problemática. En este capítulo se exponen los resultados de la construcción de la fase teórica de un Modelo Teórico Local sobre los números decimales, con énfasis en el componente de cognición. El objetivo es identificar los objetos mentales que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha desarrollado sobre los números decimales, contrastándolos con lo ya documentado en la literatura. Entre los resultados, se han identificado ideas asociadas a dificultades para 1) comparar y ordenar números decimales, 2) para convertir números de su expresión decimal a su expresión fraccionaria, y viceversa, 3) perdura la confusión entre número y su notación decimal, 4) dificultades para operar con estos números, así como ideas erróneas sobre los resultados de las operaciones y sus procedimientos.

Palabras clave

Números decimales, Objetos mentales, Modelos Teóricos Locales, Educación secundaria.

[1] alejandro.esparza7678@alumnos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0009-0007-0153-0459

[2] carlos.valenzuela@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

[3] adrian.arciga@uabc.edu.mx
Universidad Autónoma de Baja California, México
https://orcid.org/0000-0002-4551-6372

[4] claudia.orozcor@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-7248-7810

Esparza Godinez, A., Valenzuela García, C., Gómez Árciga, A., & Orozco Rodríguez, C. M. (2024). Objetos mentales sobre números decimales: un estudio con alumnos de educación secundaria. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 103–123). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-05

Introducción

Diversas investigaciones reconocen que estudiar los números decimales es fundamental para el alumno de educación básica, debido a que son primordiales para su éxito académico (Astuti, 2014; Lortie-Forgues et al., 2015; Pramudiani et al., 2011). Los estudiantes se seguirán encontrando con los números decimales en su recorrido a través de la educación y los requerirán para sus cálculos; no únicamente en matemáticas, también en Biología, Física, Ingeniería, Economía, Psicología y Sociología, por mencionar algunas.

Por otra parte, en el área de las aplicaciones, el conocimiento de los números decimales aparecerá en una gran variedad de oficios, como la farmacéutica, herrería o carpintería. Más aún, los decimales forman parte de la vida diaria, se pueden encontrar en las recetas o en las mediciones. Además, una buena comprensión de los números decimales resulta importante para la interpretación de la información reportada en los medios de comunicación en forma de estadísticas o probabilidad, o para las finanzas personales en la adquisición de créditos hipotecarios o bancarios, que van más allá del conocimiento de los números naturales. Por otra parte, los números decimales son reconocidos en las investigaciones por su importancia, pero también por ser una fuente de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Ávila & García, 2008; De Castro et al., 2014; Moreno et al., 2007; Tian & Siegler, 2018; Valencia & Ávila, 2015).

Son varios los problemas reportados en los estudiantes al trabajar con números decimales. Lortie-Forgues et al. (2015) identificaron siete dificultades, algunas inherentes de la aritmética de fracciones y decimales y otras dependientes de la cultura. Ciertas de estas dificultades son descritas con más detalle en trabajos como los de Tian y Siegler (2018), Valencia y Ávila (2015) y Ávila (2013), en ellos se explica la problemática del aprendizaje con los números decimales y se puntualiza en algunos aspectos que dificultan este aprendizaje, como:

1. Las dificultades para dotar de significado a los números decimales a partir de unidades de medición (km, m, cm, mm) que cambian para seguir utilizando números naturales.
2. Aquellas dificultades presentes en la comparación y el orden de los números decimales por considerar criterios o reglas que rigen a los números enteros.
3. Los inconvenientes relacionados a la propiedad de densidad, donde se percibe a los decimales como “falsos consecutivos”.
4. Problemas que se manifiestan en el cálculo y el estudio de las operaciones con números decimales al verse reducidas solamente a los algoritmos.
5. La idea de que la multiplicación siempre “agranda” y la división siempre “achica”.

En particular, la falsa idea de que la multiplicación siempre incrementa el valor y la división siempre lo disminuye es resaltada como síndrome MADA por Valencia y Ávila (2015); también fue descrito así por Alonzo y Reyes (2021) y por González-Forte et al. (2019).

Se observa que los problemas en la comprensión y la operación de los números decimales no es una problemática exclusiva de los estudiantes de educación básica, sino que estas dificultades persisten y continúan presentándose incluso en estudiantes de nivel superior, estudiantes de magisterio y posgrado (De Castro et al., 2014; Moreno et al., 2007).

A pesar de que muchos de estos problemas se presentan durante el aprendizaje de los estudiantes, las investigaciones mencionan que la forma de enseñanza de los números decimales y la perspectiva desde la que se abordan, también contribuyen a estos problemas. En ocasiones se asume que una explicación clara por parte del profesor es suficiente para que los estudiantes aprendan. Un ejemplo de esto es que los estudiantes pueden identificar con facilidad las columnas después del punto decimal y nombrarlas. No obstante, saber los nombres de las posiciones decimales, no indica que comprendan realmente el valor que representan, y esto repercute negativamente en el entendimiento del valor posicional de las cifras (Ávila & García, 2008).

Otro antecedente sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales es el trabajo realizado por Broitman et al. (2003), en el que se realiza una intervención educativa para abordar la aproximación a la propiedad de densidad de los números decimales en estudiantes del segundo ciclo de educación general básica. La propuesta que se diseñó permitió a los estudiantes pensar en subdivisiones cada vez más pequeñas de la unidad.

Por su parte, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) también investigaron la propiedad de densidad de los racionales. Determinaron que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender que existen infinitos decimales entre dos fracciones, revelando a su vez confusiones sobre la notación decimal de las fracciones y una tendencia a percibir a las fracciones como enteros en lugar de partes de un todo. En este estudio se señala que la enseñanza de los números racionales debe considerar que los intentos de los estudiantes para dar sentido a estos números: sus propiedades, notación y operaciones, están fuertemente influenciados por su conocimiento previo sobre los números naturales (p. 205).

Debido a las implicaciones que tiene el uso de los números decimales, tanto en el ámbito académico como fuera de este, es importante ampliar la investigación relacionada con este concepto, debido a que los problemas persisten con niños y adultos, a pesar de la prolongada instrucción y a los esfuerzos dedicados para mejorar su enseñanza (Lortie-Forgues et al., 2015).

Por lo anterior, los resultados que aquí se reportan forman parte de una investigación más amplia en la que se construye un Modelo Teórico Local (MTL), de acuerdo con Filloy et al. (1999), sobre los números decimales y su enseñanza. En este capítulo, se presentan los resultados de la fase teórica del MTL, centrándose especialmente en el componente de cognición del MTL. El objetivo es identificar los objetos mentales (en el sentido de Freudenthal, 1983) que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha desarrollado sobre los números decimales, contrastándolos con lo documentado en la literatura. Esto permitirá responder a la pregunta de investigación ¿cuáles objetos mentales sobre los números decimales han construido estudiantes de educación secundaria?

Los Modelos Teóricos Locales como un marco teórico y metodológico

Para llevar a cabo esta investigación se usa el marco teórico y metodológico, desarrollado para el estudio experimental de la didáctica de las matemáticas, denominado Modelos Teóricos Locales, propuestos por Filloy et al. (1999). Se eligió el desarrollo de un MTL porque permite al investigador centrar el estudio de un objeto matemático desde sujetos específicos y en situaciones específicas adecuadas a los de los fenómenos que son objeto de estudio (Puig & Fernández, 2002).

Un MTL ofrece a la investigación un aspecto teórico y otro metodológico. Así, la construcción de un MTL permite al investigador primeramente establecer la base teórica sobre la cual ha de basar su investigación, y en una segunda fase ofrece una metodología a desarrollar para la parte experimental.

Desde el aspecto teórico, como lo menciona Filloy et al. (1999), un objeto matemático se estudia a través de cuatro componentes o modelos que comúnmente se denominan como 1) el modelo de competencia formal, 2) el modelo de enseñanza, 3) el modelo de comunicación y 4) el modelo de cognición. Estos se interrelacionan para observar y explicar los fenómenos que se presentan en el estudio de un objeto matemático y su enseñanza, que para el caso de esta investigación son los números decimales. Los fenómenos observados permiten fundamentar hipótesis, las cuales se evalúan durante un proceso de experimentación posterior.

En la fase experimental se diseñan e implementan actividades o secuencias de enseñanza a fin de complementar y contrastar lo observado durante la fase teórica. La organización de ambas fases de un MTL se muestra en el esquema de la Figura 1.

Como ya se mencionó, en este capítulo se exponen los resultados de la fase teórica de un MTL para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, es decir, la construcción de los componentes del MTL. Se pone énfasis en la construcción del componente modelo de cognición para identificar los objetos mentales que un grupo de estudiantes de educación secundaria ha formado sobre los números decimales, y así, dar respuesta a la pregunta de investigación. Además, los resultados de esta fase teórica pueden ser una guía para la enseñanza de los números decimales.

Figura 1

Esquema de la investigación, basado en Filloy et al. (1999)

Modelo de competencia formal

Para construir el modelo de competencia formal, Filloy et al. (1999) mencionan la necesidad de tomar en cuenta los fenómenos que se organizan alrededor del objeto matemático a estudiar, visualizados por el observador desde un sistema matemático de signos más abstracto que el de aquellos que están siendo observados. Desde la interpretación de Valenzuela (2018), al tener el observador un sistema matemático de signos más abstracto, el modelo de competencia formal permite al investigador decodificar las situaciones que se presentarán durante la observación y la comunicación entre estudiantes y estudiantes e instructores.

Lo anterior se conecta con las ideas de Freudenthal (1983), quien define la fenomenología de un concepto matemático como la descripción de éste en relación con los fenómenos, tanto matemáticos como no matemáticos, de los que es un medio de organización. Además, indica qué fenómenos organiza y cómo actúa sobre ellos. Para qué fenómenos puede extenderse y con qué poder sobre estos fenómenos dota. Así, un análisis fenomenológico proporciona al instructor la posibilidad de decodificar las actuaciones de los estudiantes que son observados. En este sentido, para elaborar el modelo de competencia formal del MTL descrito en esta investigación se hace un tipo de análisis fenomenológico de las situaciones/fenómenos que involucran a los números decimales.

Primeramente, es necesario comenzar por describir el objeto matemático del que trata esta investigación: los números decimales o simplemente decimales. Estos números van más allá de los números con punto decimal, son más que una forma de notación. Piénsese primero en los números racionales ($\mathbb{Q}$), de los que se sabe que son un subconjunto del conjunto real ($\mathbb{R}$), es decir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los números racionales se pueden definir como el conjunto ($\mathbb{Q}$) de todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

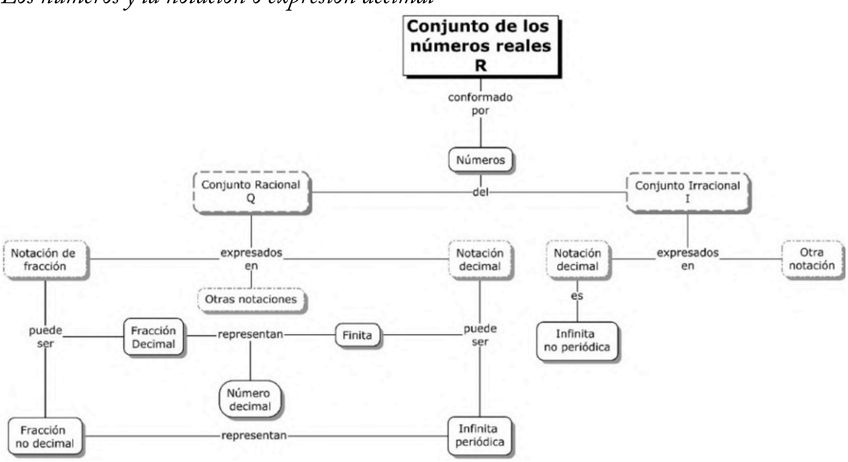
Ahora, para definir a los números decimales se recurre a lo presentado por Ávila y García (2008); “los números decimales son aquellos que pueden representarse en forma de fracción decimal” (p. 27), a esto es necesario agregar que las fracciones decimales son aquellas que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez, esto es:

$$D = \left\{ \frac{a}{10^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

Los números decimales, por lo tanto, son un subconjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), puede decirse que todos los números decimales son números racionales, es decir, pueden expresarse en forma de fracción, pero no todas las fracciones son decimales. Por ello, es necesario hacer una distinción entre la expresión o notación decimal de un número y un número decimal. La notación decimal con punto históricamente surgió como una forma de simplificar los cálculos con números reales (Ávila & García, 2008), pero no todos los números reales a pesar de que puedan expresarse con esta notación son números decimales. La distinción que acaba de hacerse entre los números y la notación decimal de un número real se explica en la Figura 2.

Figura 2

Los números y la notación o expresión decimal



La relación que tienen los números decimales con los números racionales hace necesario que los alumnos enfrenten situaciones o fenómenos en los que deban representar a un número decimal, ya sea como fracción decimal o en notación decimal. Asimismo, siguiendo las ideas de Freudenthal (1983), los estudiantes deben experimentar procesos que les permita pasar a los números de una notación a otra, ya sea en un contexto meramente numérico, por ejemplo, para ubicarlos en la recta numérica o usarlos en contextos variados, como en problemas de finanzas, conversión de unidades, problemas de medición, relaciones de proporcionalidad, dimensiones de figuras geométricas, problemas de escala y otros.

Modelos de enseñanza y de comunicación

Con el modelo de enseñanza del MTL se pretende explicar cómo y qué se enseña sobre el objeto matemático en juego, en este caso los números decimales, por lo que es necesario revisar el modelo educativo que se sigue para comunicar ese concepto a los estudiantes que están siendo observados (Filloy et al., 1999). Así, para la elaboración del modelo de enseñanza de la presente investigación se hace una revisión del contenido propuesto para primero y segundo año de secundaria, tanto en los planes y programas de estudio, como en los libros de texto propuestos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG).

En los planes y programas propuestos por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), los Aprendizajes Clave para la Educación Integral proponen el estudio de los números decimales tanto en primero como en segundo grado de secundaria. En ambos grados los aprendizajes esperados que involucran a estos números se encuentran en el eje Número, Álgebra y Variación (SEP, 2017, pp. 178-179), y corresponde a lo siguiente:

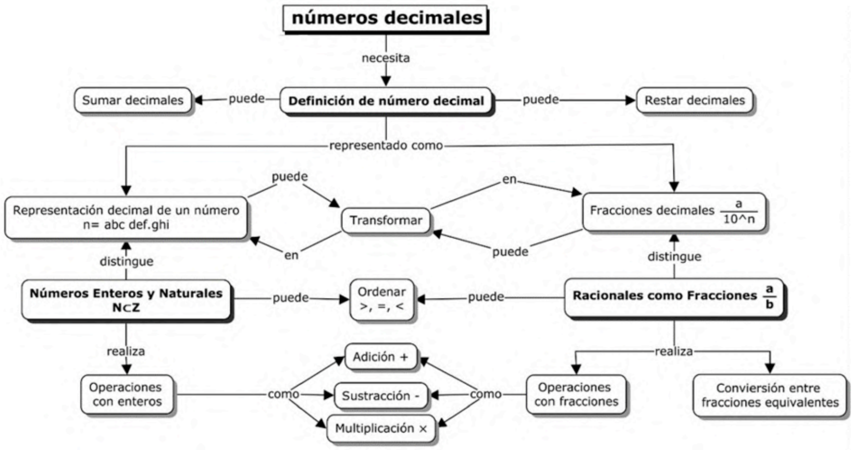
- Primer grado
    - Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales.
    - Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
    - Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales y de división con decimales.
- Segundo grado
    - Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
    - Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

De manera general, en los libros de texto revisados, por ejemplo, el de Editorial Pearson (Mancera & Basurto, 2019) y Ediciones Castillo (Alberro,

2016) se proponen actividades que promueven el uso de algoritmos para pasar de notación decimal a fracción decimal y viceversa, otras actividades para realizar operaciones con números en distintas notaciones. Además, se plantean problemas en diversos contextos y se formulan algunas preguntas para que los estudiantes elaboren sus propios modelos y símbolos. Asimismo, un modelo que se emplea para la enseñanza de estos números en los libros de texto es la recta numérica. A manera de síntesis, en la Figura 3 se encuentra un esquema que relaciona los contenidos que se proponen en el modelo educativo para los dos primeros años de educación secundaria.

Figura 3

Contenido sobre los números decimales que se propone en el modelo educativo



En cuanto al modelo de comunicación, se establece que, a través de los libros de texto es como se comunican ideas o información que busca constituir objetos mentales en los estudiantes. En los propios libros de texto se promueve el trabajo colaborativo entre estudiantes y entre estudiantes y profesor para comunicar ideas. Eso además de la propia interacción que propicia el profesor en el aula. Para la construcción de ese componente se busca explicar cómo se establece esa comunicación. Sin embargo, por el carácter de este trabajo, el énfasis está en el componente modelo de cognición del MTL, mismo que se expone a continuación.

Modelos de cognición

Con el modelo de cognición se busca entender y explicar los procesos cognitivos de los estudiantes sobre un determinado objeto matemático, para ello se debe asumir alguna perspectiva teórica o teoría (Filloy et al., 1999). Así, la elaboración del modelo de cognición para esta investigación se hace a través de las ideas desarrolladas por Freudenthal (1983), en las que explica la diferencia entre los objetos mentales de un individuo y los conceptos matemáticos.

Para Freudenthal los objetos mentales preceden a los conceptos u objetos matemáticos, y pueden ser interpretados de manera similar a como lo hizo Valenzuela (2018) y Valenzuela et al. (2019), como un conjunto de ideas que los estudiantes elaboran sobre el objeto matemático y la relación que guarda ese objeto con los fenómenos que organiza. Así, puede distinguirse a los conceptos de los objetos mentales. Los conceptos provienen de un consenso de expertos en la materia de la que forma parte el concepto, mientras que los objetos mentales son lo que cada individuo entiende de ese concepto. La constitución de objetos mentales puede ser muy profunda incluso si no está seguida de la obtención de conceptos, y mientras más experiencias tenga un individuo con los diversos fenómenos asociados al concepto, mejores objetos mentales pueden construir.

Además de los elementos teóricos descritos, que permiten explicar los procesos cognitivos de los estudiantes a través de la constitución de objetos mentales, para la elaboración del modelo de cognición de este MTL, se juzga importante tomar en cuenta algunos de los problemas cognitivos comunes reportados en la literatura, de manera que ofrezcan una visión más completa de la forma en la que los estudiantes comprenden el objeto matemático en estudio. Fueron expuestas algunas problemáticas en la literatura (Ávila, 2008; Lortie-Forgues et al., 2015; Tian & Siegler, 2018; Valencia & Ávila, 2015), y para el propósito de este documento, entre las dificultades a considerar se hace la clasificación de las siguientes:

- **Confusión entre número y su notación**: Confundir el número con su notación o formas de escribirlo. En el caso específico de los números decimales se trata de considerar que son decimales todos aquellos números con punto, pasando por alto su naturaleza racional y centrándose en su representación. Un ejemplo es considerar las representaciones decimales de fracciones no decimales como números decimales, como puede ser $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$.
- **Magnitud (comparación y orden)**: Se refieren a las dificultades para comparar y ordenar números decimales, resultado de considerarlos números naturales separados por un punto, centrándose en comparar la parte decimal como si fuesen naturales. Un ejemplo es pensar que $1.15 > 1.2$ porque $15 > 2$.
- **Aritmética (efecto de las operaciones)**: Aquí se reportan dificultades para sumar y restar decimales por emplear una perspectiva y reglas de los números naturales para operarlos, resultado de alinear las cifras con respecto al punto decimal. Del mismo modo se integran aquí las dificultades para comprender los efectos de la multiplicación y división con números decimales que dan lugar al síndrome MADA.

- **Densidad**: Al no reconocer la naturaleza racional de los decimales no se considera que entre cualquier par de números decimales es posible encontrar otro número decimal, percibiendo a los naturales como falsos consecutivos. Por ejemplo, al considerar que 2.9 precede a 2.10.
- **Conversión**: En esta categoría se encuentran las dificultades para convertir números de su expresión decimal a su expresión fraccionaria y viceversa.

Una vez reconocidos y considerados aquellos problemas previamente reportados, como medio para complementar el modelo de cognición de este MTL se consideró necesario identificar los objetos mentales que poseen estudiantes de educación secundaria, de manera que se pueda reconocer la presencia de las dificultades descritas en la literatura o dar cuenta de otras. En otras palabras, es importante integrar el estado de los objetos mentales de los estudiantes al componente de cognición, para que los instrumentos y materiales que se elaboren para la fase experimental del MTL atiendan en mayor medida a las necesidades de los estudiantes.

Para lograr lo anterior se elaboró un instrumento de exploración, basado en otros estudios, que fue aplicado a un grupo de 42 estudiantes de segundo año de secundaria. En adelante, se presentan tanto el diseño del instrumento como los resultados de su implementación.

Identificación de objetos mentales de los estudiantes

La identificación de los objetos mentales de los estudiantes comenzó con el diseño de una prueba que sirve como instrumento de exploración y para la recopilación de datos. Por ello, antes de exponer los resultados, se muestra a continuación el diseño de la prueba.

Diseño y aplicación de la prueba

La prueba está constituida por seis actividades, cada una diseñada para identificar objetos mentales específicos sobre los números decimales, que se detallan a continuación. La prueba se diseñó para ser resuelta de forma individual y a lápiz y papel en un tiempo límite de 45 minutos. En la descripción de las actividades sólo se presentan los propósitos de cada una, pero en las imágenes de la exposición de resultados, podrá observarse cómo fueron presentadas las actividades en la prueba que respondieron los 42 alumnos de segundo año de secundaria.

Actividad 1: Clasificación de los números

Esta actividad tiene como propósito identificar si el estudiante es capaz de clasificar un número en el conjunto al que pertenece, distinguiendo entre el conjunto de los números enteros (llamados así porque en este nivel los alumnos no distinguen entre naturales y enteros), los números racionales (llamados números fraccionarios por el nivel en el que se está trabajando), y el conjunto de los números decimales. Con esta actividad se determina si los objetos mentales que los estudiantes han construido les permite reconocer la diferencia entre un número y su notación, así como características que definen a los números en un determinado conjunto numérico.

La actividad es una adaptación de la tarea presentada por Moreno et al. (2007), la cual fue aplicada con estudiantes de licenciatura y graduados con la intención de "recoger información acerca del objeto número decimal y analizar el tipo de relaciones que los alumnos establecen entre el número decimal y los otros conjuntos numéricos" (p. 254).

Para el caso de este estudio, la actividad consiste en observar un número en la primera columna de una tabla, y marcar a qué conjunto o conjuntos pertenece. Se eligieron distintos números para clasificar, y su presencia tiene un propósito específico.

El número 2 está presentado en una notación muy común al estudiante, está representado como número natural, por ello a pesar de ser racional y decimal, si la distinción entre el número y su notación no se ha estudiado o aprendido, se prevé que el estudiante solamente marque la casilla que lo identifica como número entero. Se eligió también, representar a un número equivalente a 2, escrito en fracción, en este caso $\frac{6}{3}$, esto con la finalidad de observar si los alumnos reconocen que estos números son equivalentes y por tanto pertenecen tanto a los racionales como a los enteros, además de pertenecer al conjunto de los decimales.

De manera similar se colocaron las fracciones $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{3}$ con sus respectivos equivalentes $0.1\overline{6}$ y $0.\overline{6}$ para representar una fracción no decimal tanto en forma de fracción como en notación decimal. También se agregó el 3.00 con la intención de identificar la relación que pudieran establecer los estudiantes entre el número y su representación. Si bien 3.00 es un número decimal, también es entero y además puede escribirse como fracción, lo que lo hace racional. Otros números elegidos con ese propósito son las fracciones restantes, $\frac{8}{2}$ y $\frac{1}{5}$. En este caso, $\frac{8}{2}$ es una representación del entero 4 y, a su vez, $\frac{1}{5}$ es la representación del número decimal 0.2. Los números restantes, 1.4, 1.22 y 0.4, son todos números decimales presentados en notación decimal, aunque pueden ser representados también como fracciones decimales.

Actividad 2: La recta numérica

El propósito de esta actividad es identificar los objetos mentales que el estudiante ha construido en relación con la equivalencia, el orden y la magnitud de los números, mostrando si es capaz de ordenarlos en una recta numérica en la que se coloca el 0 y la unidad de referencia, 1.

Los números elegidos fueron los presentados en la actividad 1 de esta prueba, con el fin de identificar si reconocen la equivalencia entre los números, así como si son capaces de ordenar números que están expresados en distintas notaciones, e identificar si requieren transformar los números a otras notaciones para establecer el orden o poder ubicarlos en la recta numérica.

Actividad 3: Propiedad de densidad

La actividad 3 tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido en torno a la propiedad de densidad de los números decimales. En la actividad se les propone anotar tres números que se encuentren entre 5.1 y 5.4, nótese que se puede pensar que uno de ellos es 5.2 y otro 5.3. Completar la tarea con éxito supone que los alumnos han desarrollado la idea de que los decimales no cuentan con un antecesor y un sucesor, ubicando decimales entre otros decimales como lo describió Ávila (2008). Aunque, los estudios reportados (Ávila, 2008; Tian & Siegler, 2018) dan cuenta de la dificultad de los estudiantes para reconocer esta propiedad de densidad de los decimales.

Actividad 4 y actividad 5

En estas actividades se tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido con respecto a la conversión de números representados en su forma decimal a fracciones y viceversa.

En la actividad 4 los estudiantes deben convertir los números representados como decimales a alguna de sus representaciones fraccionarias. Los números propuestos son 1.4, $0.\overline{3}$, 5.0 y 0.07. Nótese que 1.4 estuvo presente en la tabla de la actividad 1, su presencia en esta actividad puede sugerir al estudiante que 1.4 puede representarse como fracción además de como decimal. De manera similar, $0.\overline{3}$ y 5.0 pueden sugerir al estudiante que un decimal periódico o un entero pueden escribirse como fracción, respectivamente. Por su parte, 0.07 permitirá observar el tratamiento que le dan los estudiantes a la conversión de decimales que no son tan reconocidos como fracciones y que tienen más de una cifra decimal.

En la actividad 5 los estudiantes deben convertir las fracciones que se les presentan a expresiones decimales. Las fracciones propuestas son $\frac{1}{3}, \frac{16}{4}, \frac{7}{5}$ y $\frac{6}{100}$. El número $\frac{1}{3}$ es racional, pero no es una fracción decimal, y su notación decimal periódica es $0.\overline{3}$. Este número se presentó en la actividad 4, y su presencia en esta actividad busca identificar si existe alguna discrepancia entre la conversión de decimal a fracción y de fracción a decimal.

Una representación fraccionaria del número 4 es $\frac{16}{4}$, su presencia puede sugerir al estudiante que las fracciones pueden representar números enteros, y permitirá observar si los estudiantes los reconocen como tal. $\frac{7}{5}$ es una representación del número que en formato decimal se puede escribir como 1.4, nótese que este número también aparece en la actividad 4. Por último,

$\frac{6}{100}$ es una fracción que se asemeja a la fracción que podría representar al decimal 0.07 que apareció en la actividad anterior, su presencia permite identificar si se presentan dificultades en la conversión y si esta se da en específico en alguno de los sentidos.

Actividad 6: Laberinto de los decimales

Esta actividad tiene como propósito identificar los objetos mentales que los estudiantes han construido en relación con la aritmética de los números decimales. Esta actividad, adaptada de la presentada por Valencia y Ávila (2015), permite identificar el sentido que los estudiantes le dan al efecto de las operaciones con números decimales, lo cual podría estar asociado al síndrome MADA.

Resultados de la exploración

Para identificar los objetos mentales sobre los números decimales que han construido los estudiantes, primeramente, se hizo un análisis general del éxito obtenido en las actividades que se propusieron en la prueba, asociadas a distintas ideas sobre esos números. Para esto, se asignó un valor de un punto por actividad contestada correctamente y cero puntos por haber contestado incorrectamente o no haber contestado. La actividad 6 no tiene puntaje, puesto que no hay un "camino correcto".

Como se observa en la Tabla 1, los alumnos no muestran ideas que les permita distinguir los conjuntos numéricos, en particular parece que no reconocen que un número puede pertenecer a más de un conjunto. Es necesario seguir desarrollando la idea de que un número puede expresarse en diferentes formas, así como explicar cómo puede pasarse de una forma a otra. Los objetos mentales de los estudiantes también están limitados en cuanto a sus ideas desarrolladas para ubicar números en la recta numérica. El mayor éxito obtenido por los estudiantes se tuvo en la actividad 3, en la cual se evaluó la idea que los estudiantes han construido en torno a la propiedad de densidad de los números decimales. El mayor puntaje obtenido por un solo estudiante en la prueba fue de 3 puntos.

Tabla 1
Resultados generales de éxito en la prueba

Actividades	Frecuencia
1. Clasificación de los números	0/42
2. Ubicación en la recta numérica	4/42
3. Propiedad de densidad	18/42
4. Conversión de decimales a fracciones	2/42
5. Conversión de fracciones a decimales	9/42
Total	33/210

Para conocer con mayor detalle las ideas de los estudiantes y así caracterizar sus objetos mentales, a continuación, se presenta un análisis por cada actividad.

Actividad 1: Clasificación de los números

En esta actividad se observaron respuestas similares y frecuentes por parte de los estudiantes. De entre todos los estudiantes que resolvieron la prueba de diagnóstico, ninguno marcó más de una casilla por fila, a pesar de que en la instrucción fue: "marca con X a cuáles números pertenece cada uno de los números de la columna de la izquierda". Se interpreta que ninguno considera que un número pueda pertenecer a más de un conjunto a la vez. Ciertamente, nueve de ellos dudaron en la clasificación de algunos de los números, pero al final ninguno se decidió a marcar un número como perteneciente a más de un conjunto.

La Figura 4 muestra una de las respuestas típicas a esta actividad. En ellas es posible notar que los estudiantes no distinguen el número y su notación decimal, en su mayoría reconocen como decimal a cualquier número expresado con punto y solamente a aquellos escritos en ese formato. El caso de 3.00 es una excepción, puesto que veinte de los estudiantes lo reconocieron como número entero a pesar de tener punto. Esto indica que para clasificar a un número como decimal, este debe tener cifras distintas de cero después del punto.

Figura 4

Respuesta de un estudiante a la actividad 1

Número	Número Entero	Número Fraccionario	Número Decimal
2	X		
$\frac{1}{5}$		X	
1.4			X
3.00			X
$\frac{1}{6}$		X	
1.22			X
$\frac{8}{2}$		X	
$\frac{2}{3}$		X	
0.4			X
$0.1\overline{6}$			X
$\frac{6}{3}$		X	
$0.\overline{6}$			X

A pesar de que $\frac{6}{3} = 2$, los estudiantes clasifican a estos números en categorías distintas, $\frac{6}{3}$ como fracción y 2 como entero, si bien eso es cierto, las ideas de los alumnos en esta actividad no dejan ver si reconocen o no la equivalencia y por tanto la pertenencia a ambos conjuntos. Sin embargo, para ubicar a estos mismos números en la recta numérica (actividad 2), hay evidencia de que no reconocen su equivalencia. Ninguno de los números decimales expresados en notación decimal fue clasificado como fracción, mientras que las expresiones decimales periódicas fueron clasificadas como números decimales a pesar de representar a fracciones no decimales. En la mayor parte de las respuestas, los números fueron clasificados de acuerdo con la forma en que estaban expresados, por ello, es necesario profundizar para determinar si reconocen equivalencias entre números. Lo que es claro es que, persiste la idea de que un número decimal es un número con punto y con cifras distintas de cero después del punto.

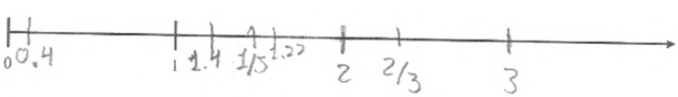
Actividad 2: Ubicación en la recta numérica

En la segunda actividad los estudiantes ubicaron los números presentados en la actividad 1 en una recta numérica. Al respecto, se presentaron errores correspondientes al orden y la magnitud de los decimales. Una de las ideas de los estudiantes para ordenar números en su expresión decimal es comparar los números escritos antes del punto decimal y después del punto decimal, considerándolos enteros separados por puntos, como puede observarse en la Figura 5 al ubicar los números 1.4 y 1.22. También persiste la idea de ver a las fracciones como dos números separados, así, a las fracciones las ubican después del número entero que está en el numerador, pero antes de la fracción decimal equivalente al número entero que está en el denominador, tal como se observa la fracción $\frac{2}{3}$ en la Figura 5. Lo anterior corresponde a una mala extensión de las propiedades de los naturales para los decimales, natural *number bias*, como fue descrito por González-Forte et al. (2019), Tian y Seigler (2018) y Lortie-Forges et al. (2015).

Otra idea que está relacionada con ver a la fracción como dos números, y asociada a la conversión de las fracciones en expresiones decimales, es aquella en la que interpretan al numerador como la parte entera y al denominador como la parte decimal de un número, por ejemplo, ubicando a $\frac{2}{3}$ en la posición que ocuparía 2.3. En las actividades 4 y 5 hay más evidencia sobre esta idea.

Figura 5

Respuesta de un estudiante a la actividad 2



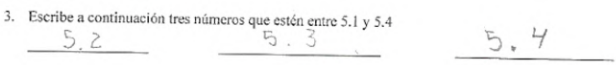
Por último, puede observarse en la Figura 5 que no hay una representación de la fracción $\frac{6}{3}$ en la recta numérica, esto contribuye al resultado de que los alumnos no reconocen la equivalencia entre números, en este caso el 2 y $\frac{6}{3}$. Incluso, siguiendo la idea de este alumno, esta fracción estaría después del 6, pero por el espacio, quizá ya no continuó iterando hasta ese valor.

Actividad 3: Propiedad de densidad

La actividad 3 fue la mejor contestada por los estudiantes con 18 respuestas correctas, no obstante, más de la mitad de ellos no logró contestar correctamente. Entre los que contestaron de manera equivocada, la mayoría identificó a 5.2 y 5.3 como números entre 5.1 y 5.4, pero no encontraron otro número que pudiera estar entre ellos, por eso utilizaron alguno de los límites, ya sea 5.1 o 5.4. La Figura 6 muestra una respuesta típica a esta actividad.

Figura 6

Respuesta de un estudiante a la actividad 3



Actividades 4 y 5: Conversión de decimales a fracciones y de fracciones a decimales

Las ideas que han desarrollado los estudiantes visibilizan dificultades en la conversión de números fraccionarios a su expresión decimal y viceversa. Para pasar números de sus expresiones decimales a fracciones, 22 de los estudiantes colocaron la parte entera de la expresión decimal como numerador y la parte decimal como denominador (ver Figura 7). 18 de ellos aplicaron el mismo criterio para pasar de números fraccionarios a expresión decimal (ver Figura 8). De manera similar a como algunos de ellos habían intentado ubicar números en la recta numérica (Actividad 2).

Figura 7

Respuesta con interpretación del punto decimal como línea fraccionaria en actividad 4

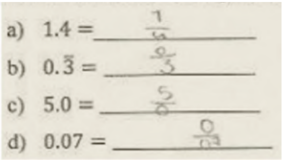
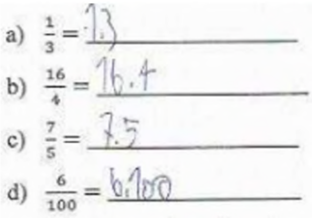


Figura 8

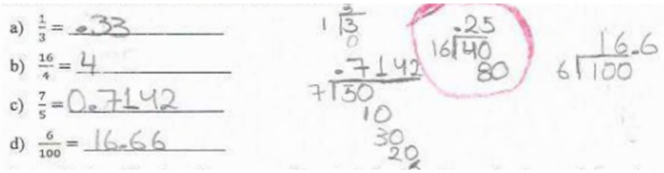
Interpretación de la línea fraccionaria como punto decimal en actividad 5



Dos estudiantes reconocieron que para hacer la conversión de expresiones fraccionarias a decimales debían hacer la división de los números de la fracción (cociente), sin embargo, en lugar de dividir el numerador entre el denominador lo hicieron dividiendo el denominador entre el numerador. Esto puede apreciarse en la Figura 9. Este error podría asociarse a una cuestión de lenguaje y escritura, la forma en que se escribe es de izquierda a derecha. Dado que debe hacerse "16 entre 4", al escribir de izquierda a derecha se comienza colocando el 16, después se dibuja la galera y finalmente se coloca el 4 equivocadamente dentro de la galera. Cabe señalar que, a pesar de que las divisiones las hizo siguiendo el mismo criterio para las fracciones de todos los incisos, el alumno identificó $\frac{16}{4}$ como equivalente a 4, por ello encierra con rojo la división que hizo para $\frac{16}{4}$, indicando que eso es un error que no quiere que se considere en sus procedimientos.

Figura 9

Ejemplo de división invertida y omisión de periodicidad en actividad 5



En esta actividad, también fue posible identificar que algunos estudiantes no reconocen la notación de periodicidad con el periodo con vinculum en la expresión decimal, por lo que escribieron $0.\overline{3} = \frac{33}{100}$ o $\frac{1}{3} = 0.33$, tal como se observa en el inciso a de la Figura 9.

Actividad 6: Laberinto de los decimales

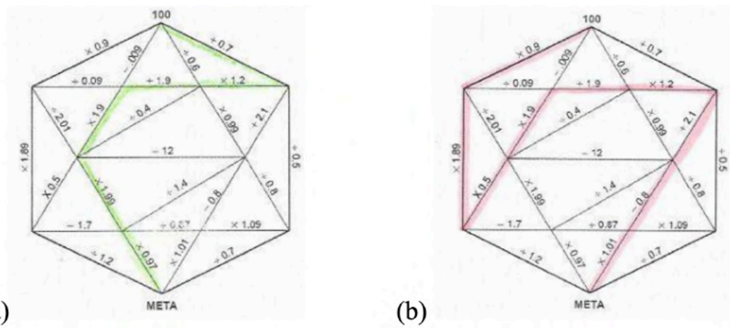
En la última actividad de la prueba, que consistió en trazar el camino que consideran que les haría ganar más puntos en el Laberinto de los decimales (Valencia & Ávila, 2015) se pudieron identificar algunos comportamientos peculiares.

De manera similar a como fue reportado por Valencia y Ávila (2015), los estudiantes tienden a dos estrategias: 1) Recorrer la mayor cantidad de sumas y multiplicaciones posibles. Por ejemplo, en la Figura 10 (a) se observa que el estudiante elige un camino compuesto sólo por sumas y multiplicaciones. 2) Evitar siempre que sea posible las divisiones y las restas, en caso de verse forzado a elegir, seleccionan las restas por sobre las divisiones. Por ejemplo, en la Figura 10 (b) se observa cómo, en su penúltimo segmento antes de llegar a la meta, el estudiante elige la menor de las restas en lugar de cualquiera de las divisiones.

Estos resultados visibilizan que los alumnos evitan las divisiones, quizá tengan la idea antes reportada, esto es, al dividir dos números, el cociente será menor que el dividendo; mientras que procuran realizar la mayor cantidad de multiplicaciones posibles porque el producto será siempre mayor que cualquiera de los factores. Estas estrategias revelan la existencia de objetos mentales erróneos respecto a la multiplicación con números decimales, y confirman la presencia del síndrome MADA (Valencia & Ávila, 2015).

Figura 10

Ejemplos de dos estrategias seguidas por los estudiantes en la actividad 6



Conclusiones

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, a manera de síntesis, en la Tabla 2 se describen las ideas asociadas a los objetos mentales que han desarrollado los alumnos de segundo grado de secundaria sobre los números decimales, así como la frecuencia con la que aparecen esas ideas.

A partir de los resultados de la exploración, que permiten complementar el modelo de cognición del MTL que en esta investigación se construye, puede concluirse que los estudiantes deben mejorar sus objetos mentales sobre los números decimales, ya que sus ideas distan de los conceptos previstos en el modelo de competencia formal y en el modelo de enseñanza del MTL considerado para este nivel educativo. Se observa la presencia de ideas que han sido reportadas como errores y dificultades en otras investigaciones, y algunas otras más, como la división invertida para pasar de un número fraccionario a su notación decimal.

El estudio exploratorio sobre los objetos mentales de los estudiantes reveló la posible existencia de una confusión entre el número y su representación. Los estudiantes no dejaron evidencia sobre el reconocimiento de que un número pueda pertenecer a más de un conjunto, sino que aparece la idea de que cada número pertenece al conjunto que coincide con su representación.

Se identificaron ideas erróneas para la ubicación de los números en una recta numérica, como comparar las cifras decimales de dos números como enteros, o al ubicar fracciones, colocarlas después del número entero del numerador. También, fue posible detectar que los estudiantes siguen procesos incorrectos para la conversión entre fracciones y decimales, como interpretar a la línea fraccionaria como punto decimal al convertir fracciones en decimales, y viceversa. Aquí se incluye la idea de dividir el denominador entre el numerador para convertir fracciones a decimales.

Tabla 2

Ideas que definen los objetos mentales de estudiantes de segundo grado de secundaria

Ideas	Descripción	Frecuencia
Actividad 1: Reconoce la diferencia entre un número y su notación		0/42
Conjuntos disjuntos	Los números sólo pueden clasificarse como Enteros, Fraccionarios o Decimales.	42/42
Decimales son números con punto	Los números decimales son todos los números que se encuentran escritos en notación decimal con punto	42/42
Actividad 2: Establece el orden y la magnitud de los números a partir de su ubicación en la recta numérica		4/42
Interpreta a la línea fraccionaria como punto decimal	Ubica fracciones en la recta numérica considerando que el numerador expresa la parte entera y el denominador expresa la parte decimal de un número	15/42
Enteros separados por punto	Ordena números decimales expresados en formato decimal con punto, considerando que estos son números enteros separados por el punto decimal.	13/42
Actividad 3: Reconoce la propiedad de densidad de los números decimales		18/42
Falsos consecutivos	Los números decimales son percibidos como falsos consecutivos que no tienen otros números entre ellos.	13/42
Actividad 4: Convierte de números en formato decimal a formato fraccionario		2/42
Interpreta al punto decimal como línea fraccionaria	Convierte expresiones decimales en fracciones escribiendo la parte entera como numerador y la parte decimal como denominador	22/42
No identifica periodicidad	No identifica la notación de periodicidad y hace aproximaciones	9/42
Actividad 5: Convierte de números en formato fraccionario a formato decimal		9/42
Interpreta a la línea fraccionaria como punto decimal	Convierte fracciones en expresiones decimales reescribiendo el numerador antes del punto y el denominador después del punto decimal	18/42
No expresa periodicidad	No expresa la periodicidad de un número con infinitos decimales periódicos, trunca y deja aproximaciones	18/42
Hace división invertida	Convierte fracciones en expresiones decimales dividiendo el denominador entre el numerador	2/42
Actividad 6: Objetos mentales que los estudiantes han construido en relación con la aritmética de los números decimales.		-
Síndrome MADA	Considera que en la multiplicación el producto siempre es mayor que cualquiera de los factores y, por el contrario, en la división el cociente siempre es menor que el dividendo. Selecciona rutas que no tienen divisiones ni restas o las esquiva en la medida de lo posible. También procura seleccionar la mayor cantidad de multiplicaciones posibles.	-

Adicionalmente, se constata la presencia del síndrome MADA, ya que los estudiantes atribuyen propiedades de las operaciones con números enteros a las operaciones con decimales. En la actividad 6 -el laberinto de los decimales- muestran recorridos que buscan utilizar en mayor medida sumas y multiplicaciones, puesto que los estudiantes asocian a estas operaciones con incrementos, mientras que evitan las restas y las divisiones ya que las asocian con decrementos.

Agradecimientos

Se agradece a la Escuela Secundaria Técnica 100 de Zapotlán el Grande, Jalisco, por su apertura y facilidades para la implementación de los instrumentos.

Referencias

Alberro, A. (2016). *Travesías: Matemáticas 2*. Ediciones Castillo.

Alonzo, C., & Reyes, A. (2021). La multiplicación con números decimales: el diseño de una situación didáctica en el escenario de la ingeniería didáctica. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), XVI *Congreso Nacional de Investigación Educativa.* COMIE.

Astuti, P. (2014). Learning one-digit decimal numbers by measurement and game predicting length. *Journal on Mathematics Education, 5*(1), 35–46.

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática, 20*(2), 5–33.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18*, 29–59.

Ávila, A., & García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura* (1ª. ed.). Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Broitman, C. I. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, 6*(1), 5–26.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 171–190. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1018

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L., & Rubio, G. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

González-Forte, J., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante, 28*, 32–50.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38,* 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Mancera, E., & Basulto, E. (2019). *Interacciones. Matemáticas 2* (1ª. ed.). Pearson Educación de México.

Moreno, M., Hernández, V., & Socas, M. (2007). Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 8*, 251–272.

Pramudiani, P., Hartono, Y., & van Amerom, B. (2011). A Concrete Situation for Learning Decimals. I*ndonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 2*(2), 215–230. http://dx.doi.org/10.22342/jme.2.2.750.215-230

Puig, L., & Fernández, A. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín, & L. Blanco, (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29–46). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Matemáticas. Educación Secundaria.* SEP.

Tian, J., & Siegler, R. (2018). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? *Educational Psychology Review, 30*(2), 351–372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3

Valencia, E., & Ávila, A. (2015). Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el Laberinto de decimales. *Educación Matemática, 27*(3), 81–110.

Valenzuela, C. (2018). *Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: Estudio en comunidades marginadas.* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]

Valenzuela, C., Garcia, M., & Nájera, A. (2019). Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria. En L. Hernández, H. Borja, J. Slisko, & J. Juárez (Eds.), *Aportes a la educación matemática basados en la investigación* (pp. 162–184). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction, 28*(2), 181–209.

El problema del árbol quebrado: la relación entre los dibujos generados por los estudiantes y sus respuestas

Martha Patricia Velasco Romero [1]
Josip Slisko Ignjatov [2]

Resumen

En las matemáticas hay problemas que continúan vigentes hasta nuestros días, tal es el caso del problema del bambú, el cual fue tomado para el presente estudio usando una variante cuyo actor principal es ahora un árbol quebrado. Las representaciones visuales como son los dibujos situacionales y matemáticos juegan un papel muy importante en la comprensión del problema, ya que para planear una solución es necesario integrar toda la información relevante en una estructura coherente que permita representar el problema de forma adecuada y completa. El objetivo de este estudio fue analizar la relación entre los dibujos y las respuestas que proporcionaron 54 estudiantes de bachillerato, quienes trabajaron de manera individual y grupal, con la sugerencia de que hicieran dibujos que consideraran necesarios. Después, se presentó la solución experta y una retroalimentación mediante una hoja reflexiva donde los estudiantes evaluaron sus experiencias de aprendizaje. En este estudio de corte cualitativo se reportan los dibujos más relevantes clasificados en: mixtos, situacionales y matemáticos. También se exponen y comentan los resultados obtenidos en la parte reflexiva. Finalmente, se encontró correspondencia significativa entre las respuestas correctas y los dibujos matemáticos y mixtos.

Palabras clave

Problema verbal, Dibujo situacional, Dibujo matemático, Solución experta

---

[1] martha.velasco@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
https://orcid.org/0000-0003-0125-8823

[2] jslisko@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
https://orcid.org/0000-0002-5805-4808

Velasco Romero, M. P., & Slisko Ignjatov, J. (2024). El problema del árbol quebrado: la relación entre los dibujos generados por los estudiantes y sus respuestas. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 125–147). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-06

Introducción

Los problemas de matemáticas están en constante cambio, con diferentes formulaciones, distintos datos, e incluso en otras épocas de la humanidad. De la misma forma, a lo largo de nuestra historia, los acertijos y problemas de matemáticas han estado presentes con distintas contextualizaciones (Swetz, 2009) que trascienden incluso después de siglos. Tal es el caso de los problemas históricos, los cuales son un valioso recurso que pueden motivar al estudiante en el aula de matemáticas (Swetz, 2012).

El Jiuzhang es un libro sobre el arte matemático chino dividido en 9 capítulos, fue escrito entre los siglos II y I antes de nuestra era. En el capítulo 9 destacan 24 problemas los cuales usan el Teorema de Pitágoras. Existen dos problemas que resaltan: el del bambú roto y el de la caña en el estanque. Estos, se han encontrado con diferentes datos y peculiares versiones en distintas culturas a través de nuestra historia (Swetz, 2009). El problema del bambú roto (Figura 1) se describe a continuación:

Un brote de bambú de 10 metros de altura está roto cerca de la parte superior. La configuración del brote principal y su parte quebrada forma un triángulo. La parte superior toca el suelo a 3 metros del tallo. ¿Cuál es la longitud del tallo en pie? (Swetz, 2009, p. 78-79).

Figura 1

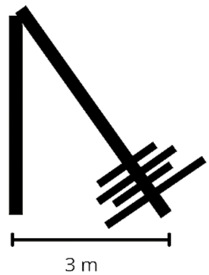
El problema del bambú, en el capítulo 9 del Jiuzhang

Nota. Figura retomada de Swetz (2012, p. 10)

Así mismo, en una pequeña incursión en los libros de matemáticas del tercer grado de educación secundaria del ciclo escolar 2022-2023, este problema se encuentra con dos formulaciones distintas. En la primera formulación (Figura 2), el problema menciona lo siguiente: "La compañía de electricidad se ha dado cuenta que, debido a la fuerza del viento en una tormenta, se han partido algunos postes de luz. Estos están rotos más o menos a la misma altura. Después de un estudio se ha decidido reforzar los otros postes a esta altura para que aguanten los vientos. Los postes miden 7 m de altura, y al romperse, la punta descansa a 3 metros de donde está clavado el poste" (Bosch y Meda, 2021).

Figura 2

El problema del poste de luz

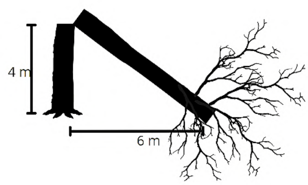


Nota. Figura retomada de Bosch y Meda (2021, p. 218)

En la segunda formulación (Figura 3), se menciona lo siguiente: “Un árbol se quebró a causa del viento. La punta del árbol cayó a 6 metros del pie de este. Se desea saber la altura total antes de quebrarse. Si se supone que entre el árbol y el suelo se forma un ángulo de 90°. Describa una estrategia para determinar la altura total del árbol antes de quebrarse”.

Figura 3

El problema del poste de luz



Nota. Figura retomada de Calderón (2021, p. 165)

En el presente trabajo se usó la segunda formulación del problema sin el dibujo. Además de ser un problema histórico, si se formula dentro del aula puede considerarse un problema verbal contextualizado, ya que, siguiendo a Verschaffel et al. (2000) un problema verbal es una situación problemática en la que se plantean una o más preguntas cuya respuesta se puede obtener mediante la aplicación de operaciones matemáticas a datos numéricos disponibles en el enunciado del problema. En este caso se usará el Teorema de Pitágoras y una suma.

Los problemas verbales por su complejidad se pueden clasificar en rutinarios, donde ya hay un patrón de solución u operaciones determinadas, y los problemas no rutinarios donde no hay un algoritmo o un conjunto de pasos preestablecidos para llegar a su solución, además requieren de un pensamiento creativo y de la aplicación de una estrategia heurística (Elia et al., 2009; Pantziara et al., 2009). Es importante recalcar que un resolutor exitoso involucra más actividades cognitivas con cantidad de información no trivial relacionada, ya que tiene distintas estrategias desarrolladas, además de un comportamiento autorregulado efectivo (Krawec, 2010; Lewis & Mayer, 1987).

Para resolver un problema en la educación matemática, Polya (1965) describe sus famosos cuatro pasos: entender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y verificar la solución. Sin embargo, para llegar a la solución de un problema verbal se depende de dos fases principalmente, la comprensión del problema, donde se identifica y se representa correctamente las relaciones entre la información relevante del problema, y la solución del problema, en donde se determinan los cálculos necesarios para resolver el problema (Krawec, 2010; Lewis & Mayer, 1987). Se cree que una representación visual externa puede ayudar en la comprensión del problema, ya que la construcción mental pasa a ser representada por medio de un dibujo o un modelo matemático.

Para Polya (1965), los diagramas son representaciones visuales que presentan información distribuida en espacios. Por otra parte, De Bock et al. (1998), encontraron que los dibujos generados por los mismos estudiantes, los cuales eran completos y correctos, conducían a soluciones más precisas. Además, la representación visual debería aclarar la estructura del problema, ya que hace visibles las relaciones numéricas, lingüísticas y espaciales entre los elementos relevantes para la solución, lo que en consecuencia facilita la comprensión del problema y la identificación de los cálculos a realizar (Boonen et al., 2014; Krawec, 2010; 2014).

Hegarty y Kozhevnikov (1999) usaron en su estudio distintos problemas verbales, reportaron que las representaciones esquemáticas están correlacionadas con el éxito en la solución de un problema. Por otro lado, las representaciones pictóricas se relacionaron con respuestas erróneas, debido a los detalles superficiales que no representan las relaciones entre las variables del problema a pesar de ser una representación visual. Estas representaciones esquemáticas se acercan a la caracterización de dibujo matemático, mientras que las representaciones pictóricas se aproximan a un dibujo situacional.

Por otro lado, Rellensmann et al. (2017) mencionan que en el planteamiento de un problema verbal el resolutor se puede apoyar en un dibujo situacional, que se puede pulir hasta llegar a un dibujo matemático, mediante el cual es más claro el plan que se llevará a cabo para llegar a una respuesta correcta, así como los procesos matemáticos a seguir.

Por lo anterior, el objetivo general de esta investigación es contribuir a los estudios de problemas verbales que requieren de una representación visual para favorecer la comprensión del problema y la planeación matemática de su solución. Para ello, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Analizar las respuestas de los estudiantes, mediante la clasificación de los dibujos generados tanto en la etapa individual y grupal, buscando una correlación entre ellas.

- Examinar e interpretar diferentes aspectos de las propuestas estudiantiles para determinar la relación entre los tipos de dibujos y las respuestas matemáticamente correctas al problema.

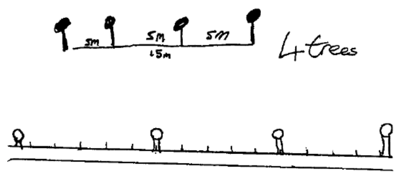
Marco conceptual

Los problemas verbales están presentes dentro del aula de matemáticas y en exámenes estandarizados que forman parte de evaluaciones nacionales e internaciones (Verschaffel et al., 2000; 2020). Generalmente la solución no es trivial, debido a que la información presentada aparentemente no está relacionada entre sí (Bonnen, 2015). Como se mencionaba al principio de este capítulo, dentro del planteamiento de un problema se puede recurrir a las representaciones visuales, estas no son exclusivas para un solo tipo de problema. Su uso suele mejorar la comprensión del problema y generar nuevos datos o sugerencias que permitan alcanzar la respuesta correcta. A continuación, se presentan los distintos tipos de representaciones en problemas verbales.

Hegarty y Kozhevnikov (1999), describen dos tipos de representaciones visuales-espaciales: las representaciones esquemáticas (Figura 4) que plasman las relaciones entre las variables del problema sin detalles superficiales captando la estructura matemática de la situación, y las representaciones pictóricas (Figura 5), que son más similares a dibujos sin establecer relaciones matemáticas entre las componentes de la situación a la que se refiere el problema.

Figura 4

Ejemplo de una representación esquemática



Nota. Figura tomada de Hegarty y Kozhevnikov (1999, p. 686)

Figura 5

Ejemplo de una representación pictórica

Nota. Figura tomada de Boonen (2015, p. 80)

Posteriormente, Boonen et al. (2014) mencionan que las distinciones entre las representaciones pictóricas y esquemáticas no son suficientes como lo menciona Hegarty y Kozhevnikov (1999), y proponen dos tipos de representaciones esquemáticas, las primeras, llamadas representaciones esquemáticas precisas, son aquellas que representan las relaciones entre los datos completos y correctos, y las representaciones esquemáticas inexactas a aquellas que están mal dibujadas o faltan algunas relaciones entre los datos del problema.

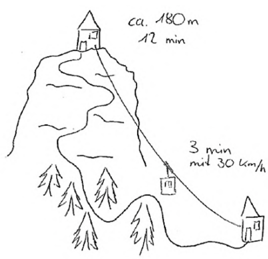
Rellensmann et al. (2017) distinguen dos tipos de dibujos:

> …un dibujo situacional es una representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación problemática de acuerdo con su apariencia visual, mientras que un dibujo matemático es un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático. (Rellensmann et al., 2017, p. 57).

Un dibujo situacional se refiere a un dibujo de bajo nivel de abstracción, que también suelen llamar dibujo pictórico (Figura 6). En contraste, un dibujo matemático muestra solamente los objetos relevantes para la solución de la situación del problema (Figura 7).

Figura 6

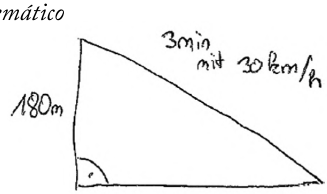
Ejemplo de un dibujo situacional



Nota. Figura tomada de Rellensmann et al. (2017, p. 75)

Figura 7

Ejemplo de un dibujo matemático



Nota. Figura tomada de Rellensmann et al. (2017, p. 75)

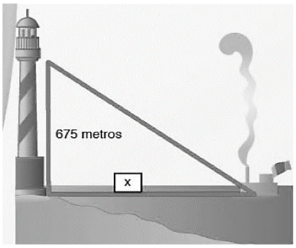
La construcción del dibujo matemático se conforma de seleccionar los datos relevantes del problema simplificando al máximo el dibujo situacional y estructurando las relaciones del problema, buscando una figura o modelo matemático en donde se pueda planificar la solución (Borromeo Ferri, 2006). Es necesario resaltar que la transición entre el dibujo situacional (o real) y el dibujo matemático es complejo, en ocasiones, requiere de una instrucción directa para que el estudiante pueda usar dibujos de manera eficiente que se verá reflejado en su rendimiento al modelar problemas. Además, se deben mejorar las habilidades de dibujo de los estudiantes proporcionándoles apoyo instructivo y práctica suficiente en la generación de dibujos (Rellensmann et al., 2017).

Comprender el problema y construir una representación de la situación adecuada (dibujo matemático o esquemático) es de gran importancia para la resolución exitosa del problema (Leiss et al., 2010), ya que el estudiante puede detectar la estructura matemática implícita en el enunciado, reduciendo los objetos situacionales a sus características matemáticas relevantes. Es por ello que se promueve la comprensión a través de la gestión de la transición de la realidad a los conceptos matemáticos inertes (Blum & Leiss, 2007).

Es necesario mencionar que existen representaciones propuestas por autores de libros de texto mexicanos para el ciclo escolar 2021-2022 donde se combinan las dos representaciones una encima de la otra (Figura 8) similares a los que muestra Contreras et al. (2019).

Figura 8

Ejemplo de una representación que mezcla los dos dibujos: situacional y matemático



Nota. Figura tomada de Contreras et al. (2019, p. 5)

Considerando todos los constructos que se usan para una representación visual y sus características en la presente investigación, se tomarán los términos dibujo situacional y dibujo matemático de Rellensmann et al. (2017), debido a que la palabra modelo puede ser pensada de manera más abstracta.

Por otro lado, Smith y Stein (2018) proponen que para dirigir discusiones productivas en el aula de matemáticas se requieren los siguientes elementos:

- Anticipar. Es cuando se diseña, escogiendo el problema persiguiendo objetivos claros y se deben anticipar soluciones tanto exitosas como no exitosas, considerando que puede haber más de un camino para la respuesta correcta.

- Monitorear. El docente en tiempo real observa a distancia sin dar ningún tipo de juicio. Además, se busca discutir las soluciones de los estudiantes.
- Seleccionar. Se escogen las respuestas considerando diversidad, tanto correctas como erróneas de tal forma que se pueda redirigir los procedimientos hacia la respuesta correcta.
- Secuenciar. Se seleccionan las respuestas de los estudiantes para que ellos describan las soluciones frente al grupo.
- Conectar. En esta última etapa el docente, con ayuda de las respuestas de los estudiantes, conecta los conceptos y soluciones que son interesantes para llegar a una solución exitosa del problema.

Metodología

El estudio es de tipo descriptivo y exploratorio, de corte cualitativo (Hernández et al., 2016). Se examinaron los dibujos generados en la aplicación del problema del árbol quebrado. La aplicación tenía cuatro etapas de 10 minutos basándose en las cinco prácticas de Smith y Stein (2018): solución individual, solución grupal, la solución experta del problema y una reflexión evaluativa.

La población analizada fue de 54 estudiantes de Educación Media Superior de un Bachillerato privado de la Ciudad de Puebla, los cuales fueron: 17 de quinto semestre, 18 de tercer semestre y 19 de primer semestre, cuyas edades variaban entre los 15 a 17 años.

El instrumento para este estudio está compuesto de cuatro secciones con un tiempo de resolución de 10 minutos cada una. La primera hoja de trabajo individual tiene la formulación del problema del árbol quebrado (Anexo 1):

> Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Se pide realizar el dibujo que representa la situación del problema y anotar el procedimiento que se siguió para calcular la altura del árbol antes de que se quebrara. Sin embargo, no se pide el dibujo matemático, por lo que se espera que el informante pueda desarrollarlo y aplicar el Teorema de Pitágoras.

Posteriormente, en la segunda hoja se pide trabajar en equipos para fomentar el diálogo entre pares, de dos y tres integrantes, para intercambiar soluciones para el problema del árbol roto pidiendo nuevamente el dibujo situacional (Anexo2).

En la tercera etapa del instrumento se presenta la solución experta del problema con la ayuda de la hoja de solución enfatizando el uso de los dibujos situacionales y matemáticos (Anexo 3).

Finalmente, en la hoja de reflexión evaluativa se presenta un cuestionario que recopila, si hubo palabras que fueron difíciles de entender, si el problema fue entendible, si el contenido de la solución experta fue clara y entendible, así como si fue entendible el uso de dibujos en el problema. También se evalúa la hoja de solución experta, se pregunta si había elementos por mejorar, además de expresar la utilidad de los dibujos matemáticos y los situacionales, así como sí se pudo generar los dibujos, según sea el caso (Anexo 4).

La aplicación del instrumento se realizó de forma presencial en el bachillerato durante un módulo de 50 minutos, donde los 54 estudiantes participaron contestando en hojas impresas en su grupo correspondiente. En la etapa de análisis de respuestas se realizó la comparación entre las soluciones obtenidas en las fases individual y grupal, cuyo fin fue conocer la percepción de los estudiantes del papel que desempeña el uso de los dibujos situacionales y matemáticos para problemas verbales, mediante la evaluación de la solución de un experto.

En cuanto a la clasificación de las respuestas, se usaron distintas categorías considerando la justificación textual del estudiante, el tipo de representación visual y la respuesta final al problema de forma individual y grupal, así mismo, se analizaron las respuestas de la hoja de reflexión evaluativa.

Resultados

La respuesta correcta del problema es 11.21 metros, se obtiene considerando que el árbol forma un triángulo rectángulo con la punta de la rama alejado del tronco que se mantiene en pie. Posteriormente, se calcula la hipotenusa mediante el uso del Teorema de Pitágoras. Además, es un problema que requiere de un segundo cálculo ya que debe contemplar que la altura del árbol completo se calcula teniendo en cuenta el tronco que se mantiene en pie sumado con la hipotenusa encontrada.

A pesar de que el procedimiento para resolver el problema parece sencillo, hacer el dibujo situacional que contenga los datos del problema y considerar datos que no aparecen directamente en el enunciado o que se realice el dibujo matemático que contenga todos los datos relevantes implementando un plan de acción exitoso va a depender de que los estudiantes estén familiarizados con el uso de representaciones y de su práctica (Rellensmann et al., 2017).

En la Tabla 1 se muestra la distribución de respuestas de los tres grados, distribuidas en correctas e incorrectas.

Los resultados para la respuesta de 7.2 metros, son respuestas parcialmente correctas porque hizo falta sumar el tronco que quedó de pie. Lo que no permitió responder a la pregunta del problema, sino que solo se ocuparon de la parte operacional al cumplir con el Teorema de Pitágoras. En el caso de las respuestas grupales (Tabla 2), las respuestas incorrectas disminuyeron.

Sin embargo, las respuestas parcialmente correctas aumentaron, pero no alcanzaron la contundencia necesaria para ser correctas.

Tabla 1

Concentrado de respuestas individuales

Grupo	11.21 m	7.2 m	10 m	20 m	Otra	Ninguna	Total
5to	1	3	7	2	2	2	17
3ro	5	3	6	0	2	2	18
1ro	8	6	0	0	0	5	19
Total	14	12	13	2	4	9	54

Nota. La columna 2 muestra la respuesta correcta, la columna 3 muestra una respuesta parcialmente correcta, las columnas: 4, 5 y 6 muestran respuestas incorrectas. Elaboración propia

Tabla 2

Concentrado de respuestas grupales

Grupo	11.21 m	7.2 m	10 m	20 m	Otra	Ninguna	Total
5to	1	3	0	2	0	0	6
3ro	4	1	0	0	0	1	6
1ro	4	3	0	0	0	0	7
Total	9	7	0	2	0	1	19

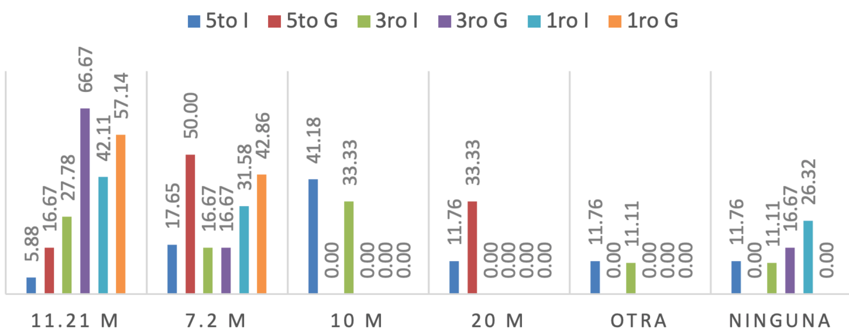
Nota. La segunda columna muestra la respuesta correcta, la columna 3 muestra una respuesta parcialmente correcta, las columnas 4, 5 y 6 muestran respuestas incorrectas. Elaboración propia

La comparación entre las respuestas individuales y grupales se hizo mediante porcentajes, que se pueden apreciar en la Figura 9. Se distingue un incremento de respuestas correctas, así como una disminución de las respuestas incorrectas en la fase grupal donde esta disminución favoreció la respuesta parcialmente correcta de 7.2 metros. Las respuestas correctas individuales fueron 14 de 54, que representa el 25% de la población, mientras que, en la segunda etapa de la aplicación las respuestas grupales fueron 9 de 19 que expresa el 47%.

Es necesario aclarar que, al formar los equipos se realizaron por conveniencia dentro del salón de clases entre las personas más cercanas, fueron conformados de dos y tres personas. La comparación entre tipos de respuesta individual y respuesta grupal se muestra en la Tabla 3. Donde los equipos formados por respuestas correctas continuaron con la misma respuesta de forma grupal. En equipos donde algún integrante tuvo una respuesta correcta en la hoja individual la respuesta grupal fue correcta. Solo un equipo que tenía un integrante cuya respuesta fue 7.2 pasó a ser una respuesta grupal correcta.

Figura 9

Respuestas presentadas por grupos y tipo de respuesta



Nota. Comparación de respuestas individuales y grupales en porcentajes. Elaboración propia

Es necesario aclarar que, al formar los equipos se realizaron por conveniencia dentro del salón de clases entre las personas más cercanas, fueron conformados de dos y tres personas. La comparación entre tipos de respuesta individual y respuesta grupal se muestra en la Tabla 3. Donde los equipos formados por respuestas correctas continuaron con la misma respuesta de forma grupal. En equipos donde algún integrante tuvo una respuesta correcta en la hoja individual la respuesta grupal fue correcta. Solo un equipo que tenía un integrante cuya respuesta fue 7.2 pasó a ser una respuesta grupal correcta.

En los otros casos, las respuestas individuales parcialmente correctas, cuya respuesta fue de 7.2, predominaron en la forma grupal, mientras que los que tenían respuestas como 10 metros, combinadas con otras respuestas incorrectas pudieron llegar a la respuesta de 7.2.

Sin embargo, hay un caso grupal donde una respuesta individual parcialmente correcta de 7.2, dio como resultado una respuesta incorrecta después de la interacción y discusión del equipo. También, en los dos últimos casos, dos equipos con respuestas incorrectas individualmente continuaron con una respuesta grupal incorrecta.

Por otra parte, dentro de las representaciones pictóricas que originan la respuesta incorrecta de 10 metros se debe a que consideran que el árbol fue completamente partido y que este pedazo de árbol cayó totalmente al suelo (Figura 10).

Tabla 3

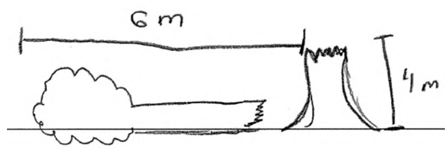
Comparación de respuestas individuales y por equipo

Número de equipos	Tipo de respuesta individual	Tipo de respuesta grupal
5	Equipos conformados con respuesta correcta	Respuesta correcta
2	Equipos formados con una respuesta correcta y las demás incorrectas	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta correcta y parcialmente correcta	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas	Respuesta correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta	Respuesta parcialmente correcta
3	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas o sin respuesta	Respuesta parcialmente correcta
3	Equipos formados con al menos una respuesta de 10 metros	Respuesta parcialmente correcta
1	Equipos formados con una respuesta parcialmente correcta y las demás incorrectas	Respuesta incorrecta
2	Equipos formados con respuestas incorrectas	Respuesta incorrecta

Nota. Elaboración propia

Figura 10

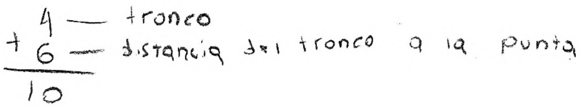
Árbol partido completamente



Por lo cual, se asume que ese segmento de árbol mide 6 metros y con el tronco que se mantiene aún de pie se deben sumar ambos pedazos para calcular la altura del árbol original (Figura 11).

Figura 11

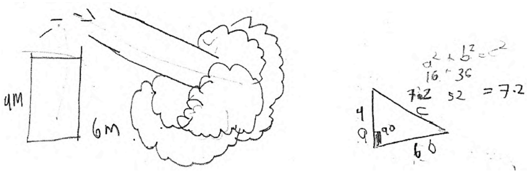
Justificación de la respuesta de 10 metros



Dentro de las representaciones se tiene el caso de la Figura 12. En esta figura se presenta un dibujo pictórico del árbol quebrado con los datos numéricos, después se presenta un triángulo rectángulo también con datos numéricos. Se identifican los catetos e hipotenusa del triángulo que resultó como dibujo matemático y se procedió a determinar la hipotenusa. A este tipo de representaciones que contienen tanto dibujos matemáticos como pictóricos los llamaremos “dobles”.

Figura 12

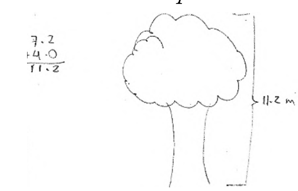
Dibujo situacional y dibujo matemático para el problema del árbol quebrado



Para este estudiante de quinto semestre, al preguntar la altura del árbol antes de que se quebrara, se presenta el dibujo de un árbol completo y se considera tanto el tronco como la parte quebrada, ambas cantidades se suman y da la altura total del árbol (Figura 13).

Figura 13

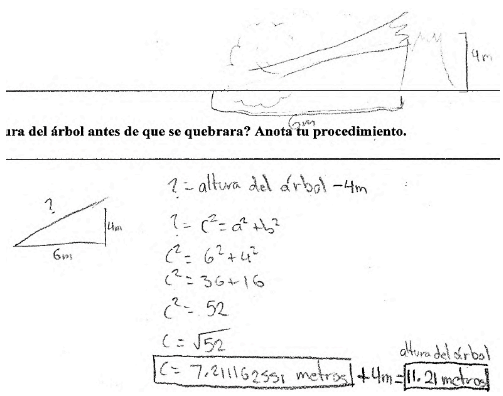
Se presenta un dibujo pictórico sumando ambas partes del árbol



De manera similar, en la Figura 14 se presenta un dibujo menos pictórico y enseguida se coloca el triángulo rectángulo, se procede a calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo y se le añaden los 4 m del tronco. En este caso no se requiere de una ilustración adicional y se hace directamente la suma.

Figura 14

Se presenta una respuesta correcta que incluye un dibujo situacional y un dibujo matemático



Las principales representaciones que se usaron en respuestas correctas del problema del árbol quebrado fueron: un triángulo (dibujo matemático), una representación doble (dibujo situacional y dibujo matemático) y una representación mixta (un dibujo matemático encima de un dibujo situacional) (Tabla 4).

Tabla 4

Concentrado de respuestas correctas por dibujo

Grupo	Triángulo	Doble	Mixto	S/dibujo	Pictórico
5to I	0	0	1	0	0
5to G	0	0	1	0	0
3ro I	1	3	1	0	0
3ro G	1	1	2	0	0
1ro I	1	5	2	0	0
1ro G	2	0	1	1	0
Total: I/G	2/3	8/1	4/4	0/1	0/0

Nota. La letra I representa las respuestas individuales, mientras que la G es para las respuestas grupales. Elaboración propia.

Además, se puede apreciar que las representaciones más usadas fueron las mixtas y las dobles, mientras que las representaciones completamente matemáticas están en segundo lugar y solo hay una respuesta grupal que no requirió dibujo debido a que en ese grupo de estudiantes ya habían planteado de forma individual un modelo mixto.

Posteriormente, se mostró la hoja de solución que señalaba las palabras importantes del problema, así como un posible dibujo situacional hecho en Canva. Se describió el proceso para abstraer las líneas que formaban el triángulo, así como el plan de solución y los cálculos necesarios para la respuesta final, cuestionando en todo momento la veracidad de la respuesta y su justificación. En consecuencia, en la cuarta etapa de la aplicación se presentaron preguntas relacionadas con la hoja de solución de un experto como se mencionó en la metodología.

En cuanto a las preguntas abiertas, es importante señalar que algunos estudiantes mencionaron tener dificultades en el planteamiento del problema por la posición del árbol, ya que no sabían si este estaba completamente en el piso o quedaba pegada una parte al tronco haciendo el triángulo, lo cual se refleja en los siguientes comentarios:

- *Me confundí en la posición del árbol*
- *No entendí si se quebró por completo o no*
- *La punta quedó a 6 metros*
- *Cuando dice que está a una distancia de 6 metros*

Así mismo, la mitad de los estudiantes aclaran que sí es útil el generar el dibujo situacional y matemático después de la hoja de solución en comparación a los dibujos generados de forma individual y grupal.

Tabla 5

Concentrado de respuestas correctas por dibujo

Pregunta	Poco /Es inútil	Normal /No sé qué decir	Suficiente /Es útil	Mucho /Es muy útil
El planteamiento del problema fue claro	0	18	21	15
Fue entendible la hoja de solución	1	12	21	20
Es útil generar dos dibujos	1	7	20	26

Nota. Elaboración propia

En el caso del uso de dibujos, los estudiantes aclaran que los dibujos son muy útiles o útiles con los siguientes argumentos:

- *Ya que con dibujos es una mejor representación del problema*
- *Es más fácil saber qué tiene que hacer cuando ves el problema que tienes que resolver*
- *Crear una imagen para hallar solución con mayor facilidad*
- *Me ayuda a observar el problema*
- *Para poder resolver el problema es necesario los dibujos para comprender mejor*
- *Así puedes ver la figura que forma y hacer el procedimiento*
- *Yo creo que ilustrar el problema, hace que su resolución sea más fácil*
- *No es sumamente necesario, pero, interpretarlo y representarlo gráficamente te permite tener una mejor aproximación al problema*

En el último comentario, el alumno menciona que tal vez no en todos siempre harás un dibujo, sin embargo, en su hoja de trabajo individual se muestra el uso de un triángulo, por lo cual, él está saltando al dibujo matemático sin pasar por el dibujo situacional, pero llega solo a la respuesta de 7.2 metros, tanto de forma individual como grupal.

Conclusiones

En esta investigación hay un progreso en cuanto a las respuestas grupales con respecto a las respuestas individuales, ya que hay un incremento de las respuestas correctas y parcialmente correctas como se mostró en las tablas, la cual fue de casi el doble. Además, la colaboración en los grupos apoyó al uso de los dibujos matemáticos en las respuestas parcialmente correctas y completamente correctas.

Las representaciones que se encontraron fueron dibujos situacionales, dibujos matemáticos, y dibujos mixtos, tal como lo reportan Rellensmann et al. (2017) y Contreras et al. (2019). Además, se hallaron dibujos dobles. Estos últimos son dos representaciones separadas, primero colocan el dibujo situacional y posteriormente usan un dibujo matemático, que difiere de los primeros, los cuales son una única representación. Los dibujos matemáticos más usados fueron los triángulos rectángulos.

Asimismo, se ve evidenciado en las respuestas de la hoja de reflexión evaluativa que los estudiantes reconocen la importancia del uso de los dibujos situacionales y matemáticos para poder resolver un problema. Los dibujos les permite saber qué camino tomar para hallar una solución con mayor facilidad porque les permite comprender mejor que cuando no se usan, tal como lo menciona Krawec (2010), debido a que muestran una estructura coherente de la relación de los datos del problema alcanzando una mejor comprensión del mismo.

Es importante resaltar el uso de ambos dibujos tanto situacionales como matemáticos para interpretar la altura del árbol. El tronco completo se puede considerar como una línea recta compuesta por dos partes, la primera, el tronco que aún está de pie y la parte quebrada que corresponde a la hipotenusa del triángulo. Se encontró en este estudio que los dibujos matemáticos, los dibujos dobles y mixtos predominaron con respecto a los dibujos situacionales en las respuestas correctas tanto en la fase individual como en la grupal. Por otro lado, los dibujos situacionales predominaron en las respuestas incorrectas que coincide con los resultados que reportaron Hegarty y Kozhevnikov (1999).

En las investigaciones futuras se debería aumentar el número de estudiantes involucrados haciendo uso de la instrucción directa para el dibujo situacional proponiendo problemas con base en su contexto o situaciones con las que estén familiarizados los estudiantes y explorar la comprensión lectora como factor para poder llegar al dibujo matemático. Además de favorecer la importancia de utilizar dibujos matemáticos en el planteamiento de problemas verbales aun cuando no se cuente con una representación inicial

Referencias

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research, 68*, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Boonen, A. J. H. (2015). *Comprehend, Visualize & Calculate: Solving mathematical word problems in contemporary math education.* Hogeschool Windesheim.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Bosch, C., & Meda, A., (2021) *Matemáticas 3. Serie infinita*. Ediciones Castillo.

Calderón, C. F. A. (2021). *Matemáticas 3. Sin fronteras*. Ediciones Castillo.

Contreras, E. H., Slisko, J., & Rebollar, L. A. H. (2019). Presence of situational and mathematical and models in mexican mathematics textbooks for middle school: an initial categorization and quantification. *Journal of European Education, 8*(2), 1–13.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605–618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in Secundary school student's solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65–83. https://doi.org/10.1023/A:1003151011999

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684–689. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2016). Metodología de la investigación (6ta Ed.). McGraw-Hill.

Krawec, J. L. (2010). *Problem representation and mathematical problem solving of students with varying abilities.* [Tesis Doctoral, University of Miami]. University of Miami Research Portal. https://bit.ly/3AlB01u

Krawec, J. L. (2014). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of Learning Disabilities, 47*(2), 103-115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in mathematical Modelling-Task analyses, student competencies and teacher interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 119-141. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

Lewis, A. B., & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363–371. https://doi.org/10.1037/0022-0663.79.4.363

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39–60. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9181-5

Polya, G., (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 53–78. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussion.* NCTM.

Swetz, F. J. (2009). Word problems: Footprints from the history of mathematics. En L.Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds* (pp. 71–91). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909383

Swetz, F. J. (2012). *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages*. JHU Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* CRC Press.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM, 52*(1), 1–16. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Anexos

Anexo 1

HOJA DE TRABAJO INDIVIDUAL

Nombre: ____

Grado y grupo: ____________ **Tiempo de la actividad (10 minutos):** ________

Instrucciones. Resuelve el siguiente problema. Contesta según corresponde.

Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema.

¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara? Anota tu procedimiento.

Anexo 2

HOJA DE TRABAJO GRUPAL

Nombres: ____

____

Grado y grupo: ___________ **Tiempo de la actividad (10 minutos):** _______

Instrucciones. Reúnete en equipos de tres personas, discute el problema que se resolvió de manera individual. Intercambien ideas, procedimientos y representaciones. Contesta según corresponde.

Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros.

Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema.

¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara? Anota tu procedimiento.

Anexo 3

HOJA DE SOLUCIÓN DE UN EXPERTO

Grado y grupo: ____________ **Tiempo de la actividad (10 minutos):** ________

Instrucciones. Lee la siguiente solución del problema.

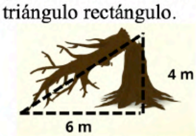
Problema

Un árbol se quebró a causa del viento y cayó de tal forma que la punta del árbol toca el suelo a seis metros del tronco. El tronco que aún se mantiene en pie mide 4 metros. ¿Cuál era la altura del árbol antes de que se quebrara?

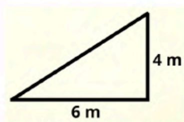
Realiza el dibujo que representa la situación a la que se refiere el problema

Se debe dibujar primero un árbol que se quebró en un punto de su tronco. Este dibujo se llama el "dibujo situacional".

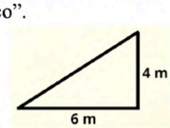
Se colocan los datos numéricos de la situación del problema: El tronco que aún está en pie mide 4 metros. La distancia entre el troco a la punta del árbol es de 6 metros. Para poder plantear la solución, se considera que se está formando un triángulo rectángulo.



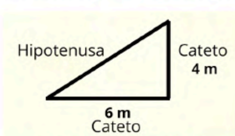
Se desprecia el grosor del árbol. El tronco que está de pie y la parte caída se convierten en las líneas que forman el triángulo rectángulo.



El dibujo situacional poco a poco se transforma con todos los datos del problema en un triángulo rectángulo. Este triángulo se llama el "dibujo matemático".



Se consideran las medidas del triángulo rectángulo que corresponden a los catetos. El lado faltante es la hipotenusa.



Usando el teorema de Pitágoras, entones los datos quedarían:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = 6\,m$$

$$b = 4\,m$$

$$c = x$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(6m)^2 + (4m)^2} \rightarrow \quad c = \sqrt{36m^2 + 16m^2} \rightarrow \quad c = \sqrt{52m^2} \rightarrow \quad c = 7.21\,m$$

Ahora se tiene la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo. Se necesita calcular la altura del árbol antes de que se rompiera. Es decir, se debe de sumar el tronco que aun esta de forma vertical y el tronco inclinado. Esto es:

$$4\,m + 7.21m = 11.21\,m$$

Anexo 4

HOJA DE REFLEXIÓN EVALUATIVA

Grado y grupo: ___________ **Tiempo de la actividad (10 minutos): ________**

Instrucciones. Marca con una X la respuesta que se adecua a tu percepción. En las preguntas abiertas, escribe tus sugerencias.

1. ¿El planteamiento del problema fue claro en la hoja personal?
   Nada Poco Normal Suficiente Mucho

   Justifica tu selección

2. ¿Los pasos de la solución fueron entendible en la hoja de solución de un experto?

   Nada Poco Normal Suficiente Mucho

   Justifica tu selección

3. ¿Qué agregarías a la hoja de resolución de un experto?

4. ¿Qué palabras no te permitieron entender el problema?

5. ¿Para comprender mejor los pasos en la solución del problema qué tan útil es generar dos dibujos: el dibujo de la situación y el dibujo matemático?

   Es muy útil. Es útil. No sé qué decir. Es inútil. Es muy inútil.

   Justifica tu selección

CUARTA TENDENCIA

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MENTALES EN LAS MATEMÁTICAS

GeoGebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística

Ingrid Quilantán Ortega [1]
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez [2]

Resumen

La función logística modela el crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades, cultivo de bacterias, difusión de información, entre otros. Debido a su vasta aplicabilidad, es considerada como tema de enseñanza desde el nivel básico secundaria (12-14 años) en el curso de Biología de primer año para analizar las interacciones depredador-presa y el equilibrio de poblaciones. En este contexto, el objetivo de esta investigación es promover la comprensión de estudiantes sobre la función logística mediante la solución de problemas reales modelados por dicha función utilizando el software GeoGebra como recurso didáctico. La investigación se fundamenta bajo la modelización matemática considerada como la práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. La metodología tiene un enfoque cualitativo y el tipo es descriptivo, considerando la observación participante para la recolección y análisis de datos. Se aplicaron dos problemas a 15 estudiantes de secundaria. Los resultados indicaron que los estudiantes reconocieron propiedades y representaciones características de la función logística y establecieron vínculos de la función logística con otros conceptos matemáticos. Se concluye que los estudiantes realizan subprocesos de interpretación al predecir comportamientos respecto a la lectura de las gráficas en GeoGebra.

Palabras clave

Comprensión, Función logística, Modelización matemática, Recurso tecnológico.

---

[1] 21254443@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
https://orcid.org/0009-0005-6198-065X

[2] flor.rodriguez@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
https://orcid.org/0000-0002-9596-4253

Quilantán Ortega, I., & Rodríguez Vásquez, F. M. (2024). GeoGebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 151–170). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-07

Introducción

La función logística aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades, cultivo de bacterias, difusión de información, entre otros. Debido a su amplia aplicabilidad, se incluye en los diferentes niveles educativos, en el nivel superior por ejemplo, en el área de ciencias e ingeniería en la materia de Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales cuando se aborda el tema de funciones trascendentales para indicar el crecimiento logístico y el decaimiento exponencial (Purcell et al., 2007; Spivak, 2014). Aunque en este nivel educativo la función logística reluce como solución de la ecuación diferencial logística, su representación gráfica llamada curva logística, aporta información para fortalecer otros conceptos matemáticos y característicos de las funciones como máximos y mínimos, límites y convergencia, concavidad y conexidad, entre otros.

En el nivel medio superior la función logística tiene relevancia entre otras cosas, para visualizar los aspectos variacionales del comportamiento de los datos. Algunos estudios como el de Valero y Lezama (2020) exploran la información producida a partir de la pandemia por COVID-19 desde una perspectiva del pensamiento variacional en Cálculo. En el nivel básico (secundaria), en el que se centra nuestro estudio, las nociones de función logística se introducen en la materia de Ciencias, correspondiente a Biología I, la cual se imparte en el primer año de estudios, en esta materia los estudiantes analizan las interacciones depredador-presa para el equilibrio de las poblaciones en un ecosistema (Limón et al., 2021; Petrich et al., 2018). Los aspectos matemáticos que se utilizan como apoyo para el estudio del equilibrio de poblaciones son, el llenado de tablas, la lectura de gráficas de funciones, los gráficos de barras para representar datos, los gráficos de pastel para representar porcentajes y la predicción de cantidades de población.

Se ha documentado que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones (lineal, cuadrática y en ocasiones la función cúbica), se presentan ciertas dificultades en los estudiantes para lograr su comprensión (Alpízar et al., 2018; Bagni, 2004). Sin embargo, en la materia de matemáticas en secundaria, poco se dice en particular sobre la función logística (aun cuando la función logística se utiliza para temas de Biología I en primer año). El contenido del programa de estudios de Matemáticas III (para tercer año de secundaria) solo señala el tema de funciones lineales y cuadráticas. Por ello, es relevante analizar la función logística desde la perspectiva de la Educación Matemática en educación secundaria siguiendo el marco de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) la cual vincula la escuela con el entorno.

Las investigaciones que se han realizado sobre las dificultades en la comprensión de la función logística en este nivel educativo, se estudian en áreas como la biología (Artola et al., 2016); sin embargo, en el nivel medio superior y superior, los reportes indican que las dificultades se presentan al interpretar el modelo gráfico de la función logística y al vincularlo con su representación algebraica, especialmente cuando se trata de representar problemas aplicados (Couoh & Cabañas-Sánchez, 2013; Ulloa & Rodríguez, 2010), esto último nos sugiere incidir en el diseño de actividades que promuevan la comprensión de tal función, con ítems que reduzcan las dificultades a manera de fortalecimiento desde los niveles anteriores.

No obstante, existen estudios que afirman que los recursos tecnológicos sirven de apoyo en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos y ayudan a disminuir algunas de las dificultades en la comprensión de estos. El utilizar software especializado en matemáticas facilita su enseñanza y motiva a los estudiantes a involucrarse en el aprendizaje de manera dinámica (Espinoza & Rodríguez, 2021; Pérez et al., 2023). En particular, autores como Domènech-Casal (2020) y Vergel-Ortega et al. (2020), aprovechan estos recursos tecnológicos para la enseñanza de la función logística en áreas como Biología y Física.

Existen diversas propuestas de software educativo para la enseñanza de las matemáticas, tales como, Graphmatica, Winplot, Mathematica, Matlab, Calc 3D Prof, K3DSurf, Derive e incluso calculadoras gráficas. Dichos softwares tienen algunas ventajas y desventajas al utilizarlos. Por ejemplo, para nuestro objetivo, Graphmatica, incluye elementos en su interfaz para captar la atención de los alumnos. Sin embargo, esto podría provocar que no haya un suficiente control o supervisión de calidad de los contenidos y que los alumnos se puedan distraer con facilidad. El software Winplot, ofrece facilidades en la solución de ecuaciones de una y dos variables, así como solución de sistemas de ecuaciones y muestra sus representaciones gráficas, sin embargo, al realizar los gráficos se "alenta" el programa y las imágenes quedan distorsionadas. Por su lado, Mathematica y Matlab, son softwares con una alta capacidad de cálculo numérico y con un gran número de instrucciones que nos permiten resolver problemas científicos avanzados, mediante el desarrollo de algoritmos; modelado, simulación; sin embargo, como menciona Fernández et al. (2017), son programas cuya arquitectura es de mucha complejidad y ocupan mucha memoria en el computador.

Autores como Cenas-Chacón et al. (2021) y Moreno-Jiménez (2023), proponen utilizar el software interactivo de matemáticas GeoGebra para la mejora en su enseñanza-aprendizaje. El software GeoGebra es un software interactivo que relaciona conocimientos de cálculo, geometría, álgebra y estadística para la enseñanza de la matemática escolar en diversos niveles educativos. Fue creado por Markus Hohenwarter y lanzado en 2002 con el objetivo de facilitar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas mediante la integración de conceptos y herramientas interactivas. Dentro de las ventajas de utilizar dicho software destacan:

- Interfaz intuitiva: Fácil de usar y navegar, los usuarios se familiarizan rápidamente con la herramienta y aprovechan sus funcionalidades.
- Versatilidad: Ofrece una amplia gama de herramientas en diversas áreas de las matemáticas por lo que permite a los usuarios realizar diversas tareas en un solo programa.
- Integración de múltiples representaciones: Permite a los usuarios trabajar con diferentes representaciones matemáticas como gráficos, ecuaciones, construcciones geométricas en una sola ventana, por lo que facilita la visualización y comprensión de conceptos matemáticos.
- Uso gratuito y de código abierto: Está disponible de forma gratuita en diferentes plataformas, por lo que lo hace accesible para los estudiantes, profesores y entusiastas de las matemáticas.
- Comunidad activa: Cuenta con una gran comunidad de usuarios en línea donde se pueden encontrar recursos, tutoriales, material de apoyo, colaboraciones, etc.
- Interactividad: Permite al usuario crear construcciones matemáticas interactivas por medio de la manipulación de objetos, por ejemplo, cambiar parámetros y ver instantáneamente cómo esto afecta las representaciones gráficas.
- Recursos educativos disponibles: Cuenta con una amplia biblioteca de recursos educativos en línea, que incluye actividades, lecciones y materiales curriculares creados por otros usuarios.
- Actualizaciones constantes: Se lanzan regularmente actualizaciones que agregan nuevas características y corrigen errores.
- Compatibilidad con múltiples plataformas: Está disponible para Windows, macOS, Linux, iOS y Android, lo que permite utilizarlo en computadoras, tabletas y teléfonos móviles.

Una de las bondades de este software es que tiene una versión para teléfono celular, la cual es fácil de usar y no requiere conexión a internet (GeoGebra, 2024). Es por todas estas bondades que en este trabajo se optó por utilizar GeoGebra.

Aunado al uso de herramientas tecnológicas, existen estudios que confirman la importancia de la modelación matemática para la comprensión de diversos fenómenos de la vida real, naturales, sociales, físicos, etc. Con los modelos matemáticos se puede determinar la relación entre las variables involucradas y entender dichos fenómenos (Perin & Campos, 2020). En el nivel secundaria, los modelos matemáticos se utilizan en la materia Saberes y Pensamiento Científico, dentro del currículo de la Nueva Escuela Mexicana, que incluye Matemáticas con Biología, en primer año, Matemáticas con Física, en segundo año y Matemáticas con Química, en el tercero.

Fowler (1997) presentó a la modelación matemática (o modelización) como un proceso que se da al delimitar un problema que es relevante en determinada área del conocimiento, el cual transcurre en etapas como, por ejemplo, conocer el fenómeno de interés, la formulación de la hipótesis, la formulación del modelo, el análisis y la validación. Diez años después, la modelación no se reduce a la acción de modelar, representa un dominio de investigación en el que se ven involucradas perspectivas teóricas que presentan una intencionalidad (Blum et al., 2007). Por ejemplo, el proceso de modelización dado por Blomhøj (2008), en el que esta es vista como una teoría para la práctica, está descrito en seis subprocesos, a saber, formular el problema, realizar la sistematización, traducir los objetos al lenguaje matemático, usar métodos matemáticos para obtener resultados, interpretar los resultados para dar conclusiones y evaluar la validez del modelo. Coincidimos con Blomhøj sobre qué es la modelización matemática y las etapas de su proceso.

Por lo anterior, el objetivo de este trabajo es proponer una actividad basada en la modelación matemática, en el que se utilice el software GeoGebra como recurso didáctico, con la finalidad de promover la comprensión de la función logística en los estudiantes de nivel secundaria mediante la solución de problemas reales que la involucren. Para lograr el objetivo se tienen los siguientes objetivos particulares:

- Fomentar el uso de herramientas tecnológicas, en particular del software GeoGebra y de la modelación matemática como una teoría para la práctica en el estudio de las funciones.
- Destacar las distintas representaciones de la función logística que fortalezcan el concepto.
- Realzar la vinculación de las matemáticas con otras ciencias, en particular con la biología, a través del estudio de esta función.

Se espera que, con el uso de herramientas tecnológicas, de la modelación matemática, de las distintas representaciones y de la vinculación con otras disciplinas se generen conexiones matemáticas que incidan en la comprensión de la función antes mencionada.

Fundamentos teóricos

El desarrollo de las capacidades y competencias de un estudiante no se logran solo por el hecho de que el docente exponga el contenido sino también que estructure, organice y planee su clase. En este escenario se involucran actividades que los estudiantes realicen dentro y fuera del aula con objetivos de aprendizaje claros acerca del tema a abordar, he aquí la importancia del diseño de actividades y la planeación de la clase. En años recientes, el estudio de la visualización en el pensamiento matemático es objeto de numerosas investigaciones, debido a la constante evolución de los planes y programas educativos y al surgimiento de la cada vez más actualizada tecnología. Diversos autores manifiestan que el uso reflexivo, creativo y dinámico de las nuevas tecnologías permiten dar significado concreto a las nociones matemáticas, siendo necesario el diseño de nuevos materiales utilizando tecnologías que demuestren su uso en el aula de clases (Gatica & Ares, 2012; Villarreal, 2012).

Por lo anterior, los profesores de matemáticas se han visto en la necesidad de diseñar actividades que les permitan adaptarse a estos planes y programas educativos y a hacer su práctica docente diferente a lo tradicional. También los futuros profesores deben aprender a diseñar actividades adecuadas para una práctica profesional relevante en la docencia en todos los niveles educativos (Chamoso & Cáceres, 2019).

En secundaria, uno de los temas que se abordan en el curso de Biología I es el equilibrio de las poblaciones y las interacciones depredador-presa, ambos relacionados con el crecimiento de las poblaciones. La función logística es el modelo matemático que modela este crecimiento poblacional. Matemáticamente la función logística es una función de la forma:

$$p(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \qquad (1)$$

cuya gráfica es una curva sigmoidea. La dinámica inicial de este modelo es de tipo exponencial, y a partir de determinado tiempo este crecimiento se desacelera hasta una determinada cota.

Las variables de (1) son las tradicionales dadas por el modelo de Verhulst en 1838, a saber, p: población, e: constante de Euler y t: tiempo, pero podrían variar de acuerdo con lo que se requiera modelar.

A partir de las necesidades del diseño de actividades para una práctica docente que incida en el aprendizaje y del requerimiento de la función logística en el plan de estudios de este nivel educativo, se diseña una actividad conformada por dos problemas matemáticos para incidir en la comprensión de la función logística. Asimismo, la actividad tiene una intencionalidad matemática que se fortalece con la herramienta tecnológica GeoGebra.

El marco teórico en el que se fundamenta este trabajo es la modelización matemática como teoría para la práctica dado por Blomhøj (2008). Blomhøj afirma que con la modelación matemática los estudiantes encuentran motivador y relevante trabajar con problemas reales. Las actividades de modelización presuponen una comprensión de la matemática involucrada en ellas, por lo cual el estudiante es capaz de establecer raíces cognitivas sobre las cuáles pueda construir importantes conceptos matemáticos. La modelización matemática es la práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje.

El proceso de modelización se describe en seis subprocesos:

(a) *Formulación del problema: formulación de una tarea que guíe la identificación de las características de la realidad a modelizar.* En nuestro trabajo se utilizan problemas reales sobre la función logística cuya aplicación se da en el contexto del estudiante a fin de identificar la realidad modelada.

(b) *Sistematización: selección de los objetos relevantes del dominio de investigación (contexto del problema) para hacer posible una representación matemática.* Consideramos que es de utilidad el uso y manejo de tablas de datos y representaciones algebraicas, principalmente los parámetros característicos de la función mencionada.

(c) *Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático*. En la actividad presentada, el modelo matemático que representa los datos ya está planteado.

(d) *Uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones.* En este subproceso hacemos uso de ítems que indiquen el uso de la herramienta tecnológica en matemáticas (GeoGebra).

(e) *Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el contexto.* La interpretación de los resultados en la actividad se da tanto de manera escrita como con preguntas orales durante la aplicación de esta en los ítems finales de cada situación problema.

(f) *Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos* (*observados o predichos*). Este subproceso no fue considerado en este trabajo.

Método

Esta investigación es de tipo cualitativa, y se lleva a cabo de manera descriptiva a través de la observación participante, la cual nos indica que la información recogida suele ser verbal, asimilable, grabada, transcrita o escrita, es información con significado personal, el observador mira, escucha, pregunta, indaga mientras que el observado responde según la relación con el observador (Riba, 2017). Y del aprendizaje basado en problemas en matemáticas, ya que es una estrategia de enseñanza en la que los maestros presentan el contenido utilizando ejemplos y escenarios del mundo real, es útil en las clases de matemáticas, donde los estudiantes a menudo no logran ver las diversas aplicaciones de las matemáticas (Braintrust tutors [BT], 2024; Guamán & Espinoza, 2022; Sastre & Araújo, 2008). Las etapas que se siguieron fueron:

1. *Diseño la actividad.* La actividad está compuesta por dos situaciones problema que involucran el llenado de tablas, función logística, representaciones gráficas, modelación, predicción, e interpretación del problema asociado a la realidad. (Ver Anexo A).

La situación problema 1 se da en el contexto de una escuela secundaria de Chilpancingo en donde se difunde un rumor. Se pretende que los estudiantes se sientan parte de la situación por eso se les dice que esta situación pudo darse en su escuela. El objetivo principal es que los estudiantes, a través del manejo de datos, encuentren relaciones entre estos de tal manera que puedan ser descritos por una determinada función, así también que identifiquen relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica.

Los ítems son preguntas e instrucciones guiadas, en el primero se pide encontrar alguna relación entre los datos dados en la tabla, aunque no es trivial que se observe una relación exacta de la función logística, se espera que los estudiantes puedan reflexionar que no es una relación lineal ni cuadrática (usualmente conocidas en ese nivel educativo). Con eso dar pauta para mencionar que existen otros tipos de funciones que se relacionan con el crecimiento, recordarles de alguna manera, los modelos vistos en la clase de Biología de primer año. Los ítems, que están enfocados a utilizar la herramienta tecnológica dirigen al estudiante a una comprensión más visual de la situación problema. Los ítems finales se enmarcan en la predicción. La capacidad de predecir el comportamiento de la situación problema se asocia con la representación gráfica visualizada con GeoGebra, sin embargo, se espera que al manipular la representación algebraica en el software logren reflexionar sobre los cambios en la función.

En la situación problema 2, que se da un tanto más en el contexto científico, se les pide a los estudiantes que se coloquen en el papel de un laboratorista químico. El objetivo de esta situación es introducirlos en la construcción de la representación gráfica de la función logística por sí mismos, así como desarrollar (a través de las preguntas planteadas) su capacidad de predicción. A diferencia de la situación problema 1, los estudiantes deben ser capaces de realizar el llenado de tablas con la lectura de la gráfica.

Los ítems aquí presentados guían al estudiante a reflexionar sobre las características principales de la función logística por ejemplo, sus variables y su capacidad de carga (cota). Los ítems finales se enmarcan similarmente que en la situación 1, sobre la capacidad de predicción y de resolver el problema de contexto.

2. *Aplicación de la actividad*. Los participantes fueron 15 estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución pública. Se solicitó a la profesora encargada de impartir el curso de Matemáticas III (dentro del campo formativo Saberes y Pensamiento Científico de la Nueva Escuela Mexicana), un espacio durante su clase. La profesora, solicitó previamente a los estudiantes instalar GeoGebra en su teléfono celular con la finalidad de que los estudiantes se fueran familiarizando con él. La actividad se aplicó en dos sesiones de 50 minutos cada una. Los estudiantes fueron codificados con la *letra* A_n *con* $n = 1, \ldots, 15$. La actividad se realizó de manera escrita y dinámica con el uso del software. Se llevó un registro de los comentarios o preguntas que hacían los estudiantes en el aula y que pudieran ser relevantes para nuestra investigación.

3. *Análisis de resultados*. Se analizaron las respuestas de cada uno de los participantes actividad por actividad. Dado que esta tuvo como base la modelación matemática y el uso del software GeoGebra como recurso didáctico con la finalidad de promover la comprensión de la función logística en los estudiantes de secundaria mediante la solución de problemas reales. En el análisis de datos se perciben manifestaciones del tránsito por los diferentes subprocesos mencionados en Fundamentos Teóricos y en consecuencia se identifican los conocimientos de los estudiantes durante la solución de la actividad de manera escrita y también mediante la observación participante.

Análisis de datos y resultados

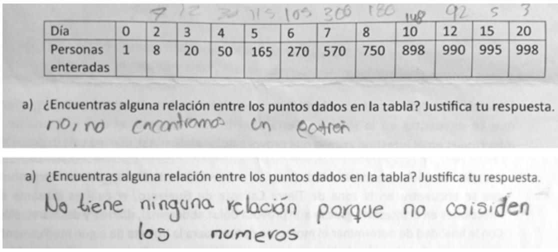
A continuación, se presentan los resultados analizados de manera descriptiva por cada situación problema. En la situación problema número 1, sobre la difusión de un rumor, se da una tabla de datos relacionados con la cantidad de personas que se enteran del rumor por cada día que transcurre. Estamos en la etapa de formulación de problema de Blomhøj. Se les pregunta a los estudiantes si pueden encontrar alguna relación entre los datos de la tabla. La mayoría de los estudiantes como A_3 y A_{11}, no lograron encontrar una relación entre los datos dados. Esto sugiere que el patrón de la difusión del rumor, el cual está dado por una función logística, no es fácil de describir a simple vista, posiblemente se necesite un "ojo entrenado" para reconocer alguna relación, o bien se requiera más información acerca de la función logística y todo lo que puede modelar para identificar si existe relación entre estos datos. Aun cuando los estudiantes no logran establecer una relación entre los datos, se esperaba que se consideraran qué tipo de relaciones no son, es decir al no ser lineal ni cuadrática, ¿pudiera haber otra relación? Se observa de la figura 1 que A_3 escribió números en la parte superior de la tabla de datos de los que puede observarse que intentó determinar una regla para una sucesión sin éxito de hallar algún patrón (ver figura 1).

Figura 1

Respuesta de A_3 y A_{11} a 1.a)

A_3

A_{11}



115 105 300 180 148 92 5 3

Día	0	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20
Personas enteradas	1	8	20	50	165	270	570	750	898	990	995	998

a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.

no, no encontramos un patrón

a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.

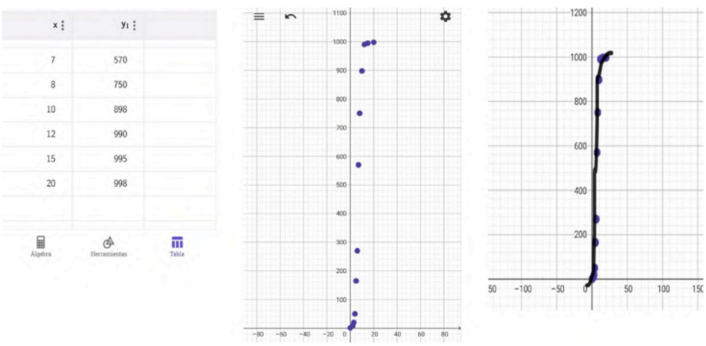
No tiene ninguna relación porque no coisiden los numeros

En los incisos b), c) y d) se les pide a los estudiantes que ubiquen los datos de la tabla en el plano coordenado utilizando el software GeoGebra y los una con la herramienta mano alzada. Aquí los estudiantes tienen el reto de trabajar con el modo Tabla de GeoGebra y posteriormente observar los puntos marcados en el plano. Los estudiantes manifestaron en comentarios durante la realización de la actividad, que les pareció "*sencillo y cómodo*" escribir los datos de la tabla en GeoGebra y ver luego los datos representados en el plano, cosa que no es fácil cuando lo realizan a lápiz y papel. En particular, el estudiante A_2 captura desde su teléfono paso a paso lo realizado en cada uno de los incisos (ver figura 2).

Figura 2

Uso de GeoGebra del estudiante A_2 en incisos b), c) y d) de la situación 1

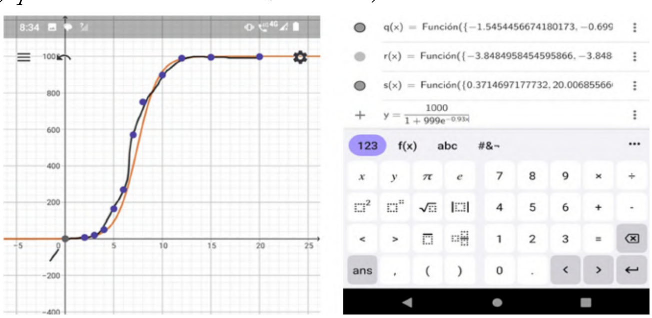
Tabla de datos en Geogebra *Datos en el plano coordenado* *Gráfica a mano alzada*



En el inciso e) se da la función $r(x)$, y se les pide que la escriban en la opción algebraica del software y posteriormente observen la gráfica de la función. El estudiante A_2 realiza lo indicado pero su gráfica no es tan fácil de observar debido a que se muestra "*delgada*" —según sus palabras- por lo que toma la iniciativa de querer ver la gráfica "*más grande*" y comienza a mover la pantalla de su teléfono con sus dedos. Uno de los aspectos interesantes es que, durante la realización de la actividad, manifiesta emoción de usar el software y aconseja a sus compañeros "*engrandecer la gráfica*" para visualizarla mejor (ver figura 3).

Figura 3

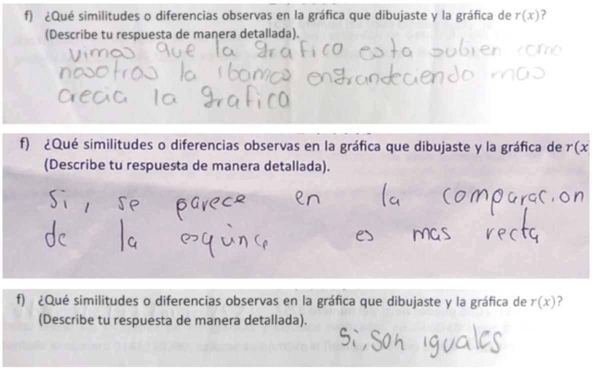
Gráfica de r(x) que realiza el estudiante A_2 en inciso e) de la situación 1



En f) se les pregunta sobre las similitudes y diferencias entre la gráfica a mano alzada y la gráfica de la función $r(x)$ a fin de que reflexionen sobre lo realizado. Los estudiantes A_2, A_8 y A_{15} observan similitud entre la gráfica de los datos a mano alzada y la gráfica de $r(x)$. Como mencionamos anteriormente, A_2 manipula el software a lo que él llama "*engrandeciendo*" (agranda y encoge los ejes, amplia y disminuye la pantalla) a fin de observar dicha similitud y lo manifiesta en su respuesta escrita (ver figura 4).

Figura 4

Respuesta de A_2, A_8 y A_{15} a 1.f)



A_2

f) ¿Qué similitudes o diferencias observas en la gráfica que dibujaste y la gráfica de $r(x)$? (Describe tu respuesta de manera detallada).

vimos que la grafica esta subien como nosotros la ibamos engrandeciendo mas crecia la grafica

A_8

f) ¿Qué similitudes o diferencias observas en la gráfica que dibujaste y la gráfica de $r(x$ (Describe tu respuesta de manera detallada).

Si, se parece en la comparacion de la esquina es mas recta

A_{15}

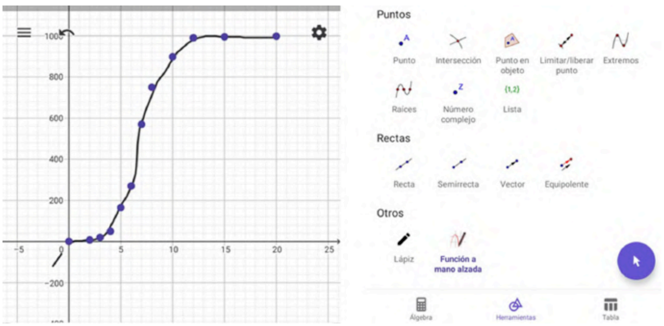
f) ¿Qué similitudes o diferencias observas en la gráfica que dibujaste y la gráfica de $r(x)$? (Describe tu respuesta de manera detallada).

Si, son iguales

La estudiante A_4 realiza la gráfica de la función $r(x)$ en el software GeoGebra desde su teléfono celular, esto le permite responder a los incisos siguientes de manera acertada. En la figura 5 se pueden observar algunas herramientas que utilizó al realizar el gráfico.

Figura 5

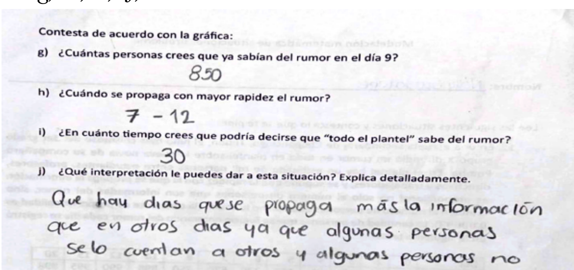
Uso de GeoGebra de la estudiante A_4 en inciso f) de la situación 1



La estudiante A_4 es quien contesta de manera acertada los incisos g), h), i), j), debido a sus observaciones con respecto a lo realizado con GeoGebra. De sus respuestas se nota primero que logra realizar una estimación de la cantidad de personas que saben el rumor en el día 9. A_4 describió en la conversación durante la realización de la actividad, que esto lo logró identificando el punto en la gráfica en GeoGebra dado por (9, 850) ya que sabía que 9 representa el día y 850 representa las personas enteradas del rumor como en la tabla. Cuando se le pregunta en qué momento el rumor se propaga con mayor rapidez, ella logra identificar un intervalo de mayor crecimiento en la gráfica, dado justo en el momento donde hay un cambio de concavidad en la gráfica. Aun cuando ella no menciona este cambio de concavidad (cosa que es natural debido a que estos estudiantes no han visto ese tema), al dar su interpretación, manifiesta el intervalo de mayor crecimiento como velocidad o "*días en que se propaga más*". (Ver figura 6).

Figura 6

Respuesta de A_4 a 1.g), h), i), j)



Contesta de acuerdo con la gráfica:

g) ¿Cuántas personas crees que ya sabían del rumor en el día 9?

850

h) ¿Cuándo se propaga con mayor rapidez el rumor?

7 - 12

i) ¿En cuánto tiempo crees que podría decirse que "todo el plantel" sabe del rumor?

30

j) ¿Qué interpretación le puedes dar a esta situación? Explica detalladamente.

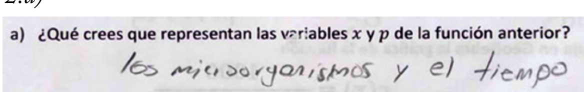
Que hay dias quese propaga más la información que en otros dias ya que algunas personas se lo cuentan a otros y algunas personas no

A diferencia de la situación 1 en la cual se dan primero datos en una tabla, en la situación problema número 2 se da primero una función que modela un crecimiento poblacional de bacterias. Asimismo, con esta situación se pretende fortalecer lo desarrollado en la situación problema 1 acerca de la función logística.

Aquí se les solicita a los estudiantes (en 2.a) la representación de las variables en la función, con la intención de establecer la interpretación requerida en el modelo. Cabe mencionar que ahora los estudiantes ya tienen cierta información sobre la función logística, su gráfica y una función algebraica que la representa (que es lo dado en la situación 1), así también tienen datos en una tabla que relaciona tiempo en días con cantidad de personas. Este argumento (es decir, fijarse de la situación 1 la relación entre días y cantidad de personas) hace que el estudiante A_7, identifique de manera correcta las variables, es decir, da sentido a lo planteado en la situación problema —dicho con sus propias palabras mientras realizaba la actividad cuando se le preguntó ¿Cómo lo supiste? -. (Ver figura 7).

Figura 7

Respuesta de A_7 a 2.a)



a) ¿Qué crees que representan las variables x y p de la función anterior?

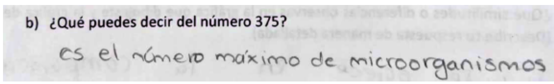
los microorganismos y el tiempo

En el inciso b) se les pregunta a los estudiantes sobre el número 375 que aparece en la función dada $p\ (x)$ el cual es un parámetro específico de la función logística, a saber, la capacidad de carga o capacidad de sustento del hábitat o espacio.

El estudiante A_{10}, coloca como respuesta una de las palabras con las que se identifica una característica propia de la función logística, el acotamiento, dicho como "*el número máximo*" (ver figura 8). Para el modelo, la constante que representa la capacidad de sustento.

Figura 8

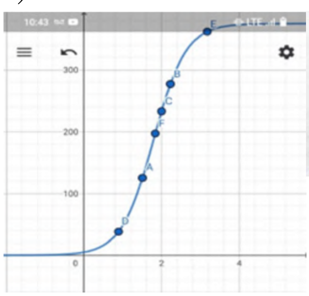
Respuesta de A_{10} a 2.b)



Como se mencionó anteriormente, para motivar la participación de los estudiantes e involucrarlos en la situación problema se les dice que tomen el papel de laboratoristas químicos. Como en esta situación se realiza un cultivo de microorganismos, se le pide el llenado de una tabla correspondiente a 6 días de observación utilizando GeoGebra. La estudiante A_5, utiliza de manera correcta la herramienta tecnológica para realizar el llenado de la tabla y logra hacer una buena aproximación sobre la cantidad de individuos por día a partir de la gráfica. (Ver figura 9).

Figura 9

Respuesta de A_{10} a 2.b)

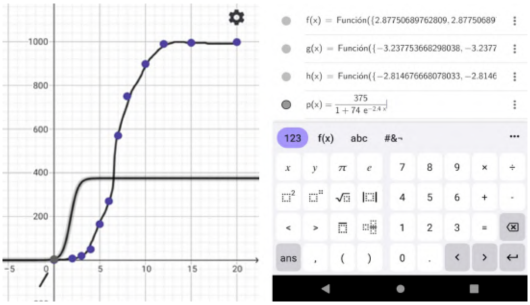


día	individuos
1	120
2	233
3	361
4	370
5	372
6	374

Es oportuno mencionar que, una vez realizada la gráfica de la función $p\ (x)$ la estudiante A_4, logró contestar correctamente 2.b), pero además, en los comentarios que se hicieron mientras se realizaba la actividad, ella dice que la gráfica de la situación 1 y de la situación 2 se "*estacionan*" en el "*número máximo*". Muestra la gráfica de la situación 2 la cuál realizó sin borrar antes la gráfica de la situación 1, por lo que esto le permitió realizar tan importante observación, ya que el parámetro dado por las constantes 1000 y 375 en cada una de las respectivas situaciones problema, a lo que ella llama "*número máximo*" es la cota o capacidad de sustento del modelo logístico (ver figura 10).

Figura 10

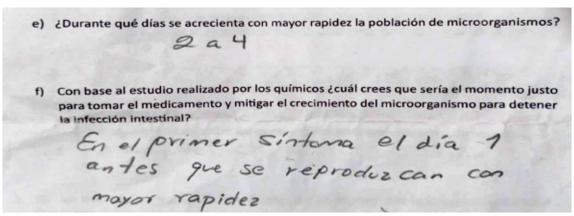
Gráficas en GeoGebra de la estudiante A_4 a la situación 1 y 2 superpuestas



El estudiante A_9 presenta un nivel alto de coherencia respecto a las respuestas dadas en 2.e) y f). Notamos de la Figura 11 que identifica el intervalo de mayor crecimiento en la población de microorganismos de manera correcta, y cuando da su interpretación, concluye que se debe dar la medicación justo antes de que se dé esa "*mayor rapidez*". Cabe mencionar que, de los comentarios realizados al momento de realizar la actividad, algunos estudiantes relacionaron esta mayor rapidez como un cambio, mencionando "*empezó lento, luego avanzó mucho y luego se alentó otra vez*". Inferimos que la lectura del gráfico nos introduce a la idea de razón de cambio previo a la construcción de derivada que se da en el nivel medio superior.

Figura 11

Respuesta de A_9 a 2.e) y f)



e) ¿Durante qué días se acrecienta con mayor rapidez la población de microorganismos?

2 a 4

f) Con base al estudio realizado por los químicos ¿cuál crees que sería el momento justo para tomar el medicamento y mitigar el crecimiento del microorganismo para detener la infección intestinal?

En el primer síntoma el día 1 antes que se reproduzcan con mayor rapidez

Conclusiones y discusión

Los resultados indicaron que los estudiantes reconocieron propiedades y representaciones características de la función logística, como, por ejemplo, la constante de capacidad de carga o de sustento del modelo matemático dado en cada situación problema y manifestado por ellos como el "*acotamiento*" o "*número máximo*". Es interesante ver que la gráfica de la función que realizaron en GeoGebra, tanto a mano alzada como con la instrucción del gráfico de datos de la tabla, permitió a los estudiantes manipular y "jugar" con la gráfica sin necesidad de cambiar su forma principal (forma sigmoidea), la cual también es una característica de la función logística.

Otro aspecto importante es que los estudiantes lograron establecer vínculos de la función logística con otros conceptos matemáticos relacionados como la variación, precedente de una idea intuitiva de razón de cambio y derivada, conceptos matemáticos que se estudian a profundidad en niveles educativos más avanzados como el medio superior y superior. Dichos conceptos son base para carreras profesionales de ciencias e ingenierías por lo que es relevante que se desarrollen estas ideas en el nivel educativo básico (secundaria) para fortalecer las bases conceptuales donde se construirán conceptos matemáticos especializados.

Un foco de atención que se da como resultado del uso de la herramienta tecnológica GeoGebra fue que los estudiantes lograron relacionar la representación algebraica de la función logística con su representación gráfica. Es decir, identificaron la forma característica de esta función como una forma cociente con exponencial, con potencia negativa en el denominador y en el numerador siempre la capacidad de carga, esto debido a la practicidad a la hora de realizar los cálculos necesarios en el llenado de tablas de datos. Al observar las representaciones gráficas y poderlas visualizar en GeoGebra, daban sentido a lo planteado en la situación problema. De acuerdo con el análisis de datos, los estudiantes fueron capaces de predecir el comportamiento de cada una de las situaciones problema respecto a la lectura de las gráficas. Es importante destacar, las respuestas de los estudiantes a las preguntas sobre lo que pasa en un futuro para cada situación, es decir, que la capacidad de predicción matemática permite entender el problema modelado.

Para finalizar queremos destacar que, los comentarios y las observaciones que los estudiantes realizaron, abonan sustancialmente hacia nuevas estrategias para el rediseño de las actividades (lo que de manera fortuita y casi sin planificar se dio), como por ejemplo, al realizar la gráfica $r(x)$ de la situación 1 y $p(x)$ de la situación 2 en el mismo plano coordenado (es decir, hacer la segunda sin borrar la primera), permitió que una estudiante observara que las gráficas se "*estacionan*" en sus respectivos "*números máximos*". Rápidamente notó que estos "*números máximos*" aparecen en la parte del denominador de las funciones dadas en su representación algebraica y representan una cota. Si se requiere replicar la actividad del Anexo A, se recomienda incluir un ítem 3 —a manera de reflexión- en el que se les indique a los estudiantes realizar las gráficas de las situaciones 1 y 2 en el mismo plano y observar con detenimiento sus representaciones gráficas y algebraicas para encontrar similitudes y preguntar a los estudiantes ¿qué pueden observar? Más particularmente, proponer al estudiante variar las capacidades de cargas de las funciones y visualizar su efecto en la gráfica.

De todo lo anterior podemos concluir que el uso de GeoGebra promueve la comprensión de la función logística en escenarios contextualizados al ser vista de manera dinámica en el software, relacionando sus distintas representaciones y generando las conexiones necesarias para dicha comprensión. Resaltamos la importancia de incorporar herramientas digitales en el currículo matemático y con ello enriquecer la experiencia educativa. Hacer uso de este recurso didáctico prepara mejor a los estudiantes para el uso de matemáticas en contextos reales y multidisciplinarios. Este estudio también sugiere la necesidad de continuar explorando y ampliando el uso de recursos tecnológicos en la educación matemática para abordar una variedad más amplia de conceptos y competencias matemáticas por lo que es relevante e importante la difusión de este.

Recomendamos que, las situaciones aquí planteadas podrían servir de apoyo al profesor de matemáticas en su práctica docente para la enseñanza de las funciones en general y muy particularmente como apoyo el profesor de ciencias con las herramientas matemáticas necesarias para su estudio, como lo es la función logística, para fortalecer lo visto en la materia de Biología (también dentro del campo formativo Saberes y Pensamiento Científico de la Nueva Escuela Mexicana). Se invita a realizar esta actividad en colaboración entre el profesor de matemáticas y el profesor de Ciencias, justo antes de que este último imparta el tema sobre las interacciones depredador-presa para el equilibrio de las poblaciones en un ecosistema. Así mismo se recomienda fomentar el uso de modelos matemáticos y herramientas tecnológicas como GeoGebra en el aula de clases.

Agradecimientos

Se agradece al comité organizador del X Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación y a la Comunidad GeoGebra Latinoamericana por su apoyo para presentar esta investigación.

Referencias

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. L., & Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa, 9*(1), 6–19.

Artola, E. C., Mayoral, L. E., & Benarroch-Benarroch, A. (2016). Dificultades de aprendizaje de las representaciones gráficas cartesianas asociadas a biología de poblaciones en estudiantes de educación secundaria. Un estudio semiótico. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 13*(1), 36–52.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(1), 5–23.

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática, RevEM, 23*(2), 2. https://doi.org/10.33044/revem.10419

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. Springer.

Braintrust tutors [BT] (2024). *Aprendizaje basado en problemas en matemáticas.* https://braintrusttutors.com/es/problem-based-learning-in-math/

Cenas-Chacón, F. Y., Gamboa-Ferrer, L. R., Blaz-Fernández, F. E., & Castro-Mendocilla, W. E. (2021). GeoGebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5*(18), 382–390.

Chamoso, J. M., & Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 59–69.

Couoh, J. R. & Cabañas-Sánchez, G. (2013). Un estudio del límite al infinito en el nivel superior bajo el contexto de la resolución de problemas que involucran la función logística. En L. Sosa, J. Hernández, & E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI EIME* (pp. 316– 323). Red de Cimates. https://core.ac.uk/download/pdf/322888113.pdf

Domènech-Casal, J. (2020). Diseñando un simulador de ecosistemas. Una experiencia STEM de enseñanza de dinámica de los ecosistemas, funciones matemáticas y programación. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 17*(3), 320201–320217.

Espinoza, L. A. V., & Rodríguez, M. A. Y. (2021). La importancia de las TIC en la asignatura Matemática. *Cuadernos de Educación y Desarrollo, 13*(2).

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, 23*(1), 9–19.

Fowler, A. C. (1997). *Mathematical models in the applied sciences* (Vol. 17). Cambridge University Press.

Gatica, S. N., & Ares, O. E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Edmetic, 1*(2), 88–107.

GeoGebra. (2024). *Herramientas de GeoGebra y recursos.* GeoGebra GmbH https://www.geogebra.org/

Guamán, G. V. J., & Espinoza, F. E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Universidad y Sociedad, 14*(2), 124–131.

Limón, S., Mejía, J., Aguilera, J., Valero, A., & Malpica, J. (2021). *Biología 1. Infinita Secundaria* (3era ed.). Castillo.

Moreno-Jiménez, L. A. (2023). *Propuesta didáctica basada en las metodologías activas a través del uso del software GeoGebra para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* [Tesis Doctoral, Ecuador-Pucese-Maestría en Pedagogía con Mención en Educación Técnica y Tecnológica].

Pérez, J. S. N., Garcés, M. F. L., Zurita, C. A. C., Enríquez, V. A. N., & Núñez, R. E. L. (2023). Software informático y su incidencia en el aprendizaje significativo de la geometría en los estudiantes de noveno año de educación general básica del colegio nacional picaihua. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(3), 4626–4644.

Perin, A. P., & Campos, C. R. (2020). Reflexiones sobre la importancia de la modelación matemática como estrategia inductora de competencias estadísticas. *Paradigma, 2*, 331–355.

Petrich, M., Gómez, A., Funes, S., López, J.L., & Tomasini, P. (2018). *Biología 1. Ciencias y Tecnología*. Ediciones Castillo.

Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral* (9a ed.). Pearson.

Riba, C. C. E. (2017). La observación participante y no participante en perspectiva cualitativa. En Padró-Solanet, A., & Riba, C. C. E. (Eds.), *Análisis de datos en la administración pública II* (pp. 5–22). Universitat Oberta de Catalunya.

Sastre, G., & Araújo, U. F. (2008). *El aprendizaje basado en problemas, Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad.* Editorial Gedisa.

Spivak, M. (2014). *Calculus* (3a ed.). Editorial Reverté.

Ulloa, I. J. T., & Rodríguez, C. J. A. (2010). *El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos.* CONACYT.

Valero, C. M. del S., & Lezama, A. J. (2020). Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México. *El cálculo y su enseñanza, 15*(1), 1–19. https://doi.org/10.61174/recacym.v15i1.57

Vergel-Ortega, M., De Jesús Gallardo-Pérez, H., & Portal-Domingo, R. (2020). Las tecnologías de la información y las comunicaciones en el fortalecimiento del pensamiento físico matemático. *AIBI Revista de investigación, administración e ingeniería, 8*(S1), 83–89.

Villarreal, M. E. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73.

Vidal, M., Guinovart, R., Baldoquín, W., Valdivia, N. C., & Morales, W. (2020). Modelos matemáticos para el control epidemiológico. *Educación Médica Superior, 34*(2).

Zill, D., Cullen, M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Ecuaciones Diferenciales* (vol. 1), McGraw-Hill/Interamericana.

Anexo

A continuación, se presenta la Actividad aplicada para este trabajo de investigación. Las situaciones problema planteadas fueron construidas y adaptadas por las autoras al contexto del estudiante, pero su fundamentación matemática es tomada de ejemplos dados en Vidal et al. (2020) y Zill (2008).

Lee las siguientes situaciones y contesta lo que se te pide.

1. En una escuela secundaria de Chilpancingo, Timón, el niño más chismoso del 3er grado grupo X difundió un rumor en todo en plantel sobre la nueva novia de su compañero Pumba. En el plantel hay un estimado de mil personas entre estudiantes, profesores, directivos y trabajadores, y se supone que la rapidez con la que se propaga la información es proporcional no solo al número de personas que son informadas del rumor, sino también al número de personas que aún no lo saben (la constante de proporcionalidad es 0.00093). La cantidad de personas que se fueron enterando del rumor cada día se registró en la siguiente tabla.

Día	0	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20
Personas enteradas	1	8	20	50	165	270	570	750	898	990	995	998

a) ¿Encuentras alguna relación entre los puntos dados en la tabla? Justifica tu respuesta.
b) Con los datos de la tabla, localiza los puntos en el plano coordenado utilizando el software GeoGebra.
c) Realiza la gráfica que represente los datos de la tabla dada.
d) ¿Crees que exista alguna función que se ajuste a los datos determinados?, ¿por qué?
e) Dibuja en GeoGebra la gráfica de la función

$$r(x) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.93x}}$$

f) ¿Qué similitudes o diferencias observas en la gráfica que dibujaste y la gráfica de *r*? (Describe tu respuesta de manera detallada).

Contesta de acuerdo con la gráfica:

g) ¿Cuántas personas crees que ya sabían del rumor en el día 9?
h) ¿Cuándo se propaga con mayor rapidez el rumor?
i) ¿En cuánto tiempo crees que podría decirse que "todo el plantel" sabe del rumor?
j) ¿Qué interpretación le puedes dar a esta situación? Explica detalladamente.

2. Los químicos del laboratorio MedicKing, se encuentran estudiando un microorganismo que se encuentra en la zona de Tierra Caliente de Guerrero, el cuál es causante de infecciones en el intestino grueso que provoca dolor abdominal, diarrea y deshidratación. Con la finalidad de determinar el momento óptimo para la ingesta de algún medicamento que detenga la infección dada por el microorganismo, se realizó un estudio de cultivo. Para el estudio se colocaron cinco ejemplares en un tubo de ensayo y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que la función logística que modela este crecimiento poblacional es:

$$p(x) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.4x}}$$

a) ¿Qué crees que representan las variables x y p de la función anterior?
b) ¿Qué puedes decir del número 375?
c) En GeoGebra, dibuja la gráfica de la función p.
d) Realiza una tabla de los datos tomados durante los 6 días de observación, y marca los puntos de esta tabla sobre la gráfica del inciso c).
e) ¿Durante qué días se acrecienta con mayor rapidez la población de microorganismos?
f) Con base al estudio realizado por los químicos ¿cuál crees que sería el momento justo para tomar el medicamento y mitigar el crecimiento del microorganismo para detener la infección intestinal?

La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo

Verónica Vargas Alejo [1]
Carlos Valenzuela García [2]
Martha E. Aguiar Barrera [3]

Resumen

La hoja de cálculo, si bien no se creó con un propósito educativo, actualmente es considerada como una herramienta cognitiva que se propone para la enseñanza de las matemáticas. Por ello, el objetivo de esta investigación es identificar las técnicas empleadas por un grupo de estudiantes de un posgrado en enseñanza de las matemáticas (futuros profesores) al resolver un problema verbal mediante la hoja de cálculo, así como conocer sus opiniones sobre su uso para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Con esto, se busca responder a la pregunta: ¿cómo un grupo de futuros profesores resuelven un problema mediante la hoja de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales? El marco conceptual que sustenta esta investigación es conocido como Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T) propuesto por Artigue. Es un estudio de caso instrumental conformado por cuatro estudiantes de posgrado. Como resultado, se identificaron diversas técnicas para resolver el problema. Todos los estudiantes iniciaron con una técnica de rutina que fue organizar datos, incógnitas, relaciones y, por ende, buscar reconocer la estructura del problema. Uno de los estudiantes ejecutó técnicas en lápiz y papel y los otros tres, de ensayo numérico.

Palabras clave

Sistemas de ecuaciones lineales, Hoja de cálculo, Génesis Instrumental.

---

[1] veronica.vargas@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
http://orcid.org/0000-0002-7431-0568

[2] carlos.valenzuela@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0002-0776-5757

[3] martha.aguiar@academicos.udg.mx
Universidad de Guadalajara, México
https://orcid.org/0000-0001-7902-3405

Vargas Alejo, V., Valenzuela García, C., & Aguiar Barrera, M. E. (2024). La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo. En E. L. Juárez Ruiz, & L. A. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024* (pp. 171–191). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-08

Introducción

De acuerdo con los principios básicos del National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), la incorporación de la tecnología digital para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es fundamental. En México, la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011) ha promovido su uso en las aulas a lo largo de las distintas reformas educativas. Como evidencia pueden consultarse los libros de texto para la educación primaria derivados de esa reforma, en los que se proponen enlaces a aplicaciones y diversos materiales. Otro ejemplo son los recursos digitales diseñados para su uso en educación secundaria, como software y otras herramientas (SEP, 2000).

A pesar de la tendencia actual de integrar tecnologías digitales en las clases de matemáticas, esperando que los profesores las utilicen (Haspekian & Kieran, 2023), se han encontrado múltiples factores de resistencia. Entre ellos, de acuerdo con Hoyles et al. (2020) se pueden citar, la falta de fondos para mantener y darle continuidad a proyectos, la inercia escolar, la falta de programas de formación docente y el temor de los profesores para innovar en el aula ante la presión por terminar a tiempo un plan de estudios.

Por lo anterior, es necesario destacar que la incorporación de las tecnologías digitales en el aula no viene por sí sola, sino que conlleva varios desafíos. No solo se trata de encomendar a los profesores que hagan uso de ella para transformar su enseñanza, sino también para fomentar una visión sobre la importancia de su uso y el potencial que esto puede tener para el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto, como menciona Drier (2001), un desafío es preparar a los profesores como usuarios de las tecnologías digitales, además de que ellos deben aprender sobre las tecnologías para ser capaces de diseñar actividades que promuevan el aprendizaje de los estudiantes, de tal manera que puedan hacer uso de la tecnología digital como una herramienta cognitiva.

Aun cuando la incorporación de la tecnología digital ha sido un desafío para la educación, son grandes los esfuerzos que se han hecho desde la investigación para mostrar su potencial para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, el uso de la hoja electrónica de cálculo se ha empleado para la enseñanza de varios conceptos matemáticos, a pesar de que, como lo menciona Angel et al. (2023), este recurso no surgió para atender problemas específicos de la educación.

Para la enseñanza del álgebra, en SEP (2000) se propone una serie de actividades para desarrollarse haciendo uso de Excel. La intención es promover nuevas formas de enseñanza, en las que se contempla la manipulación directa de objetos o de representaciones de objetos matemáticos, como ecuaciones y la variación lineal. Por su parte, Drier (2001) resalta las cualidades que tiene el uso de la hoja de cálculo. Es un medio que a través de sus herramientas promueve la interacción; vincula múltiples representaciones, como son la gráfica, tabular y algebraica; además, permite modelar problemas en distintos contextos, por ejemplo, los problemas de tasa.

En suma, el uso de la tecnología digital junto con nuevos marcos teóricos para describir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha modificado la manera de cómo el álgebra es percibida en la educación matemática (Kieran, 2006; Haspekian & Kieran, 2023). La posibilidad de conectar el lenguaje algebraico con tablas de valores y gráficos, mediante la incorporación de la hoja de cálculo (Excel), permite a los estudiantes tratar a los objetos algebraicos de una manera dinámica, diferente de cómo se tratan en los ambientes de enseñanza de lápiz y papel (Rojano & Sutherland, 1993; Sutherland & Rojano, 1993; Vargas & Guzmán, 2007a). A partir de varias investigaciones (Dettori et al., 2001; Mochón et al., 2000; Rojano & Sutherland, 1993; Tabach & Friedlander, 2004; Tabach et al., 2006) se conoce el potencial y las limitaciones de estas herramientas para propiciar aprendizajes de matemáticas en los estudiantes.

Por tanto, hay evidencia de que esta herramienta puede apoyar el entendimiento de conceptos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, específicamente al resolver problemas. Sin embargo, entre los profesores en servicio o en formación, persiste la incertidumbre sobre cómo podrían integrar la hoja de cálculo (Excel) tanto para resolver problemas y habilidades de resolución como para apoyar el desarrollo de conceptos algebraicos.

En dicho contexto, la investigación aquí reportada tiene como objetivo identificar las técnicas empleadas por un grupo de futuros profesores al resolver un problema verbal, en el que subyace un sistema de ecuaciones lineales y se hace uso de la hoja de cálculo (Excel), así como conocer sus opiniones sobre el uso de Excel para la enseñanza de sistemas lineales. Con esto, se busca responder la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo abordan los estudiantes de posgrado en enseñanza de las matemáticas (futuros profesores) la resolución de problemas mediante el uso de hojas de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para mejorar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales? Para ello, se propone resolver un problema verbal de tasa, el cual puede ser modelado mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En este capítulo describimos el proceso mediante el cual cuatro estudiantes de posgrado resolvieron este problema y cómo describieron su experiencia. En esta descripción empleamos elementos teóricos de la génesis instrumental.

Marco conceptual

Como marco conceptual se retoman elementos de la génesis instrumental (Haspekian, 2005), en particular, el papel que juega la técnica en el aprendizaje del álgebra (Artigue, 2002; Lagrange, 2000). El papel de la triada: *tarea, técnica y teoría* en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha discutido por autores como Artigue (2002) y Lagrange (2000). Chevallard (1999) argumenta que las *tareas*, en general son dadas en términos de verbos, por ejemplo, a) resolver una ecuación; b) factorizar una expresión algebraica, etc. La *técnica* es una manera de resolver una tarea, es un ensamble complejo de razonamiento y trabajo rutinario. Ésta puede ser evaluada y percibida en términos de su valor pragmático y su valor epistémico (Artigue, 2002, p. 248); es decir, su potencial productivo, y su contribución a la comprensión de los objetos involucrados. Las *teorías* tratan de un nivel superior de justificación-explicación-producción, retomando el discurso racional que justifica y explica el uso de las técnicas o bien generando nuevas técnicas para llevar a cabo una tarea.

Se incorporan, también, elementos de la contribución de Bednarz y Janvier (1996) y Bednarz et al. (2003), especialmente en relación con el tipo de problemas verbales de tasa, conocidos como problemas no conectados y denominados algebraicos. Estos problemas se caracterizan por requerir operaciones con varias cantidades desconocidas simultáneamente, lo que puede generar la necesidad de establecer ecuaciones para resolverlos.

En la investigación de Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012) se encontró que al resolver este tipo de problemas verbales de tasa con la hoja de cálculo de Excel pueden emerger varias técnicas, dependiendo del conocimiento de la herramienta y del conocimiento matemático. Entre las técnicas se encuentran las siguientes.

- *Calculadora.* Los alumnos usan la hoja de cálculo para identificar la o las incógnitas del problema, así como las cantidades conocidas y las relaciones establecidas entre estas. No escriben fórmulas que relacionen celdas entre sí o puedan ser arrastradas, sino que escriben expresiones aritméticas, por ejemplo, = 300 + 800. Utilizan cualquier celda para escribir las expresiones aritméticas o estas son ordenadas en columnas.
- *Fórmulas recursivas.* Los estudiantes escriben fórmulas recursivas e identifican que en las columnas de la tabla aparecen sucesiones numéricas, cuyo comportamiento se rige por cierto patrón, el cual escriben mediante fórmulas recursivas. El primer dato de la columna es tomado como el valor inicial y lo utilizan para generar el siguiente valor. Generan términos sucesivos en una columna añadiendo *d*, la constante de diferencia, a cada valor de las celdas de la columna.
- *Celda como variable.* Los estudiantes organizan la información en filas, de modo que no les posibilita arrastrar fórmulas en su hoja de cálculo, sino que la usan como contenedor de números. En ellas introducen varios valores, que están relacionados con otros datos

> mediante fórmulas, las cuales generan valores y permiten resolver el problema.
>
> - *Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables*. Los estudiantes identifican en la hoja de cálculo relaciones entre datos de diferentes columnas y escriben fórmulas, que relacionan celdas de distintas columnas y misma fila. Posteriormente, las arrastran a lo largo de las columnas. Los alumnos organizan la información de tal manera que logran manipular celdas referentes de manera general (todos los valores p se pueden meter en una columna). (Vargas-Alejo & Guzmán-Hernández, 2012, p. 96)

Las técnicas *fórmulas recursivas* y *celda como variable* se reconocen en la literatura de investigación como técnicas comúnmente usadas por los estudiantes al resolver un problema con hoja de cálculo de Excel (Ainley et al., 2005; Friedlander, 1999; Haspekian, 2005; Sutherland & Rojano, 1993; Rojano & Sutherland, 1993). El valor epistémico de las técnicas *Celda como variable y Relación entre celdas de la misma fila, tomando una columna o varias de ellas como variables* es alto ya que permiten abordar conceptos como variable, variación, ecuación, incógnita, función y solución, asociados a sistemas de ecuaciones lineales.

Cuando las técnicas mencionadas previamente se emplean para resolver problemas de tasa no conectados, fomentan la realización de una gran cantidad de operaciones o ensayos numéricos. De acuerdo con Wilson et al. (2005), algunas de estas técnicas, con la orientación del docente, se pueden llevar a la formulación de un sistema de ecuaciones lineales en su representación algebraica. Sin embargo, varios investigadores (Mochón et al., 2000; Rojano & Sutherland, 1993; Sutherland & Rojano, 1993) coinciden en que

> el mundo algebraico que se experimenta en las hojas de cálculo en comparación con el lápiz y papel (donde surgen variables y fórmulas, desaparecen incógnitas y ecuaciones, y se adquiere nuevo conocimiento instrumental a medida que se utiliza la función de copia…), es bastante diferente. (Haspekian & Kieran, 2023, p. 6)

Por consiguiente, el potencial atribuido a la hoja de cálculo, como señalan Haspekian y Kieran (2023) se relaciona con su capacidad como herramienta de generalización u optimización que permite abordar problemas de generalización/patrones, de optimización o modelo, donde se fomentan procesos aritméticos de ensayo numérico. Las soluciones suelen ser aproximadas y uno de los objetos matemáticos explorados es la variable, la cual puede ser representada en forma de columnas, celdas o filas.

Metodología

Esta investigación es cualitativa y se desarrolla desde un estudio de caso instrumental (Yin, 1984) para indagar sobre las técnicas que sigue un grupo de estudiantes de posgrado en enseñanza de las matemáticas al resolver un problema mediante la hoja de cálculo, así como indagar sobre sus opiniones sobre el potencial que podría atribuirse a este recurso para potenciar el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales.

El caso se compone de un grupo de cuatro estudiantes de posgrado de formación de profesores de matemáticas de una universidad pública en México, a quienes se han codificado como *E1, E2, E3, E4*. Estos estudiantes de posgrado estaban tomando un curso sobre Teorías de Enseñanza de las Matemáticas, y el problema se implementó antes de revisar el tema del potencial del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Todos los estudiantes de posgrado tenían experiencia en la enseñanza, habiendo impartido asesorías o al menos un curso de matemáticas en secundaria, bachillerato o universidad.

La tarea, en este caso particular, fue resolver el problema verbal siguiente:

> PROBLEMA 1. Una fábrica tiene dos tipos de objetos A y B. El objeto A necesita 2.4 kg de acero y 3 horas de fabricación. El objeto B necesita 4 kg de acero y 2 horas de fabricación. Calcule el número de objetos de cada clase, sabiendo que se utilizó para producirlos 80 kg de acero y 67 horas de trabajo. (Bednarz et al., 2003, p. 14)

El problema puede resolverse mediante el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 2.4a + 4b = 80 \\ 3a + 2b = 67 \end{cases}$$

Donde *a* es la cantidad de objetos tipo A y *b* la cantidad de objetos tipo B.

El PROBLEMA 1 se implementó durante una sesión síncrona en Meet de una hora, siguiendo las siguientes fases.

1. Entrega del problema a cada estudiante de posgrado.
2. Resolución individual del problema utilizando la hoja de cálculo.
3. Presentación de técnicas utilizadas para resolver el problema.
4. Discusión e interacción grupal dirigida por el profesor.
5. Presentación de investigaciones relacionadas con el uso de la hoja de cálculo y su uso en el bachillerato para resolver este tipo de problemas.
6. Finalmente, se generó un espacio de discusión sobre el potencial de la hoja de cálculo.

El ambiente de resolución del problema fue virtual, síncrono, mediante la plataforma de Meet. Cada estudiante de posgrado se encontraba en su casa atendiendo la clase. El papel de la investigadora consistió en propiciar un ambiente en el que los estudiantes de posgrado fueran alentados a explorar, formular y validar hipótesis relacionadas con el problema, con expresar y discutir ideas, con tomar decisiones y evaluar sus técnicas.

Se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de datos: videograbación de la sesión, archivos de Excel de los estudiantes de posgrado, hojas de papel con procedimientos y la bitácora del docente. Así, tomando en cuenta las ideas de Sampieri et al. (2014) se hace el análisis del contenido que aparece en el discurso y producciones de los estudiantes que conforman el caso de estudio. La unidad de análisis consiste en las técnicas que emplearon los estudiantes para resolver el PROBLEMA 1. Las categorías de análisis son, por un lado, el valor epistémico de dichas técnicas en términos de su conexión con los significados del álgebra, para esto, algunas subcategorías que se identificaron son por ejemplo, la síntesis en la hoja de cálculo, uso de la celda como variable, y otras. Por otro lado, las opiniones de los estudiantes de posgrado, en las cuales se contemplan como subcategorías, el potencial y las limitantes del uso de la hoja de cálculo para resolver un problema del tipo que se estudia en esta investigación.

Resultados y Discusión

Se analizaron las técnicas utilizadas por los cuatro estudiantes de posgrado para resolver el PROBLEMA 1. Tras completar las dos primeras etapas (entrega del problema a cada estudiante y resolución individual del mismo utilizando una hoja de cálculo), los estudiantes de posgrado (*E1*, *E2*, *E3* y *E4*) notaron al analizar el PROBLEMA 1 que podría ser resuelto mediante un sistema de ecuaciones lineales. Todos identificaron los datos, las incógnitas y las condiciones. Sin embargo, dada la instrucción de utilizar la hoja de cálculo, los estudiantes de posgrado expresaron que el desafío consistió en implementar esta indicación. A continuación, se presentan extractos de las descripciones proporcionadas por los estudiantes de posgrado sobre su proceso de resolución, a modo de ilustración.

Estudiante 1: *El chiste es usar Excel y Excel es bueno para calcular en tablas.*

Estudiante 2: *Yo dije: pues es un sistema de ecuaciones. Puedo programar Excel para resolver el sistema de ecuaciones, pero probablemente es muy obvio. Entonces lo vi como un reto y pensé vamos a ver cómo sale con tanteo.*

Estudiante 3: *Lo iba a resolver en papel, pero como pidió que utilizáramos una herramienta, me fui a GeoGebra… Puse las dos ecuaciones y se intersecan en 15, 11… En Excel puse las cantidades que nos dijeron* [describió las fórmulas utilizadas]

Estudiante 4: *Abrí Excel y dije: no sé qué hacer. Mejor lo resuelvo primero a mano y ya que tenga una respuesta entonces analizo qué es lo que tengo que hacer en Excel.*

El desafío que enfrentaron los estudiantes de posgrado al recibir la instrucción de “usar la hoja de cálculo de Excel” se debió a su falta de experiencia previa en la utilización de esta herramienta para resolver problemas. Este hallazgo está en línea con la idea de Haspekian y Kieran

(2023), quienes plantean que el entorno tradicional de lápiz y papel sigue siendo dominante en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas.

A partir de las fases 2 y 3, se identificaron las siguientes técnicas utilizadas por los estudiantes de posgrado.

Técnica de *E1*, sintetizando relaciones en la hoja de cálculo

E1 escribió los datos y relaciones identificadas en el PROBLEMA 1 en las columnas A, B y C (Figura 1). Su técnica mostró el trabajo de rutina de escritura de datos, acompañado de un razonamiento para resolver el problema, el cual se detalla a continuación.

Basándose en las relaciones identificadas, comenzó suponiendo valores para la cantidad de objetos tipo B (columna M), empezando con la cantidad de cero. Luego, escribió fórmulas en las columnas H-K que, mediante ensayo numérico, le permitieron obtener la solución (Figura 2).

Estudiante 1: *Lo que hice fue sacar esta fórmula (celda H2, Figura 1), que es el total del tiempo. Le voy a restar este contador (celda M1), multiplicado por el tiempo del objeto B. Lo que estoy haciendo es asumir que esto es la cantidad del objeto B (columna M) y aquí estoy expresando la cantidad de objetos del tipo A (columna H).*

Figura 1

Técnica inicial de E1 para resolver el PROBLEMA 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Tiempo	Material										0
2	A	3	2.4					22.33333	53.6	-49.6	22.33333		1
3	B	2	4					21.66667	56	-52	22.66667		2
4	Total	67	80					21	58.4	-54.4	23		3
5								20.33333	60.8	-56.8	23.33333		4
6								19.66667	63.2	-59.2	23.66667		5
7								19	65.6	-61.6	24		6
8								18.33333	68	-64	24.33333		7
9								17.66667	70.4	-66.4	24.66667		8
10								17	72.8	-68.8	25		9
11								16.33333	75.2	-71.2	25.33333		10
12								15.66667	77.6	-73.6	25.66667		11
13								15	80	-76	26		12
14								14.33333	82.4	-78.4	26.33333		13
15								13.66667	84.8	-80.8	26.66667		14
16								13	87.2	-83.2	27		15
17								12.33333	89.6	-85.6	27.33333		16
18								11.66667	92	-88	27.66667		17
19								11	94.4	-90.4	28		18
20								10.33333	96.8	-92.8	28.33333		19
21								9.666667	99.2	-95.2	28.66667		20
22								9	101.6	-97.6	29		21
23								8.333333	104	-100	29.33333		22
24								7.666667	106.4	-102.4	29.66667		23
25								7	108.8	-104.8	30		24
26								6.333333	111.2	-107.2	30.33333		25
27								5.666667	113.6	-109.6	30.66667		26
28								5	116	-112	31		27
29								4.333333	118.4	-114.4	31.33333		28
30								3.666667	120.8	-116.8	31.66667		29
31								3	123.2	-119.2	32		30
32								2.333333	125.6	-121.6	32.33333		31
33								1.666667	128	-124	32.66667		32
34								1	130.4	-126.4	33		33
35								0.333333	132.8	-128.8	33.33333		34

Durante su presentación al grupo y discusión grupal, *E1* notó un par de errores en el ingreso de datos en su procedimiento. Sin embargo, debido a su comprensión clara del proceso, pudo corregirlos y encontrar la solución en las filas 12 y 13. Su técnica implicó la creación de una columna variable (cantidad de objetos tipo B), la escritura de las relaciones identificadas en el problema, de manera sintetizada utilizando el lenguaje de la hoja de cálculo, y la búsqueda de la solución mediante el arrastre de fórmulas por columna en Excel, basadas en los valores de la columna M.

Figura 2

Fórmulas utilizadas en la técnica de E1 para resolver el PROBLEMA 1

G3 fx

	A	B	C	D	H	I	J	K	L	
1		Tiempo	Material							0
2	A	3	2.4		=($B$4-M1*$B$3)/$B$2	=H2*$C$2+$C$3*M1	=$C$3-I2	=M1+H2		1
3	B	2	4		=($B$4-M2*$B$3)/$B$2	=H3*$C$2+$C$3*M2	=$C$3-I3	=M2+H3		2
4	Total	67	80		=($B$4-M3*$B$3)/$B$2	=H4*$C$2+$C$3*M3	=$C$3-I4	=M3+H4		3
5					=($B$4-M4*$B$3)/$B$2	=H5*$C$2+$C$3*M4	=$C$3-I5	=M4+H5		4
6					=($B$4-M5*$B$3)/$B$2	=H6*$C$2+$C$3*M5	=$C$3-I6	=M5+H6		5
7					=($B$4-M6*$B$3)/$B$2	=H7*$C$2+$C$3*M6	=$C$3-I7	=M6+H7		6
8					=($B$4-M7*$B$3)/$B$2	=H8*$C$2+$C$3*M7	=$C$3-I8	=M7+H8		7
9					=($B$4-M8*$B$3)/$B$2	=H9*$C$2+$C$3*M8	=$C$3-I9	=M8+H9		8
10					=($B$4-M9*$B$3)/$B$2	=H10*$C$2+$C$3*M9	=$C$3-I10	=M9+H10		9
11					=($B$4-M10*$B$3)/$B$2	=H11*$C$2+$C$3*M10	=$C$3-I11	=M10+H11		10
12					=($B$4-M11*$B$3)/$B$2	=H12*$C$2+$C$3*M11	=$C$3-I12	=M11+H12		11
13					=($B$4-M12*$B$3)/$B$2	=H13*$C$2+$C$3*M12	=$C$3-I13	=M12+H13		12
14					=($B$4-M13*$B$3)/$B$2	=H14*$C$2+$C$3*M13	=$C$3-I14	=M13+H14		13
15					=($B$4-M14*$B$3)/$B$2	=H15*$C$2+$C$3*M14	=$C$3-I15	=M14+H15		14

Técnica de *E2*, celdas como variables

La técnica de *E2* se basó en el uso de celdas como variables (Figura 3). Comenzó escribiendo los datos del problema de manera similar a *E1* (celdas A, B y C, filas 1, 2 y 3) pero luego los borró. Su organización de datos y operaciones fue diferente y tuvo como propósito facilitar la resolución del problema con la hoja de cálculo. Su técnica inicial implicó un trabajo de rutina al escribir los datos una vez identificados. A continuación se describe su razonamiento.

Figura 3

Técnica de E2 para resolver el PROBLEMA 1

K5 fx =(I5*$C$4)+(J5*$F$4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		Una fábrica tiene dos tipos de objetos A y B. El objeto A necesita 2.4kg de acero y 3 hrs de fabricación. El objeto B necesita 4kg de acero y 2hrs de fabricación. Calcul										
3		A	kg	hrs	B	kg	hrs	TOTAL	A	B	80kg	67hrs
4		1	2.4	3	1	4	2	Opc.1	15	11	80	67
5		2	4.8	6	2	8	4	Opc.2	10	14	80	58
6		3	7.2	9	3	12	6				0	0
7		4	9.6	12	4	16	8				0	0
8		5	12	15	5	20	10				0	0
9		6	14.4	18	6	24	12				0	0
10		7	16.8	21	7	28	14				0	0
11		8	19.2	24	8	32	16					
12		9	21.6	27	9	36	18					
13		10	24	30	10	40	20					
14		11	26.4	33	11	44	22					
15		12	28.8	36	12	48	24					
16		13	31.2	39	13	52	26					
17		14	33.6	42	14	56	28					
18		15	36	45	15	60	30					
19		16	38.4	48	16	64	32					
20		17	40.8	51	17	68	34					
21		18	43.2	54	18	72	36					
22		19	45.6	57	19	76	38					
23		20	48	60	20	80	40					

Utilizó tres columnas para calcular la cantidad de acero y horas requeridas para fabricar los objetos tipo A (columnas B, C y D), seguidas de otras tres columnas para calcular la cantidad de acero y horas requeridas para fabricar los objetos tipo B (columnas E, F y G).

Luego, incluyó fórmulas en K4 y L4 (Figura 4) para realizar ensayos numéricos en las columnas I y J, buscando la solución mediante ensayo numérico. E2 se apoyó en anotaciones en su cuaderno para registrar algunos de sus ensayos numéricos hasta encontrar la solución (celdas I4, J4). Parte de la explicación de su procedimiento se observa en el siguiente fragmento.

> Estudiante 2: *Básicamente lo que hacía era…opción 2* [señaló la celda H5] *¿qué pasa cuando tengo 10 objetos del A?* [señaló la celda I5]. *Este* [señaló la celda K5], *lo que hace es calcular cuánto material me da los 10 kilogramos.*

Las fórmulas que escribió en K5 y L5 se muestran en la Figura 3. Estas se relacionan con el SEL que subyace en el problema.

$$\begin{cases} 2.4a + 4b = 80 \\ 3a + 2b = 67 \end{cases}$$

Donde a, cantidad de objetos tipo A, corresponde a la celda I5, y b, la cantidad de objetos tipo B, corresponde a la celda J5.

Figura 4

Fórmulas utilizadas en la técnica de E2 para resolver el PROBLEMA 1

I20 fx

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											
2	Una fábric										
3	A	kg	hrs	B	kg	hrs	TOTAL	A	B	80kg	67hrs
4	1	2.4	3	1	4	2	**Opc.1**	15	11	=(I4*$C$4)+(J4*$F$4)	=(I4*$D$4)+(J4*$G$4)
5	2	=$C$4*B5	=$D$4*B5	2	=$F$4*E5	=$G$4*E5	**Opc.2**	10	14	=(I5*$C$4)+(J5*$F$4)	=(I5*$D$4)+(J5*$G$4)
6	3	=$C$4*B6	=$D$4*B6	3	=$F$4*E6	=$G$4*E6				=(I6*$C$4)+(J6*$F$4)	=(I6*$D$4)+(J6*$G$4)
7	4	=$C$4*B7	=$D$4*B7	4	=$F$4*E7	=$G$4*E7				=(I7*$C$4)+(J7*$F$4)	=(I7*$D$4)+(J7*$G$4)
8	5	=$C$4*B8	=$D$4*B8	5	=$F$4*E8	=$G$4*E8				=(I8*$C$4)+(J8*$F$4)	=(I8*$D$4)+(J8*$G$4)
9	6	=$C$4*B9	=$D$4*B9	6	=$F$4*E9	=$G$4*E9				=(I9*$C$4)+(J9*$F$4)	=(I9*$D$4)+(J9*$G$4)
10	7	=$C$4*B10	=$D$4*B10	7	=$F$4*E10	=$G$4*E10				=(I10*$C$4)+(J10*$F$4)	=(I10*$D$4)+(J10*$G$4)
11	8	=$C$4*B11	=$D$4*B11	8	=$F$4*E11	=$G$4*E11					
12	9	=$C$4*B12	=$D$4*B12	9	=$F$4*E12	=$G$4*E12					
13	10	=$C$4*B13	=$D$4*B13	10	=$F$4*E13	=$G$4*E13					

El acomodo en las celdas I4-L4 se parece a la técnica celdas como variable (Vargas & Guzmán, 2007a), ya que el E2 organizó la información en las filas 4 y 5, columnas H-L de modo que usaron las celdas I4, J4 como contenedoras de números. En ellas introdujeron varios valores, que estaban relacionados con otros datos mediante fórmulas (celdas K4, L4), las cuales generaron valores y permitieron resolver el problema.

Técnica de E3, integración de diferentes herramientas

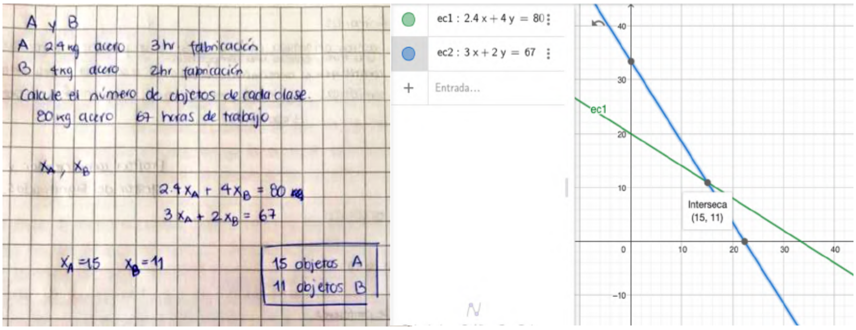
La técnica de *E3* consistió en identificar datos y escribir el sistema de ecuaciones en lápiz y papel (Figura 5), tal como lo menciona en la siguiente transcripción.

Estudiante 3: *Primero anoté los datos y me fijé que el problema se podía resolver con un sistema de ecuaciones. Le puse las variables* X_A *,* X_B *e hice la ecuación referente a la cantidad de acero utilizado y otra ecuación referente al tiempo de trabajo. Lo iba a hacer en papel, pero como pidió que utilizáramos una herramienta, me fui a GeoGebra.*

La técnica de E3 mostró un proceso de rutina al escribir los datos, incógnitas y ecuaciones en papel. El razonamiento que llevó a cabo para resolver el problema, una vez identificadas las ecuaciones, se describe a continuación.

Figura 5

Técnica de E3 para resolver el PROBLEMA 1



E3 graficó en GeoGebra y encontró la solución (15, 11). Esta solución le posibilitó recurrir a la hoja de cálculo de Excel (Figura 6) donde encontró de nuevo las soluciones mediante ensayo numérico, tomando la cantidad de objetos tipo A como variable. Es decir, despejó X_B de la ecuación:

$$2.4\ X_A + 4\ X_B = 80$$

(Figura 5) y capturó el resultado en F3, utilizando el lenguaje de la hoja de cálculo. Esto se observa en el siguiente extracto.

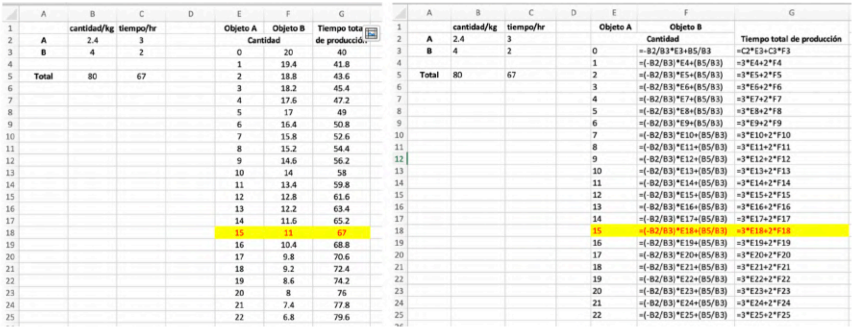
Estudiante 3: *En Excel puse las cantidades que nos dijeron. Para el objeto A se ocupan 2.4 kilos y tres horas de tiempo* [señaló las celdas A2, B2 y C2]. *Para el objeto B, cuatro kilos y dos horas de tiempo* [señaló las celdas A3, B3 y C3], *y el total* [señaló las celdas B5 y C5]. *Entonces me fui al objeto A, si tengo cero cantidades* [señaló la celda E3], *pues del objeto B tendría 20* [señaló la celda F3], *¿no?, considerando los kilos que tengo en total* [señaló la celda B5]. *Aquí está la operación* [señaló la fórmula de la celda F3].

La organización de la información y las operaciones realizadas en la hoja de cálculo en las celdas F3 y G3 (=-B2/B3*E3+B5/B3, =C2*E3+C3*F3) estuvieron influenciadas por su trabajo previo en lápiz y papel y en GeoGebra, como se refleja a continuación en el siguiente extracto.

Estudiante 3: *La verdad, a mí, pues se me hizo más rápido con GeoGebra, pero como pidió que usáramos Excel, pues es lo que se me ocurrió.*

Figura 6

Técnica de E3 en Excel para resolver el PROBLEMA 1



	A	B	C	D	E	F	G
1		cantidad/kg	tiempo/hr		Objeto A	Objeto B	Tiempo tota
2	A	2.4	3		Cantidad		de producció..
3	B	4	2		0	20	40
4					1	19.4	41.8
5	Total	80	67		2	18.8	43.6
6					3	18.2	45.4
7					4	17.6	47.2
8					5	17	49
9					6	16.4	50.8
10					7	15.8	52.6
11					8	15.2	54.4
12					9	14.6	56.2
13					10	14	58
14					11	13.4	59.8
15					12	12.8	61.6
16					13	12.2	63.4
17					14	11.6	65.2
18					15	11	67
19					16	10.4	68.8
20					17	9.8	70.6
21					18	9.2	72.4
22					19	8.6	74.2
23					20	8	76
24					21	7.4	77.8
25					22	6.8	79.6

	A	B	C	D	E	F	G
1		cantidad/kg	tiempo/hr		Objeto A	Objeto B	
2	A	2.4	3		Cantidad		Tiempo total de producción
3	B	4	2		0	=-B2/B3*E3+B5/B3	=C2*E3+C3*F3
4					1	=(-B2/B3)*E4+(B5/B3)	=3*E4+2*F4
5	Total	80	67		2	=(-B2/B3)*E5+(B5/B3)	=3*E5+2*F5
6					3	=(-B2/B3)*E6+(B5/B3)	=3*E6+2*F6
7					4	=(-B2/B3)*E7+(B5/B3)	=3*E7+2*F7
8					5	=(-B2/B3)*E8+(B5/B3)	=3*E8+2*F8
9					6	=(-B2/B3)*E9+(B5/B3)	=3*E9+2*F9
10					7	=(-B2/B3)*E10+(B5/B3)	=3*E10+2*F10
11					8	=(-B2/B3)*E11+(B5/B3)	=3*E11+2*F11
12					9	=(-B2/B3)*E12+(B5/B3)	=3*E12+2*F12
13					10	=(-B2/B3)*E13+(B5/B3)	=3*E13+2*F13
14					11	=(-B2/B3)*E14+(B5/B3)	=3*E14+2*F14
15					12	=(-B2/B3)*E15+(B5/B3)	=3*E15+2*F15
16					13	=(-B2/B3)*E16+(B5/B3)	=3*E16+2*F16
17					14	=(-B2/B3)*E17+(B5/B3)	=3*E17+2*F17
18					15	=(-B2/B3)*E18+(B5/B3)	=3*E18+2*F18
19					16	=(-B2/B3)*E19+(B5/B3)	=3*E19+2*F19
20					17	=(-B2/B3)*E20+(B5/B3)	=3*E20+2*F20
21					18	=(-B2/B3)*E21+(B5/B3)	=3*E21+2*F21
22					19	=(-B2/B3)*E22+(B5/B3)	=3*E22+2*F22
23					20	=(-B2/B3)*E23+(B5/B3)	=3*E23+2*F23
24					21	=(-B2/B3)*E24+(B5/B3)	=3*E24+2*F24
25					22	=(-B2/B3)*E25+(B5/B3)	=3*E25+2*F25

Técnica de E4, hoja de cálculo como herramienta para hacer operaciones

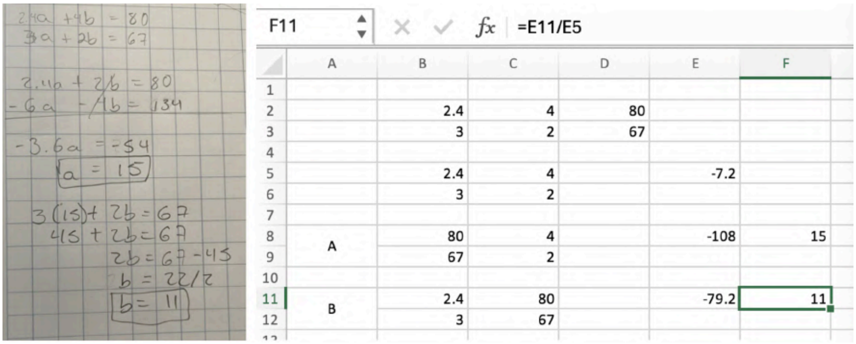
La técnica de E4 consistió en identificar los datos, construir el sistema de ecuaciones en su cuaderno y resolverlo mediante el método de eliminación (Figura 7, izquierda). Posteriormente, usó la hoja de cálculo y escribió nuevamente los datos mediante un acomodo que permitiera resolver el problema usando determinantes. En las celdas E5, E8, E11 (Figura 7, derecha) escribió las fórmulas =MDETERM(B5:C6), =MDETERM(B8:C9), =MDETERM(B11:C12), respectivamente. En las celdas F8 y F11 escribió =E8/E5, =E11/E5, respectivamente.

El estudiante de posgrado E4 mostró un trabajo de rutina en lápiz y papel, reflejando su experiencia como profesor que enseña este tema, como él mismo expresó. A continuación, se describe el razonamiento que llevó a cabo para resolver el problema.

Estudiante 4: *Lo resolví por sistemas de ecuaciones. Ya que me dio los valores, pues dije, ah ya sé, lo más fácil: determinantes. Es decir, ya que resolví en papel, me fui a Excel y resolví por determinantes.*

Figura 7

Técnica de E4 para resolver el PROBLEMA 1



F11 =E11/E5

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2.4	4	80		
3		3	2	67		
4						
5		2.4	4		-7.2	
6		3	2			
7						
8	A	80	4		-108	15
9		67	2			
10						
11	B	2.4	80		-79.2	11
12		3	67			

El potencial de las técnicas usadas por los estudiantes de posgrado

En el proceso de resolución del PROBLEMA 1, se observó una diversidad de técnicas. Estas técnicas tienen un valor pragmático y epistémico, ya que ayudan a resolver el problema y a atribuir significados a los objetos matemáticos tales como variable, variación, ecuación, incógnita, solución y todos ellos asociados al objeto sistema de ecuaciones lineales.

E1 planteó una técnica basada en suponer una posible solución para una de las incógnitas (columna M) y, en encontrar el valor de la otra incógnita para satisfacer las dos condiciones identificadas. En particular, usó la estrategia de hacer cero una de las incógnitas para entender las relaciones entre incógnitas y datos. Esta técnica tiene un valor pragmático en el sentido de que se considera útil para que los estudiantes que aún no desarrollan un pensamiento algebraico resuelvan el problema sin tantas dificultades. Un profesor puede promoverla para ayudar a los estudiantes a identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos, y así acercarlos a conceptos como variable y variación, relacionados con el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Por otra parte, de acuerdo con Wilson et al. (2005) el uso de una columna como variable (M en este caso) tiene potencial en el desarrollo del significado de variable cuando se está aprendiendo o enseñando álgebra mediante la hoja de cálculo. En este sentido, esta técnica tiene valor epistémico para el aprendizaje del álgebra.

E2 propuso una técnica basada en considerar ambas incógnitas del problema como variables, además las etiquetó como A y B. Esta técnica de acuerdo con Vargas y Guzmán (2007a, 2007b), Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012) y Wilson et al. (2005), tiene un fuerte valor epistémico ya que "puede apoyar de manera potencial el desarrollo de un sentido más claro de la notación como variable" (Wilson et al., 2005, p. 327). La técnica usada por E2 puede promoverla un profesor para ayudar a los estudiantes a identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos, y así acercarlos a conceptos como variable y variación, relacionados con el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando un alumno usa esta técnica de "celdas como variables", indica que su pensamiento está cercano al algebraico.

E3 y *E4* propusieron técnicas basadas en su trabajo previo en lápiz y papel. Esto coincide con lo señalado por Haspekian y Kieran (2023) en tanto que cuando se tiene al ambiente de lápiz y papel como un entorno referencial de aprendizaje de las matemáticas, los profesores buscan integrar las herramientas de tal manera que se mantengan las características convencionales, en este caso, del álgebra.

Las técnicas de *E3* y *E4* fueron pragmáticas en el sentido de que los estudiantes buscaron complementar sus procedimientos, ya realizados con otra tecnología (lápiz y papel y GeoGebra) para resolver el problema. El valor que atribuyeron a la hoja de cálculo fue la de una herramienta más, que podría sumar a los diferentes tipos de formas de resolver un problema.

El uso de diferentes procedimientos para resolver un problema tiene valor epistémico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que permite no sólo que un alumno pueda autoevaluar soluciones, sino también que encuentre un camino más corto o elegante. Un profesor puede aprovechar el uso de diferentes técnicas por sus estudiantes al permitir que las expongan y discutan en el grupo para apoyar la comprensión de algún objeto matemático y los conceptos asociados. Esto último, en términos de Lesh y Doerr (2003) equivale a decir que los significados están distribuidos en las distintas representaciones y es importante que los estudiantes tengan la experiencia de transitar entre ellas.

El potencial y las limitantes del uso de la hoja de cálculo, según los estudiantes de posgrado

Al presentar sus técnicas al grupo (fase 3 de la implementación), los estudiantes de posgrado describieron la experiencia que enfrentaron al utilizar la hoja de cálculo, ya que era la primera vez que la utilizaban. El siguiente extracto muestra parte de la conversación.

Estudiante 4: *Yo me fui a lo más rápido. Lo más rápido y lo más sencillo fue usar álgebra. Claro, a lo mejor para alguien no va a ser sencillo.*

Maestra: *¿Recurriste a lo que ya sabes, cierto?*

Estudiante 4: *Sí*

Estudiante 3: *Sí. Si a mí no me hubieran dicho usa Excel, yo no hubiera usado Excel.*

Estudiante 2: *De hecho.*

Estudiante 1: *Yo estoy acostumbrado a que cuando vemos un problema, decimos se puede solucionar así, así y así…*

Otro comentario que emergió sobre las técnicas fue el siguiente

Estudiante 1: *Creo que ninguno de nosotros tenemos experiencia resolviendo problemas con Excel. Tampoco sé si Excel sea la mejor forma.*

Esto llevó a la profesora a discutir (fase 4 de la implementación) con los estudiantes de posgrado el potencial de la hoja de cálculo en cada una de sus técnicas a la luz de distintas investigaciones (Rojano & Sutherland, 2000; Vargas-Alejo & Guzmán-Hernández, 2012; Wilson et al., 2005) relacionadas con el uso de la hoja de cálculo en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Además, les mostró la evolución de técnicas mediante el uso de la hoja de cálculo desarrolladas por estudiantes de bachillerato para resolver el PROBLEMA 1 (Vargas & Guzmán, 2007a), destacando cómo ciertas técnicas ayudaban a los estudiantes a discutir sobre diversos conceptos matemáticos tales como variable, variación, ecuación, incógnita, función, solución y sistema de ecuaciones lineales a través del uso de celdas y columnas variable, así como fórmulas.

Durante la sesión, (fase 5 de la implementación) revisaron varias técnicas. Una de estas técnicas se muestra en la Figura 8. Esta técnica fue utilizada al final del proceso de solución del PROBLEMA 1. También fue utilizada durante una entrevista, en la cual al PROBLEMA 1 se le habían cambiado las cantidades 80 y 67 por 2340 y 1575.

Figura 8

Técnica en hoja de cálculo llevado a cabo por los estudiantes de bachillerato para abordar el PROBLEMA 1

C5 fx =A5*3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	#de objetos A	kg de objetoA	hrs.objetoA	# objeto B	kg objeto B	hrs.objeto B	suma de kg	suma de hrs
2	225	540	675	450	1800	900	2340	1575
3	95	228	285	201	804	402	1032	687
4	15	36	45	17	68	34	104	79
5	20	48	60	18	72	36	120	96
24	115	276	345	37	148	74	424	419
25	120	288	360	38	152	76	440	436
26	125	300	375	39	156	78	456	453
27	130	312	390	40	160	80	472	470
28								
29								
30	a	2.4a	3a	b	4b	2b	2.4a+4b	3a+2b
31							2340	1575

Nota: Técnica utilizada en bachillerato. Adaptada de Vargas y Guzmán (2007a).

Los estudiantes de posgrado observaron cómo los estudiantes de bachillerato ordenaron la información y el tipo de fórmulas utilizadas (Figura 9). Revisaron el potencial de la técnica en términos del manejo de conceptos asociados al objeto matemático *sistemas de ecuaciones lineales*.

Figura 9

Valores y fórmulas recursivas utilizadas por los estudiantes de bachillerato al abordar el PROBLEMA 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	#de objetos A	kg de objetoA	hrs.objetoA	# objeto B	kg objeto B	hrs.objeto B	suma de kg	suma de hrs
2	225	=A2*2.4	=A2*3	450	=D2*4	=D2*2	=B2+E2	=C2+F2
3	95	=A3*2.4	=A3*3	201	=D3*4	=D3*2	=B3+E3	=C3+F3
4	15	=A4*2.4	=A4*3	17	=D4*4	=D4*2	=B4+E4	=C4+F4
5	=A4+5	=A5*2.4	=A5*3	=D4+1	=D5*4	=D5*2	=B5+E5	=C5+F5
6	=A5+5	=A6*2.4	=A6*3	=D5+1	=D6*4	=D6*2	=B6+E6	=C6+F6
17	=A16+5	=A17*2.4	=A17*3	=D16+1	=D17*4	=D17*2	=B17+E17	=C17+F17
18	=A17+5	=A18*2.4	=A18*3	=D17+1	=D18*4	=D18*2	=B18+E18	=C18+F18
19	=A18+5	=A19*2.4	=A19*3	=D18+1	=D19*4	=D19*2	=B19+E19	=C19+F19
20	=A19+5	=A20*2.4	=A20*3	=D19+1	=D20*4	=D20*2	=B20+E20	=C20+F20
21	=A20+5	=A21*2.4	=A21*3	=D20+1	=D21*4	=D21*2	=B21+E21	=C21+F21
22	=A21+5	=A22*2.4	=A22*3	=D21+1	=D22*4	=D22*2	=B22+E22	=C22+F22
23	=A22+5	=A23*2.4	=A23*3	=D22+1	=D23*4	=D23*2	=B23+E23	=C23+F23
24	=A23+5	=A24*2.4	=A24*3	=D23+1	=D24*4	=D24*2	=B24+E24	=C24+F24
25	=A24+5	=A25*2.4	=A25*3	=D24+1	=D25*4	=D25*2	=B25+E25	=C25+F25
26	=A25+5	=A26*2.4	=A26*3	=D25+1	=D26*4	=D26*2	=B26+E26	=C26+F26
27	=A26+5	=A27*2.4	=A27*3	=D26+1	=D27*4	=D27*2	=B27+E27	=C27+F27
28								
29								
30	a	2.4a	3a	b	4b	2b	2.4a+4b	3a+2b
31							2340	1575

Nota: Técnica utilizada en bachillerato (Vargas & Guzmán, 2007a)

Se dieron cuenta de lo que Haspekian (2005) señala en la literatura de investigación, que, con la hoja de cálculo, estos conceptos se pueden tratar de manera dinámica en contraste con el ambiente de lápiz y papel donde su existencia está limitada a algo estático. Además, observaron cómo a través de esta herramienta los alumnos tuvieron la posibilidad de enfrentarse al significado de variable mediante el acceso a *celdas variables o columnas variables* al construir tablas numéricas donde se pueden generalizar cálculos numéricos mediante la escritura de fórmulas que sintetizan relaciones entre conjuntos de datos (relaciones funcionales).

Por otra parte, notaron cómo a partir de esta técnica podía derivarse la escritura del sistema de ecuaciones lineales en forma algebraica (fila 30, Figura 8). Los estudiantes de posgrado revisaron cómo los estudiantes de bachillerato, con el apoyo del docente mediante preguntas, no solo pudieron escribir el sistema de ecuaciones lineales, sino también resolverlo. El cambio de las cantidades 80 y 67 por 2340 y 1575 había permitido que los estudiantes tuvieran que enfrentarse a un proceso extenuante de ensayo numérico fomentado con el fin de promover la necesidad o importancia de mostrar el potencial de la hoja de cálculo y de manera simultánea el de otras técnicas como la algebraica.

En la Figura 10 se presenta el método utilizado para resolver el sistema de ecuaciones lineales. La solución (225, 450), fue comprobada por los estudiantes de bachillerato en la hoja de cálculo (fila 2, Figura 8).

Figura 9

Procedimiento llevado a cabo por el estudiante de bachillerato para resolver el PROBLEMA 1 durante la entrevista

$$\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{l} 2.4a + 4b = 2340 \\ -2\,(3a + 2b = 1575) \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.4a + \cancel{4b} = 2340 \\ -6a - \cancel{4b} = -3150 \\ \hline -3.6a = -810 \\ +a = \dfrac{-810}{-3.6} \\ a = 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a + 2b = 1575 \\ 3(225) + 2b = 1575 \\ 2b = 1575 - 675 \\ 2b = 900 \\ b = \dfrac{900}{2} \\ b = 450 \end{array}$$

Nota: Método utilizado en bachillerato (Vargas & Guzmán, 2007a)

Al final de la sesión (fase 6 de la implementación), los estudiantes de posgrado expresaron lo siguiente.

Estudiante 2: *De no habernos dicho háganlo con Excel, todos lo hubiéramos resuelto directo, ¿no? Entonces,* [el uso de Excel] *te genera más aprendizaje, y más al momento de bajarnos al nivel de ellos* [de los estudiantes de bachillerato], *pues apenas están experimentando, están viendo para qué sirve, cómo funciona.*

Estudiante 3: *Nunca se me había ocurrido usar Excel. Yo siempre uso GeoGebra… Hay que pensar en esas herramientas no como para que faciliten llegar a la respuesta, sino que faciliten entender el concepto. No tanto la respuesta, sino el concepto matemático que está detrás del problema.*

Estudiante 1: *Creo que conocer nuevas formas de resolver un problema a veces no siempre significa que sean mejores o peores, simplemente es saber más caminos y yo creo que eso también es muy importante.*

Estudiante 4: *Cada quien vemos de manera diferente un problema… y me gustó la diversidad de cómo vemos las cosas.*

En el comentario del estudiante 2 se destaca que los estudiantes de posgrado carecían de experiencia para resolver problemas utilizando la hoja de cálculo, es decir, nunca habían usado esta herramienta con ese propósito durante su formación matemática. Este desconocimiento coincide con la idea de que "entre los ambientes de trabajo matemático, el ambiente de lápiz y papel desempeña un rol referencial único para los profesores e instituciones" (Haspekian & Kieran, 2023, p. 4). A pesar de ello el estudiante 2 optó por explorar cómo abordar el PROBLEMA 1 con esta herramienta. La discusión de su técnica con sus compañeros y la docente lo hizo observar que la hoja de cálculo tenía potencial para propiciar un tipo de aprendizaje distinto al tradicional. Esto lo llevó a reflexionar que, si se utilizara Excel en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes de bachillerato, podría fomentar otros tipos de aprendizajes importantes y poco convencionales.

En el comentario del estudiante 3, se resalta la idea de que logró comprender mejor cómo las técnicas construidas con diversas herramientas, como la hoja de cálculo y GeoGebra, deben ayudar a entender los conceptos involucrados en los problemas y no solo limitarse a encontrar una respuesta rápida. En particular, encontró que la herramienta tenía el potencial de apoyar el entendimiento de conceptos asociados a sistemas de ecuaciones lineales como: incógnita, variación, ecuación y solución. Esto refleja un cambio en sus creencias y percepciones sobre la tecnología y su conocimiento pedagógico, aspectos importantes para que los docentes encuentren motivos para fomentar la integración de herramientas como la hoja de cálculo en el aula (Haspekian & Kieran, 2023). Por otro lado, en los comentarios de los estudiantes 1 y 4, se destaca la importancia del surgimiento de diferentes técnicas y, por ende, su potencial para entender mejor algún objeto matemático.

Sin duda, en los comentarios se observan diversas conceptualizaciones sobre por qué usar la hoja de cálculo para resolver problemas, cada estudiante le dio un significado distinto según su conocimiento y experiencia. Sin embargo, todos coincidieron en que la hoja de cálculo tiene potencial para fomentar un aprendizaje diferente a lo convencional al resolver un problema donde subyace un sistema de ecuaciones lineales.

Conclusiones

La respuesta a la pregunta de investigación planteada, sobre cómo un grupo de futuros profesores resuelve un problema utilizando una hoja de cálculo y qué potencial le atribuyen a su uso para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, se detalló exhaustivamente en la sección anterior de resultados y discusión. Los estudiantes de posgrado (futuros profesores) realizaron trabajo de rutina al organizar datos, incógnitas, relaciones y, por ende, buscar reconocer la estructura del problema. Uno de los estudiantes empleó la técnica hoja de cálculo como herramienta para hacer operaciones, previa ejecución de procedimientos en papel y lápiz. Por otro lado, otro estudiante de posgrado ejecutó la técnica integración de diferentes herramientas realizando pasos en papel y lápiz antes de utilizar GeoGebra, y luego la hoja de cálculo. Finalmente, los otros dos estudiantes llevaron a cabo directamente sus procedimientos en la hoja de cálculo, utilizando técnicas como: sintetizando relaciones en la hoja de cálculo y celda como variables.

El surgimiento de una diversidad de técnicas fue importante ya que permitió a los estudiantes de posgrado analizar, en discusiones grupales, el potencial de cada una de ellas y compararlas con las descritas en la literatura de investigación. Los estudiantes reconocieron que su dificultad inicial para comprender por qué debían abordar el problema utilizando Excel en lugar de resolverlo con lápiz y papel se debía a la falta de experiencias previas que les permitieran apreciar cómo la hoja de cálculo podía ofrecer significados algebraicos diferentes; particularmente, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en comparación con los métodos tradicionales. Esta observación los llevó a valorar las técnicas asociadas al ensayo numérico y, por lo tanto, el uso de la hoja de cálculo.

La hoja de cálculo, si bien no se creó con un propósito educativo, actualmente sigue siendo considerada como una herramienta cognitiva que se puede proponer para la enseñanza del álgebra, ya que es de fácil acceso para profesores y estudiantes, y puede apoyar el aprendizaje del álgebra como aritmética generalizada. Los estudiantes, tal como se describe en los resultados mostrados en este documento y en la literatura de investigación, pueden lograr interaccionar con "objetos simbólicos" (por ejemplo, = B1 + B3) al resolver los problemas en ambiente de hoja de cálculo.

Agradecimientos

Reconocimiento al apoyo otorgado por CONAHCYT a través de las becas de posgrado.

Referencias

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(3), 191–215.

Angel. A., Figueras, O., & Valenzuela-García, C. (2023). Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 97–122). SOMIDEM Editorial. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-04

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274.

Bednarz, N., Guzmán, J., & Hitt, F. (2003, unpublished). *Une analyse des problemes en algebre impliquant des taux*. Documento de trabajo.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 115–136). Springer.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From Arithmetic to Algebraic Thinking by Using a Spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191–208). Springer.

Drier, H. S. (2001). Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. *School science and mathematics, 101*(4), 170–179. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18020.x

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education 2* (pp. 337–344). PME.

Haspekian, A. (2005). An "Instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109–141.

Haspekian, M., & Kieran, C. (2023). Teachers' challenges in integrating technology in mathematics teaching through the lens of the instrumental distance concept. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 2694–2701). Eötvös Loránd University of Budapest – ERME. https://hal.science/hal-04410780/document

Hoyles, C., Kieran, C., Rojano, T., Sacristan, A. I., & Trigueros, M. (2020). Reflections on digital technologies in mathematics education across cultures. En A. I. Sacristan, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 69–92). PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (pp. 11–50). Sense Publishers.

Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*(1), 1–30.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Roudledge.

Mochón, S., Rojano, T., & Ursini, S. (2000). *Matemáticas con la hoja de cálculo. Enseñanza de las matemáticas con Tecnología*. SEP.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NTCM.

Rojano, T., & Sutherland, R. (1993). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi, & L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 189–196). PME.

Sampieri, R., Fernández, C., & Lucio, M. D. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). McGraw-Hill.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. SEP. https://bit.ly/3Cbb1dC

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. SEP. https://bit.ly/3CcbxYY

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353–383.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a Spreadsheet based environment. En M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 423–430). PME

Tabach, M., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2006). Constructing and consolidating of algebraic knowledge within dyadic processes: a case study. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 235–258.

Vargas, V., & Guzmán, J. (2007a). Potencial de la Hoja Electrónica de Cálculo en la solución de problemas algebraicos verbales. En E. Mancera, & C. A. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1–11). Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V.

Vargas, V., & Guzmán, J. (2007b). Processes of symbolization derived in the use of Spreadsheet. En T. Lamberg, & L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 171–178). PME-NA.

Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 89–107.

Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 321–328). PME.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: design and methods, applied social research methods series*. Sage.

“Tendencias en la educación matemática 2024", con la edición a cargo de Estela Juárez-Ruiz y Lidia Aurora Hernández Rebollar, fue publicado en formato digital PDF por Editorial de Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. La publicación tuvo lugar en la Ciudad de México en el año 2024.

SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación
y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.

9 786075 981949

La presente obra surge como testimonio del esfuerzo colectivo en el X Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación" (TEMBI 10), celebrado en noviembre de 2023. Las investigaciones aquí reunidas reflejan perspectivas actuales sobre el aprendizaje de las matemáticas, enfocadas en la creatividad, comprensión conceptual, desarrollo de modelos mentales y el papel de las herramientas tecnológicas. Esta edición aspira a contribuir al diálogo continuo en la educación matemática, fortaleciendo el vínculo entre la teoría y la práctica educativa.

Estela de Lourdes Juárez Ruiz es Doctora en Ciencias Matemáticas; profesora-investigadora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; miembro del cuerpo académico "Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática"; pertenece al Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras

Lidia Aurora Hernández Rebollar es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); profesora de tiempo completo y, actualmente, coordinadora del Posgrado en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras.