

TENDENCIAS en la educación MATEMÁTICA 2023



Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Apolo Castañeda
(Editores)

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.



TENDENCIAS en la educación MATEMÁTICA 2023



SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.

Tendencias en la Educación Matemática 2023

Editores:

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Apolo Castañeda
Instituto Politécnico Nacional

Autores:

Luis García Ortega
Carlos Alberto Lugo Lugo
Erika García Torres
Santiago Alonso Palmas Pérez
Wilmer Ríos-Cuesta
Leticia Sosa Guerrero
Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Karen Velasco Restrepo
José Gabriel Sánchez Ruíz
Martha Patricia Velasco Romero
Josip Slisko Ignjatov
Francisco Agustín Zúñiga Coronel



Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.

Cada capítulo de este libro ha pasado por un riguroso proceso de evaluación para su publicación, implementando el sistema de dictaminación de doble ciego. Este método consiste en que tanto los autores como los revisores permanecen en anonimato durante todo el proceso, garantizando así una evaluación objetiva basada únicamente en la calidad y el mérito del contenido presentado. La evaluación fue realizada por académicos especialistas en cada uno de los temas abordados, quienes con su amplia experiencia y conocimientos contribuyeron a enriquecer y validar el contenido. Esta rigurosa práctica cumple con los estándares de transparencia editorial y ética, asegurando la integridad de los procesos y el valor académico de los trabajos publicados.



Esta obra es una publicación de acceso libre y está sujeta a los lineamientos de la Licencia Internacional Creative Commons Attribution 4.0. Esta licencia autoriza el uso, intercambio, adaptación, distribución y transmisión del material en cualquier medio o formato, siempre y cuando se otorgue el debido crédito al autor original, citando tanto su origen como la fuente del material gráfico.

Comité editorial

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación
Matemática A. C.

María García González
Universidad Autónoma de Guerrero
<https://orcid.org/0000-0001-7088-1075>

Ernesto A. Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
<https://orcid.org/0000-0002-8995-7962>

Mario Sánchez Aguilar
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-1391-9388>

Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0001-7897-7223>

Yolanda Chávez Ruíz
Escuela Normal de Rincón de Romos, Aguascalientes
<https://orcid.org/0000-0003-0955-4803>

Carlos Valenzuela García
Universidad de Guadalajara
<https://orcid.org/0000-0002-0776-5757>

Apolo Castañeda Alonso
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-7284-8081>

Comité Científico Revisor

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0002-2857-0772>

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0003-0658-4396>

Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez
<https://orcid.org/0000-0002-3595-8281>

Darly Alina Kú Euán
Universidad de Zacatecas
<https://orcid.org/0009-0009-3259-265>

Eduardo Carlos Briceño Solís
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0002-7706-0779>

Erika García Torres
Universidad Autónoma de Querétaro
<https://orcid.org/0000-0003-1764-7380>

Apolo Castañeda Alonso
Instituto Politécnico Nacional
<https://orcid.org/0000-0002-7284-8081>

Eugenio Lizarde Flores
Escuela Normal Rural Gral. Matías Ramos
Santos, San Marcos, Loreto, Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0001-8387-5651>

Francisco Javier Diez Palomar
Universidad de Barcelona
<https://orcid.org/0000-0003-4447-1595>

Gabriela Buendía Ábalos
Red de Centros de Investigación en
Matemática Educativa
<https://orcid.org/0000-0002-9456-4469>

Jesús Antonio Larios Trejo
Universidad de Colima
<https://orcid.org/0000-0002-2207-003X>

José del Carmen Orozco Santiago
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0001-9005-0658>

José Gabriel Sánchez Ruiz
Universidad Nacional Autónoma de México
Campus Zaragoza
<https://orcid.org/0000-0002-4306-1431>

Judith Alejandra Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas
<https://orcid.org/0000-0003-0569-2037>

Landy Elena Sosa Moguel
Universidad Autónoma de Yucatán
<https://orcid.org/0000-0002-8771-0800>

Leidy Hernández Mesa
Universidad Autónoma de Baja California
<https://orcid.org/0000-0001-9955-7199>

Ana María Martínez Blancarte
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
(BENM) Cd. de México
<https://orcid.org/0000-0002-2089-7834>

Marleny Hernández Escobar
Escuela Normal Superior de México (ENSM)
<https://orcid.org/0000-0002-0080-1436>

María Trigueros Gaisman
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0001-7527-6704>

Título: Tendencias en la Educación Matemática 2023

Primera Edición, 2023 / Editorial SOMIDEM

Clasificación DEWEY. Materia: 001.4 – Investigación. Tipo de Contenido:
Ciencia y tecnología.

Clasificación thema: JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes.
Tipo de soporte: libro digital descargable

ISBN: 978-607-98263-2-1

DOI de la obra completa: <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01>

Editorial SOMIDEM

Calle Adolfo Prieto

Colonia Del Valle

C.P. 03100, Alcaldía Benito Juárez

Ciudad de México

Correo electrónico: editorialsomidem@gmail.com

Sitio de internet: <http://editorialsomidem.org.mx/>

Registrado ante INDAUTOR como entidad editora: MID131003

Corrección de estilo y diseño editorial: Ingrid Eleonor Castañeda González
ingrideleonor@gmail.com

Diseño de portada: Miguel Ángel González Polo
titoguels@gmail.com

Cita de la obra completa en APA 7:

Juárez Ruiz, E. L., Hernández Rebollar, L. A., & Castañeda, A. (Ed.). (2023).

Tendencias en la Educación Matemática 2023. SOMIDEM Editorial.

<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01>

Índice

Presentación	11
--------------------	----

PRIMERA TENDENCIA

INVESTIGACIONES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: SU CONOCIMIENTO Y SUS CREENCIAS

Los profesores de matemáticas: sus creencias, conocimientos y cambios en el proceso didáctico <i>Luis García Ortega</i>	15
La naturaleza de las matemáticas: creencias de profesores en formación de una entidad federativa de México <i>Karen Velasco Restrepo y José Gabriel Sánchez Ruiz</i>	35
El profesor de matemáticas y su conocimiento especializado: algunas de sus reflexiones <i>Leticia Sosa Guerrero</i>	49
Argumentación en clase de matemáticas mediante la articulación de registros semióticos en el diseño de tareas <i>Wilmer Ríos-Cuesta</i>	67

SEGUNDA TENDENCIA

ANÁLISIS DE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Análisis de tres problemas de probabilidad utilizados
en la investigación

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez 91

Las consideraciones realistas en el problema de las cuerdas: la influencia de
la formulación

Martha Patricia Velasco Romero y Josip Slisko Ignjatov 113

TERCERA TENDENCIA

ACTIVIDADES INNOVADORAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a
través del uso de micromundos

Carlos Alberto Lugo Lugo, Erika García Torres y

Santiago Alonso Palmas Pérez 135

Un acercamiento al estudio del cambio y la variación en
la ejecución de una melodía

Francisco Agustín Zúñiga Coronel 157

Presentación

Estimado lector,

La educación matemática es un campo en pleno desarrollo científico, y algunas de las tendencias en investigación en las que la comunidad de esta disciplina está interesada actualmente se presentan en este libro. Este se compone por un conjunto de trabajos que fueron expuestos en el Taller “Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 9), en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana”, realizado en noviembre de 2022. Estos trabajos pasaron por una revisión doble ciego, llevada a cabo por un conjunto de expertos en educación matemática.

Hemos identificado tres tendencias en investigación, la primera es acerca de investigaciones sobre el profesor de matemáticas en dos vertientes: su conocimiento y sus creencias, con cuatro trabajos; la segunda es referente al análisis de la formulación de los problemas de matemáticas, con dos trabajos; y, finalmente, la tercera versa en actividades innovadoras para el desarrollo del pensamiento matemático, con dos trabajos también. A continuación detallamos cada una de ellas.

Con respecto a la primera tendencia, específicamente acerca de las creencias del profesor de matemáticas, el primer capítulo aborda desde un enfoque constructivista la relación entre las creencias y la práctica didáctica como un proceso complejo de elementos objetivos y subjetivos; se considera, por una parte, el análisis de las nociones de creencias desde lo epistemológico y lo psicológico, hacia la noción de creencia didáctica; y por la otra, la práctica didáctica que da fundamento a la proposición del acto didáctico como unidad de reflexión crítica y factor de cambio de las creencias. El segundo trabajo estudia cómo las creencias sobre las matemáticas, la evaluación y los procesos de enseñanza y aprendizaje influyen significativamente en lo que se enseña en el aula y cómo se enseña. Ambos estudios de corte cualitativo.

Con respecto al segundo aspecto, referente al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el tercer trabajo aborda algunas reflexiones de profesores, quienes después de conocer el modelo MTSK (Mathematics Teacher Specialized Knowledge), diseñan una planeación de clase, la implementan en el aula y luego realizan un autoanálisis para proponer mejoras, esto con el propósito de mejorar su práctica docente. El cuarto capítulo ejemplifica la creación de problemas por variación para el diseño de tareas como una oportunidad para que los profesores de matemáticas desarrollen su comprensión de los objetos matemáticos e identifiquen oportunidades de argumentación al establecer conexiones intra y extramatemáticas.

La segunda tendencia de las investigaciones en este libro, referente a la resolución de problemas de matemáticas, es una línea de investigación que abarca diversos temas. No solo se estudian las estrategias para resolverlos, sino también las características que definen a un buen problema. Esta sección está compuesta por dos investigaciones que analizan la formulación o reformulación de problemas de matemáticas. La primera analiza tres problemas que se han usado en varios estudios del razonamiento probabilístico de los estudiantes y discute la viabilidad de su uso en la enseñanza de los conceptos involucrados en dichos problemas. En particular, el autor recomienda el uso de la tecnología para facilitar el tratamiento didáctico de estos problemas en el aula, ya que los conceptos involucrados, como incertidumbre, aleatoriedad y variación, tienen un alto grado de dificultad. Como resultado de su análisis concluye que trabajar con los problemas de investigación abre la posibilidad de abordar conceptos como distribución, distribución muestral y significación estadística, al menos, de manera informal.

En la segunda investigación de esta tendencia se analiza cómo influye el cambio en la formulación de un problema y en las consideraciones realistas que deben hacer los estudiantes para resolverlo. El cambio en el problema consistió en agregar la frase “Imagina que...” con la intención de que el resolutor se sienta parte del problema, situación que en la literatura se conoce como “experimentador inmerso”. Es interesante que el reporte de respuestas correctas e incorrectas no arrojaron diferencias estadísticamente significativas, pero que, al analizar el proceso de resolución, los argumentos y los dibujos, sí se identificó una mayor cantidad de elementos o consideraciones realistas en las respuestas correctas del problema reformulado.

En la última tendencia identificada se reportan dos investigaciones que ilustran la aplicación de métodos innovadores para desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes de distintos niveles educativos. El primer estudio, “El razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos”, expone cómo la incorporación de herramientas digitales puede potenciar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, en particular, en el ámbito de la proporcionalidad. Por otro

lado, “Argumentos variacionales de estudiantes de ingeniería en la ejecución de una melodía” entrelaza la música con la matemática para entender la naturaleza variacional del pensamiento estudiantil. Ambos trabajos no solo destacan la importancia de los planteamientos didácticos innovadores, sino que también proponen un enriquecido debate sobre cómo diseñar y rediseñar prácticas educativas que respondan a las demandas del siglo XXI.

Esperamos que los resultados de investigación que aquí se presentan sean de mucha ayuda, tanto para su desarrollo profesional como en sus investigaciones.

El taller internacional TEMBI es organizado anualmente por el Posgrado en Educación Matemática y el Cuerpo Académico de Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México.

Estela Juárez-Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Apolo Castañeda Alonso
(Editores)

Puebla de Zaragoza, noviembre de 2023

PRIMERA TENDENCIA

INVESTIGACIONES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: SU CONOCIMIENTO Y SUS CREENCIAS

Los profesores de matemáticas: sus creencias, conocimientos y cambios en el proceso didáctico

Luis García Ortega¹

RESUMEN

El propósito de esta investigación es examinar la conceptualización de cambio en el sistema de creencias de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde un enfoque constructivista, se aborda la relación entre creencia y práctica didáctica como un proceso complejo de elementos objetivos y subjetivos, considerando, por una parte, el análisis de las nociones de creencias desde lo epistemológico y lo psicológico hacia la noción de creencia didáctica. Por otra parte, se analiza la práctica didáctica para dar fundamento a la proposición del acto didáctico como unidad de reflexión crítica y factor de cambio de las creencias. Se encontraron los factores y elementos conceptuales que contribuyen en la conceptualización de cambio de las creencias y de la práctica de enseñanza de las matemáticas, lo que puede ser útil para el diseño de alguna estrategia de desarrollo profesional y base para la reflexión colectiva de los procesos de cambio en las creencias y en la práctica de enseñanza de los profesores.

PALABRAS CLAVE

Cambios, Creencias, Conocimientos, Práctica didáctica, Profesor de matemáticas.

¹ dadyto_56@hotmail.com

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

<https://orcid.org/0009-0002-2309-8808>

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo puede considerarse como continuación de la tesis de maestría “Las opiniones de docentes y estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas” (García Ortega, 2021), cuyo objetivo general fue determinar similitudes y diferencias entre las creencias del profesor con las creencias del estudiante sobre la enseñanza de las matemáticas, en el tercer objetivo particular se trató de identificar las similitudes y diferencias entre las creencias del profesor con las del estudiante sobre la forma como se enseñan las matemáticas. En las conclusiones de este último se encontró una diferencia entre las creencias de los profesores y de los estudiantes respecto a la forma de enseñanza de las matemáticas; los profesores creen ser constructivistas en su enseñanza, mientras que los estudiantes creen que los profesores enseñan de forma procedimentalista y tecnicista.

Esta diferencia entre creencias muestra: a) que la forma de enseñanza constructivista no es la forma dominante de enseñanza de las matemáticas en las aulas, b) implica una inconsistencia entre creencia y práctica docente, c) en los conceptos de creencias, práctica de enseñanza y sus relaciones hay elementos que tienen que ver con sus cambios, ya que se encontró coherencia entre las creencias docentes con los principios pedagógicos constructivistas mandados en Planes y Programas oficiales de 2017. Lo que puede parecer como una contradicción encuentra su razón en la lógica del comportamiento relacionado con las creencias y la práctica de enseñanza, como ya veremos.

Otra conclusión destacada fue la importancia que tiene la reflexión colectiva de los profesores sobre sus creencias respecto a la enseñanza de las matemáticas, ya que contribuyen al mejoramiento de la práctica y los aprendizajes. Se toma en cuenta que las creencias y aprendizajes se dan en un sistema complejo de factores entramados, como el objeto matemático, los conocimientos, los ambientes de aprendizaje, la experiencia y la práctica docente; además que estos factores a su vez inciden en la motivación, la atención y el interés de los estudiantes por aprender matemáticas. Por último, se asumen las creencias como un proceso de cambios en el que se van abriendo y cerrando brechas que son posibles de articular.

Para que los profesores asuman una reflexión crítica es necesario contar con fundamentos para la modificación de sus creencias, lo que implica encontrar qué factores y elementos de la teoría de la conceptualización de cambio en las creencias permiten su modificación. Ante esto, nos propusimos examinar de manera general los factores y elementos conceptuales sobre cambio en las creencias que nos permiten avanzar en la reflexión crítica de estas y en su modificación, con el fin de coadyuvar a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este examen implicó, en primer lugar, un análisis exhaustivo de las diferentes nociones del concepto de creencia –el

tradicional, el epistemológico y el psicológico— para identificar conceptos que se relacionen con el cambio de creencias; en segundo lugar, analizamos el concepto de “práctica educativa”, tanto en el sentido de producto de conocimientos y creencias como en el de recurso de reflexión sobre las creencias y la práctica.

Con base en el análisis de estos dos aspectos se plantean, en forma de síntesis, los conceptos centrales que se obtienen del propio desarrollo y reflexión de las nociones de creencia y de la práctica didáctica, para proponer la noción del enfoque didáctico de las creencias y el concepto de acto educativo como unidad de reflexión y crítica para la transformación de las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. Los resultados de la investigación permitirán avanzar en la comprensión del proceso de cambio en las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas y conformar una guía para la tarea reflexivo-práctica de los maestros frente a grupo.

Este trabajo es fundamentalmente teórico, por lo que primero se delimitó el problema en relación con el objeto de estudio; después de hacer una selección de los materiales bibliográficos, se seleccionaron aquellos que se relacionan con los fines de la investigación y la fundamentan. Posteriormente, se procedió a realizar el análisis de los conceptos, categorías y aspectos centrales de la creencia y de la práctica didáctica que se sintetizan en la propuesta de “creencia didáctica” y “acto didáctico”, generalidades que dan pie para explicar el problema inicial. Esto último se realizó con la colaboración de otros tres docentes para dar mayor rigor a la investigación.

Por otro parte, el estudio debe considerarse en proceso, sobre todo en su parte práctica, pues consideramos que las propuestas que emanan de él contribuirán en la conceptualización del proceso de cambios en las creencias de los profesores de matemáticas, así como el de su práctica. Además, se trata de obtener elementos que coadyuven a generar alguna estrategia que promueva el cambio en el aula y proporcione fundamentos para la reflexión colectiva de las creencias y la práctica de enseñanza, que sin lugar a dudas se verá enriquecido con la experiencia profesional de los profesores de matemáticas. Su estructura responde a las necesidades de la investigación cuyo orden se aborda en el marco conceptual, el método, los resultados, su análisis y las conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Hace ya medio siglo que diferentes estudiosos como Price (1974); Ortega y Gasset (1976); y Villoro, (1982) pusieron de manifiesto la importancia del tema de las creencias para el conocimiento; otros, como Schön (1983), Clandinin y Connelly (1988); Brown y McIntyre (1993), destacaron su relevancia en la educación. Thompson (1992); Da Ponte (1994); Abreu et al. (1997); Ernest (1989); Shoenfeld (1998); Pehkonen y Törner (1998),

orientan el estudio de las creencias hacia la educación matemática, y más recientemente, Gómez-Chacón (2010); D'Amore y Fandiño Pinila (2004), Chaves et al. (2008); Callejo y Vila (2003); Martínez Padrón (2013); Godino et al. (2017), entre otros, se refieren al papel de las creencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estos investigadores abordan temas como la definición de creencia, sus componentes, su estructura, su función en el proceso educativo, sus cambios, las relaciones entre creencia y conocimiento, creencia y el objeto matemático, creencia y enseñanza, creencia y aprendizaje, creencia y la práctica didáctica de los profesores, la relación creencia y contenidos, con los planes y programas, su relación con factores del proceso didáctico como la planeación, la evaluación, las actividades en el aula, la motivación, los intereses y la experiencia de docentes y de estudiantes, etc. Temas que dan sostén a este trabajo y de los que abordamos los imprescindibles para la investigación; en primer lugar, la noción tradicional del concepto de creencia, en segundo momento, la creencia epistemológica o “creencias reflexivas” para pasar a la creencia psicológica, también conocida como “disposición a la acción”, y, por último, tratamos “el acto educativo”.

Creencias

La creencia tradicional

A pesar de no contar con una definición acabada sobre las creencias, hay avances importantes en su estudio, como lo destacamos arriba en los temas tan variados y profundos que están implicados en el proceso de conocimiento de las creencias. Durante este proceso podemos identificar tres momentos y tres nociones de las creencias: una tradicional, una epistemológica y la psicológica (Díez Patricio, 2017); así, reconocemos las características más comunes del enfoque tradicional como una “verdad” subjetiva, como la información que tiene una persona enlazando un objeto con algún atributo esperado; las creencias están normalmente en interrelación con una dimensión de probabilidad subjetiva (Fishbein & Ajzen, 1989). Da Ponte menciona que las creencias “no requieren consistencia interna [...] son proposiciones que no necesitan demostración”. En las creencias predominaría la elaboración, más o menos fantástica y no confrontada con la realidad empírica” (1994, p. 170), por lo que podemos decir que no son resultado de la reflexión, sino que se acercan más a la intuición inconsciente (Díez Patricio, 2017). Las creencias están determinadas socialmente, en tanto que el sujeto ya se encuentra en ellas sin haberlas meditado. Hasta cierto punto son ajenas a la voluntad del sujeto, las adopta para sí mismo porque ellas le permiten vivir y vive con ellas, le permiten comportamientos automáticos cuando las tiene en cuenta (Ortega & Gasset, 1976). Así, la “herencia cultural constituye un a priori en el modo en el que el sujeto aprende la realidad” (Berger, citado por Díez Patricio, 2017, p.129). Otro rasgo es que no son

consensuales por una falta de acuerdo sobre cómo tienen que ser evaluadas o juzgadas (Thompson, 1992). Da Ponte (1994) señala con claridad que el sistema de creencias no requiere un consenso social relativo a su validez o adecuación. Puntualiza que no podemos vivir y actuar sin creencias, y su importancia es mayor en áreas del conocimiento en las que es difícil verificarlas. Por último, mencionamos que esta noción se identifica con las creencias subconscientes de Freud, son creencias muy difíciles de modificar.

La creencia epistemológica

De acuerdo con Díez Patricio (2017), hay otros dos enfoques con los que podemos abordar a las creencias: la epistemológica y la psicológica; la segunda como “disposición a la acción” y la primera como la “creencia reflexiva”, mismas que intento resumir a continuación. Pajares (1992) menciona tres componentes de la creencia: un cognitivo, un afectivo y un componente conductual (citado por Moreno & Azcarate 2003, p. 265). La creencia reflexiva (Price, 1974), o idea según Ortega y Gasset (1976), es subjetiva porque es el sujeto quien pone los criterios de su veracidad con base en la representación mental que se hace del objeto. El conocimiento como resultado de la reflexión tiene elementos de la creencia reflexiva, por lo tanto, todo conocimiento implica una creencia que está determinada por la realidad del sujeto. Al pasar por el tamiz de la reflexión, esta creencia pasa por el momento de la duda, ya Llinares y Sánchez (1989, p. 402) caracterizaron a las creencias como generadoras de conflictos al poner en la formación del profesor la duda sobre sus ellas y su trabajo en el aula, al cuestionarse sobre el por qué creen en esa proposición y por qué no creen en otra diferente. La duda abre la posibilidad de modificar las creencias. El sujeto busca solventar esa duda, ya sea con otra creencia, con una proposición, con un conocimiento nuevo o con una verdad no asegurada que le permita vivir y llenar el vacío de la duda. La creencia como resultado de la reflexión es racional, sin que esto implique que necesariamente sea verdadera, pero está construida de manera consciente. Reflexionar la realidad es considerar una proposición comprendiéndola (Price, 1974) y considerándola junto a otras proposiciones.

El conocimiento busca la verdad, y la creencia reflexiva está ligada a la certeza con sus grados de seguridad y verosimilitud que llevan al sujeto a asentir, aceptar o adoptar una proposición. La creencia no es evidente, sino verificable, depende de afectos y dan sentido a la acción, tienen un fin (Díez Patricio, 2017). La verificación depende de diferentes criterios que el sujeto establece y que le permiten sostener los grados de seguridad y verosimilitud para construir una representación mental. Podemos decir que el sujeto toma como verdad lo que va verificando por diferentes medios, si se basa en la razón, lo que lo acerca a la comprensión. Siguiendo a Price (1974), damos como ejemplo la siguiente cuestión: Si el profesor de matemáticas considera a la forma constructivista de enseñanza junto a otras alternativas como el

formalismo, el tecnicismo o el procedimentalismo, entonces es capaz ante todo de identificar un hecho determinado, seguido de que ese hecho se relaciona de alguna manera con las diferentes alternativas o con alguna de ellas, es decir, es capaz de identificar que ese hecho se relaciona con cualquiera de las alternativas que conoce o cree conocer, con lo que da cierta certeza en que ese hecho se relaciona con una o con algunas de las alternativas. El profesor identifica un hecho, verifica que se relaciona con la forma constructivista de enseñanza y observa su efectividad como método de enseñanza lo que le permite preferir esta alternativa. Una certeza basada en razones que le aprueban preferir al constructivismo sobre las demás alternativas.

El concepto de “creencia reflexiva” es un elemento de gran importancia para la modificación de las creencias de los profesores, pues incorpora características como la duda, la comparación, la verificación y la certeza como herramientas que permiten acercarse al saber o al conocimiento que, en palabras de Da Ponte (1994), menciona que en el conocimiento más elaborado de naturaleza práctica predominarían los aspectos experienciales. En el conocimiento de naturaleza teórica predominaría la argumentación racional. La “creencia reflexiva” permite la reflexión sobre sí misma y sobre la forma que toma en actos, permite la crítica y la metacognición, es dinámica y posible de planificar.

La creencia psicológica

El análisis que realiza Díez Patricio sobre las creencias como “disposición para la acción” es singularmente importante para la reflexión sobre las creencias, veamos brevemente los rasgos más característicos de este proceso. En primera instancia es una noción psicológica, no responde al rigor lógico categóricamente hablando, ni en su estructura ni como sistema. Se entiende como “tendencia a actuar, como si aquello en lo que se cree fuera verdadero” (Díez Patricio, 2017). Si el profesor tiene la disposición de ser constructivista en su enseñanza, entonces realizará una acción acorde a su creencia, es decir, se encuentra condicionado por una creencia ya establecida, disponible y tomada como verdadera. La creencia predispone al sujeto, por lo tanto, se dispone para actuar como si esta fuese verdadera, no duda de su existencia ni de su validez. Cómo la adquirió no es importante, puede ser dada socialmente, por ser la dominante, por experiencia, por observación, porque se encuentre en ella o porque así le enseñaron, su importancia radica en que es un móvil de conducta.

De acuerdo con esta lógica, si el profesor tiene una creencia sobre la enseñanza, entonces tiene la tendencia a actuar como si su creencia fuese verdadera, pero para que se dé, necesita de ciertas circunstancias objetivas (sociales, del aula, de recursos, etc.) y subjetivas (intereses, propósitos, motivos, etc.). La creencia como disposición no son las acciones mismas, sino un

conjunto de disposiciones a la acción (Díez Patricio, 2017) que en conjunto hacen una tendencia a actuar, siempre que ciertos hechos sucedan, tendrían ciertas acciones.

Otro dato interesante es el planteamiento de los tipos de creencias que retoma Díez Patricio (2017) de Freud, quien dice que las creencias no son observables, sino que se infieren de la observación de la conducta de los individuos, como las creencias subconscientes que el sujeto no acepta como propias y las preconscientes que pueden convertirse en creencia reflexiva. Se entiende que las creencias preconscientes son susceptibles de modificarse por la vía de la reflexión, la duda o la verificación; las creencias subconscientes son más difíciles de modificar porque son casi verdades absolutas para el sujeto, además de ser generalmente creencias sociales y no cuestionables por el creyente.

Una característica de las creencias es que pueden ser sostenidas con varios grados de convicción (Thompson, 1992). Como lo vimos con la creencia reflexiva, las preconscientes, al menos, pueden tener varios grados de certeza. Por ejemplo, la creencia que las matemáticas se enseñan para el desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes (García Ortega, 2021) tiene diferentes grados de certeza, en función de la verificación que el docente realiza en su práctica, verificaciones que fortalecen su convencimiento de que, lo que realiza, es desarrollar las habilidades del pensamiento y esto lo lleva cada vez con mayor frecuencia a actuar de acuerdo con esa creencia. Así, la acción llevada por el profesor puede comprobarse y verificar que su creencia es verdadera, por tanto, la creencia se convierte en un estado mental que hace que el profesor tome conductas relacionadas con el desarrollo de las habilidades cognitivas del estudiante.

Como un último rasgo de importancia podemos destacar que las creencias son útiles para la motivación de la conducta (Díez Patricio, 2017), lo que viene a fortalecer la idea de la función que tienen en el proceso de enseñanza el aprendizaje, particularmente como catalizadores de la conducta del estudiante, ya sea en la motivación, la actitud o sobre sus intereses. El lugar que ocupan las creencias como componente especial del conocimiento, de la conducta o de las actitudes, es de gran relevancia para la enseñanza y el aprendizaje.

El Acto educativo

Las creencias deben explicarse desde sí mismas, pero también desde sus resultados y su práctica, desde un comportamiento empíricamente registrable que puede ser interpretado como sujeto de reflexión por un lado y como unidad para el análisis de la propia práctica y de las creencias. Para esto, incorporamos el concepto de acto educativo, entendido como un conjunto de acciones e interrelaciones que se establecen entre los diferentes elementos

que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en un contexto y tiempo determinado.

Como todo objeto, el acto educativo tiene sus propias características, sus elementos o componentes que, según Olivé (2007), citado por Valladares (2017), son los agentes o individuos participantes, los modos de participación en contexto, las representaciones y creencias, los fines que persiguen los participantes, el medio y entorno en que se da la práctica, los recursos y objetos que se usan para lograr los fines. La educación se entiende así, según Kemmis (2010), como un complejo de prácticas imbricadas unas con otras que se mueven en tres dimensiones: los culturales-discursivos, que permiten o limitan el discurso y la comprensión, los materiales-económicos, que permiten o limitan lo que se puede hacer, y los sociopolíticos, que permiten o limitan las relaciones en lo social (Kemmis et al., 2014).

La modificación de las creencias implica cambios en las formas de entender, en los modos de intervención y en las formas de relacionarse. Esta modificación de la práctica educativa, agrega Kemmis (2010), debe llevarse a cabo en los diferentes tipos de práctica educativa, como las de aprendizaje, las de enseñanza, las de investigación, las de dirección y gestión, las de aprendizaje profesional, etc.; las cuales también se encuentran interrelacionadas en el acto educativo que se concibe como un proceso. En este trabajo solo nos enfocamos en la relación entre las creencias de los profesores y estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, es pertinente hacer algunas precisiones.

Consideramos al acto educativo como objeto de reflexión y de transformación, como elemento integrador entre la teoría y la práctica (Nicoletti, 2006), el acto humano que busca el pleno y autentico desarrollo del otro, un acto biofílico con y por el Otro (Freire, 2011). Por otra parte, García (1993) señala que el acto educativo debe tener las condiciones de ser significativo, consciente y libre.

Con lo antes expuesto, la teoría educativa debe admitir que, como dice Carr (2006), citado por Valladares (2017), “se genera en las prácticas educativas”, y se ve a la práctica como una unidad analítica del campo de la educación y la pedagogía (Schatzki, 2012). En este contexto, el acto de enseñar “como la acción por la cual el alumno, mediante las actividades propuestas por un docente, hace propias una idea o un conjunto de ideas que no poseía previamente. En una interacción intencional y sistemática” (Nicoletti, 2006).

Las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas (tanto en su noción epistemológica como psicológica) como componente de la mente se manifiestan en el acto educativo, ya sea como planeación, interpretación de los planes y programas, en los contenidos, en las estrategias implementadas y en la evaluación, así como en los intereses del profesor, sus motivos, sus

expectativas, sus experiencias y en las acciones realizadas en el aula, es decir, se “hacen” acto de enseñanza como componente del acto didáctico. Ante esto, podemos observar que las creencias en sus diferentes nociones pueden interpretarse como momentos diferentes de un mismo proceso de comprensión y construcción de conceptos y relaciones; pueden y se constituyen como objetos de reflexión a partir de su manifestación en la conducta y el comportamiento del profesor, en el caso de la enseñanza. La modificación de las creencias debe realizarse desde su propio desarrollo y desde su práctica, lo que es posible si consideramos al acto didáctico como una unidad de reflexión colectiva en el momento y contexto en que se desenvuelven.

MÉTODO

El trabajo de investigación es de corte teórico y con un enfoque cualitativo. El recurso fundamental fue el análisis conceptual para que, en un intento de síntesis, se presente la noción de creencia didáctica y el acto didácticos como unidad de reflexión y crítica de las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. La primera tarea fue identificar la naturaleza del problema inicial, de la inconsistencia entre la creencia del profesor y la forma que realmente enseña las matemáticas en el aula; al mismo tiempo, se encontró coherencia entre sus creencias con los principios y métodos de enseñanza de las matemáticas que se plantea en los planes y programas; concluyendo que el problema se relaciona con el proceso de cambio en las creencias, se formuló la relación del problema con el objeto de estudio de la investigación. Acto seguido, se seleccionó la información suficiente en función de la pregunta y los fines de la investigación, reflexionando repetidamente sobre ellos para disminuir falsas interpretaciones.

El paso siguiente fue el análisis de las diferentes nociones de creencia y del concepto de “acto educativo” como factores del cambio en los modos de entender, de actuar y de relacionarse. Esto con el fin de identificar los elementos teóricos que permitan avanzar en la conceptualización del cambio en las creencias de los profesores de matemáticas. Se realizó un estudio, análisis y caracterización de conceptos, encontrando aspectos y elementos de cambio como la duda, la verificación, la comparación, el impulso, la tendencia, la creencia preconsciente, los elementos del acto educativo, los tipos de práctica educativa, las dimensiones del acto educativo, etc.

Todos elementos que nos permiten, en un intento de síntesis, proponer los conceptos de acto didáctico y la noción de creencia didáctica como una unidad de reflexión crítica colectiva que permita avanzar en la modificación de las creencias de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas. En la última parte se aplicaron los elementos contenidos en los resultados del estudio de tesis sobre las creencias (García Ortega, 2021); para analizar la aplicabilidad de los conceptos encontrados, y con el fin de fortalecer el rigor

y confiabilidad de la investigación, se trató la información mediante un análisis a profundidad con tres docentes.

RESULTADOS

La creencia y el acto didáctico como unidad de reflexión

Hemos visto que las creencias tradicionales son las más difíciles de modificar porque nacemos en ellas; el sujeto las asume como propias porque nos permiten vivir, no importa mucho si son verdaderas, sino su utilidad, su subjetividad es intuitiva y pragmática, no racional. La modificación de este tipo de creencia tal vez dependa más de los cambios sociales, políticos e históricos, pero presenta una posibilidad subjetiva de modificación ante nuevas informaciones.

La creencia epistemológica, por su parte, proporciona elementos básicos para la modificación de creencias porque es resultado de la reflexión, por lo tanto, racional y consciente. Pasa por el conflicto de la duda, por eso se abre a otras proposiciones y permite la comparación entre ellas, se puede preferir una proposición frente a otras en función de su verificabilidad, lo que va fortaleciendo su certeza, pues su subjetividad radica en que el sujeto pone los criterios de verificabilidad, no tanto en la intuición y su utilidad. Podemos decir que la creencia reflexiva es una creencia en movimiento.

La creencia psicológica, tendencia a actuar en función de una creencia como si esta fuera verdadera, responde a una lógica del comportamiento. Si el sujeto tiene una creencia, entonces tiene la tendencia a actuar conforme a ésta, por lo tanto, debe haber una coherencia, tanto con la persona como en con contexto, es decir, si se dan condiciones subjetivas y objetivas se tendrán las acciones esperadas. La importancia de la coherencia radica en que sienta la base para que la creencia sea objeto de reflexión y comprensión, sea objeto de verificabilidad con el fin de reorientar pensamientos y conductas, da el poder de cambiar.

En lo que se refiere al acto educativo, este nos proporciona elementos fundamentales si queremos modificar creencias y prácticas; debemos reflexionar críticamente sobre la forma en que actuamos, entendemos y nos relacionamos, y para esto se consideran las dimensiones culturales-discursivas, materiales-económicas y las socio-políticas, espacios en los que se mueven los diferentes componentes y tipos de práctica educativa, en particular la enseñanza. Estos elementos, junto a los ya comentados de las nociones de creencia, nos proporcionan los conceptos para proponer al acto didáctico como un conjunto relacionado de elementos para la reflexión crítica de las creencias y la práctica didáctica.

Por ser un objeto mental, las creencias no pueden modificarse, únicamente desde las mismas creencias porque esto es propio del conocimiento científico; tampoco se pueden modificar por consignas o decretos (como un

acto inconsciente o sacrificando la libertad). De igual forma, no es posible desde la práctica porque esa práctica es resultado de esas creencias dominantes, por lo que es necesario constituir al acto didáctico como unidad de reflexión crítica con el fin de modificar creencias y práctica.

Como hemos visto, los aportes que proporcionan las nociones de la creencia epistemológica y psicológica como procesos de la mente, como fenómeno en sí mismo, son también premisas para el estudio, de la forma que éstas se hacen acto en el aula. En este punto considero que el estudio de las creencias debe abordarse ya no solo desde la noción epistemológica y psicológica, sino desde el acto didáctico como creencia didáctica, desde el momento y espacio en el que la creencia se hace conducta, momento en que toman la forma de hecho en un contexto y momento específico, situación en que el profesor traduce sus creencias en actos según las diferentes opciones con las que cuenta y el contexto en el que se encuentra, lo que nos abre la posibilidad de inferir, a partir de sus actos, sus respuestas y su comportamiento reiterado en sus creencias, en el proceso mismo de enseñanza-aprendizaje.

Se trata de la necesidad de constituir el acto didáctico como objeto de reflexión y herramienta de estudio. Esto implica, en primer lugar, incorporar la noción de creencia didáctica como conjunto de elementos conceptuales de las creencias hechas acto que nos dan la posibilidad de la reflexión de las creencias desde ellas mismas (creencias reflexivas); además, contrastarlas entre sí y con su práctica hace posible la reflexión crítica sobre la coherencia entre la intención y el acto mismo, hace posible su verificabilidad. La creencia didáctica es el paso entre cómo creo que enseño y cómo enseño realmente, entre cómo creo que aprenden los estudiantes y cómo aprenden realmente; se ubica entre la planificación y el producto, entre el conocimiento previo y el conocimiento nuevo, implica considerar al sistema de creencias de los profesores como un proceso de cambios que pueden darse por medio de la reflexión que busque el conocimiento.

Cuando el profesor traduce en acto el qué, el para qué, el cómo y para quién de sus creencias hablamos del acto de enseñanza del profesor. Y es el momento en que el sistema de creencias se manifiesta con sus consistencias e inconsistencias, con sus aciertos y desaciertos, con sus contradicciones, y se hace presente el acto con una elección (consciente, preconsciente o inconsciente) sobre el conjunto de opciones con que cuenta el profesor, como el momento y modo que operan las creencias en el acto de enseñanza. De tal forma que podemos identificar las características de la creencia, reflexionar sobre ellas para conocerlas y modificarlas con el fin de mejorar el proceso de aprendizaje y de enseñanza. Es importante reiterar que las creencias de la enseñanza y el aprendizaje deben ser abordadas como un proceso, no como proposiciones absolutas e inamovibles, ubicadas en su contexto y momento

para considerar su “evolución” hacia formas efectivas de enseñanza, para que sean un verdadero motor de la motivación de los aprendizajes.

En segundo lugar, es necesario que el acto didáctico se constituya a la vez como unidad de análisis, como acto reflexivo en colectividad, generador de elementos para conformar un cuerpo de conceptos que permitan avanzar en la teoría y la práctica de modificación de las creencias y de la práctica de enseñanza, es decir, hacer de la práctica un ejercicio reflexivo que se oriente hacia una práctica del conocimiento. Se encamina a considerar el acto didáctico como una relación dialéctica entre teoría y práctica.

Si pretendemos cambiar un modelo educativo, hay que ir a esa célula del acto didáctico donde se reúnen los objetos didácticos, los contenidos, los recursos y medios de la enseñanza-aprendizaje, la comunicación, las estrategias, las actividades, la evaluación y la organización de estos elementos; así como el espacio donde interactúan los agentes, el objeto, los fines, el contexto donde se construye el conocimiento matemático y, junto a los elementos conceptuales encontrados, constituir la unidad de análisis crítica de nuestras creencias y práctica.

El acto reflexivo no es individual, es sobre todo colectivo, y sólo en la colectividad puede dar sus mejores frutos porque es donde surge el cuestionamiento, las precisiones, el análisis, el conocimiento que se enriquece; es un espacio de interinfluencia donde se puede crear vínculos significativos. Siempre he sostenido que los mejores pedagogos son los profesores, pero es necesario que lo asuman, que desarrollen esas capacidades, que conquisten ese espacio de belleza y científicidad que tiene la enseñanza y el aprendizaje, lo que implica dejar de verlos como operadores de un modelo o proceso.

Análisis

En el trabajo de tesis García Ortega (2021) se propuso determinar las similitudes y diferencias entre las creencias de los profesores y las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza. Entre los hallazgos está el problema inicial de esta investigación: la diferencia entre lo que el docente cree que hace en el aula y cómo el estudiante cree que le enseñan matemáticas; también se encontró coherencia entre las creencias del profesor respecto a sus propósitos al enseñar matemáticas con los fines y objetivos planteados en los Planes y Programas.

El problema que nos planteamos en esta investigación surge de la pregunta abierta a los profesores ¿qué hace para lograr lo que pretende al enseñar matemáticas? Observamos en las respuestas una distribución porcentual equitativa entre las categorías, lo que significa que el profesor cree que incorpora en su práctica todos los ámbitos, característica que se identifica con el estilo flexible y constructivista de la enseñanza. Los estudiantes, en cambio, priorizan en la pregunta sobre la forma que en general

me enseñan matemáticas al ámbito didáctico al responder que el docente resuelve varios problemas y luego pide que los alumnos resuelvan y mediante la solución de muchos ejercicios, estilos unilaterales, menos flexibles e identificados con el procedimentalismo y el tecnicismo.

Tabla 1
Comparativa entre las respuestas de estudiantes y profesores a pregunta 3

Profesores	
Pregunta 3 ¿Qué hace para lograr lo que pretende al enseñar matemáticas?	%
Desarrollo de habilidades para plantear y resolver problemas	28.2
Desarrollo capacidades para enfrentar la vida	26.8
Desarrollo el pensamiento lógico y matemático	16.9
Desarrollo actitudes positivas y críticas	16.9
Contribuyo a su integración social	11.2
Estudiantes	
Pregunta 5 La forma que en general me enseñan matemáticas	%
El docente resuelve varios problemas luego pide lo hagamos	46.8
Mediante la solución de muchos ejercicios	28
El profesor plantea problemas de la vida real	10.2
El docente deja resolver problemas de los textos	8.4
Antes de empezar la clase el docente investiga que sabemos	6.6

Las respuestas nos llevan a identificar el estilo de enseñanza que aplica el profesor en el aula. El docente cree aplicar un estilo constructivista (57.9%), pero los estudiantes consideran que lo que hace el profesor en el aula es procedimentalista (55.2%) y tecnicista (28.6%). Se identifica una diferencia significativa entre la forma explícita que manifiesta el docente y la forma implícita del estilo de enseñanza del profesor manifestada por el estudiante.

Esta diferencia entre la creencia del profesor en su forma de enseñanza con la creencia del estudiante sobre cómo le enseñan matemáticas se interpreta como una inconsistencia entre la creencia y la práctica de enseñanza del profesor.

Tabla 2

Estilo de enseñanza a partir de las respuestas obtenidas a la pregunta 3

Profesores	
Estilos de enseñanza	%
Constructivista	57.9
Procedimentalista	28.9
Tecnicista	7.9
Los tres anteriores	5.3
Estudiantes	
Estilos de enseñanza	%
Procedimentalista	55.2
Tecnicista	28.6
Constructivista	16.2

Por otra parte, encontramos correspondencia entre lo que el profesor cree que realiza en el aula con los términos delineados en los Planes y Programas de educación básica (2017), planes fundamentados en el constructivismo. Esta correspondencia se constata cuando los profesores creen que lo que hacen es desarrollar habilidades para resolver problemas, y que los problemas deben ser reales y contextualizados, junto a otros temas mencionados por ellos como la motivación, el desarrollo de capacidades y habilidades, los aprendizajes previos, el acompañamiento, buenos ambientes de aprendizaje, el trabajo colaborativo, la importancia del aprendizaje informal, la creatividad, la socialización de los aprendizajes, el manejo de procedimientos y algoritmos, entre otros. Esta situación también se observa en el modelo de enseñanza por competencias de educación media superior y superior, que busca propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes.

Esta coherencia entre las creencias del profesor y los lineamientos de los planes y programas (2017) sobre la enseñanza de las matemáticas puede parecer contradictoria con el anterior resultado de que el profesor cree que enseña con el constructivismo, pero es procedimentalista en su práctica.

A la luz de los elementos encontrados en el presente estudio se hace un análisis breve de la situación como un primer acercamiento a la aplicación de estos elementos teóricos. Siendo un asunto multifactorial y complejo, solo tomaremos algunos conceptos a manera de ejemplo. Hablemos en primera instancia del contexto, la reforma que inicia en 2006 y culmina con la implementación de los planes y programas de 2017. Nos centramos en

conceptos como “la profesionalización docente”, que traía consigo la estrategia de su implementación por medio del “Servicio Profesional Docente”, organismo que definía los mecanismos de ingreso (exámenes por oposición) y permanencia por medio de la “evaluación integral de desempeño”, “teniendo, el docente, hasta dos oportunidades de evaluación” para la permanencia. Su contenido y periodicidad la asumía el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). El proceso se inicia en 2006 con el apoyo de algunos sectores y la oposición de otros; con algunas dificultades, las autoridades finalmente imponen la reforma en 2017 a través de nutridas campañas de información por medio de cursos de actualización, reformas a planes y programas de las escuelas normales, exámenes por oposición y de desempeño y la promoción de categorías por “idoneidad”.

Las ideas nuevas de la reforma fueron tomadas por el profesor como información para aprobar un examen, el docente las adoptó como “propias”; su motivo era la incorporación o la permanencia en el sistema. Podemos decir que es resultado de la imposición, por lo tanto, es información adquirida por los docentes como parte de la estrategia de implementar una reforma. Estas nuevas ideas no son el resultado de una necesidad propia, de un interés legítimo, de una duda que induzca a la reflexión, es decir, como parte del desarrollo de sus conocimientos y creencias, no son creencias reflexivas ni son una disposición de actuar porque no se han constituido como tal. Aparecen como una proposición más, pero no son aún una creencia reflexiva, y menos un conocimiento, por lo que están lejos de una práctica reflexiva.

Respecto a la falta de coherencia entre la creencia del profesor con sus acciones en el aula, pudiera interpretarse como una información falsa que el informante nos proporciona, ya sea porque miente al contestar, porque se equivoca, o porque se autoengaña por quedar bien de manera oficial. A pesar de ello, podemos reflexionar ciertas cuestiones, por ejemplo, si la creencia del docente es que su enseñanza es constructivista y el estudiante dice que se le enseña con algoritmos y con muchos ejercicios, entonces ¿quién miente? La pregunta pudiera aparecer muy simple si no se estudia el contexto, los factores objetivos y subjetivos de la pregunta, puesto que no se trata de quién está diciendo la verdad, sino de explicar por qué el docente afirma su creencia y la contradice en la práctica, y a la vez observar si el estudiante mira con objetividad la forma de enseñanza.

Podemos decir que los docentes creen ser constructivistas sin razones fundadas o suficientes porque esa creencia no la han verificado ni por investigación, cálculo, observación, prueba-error o por ejercicios. No han verificado en su práctica cada aspecto del modelo con el fin de dar mayor certeza a la creencia de la enseñanza constructivista; tampoco las han reflexionado, ni como creencia ni como una práctica reflexiva, pero si fueron adoptadas

como información para poder permanecer o ingresar al sistema educativo, como “creencias preconscientes”. Ahora el profesor cuenta con otra alternativa, aún en forma personal y subjetiva, impropia, pero tiene la información de que hay otra alternativa. Ciertamente es que no sabe suficientemente por qué puede ser verdadera, ni qué le da mayor certeza entre las opciones sobre las creencias de enseñanza, ni cómo puede fortalecerse. No ha comprobado su eficacia, ni su eficiencia, su certeza es débil, aún hay duda de que sea verdadera. Ésta será la tarea reflexiva por realizar para modificar paulatinamente las creencias que frenan el pleno desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje, a la vez de potenciar aquellas que benefician el proceso. Evidentemente, no es tarea únicamente del profesor.

Hemos visto que las creencias constructivistas no son “creencias reflexivas” para el profesor, pero también es difícil que sean una “disposición para la acción” porque estas últimas están determinadas socialmente, actúan porque están establecidas y la sociedad no está organizada ni piensa así de manera generalizada, no es una creencia socialmente dominante. El docente no puede actuar así porque la creencia no está presente en él como disposición para actuar, está como información no verificada, entonces duda de su existencia. Tampoco tiene la tendencia a actuar como constructivista porque a él o ella no se lo enseñaron así, en consecuencia, no orienta sus acciones.

No hay coherencia entre su creencia de enseñanza y su acto didáctico, primero porque su creencia es informativa, no hay aún una coherencia subjetiva en el sujeto, pues para esto necesita el trabajo de la duda, la comparación, la reflexión y la verificación de la proposición; en seguida, también falta coherencia con su contexto porque éste no se comporta así, no existe el espacio donde esta situación de modificación de la forma de entender, de actuar y de relacionarse es aún muy débil. Hace falta verificar cada aspecto, cada elemento, cada componente del modelo como los fines de su enseñanza, sus métodos, estrategias, el qué, para qué, cómo de su enseñanza, sin menosprecio del contexto institucional y social en que se da la educación, es decir, falta hacerla una práctica reflexiva.

Es clara la importancia que tiene para la enseñanza que los docentes sometan a la reflexión sus creencias y las creencias de los estudiantes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; pero también es importante que los profesores reflexionen su práctica como maestros y sobre las razones que marcan la pauta de su actuar, y poder contrastar así lo que creen y lo que hacen en el aula con el propósito de mejorar su conocimiento y modificar aquellos elementos que obstruyen el proceso enseñanza-aprendizaje y reforzar las que lo fortalecen, entre ellas sus creencias. Por esto es necesario contar con referentes teóricos y metodológicos desde donde los docentes puedan guiar su reflexión. Comprender la estructura y la forma en que funcionan las creencias en el proceso de conocimiento del objeto

matemático, sus relaciones y cambios en la actividad diaria es necesario para tomar conciencia que esta reflexión abrirá caminos para mejorar la labor de enseñanza.

Se trata de construir una nueva forma de comprender y vivir la enseñanza de las matemáticas, y el motor principal para la modificación de las creencias es la reflexión y la práctica reflexiva. Describir y explicitar las características de las creencias que sostienen la práctica actual y las anteriores permite ir generando, por medio de la duda, la verificación y el análisis de un cambio en las representaciones para mejorar lo que se tiene, como una práctica colectiva y metacognitiva entre profesores.

Por otra parte, este cambio en la práctica docente consiste también en observar y reflexionar los rasgos del modelo constructivista de enseñanza con el propósito de su verificación o cuantificación, como la actividad del alumno en el aula, la satisfacción de sus necesidades, el desarrollo de habilidades y destrezas, la relación entre conocimiento previo y nuevo, el proponerse metas comunes, el trabajo cooperativo, estrategias reflexivas, elaboración de significados, la mediación, etc. Saber en qué medida se está trabajando con el modelo.

Desde luego que hay otros factores y otros actores en el proceso de cambios, por lo que influirá la forma en que se interpretan y adoptan los puntos aquí mencionados, esto no es tarea solo de los profesores, ni tampoco realizable en unos cuantos años, sino que requiere tiempo y buena disposición de los actores. Es importante no olvidar que para que este cambio se dé es necesario reunir ciertas condiciones subjetivas y objetivas: subjetivas como las necesidades, deseos, motivos, las propias creencias, etc.; objetivas como son las actuaciones, los hechos que verifican que es verdadera, circunstancias del salón de clase, el contexto social que se plasma en el momento en que se accionan los propósitos, los enfoques, los contenidos, los materiales, las estrategias implementadas y la evaluación.

RESULTADOS

La creencia sobre la enseñanza de las matemáticas no puede cambiar desde la creencia, ni desde el resultado práctico de la misma, sin embargo, vemos que las nociones de “creencia reflexiva” y “disposición a la acción” nos proporcionan conceptos como la duda, la comparación de proposiciones, la verificabilidad, la certeza, la coherencia entre la disposición a interactuar con el acto mismo, evidencia observable del acto didáctico. Estos elementos nos permiten la reflexión crítica para modificar creencias y la práctica, y son premisa para la propuesta del enfoque de creencia didáctica.

Cambiar las creencias y la práctica de enseñanza implica cambiar la forma en que actuamos, en que entendemos y como nos relacionamos, considerando las dimensiones culturales-discursivas, materiales-económicas

y las socio-políticas, estos espacios en los que se mueven los diferentes elementos y tipos de práctica educativa, permiten la reflexión crítica y son la premisa de la propuesta del acto didáctico como unidad de la reflexión crítica.

Para la reflexión crítica de las creencias y la práctica educativa es importante incorporar la noción de creencia didáctica y el acto didáctico como unidad de análisis colectivo y como objeto de reflexión, retomando la acción didáctica como una práctica pedagógica reflexiva, y una reflexión sobre la práctica como factores de cambio de las creencias y de la práctica de enseñanza orientada hacia el conocimiento.

Se sugiere crear espacios de reflexión crítica en las instituciones educativas en los que se apliquen los resultados obtenidos como ejes conceptuales para la reflexión y el cambio de creencias y prácticas de enseñanza.

REFERENCIAS

- Abreu, G.; Bishop A. J. & Pompeu, G. (1997). What children and teachers count as mathematics. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 233-264). Psychology Press.
- Brown, S., & McIntyre, D. (1993). *Making sense of Teaching*. Open University Press.
- Callejo, L., & Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 173-51. <https://bit.ly/3QB1bq6>
- Chaves, E., Castillo, M., & Gamboa (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3(4), 29-44. <https://bit.ly/478Prkc>
- Clandinin, D., & Connelly, F. (1988). *Teachers as curriculum planners: narratives of experience*. Teachers College Press.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinila, M. (2004). Campo de convenciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Épsilon*, 58(1), 25-43. <https://bit.ly/479zREW>
- Da Ponte, J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (Ed.), *Proceeding of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education* (pp. 169-177). University of Pavia.
- Díez Patricio, A. (2017). Más sobre la interpretación (II) Ideas y creencias. *Revista de la Asociación Española de Neuropsiquiatría*, 37(131), 127- 143. <https://bit.ly/476Vqqh>
- Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, & P. Gerdes, (Eds.), *Mathematics Education and Society* (pp. 99-101). UNESCO. <https://bit.ly/3SnDiUw>
- Freire, P. (2011). *La educación como práctica de la libertad*. Siglo XXI editores.

- García Ortega, L. (2021). *Las opiniones de docentes y estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas* (Publicación No. 20.500.12371/17714) [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. <https://bit.ly/3u0ySZi>
- García, V. (1993). *Introducción general a una pedagogía de la persona*. Rialp.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.
- Kemmis, S. (2010). Research for Praxis: Knowing doing. *Pedagogy, Culture & Society*, 18(1), 9–27. <https://doi.org/10.1080/14681360903556756>
- Kemmis, S., Wilkinson, J., Edwards-Groves, C., Hardy, I., Grootenboer, P., & Bristol, L. (2014). *Changing Practices, Changing Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-4560-47-4>
- Llinares, S. & Sánchez, V. (1989). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Revista de educación*, 290, art. 20, 389–406. <https://bit.ly/49a22Wh>
- Martínez Padrón, O. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere*, 57(17), 235–243. <https://bit.ly/49jpbFN>
- Moreno, M., & Azcarate, J. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 31–51. <https://bit.ly/3Qd7Wx0>
- Nicoletti, J. (2006). Fundamento y construcción del acto educativo. *Revista de la escuela universitaria del magisterio de Toledo*, 31(16), 257–278. <https://bit.ly/46WUXGT>
- Ortega y Gasset J. (1976). *Ideas y creencias*. Espasa-Calpe.
- Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332. <https://doi.org/10.3102/00346543062003307>
- Pehkonen, E. (1998). On the concept 'mathematical belief'. En E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities* (pp. 37–72). University of Helsinki.
- Price, H. (1974). Algunas consideraciones sobre la creencia. En P. Griffiths (Ed.). *Conocimiento y creencia* (pp. 00–00). Fondo de Cultura Económica.
- Schatzki, T., (2012). A Primer on Practices. En J. Higgs, R. Barnett, S. Billett, M. Hutchings, & F. Trede (Eds.), *Practice-Based Education* (13–26), Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-128-3_2
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. Temple Smith.

- Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Internacional Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learn*. MacMillan.
- Valladares, L. (2017). La “práctica educativa” y su relevancia como unidad de análisis ontológico, epistemológico y sociohistórico en el campo de la educación y la pedagogía. *Perfiles educativos*, 39(15).
<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2017.158.57915>
- Villoro, L. (1982). *Creer, saber y conocer México*. Siglo XXI.

La naturaleza de las matemáticas: Creencias de profesores en formación de una entidad federativa de México

Karen Velasco Restrepo ¹ y José Gabriel Sánchez Ruíz ²

RESUMEN

Las creencias sobre las matemáticas, la evaluación, y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas influyen significativamente en lo que se enseña y cómo se enseña en el aula. El propósito de este trabajo es presentar los resultados obtenidos acerca de las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas de profesores en formación del nivel de maestría de una universidad pública del estado de Puebla. Se trata de una investigación de tipo exploratorio y descriptivo de corte cualitativo, en la que se utilizó un cuestionario de preguntas abiertas, validado a través del juicio de expertos y aplicado a 30 profesores en formación. Los hallazgos sugieren una fuerte tendencia a definir las matemáticas desde dos miradas: por un lado, como una ciencia formal y exacta, y por otro, que las matemáticas están relacionadas con el entorno.

PALABRAS CLAVE

Creencias, Matemáticas, Profesores en formación.

¹ karen.velasco@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0003-2298-8171>

² josegsr@unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México - campus Zaragoza
<https://orcid.org/0000-0002-4306-1431>

INTRODUCCIÓN

Desde finales de los 70 viene consolidándose una línea de investigación relacionada con el pensamiento del profesor de matemáticas (González et al., 2015). Específicamente, en Educación Matemática existen numerosas investigaciones que abordan las creencias que tienen los profesores en formación, o en ejercicio, en los distintos niveles educativos con respecto a las matemáticas, a los procesos de enseñanza y aprendizaje, a la evaluación y al estudiante (Benarroch & Marín, 2011; Martínez, 2013; Estévez-Nenninger et al., 2014; Garritz, 2014; Donoso et al., 2016; García & Blanco, 2017; Friz et al., 2018; Castillo et al., 2018 y Martínez-Sierra et al., 2019). Estas investigaciones presentan un análisis de las creencias de los profesores y determinan las variables que influyen en ellas, así como algunos instrumentos que permitieron hacer evidentes las creencias sobre el estudiante, los procesos de enseñanza y aprendizaje, la naturaleza de las matemáticas y la evaluación.

Por ejemplo, Friz et al. (2018) analizaron y compararon las concepciones que manifiestan 50 profesores en formación del sur de Chile (50% de primer año y 50% de último año) acerca de las matemáticas, el proceso de enseñanza y aprendizaje y su utilidad en la vida, con el fin de determinar si las concepciones iniciales fueron modificadas por la formación académica recibida. Los autores reportaron que con el instrumento utilizado no fue posible constatar diferencias estadísticamente significativas, por lo tanto, sugirieron incluir entrevistas y observaciones de clase en futuras investigaciones.

Castillo et al. (2018) realizaron un estudio tipo exploratorio con un enfoque mixto con 24 profesores y con 729 estudiantes de bachillerato acerca de las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje en la clase de matemáticas. Para la recolección de los datos utilizaron entrevistas semiestructuradas y una encuesta denominada “enseñar matemáticas”, la cual se adaptó de la versión original de Gómez-Chacón et al. (2006). Entre algunas de las conclusiones que reportan está que las creencias que tienen los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas definen cómo se enseñan en el aula e influyen en las creencias de los estudiantes.

Por otro lado, Martínez-Sierra et al. (2019) desarrollaron una investigación con 18 profesores en servicio en la ciudad de Pachuca, México, con el fin de identificar sus creencias sin imponer tipologías; los datos fueron recogidos a través de entrevistas cualitativas y biográficas, y se analizaron a través de tres análisis temáticos. Entre los resultados reportados destacan que hay tres categorías para las creencias de profesores que, si bien ya habían sido identificadas en estudios anteriores, no se habían observado con profesores de nivel superior. Para estos autores, las creencias se pueden clasificar en las siguientes categorías: creencias acerca de las matemáticas, acerca del aprendizaje de las matemáticas y acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, en la revisión de la literatura realizada se encontraron dos aspectos importantes que motivan la realización de la presente investigación: el primero hace referencia a que, a pesar de que existe una extensa investigación internacional en relación con las creencias de los profesores sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, en México estos estudios no son tan numerosos y los realizados se centran en profesores de educación básica, lo que deja un campo interesante de investigación centrado en la población de profesores en formación de educación media y superior. En segundo lugar, la recolección de datos en las investigaciones realizadas sobre las creencias de profesores frecuentemente se realiza a través de un instrumento con escala tipo Likert o preguntas cerradas, por lo que en este trabajo se pretende profundizar en las creencias de los profesores en formación, recolectando los datos mediante un cuestionario de preguntas abiertas.

En ese sentido, el objetivo de este trabajo consistió en caracterizar las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas de profesores en formación de una universidad pública del estado de Puebla.

REVISIÓN DE LITERATURA

Concepto de creencia

No existe un acuerdo en la definición de creencias. Sin embargo, varios autores consideran que las creencias son verdades personales, que no se obliga a su demostración, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen un fuerte componente evaluativo, cognitivo y afectivo, y que generan respuestas y comportamientos estereotipados sin tener, en algunos casos, conciencia de ello (Chaves et al., 2008; García & Blanco, 2017; Martínez, 2013; McLeod, 1992; Pehkonen & Törner, 1999). En este trabajo se ha considerado la definición de creencias que presenta Skott (2014, 2015), quien identificó cuatro aspectos que constituyen el núcleo del concepto: en primer lugar, las creencias son usadas sobre construcciones mentales que son verdades subjetivas de cada individuo. En segundo lugar, en las creencias existe algún elemento de afecto, están cargadas de valores y se caracterizan por un cierto grado de compromiso. El tercer aspecto es que las creencias son consideradas relativamente estables, y se espera que un cambio en ella ocurra solamente como resultado de experiencias personales nuevas y relevantes. En cuarto lugar, se espera que las creencias influyan significativamente en la forma en que el individuo percibe e interpreta sus prácticas.

Creencias de profesores

Diversas investigaciones han revelado que las creencias de un individuo influyen significativamente en sus acciones y lo condicionan a actuar conforme a ellas (González et al., 2015; Martínez, 2013; Martínez, 2020 y Martínez-Sierra et al., 2019).

Específicamente, las creencias de los profesores influyen en el proceso de toma de decisiones sobre cómo ejercer su práctica docente, en la reflexión sobre los diferentes propósitos, métodos y significados de la enseñanza, y son los mejores indicadores de las decisiones que toma en su vida y en sus clases (Kagan, 1992; Calderhead, 1996, citado en Garritz, 2014; y McCombs & Whisler, 1997, citado en Estévez-Nenninger et al., 2014).

En la investigación realizada por Martínez-Sierra et al. (2019) se encontró que, en relación con las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, al preguntar a profesores en servicio sobre lo que consideran que son las matemáticas, surgieron cuatro tipos de respuesta:

- Las matemáticas son para ser usadas/aplicadas en la actividad diaria;
- Las matemáticas implican razonar para tomar decisiones en la actividad diaria;
- Las matemáticas son una ciencia abstracta y las matemáticas se componen de sus números y relaciones.

Por otro lado, Ernest (1989) distingue tres concepciones posibles de las matemáticas: desde una visión instrumentalista que las concibe como una caja de herramientas (hechos, reglas y habilidades) que son utilizadas en la búsqueda de algún fin externo. Las matemáticas son una red de reglas, procedimientos y hechos no relacionados pero utilitarios.

En segundo lugar, se encuentra la visión platónica que considera que las matemáticas no se crean, sino que se descubren. En esta visión son concebidas como un cuerpo estático y unificado de conocimiento que está formado por estructuras en interconexión y verdades apoyadas en la lógica.

Finalmente, otro punto de vista es la resolución de problemas, donde las matemáticas son vistas como un campo dinámico y en continua expansión de la creación e invención humana. Las matemáticas están organizadas dinámicamente, ubicadas en un contexto social, cultural y no son un producto terminado, pues sus resultados permanecen abiertos a la revisión.

MÉTODO

Tipo de estudio

La investigación es de tipo exploratorio descriptivo, de corte cualitativo (Hernández et al., 2016). Los constructos que se estudian en esta investigación son las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas. Para ello se aplicó a los participantes del estudio un cuestionario diseñado para explorar las creencias sobre las matemáticas y los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Participantes

Participaron 30 profesores en formación de primer a cuarto semestre pertenecientes a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. El grupo se encuentra integrado por 20 mujeres (66,7%) y 10 hombres (33,3%), la edad

promedio fue 23 años con edades comprendidas entre los 22 y 42 años. Tienen diferentes nacionalidades (mexicana, colombiana y cubana).

Instrumento

El instrumento diseñado para esta investigación está compuesto por dos secciones: la primera presenta preguntas relacionadas con aspectos socio-demográficos (edad, experiencia profesional, estudios realizados, entre otros), y la segunda presenta 23 ítems o preguntas abiertas referentes a las tres dimensiones a evaluar: la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunas de las preguntas planteadas en este cuestionario fueron adaptadas o modificadas a partir de los instrumentos propuestos por Lebrija et al. (2010), Benarroch y Marín (2011), Donoso et al. (2016), Castillo et al. (2018) y Op’t Eynde et al. (2006), en el sentido de que algunas se encontraban en un modelo de pregunta cerrada (Preguntas 8, 10, 13, 14, 15, 17, 20, 21 y 23) o en ítems de escala tipo Likert (4, 9, 12, 16 y 22) y se adaptaron a preguntas abiertas. Así mismo, se agregaron 4 ítems (2, 11, 18 y 19) de elaboración propia.

En relación con la validación del instrumento, se realizó mediante el juicio de expertos y se consideraron las propuestas de Corral (2009) y Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008), a fin de diseñar un formato que permitiera a los jueces registrar sus puntuaciones o calificaciones con respecto a cada ítem. Estas puntuaciones se analizaron teniendo en cuenta el procedimiento de la V de Aiken. Dado que el análisis se realizó con un nivel de significancia de .05, con 6 jueces expertos, 4 categorías de evaluación y con un valor de $V_p = 0,78$ (Aiken, 1985), se encontró que los ítems que pertenecen a la naturaleza de las matemáticas (1, 2, 3 y 4) son claros, coherentes, relevantes y exploran de manera suficiente esta dimensión, lo cual fue apoyado por los jueces que participaron en la validación (Velasco, 2023).

A continuación, se muestran los ítems que hacen parte de la dimensión “Naturaleza de las matemáticas”. (Ver Tabla 1).

Tabla 1
Ítems de la dimensión “Naturaleza de las matemáticas”

#	Ítem
1	¿Cómo definiría usted las matemáticas?
2	¿Cuál cree usted que es el papel que juegan las matemáticas en la formación académica de los estudiantes?
3	¿Considera que es importante enseñar y promover las matemáticas en el salón de clase? ¿Por qué?
4	¿Qué caracteriza a la naturaleza de las matemáticas (A la matemática misma)? Mencione tres características

Nota. Elaboración propia.

Condiciones de aplicación

La aplicación del instrumento se realizó en línea a través de la plataforma Google Forms, por lo que se envió un correo de invitación con el enlace correspondiente del cuestionario a todos los estudiantes de la maestría en educación matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Se recibieron las respuestas de 30 estudiantes, de quienes se describieron las características en la sección denominada participantes.

Análisis

Posterior a la recepción de los cuestionarios completos, la plataforma Google Forms arrojó un documento de Excel con las respuestas de los participantes para cada pregunta, el cual se organizó separando las preguntas de cada dimensión para luego seleccionar las unidades de información relevantes, con el fin de generar los códigos y categorías a través del software de análisis cualitativo MAXQDA (2020). Los resultados obtenidos en la codificación se organizaron en tablas, presentando las categorías encontradas, y la cantidad y el porcentaje de profesores en formación que se sitúan en cada categoría. Además, se transcriben algunas de las respuestas dadas por los participantes. En cada categoría se indican los profesores en formación cuya respuesta se clasifica ahí, para ello se utilizó una notación como la siguiente: Profesor en formación 1 (PF1).

Resultados

Esta dimensión está conformada por las preguntas de la 1 a la 4 del instrumento aplicado, la cual pretendía abordar las creencias que tienen los profesores en formación sobre la definición de matemáticas y el papel que juegan en el salón de clase.

Pregunta 1: ¿Cómo definiría usted las matemáticas?

Del análisis de la primera pregunta del cuestionario, se identificó que las respuestas de los participantes podían ser agrupadas en tres categorías (véase la Tabla 2).

Tabla 2

Pregunta 1: ¿Cómo definiría usted las matemáticas?

Categorías	Profesores en formación	%	
Ciencia formal y exacta	PF1, PF2, PF6, PF7, PF9, PF15, PF18, PF20, PF23, PF24, PF25, PF27, PF28, PF29	14	46,7%
Ciencia relacionada con el entorno	PF3, PF4, PF5, PF8, PF10, PF11, PF13*, PF16, PF17*, PF19, PF21 PF22, PF26, PF30.	14	46,7%
Ciencia que estudia otras ciencias	PF12, PF14	2	6,6%

Nota. Elaboración propia. *Respuesta que se ubicó en esta categoría al ser predominante sobre otra.

A continuación se presenta una descripción para cada categoría.

Ciencia formal y exacta: Los participantes señalan en sus respuestas que las matemáticas son una ciencia formal y exacta porque se basa en principios lógicos, es abstracta y rigurosa. Además, mencionan que cuenta con un lenguaje propio y que estudia las relaciones y propiedades de entes que son abstractos.

Ciencia relacionada con el entorno: Aquí se incluyeron las respuestas que hacen referencia a las matemáticas como un constructo social, que tiene aplicación en la vida cotidiana, que estudia fenómenos de nuestro entorno y permite generar explicaciones a partir de ello. Además, se incluyen respuestas que ven a las matemáticas como una materia que hace parte de los programas y planes de estudio.

Ciencia que estudia otras ciencias: En este caso, las respuestas de los participantes hacen referencia a las matemáticas como una ciencia que estudia y se relaciona con otras ciencias, como el álgebra, la estadística, la geometría, etc.

Ahora bien, el análisis permitió identificar que la mayoría (el 93,4%) de las respuestas de los participantes se encuentran dentro de las dos primeras categorías mencionadas. Para el primer caso, el 46,7% de las respuestas hacen referencia a que las matemáticas son una ciencia formal y exacta, predominando la idea de que estudia las relaciones y las propiedades de entes abstractos. Lo anterior tomando en cuenta que 11 de los 14 participantes que se ubican en esta categoría lo justificaron de dicha manera. En el segundo caso, 46,7% de las respuestas hacen referencia a que las matemáticas son una ciencia relacionada con el entorno. En las justificaciones para esta categoría predomina la idea de que las matemáticas estudian fenómenos cotidianos.

Finalmente, las respuestas que fueron marcadas con (*) podrían ser ubicadas en dos categorías, sin embargo, se decidió ubicarla en la categoría predominante o en la primera idea que el participante diera. Por ejemplo, el PF13 mencionó en su respuesta que: “Las matemáticas son un constructo social y se caracterizan por ser abstractas y rigurosas”. En su respuesta incluye una característica de las matemáticas, sin embargo, las define como un constructo social.

Pregunta 2: ¿Cuál cree usted que es el papel que juegan las matemáticas en la formación académica de los estudiantes?

Para la segunda pregunta del cuestionario, que hacía referencia al papel que juegan las matemáticas en la formación de los estudiantes, las respuestas se organizan en tres categorías (véase la Tabla 3):

Desarrollo del pensamiento: En este caso, las respuestas de los participantes aludían al desarrollo del pensamiento en general, analítico, crítico, abstracto o numérico, espacial y variacional.

Formar ciudadanos competentes: Aquí, la idea de ciudadanos competentes se complementaba con la idea de que las matemáticas promueven el desarrollo de habilidades y competencias que permiten afrontar diversas situaciones cotidianas. Así mismo, en algunas respuestas se menciona la importancia de las matemáticas para el cumplimiento de objetivos de la materia y el desarrollo profesional de los estudiantes.

Desarrollo del razonamiento: En esta categoría se ubicaron respuestas que indicaban que las matemáticas promueven el desarrollo del razonamiento; específicamente, las respuestas de los profesores en formación apuntaban al pensamiento lógico de los estudiantes.

Tabla 3
Pregunta 2: ¿Cuál cree usted que es el papel que juegan las matemáticas en la formación académica de los estudiantes?

Categorías	Profesores en formación	%	
Desarrolla el pensamiento	PF1, PF5, PF6, PF16, PF17, PF18, PF19, PF20, PF21, PF22, PF26, PF28, PF30.	13	43,3 %
Formar ciudadanos competentes	PF4, PF7, PF10, PF12, PF13, PF14, PF15, PF23, PF24, PF27, PF29*	11	36,7%
Desarrolla el razonamiento	PF2, PF3, PF8, PF9, PF11, PF25.	6	20%

Nota. Elaboración propia. *Respuesta que se ubicó en esta categoría al ser predominante sobre otra.

Con base en lo anterior, un gran número de respuestas (43,3%) de los participantes consideran que el papel de las matemáticas en la formación de los estudiantes es desarrollar el pensamiento, en sus justificaciones se plantea en términos del pensamiento analítico o crítico. Por ejemplo, la respuesta del PF17 fue que “el desarrollo del pensamiento crítico ayuda a resolver problemas (no sólo sobre matemáticas) de diferentes formas”. Esta respuesta se considera dentro de esta categoría.

Se aclara que la respuesta del PF29 se marcó con (*) debido a que podría incluirse en dos categorías: “Desarrollo del pensamiento” y “Formar ciudadanos competentes”. Lo anterior, debido mencionó en su respuesta que:

Forman un papel esencial ya que se puede desarrollar un pensamiento crítico en cuanto al entorno y contexto social en el que viven, ahora bien, también las matemáticas se ven inmersas en una gran cantidad de carreras universitarias y por esto se pueden ampliar las posibilidades al estudiar y comprender temas de diferentes carreras.

A pesar de que menciona el desarrollo del pensamiento crítico, en su justificación lo relaciona con aspectos de situaciones cotidianas y el desarrollo profesional de los estudiantes.

Pregunta 3: ¿Considera que es importante enseñar y promover las matemáticas en el salón de clase? ¿Por qué?

Es importante mencionar que la segunda y tercera pregunta se encuentran relacionadas, y la tercera pregunta permitió profundizar aún más en las creencias de los profesores en formación. Es importante mencionar que todos los participantes mencionaron que es importante enseñar y promover las matemáticas en el salón de clase, y complementaron su justificación dada en la respuesta anterior. Por ese motivo, se retoman elementos de las categorías antes mencionadas y se generan otras más amplias. Las respuestas se pueden agrupar en las categorías que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4

Pregunta 3: ¿Considera que es importante enseñar y promover las matemáticas en el salón de clase? ¿Por qué?

Categorías	Profesores en formación		%
Aplicación en diversos contextos	PF1, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, PF7, PF8, PF9, PF10, PF11, PF12, PF13, PF14, PF15, PF16, PF17, PF19, PF20, PF21, PF22, PF23, PF24, PF27, PF28, PF29, PF30	27	90%
Desarrolla el razonamiento y el pensamiento lógico	PF18, PF25, PF26	3	10%

Nota: Elaboración propia.

Resulta interesante que un gran porcentaje (90%) de las respuestas se ubican en la categoría “Aplicación en diversos contextos”. En esta categoría se recogen las respuestas que mencionan la aplicación de las matemáticas en ámbitos escolares, profesionales, sociales y de la vida cotidiana. Así como el desarrollo de habilidades para comprender los fenómenos de nuestro entorno y resolver problemas cotidianos. La segunda categoría presentada (“Desarrolla el razonamiento y el pensamiento lógico”) retoma los elementos de las categorías “Desarrollo del pensamiento y Desarrollo del razonamiento” que se encontraron en la segunda pregunta.

Pregunta 4: ¿Qué caracteriza a la naturaleza de las matemáticas (A la matemática misma)? Mencione tres características.

En la cuarta pregunta se les pidió a los participantes que mencionaran tres características de la naturaleza de las matemáticas, aunque es conveniente mencionar que en una aplicación piloto del cuestionario que se realizó como parte del proceso de validación del instrumento observamos que esta pregunta presentaba inconsistencia en cuanto a su claridad. Posterior a la modificación y en la aplicación, las respuestas de los participantes fueron acordes a lo que se pretendía explorar.

Por otro lado, debido a la variedad en las respuestas de los participantes se decidió presentar los resultados gráficamente utilizando una de las herramientas del programa de MAXQDA 2020, denominada la nube de palabras. (véase la Figura 1).

Figura 1

Nube de palabras de respuestas a la cuarta pregunta del cuestionario: “¿Qué caracteriza a la naturaleza de las matemáticas (A la matemática misma)? Mencione tres características”.



Nota. Fuente: Elaboración propia con MAXQDA 2020.

Se pueden palabras con un tamaño de fuente mayor con respecto a otras, lo que indica que son más frecuentes en las respuestas de los participantes. En ese sentido, “abstracta”, es el término más relevante y se ubica en un primer nivel, seguido de “lógica”, “exacta” y “formal”, que se ubican en los niveles del 2 al 4, respectivamente.

Desde las respuestas de los participantes se pueden evidenciar las tres visiones abordadas por Ernest (1989): instrumentalista, platónica y de resolución de problemas. En este caso, la visión platónica aparece con mayor frecuencia debido a que un gran porcentaje de palabras aluden a que las matemáticas son una ciencia abstracta, lógica, inteligible, formal, exacta, entre otras características.

Por otro lado, también se hace evidente en las respuestas de los participantes el punto de vista de la resolución de problemas, en donde las matemáticas se consideran como un campo dinámico ubicado en un contexto social y cultural. Un ejemplo es la descripción que hizo el PF10, quien considera que las matemáticas son una ciencia social y sociocultural.

CONCLUSIONES

Con el análisis de la dimensión de “Naturaleza de las matemáticas” fue posible identificar algunas categorías que están presentes en las creencias de los participantes. Entre los resultados encontrados se pueden mencionar los siguientes:

Existe una fuerte tendencia en la creencia de que las matemáticas es una ciencia formal y exacta o que se encuentra relacionada con el entorno. Ejemplo de ello es que en la primera pregunta, el 93,4% de las respuestas de los participantes hacen referencia a esto, y en la cuarta pregunta, los términos “Abstracta”, “Formal” y “Exacta” presentan mayor frecuencia con respecto a otros mencionados por los participantes como características de la naturaleza de las matemáticas.

Muchas de las respuestas de los participantes corresponden a creencias concernientes a que las matemáticas se encuentran relacionadas con el entorno. Lo anterior lo fundamentamos en que, dentro de las tres primeras preguntas de esta dimensión, surgieron categorías que mencionan la relación entre ambos: *Ciencia relacionada con el entorno*, *Forma ciudadanos competentes* y *aplicación en diversos contextos*, en las cuales se ubicaron un gran porcentaje de respuestas (43,7%, 36,7% y 90% respectivamente).

En conclusión, las creencias de los participantes en esta investigación hacen referencia mayoritariamente a que es una ciencia abstracta, formal, lógica y exacta, además de que está relacionada con el entorno, se aplica a diversas situaciones reales, desarrolla el razonamiento lógico y forma ciudadanos competentes. Estos aspectos mencionados coinciden con algunos de los encontrados por Martínez-Sierra et al., (2019), especialmente los relacionados con las matemáticas como ciencia abstracta, formal, exacta y que se aplica en el entorno. Por otro lado, en Martínez-Sierra et al., (2019) la categoría predominante de los profesores entrevistados indica que las matemáticas son para aplicarlas, mientras que, en esta investigación, la predominancia es compartida con la creencia de que las matemáticas son una ciencia abstracta, formal, lógica y exacta.

Por último, cabe mencionar que los resultados evidencian la necesidad de desarrollar estudios posteriores sobre creencias siguiendo esta línea de investigación. Consideramos que el proceso seguido hasta aquí representa una posible guía para futuros trabajos e investigaciones que tengan la necesidad de indagar sobre las creencias de profesores en relación con la naturaleza de las matemáticas. Sin embargo, a pesar de los alcances potenciales del instrumento que se diseñó y usó, en este trabajo, si se pretenden caracterizar las creencias de profesores en formación y obtener información más amplia y detallada se puede complementar la aplicación del cuestionario con otros instrumentos, tal como entrevistas u observaciones de clase.

REFERENCIAS

- Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, 45(1), 131–142.
<https://doi.org/10.1177/0013164485451012>

- Benarroch, A., & Marín, N. (2011). Relaciones entre creencias sobre enseñanza, aprendizaje y conocimiento de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 289–303. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.84>
- Castillo, A., Sánchez, J. & Juárez, J. (2018). Creencias de docentes y estudiantes de bachillerato acerca de la enseñanza – aprendizaje en la clase de Matemáticas. En C. Dolores, G. Martínez, S. García, J. Juárez, & J. Ramírez. (Eds.), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 335–333). Ediciones Eón-Universidad Autónoma de Guerrero. <https://bit.ly/45V7BEX>
- Chaves, E., Castillo, M., & Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 3(4), 29–44. <https://bit.ly/3FG8QNH>
- Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista Ciencias de la Educación*, 19(33), 228–247. <https://bit.ly/3FHohoS>
- Donoso, P., Rico, N., & Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 20(2), 76–97. <https://bit.ly/3QESKKv>
- Ernest, P. (1989). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. <https://bit.ly/3SmK908>
- Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, 6(1), 27–36. <https://bit.ly/3SgADfc>
- Estévez-Nenninger, E. H., Valdés-Cuervo, Ángel A., Arreola-Olavarria, C. G., & Zavala-Escalante, M. G. (2014). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 6(13), 49–64. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.M6-13.CSEA>
- Friz, M., Panes, R., Salcedo, P., & Sanhueza, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(1), 59–68. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.1.1455>
- García, P., & Blanco, R. (2017). Creencias de los docentes de matemática de secundaria de la provincia de Cartago sobre la evaluación en matemática. *Matemática, Educación e internet*, 17(1), 1–23. <https://bit.ly/45VFMw8>
- Garritz, A. (2014). Creencias de los profesores, su importancia y cómo obtenerlas. *Educación Química*, 25(2), 88–92. [https://doi.org/10.1016/S0187-893X\(14\)70529-4](https://doi.org/10.1016/S0187-893X(14)70529-4)
- Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias*, 24(3). 309–324. <https://bit.ly/3MoHzmC>

- González, M., Casa, L., Torres, J., & Luengo, R. (2015). Concepciones y creencias de los profesores en formación sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. Propuesta de nueva metodología cualitativa. *Campo abierto: Revista de educación*, 34(2), 85–104. <https://bit.ly/46UKVWD>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2016). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill.
- Kagan, D. (1992). Implications of Research on Teacher Belief. *Educational Psychologist*, 27(1), 65–90. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2701_6
- Lebrija, A., Flores, R., & Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática*, 22(1), 31–55. <https://bit.ly/3sgkonK>
- Martínez, F. (2020). *Creencias de profesores de matemáticas acerca de la evaluación del aprendizaje matemático de estudiantes de primaria, secundaria y bachillerato* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. <https://bit.ly/3sfCPsJ>
- Martínez, O. (2013). Las creencias en educación matemática. *Educere*, 17(57), 231–240. <https://bit.ly/3FHWyEo>
- Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2019). ‘Las matemáticas son para ser aplicadas’: Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática*, 31(1), 92–120. <https://doi.org/10.24844/EM3101.04>
- McLeod D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–598). Information Age Publishing.
- Op’t Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). “Accepting emotional complexity”: A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193–207. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4>
- Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). *Teachers' beliefs on mathematics teaching – comparing different self-estimation methods – a case study*. <https://bit.ly/3SmNywc>
- Skott, J. (2014). The promises, problems, and prospects of research on teachers’ beliefs. En H. Fives, & M. G. Gill (Eds.), *International handbook of research on teachers’ beliefs* (pp. 13–30). Routledge.
- Skott, J. (2015). Towards a Participatory Approach to ‘Beliefs’ in Mathematics Education. En B. Pepin, B., & Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 3–23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_1
- Velasco, K. (2023). *Creencias de profesores en formación sobre la naturaleza de las matemáticas y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. <https://bit.ly/3FHD0VQ>

El profesor de matemáticas y su conocimiento especializado: algunas de sus reflexiones

Leticia Sosa Guerrero¹

RESUMEN

En este documento mostramos elementos que den cuenta de la importancia de la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas. Usamos como referente teórico el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Presentamos algunas reflexiones de dos profesores de nivel secundaria y una profesora de nivel primaria que, después de conocer el modelo, lo usan para diseñar una planeación, la puesta en el aula de ésta y el posterior análisis y propuesta de mejora. En su reflexión de ese proceso, los dos profesores y la profesora expresan la importancia de profundizar en la búsqueda de los conocimientos requeridos por el profesor de matemáticas, tomar conciencia de en cuáles conocimientos prestar mayor atención y tomar eso como un reto para mejorar su propia práctica docente, además, reconocen en el MTSK una oportunidad de aprendizaje.

PALABRAS CLAVE

Especializado, conocimiento del profesor, matemáticas, reflexión, formación.

¹ lsosa@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas

<https://orcid.org/0000-0002-4905-6684>

INTRODUCCIÓN

Ball, et al. (2008) hacen notar diversos aspectos que dan cuenta de la importancia del conocimiento del profesor. A través del ejemplo de la resta hacen un recorrido para destacar, entre otros elementos, que para enseñar matemáticas no basta con saber hacer las actividades que el profesor le asigna a los estudiantes, sino que también es necesario tener conocimiento para enseñarlas. Por ejemplo, enseñar matemáticas va más allá de saber identificar si una respuesta dada por los estudiantes es incorrecta, pues el profesor ha de trascender, conocer la fuente del error y ayudar a los alumnos a corregir su problema. Además del conocimiento que necesita el profesor para afrontar las respuestas inesperadas que dan los estudiantes, ha de tener conocimiento para entender y explicarse qué pensamiento matemático del estudiante puede producir esa respuesta y validarla matemáticamente (e.g. describir el método que el estudiante está usando y cómo justificar eso matemáticamente). No ha de quedarse ahí, sino que ha de saber también qué representaciones son entonces más adecuadas para enseñar el contenido y hacerlo más comprensible para los estudiantes (Shulman, 1986).

Así pues, adquirir o tener esos conocimientos para enseñar matemáticas no es fácil. El profesor ha de ser un aprendiz y muchas de las veces ha de vivir él el proceso de estudiante para saber cómo enseñar matemáticas, tratar de ponerse en el lugar del alumno, comprender los errores, dificultades y obstáculos por los que pasa el estudiante para aprender un contenido matemático.

Más aún, existen problemas como los que exponen McCrory et al. (2012) en los cuales existen elementos sustanciales que se pueden aprovechar en el proceso del profesor, o futuro profesor, para aprender cómo enseñar matemáticas. Por ejemplo, en uno de ellos se pide evaluar $f(2) - g(0)$, los datos se dan a partir de una gráfica de las dos funciones (de ellas se puede deducir que $f(2) = -2$ y $g(0) = 2$), y lo interesante de esto es, además de saber el resultado de evaluar lo que se pide, entender y comprender qué errores o qué pensamiento matemático puede dar como resultado los números que aparecen en los otros incisos, pues al ser una cuestión de opción múltiple se les ofrecen cinco incisos (A. -4; B. -2; C. 0; D. 1; E. 4); sólo el inciso A representa la respuesta correcta, los otros cuatro incisos representan resultados que pueden venir de posibles errores que cometen los estudiantes. En nuestra opinión, hacer el ejercicio en grupo y que sean los propios profesores, o futuros profesores, quienes indaguen qué error o qué pensamiento matemático pudo producir el resultado —por ejemplo el -2, el 0, el 1 ó el 4— es un proceso muy rico para ellos, pues la discusión de pensamientos que se puede dar en el grupo es muy aprovechable para la riqueza de conocimientos del profesor de matemáticas.

Otro de los problemas que proponen McCrory et al. (2012) es:

Amy está construyendo una secuencia de figuras geométricas con palillos de dientes siguiendo un patrón específico (creando un triángulo hacia arriba y uno hacia abajo alternativamente). A continuación se presentan las imágenes de las tres primeras figuras que ella construye. La variable denota la posición de una figura en la secuencia.



$t = 1$



$t = 2$



$t = 3$

Al encontrar una descripción matemática del patrón, Amy explica su razonamiento. (McCrory et al., 2012, p. 600)

Este es un problema interesante en el que se puede poner de relieve las formas de pensar sobre las matemáticas e interpretar el lenguaje matemático de los estudiantes, pues se trata de un problema de respuesta de opción múltiple, de elegir de entre fórmulas equivalentes (A. $f = 2t + 1$; B. $f = 2(t + 1) - 1$; C. $f = 3t - (t - 1)$; D. $f = 3t + 1 - t$; f representa el número total de palillos utilizados en una figura) aquella que representa más el razonamiento de Amy:

Primero utilizo tres palillos para cada triángulo:



pero luego me doy cuenta de que estoy contando un palillo dos veces para cada uno de los triángulos excepto para el último, así que tengo que quitar esos palillos (McCrory et al., 2012, p. 600).

Ese problema tiene la característica de que las fórmulas de los cuatro incisos son equivalentes, pero sólo C es el correcto por representar las matemáticas en las palabras de la estudiante y conectar la fórmula algebraica con el diagrama y con su explicación. Se trata de ideas matemáticas que los profesores conocen y usan, de tal manera que los profesores de matemáticas que normalmente atienden el pensamiento matemático de los estudiantes reconocerían más fácilmente la relación directa entre las ideas de Amy, los dibujos de palillos de dientes y C como respuesta correcta.

Con este problema, al estar en un grupo de formación, se posibilita ir provocando la sensibilidad en los profesores, o futuros profesores, al ver que, en realidad, si intentan simplificar las expresiones todas dan $2t + 1$, entonces empiezan a entender la esencia del problema, donde han de tener cuidado y poner atención en cada palabra expresada por Amy. De hecho, una discusión interesante que se hace en grupo consiste en ir indagando a qué traducción correspondería lo representando en los demás incisos. Es en ese proceso en el que se da mucha riqueza de conocimientos, de sensibilidad de los profesores o futuros profesores de matemáticas, sobre todo en cuanto a comprender el lenguaje del pensamiento matemático que expresan los estudiantes.

Con lo anterior queremos destacar algunos componentes del conocimiento del profesor y de la importancia de esos conocimientos para que se especialice como profesor de matemáticas.

La especialización del conocimiento del profesor de matemáticas es muy importante, incluso en estrategias didácticas tan novedosas como el uso de memes matemáticos (Guadarrama et al, 2018; Sosa, en prensa) que pueden ser utilizados para incentivar, de acuerdo con Bini et al. (2022), la creatividad, el ingenio, los heurísticos (Polya, 1945), etc. Estos aspectos, además de ser fundamentales, son bien vistos en el proyecto *Future of Education and Skills 2030* de la *Organisation for Economic Cooperation and Development* [OECD] (2018a), y en el marco de matemáticas de OECD (2022b) PISA 2022 pues incorporan la creatividad entre las capacidades básicas del siglo XXI para ser potenciadas en todos los estudiantes. Así pues, el profesor de matemáticas podría aprovecharlos en pro de hacer matemáticas en el aula, pero sin un conocimiento especializado, amplio y profundo, difícilmente funcionarán a favor de la enseñanza y el aprendizaje.

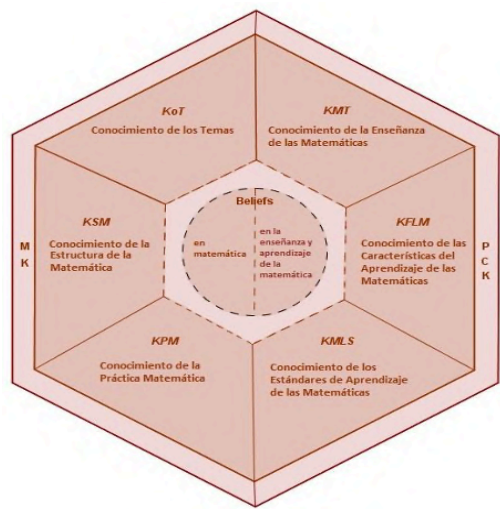
Usar el meme matemático como estrategia didáctica implica desarrollar varios aspectos, por ejemplo, hay que poner de relieve el poder epistémico que nutre las discusiones matemáticas y amplía la gama de signos que sólo se ven en la escuela, fomentar el conocimiento conceptual en profundidad, pues han de ser memes elaborados siguiendo rigurosamente las normas del campo de las matemáticas y la cultura digital regulados por lo social, y el significado matemático estructural donde el significado es matemáticamente correcto. Por tanto, podemos decir que validar, incluso diseñar, desarrollar e implementar un meme matemático en el aula exige de conocimientos que lo hagan especialista como profesor de matemáticas.

A continuación mostramos un modelo que aborda componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, et al., 2013) consta de tres dominios: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y Creencias (Beliefs). Nos centraremos en los dos primeros. En el Conocimiento Matemático hay tres subdominios: Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura Matemática y Conocimiento de la Práctica Matemática. Mientras que en el Conocimiento Didáctico del Contenido, los tres subdominios son: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Figura 1
Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)



Nota. Las siglas MK, KoT, KSM, KPM, PCK, KMT, KFLM, KMLS corresponden a las siglas de los subdominios en inglés. Tomado de: Carrillo et al. (2013)

La Tabla 1 muestra el contenido del modelo MTSK de manera sucinta.

Tabla 1
Síntesis del contenido del modelo MTSK

Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los Temas	Conocimiento de conceptos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, procedimientos, fenomenología y registros de representación que caractericen aspectos del tema matemático abordado.
	Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas	Conocimiento de conexiones interconceptuales.
	Conocimiento de la Práctica Matemática	Conocimiento sobre cómo crear, producir o hacer matemáticas.
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas, estrategias y recursos materiales y virtuales, así como el conocimiento de ejemplos y ayudas matemáticas adecuados para el contenido matemático.
	Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas	Conocimiento de teorías de aprendizaje de las matemáticas, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje y formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático.
	Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas	Conocimiento de qué puede/debe esperarse que aprendan los alumnos en un nivel escolar determinado.

Apoyamos la idea de conocimiento especializado en consonancia con Scheiner et al. (2019), es decir, en términos del conocimiento que se cultiva, el conocimiento que más que un tipo de conocimiento es un estilo de conocimiento, en el sentido de repensar lo que significa el conocimiento del profesor de matemáticas donde tal estilo de conocimiento no es un estado de ser sino un proceso que ofrezca una nueva visión de lo que hace que el conocimiento de los profesores de matemáticas se especialice.

Más aún, de acuerdo con Ramos-Rodríguez et al. (2022)

El profesor de matemática, para desarrollar su práctica, necesita un conocimiento especializado para enseñar, tanto disciplinar como didáctico. En todo su quehacer profesional el profesor moviliza significados, propiedades y definiciones de los temas matemáticos, además, bosqueja las formas de construcción de la materia, las relaciones entre contenidos, el conocimiento sobre la enseñanza de matemática y las características del aprendizaje de contenidos matemáticos, entre otros. (p.339)

Así pues,

El modelo MTSK es una valiosa herramienta para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de aula, además un recurso para el diseño de propuestas formativas para profesores en formación y en ejercicio. La especialización del modelo MTSK permite diferenciar los elementos del conocimiento general, para centrarnos exclusivamente en el conocimiento matemático y didáctico del contenido. A partir de la identificación y de la organización de componentes de conocimiento manifestado por profesores se permite profundizar en el conocimiento especializado en su conjunto y desde la óptica formativa permite diseñar acciones formativas orientadas en el conocimiento necesario integrar, activar o desarrollar. (Ramos-Rodríguez et al. 2022, p.341)

Cabe destacar que para una enseñanza efectiva también es necesario que el profesor reflexione sobre su práctica. La reflexión, inclusive, es uno de los aspectos relevantes para aproximar la teoría y la práctica en la investigación sobre la formación y el aprendizaje de los profesores de matemáticas (Kieran et al., 2013). De hecho, la importancia de que los profesores reflexionen sobre su práctica es un tema recurrente (Sowder, 2007). En sus trabajos, Dewey (1910) ya hacía notar la importancia de la reflexión del profesor. Shön (1983, 1987) aporta a la literatura la importancia de la reflexión del profesor en la práctica y para la práctica.

Darling-Hammond (1988) expresa:

Los docentes deben ser capaces de analizar y reflexionar sobre su práctica, evaluar los efectos de su enseñanza y refinar y mejorar su instrucción. Ellos deben evaluar continuamente lo que los estudiantes piensan y entienden y modificar sus planes para tener en cuenta lo que han descubierto. (Darling-Hammond, 1998, p.8)

Inclusive,

La reflexión docente se considera un elemento fundamental en el desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica. (Castellanos & Moreno, 2022, p. 96)

De tal manera que el formador de profesores de matemáticas ha de gestionar el proceso de reflexión, entender y replantear alternativas para asumir el problema de la práctica (Flores, 2007). Es decir, la reflexión es clave para lograr una enseñanza de calidad, por ello, en este trabajo presentamos algunas reflexiones de profesores que utilizan el modelo MTSK para diseñar una planeación de enseñanza de un contenido matemático concreto, su puesta en acción, el análisis y una propuesta de mejora.

MÉTODO

En cuanto al método, es un estudio de casos (Stake, 2007) que consiste de un grupo de 19 estudiantes (futuros profesores y profesores de nivel secundaria, bachillerato y superior) que participan en un curso de formación de profesores durante seis meses. En este documento reportamos elementos relevantes de tres casos; dos son de profesores de matemáticas en nivel secundaria (alumnos con edades de 12 a 15 años) y uno de una profesora que llevaba 3 años siendo profesora de primaria (específicamente de niños entre los 7 y 10 años), pero desde hace tres meses trabaja con carreras técnicas y tecnológicas (estudiantes de 18 a 20 años). Llamaremos a los dos profesores con el pseudónimo de Rob y Jo (con 4 y 3 años de experiencia respectivamente), y a la profesora con el de Da.

Primero se les presentaron, de manera interactiva, las actividades explicadas en el apartado de Introducción de este documento, a fin de sensibilizarlos como aprendices para enseñar matemáticas. Se buscó que trataran de ponerse en el lugar de los alumnos al ir realizando ellos mismos las actividades, y luego ponerse en el papel del profesor profesional tratando de comprender la importancia de cada uno de los conocimientos requeridos por el profesor para enseñar matemáticas, tratando de comprender la matemática que está detrás del contenido matemático que va a enseñar, de comprender el pensamiento matemático que pudieran estar empleando sus alumnos ante una respuesta incorrecta matemáticamente, pero también ante una respuesta inesperada, pero con argumentos matemáticos, reflexionar sobre qué tratamiento didáctico usaría ante esas situaciones, etc.

Posteriormente se les presenta el modelo MTSK, primero a través de una lectura base (Carrillo et al., 2013) y luego a manera de ejemplos la de “KMT: Ejemplos y ayudas” (Sosa et al., 2016), la de “KFLM: Características de aprendizaje en Álgebra” (Sosa et al., 2015) y el de “KPM en Geometría” (Zakaryan & Sosa, 2021). Una vez que se familiaricen con el modelo, se les pide que en equipo trabajen el diseño de la planeación de un tema matemático a enseñarse de manera natural (sin imponer el tema), a más o menos un mes de que comienzan la planeación, pues antes de hacerla deben tener el concentrado de conocimientos para ese tema matemático, usando los dominios, subdominios y categorías del MTSK, agregando el porqué, para

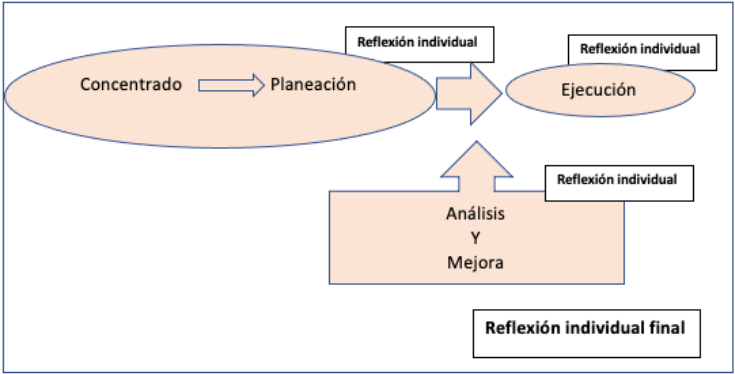
qué y un ejemplo. Es decir, en pareja, una vez que se deciden por un tópico matemático concreto del nivel educativo en el que se desempeñan como profesores, van tomando uno a uno los subdominios del MK y luego los del PCK, y llenando su tabla del concentrado de conocimientos. No sólo basta con definir al menos un indicador de conocimiento para cada categoría de los subdominios, sino también han de cuestionarse *por qué* y *para qué* sería importante dicho conocimiento en la enseñanza de ese tópico, y escribir un ejemplo *ad hoc* a ese indicador.

Tabla 2
Encabezados de las columnas del concentrado de conocimientos para el tópico matemático concreto

Dominio	Subdominio	Categoría	Indicador	Por qué	Para qué	Ejemplo
---------	------------	-----------	-----------	---------	----------	---------

Luego, la misión es darle vida a todo ese concentrado de conocimientos en la planeación de enseñanza, a fin de que estén presentes cuando vayan a ponerla en acción en el aula. Así pues, la tarea es buscar actividades hechas, hacer adaptaciones, o incluso diseñarlas, con el propósito de hacer que dichos indicadores del concentrado se presenten cuando vayan a llevar a cabo la planeación de enseñanza. Después de la planeación realizada en pareja viene la ejecución o puesta en acción de ésta por parte de ambos. Posteriormente, han de realizar el análisis y la propuesta de mejora del concentrado y de la planeación, considerando, además de su propia experiencia, los comentarios aportados por sus compañeros y por la instructora del curso, a efectos de tenerla preparada por si la ocupan en el siguiente ciclo escolar, volver a experimentar y mejorar. Al final de cada etapa (planeación-ejecución-análisis y mejora) se les pide una reflexión individual, y después de todas ellas, una reflexión final (Figura 2).

Figura 2
El proceso: Concentrado de conocimientos-Planeación-Ejecución-Análisis-Mejora



Nota. Fuente: Elaboración propia.

RESULTADOS

La reflexión individual final es orientada por varias preguntas, aquí mostramos seis de ellas (Tabla 3). Presentamos algunos aspectos relevantes de las reflexiones individuales finales de los profesores Rob y Jo en torno a esas preguntas. En cuanto a la profesora Da, sólo presentamos un aspecto al final, que incluimos porque consideramos importante lo que expresa. Cabe mencionar que para referenciar las reflexiones usamos la nomenclatura (Pseudónimo, RFPi) para nuestro control interno, por tanto (Rob, RFP1) corresponde a Rob, Reflexión Final Pregunta 1.

Tabla 3
Preguntas que orientan la reflexión individual final

1. ¿A mí qué me quedó de ese proceso?
2. ¿Qué me puede servir?
3. ¿Cómo me puede servir?
4. ¿Para qué me puede servir?
5. ¿Qué cambiaría en mí?
6. ¿Cómo inducir ese cambio?

Fuente: Elaboración propia.

1. ¿A mí qué me quedó de ese proceso?

Rob: En cuanto al concentrado de indicadores del MTSK hay muchas cosas a destacar, ya que para desarrollar éste, se debió primero comprender en qué consistía el modelo MTSK, valoro la importancia del modelo como una herramienta fundamental para el propio autoanálisis.

En este sentido, la primera tarea a realizar previo al desarrollo del concentrado, era precisamente comprender en lo general los distintos dominios, subdominios y categorías del modelo MTSK. Durante este primer acercamiento; asimilar y diferenciar los subdominios no fue cosa sencilla, ya que existían indicadores que en una primera instancia podrían parecer de un tipo de conocimiento cuando en realidad pertenecían a otro. Estas confusiones se debían principalmente a mi conocimiento limitado sobre el modelo. Sin embargo, conforme se fueron ejemplificando por parte del titular de la asignatura, todo fue quedando un poco más claro. Iniciando con ello a reconocer la importancia de los dos dominios que se abordaron: el MK y el PCK.

Dentro del MK, debo decir que los conocimientos sobre matemáticas que yo reconocía eran principalmente del KoT, no había reflexionado sobre la importancia de los conocimientos que debe tener el profesor sobre las matemáticas en relación a las distintas conexiones entre los objetos matemáticos y sobre la manera de “hacer matemáticas”. Aunque de alguna manera sí relacionaba la importancia de conocer los conocimientos previos que debiera tener el alumno y los aprendizajes de los próximos ciclos como vitales para determinar las formas y alcances de la enseñanza; no lo había visualizado desde el contexto de la propia matemática. En este sentido, las conexiones de complejización y simplificación de alguna

manera me fueron evidentes, sin embargo, los de contenido transversales y auxiliares sí fueron completamente nuevos para mí.

En cuanto al KPM, es quizás el que más complejo de identificar me parece; sin embargo, entiendo por este subdominio como aquellos conocimientos que tiene el profesor sobre cómo practica la matemática, cómo hace matemáticas, cómo reflexiona. En cuanto al KoT, la categoría de la fenomenología, la reconocía previamente como un conocimiento secundario, tipo “curiosidad” que en algunas ocasiones podría servir para explicar la parte práctica de algún objeto matemático; sin embargo, no era consciente de su importancia como conocimiento del profesor. El resto de categorías me eran más cercanas, que si bien, no las domino, si me eran más evidentes ya que abarcan los conceptos.

Por lo anterior, es que analizar el dominio del MK me permite reconocer que éste es mucho más amplio y rico de lo que originalmente conocía.

Por otro lado, dentro del PCK, tenía un conocimiento mezclado donde integraba en un mismo aspecto a la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, a partir del análisis de este dominio me percaté de la importancia de diferenciar puntualmente estos dos conocimientos en los subdominios de KFLM y KMT ya que esto nos permite autoanalizarnos acerca del proceso completo de la educación, tanto la forma en cómo enseñamos y la forma en cómo aprenden los alumnos. Ya que, si bien se da primero la enseñanza y luego el aprendizaje en el aula, al planearse una clase debe ser analizado desde la perspectiva inversa, es decir, cómo aprenden los alumnos para luego diseñar la forma de enseñanza.

En este sentido, me parece bastante valioso el reconocer la importancia de los conocimientos sobre teorías de aprendizaje (oficiales o empíricas), las fortalezas y dificultades relacionadas al aprendizaje, las concepciones que tienen los alumnos respecto a determinado objeto matemático; pero sobre todo, las formas de cómo el alumno interactúa con el objeto matemático, ya que éste conocimiento no siempre es bien valorado y generalmente viene desde la experiencia o de la lectura de mucha literatura existente, a mi modo de entender. (Rob, RFP1)

Rob destaca sus propias oportunidades de aprendizaje y conflictos a los que se enfrentó en un primer acercamiento al modelo MTSK, al llenar el concentrado de conocimientos.

Jo: *El trabajo realizado bajo el MTSK, me permitió conocer de primera mano los conocimientos que como profesor debo tener y esto me invitó a reflexionar y revisar mis conocimientos y darme cuenta de que aún hay muchas cosas sobre las cuales debo seguir trabajando, también ver que hay saberes que en ningún momento había considerado, como por ejemplo la fenomenología. También me resultó muy significativo el poder estudiar el MTSK pero a su vez el poder llevarlo a la práctica, creo que fue una muy buena oportunidad para profundizar un poco más y poner de forma más práctica su relación con los conocimientos del profesor y cómo estos si generan o producen cambios en la enseñanza y aprendizaje, ya que por medio de él como profesor pude considerar previamente todo lo que se iba a poner en juego, de alguna forma preparado para lo que podía ocurrir en una clase y tener mayor seguridad de cómo atender lo que pudiera ocurrir y direccionar hacia el aprendizaje que esperaba con mis estudiantes. (Jo, RFP1)*

Jo menciona elementos que le parecen importantes tanto en el llenado del concentrado de conocimientos como en la realización de la planeación y de la ejecución de la planeación en el aula.

2. ¿Qué me puede servir?

Rob: *El realizar una tabla con los indicadores a partir del MTSK me permite realizar una reflexión más profunda acerca del objeto matemático a enseñar, visualizar los alcances que este conocimiento conlleva y los conocimientos previos necesarios para poderse abordar. Así como todo el contexto matemático que describe, origina, representa y aplica al objeto matemático. En este sentido, es un buen parámetro de autoanálisis sobre lo que se conoce y desconoce del objeto matemático que permita capacitarse antes de llevarlo a cabo en el aula, de tal manera que esto evite comentar incongruencias, verdades a medias o falsas que pudieran originar obstáculos didácticos para el alumno que luego le sean difíciles de erradicar. (Rob, RFP2)*

Jo: *Me puede servir acerca de cómo fortalecer mis conocimientos para lograr una enseñanza y aprendizaje más efectivo, que todo esto depende de mí y de mi compromiso con ser un mejor profesor. Me puede servir que para ver cambios debo comenzar por prepararme lo más que pueda, que no puedo decir o contemplar que ya domino un conocimiento ya que siempre va a existir algo más por aprender y que no solo se relaciona con el estudiar, leer, investigar, que también parte de lo que yo pueda compartir y recibir de otras personas, que mis colegas profesores también son una oportunidad de aprendizaje, que no debo ser solo yo, que en comunidad puedo crecer aún más, puede socializar, compartir y adaptar estrategias y saberes que puede favorecer mi práctica.*

Me puede servir el tener presente lo que es la identidad del profesor, cuál es mi identidad o qué clase de profesor deseo ser a futuro, que ese debe ser un foco que no debo perder y así cada día de a poco ir avanzando de forma consciente y comprometida hacia esa meta, que como tal es un proceso que poco a poco irá por sí mismo dando resultados y estos serán evidentes por sí mismos. Otro aspecto importante que considero me puede servir es el de sacar espacios para analizar y reflexionar sobre todo lo que acontece en mi práctica, reflexionar es un momento para mí mismo, que me permite autoevaluarme y en ese sentido poder identificar con mayor detenimiento cada uno de los momentos de una clase, lo bueno, lo no tan bueno y aprender de ello. Un espacio para saber que lo que estoy haciendo realmente está siendo efectivo y a su vez para ver que debo mejorar, todo esto para seguir creciendo y adquiriendo conocimientos en favor de mi propia práctica. (Jo, RFP2)

Rob y Jo expresan aspectos de bondades de utilidad que ven en el uso del MTSK, sin embargo, Jo también da cuenta de matices que corresponden a la reflexión sobre la práctica (Shön, 1987).

3. ¿Cómo me puede servir?

Rob: *El concentrado de indicadores del MTSK me sirve como una guía relativamente rápida de elaborar que me permite reflexionar sobre los conocimientos*

que tengo, o no, sobre un determinado objeto matemático. A partir de los cuales, me permite prepararme de mejor manera al identificar mis áreas de oportunidad y atenderlas a través de la elaboración del propio concentrado de indicadores. Asimismo, las columnas del por qué, para qué y el ejemplo, son un apoyo de reflexión sobre el conocimiento identificado, ya que esto hace pensar sobre sus causas y efectos, tanto para el docente como para el alumno. (Rob, RFP3)

Jo: *El MTSK me puede servir como un modelo para apoyar mi enseñanza referida a los diferentes contenidos, ya que puedo volver sobre él en cualquier momento para revisar los conocimientos que debo considerar con respecto a la enseñanza y aprendizaje de un contenido y en este sentido ser mi referente a la hora planear, haciendo mi mayor esfuerzo por emplearlo lo mejor que pueda, pero con más certeza de que por medio de él voy a mejorar mis conocimientos y que de su aplicabilidad voy a estar más cerca de alcanzar el profesor en que deseo convertirme. (Jo, RFP3)*

Rob remarca la importancia de que estén incluidos el “Por qué”, “Para qué” y el “Ejemplo” en el llenado del concentrado de conocimientos, mientras que Jo hace referencia al MTSK como recurso referente a la hora de hacer una planeación de enseñanza para ir mejorando su práctica docente.

4. ¿Para qué me puede servir?

Rob: *El concentrado de indicadores del MTSK me sirve para realizar un autoanálisis de mis propios conocimientos y áreas de oportunidad respecto a un objeto matemático. A partir de los cuales logre atenderlos para estar mejor preparado y capacitado para enseñar dicho objeto matemático. Mejorando de esta manera mi desarrollo profesional al impartir clases mejor estructuradas que logren un mejor aprendizaje en mis alumnos, lo cual es el propósito de toda mi actividad docente. En este sentido, identifico que mis mayores áreas de oportunidad en este momento son el KSM, el KPM, y la fenomenología en el KoT. (Rob, RFP4)*

Jo: *El MTSK es otro aspecto fundamental dentro de los que ahora considero me puede servir para seguir aprendiendo y fortaleciendo mis conocimientos, ya que este semestre me permitió darme cuenta de la importancia de poder tener un modelo que me permita a mí mismo como profesor evaluar mis saberes en cuanto a un contenido escolar, es decir, no se trata de un modelo que me muestra los conocimientos que no tengo, sino más bien lo veo como un referente de apoyo que orienta al profesor, en mi caso lo veo así, como una guía que indica de forma precisa unos aspectos centrales y que como profesor debo conocer, por tanto si no estás en esa línea, puedas reflexionar pensando en el qué vas a hacer para mejorar en aquello que aún presentas alguna carencia. (Jo, RFP4)*

Rob y Jo ven al MTSK como instrumento de autoperfeccionamiento como profesores de matemáticas.

5. ¿Qué cambiaría en mí?

Rob: *El concentrado de indicadores me hizo reflexionar sobre la importancia de los distintos conocimientos especializados que debe tener el profesor, por tanto,*

cambiaría en mí el pensamiento de que no hay nada más que aprender sobre cierto objeto matemático, ya que, esta actividad me abrió los ojos en el sentido de darme cuenta todo lo que conlleva el proceso de enseñar matemáticas y lo que se debe conocer para hacerlo con calidad. (Rob, RFP9)

Jo: *Yo cambiaría la forma en que planeaba con anterioridad. Considero que antes la planeación la enfocaba pensando en mí, pensando en que conocimientos necesitaba impartir y así mismos que didácticas ya conocía para aplicarlas y que ejemplos me gustaban y con cuales yo me sentía más cómodo, sin embargo, muy pocas veces tenía en cuenta a mis estudiantes, es decir, no pensaba en qué dificultades ellos podrían estar presentando y su origen, teniendo en cuenta que las podría estar causando yo mismo con mi enseñanza o que fuesen propias de las matemáticas, en general, no pensaba en la forma en que mis estudiantes piensan, en cómo ven las matemáticas o de qué manera razonan al resolver y al enfrentarse ante situaciones donde deben aplicar las matemáticas que les enseño. Por lo cual, creo que este ha sido uno de los grandes aportes y cambios que he tenido en el transcurso de este año, el pensar mientras planeo en mis estudiantes y en cómo esos conocimientos van a tomar sentido en mi aula.*

Aprendí que mi aula es un espacio no solo de aprendizaje para mis estudiantes sino también para mí, donde puedo aprender de mí mismo, de mis estudiantes y la interacción con ellos, que esto me lleva a conocer el trabajo que yo mismo realizo y a identificar qué estoy haciendo mal para saber en qué debo mejorar. (Jo, RFP9)

Rob y Jo mencionan aspectos de cambios necesarios en su práctica como profesores de matemáticas a partir del uso del modelo MTSK en lo encomendado en el curso.

6. ¿Cómo inducir ese cambio?

Rob: *Concentrado de indicadores: Mediante la reflexión, información, aplicación y retroalimentación de los conocimientos especializados que debo tener como docente de matemáticas. Ese proceso es fundamental para reconocer y valorar la importancia de todos estos conocimientos especializados que permitan comprometerme y concientizarme genuinamente por nuevas alternativas de educación. (Rob, RFP10)*

Jo: *Todo me ha servido para reflexionar en torno a mi práctica, ya que es aprender, pero a su vez contrastarlo con mi práctica comenzar a ser más consciente de todo lo que acontecía a mi alrededor y que desconocía, ahora ya puedo tener una base para poder analizar el por qué puede suceder algo con mis estudiantes, si realmente están aprendiendo, si desde mi enseñanza estoy favoreciendo realmente el aprendizaje de las matemáticas, analizar creencias y concepciones y su influencia en mis clases, es decir, ya puedo ver todo un panorama que anteriormente era desconocido y por tanto, creo que ya el poder reconocer todo ello ya me ha inducido hacia un cambio, un cambio para buscar hacer las cosas diferente, de que mi enseñanza sea cada vez más efectiva. De esta manera lo siguiente, es no solo quedarme con lo que ya identifiqué sino comenzar a realizar acciones desde mi práctica para que mi enseñanza y el aprendizaje de mis estudiantes sea cada vez más significativo. (Jo, RFP10)*

Rob y Jo expresan ideas de cómo inducirían sus propios cambios mencionados en la reflexión de la pregunta anterior, a fin de mejorar su práctica como profesores de matemáticas.

Los profesores Rob y Da agregan al final:

Rob: *Por otro lado, para aprender más, en este momento, se me dificultó el tiempo. En ese sentido, debo aprender a organizar de mejor manera mis tiempos para poder dedicarle tiempo significativo (y no por cantidad) a cada una de las actividades que realice, desarrollando en ese sentido mis planeaciones de clase de manera más integral con su respectivo proceso de reflexión. (Rob, RF)*

Da: *Creo que mis conocimientos matemáticos necesitan ser trabajados, llevaba alrededor de 3 años siendo profesora de primaria, específicamente de niños entre los 7 y 10 años donde la matemática que enseñaba giraba en torno a las operaciones básicas y aspectos geométricos básicos al igual que estadísticos. Ahora desde hace unos tres meses logré iniciar a trabajar con carreras técnicas y tecnológicas donde el área de matemáticas se centra en matemática fundamental que comprende el trabajo de todos los conocimientos que se adquieren en secundaria y bachillerato, esto ha sido para mí una experiencia compleja porque he tenido que retomar aspectos que no estudiaba desde la universidad y que me ha costado comprender porque no reconozco fenomenología por ejemplo de ecuaciones; los conocimientos de las estructuras de las matemáticas en cuanto a las conexiones se me ha hecho complejo el poder conocerlas e inclusive el conocimiento de la práctica de las matemáticas. Estoy muy feliz en esta nueva experiencia pero que me llena de retos, necesito conocer las matemáticas que enseño así que ahora debo lograr profundizar, conocerla, manejarla y adquirir conocimientos didácticos que no me lleven solamente a la aplicación de fórmulas o procedimientos, que me permitan lograr que mis estudiantes realmente comprendan el sentido y los aportes que lo que les enseño tienen para sus vidas y más que nada, estar preparada para sus preguntas, dudas y cuestionamientos.*

El modelo MTSK me ha servido mucho en este nuevo cambio, no voy a afirmar que he analizado todas mis planeaciones a la luz de este, pero si he intentado reconocer aspectos de cada categoría y realmente me falta, me falta abundar y me falta conocer. Creo que el tiempo y la práctica me ayudará a lograrlo, sin embargo, es algo en lo que ya estoy trabajando, porque sé que lo debo lograr. (Da, RF)

Rob y Da hacen mención de algunas dificultades, su preocupación pero en el caso de Da, también su felicidad con esta nueva experiencia durante el proceso del curso.

CONCLUSIONES

Investigar y reflexionar acerca de los procesos de la formación de los futuros profesores y profesores de matemáticas es sumamente importante, pues un elemento clave para lograr el aprendizaje de los estudiantes es la riqueza y consolidación de su formación (Darling-Hammond, 2000; Darling-Hammond et al., 2009; Ramos-Rodríguez et al., 2022). En dichos procesos, el conocimiento especializado juega un papel fundamental.

Usar el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) en la formación de futuros profesores y profesores de matemáticas requiere compromiso, responsabilidad, paciencia y tenacidad tanto por parte de ellos mismos como de su formador, en particular en el llenado del concentrado de conocimientos, el diseño de la planeación, la puesta en común de ésta, el análisis y la propuesta de mejora. El MTSK ha servido de guía a los profesores para autoevaluarse, identificando en su persona hasta qué punto tiene o no los conocimientos establecidos en el modelo. Significa cambiar la visión de una planificación común y corriente, buscar, diseñar actividades y conectarlas. Además de profundizar en la búsqueda de los conocimientos requeridos por el profesor de matemáticas, es importante tomar conciencia de en cuáles conocimientos prestar mayor atención y tomar eso como un reto, como áreas de oportunidad para mejorar su propia práctica docente. El MTSK brinda al profesor una oportunidad de aprendizaje.

El proceso de llevar a cabo el llenado del concentrado de conocimientos, la planeación, ejecución, análisis y propuesta de mejora, visto como un proceso más que como un resultado, puede ayudar a construir, desarrollar y mejorar conocimientos que, en su conjunto, se conviertan en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Más aún, no se debe dejar de lado la importancia de las tareas o actividades que se realicen en los cursos de formación de profesores para potenciar el uso del MTSK en el vínculo teoría-práctica, además de la relevancia del acompañamiento cognitivo y emocional que se debe de dar a los (futuros) profesores, a fin de que sea mejor aprovechado el proceso que se da durante el uso del MTSK, y, por supuesto el papel significativo que juega la reflexión durante todo el proceso y desarrollo del MTSK en la formación (inicial o continua) de profesores.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue desarrollada al amparo de la Red Iberoamericana MTSK (auspiciada por la AUIP) y del Proyecto de Investigación PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España.

REFERENCIAS

- Ball D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bini, G., Bikner-Ahsbahs, A. & Robutti, O. (2022). “How to meme it”: reverse engineering the creative process of mathematical Internet memes. *Educational Studies in Mathematics*, 112(1), 1–34.
<https://doi.org/10.1007/s10649-022-10173-1>

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985–2994). <https://bit.ly/3QkvIHt>
- Castellanos, M. T., & Moreno, A. (2022). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre las tareas de enseñanza. En J. A. Fernández-Plaza, J. L. Lupiáñez, A. Moreno, & R. Ramírez (Coords.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia* (pp. 95–115). Octaedro.
- Darling-Hammond, L. (1998). Teacher learning that supports student learning. *Educational Leadership*, 55(5), 6–11. <https://bit.ly/49gjZ5t>
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement. *Education policy analysis archives*, 8(1), 1–44. <https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000>
- Darling-Hammond, L., Johnson, C., & Chung Wei, R. (2009). Teacher preparation and teacher learning: A changing policy landscape. En: G. Sykes, B. Schneider, & D. N. Plank (Eds.). *Handbook of education policy research* (pp. 613–636). Routledge.
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Heath.
- Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(4), 139–158. <https://bit.ly/3tR8mBA>
- Guadarrama, A., Mendoza, C., Díaz, J., & Becerril, F. (2018). El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas. En Virtual Educa (Ed.), XIX Encuentro Internacional Virtual Educa Bahía 2018. Virtual Educa. <https://bit.ly/40o9OaI>
- Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. En: M. A. K. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (ed.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 361–392). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_12
- McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M.D., & Senk, S.L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 584–615. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.5.0584>
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2018a). *The Future of Education and Skills Education 2030*. OECD. <https://bit.ly/3QE0oVo>
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2018b). *PISA 2021. Mathematics Framework*. OECD. <https://bit.ly/40ISq6E>
- Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method*. Stanford University. <https://bit.ly/3QJijyl>

- Ramos-Rodríguez, E., Rojas, N., Valenzuela, M., & Martínez, M.V. (2022). Aportes teóricos a la formación de profesores desde tesis doctorales y su desarrollo en la educación matemática en Chile. En J. A. Fernández-Plaza, J. L. Lupiáñez, A. Moreno, & R. Ramírez (Coords.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia* (pp. 95-115). Octaedro.
- Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, Carrillo, J., & Pino-Fan L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Shulman, L.S. (1986) Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
<http://dx.doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Sosa, L. (en prensa). El diseño de memes matemáticos como movilizador de conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista del Consejo Zacatecano de Ciencia y Tecnología*.
- Sosa, L., Flores Medrano, E., & Carrillo Yáñez, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173–189.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522>
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151–174.
<https://doi.org/10.24844/EM2802.06>
- Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (157–223). National Council of Teachers of Mathematics-Information Age Publishing. <https://bit.ly/3siB1zc>
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudios de casos*. Ediciones Morata, S. L.
- Zakaryan, D., & Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71–97. <https://doi.org/10.24844/em3301.03>

Diseño de tareas por variación para promover la argumentación

Wilmer Ríos-Cuesta¹

RESUMEN

Las tareas presentadas en los libros de matemáticas diseñados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia no suelen abordar diversos registros de representación semiótica que promueva que los estudiantes construyan su conocimiento y que atiendan la complejidad de los conceptos, el contexto, el razonamiento matemático y la argumentación. En ese sentido, el objetivo de este estudio fue ejemplificar la creación de problemas por variación de uno ya dado en el libro de texto de matemáticas. Para esto, se tomó como referente un libro de texto de matemáticas de 7° grado de educación secundaria donde se abordan los conceptos de área y perímetro de cuadriláteros. Se concluye que el diseño de tareas por variación es una oportunidad para que los profesores aumenten su comprensión de los objetos matemáticos y tomen en consideración el conocimiento que tienen sus estudiantes; además, se pueden identificar oportunidades de argumentación al establecer conexiones intramatemáticas y extramatemáticas al relacionar los conceptos que poseen los estudiantes y varios registros de representación.

PALABRAS CLAVE

Diseño de tareas, Variación de tareas, Argumentación en clase, Libros de texto, Gestión de clase.

¹ wilmer.rios@correounivalle.edu.co

Universidad del Valle. Cali, Colombia

<https://orcid.org/0000-0001-8129-2137>

INTRODUCCIÓN

El libro de texto es un insumo importante en la construcción de los currículos de las instituciones educativas en Colombia. El Ministerio de Educación Nacional se encarga del diseño de la política educativa mediante orientaciones y directrices que permiten formular los planes de estudio que se ejecutan en las escuelas y colegios del país. En su diseño se aterrizan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006), los Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2016) y las Mallas de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2017a), todo esto a través del Proyecto Educativo Institucional, mediante el cual se da la autonomía a las instituciones educativas para elaborar el currículo que es ejecutado a través del Plan de Aula por cada uno de los profesores encargados de la asignatura.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Nacional asume una postura sobre el aprendizaje de las matemáticas desde el enfoque de desarrollo de competencias que deben adquirir los estudiantes en su interacción en el aula. En particular, en el documento de Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) se alude al término competencia para referirse al “aprendizaje significativo y comprensivo” (p. 49), para lo que se requiere “de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 49). Además, en dicho documento se hacen precisiones sobre algunos procesos existentes en la actividad matemática, entre ellos la argumentación, donde se solicita a los profesores “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 51) y “utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 51). Ahora bien, la discusión se centra sobre lo que se plantea en el documento de Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y lo que se propone en los libros de textos que son publicados por el Ministerio de Educación Nacional. En ellos se observa que gran parte de las tareas propuestas apuntan a la ejecución de algoritmos, esto, según la clasificación propuesta por Smith y Stein (1998), se sitúa en procedimientos sin conexión. Este hecho en particular supone una contradicción entre las orientaciones y políticas formuladas por el Ministerio de Educación y su puesta en escena a nivel curricular.

Un asunto importante relacionado con el aprendizaje de las matemáticas se refiere a la mediación del profesor, la cual constituye un aspecto fundamental al situarse entre las políticas ministeriales y los libros de texto que supone, además, que el profesor reconozca la actividad cognitiva que se espera promover con las tareas del libro de texto, y lo que su experiencia y conocimiento sobre el desarrollo de competencias le permita identificar en ellas para proponer cambios que favorezcan el aprendizaje. Aquí se destaca el enfoque sociocultural sobre el aprendizaje de las matemáticas y el papel mediador de las tareas. El profesor tiene la función de orientar a los estudiantes, promover el uso de diversos registros de representación y cuestionar la validez de las afirmaciones que producen buscando la precisión de las ideas, generando ambientes de argumentación (Urhan & Zengin, 2023).

Daher (2014) destaca la importancia del profesor en la mediación de los diferentes registros semióticos y las relaciones que los estudiantes construyen con los objetos matemáticos donde reconocen su naturaleza abstracta, pero advierte que se puede acceder a ellos mediante sus registros de representación y definiciones. Otros estudios, como los de Berger (2009) se apoyan en las múltiples representaciones que ofrece el Sistema de Álgebra Computacional (Computer Algebra System –CAS–) para afirmar que los Entornos de Geometría Dinámica facilitan el aprendizaje de los estudiantes aun cuando ellos no posean destrezas en el manejo de herramientas tecnológicas. Capone et al. (2021) desarrollaron un experimento en el cual promovieron la articulación de diversos registros de representación y la argumentación en estudiantes de secundaria; en su investigación registraron algunas dificultades para pasar del registro gráfico o simbólico al textual, observando también barreras cognitivas al traducir enunciados verbales y argumentarlos.

Por otro lado, la argumentación es una competencia que permite al profesor identificar los razonamientos de los estudiantes y mediar conforme a las inferencias que realiza sobre su actividad cognitiva. Sin embargo, en la literatura científica se informa que los estudiantes presentan dificultades al momento de argumentar sus producciones (Goizueta, 2015; Ríos-Cuesta, 2021a) y coordinar varios registros semióticos (Duval, 2006), otros estudios reportan que algunos estudiantes evaden el conflicto cognitivo en clase al adherirse a las explicaciones que ofrece el profesor o los estudiantes destacados, sin que esto signifique que hayan comprendido la actividad que se desarrolla en ese momento (Castellaro & Peralta, 2020). Además, en diversos estudios se reportan algunas dificultades que experimentan profesores para argumentar, promover argumentos y atender la argumentación de los estudiantes (Zhao et al., 2021). Este hecho constituye un reto que deben asumir los profesores que pretenden soportar su práctica de enseñanza en la argumentación como un mecanismo de validación y consolidación de los aprendizajes.

En tanto a la diferencia entre lo que se enuncia en los documentos normativos y lo que se plasma en los libros de texto, esta se puede conciliar mediante la articulación de registros semióticos en el diseño de las tareas que se proponen en clase. Para esto se debe brindar la oportunidad de reconocer la complejidad de los conceptos matemáticos que se ponen en juego y articularse con otros conocimientos necesarios para promover el desarrollo de competencias, por ejemplo, una tarea que pretenda desarrollar la comprensión del concepto de función debe promover el registro tabular, gráfico, algebraico y verbal, de modo que el estudiante gane claridad sobre lo que es una función. Lo anterior se plantea partiendo de la premisa de que las diversas representaciones semióticas de los objetos de conocimiento tienen un impacto positivo en la adquisición de habilidades de pensamiento que apoyan el razonamiento (Martí & Pozo, 2000).

Así pues, el profesor debe analizar las tareas de los libros de texto y enriquecerlas de acuerdo con los propósitos de la clase. Este tipo de acciones docentes requieren que se desarrolle la capacidad de seleccionar, modificar y crear problemas más productivos para la clase, lo que contribuye a ampliar el conocimiento matemático del profesor (Malaspina, 2016). Bonotto (2013) afirma que la creación de problemas permite superar las limitaciones de los problemas típicos presentados en clase. Una propuesta para crear y modificar las tareas de los libros de texto fue presentada por Malaspina (2013), quien resalta la necesidad de que el profesor desarrolle esta competencia para aprovechar su conocimiento del contexto, las motivaciones de sus estudiantes, graduar la dificultad de las tareas y convertirlo en una oportunidad para aclarar, ampliar o corregir las ideas sobre los conceptos que construyen. Además, Malaspina (op. cit.) señala que crear problemas es una forma de llenar el vacío existente en los libros de texto en lo relacionado con la resolución de problemas. La variación de problemas es la acción que realiza el profesor para tomar un problema ya planteado y modificarlo, ampliando el horizonte matemático de la tarea con el planteamiento de nuevos requerimientos o mixturas que enriquezcan el problema (Malaspina, 2016).

En este estudio se ha tomado la construcción de los conceptos de área y perímetro, dado que los estudiantes deben usar nociones previas sobre conteo, medición, ubicación espacial y distintos sistemas de representación (Aldana-Bermúdez & López-Mesa, 2016); además, los estudiantes colombianos comienzan a construir nociones sobre estos conceptos desde el grado tercero, de modo tal que en el grado séptimo ya deben haber logrado una definición sólida que les permita resolver problemas (ver Ministerio de Educación Nacional, 2016). Sin embargo, en la literatura se informa la dificultad de los estudiantes para diferenciar y usar estos conceptos (e. g. Mántica et al., 2002; Martínez-Artero & Nortes, 2013). Algunos errores se relacionan con

la aplicación de fórmulas o la confusión de las unidades de medida (Alguacil de Nicolás et al., 2016), situación que se debe, en parte, al uso excesivo de la memoria. Para tratar de resolver esta situación, Manotas y Rojas (2008) proponen que “deben tomarse como pretexto las situaciones problemáticas de la vida cotidiana para que el estudiante asimile de forma directa los conceptos pertinentes” (p. 69).

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este estudio es ejemplificar la creación de problemas por variación de uno ya dado en un texto de matemáticas de secundaria, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Se toma como objeto matemático la construcción de los conceptos de área y perímetro para estudiantes de grado séptimo para hacer una mixtura entre ellos, haciendo uso de diversos registros de representación semiótica.

APROXIMACIÓN TEÓRICA

Este apartado se ha subdividido en cuatro partes, las cuales, además de servir como unidades de análisis, permiten entender los elementos clave en el diseño de la tarea propuesta en este artículo. La subdivisión corresponde a: tarea matemática, creación de problemas, registros de representación semiótica y argumentación en clase.

Tarea matemática

Smith y Stein (1998) definen una tarea matemática como las actividades que potencialmente pueden mediar en el aprendizaje escolar. Stein et al. (2007) advierten que las tareas presentes en los libros de texto que son usados por los profesores determinan la manera como los estudiantes se acercan al conocimiento y cómo aprenden. Esto sucede porque en algunos libros de texto se presenta un algoritmo que permite resolver una tarea que sirve de ejemplo para desarrollar un concepto o idea, posteriormente, se les solicita a los estudiantes resolver tareas similares aplicando el mismo procedimiento. Así pues, este tipo de tareas rutinarias donde el estudiante debe aplicar un algoritmo no fomentan un pensamiento divergente, sino la memorización y ejecución de procedimientos (Jäder et al., 2020; Ríos-Cuesta, 2020, 2021b).

De acuerdo con lo anterior, se pretende desmitificar el hecho de que los problemas matemáticos tienen un solo camino de resolución que ha sido presentado previamente por el profesor. Dentro de las funciones del profesor no se pretende que se convierta en un expositor de cómo se resuelven los problemas, sino que debe promover el desarrollo de procesos de pensamiento que lleven a los estudiantes a desarrollar heurísticas y estrategias de razonamiento (Malaspina, 2006). Sepúlveda et al. (2009) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes van desarrollando procesos de pensamiento que

poco a poco se van ordenando hasta convertirse en habilidades que más adelante se convierten en heurísticas de resolución, lo que le permitirá abordar problemas más complejos.

Creación de problemas

Para hablar de creación de problemas es necesario asumir una postura sobre lo que esto significa y sus posibles implicaciones en el diseño de las tareas. Resnick y Glaser (1976) definen un problema como aquello de lo cual no se tiene experiencia para resolver. Liljedahl (2008) afirma que aquellas tareas que puedan abordarse de manera deliberada, donde el resolutor pueda ver cómo solucionarlo, se concibe como un problema rutinario que no conduce a un descubrimiento importante. En consecuencia, un problema requiere una comprensión creativa de parte del resolutor que le permita probar diversos caminos hasta encontrar una respuesta (Liljedahl, 2008).

Para la creación de problemas, nos alineamos con la propuesta de Malaspina (2013) y Malaspina y Vallejo (2019), mediante la variación de un problema dado en un libro de texto, el cual consiste en construir un nuevo problema mediante la modificación de elementos o parámetros del problema. Para ello, se deben tener en cuenta cuatro elementos fundamentales en las tareas, que son: 1) información, 2) requerimientos, 3) contexto y 4) el entorno matemático (Malaspina & Vallejo, 2019). La información hace referencia a los datos cuantitativos necesarios para el problema. El requerimiento es lo que se le pide al estudiante en la tarea. El contexto hace referencia a que la situación que se le plantea al estudiante sea familiar o que se relacione con su realidad. El entorno matemático se refiere a los conceptos involucrados o que potencialmente pueden emerger al tratar de resolver la tarea.

Registros de representación semiótica

La forma de relacionarnos con los objetos matemáticos es por medio de sus propiedades, definiciones o registros semióticos, y esto es porque no son objetos físicos. Las representaciones semióticas permiten la manipulación física o mental de dichos objetos (Duval, 2004). Sin embargo, dependiendo del nivel de comprensión del estudiante, este puede llegar a confundir un objeto con su representación (D'Amore et al., 2015). Entre los registros de representación se encuentra el algebraico, el tabular, el geométrico, el verbal y el gráfico, que son los que se tratarán de articular en esta propuesta.

Argumentación en clase

En la literatura científica coexisten diversas posturas sobre lo que se entiende como argumentación, cada una de ellas depende de la perspectiva teórica y epistemológica del investigador y del propósito dentro de la actividad que desarrollan. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006)

concibe la argumentación como un medio para acercar a los estudiantes a la prueba, lo que implica “saber dar y pedir razones, probar y refutar, y ojalá avanzar hacia la demostración formal” (p. 56). Douek (1999) entiende la argumentación como un proceso que genera argumentos conectados lógicamente, sin que esto suponga el uso de razonamientos formales o deductivos, de tal modo que se valoran todas las declaraciones, dibujos y datos numéricos usados para defender o refutar una afirmación.

Ahora bien, si uno se alinea con la perspectiva dialógica y social (Díez-Palomar & Olivé, 2015) en el aula de clase, ocurren intercambios comunicativos entre los estudiantes y el profesor. Esto permitió el desarrollo de la argumentación dialéctica donde ocurren debates y diferencias de opinión frente a los métodos de resolución y respuestas ofrecidas. Con esto se busca que la argumentación permita llegar a la aceptabilidad de las acciones, donde el argumento cumple la función de ser un procedimiento (Van Eemeren, 2018; Zamudio, 2012). En cambio, si lo que interesa es el resultado, la argumentación se focaliza en el argumento y se destaca el carácter lógico y las cadenas de razonamiento ofrecidas para llegar a una conclusión, en consecuencia, el investigador se sitúa en la perspectiva lógica que busca acercar a los estudiantes a la prueba formal (Fiallo & Gutiérrez, 2017; Molina et al., 2019). Si el interés se sitúa en observar la forma en que se busca convencer o persuadir a otro, se está frente a la perspectiva retórica, y la argumentación es vista como un proceso que se asocia con la lógica informal (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2006; Zamudio, 2012).

Con estos elementos, el profesor organiza la actividad en el aula y se prepara para orquestrar discusiones productivas que lleven a los estudiantes a comprender la actividad que realizan, así como distinguir los caminos seguidos por sus compañeros al resolver los problemas propuestos y reconocer los razonamientos que los llevaron a una solución o estancamiento.

MÉTODO

Esta investigación se basó en el análisis de la propuesta de Malaspina y Vallejo (2019), la cual se usó para sostener el diseño de una tarea que permitiera avanzar en la comprensión de los conceptos de área y perímetro. Además, se buscaba que promoviera la argumentación en clase como un mecanismo para que el profesor identificara los razonamientos de los estudiantes y los ayudara a conectar sus conocimientos previos y relacionar estos conceptos con elementos de su entorno.

Asimismo, se tomó como muestra el libro más reciente publicado por el Ministerio de Educación, ya que este recoge la visión actual sobre el desarrollo de competencias y la manera como se articulan los documentos normativos del país en materia educativa.

Enfoque investigativo

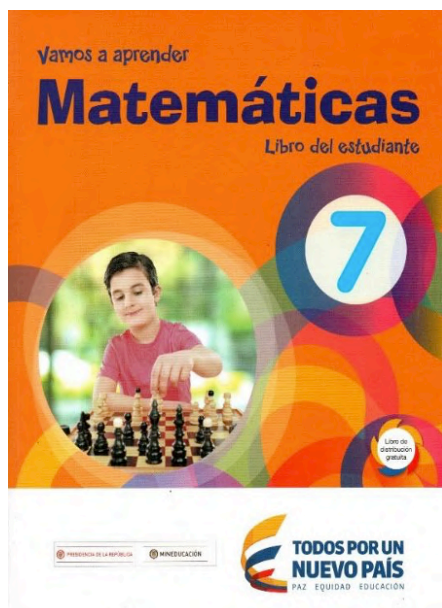
La investigación se sitúa en el paradigma cualitativo con un enfoque exploratorio y descriptivo, teniendo en cuenta que se propuso ejemplificar la variación de dos problemas dados para atender el desarrollo de los conceptos de área y perímetro. La variación se realiza considerando el conocimiento sobre los estudiantes, de su entorno sociocultural, de los elementos matemáticos presentes en la tarea y la aplicabilidad de los conceptos que emergen, los cuales, en última instancia, pretenden causar un giro sobre la concepción utilitaria de la matemática a otro funcional.

Tipo de investigación

Se presenta una investigación situada en el paradigma cualitativo mediante un estudio de caso único (Stake, 2010), que consistió en el análisis de un libro de texto de matemáticas de distribución gratuita en las instituciones educativas del país.

Figura 1

Carátula del libro analizado



Nota. Fuente: Carátula del libro (Ministerio de Educación Nacional, 2017b)

Muestra

Se hizo una revisión de los libros de texto publicados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en los últimos años. Posteriormente se seleccionó el libro de texto “Vamos a aprender Matemáticas: Libro del

estudiante” de grado séptimo (Figura 1), publicado bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (2017b), donde se aborda la construcción de los conceptos de área y perímetro. Su elección obedece a que es el último texto elaborado con las directrices ministeriales producto de la agenda 2015-2025, donde se asume el reto de hacer de Colombia una de las naciones más educadas de América Latina (Ministerio de Educación Nacional, 2017b).

Diseño

De este texto se seleccionaron dos tareas, una relativa a cada concepto, donde se les pide a los estudiantes hacer cálculos. Después, se hace una mixtura de las tareas y se propone una nueva situación enriquecida que trata de articularlos e ir un poco más allá al solicitarles el reconocimiento y la aplicación de estos conceptos para tomar decisiones mediante la comparación de resultados. Para ello, se identificaron y modificaron los cuatro elementos sugeridos por Malaspina y Vallejo (2019): 1) información, 2) requerimientos, 3) contexto y 4) el entorno matemático. Primero, se presentan las tareas tal como aparecen en el libro de texto, posteriormente se presenta la variación hecha y la mixtura de las tareas.

El papel del profesor

Dado que se propone que la actividad gire en torno a la argumentación de los estudiantes, el profesor debe generar espacios de discusión y gestionar, de acuerdo con la postura epistemológica que asuma sobre esta competencia, la manera como será usada para validar las ideas que construyen los estudiantes, tratando siempre de indagar sobre las garantías que usan (Ríos-Cuesta, 2022b) desde la propuesta de análisis estructural de los argumentos planteada por Stephen Toulmin. En consecuencia, nos alineamos con el diseño instruccional sugerido por Sepúlveda y Santos-Trigo (2006):

- 1) Actividad previa: el profesor da al grupo una breve introducción a la tarea con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.
- 2) Trabajo en equipos: se organiza al grupo en equipos de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte de solución.
- 3) Presentaciones: cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los demás estudiantes pregunten libremente a quienes exponen.

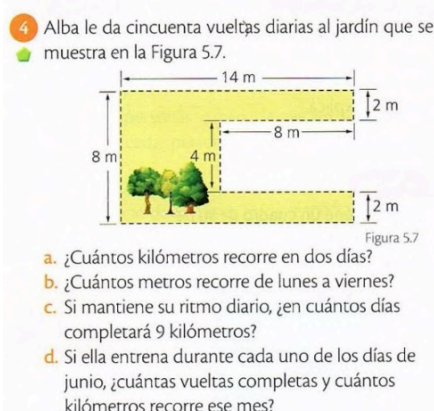
- 4) Discusión colectiva: el profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con el propósito de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema.
- 5) Trabajo individual: enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y abordarla individualmente, aplicando los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción. (Sepúlveda & Santos-Trigo, 2006, p. 1394)

Resultados

Los problemas abordados en los textos: perímetro (Figura 2) y área (Figura 3) se presentan a continuación:

Figura 2

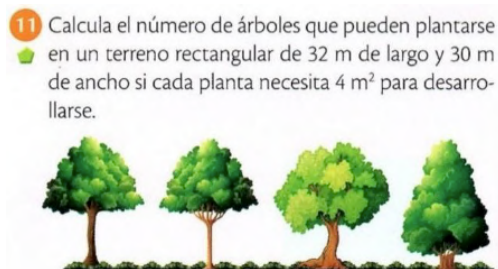
Problema sobre perímetro



Nota. Fuente: Ministerio de Educación Nacional, 2017b, p. 161.

Figura 3

Problema sobre área



Nota. Fuente: Ministerio de Educación Nacional, 2017b, p. 163.

Información: en la primera tarea se entrega la longitud de los lados del jardín. En la segunda tarea se entregan las longitudes del terreno, su forma y el área de cada árbol.

Requerimiento: calcular el perímetro, expresar el resultado en kilómetros, calcular el tiempo que toma recorrer una medida determinada. Calcular la cantidad de árboles que caben en el espacio determinado.

Contexto: extramatemático.

Entorno matemático: perímetro, conversión de unidades, área, división de números naturales.

La modificación de estas dos tareas, por variación, queda de la siguiente manera:

- Problema: La Familia Reyes tiene un terreno que desean dedicar al cultivo de café. Con el objetivo mirar la viabilidad de su idea, miden las dimensiones del terreno rectangular, y encuentran que mide 42 *m* de ancho y 50 *m* de largo. Necesitan estimar:
 - a. El terreno se va a cercar usando alambre para evitar que las personas lo invadan, se van a poner cuatro líneas paralelas ¿cuántos metros de alambre se necesitan para hacer el cerco? ¿Cómo puede representarse matemáticamente la expresión que permite calcular la cantidad de alambre requerido?
 - b. Si el metro de alambre cuesta \$25, ¿cuánto cuesta todo el alambre que necesitan? Si nos hacen un descuento del 20%, ¿Cuánto hay que pagar? ¿Cuánto nos descontaron?
 - c. Si nos ofrecen una segunda opción de alambre que viene en rollos de 50 m a \$960, ¿qué opción le conviene más?
 - d. Don Pedro, un trabajador que se dedica a la construcción, va a instalar la malla en el terreno, nos dice que se debe poner estacones para sostener la malla con una distancia entre ellos de un metro, ¿cuántos estacones se necesitan?
 - e. Si cada estacón vale \$30, ¿cuánto dinero hay que pagar por ellos?
 - f. Don Pedro cobra \$650 por día de trabajo para instalar la cerca y dice que se demora 8 días, ¿cuánto hay que pagarle?
 - g. Saúl Reyes debe aplicar un fertilizante disuelto en agua, pero antes debe determinar el área de la granja. Si le dicen que debe aplicar 280 gramos de fertilizante por cada 2 m², ¿cuántos kilogramos necesita aplicar? ¿Qué configuración geométrica permite tener un espacio dentro del terreno equivalente a 1800 m²?
 - h. Saúl fue a cotizar en una tienda agropecuaria y le han dicho que el bulto de fertilizante trae 21 kg, ¿cuántos bultos debe comprar?

- i. Cada bulto cuesta \$900, ¿Cuál es el valor que se debe pagar por los fertilizantes?
- j. Las plantas de café que Saúl quiere sembrar pertenecen a la variedad Coffea arabica, ya que esta se adapta a alturas entre los 600-2000 metros sobre el nivel del mar (msnm). El vendedor le recomienda sembrar 1 árbol por m2, ¿Cuántas plantas de café puede sembrar?
- k. Si cada planta de café cuesta \$8, ¿Cuánto debe pagar por ellos?
- l. ¿Cuál es el costo total que debe invertir la familia Reyes para llevar a cabo su idea?
- m. Con la distribución de las plantas de café se puede lograr una cosecha anual de 24 kg por cada planta sembrada. Sin embargo, si aumenta la densidad de siembra en un 25%, la producción se reduce a 20 kg por planta. Si la aumenta a 50% se reduce a 17 kg por planta, y si se aumenta la densidad de siembra un 75%, su producción disminuye hasta los 13 kg por planta. Finalmente, si se duplica la cantidad de plantas, estas no son capaces de producir. Completa la siguiente tabla con los datos y haz los cálculos pertinentes.

Cantidad de plantas	Área por planta	Rendimiento por planta	Producción total

- n. Ubique en un plano cartesiano los datos de la tabla, en las abscisas la cantidad de plantas y en las ordenadas la producción total. ¿Cuál es la cantidad ideal de siembra para maximizar la producción? ¿Qué puede decir sobre la relación entre el área por planta y la producción total?
- *Información:* medidas del terreno, precios del alambre, estacones, fertilizantes, mano de obra, palos de café.
- *Requerimiento:* calcular el perímetro para identificar la cantidad de alambre necesario para hacer el cerco, teniendo en cuenta que se necesita cuatro veces ese valor, y proponer una expresión matemática que permita hacer este cálculo. Determinar el precio de las dos ofertas de alambre y seleccionar la más económica, para lo cual es necesario calcular el porcentaje. Calcular el área del terreno y las dimensiones del espacio dentro del terreno para determinar el área pedida. Dividir el área del terreno entre la cantidad de fertilizante que debe usarse por metro cuadrado. Tabular el rendimiento de los palos de café de acuerdo

con su densidad, graficar estos valores y decidir sobre la cantidad óptima a sembrarse.

- *Contexto*: intramatemático y extramatemático.
- *Entorno matemático*: perímetro, área, función lineal, descomposición factorial, porcentajes, aumentos y descuentos, suma y multiplicación de números naturales, proporcionalidad directa, plano cartesiano.
- *Papel del profesor*: es importante que el profesor haga una serie de preguntas para conocer el estado actual de los conocimientos de sus estudiantes y hacer las aclaraciones al respecto para que puedan resolver la tarea que se les va a proponer, sin que esto signifique que anticipe todos los requerimientos que necesitan para hacerlo. La gestión de aula se orienta a generar espacios de discusión donde los estudiantes puedan presentar sus respuestas, con lo cual, se busca activar la argumentación. Además, debe alinearse con la propuesta de Sepúlveda y Santos-Trigo (2006).

En la modificación que se propone se resalta que el entorno matemático ha sido modificado sustancialmente para abarcar la mayor cantidad de contenidos matemáticos que hasta el momento han sido trabajados en los currículos institucionales, de acuerdo con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional de Colombia; además, se fomenta el desarrollo de pensamiento crítico y reflexivo que potencialice la toma de decisiones informadas. También se incluyen temas como el cálculo de porcentajes, que es una situación que puede presentarse en contextos reales cuando se realizan compras o la optimización de una inversión cuando se planea desarrollar proyectos de siembra y se requiera optimizar los recursos.

De este modo, la variación de problemas es una oportunidad para enriquecer las tareas, sin que esto signifique aumentar la dificultad de esta, sino que se potencia la toma de conciencia de las acciones y del papel de la formación matemática de los individuos. Con esto, las matemáticas cobran sentido para quien aprende, pues dejan de presentarse de manera aislada y se muestra cómo cada contenido aprendido es necesario y útil para resolver situaciones de contextos similares a la realidad.

Sobre la articulación de los registros semióticos en el numeral a puede resultar el registro algebraico y/o el geométrico dependiendo de la estrategia de resolución propuesta por el estudiante, el cual puede apoyarse en un dibujo del terreno y del cerco a instalar, o realizar los cálculos del perímetro y multiplicar este valor por cuatro; además, es necesario que el estudiante generalice una expresión algebraica que le permita calcular la cantidad de alambre. En los numerales *b* y *c* se requiere el uso del registro algebraico, el cálculo de porcentajes y tomar decisiones mediante la comparación de resultados. En el numeral *d*, el estudiante se puede apoyar en el registro

geométrico usando dibujos de la ubicación de los estacones y contarlos, también puede usar el registro algebraico mediante el conteo, o relacionando este valor con el perímetro. Los numerales *e* y *f* requieren del registro algebraico mediante la multiplicación de los valores obtenidos en el numeral anterior y el precio dado. El numeral *g* necesita del registro geométrico si el estudiante hace subdivisiones del terreno en áreas de 2 m^2 para luego contar cuántos kilogramos de fertilizante requiere; además, este registro le sirve para identificar la configuración geométrica del espacio pedido dentro del terreno, pero también puede utilizar el registro algebraico si realiza las operaciones entre el área total y el área que ocupa para cada 280 gramos de fertilizante. Los numerales *b* e *i* requieren del registro algebraico mediante operaciones aritméticas. El numeral *j* se puede resolver por el registro algebraico o geométrico dependiendo de la estrategia del estudiante, el cual puede realizar subdivisiones para ubicar cada planta de café y luego contarlos, o mediante operaciones aritméticas relacionando el área total con el área que ocupa para cada planta de café. Los numerales *k* y *l* se resuelven mediante el registro algebraico. El numeral *m* requiere del registro tabular, y el numeral *n* del registro gráfico que le permita identificar el comportamiento de la siembra. Esta información es útil para generar nociones sobre el concepto de función o relaciones de dependencia. A modo de resumen, en la Tabla 1 se presenta los registros semióticos usados en la tarea propuesta:

Tabla 1
Registros de representación semiótica que pueden surgir

Numeral	Registro
<i>a</i>	Algebraico y/o geométrico
<i>b, c</i>	Algebraico
<i>d</i>	Algebraico y/o geométrico
<i>e, f</i>	Algebraico
<i>g</i>	Algebraico y/o geométrico
<i>b, e, i</i>	Algebraico
<i>j</i>	Algebraico y/o geométrico
<i>k, l</i>	Algebraico
<i>m</i>	Tabular
<i>n</i>	Gráfico

Nota. Fuente: elaboración propia.

En la realización de las actividades, los numerales que permiten el uso de dos registros de representación pueden ser aprovechados por el profesor para fomentar espacios de argumentación mediante la discusión de los procedimientos realizados y de la razón por la cual decidieron usarlo. Esto

no significa que los otros numerales puedan ser usados con este propósito, pues los estudiantes pueden usar diversos razonamientos para llegar a una respuesta y, dependiendo del propósito del profesor, la argumentación puede ser usada como producto, procedimiento o proceso que sirva para avanzar en la comprensión de los conceptos de área y perímetro.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Reconociendo la emergencia de avanzar en la comprensión de las matemáticas escolares y desarrollar pensamiento crítico y reflexivo en el aula, la argumentación se sitúa como un camino previo que facilita el desarrollo de estas competencias. Esto, aunado con la resolución de problemas en contextos cercanos a los estudiantes, les permite poner en diálogo sus conocimientos previos con lo que aprenden. De este modo, las matemáticas cobran sentido y apoyan el razonamiento del estudiante, cuyo progreso se puede observar en la medida en que se avance en el diseño de tareas que promuevan diversos modos de pensamiento (Ríos-Cuesta, 2022a). Se reconoce la importancia de la mediación del profesor para lograr avances significativos en el aprendizaje escolar, lo que requiere un cambio en las dinámicas del aula y en la forma como se validan los conocimientos alcanzados (Ríos-Cuesta & Delgado-García, 2022).

Para que lo anterior se dé, es necesario que el profesor se apoye en la argumentación de los estudiantes, que identifique sus errores y los use para generar discusiones productivas que los lleven a la toma de conciencia sobre sus razonamientos y procesos llevados a cabo para responder las preguntas. El profesor debe trabajar permanentemente con los estudiantes para tratar de que hagan explícita la garantía usada en los argumentos que emerjan y que sirven de sustento para la toma de decisiones en los enunciados que así lo requieran.

Coincidimos con Malaspina (2016) en que la creación de problemas por variación tiene una fuerte conexión con la resolución de problemas y aporta al desarrollo de pensamiento matemático e inserción en la investigación de quien los crea. Con ella se busca establecer conexiones de las matemáticas con otras disciplinas y con los diversos conceptos que construyen los estudiantes. Además, estamos de acuerdo con Malaspina y Vallejo (2019) al afirmar que crear problemas es una tarea de los profesores y no puede delegarse a expertos, en particular porque el conocimiento del entorno sociocultural y de las especificidades de sus alumnos es un factor que no se tiene en cuenta en las tareas que se promueven en los libros de texto.

La variación de problemas permite que los profesores desarrollen competencias para leer el contexto, reconocer las habilidades de sus estudiantes y sus limitaciones, además, se pone de relieve el papel de la formación matemática en el desarrollo integral de las personas, buscando que sean

matemáticamente competentes para que tomen decisiones informadas y analicen de manera crítica y reflexiva la sociedad en la que viven. Se reconoce que hacer variaciones de los problemas es una oportunidad para que los profesores identifiquen los elementos constitutivos de la tarea que se plantea, y que orienten a sus estudiantes a que también los identifiquen para que puedan resolverlos (Malaspina, 2016). Con eso, tanto profesores como estudiantes pueden trabajar en el diseño de problemas como una actividad central en el desarrollo de las matemáticas, buscando plantearse buenas preguntas que lleven a la reflexión y toma de conciencia de sus acciones.

Por otro lado, el Ministerio debe actualizar los libros de texto teniendo en cuenta la falta de coherencia entre los documentos orientadores de la política educativa, los aspectos teóricos en los que se sustenta y su aterrizaje en los libros. Estos elementos generan crisis en el aula, pues los profesores confían en que las tareas que se presentan allí cumplen con los requerimientos y lineamientos curriculares, pero, tal como se presentan, es difícil que los estudiantes desarrollen las competencias que se espera que alcancen en su paso por la educación secundaria. Por ejemplo, se espera que el aprendizaje de los estudiantes esté mediado por diferentes registros de representación que favorezcan su acercamiento a las matemáticas como medio para expresar sus ideas y sustentar su punto de vista (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Otro aspecto que debe considerarse es que resolver problemas –como la variación propuesta– que generan una complejidad conceptual porque requieren el uso de diversos contenidos matemáticos, va a requerir un mayor tiempo y acompañamiento del profesor. Por esta razón, es necesario que los estudiantes trabajen en grupo escogidos estratégicamente para favorecer la cooperación entre pares, y luego puedan validar y consolidar los conocimientos en la discusión y presentación de ideas.

Finalmente, se resalta que abordar la mayor cantidad de registros semióticos es una forma de apoyar el aprendizaje escolar, pues se identifica la complejidad de los objetos matemáticos. Los estudiantes pueden construir fórmulas matemáticas sencillas dependiendo del nivel de abstracción que den cuenta de los procesos mentales que realizan, pueden registrar datos en tablas y graficarlos, y con ello tomar decisiones al observar el comportamiento de una variable. Con lo anterior, se espera que los profesores que usan los textos de matemáticas, en particular los del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, puedan hacer variaciones de las tareas propuestas para la clase, teniendo en cuenta las particularidades de sus estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia por la beca de Excelencia Doctoral del Bicentenario otorgada al autor de este estudio.

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle y se deriva de la tesis Implicaciones de la interactividad en la argumentación en clase de matemáticas realizada en el periodo 2018-2023.

Un agradecimiento especial a los revisores de este capítulo, por sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

- Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J. H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 7(1), 77–92. <https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n1.2016.5602>
- Alguacil de Nicolás, M., Boqué, M. C., & Pañellas, M. M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Revista INFAD de Psicología*, 1(1), 419–429. <https://doi.org/10.17060/ijodaep.2016.n1.v1.162>
- Berger, M. (2009). Mathematical Activity with a Computer Algebra System: A Semiotic Perspective. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 13(2), 30–43. <https://doi.org/10.1080/10288457.2009.10740655>
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 37–55. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7>
- Capone, R., Adesso, M. G., del Regno, F., Lombardi, L., & Tortoriello, F. S. (2021). Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 896–911. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1726517>
- Daher, W. M. (2014). Manipulatives and problem situations as escalators for students' geometric understanding: a semiotic analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(3), 417–427. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837527>
- D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Antecedentes ilustres de la paradoja cognitiva de Duval. En B. D'Amore & M. I. Fandiño-Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 133–158). Universidad de La Sabana. <https://bit.ly/3FFP70M>
- Díez-Palomar, J., & Olivé, J. C. (2015). Using dialogic talk to teach mathematics: the case of interactive groups. *ZDM*, 47(7), 1299–1312. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0728-x>

- Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125–139). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. <https://bit.ly/3SmeVGO>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145–167. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6>
- Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Repositorio TDX. <https://bit.ly/45YoO0i>
- Jäder, J., Lithner, J., & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1120–1136. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826>
- Liljedahl, P. (2008). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*. VDM Verlag.
- Malaspina, U. (2006). Problemas: oportunidades de aprendizaje para alumnos y profesores. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 688–694). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <https://bit.ly/3FAWV3M>
- Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 117–128). Sociedad de Educación Matemática Uruguay. <https://bit.ly/3sd40Eu>
- Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 11(15), 321–331. <https://bit.ly/3sd42fA>
- Malaspina, U., & Vallejo, E. (2019). Creación de problemas en la docencia e investigación. In U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Moshera S.R.L.-PUCP. <https://bit.ly/45O9Ee9>
- Manotas, M., & Rojas, C. J. (2008). Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios. *Zona Próxima*, 9, 60–69. <https://doi.org/10.14482/zp.09.380.56>
- Mántica, A. M., del Maso, M. S., Götte, M., & Marzioni, A. (2002). La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica. *Educación Matemática*, 14(1), 111–119. <https://doi.org/10.24844/EM1401.07>

- Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje*, 23(90), 11–30. <https://doi.org/10.1174/021037000760087946>
- Martínez-Artero, R. N., & Nortes, A. (2013). Perímetro y área. Un problema en futuros maestros. *Números*, 84, 65–85. <https://bit.ly/3QCXfoL>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas* (Vol. 2). Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Ministerio de Educación Nacional. (2017a). *Mallas de aprendizaje: matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2017b). *Vamos a aprender Matemáticas: Libro del estudiante*. Ediciones SM.
- Molina, O., Font, V., & Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1), 93–116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484>
- Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. Editorial Gredos.
- Resnick, L., & Glaser, R. (1976). Problem solving and intelligence. En L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 230–295). Lawrence Erlbaum Associates.
- Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa e Ensino*, 1, e202020. <https://doi.org/10.37853/pqe.e202020>
- Ríos-Cuesta, W. (2021a). Dificultades para argumentar el uso de registros semióticos en problemas de variación cuadrática. *Mendive. Revista de Educación*, 19(2), 446–457. <https://bit.ly/49dUOQY>
- Ríos-Cuesta, W. (2021b). Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 63, 196–222. <https://doi.org/10.35575/rvucn.n63a8>
- Ríos-Cuesta, W. (2022a). Garantías de los argumentos en clase de matemáticas mediados por el uso de software vs lápiz y papel. En N. Sgreccia (Comp.), *Memorias de las Segundas Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática* (pp. 249–262). Editorial Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. <https://bit.ly/3QkIROF>

- Ríos-Cuesta, W. (2022b). Modos de comprender y pensar de estudiantes de secundaria en la discusión de tareas matemáticas. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El alumno desde la teoría* (pp. 47–61). Editorial Lectorum. <https://bit.ly/40kkQxJ>
- Ríos-Cuesta, W., & Delgado-García, C. A. (2022). Efecto mediador de la interactividad en la argumentación: un giro en las normas sociomatemáticas. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El profesor factor importante en el aula* (pp. 1–17). Editorial Lectorum. <https://bit.ly/47cVgNC>
- Sepúlveda, A., Medina, C., & Sepúlveda, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(2), 79–115. <https://bit.ly/46Q4Ndr>
- Sepúlveda, A. y Santos-Trigo, L. M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática: estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1389–1422. <https://bit.ly/46ReFnv>
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(1), 344–350. <https://bit.ly/3tSaYPU>
- Stake, R. E. (2010). *Qualitative Research: Studying How Things Work*. Guilford Press.
- Stein, M., Remillard, J. T., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 319–369). Information Age Publishing.
- Urhan, S., & Zengin, Y. (2023). Investigating University Students' Argumentations and Proofs Using Dynamic Mathematics Software in Collaborative Learning, Debate, and Self-reflection Stages. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00207-7>
- Van Eemeren, F. H. (2018). *Argumentation Theory: A Pragma-Dialectical Perspective* (Vol. 33). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95381-6>
- Zamudio, B. (2012). Soportes de la argumentación. Lógica, dialéctica y retórica. Rihumso: *Revista de Investigación del Departamento de Humanidades y Ciencias Sociales*, 1(1), 1–9. <https://bit.ly/49hZJAs>
- Zhao, G., Zhao, R., Li, X., Duan, Y. y Long, T. (2021). Are preservice science teachers (PSTs) prepared for teaching argumentation? Evidence from a university teacher preparation program in China. *Research in Science & Technological Education*, 41(1), 1–20. <https://doi.org/10.1080/02635143.2021.1872518>

SEGUNDA TENDENCIA

SEGUNDA TENDENCIA ANÁLISIS DE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Análisis de tres problemas de probabilidad utilizados en la investigación

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez¹

RESUMEN

Los problemas que suelen utilizarse en la investigación didáctica para explorar las intuiciones y el razonamiento probabilístico de los estudiantes frecuentemente no son reelaborados para servir en la enseñanza del tema. La razón es que las explicaciones de los conceptos subyacentes de los problemas que exploran las intuiciones o razonamientos frecuentemente tienen un alto grado de dificultad. En particular, algunas ideas fundamentales de la probabilidad como Incertidumbre, Aleatoriedad y Variación deberían estar presentes en la enseñanza del tema de todos los niveles, pero su tratamiento genuino en las aulas no está del todo resuelto. No obstante, algunos problemas utilizados en la investigación y el uso de recursos tecnológicos pueden contribuir en su solución; además, se abre una ventana para abordar otros conceptos pertinentes de la estadística de manera embrionaria e informal, como distribución, distribución muestral y significación estadística. En este sentido, analizamos tres problemas extraídos de la literatura con el propósito de ofrecer pautas de cómo utilizarlos en la enseñanza de la probabilidad en los niveles básico y medio. Se concluye que, con ayuda de recursos tecnológicos, es posible utilizar en la enseñanza problemas complejos utilizados en la investigación, de modo que se desarrollen las grandes ideas de incertidumbre, aleatoriedad y variabilidad.

PALABRAS CLAVE

Incertidumbre, Aleatoriedad, Variación, Tecnología, Problemas utilizados en la Investigación.

¹ esanchez@cinvestav.mx

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
<https://orcid.org/0000-0002-8995-7962>

Sánchez-Sánchez, E. A. (2023). Análisis de tres problemas de probabilidad utilizados en la investigación. En Juárez Ruiz, E. L., Hernández Rebollar, L. A., & Castañeda, A. (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2023* (pp. 91–111). SOMIDEM Editorial.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01-05>

INTRODUCCIÓN

Desde los trabajos pioneros sobre razonamiento e intuiciones sobre probabilidad de los niños y adolescentes (Piaget e Inhelder, 1975; Fischbein, 1975) se ha avanzado en entender las dificultades, falsas concepciones, creencias y posibilidades de los estudiantes en su aprendizaje de la probabilidad, y de los profesores en su práctica docente (Jones et al. 2007, Langrall, et al. 2017). Una parte central en tales estudios son los instrumentos que utilizan los investigadores para obtener datos duros de las intuiciones, razonamientos o pensamientos de los estudiantes, la mayoría de los cuales son muy creativos y originales, pero no necesariamente utilizables para la enseñanza. Tales problemas contrastan con los que se suelen utilizar en el aula, pues estos se enfocan directamente en el cálculo; dicho enfoque deriva en el desarrollo de habilidades lógicas y aritméticas (álgebra de eventos, proporcionalidad y combinatoria), pero no propicia el desarrollo de otras ideas de probabilidad, como incertidumbre, aleatoriedad, variabilidad y la ley de los grandes números.

Desde que se comenzó a popularizar la tecnología digital, varios autores advirtieron sobre el potencial de la tecnología para propiciar un aprendizaje más completo de la probabilidad, utilizando programación para hacer simulaciones (con la función `RANDOM`, que genera números aleatorios), cálculo automático y representación de gráficas, todo esto inspirado en las técnicas del método de Montecarlo (Biehler, 1991; Sobol, 1983). Poco después se comenzó un periodo de desarrollo de software dinámico de estadística amigable para la enseñanza en el que no se requería programación. Como resultado se volvieron muy populares, entre otros, los softwares *Probability Explorer*, *TinkerPlots* y *Fathom*.

Con estos softwares se han sugerido muchos problemas y secuencias para propiciar el aprendizaje de probabilidad de los niños y adolescentes (Stohl & Tarr, 2002, Pratt, 2000); no obstante, no ha habido una recuperación de los problemas que se han utilizado en la investigación para explorar su potencial para la enseñanza con ayuda de las posibilidades del software dinámico. Surge la pregunta de investigación ¿Cómo enfocar problemas clásicos surgidos de la investigación didáctica en probabilidad utilizando tecnología digital? El objetivo del presente estudio es mostrar que los problemas utilizados en la investigación se pueden redimensionar con el uso de la tecnología digital, convirtiéndolos en problemas para desarrollar el razonamiento estadístico y no sólo para explorarlo. En particular, en este trabajo recuperamos tres problemas que exploran las intuiciones y el razonamiento en probabilidad de los niños y adolescentes, y los analizamos utilizando tecnología. Al hacerlo, apuntamos hacia un posible uso en el aula.

Grandes ideas de la probabilidad

Una comprensión razonable de la probabilidad requiere situarla en un contexto que abarque distintos conceptos. Tradicionalmente, se enmarca en la matemática, destacando elementos como eventos (considerados conjuntos), el álgebra de eventos y la propia probabilidad (definida como la razón entre casos favorables y posibles). No obstante, existen marcos que ofrecen complementos y proponen incluir otras nociones.

Gal (2005) propone un marco (Tabla 1) para la competencia probabilística (probability literacy) formado por elementos de conocimiento y disposicionales. A cada elemento de los enlistados los llama bloques de construcción (ladrillos) de la competencia probabilística. En los elementos de conocimiento propone cinco elementos, los cuales aclara que están íntimamente relacionados entre sí de forma compleja y que no es apropiado creer que se presentan de manera aislada. Con relación a las grandes ideas, advierte que no se pueden caracterizar mediante una definición, como se suele hacer con los conceptos matemáticos

Tabla 1

Bloques de construcción para la competencia probabilística.

Elementos de conocimiento:
1. <i>Grandes ideas:</i> Variación, Aleatoriedad, Independencia y predicción/incertidumbre
2. <i>Cálculo de probabilidades.</i> Formas de encontrar o estimar la probabilidad de un evento
3. <i>Lenguaje.</i> Los términos y métodos utilizados para comunicarse acerca de la probabilidad
4. <i>Contexto.</i> Comprensión del papel e implicación de asuntos de probabilidad y mensajes en varios contextos y en discursos públicos y personales
5. <i>Preguntas críticas.</i> Temas para reflexionar cuando se trata de probabilidades
Elementos disposicionales:
1. Posición crítica
2. Creencias y actitudes
3. Sentimientos personales hacia la incertidumbre y el riesgo

Nota. Tomado de Gal (2005), p. 46.

No abundaremos en este modelo, sólo queremos resaltar que el primer elemento de conocimiento que propone Gal son las grandes ideas. Creemos que todavía hacen falta investigaciones que exploren cómo desarrollar las grandes ideas en el aula. En este trabajo analizaremos tres problemas utilizados en la investigación que, aparte de revelar las intuiciones y razonamiento de los estudiantes acerca de la probabilidad, podrían permitir, con ayuda de la tecnología, desarrollar ideas de incertidumbre, aleatoriedad y variabilidad.

Alarcón (1982)

Jesús Alarcón Bortolussi (Papini) fue un investigador de México del Departamento de Matemática Educativa. Fue experto en didáctica de la matemática,

especialmente en geometría, cálculo y probabilidad. Contribuyó en una profunda reforma curricular de México en 1993 en lo que concierne a las Matemáticas. Fue el autor principal de “El Libro para el Maestro” de matemáticas, el cual fue publicado durante muchos años por la Secretaría de Educación Pública de México. Infortunadamente falleció prematuramente en 1997. Su trabajo de doctorado consistió en el diseño, aplicación y análisis de un cuestionario de probabilidad a 300 alumnos de entre 12 y 14 años. El objetivo fue evaluar los juicios probabilísticos de los estudiantes frente a preguntas que realmente contuvieran incertidumbre. En esta sección analizaremos el problema más controvertido de su cuestionario, ver la Figura 1.

Figura 1

Un problema con máxima incertidumbre de Alarcón (1982)

Juan ha elegido una de las bolsas que se presentan abajo. Después, él sacó al azar seis bolas con reemplazo de la bolsa elegida. El resultado de las extracciones fue de 2 bolas blancas y 4 negras. ¿Qué bolsa eligió Juan?



Resultados de la aplicación del problema

El cuestionario se aplicó a dos grupos, uno de 12-13 años y el otro de 13-14 años. La mayoría de las respuestas de ambos grupos se distribuyen en las opciones 2, 3 y 4, siendo viable para algunos que la extracción de 2B4N pudo provenir de la bolsa 2. En efecto, 26% de los estudiantes de 12-13 años eligió la opción 2 (Muy posiblemente la bolsa 1), 46% se inclinó por la opción 3 (No hay razón para preferir una bolsa) y 20% por la opción 4 (Muy posiblemente la bolsa 2); mientras que 21% de los estudiantes de 13-14 años eligió la opción 2, 46% la opción 3 y 23% la opción 4 (Tabla 2).

Es interesante que tanto la opción 2 como la 4 son atractivas para los estudiantes. En ambos grupos, el 46% no encuentran razones para decidir la urna de la que puede provenir el resultado. Es plausible interpretar que el criterio de los que responden correctamente (26% de 7º grado y 21% de 8º grado) es porque perciben que es muy poco probable el resultado a partir de la urna 2 y, entonces, apuestan por que la urna 1 fue la elegida. Este resultado y el opuesto (inciso 4) pueden interpretarse con conceptos de riesgo en el

siguiente sentido. La bolsa 1 encarna total incertidumbre, de manera que conlleva mucho riesgo, pues el contenido de la bolsa puede ser cualquiera. En cambio, la bolsa 2 permite calcular la probabilidad de que haya ocurrido el evento 2B4N. Los estudiantes que son adversos al riesgo elegirán la bolsa 2, pues la probabilidad de obtener el evento objetivo al menos es medible, mientras que los que son propensos al riesgo elegirán la bolsa 1, considerando que vale la pena correr el riesgo.

Tabla 2
Resultados del reactivo de la Figura 2

Edad	Seguro la bolsa 1	Muy posible la bolsa 1	No hay razón para elegir	Muy posible la bolsa 2	Seguro la bolsa 2	Total
12 – 13 años	3	12	21	9	1	46
	6%	26%	46%	20%	2%	100%
13 – 14 años	3	12	26	13	2	56
	5%	21%	46%	23%	4%	99%

¿Dónde está la incertidumbre?

El problema didáctico que formuló Alarcón (1982) se basa en el reconocimiento de que se solían utilizar problemas de “pronóstico” en la investigación sobre razonamiento probabilístico de su tiempo. Estos problemas tienen el formato:

Una urna A tiene u bolas blancas y w bolas negras; otra urna B tiene x bolas blancas y y bolas negras. Se va a elegir una urna, de ella se extrae al azar una bola y se observa su color. Si quieres obtener una bola blanca ¿Qué urna elegirías? O ¿Da lo mismo cualquiera de las dos?

Alarcón criticó estos problemas observando que son de naturaleza aritmética, ya que sólo requieren del cálculo y comparación de fracciones, pero supuestamente se debían interpretar como probabilidades. En realidad, las respuestas a tales problemas son exactas y no enfrentan a los estudiantes a la incertidumbre. Es por esto que propuso mejorar los instrumentos de exploración a través de problemas en “situaciones de decisión a posteriori”, estos tienen el siguiente esquema:

Encuentra entre dos bolsas, que contienen bolas blancas y negras, aquella en la cual se obtuvo un resultado dado de uno o varios sorteos. Ver Figura 2.

Conviene preguntarse ¿En qué sentido estos problemas contienen incertidumbre? La respuesta es que, en muchas situaciones particulares no se podrá saber con certeza de qué bolsa provino la bola resultante, por ejemplo,

supongamos que una bolsa A contiene 1 bola blanca y una bola negra, una bolsa B contiene una bola blanca y dos negras. El resultado fue bola blanca. ¿De qué urna provino ésta? El cálculo lleva a que es más probable que haya provenido de la bolsa A por el teorema de Bayes:

$$\left[P(bolsa A | bola blanca) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{5}; P(bolsa B | bola blanca) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{5} \right]$$

Una pequeña reflexión, o con ayuda de una simulación, lleva a la conclusión de que, aunque la mejor respuesta es “Proviene de la bolsa A”, se corre mucho riesgo de fallar. Por otro lado, la respuesta “no hay razón para preferir una bolsa” no es del todo incorrecta, pero no toma en cuenta la pequeña ventaja que ofrece la primera respuesta. En resumen, este problema es cualitativamente diferente a los problemas de pronóstico en los que simplemente se deben calcular probabilidades, pues en los problemas de decisión a posteriori ninguna decisión lleva a una respuesta segura.

Figura 2

Un problema de decisión a posteriori

Juan ha elegido una de las bolsas que se presentan abajo. Después, él sacó al azar seis bolas con reemplazo de la bolsa elegida. El resultado de las extracciones fue de 2 bolas blancas y 4 negras. ¿Qué bolsa eligió Juan?



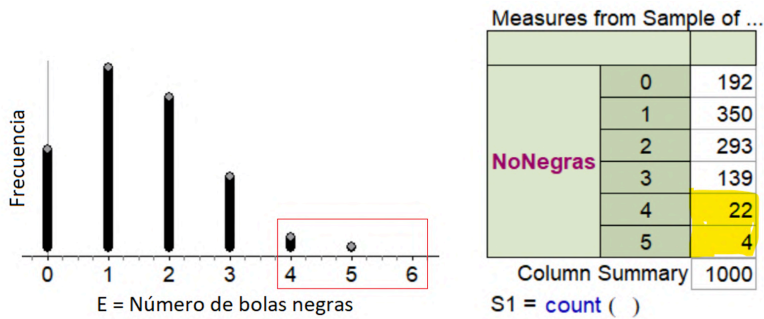
El problema de máxima incertidumbre de Alarcón y las pruebas de significación

Conviene mostrar que el trabajo de Alarcón (1982) está bien enraizado en el razonamiento estadístico. Él no elaboró la relación del paradigma que propuso con el esquema de pruebas de significación, pero sin duda lo utilizó para evaluar la calidad de las respuestas. Volvamos al problema de la figura 1, que hemos juzgado de máxima incertidumbre. En él, cada bolsa representa una población y el evento que se supone que ocurrió (2B4N) es una muestra; un estadístico característico de esta situación es la proporción de bolas negras, pero para facilitar la simulación vamos a considerar el estadístico E como el número de bolas negras. La hipótesis nula (H_0) es que el resulta-

do proviene de la bolsa 2 (porque se quiere rechazar esa hipótesis y es la única que ofrece datos para hacer el cálculo), entonces se calcula la probabilidad de obtener el resultado: $\{E = 4 \text{ u otro más extremo, es decir, } E = 4, 5, 6; \text{ bajo } H_0\}$. Aunque esta probabilidad requiere de la distribución binomial, se puede estimar con ayuda de una simulación. En la figura 3 presentamos una distribución simulada de la variable E obtenida de repetir mil veces el experimento con el software Fathom. En ella hemos encerrado en un cuadro los puntos que son favorables al evento $\{E=4, 5, 6\}$

Una estimación de la probabilidad del evento de que ocurran 4, 5 o 6 bolas negras es de $26/1000$, es decir 0.026. Este número es muy pequeño, por lo que tenemos la opción de que ocurrió un milagro o es erróneo suponer . El método de pruebas de significación sugiere que en el caso de que el evento tenga probabilidad menor de 0.05 bajo la hipótesis de que H_0 es verdadera, entonces se rechaza la hipótesis nula H_0 . Así, la decisión racional al problema de la figura 2 es elegir la bolsa 1.

Figura 3
Distribución de frecuencias de la variable No. de negras



La tecnología y los problemas de decisión de Alarcón

Consideraremos los problemas de decisión propuestos por Alarcón (1982) en su forma generalizada, antes de llegar al problema límite en el que una bolsa tiene contenido desconocido. Lo formulamos en términos de urnas y no de bolsas:

Una urna A tiene u bolas blancas y w bolas negras; otra urna B tiene x bolas blancas y y bolas negras. Se elige una urna y de ella se extraen seis bolas y se observa su color. Si el resultado es una muestra con B bolas blancas y N negras ¿De qué urna se obtuvo dicho resultado?

Como hemos dicho, este tipo de problemas está cargado de incertidumbre. Para resolverlo, los estudiantes suelen aplicar una heurística de representatividad (Tversky & Kahneman, 1982), es decir, eligen la urna cuya proporción de bolas blancas es más cercana a la proporción de bolas blancas del resultado. Aunque esta estrategia suele ser apropiada, no ofrece una forma de medir

las probabilidades involucradas en la decisión tomada. Pero para calcular tales probabilidades se requiere de técnicas probabilísticas que no están al alcance de los estudiantes de niveles preuniversitarios. Es en este punto en el que surge la hipótesis de que es posible que los estudiantes estimen informalmente tales probabilidades con ayuda de tecnología. Pero queremos enfatizar que, desde nuestro punto de vista, lo importante de utilizar simulación computacional para resolver los problemas es conocer su estructura y familiarizarse con representaciones del comportamiento de eventos inciertos en repeticiones masivas de un experimento, y no tanto la sola estimación de las probabilidades. Nosotros utilizamos Fathom, pero la idea se puede desarrollar también con otros softwares.

Para ilustrar cómo utilizar el software Fathom para simular un problema de decisión de Alarcón tomamos una situación mencionada arriba, pero con un evento-resultado diferente:

La urna A contiene una bola blanca y otra negra y la urna B contiene una bola blanca y dos negras. Se extraen seis bolas con reemplazo y se obtienen 2 bolas Blancas y 4 bolas Negras (Abreviado 2B4N). ¿De qué urna proviene el resultado?

El resultado 2B4N es más similar al contenido de la urna 2 que al contenido de la urna 1, por lo que la elección de la urna 2 es razonable. ¿Pero qué probabilidad tiene esta decisión de atinar a lo que realmente sucedió? ¿Qué tan probable es que el resultado provenga de la urna 1? Como vimos arriba, estos problemas se resuelven con la fórmula de Bayes, pero se puede modelar y simular sin recurrir a ella. Algo importante es que, resolviéndolo informalmente, se va prefigurando el contenido de dicha fórmula. La manera de hacerlo en Fathom es crear dos poblaciones de 1000 resultados provenientes de cada urna. Esto se hace mediante los siguientes pasos.

Paso 1. Se llenan dos columnas en Fathom (llamada Urna 1 y Urna 2) con 1000 datos de los sorteos de las funciones RandomPick (“B”, “N”) para la urna 1, y RandomPick (“B”, “N”, “N”) para la urna 2. Esto quiere decir que en cada columna se registran 1000 resultados de la urna 1 y 1000 de la 2, independientemente unos de los otros.

Paso 2. En el segundo paso se genera una muestra de tamaño 6 proveniente de cada urna y se definen dos medidas que indican el número de bolas blancas de la muestra de la Urna 1 y el número de bolas blancas de la Urna 2; se registran ambos números.

Paso 3. Se repite 1000 veces el paso 2, de manera que se obtengan 1000 parejas ordenadas. Cada pareja representa en su primer componente el

número de bolas blancas de una muestra de la Urna 1 (Esta variable la nombramos BUrna 1), y en su segundo componente el número de bolas blancas de una muestra de la Urna 2 (Esta variable la nombramos BUrna 2). La generación de la población de cada urna asegura que las entradas son independientes una de la otra.

Paso 4. Las 1000 parejas ordenadas tienen en cada uno de sus componentes números del 0 al 6. Con la función “Summary” de Fathom se pueden organizar las frecuencias de cada pareja ordenada en una tabla de 2×2 , como la tabla de la Figura 4. El número 276 (marcado en la figura) representa a todas las parejas que en su primer componente tienen el número 2, es decir, que favorecen al evento 2B4N de la Urna 1, mientras que 347 corresponden a resultados que al evento 2B4N obtenidos de la Urna 2. Hay entonces 623 (= 276+347) parejas que representan resultados favorables al evento 2B4N, de éstas, 276 provienen de la urna 1, por lo que:

$$P(Urna\ 1\ |\ 2N4B) = \frac{276}{623} = 0.44$$

$$P(Urna\ 2\ |\ 2N4B) = \frac{347}{623} = 0.56$$

La captura de pantalla de la Figura 5 muestra las diferentes salidas que el software proporciona a algunas de las acciones correspondientes a los pasos que se describieron arriba.

Figura 4

Tabla de doble entrada de 1000 parejas ordenadas

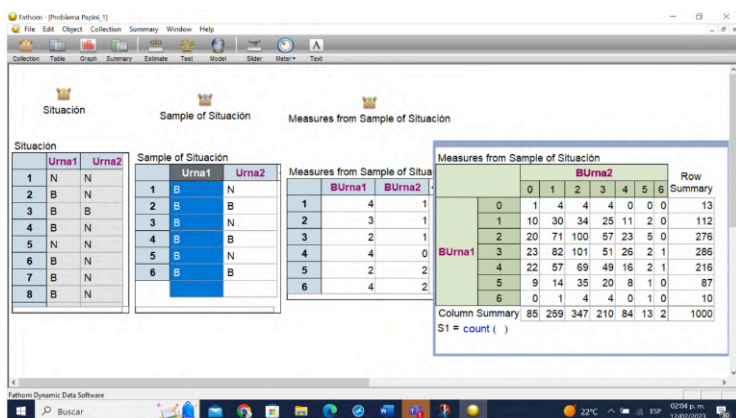
Measures from Sample of Situación									
		BUrna2						Row Summary	
		0	1	2	3	4	5		6
BUrna1	0	1	4	4	4	0	0	0	13
	1	10	30	34	25	11	2	0	112
	2	20	71	100	57	23	5	0	276
	3	23	82	101	51	26	2	1	286
	4	22	57	69	49	16	2	1	216
	5	9	14	35	20	8	1	0	87
	6	0	1	4	4	0	1	0	10
Column Summary		85	259	347	210	84	13	2	1000

S1 = count ()

Hemos expuesto muy brevemente el método para mostrar una posible manera de abordar el problema, aunque, sin duda, puede haber otras formas más ingeniosas. En el espacio que tenemos no ha sido posible destacar el papel de la incertidumbre y cómo se obtienen consecuencias acerca de ella, pero haciendo dos o más simulaciones con el software, se puede experimentar con la incertidumbre; en el trabajo del aula, si se cuenta con software adecuado, el profesor puede encontrar la manera de hacerlo.

Figura 5

Captura de pantalla de los resultados de la simulación



Green (1982a y 1982b)

David Robert Green es un investigador del Reino Unido de la universidad de Loughborough. Es experto en desarrollo curricular, evaluación educativa, probabilidad, estadística y enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Su trabajo sobre las intuiciones del azar y la probabilidad tuvo mucho impacto en los años noventa. Colaboró con Batanero et al. (1998) en un proyecto sobre el significado de la aleatoriedad y sus consecuencias para la enseñanza. En su investigación de doctorado desarrolló el proyecto en el que elaboró y aplicó un cuestionario a cerca de 3000 estudiantes de los grados 7 a 12. Se planteó el objetivo de explorar las intuiciones acerca del azar y la probabilidad de los estudiantes, en particular, sus juicios sobre aleatoriedad. El problema de la figura 6 fue diseñado para saber las intuiciones sobre aleatoriedad que tienen los niños y jóvenes.

Figura 6

Problema de Green (1982a)

El maestro le pidió a Clara y a Susana que arrojaran 150 veces una moneda y que registraran en cada tirada si el resultado es cara o cruz. Cada vez que salga cara se anota "1" y cada vez que salga cruz se anota "0". En seguida aparecen las listas de unos y ceros, anotados por cada una de ellas:

Clara:

010110011001010110110100011100011011010101100100010101001110011010110010110
010110010010111011001101101010010110010101100010011010110011101110101100011

Susana

10011101111010011100100111001000111011111010101011110000001000101001000001
00011000101000000000110010000000111110000110101001001001111101001100011000

Se sabe que una chica hizo correctamente los 150 lanzamientos, pero la otra hizo trampa, inventando la sucesión. ¿Puedes descubrir quién de ellas hizo realmente el experimento y quién inventó el resultado? ¿Qué chica hizo trampa? Explica tu respuesta.

Resultados de la aplicación del problema

En la tabla 3, los datos revelan que poco más de la tercera parte de los estudiantes de cada nivel responden correctamente que la secuencia de Clara es la que se hizo con trampa. En consecuencia, poco menos de dos terceras partes de los estudiantes de cada nivel responden, erróneamente, que Susana hizo trampa. Una observación importante es que la calidad de las respuestas no mejora con la edad, pues la proporción de respuestas correctas es casi constante en los cinco niveles. Las razones que ofrecieron y sus frecuencias relativas se presentan a continuación:

Tabla 3
Frecuencias de respuestas a la pregunta 20

Grado	Clara	Susana	Sin respuesta
1	38	53	1
2	34	56	2
3	30	59	4
4	40	46	3
5	35	49	5
Promedio	35.4	52.4	3

Argumentos de los estudiantes para justificar su elección:

Relacionadas con la regularidad de los patrones:

1. La secuencia de Clara tiene un patrón demasiado regular (21%)*
2. La secuencia de Susana tiene un patrón irregular (3%)

Relacionada con la diferencia entre el número de “1s” y de “0s”

3. La secuencia de Clara tiene muchos unos; por lo tanto, la proporción está lejos de 0.5 (5%)
4. La secuencia de Susan tiene muchos ceros, por lo tanto, su proporción está lejos de 0.5. (18%)

Relacionada con la cercanía entre el número de “1s” y de “0s”

5. La secuencia de Clara está muy cerca de la proporción 0.5 (3%)
6. La secuencia de Susan está muy cerca de la proporción 0.5 (1%)

Relacionadas con la longitud de las cadenas:

8. La secuencia de Clara tiene cadenas muy cortas (3%)*
9. La secuencia de Susan tiene cadenas muy largas (18%)

Las únicas razones que son correctas son la 1 y la 7; en ésta, sólo 3% utilizan el argumento de que la secuencia de Clara tiene cadenas muy cortas.

¿Qué propiedades tiene la aleatoriedad?

El problema de Green (1982a) pide diferenciar entre una secuencia realmente aleatoria y otra que trata de imitarla; su solución requiere de un pro-

fundo sentido de la aleatoriedad y del funcionamiento del razonamiento estadístico. Para resolverlo en el contexto de la estadística requiere recurrir al concepto de pruebas de significación y, por lo tanto, no era fácilmente accesible para los profesores en aquel tiempo. En la actualidad es posible analizar el problema con la misma idea de pruebas de significación con la ayuda de la tecnología, pero desde un enfoque informal. De lo que se trata es de evaluar si el resultado que obtuvo cada una de las chicas es usual bajo la hipótesis de que fueron generados por una distribución de Bernoulli con . Para esto, conviene considerar tres estadísticos: 1) El número de éxitos (“1”) de la secuencia. 2) El número de cadenas¹ de la secuencia. 3) La longitud de la cadena más larga.

En la tabla 4 se proporcionan los datos de los tres estadísticos (n_1 es el número de unos en la secuencia)

Tabla 4

Datos básicos de las secuencias de Clara y Susana

Lista de Clara: $n_1= 78, n_0= 72$	Lista de Susana: $n_1= 67, n_0= 83$
Número de cadenas = 96	Número de cadenas = 68
Longitud de la cadena más larga: 3	Longitud de la cadena más larga: 9

De lo que se trata es de ubicar los valores de cada estadístico dentro de la distribución correspondiente y decidir si es usual o no. Para aproximar las distribuciones se simula la generación de secuencias de longitud 150 y se calcula el estadístico respectivo. Esto se repite unas 1000 veces y los valores del estadístico se grafican en una distribución. Las figuras 7, 8, y 9 muestran las distribuciones correspondientes a cada estadístico. Se obtuvieron con el software Fathom.

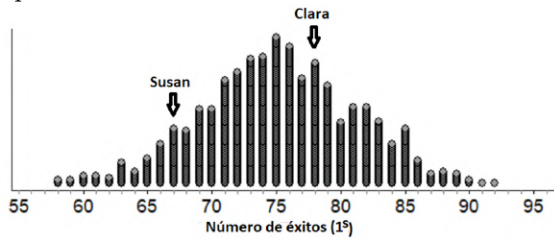
Se han señalado en las figuras el lugar en el que se ubican los datos particulares de la secuencia de Clara y de la de Susana. Se dice que una muestra es inusual cuando está en los extremos y su frecuencia u otra más extrema no excede el 5% de todas las secuencias.

En el caso del estadístico “número de éxitos” (equivalente al número de “1”) (Figura 7), tanto el valor de la variable en la secuencia de Susan como en la de Clara están en una zona de resultados usuales, por lo que no se puede descartar la hipótesis de que fueron generadas por la distribución de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$.

¹ Una cadena es una serie de resultados iguales, por ejemplo, la secuencia 0110001011 tiene seis cadenas, a saber: 0, 11, 000, 1, 0, 11. La longitud de una cadena es el número de resultados de la cadena, así, las longitudes de las anteriores cadenas son: 1, 2, 3, 1, 1, 2.

Figura 7

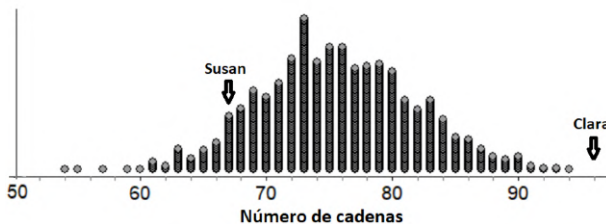
Distribución aproximada del estadístico “Número de unos (“1”)



En el caso del estadístico “número de éxitos” (equivalente al número de “1”) (Figura 7), tanto el valor de la variable en la secuencia de Susan como en la de Clara están en una zona de resultados usuales, por lo que no se puede descartar la hipótesis de que fueron generadas por la distribución de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$.

Figura 8

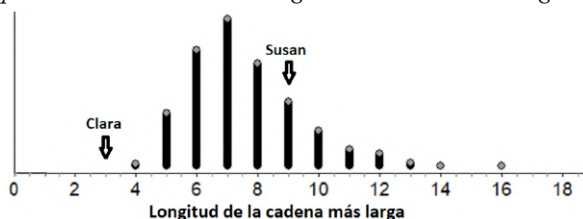
Distribución aproximada del estadístico “Número de cadenas”



La distribución del estadístico “Número de cadenas” (Figura 8), a diferencia del estadístico anterior, muestra que el resultado de Clara (Número de cadenas = 96) es inusual, pues tiene una frecuencia de cero ocurrencias. Este resultado lleva a rechazar la hipótesis de que la secuencia de Clara fue generada con la distribución de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$. En cambio, el valor del estadístico para la secuencia de Susana es usual, pues está dentro de un rango de resultados frecuentes. Esta prueba es suficiente para resolver el problema y decidir que quien hizo trampa fue Clara. Pero también el tercer estadístico ofrece el mismo resultado.

Figura 9

Distribución aproximada del estadístico “Longitud de la cadena más larga”



La figura 9 presenta la distribución de los datos simulados de variable “longitud de la cadena más larga”, en ella se observa que la secuencia de Clara es inusual bajo la hipótesis de que la secuencia se genera con la distribución de Bernoulli con $p = \frac{1}{2}$, mientras que el valor del estadístico de Susana está en una región de resultados frecuentes. Esto reafirma el resultado de que Clara hizo trampa.

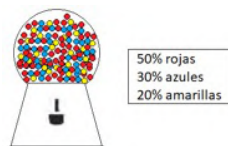
Shaughnessy et al. (1999)

J. Mike Shaughnessy es un investigador retirado de la Universidad de Portland, Estados Unidos. Su investigación se ha enfocado en la comprensión de los estudiantes sobre probabilidad y estadística, para lo que ha sintetizado y aprovechado los trabajos de psicólogos y educadores matemáticos. Ha sido autor de los artículos de reseña de la investigación en probabilidad y estadística de los Handbooks de la NCTM: Grows (1992), Lester (2007) y del compendio Cai (2017). Shaughnessy et al. (1999) elaboraron y administraron un cuestionario de datos y azar para explorar el razonamiento de 324 estudiantes en los grados 4-12 (9-17 años). El objetivo fue explorar el razonamiento de los estudiantes sobre la variabilidad estadística en situaciones tanto de manejo de datos como de azar. El problema de la máquina de gomas de mascar se presenta en la figura 10.

Figura 10

El problema de una máquina expendedora de gomas de mascar

Una máquina expendedora de gomas de mascar contiene mezcladas 50% de gomas rojas, 30% de gomas azules y 20% de gomas amarillas. Pregunta: Jenny saca 10 gomas de mascar de la máquina ¿Cuál es tu mejor predicción del número de gomas rojas que saldrán?



Resultados de la aplicación del problema

Se encontraron respuestas variadas que corresponden a estrategias diferentes. Unas son las respuestas basadas en la idea de que cualquier cosa puede pasar, por ejemplo: 0, 9, 4, 7, 10 y 1. Los resultados 0, 1 y 10 rojas son muy poco probables de modo que la secuencia no es un buen ejemplo de lo que puede ocurrir. Otras respuestas están sesgadas hacia mayor número de rojas, probablemente por considerar que la población tiene mayor número de rojas, pero sin considerar la proporción, por ejemplo: 6, 7, 8, 8, 7 y 9. Dentro del grupo de los estudiantes de grado 12 hubo varios cuya respuesta fue 5, 5, 5, 5, 5 y 5; los autores conjeturaron que probablemente estos estudiantes estaban acostumbrados a responder preguntas, como “¿Cuál es la probabilidad de que...?”, que requieren respuestas de un solo número en lugar de un rango de resultados posibles. Las mejores respuestas son aquellas que ofrecen

valores alrededor del, o igual al, valor esperado, por ejemplo: 3, 5, 3, 6, 7, 5. Estas se evalúan como mejores teniendo en cuenta un criterio de representatividad: varían y están alrededor del valor esperado. Pero hay que tener en cuenta que su probabilidad no es mayor que la secuencia 5, 5, 5, 5, 5, 5. Además, dentro de dichas respuestas hay dos clases que no son muy representativas, a saber: variabilidad muy estrecha: 4, 6, 5, 6, 4, 4 y variabilidad muy amplia: 2, 5, 8, 9, 8, 5. Los resultados expuestos son una descripción de las estrategias que suelen tener los estudiantes y una valoración con un criterio de representatividad, pero no con un criterio de probabilidad; en el análisis del problema se llegará a la respuesta desde un punto de vista estadístico.

¿Dónde está la variabilidad?

El cambio, movimiento o diferencia se presenta en cualquier fenómeno y, por tanto, también en los datos; de ahí que se diga que la variabilidad es omnipresente. Después de que los estadísticos profesionales Moore (1990) y Snee (1990) declararan que la variabilidad es una de las ideas fundamentales de la estadística y que esta afirmación se volviera un conocimiento regular en el ambiente de la estadística, en educación estadística, Shaughnessy (1997) se preguntó en su artículo sobre las oportunidades perdidas por la investigación, ¿dónde está la investigación sobre la variación estadística? Él alertó que las medidas de tendencia central y las gráficas eran los temas favoritos de los investigadores en educación estadística, pero la variabilidad prácticamente no había sido explorada por los investigadores hasta ese momento.

Shaughnessy et al. (1999) llevaron a cabo una investigación motivada por el análisis de las respuestas al problema de las gomas de mascar que hemos mencionado arriba. Este era un ítem de un cuestionario para la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP) de 1996 en Estados Unidos. Lo que llamó la atención de Shaughnessy fue que los estudiantes, e incluso algunos profesores, creían que la respuesta correcta era el valor esperado (5 en este caso). En una muestra de 232 estudiantes, Zawojewski y Shaughnessy (2000) observaron que respondieron con un valor determinado, principalmente el valor esperado 5; excepto un participante respondió dando un rango de posibles números de gomas de mascar. A partir de esta observación idearon una serie de estudios sistemáticos para entender y propiciar el razonamiento sobre variación de los estudiantes.

Veamos desde la perspectiva de un especialista cuál es la solución al problema. Para esto simplificamos el problema suponiendo que la extracción de cada goma de mascar se reemplaza, de modo que no se alteran las proporciones de gomas de cada color en la población original. Para que la

respuesta sea una predicción útil y realista es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- La respuesta debe ser un rango de valores y no un resultado particular
- Dado que la variable es binomial y su distribución es simétrica, el rango con centro en el valor esperado es un evento con mayor probabilidad que otro equivalente no centrado en el valor esperado
- La probabilidad de que un resultado particular esté en el rango de valores debe ser mayor que $\frac{1}{2}$.
- Conviene elegir un rango que:
 1. No sea tan amplio que cubra todos los posibles resultados,
 2. Sea lo suficientemente amplio para que la probabilidad de que ocurra un resultado del rango sea mayor que un valor dado (mayor que $\frac{1}{2}$).

Por ejemplo, la predicción “de las 10 extracciones se obtendrán entre 3 y 7 bolas rojas” tiene una probabilidad de casi 90%, de modo que sólo hay una probabilidad de 0.1 de equivocarse. En la tabla 5 se muestran todos los posibles rangos centrados en el valor esperado (5) y su respectiva probabilidad.

Tabla 5
Probabilidades de que el número de rojas este en el rango indicado

Rango	5	4-6	3-7	2-8	1-9	0-10
Probabilidad	0.2461	0.6562	0.8906	0.9785	0.9980	1

Conviene hacer énfasis en que hacer la predicción “puede salir cualquier número entre 0 y 10 bolas rojas” [rango (0-10)], es equivalente a “cualquier resultado puede ocurrir”, esta respuesta es trivial y no utiliza el conocimiento probabilístico. En cambio, predecir “ocurrirá exactamente 5” es una predicción muy débil, pues se fracasará 3 de cada 4 veces. Las soluciones interesantes son las intermedias, las cuales, no son triviales y tienen una probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de ocurrir; la elección específica de un rango dependerá de lo que esté en juego en el contexto en el que se realiza el experimento, por ejemplo, si hay ganancias y pérdidas monetarias.

Volviendo al problema original de predecir qué puede ocurrir en la repetición de seis veces el experimento, una solución con 53% de probabilidad de ocurrir es:

entre 3 y 7 bolas rojas, entre 3 y 7 bolas rojas, entre 3 y 7 bolas rojas, entre 3 y 7 bolas rojas, entre 3 y 7 bolas rojas, entre 3 y 7 bolas rojas

La probabilidad se mejora al 89% de probabilidad si se elige el rango de 2-8, es decir:

entre 2 y 8 bolas rojas, entre 2 y 8 bolas rojas, entre 2 y 8 bolas rojas, entre 2 y 8 bolas rojas, entre 2 y 8 bolas rojas, entre 2 y 8 bolas rojas

En el análisis del problema hemos utilizado recursos que los estudiantes no tienen o no manejan con fluidez, por lo que es lícito esperar las respuestas ingenuas que encontraron Shaughnessy et al. (1999). Una consecuencia posible es que, para que los estudiantes entiendan y puedan ofrecer una respuesta razonablemente buena, deben tratar este tipo de problemas en el curso de probabilidad una vez que hayan aprendido cómo interpretar y calcular probabilidades binomiales. No obstante, hay otra forma alternativa de que los estudiantes avancen en el problema.

Utilización de la tecnología para atacar el problema

Una vieja sugerencia didáctica para aprender probabilidad es la de hacer experimentos físicos reales y recopilar y graficar datos para descubrir los patrones subyacentes al experimento (Martin et al, 2021 y 2022). Esta técnica es promisoría, excepto porque se deben repetir muchos experimentos antes de que se comiencen a revelar los patrones subyacentes. Pero, si es posible complementar dichas actividades con la ayuda de un software educativo de estadística, entonces los estudiantes podrían, de manera informal, resolver el problema y entender varios conceptos subyacentes a él.

En lugar de una máquina expendedora de gomas de mascar se puede utilizar una urna o algo equivalente, con 50% de bolas rojas, 30% de bolas azules y 20% de bolas amarillas. Para hacer más simple la experiencia con manipulativos y, posteriormente, la simulación correspondiente con el software, conviene aclarar que es importante el supuesto de que las extracciones de cada bola deben ser con reemplazo. Una vez que los estudiantes hayan realizado una actividad con manipulativos, por ejemplo, que hayan sacado varias muestras de tamaño 10 de una urna y hayan anotado el número de bolas rojas, se puede recurrir al software.

Con el software Fathom la simulación se puede hacer en sólo cinco pasos:

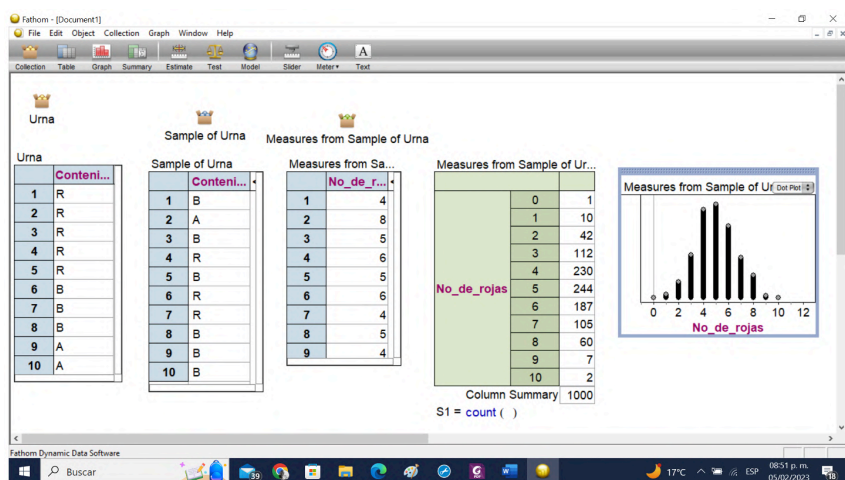
- Se define una población con 5 R's, 3 B's y 2 A's que representan bolas rojas, azules (blue) y amarillas respectivamente.
- Con el comando "sample of urna" obtener una muestra de 10 bolas con reemplazo
- Contar el número de R's en las muestras
- Repetir 1000 veces el proceso anterior para obtener 1000 valores
- Graficar la distribución de los resultados.

La captura de pantalla de la Figura 11 muestra las diferentes salidas que el software proporciona a algunas de las acciones correspondientes a los pasos anteriores. Note que la salida gráfica es una distribución que indica que los valores centrales son muy frecuentes, mientras que los valores en los extremos son muy poco frecuentes. Para hacer una buena predicción se descartan aquellos valores que tienen muy poca probabilidad, por ejemplo,

0, 1, 9 y 10, pues su frecuencia total suma menos del 5% (en la simulación es de 2%). La predicción es entonces su complemento, es decir, el rango de 2 a 8 que tiene una probabilidad de poco más del 95%. Una predicción más precisa, pero con menos probabilidad, se obtiene descartando los resultados, 0, 1, 2, 5, 9 y 10, cuya frecuencia es del 12.2%. Entonces, el rango de 3 a 7 tiene una probabilidad de 87.8%.

Figura 11

Captura de pantalla de los resultados de la simulación



Conclusiones

Los tres problemas que hemos recuperado de la investigación didáctica en probabilidad han sido innovaciones metodológicas para explorar las intuiciones y razonamiento en probabilidad de los estudiantes. Cada uno buscaba ofrecer evidencia de hasta qué punto las intuiciones o razonamiento de los estudiantes son capaces de lidiar con la incertidumbre, en el caso de Alarcón, con la aleatoriedad en el problema Green, y con la variabilidad en la investigación de Shaughnessy et al. (1999). Los resultados obtenidos, en los tres casos, indican que la mayoría de los estudiantes no ha desarrollado las intuiciones o recursos de razonamiento para elegir las respuestas más razonables. Por esto nos preguntamos ¿Cómo transformar los problemas en instrumentos para la enseñanza?

Esperamos que los bosquejos que hemos hecho sobre el uso del software para abordar los problemas hayan mostrado que con pocos recursos matemáticos y simbólicos por parte de los estudiantes se pueden obtener resultados matemática y estadísticamente sofisticados. Esto es posible porque, con el software, el estudiante entra en un micro-mundo en el que se encuentra con formas concretas de varios conceptos y puede manipularlos y obtener

información de ellos (Biehler et al. 2013); por ejemplo, destaca que los estudiantes pueden generar, operar y sacar información de distribuciones de frecuencia sin haber pasado por episodios en los que se les enseñe el concepto de distribución.

No estamos obviando que el manejo del software requiere un proceso de aprendizaje, sin embargo, el gasto de tiempo y energía para las generaciones actuales (más acostumbradas que las anteriores al funcionamiento de la tecnología) es menor que el tiempo y energía que requiere el aprendizaje del contenido matemático (en los casos en que dicho aprendizaje es posible en este nivel) para entender los conceptos de probabilidad en cuestión. Tampoco se quiere implicar que el aprendizaje de aspectos de probabilidad con ayuda de tecnología sustituya a un aprendizaje analítico más formal; más bien, lo que se quiere es crear antecedentes intuitivos efectivos que fortalezcan y ayuden a profundizar el aprendizaje formal.

También conviene aclarar que todavía hace falta traducir las propuestas que se hicieron acerca del uso del software en investigación de diseño (Bakker, 2018). Esto quiere decir elaborar lecciones para un nivel escolar determinado en las que se especifiquen los pasos a seguir en el aula y la forma de presentar los problemas, implementar las lecciones y observar el avance en el desempeño y razonamiento de los estudiantes. Finalmente, y lo más importante, mediante el análisis retrospectivo revelar en qué medida se cumplen los supuestos de que la tecnología ayuda, con la materialización de las propuestas aquí sugeridas, a desarrollar las grandes ideas de incertidumbre, aleatoriedad y variabilidad de los estudiantes.

REFERENCIAS

- Alarcón, J. (1982). *L'Appréhension des Situations Probabilistes chez de Elevés de 12-14 ans*. Tesis doctoral no publicada. Université Louis Pasteur.
- Bakker, A. (2018). Design Research in Education. *A practical guide for early career researchers*. Routledge.
- Batanero, C., Green, D. R., & Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 113-123.
<https://doi.org/10.1080/0020739980290111>
- Biehler, R. (1991), Computers in probability education. En R. Kapadia, & M. Borovcnick (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 169-211). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3532-0_6
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M.A. K. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K.S. Leung (Eds.). *Third International Handbook of Education* (pp. 643-689). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_21

- Cai, J. (Ed.) (2017). *Compendium for Research in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-1858-6>
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3
- Green, D. R. (1982a). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 766–783). Teaching Statistics Trust. <https://bit.ly/49s0kzp>
- Green, D. R. (1982b). *A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years*. [Tesis doctoral, Loughborough University]. Loughborough University Research Repository. <https://bit.ly/47pe9wV>
- Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research on probability. Responding to classroom realities. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909–955). National Council of Teachers of Mathematics-Information Age Publishing. <https://bit.ly/462FxPW>
- Langrall, C. W., Makar, K., Nilsson, P., & Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and Learning probability and statistics: An integrated perspective. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 490–525). National Council of Teachers of Mathematics.
- Lester, F. K. (Ed.) (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics and Information. Age Publishing.
- Martin, V., Thibault, M., & Homier, M. (2021). Self-reported practices of probability teaching: The use of manipulatives and technological tools. En ICME-14 (Ed.), *Proceedings of the Fourteenth International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–8). International Commission on Mathematical Instruction. <https://bit.ly/40yBFoT>
- Martin, V., Thibault, M., & Homier, M. (2022). Convergence and divergence in probability teaching in elementary and secondary school in Québec: A closer look at eight teachers’ self-reported practices. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 659–678. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00241-2>
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy* (pp. 95–137). National Academy Press. <https://doi.org/10.17226/1532>
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. W.W. Norton & Company

- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 602–625. <https://doi.org/10.2307/749889>
- Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *The Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 6–22). MERGA. <https://bit.ly/3tUEhB9>
- Shaughnessy, J., Watson, J., Moritz, J., & Reading, C. (1999). School mathematics students' acknowledgment of statistical variation. En C. Maher (Ed.), *Proceedings of the 77th Annual Conference of the National Council of Teachers of Mathematics*. NCTM.
- Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician*, 44 (2), 116–121. <https://doi.org/10.2307/2684144>
- Sobol, I. M. (1983). *Método de Montecarlo*. Editorial MIR.
- Stohl, H., & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 319–337. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00132-3](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00132-3)
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Judgements of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgement under Uncertainty: Heuristic and Biases* (pp. 84–98). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477>
- Zawojewski, J. S., & Shaughnessy, J. M. (2000). Data and chance. En E. A. Silver, & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 235–268). National Council of Teachers of Mathematics.

El fomento y la evaluación de las consideraciones realistas en el problema de las cuerdas

Martha Patricia Velasco Romero¹ y Josip Slisko Ignjatov²

RESUMEN

Se presenta el análisis y evaluación de las respuestas dadas por 94 estudiantes de bachillerato al problema de las cuerdas, considerando la congruencia entre la argumentación de la respuesta numérico-verbal y su representación visual. En un problema se pide construir una cuerda con ayuda de cuerdas más pequeñas. Se usaron dos grupos: uno experimental, llamado “experimentador inmerso” (la mitad de los estudiantes, seleccionada al azar), donde se reformuló el comienzo del problema “Imagina que quieres hacer una cuerda...”. Para el grupo de control se mantuvo la formulación original. En la hoja de trabajo, los estudiantes de ambos grupos debían de dibujar su solución al problema. Debido a que las diferencias entre los desempeños estudiantiles en dos grupos no fueron estadísticamente significativas, el enfoque de análisis y de evaluación es meramente cualitativo. Se encontró la mayor parte de respuestas correctas en el grupo con la formulación del “experimentador inmerso”. Se comentan brevemente los casos del contrato didáctico en las respuestas incorrectas.

PALABRAS CLAVE

Problema verbal, Consideraciones realistas, Experimentador inmerso, Dibujo situacional y dibujo matemático.

¹ martha.velasco@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0003-0125-8823>

² jslisko@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
<https://orcid.org/0000-0002-5805-4808>

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas juega un papel importante en las matemáticas escolares. Los problemas verbales motivan al estudiante a pensar de forma creativa, especialmente cuando representan un reto, sea conceptual o procedimental. Además, tal actividad ofrece las oportunidades para el progreso de diversas habilidades y permite el desarrollo de nuevos conceptos y su fortalecimiento (Dewolf et al., 2014; Verschaffel et al., 2000; Verschaffel et al., 2020). Hay consideraciones en los problemas verbales cuyas características pueden referirse a situaciones del mundo real, haciendo que la solución aceptable se tenga que interpretar en el contexto que conlleva a la formulación del problema, mientras que otros problemas solo enfocan a los estudiantes en operar con los datos numéricos (Dewolf et al., 2014).

El problema de las cuerdas que se tomó para este estudio dice:

“Un hombre quiere hacer una cuerda suficientemente larga para estirla entre dos postes y colgar varias prendas. Los dos postes se hallan a 12 m de distancia entre sí. Sin embargo, solo dispone de cuerdas cortas de 1.5 metros de largo cada una. ¿Cuántas de estas cuerdas cortas necesita atar juntas para obtener una cuerda larga que se pueda estirar entre los postes para colgar las prendas?”

Este problema fue usado en las investigaciones previas por Dewolf et al. (2014) con 402 niños turcos y 233 niños de Bélgica, cuyas edades oscilaban entre los 10 y 11 años. En tal estudio se aplicaron problemas verbales donde se incluía una ilustración relacionada con la situación del problema, una advertencia de una situación real, o ambos. Se dividieron en cuatro distintos tipos de aplicación: con ilustración y sin advertencia de situación real, sin ilustración y con advertencia, con ilustración y advertencia, sin ilustración ni advertencia, que fue el grupo de control. Se esperaba que el uso de una ilustración adjunta al problema ayudara a los estudiantes a crear un modelo situacional contemplando las características reales y, en consecuencia, llegar a una solución correcta. La intervención no tuvo el efecto esperado, pues el resultado de los niños fue obtenido solamente de modo operacional. De forma similar, las advertencias realistas en la formulación tenían el mismo fin. Sin embargo, no se encontró un efecto positivo del uso de la ilustración y/o de la advertencia al momento de la solución del problema que considerara como correcta una solución realista a estos problemas. En otras palabras, los niños no atendieron las consideraciones realistas al resolver problemas verbales, aunque tuvieran una ilustración y/o advertencia que los indujera a esto.

La combinación de una ilustración y/o una advertencia no condujo al aumento de soluciones estadísticamente significativas del uso de consideraciones realistas. Eso muestra la tendencia de los estudiantes a abordar los problemas de forma numérica no realista.

Posteriormente, Herrera et al. (2015) realizaron un estudio de corte cualitativo con 98 estudiantes de educación secundaria de Puebla, divididos en tres grupos diferentes: discusión previa (32 estudiantes), “experimentadores inmersos” (30 estudiantes) y un grupo de control (36 estudiantes). Se usaron dos versiones del problema: la primera como un problema verbal de las cuerdas (grupo de discusión y grupo de control), y en la segunda se reformuló el inicio del problema (Imagina que...), buscando que el estudiante percibiera el problema como propio, como si estuviera dentro de la situación, lo que Zwaan (2004) llama “experimentador inmerso”.

Primero se aplicó el Test de Pensamiento Lógico (TOLT) en su versión en español (Acevedo & Oliva, 1995) con el fin de ver si el nivel de razonamiento lógico hace algún aporte a las consideraciones realistas en los argumentos y representaciones que pueden dar los estudiantes al resolver un problema verbal realista. En el grupo de discusión previa se aplicó un problema: “el mejor tiempo de Juan en la carrera de los 100 *m* es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar una carrera de 1 km?”. Este problema tenía como finalidad la reflexión ante una posible respuesta numérica y el contexto real del corredor, ya que una persona no puede correr de manera constante, lo que muestra un pensamiento lineal.

Por otro lado, en el grupo de “experimentadores inmersos” se buscaba que los estudiantes se consideraran parte del problema con la intención de generar en ellos el contexto real y fomentar las consideraciones realistas. Se supone que, en tal caso, las respuestas al problema dejarán de ser solamente operacionales. El grupo de control no tuvo ninguna experiencia ni sugerencia sobre elementos realistas en la solución del problema.

Los resultados de la investigación de Herrera et al. (2015) arrojaron que en los grupos de discusión y de “experimentador inmerso” se pudo inducir las condiciones realistas, lo que aumentó el desempeño en la solución del problema verbal que no depende del razonamiento lógico del estudiante.

En el presente estudio se cambió la metodología, no hubo grupo de discusión previo, solo se consideraron dos grupos: el de “experimentador inmerso” y el grupo de control. Además, no se dieron ilustraciones como parte del problema, sino en ambos grupos se pidieron que los resolutores las hicieran para tratar de activar el conocimiento del mundo real como parte del modelo situacional del problema. El objetivo de esta investigación era analizar y comparar las respuestas que incluían dentro de la formulación al resolutor como parte del problema, con respecto a la formulación que arrojó, en estudios anteriores, respuestas puramente operacionales.

MARCO CONCEPTUAL

Los problemas verbales están presentes dentro del aula de matemáticas e, incluso, en exámenes de opción múltiple que forman parte de evaluaciones

nacionales e internacionales. Verschaffel et al. (2000) describen a los problemas verbales como situaciones problemáticas, normalmente presentadas en un contexto escolar, en las que se plantea una pregunta cuya respuesta se puede encontrar realizando operaciones matemáticas con los números del problema. La solución para este tipo de problemas no es trivial, ya que la información presentada generalmente no está relacionada (Bonnen, 2015).

Sin embargo, los problemas verbales pueden tener o no algún algoritmo establecido. Su solución puede ser apoyada mediante estrategias cognitivas llamadas heurísticas, que ayudan a resolver la situación donde no hay método de solución preestablecido. Aunque el uso de estrategias heurísticas no garantiza el éxito en la solución del problema, bien aplicadas aumentan significativamente las probabilidades de una respuesta correcta.

Una de las heurísticas es la representación pictórica, que visualiza los datos del problema y la relación entre ellos. Por esta razón, se consideran las definiciones de dibujos situacional y matemático. Rellensmann et al. (2017) definen como dibujo situacional a “una representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación problemática de acuerdo con su apariencia visual”. Así mismo, un dibujo matemático “es un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático” (p. 57).

Las representaciones visoespaciales pueden clasificarse según su naturaleza. Según Hegarty y Kozhevnikov (1999), hay dos tipos de representaciones: las pictóricas, que son dibujos concretos de objetos o acciones que se describen en el problema, y las representaciones esquemáticas, las cuales son más abstractas y se enfocan en las relaciones significativas entre las variables del problema.

Aunado a estas representaciones, Boonen et al. (2014) establecen dos tipos de representaciones esquemáticas:

- (1) las representaciones completas y correctas que presentan todos los datos y las relaciones entre las variables; y
- (2) las representaciones esquemáticas inexactas, donde las relaciones de los elementos relevantes para la solución del problema verbal faltan o se encuentran mal dibujadas o relacionadas.

El contrato didáctico (Brousseau, 1997) se puede describir como un sistema de expectativas entre el profesor y los alumnos que son recíprocas y que guían las acciones de ambos. Debido a esto, los estudiantes que resuelven problemas pueden considerar como respuesta lo que esperan de la clase o de su profesor. Por ejemplo, muchas veces realizan una operación aritmética con los valores que se presentan en el enunciado del problema, sin cuestionar si la respuesta puede ser válida dentro de un contexto real o si tiene sentido dentro del problema, como se encontró en Dewolf et al. (2014).

METODOLOGÍA

Se aplicó el problema de las cuerdas en cinco grupos de bachillerato: uno de primer semestre, dos de tercer semestre y dos de quinto semestre, teniendo un total de 94 estudiantes cuyas edades varían entre 15 a 17 años. La hoja de trabajo contenía dos planteamientos del problema con formulaciones distintas, como se muestra a continuación. Los estudiantes también debían dibujar sus soluciones de la manera más realista posible.

Formulación 1 (para el grupo experimental)

Imagina que tienes que hacer una cuerda lo suficientemente larga para estirla entre 2 postes y colgar varias prendas. Los postes se hallan a 12 m de distancia entre sí. Sin embargo, sólo dispones de cuerdas cortas de 1.5 m de largo cada una. ¿Cuántos de estas cuerdas cortas necesita juntar para obtener una cuerda larga que se puede estirar entre los postes para colgar las prendas?

Formulación 2 (para el grupo de control)

Un hombre quiere hacer una cuerda lo suficientemente larga para estirla entre 2 postes y colgar varias prendas. Los 2 postes se hallan a 12 m de distancia entre sí. Sin embargo, el hombre sólo dispone de cuerdas cortas de 1.5 m de largo cada una. ¿Cuántas de estas cuerdas cortas necesita atar juntas para obtener una cuerda larga que se pueda estirar entre los postes para colgar las prendas?

El total de participantes en cada una de las formulaciones fue de 47. En la formulación 1 fueron 29 mujeres y 18 hombres, mientras que en la formulación 2 fueron 27 mujeres y 20 hombres. La aplicación fue aleatoria en los cinco grupos de bachillerato. La formación de dos grupos es una mejora metodológica con respecto al estudio anterior porque elimina los factores adicionales que pueden influir cuando los grupos experimental y de control son independientes (por ejemplo, la preparación académica del grupo y las didácticas usadas por diferentes docentes).

Para comparar si la distribución de respuestas correctas e incorrectas del grupo experimental difiere significativamente del grupo de control, se llevó a cabo una prueba de hipótesis, empleando el software estadístico IBM SPSS. La hipótesis nula y alternativa quedó expresada de la siguiente manera:

(Hipótesis nula) H_0 = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo control = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo experimental

(Hipótesis alternativa) H_1 = Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo control $\neq$ Distribución de categorías Correcta/Incorrecta del grupo experimental

Para elegir el tipo de prueba – paramétrica o no paramétrica – se debe tomar en cuenta que una prueba paramétrica requiere que se verifiquen una serie de supuestos antes de aplicarla: “variables cuantitativas continuas, distribución normal de las muestras, varianzas similares y tamaño de las muestras, mayor a 30 casos” (Berlanga & Rubio, 2012; p. 102). Una prueba no paramétrica está libre de estos supuestos. También es importante señalar que la investigación ha mostrado que las pruebas no paramétricas son tan buenas como las paramétricas, o incluso más potentes, para identificar diferencias poblacionales a pesar de estar libre de supuestos (Wackerly et al., 2008). “Por esta razón, muchos expertos en estadística están a favor del uso de procedimientos estadísticos no paramétricos en vez de sus equivalentes paramétricos” (p. 742).

Para la presente investigación se decidió emplear una prueba no paramétrica, dado que se trata de una variable ordinal de tipo dicotómica (los resultados posibles son dos categorías, correcta o incorrecta) y no se cumplieron los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianza al emplear una prueba K-S de una muestra y una prueba de Levene, respectivamente. La prueba no paramétrica empleada para comparar dos muestras independientes es la U de Mann-Whitney. Después de correr dicha prueba, el SPSS arrojó un estadístico de $Z = 1.485$ con un valor de significancia $p = 0.137$. Este valor de significancia es mayor a 0.05 y, en consecuencia, no se rechaza la hipótesis nula. Es decir, en ambos grupos (experimental y control) hay una distribución similar de respuestas correctas e incorrectas. En el contexto del experimento, esto significa que la sola referencia a imaginar una experiencia cotidiana del acertijo de cuerdas para sujetar entre postes no es suficiente para arribar a una respuesta realista del acertijo.

Se clasificaron las respuestas en diferentes categorías considerando la justificación textual del estudiante, el tipo de representación visual y la respuesta final al problema.

RESULTADOS

La mayor parte de las respuestas correctas (número mencionado de cuerdas mayor que 8 y dibujo realista) se encuentran en la formulación 1 (“experimentador inmerso”), mientras que las respuestas incorrectas abundaron en donde no se inicia el problema pidiendo que el informante imagine la situación. También hubo respuestas alternativas que, debido a las argumentaciones de los estudiantes y los dibujos, no se consideraron como respuestas ni correctas ni incorrectas.

Respuestas incorrectas

En las respuestas incorrectas, la respuesta comúnmente presentada fue la de 8 cuerdas porque usan los datos numéricos junto con la operación de división

para justificar la obtención de dicho valor ($12\text{ m}/1.5\text{ m} = 8$). La respuesta es matemáticamente correcta, pero no es aceptable contextualmente porque no se consideran los datos realistas del problema, como son la pérdida de cuerda en los amarres o la cuerda que se utiliza para amarrarlas a los postes. Este comportamiento de los estudiantes es una manifestación del “contrato didáctico” (Brousseau, 1997), pues ellos creen, según lo acostumbrado en las clases de matemáticas, que para resolver un problema basta usar todos los datos numéricos y una o más operaciones aritméticas (Tabla 1).

Tabla 1
Tipos de respuestas para el problema de las cuerdas

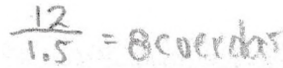
Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Correcta completamente	17	11
Parcialmente correcta	4	3
Incorrectas	22	29
Consideraciones alternativas	4	4
Total de casos	47	47

Nota. Categoría de las respuestas. Fuente propia

A continuación se presentan las principales operaciones usadas en las respuestas incorrectas, así como la argumentación del estudiante al justificar su respuesta.

Sin reflexionar el aspecto realista del problema, el estudiante considera solamente los datos de 12 metros y la longitud de la cuerda 1.5 metros y hace una operación aritmética de división como se muestra en la Figura 1.

Figura 1
Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando división



A handwritten calculation on a piece of paper. It shows the division $\frac{12}{1.5}$ followed by an equals sign and the word "8cuerdas". The handwriting is somewhat messy and informal.

Fuente propia

En cuanto a la argumentación de las respuestas donde se usan la división, algunas de ellas son:

*Se mide la distancia de los postes, medir las cuerdas que se van a usar y así hacer la cuenta de cuántas se van a usar para completar esa distancia entre los postes.
Se debe de tener una cantidad de 8 cuerdas de 1.5 para hacer la cuerda lo suficientemente larga para alcanzar 12 metros.*

La respuesta se calcula por medio de la multiplicación, posteriormente, utiliza la división para comprobar el resultado de la operación. En la Figura 2 se presentan dos tipos de respuestas usando ambas operaciones.

Figura 2

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando división y multiplicación

$$\begin{aligned} 1 \text{ cuerda corta} &= 1.5 \\ 12 \div 1.5 &= 8 \\ 1.5 \times 8 &= 12 \end{aligned}$$

Nota. Fuente propia

Es importante señalar los razonamientos escritos de los estudiantes que usaron ambas operaciones, que a continuación se presentan:

Para saber cuántas cuerdas necesitaría, simplemente dividiría 12 entre 1.5 por lo que el número multiplicado por 1.5 me daría 12 metros, Así, podría saber el número exacto de cuerdas cortas que se necesitaría.

Sabiendo que ya tengo la distancia entre los postes divido 12 metros entre 1.5 para saber cuánta cuerda necesito. Ocho cuerdas, al juntarlas daría la medida exacta que se requiere.

A su vez, como en el caso de la división que se usa considerando los datos del problema, los estudiantes también optan por sumar las cuerdas hasta completar la distancia total, como se muestra en la Figura 3, donde se hacen las sumas de 1.5 con 1.5 que permiten obtener un número entero que posteriormente se asocia con cuatro veces tres igual a 12.

Figura 3

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando sumas

$$\begin{array}{l} 1.5 > 3 & 1.5 > 3 \\ 1.5 > 6 & 1.5 > 6 \\ 1.5 > 3 & 1.5 > 3 \\ 1.5 > 3 & 1.5 > 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad 12$$

Nota. Fuente propia

En la argumentación que se presenta en la operación de la suma se presentan frases como:

Primero se mediría la distancia entre poste a poste al igual que el de mis cuerdas, después hago una simple suma.

Lo que podríamos hacer es sumar 1.5 hasta 12 para llegar al resultado.

Voy juntando las cuerdas hasta que llegue a la longitud entre poste y poste.

De igual forma, la multiplicación, que es similar a una suma repetitiva, también es viable matemáticamente para obtener el resultado de ocho cuerdas sin considerar el aspecto realista. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.

Figura 4

Respuesta incorrecta de 8 cuerdas usando la multiplicación

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 8 \\ \hline 12m \end{array}$$

Nota. Fuente propia

Con respecto a la justificación de las respuestas en palabras, las frases encontradas dentro del plan de solución fueron:

Multiplicar 1.5 por 8 porque con esta operación te saldrá el resultado de 12.

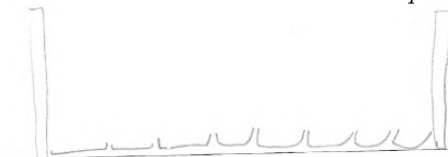
Yo usaría una multiplicación porque nos da la medida exacta de poste a poste.

Solo busqué un número que me diera 12 y comencé por 10 que me da 15 metros, después probé con 8 y me dio 12.

En el caso donde solo se usó la representación y la argumentación para la respuesta de ocho cuerdas, el estudiante escribió lo siguiente: “Podría poner las cuerdas en el suelo hasta que llegue a la medida del otro poste y con esto puedo descubrir qué medida tienen”. Debido a esto, la representación pictórica es la que se muestra en la Figura 5, donde las cuerdas se muestran en el piso y no en altura para el tendedero.

Figura 5

Representación de puesta incorrecta de 8 cuerdas usando la multiplicación

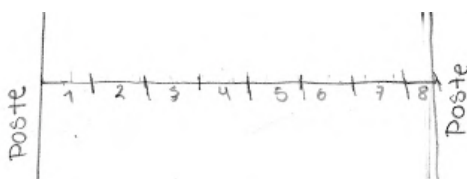


Nota. Fuente propia

Por otro lado, las representaciones de las respuestas donde se hicieron solo operaciones corresponden a tener dos postes, simbolizando a las cuerdas por medio de una línea recta. También se descarta el uso de cuerdas alrededor de los postes para unirlos. Otro dato característico de estas representaciones es ilustrar la respuesta de ocho cuerdas juntándolas una seguida de la otra, formando la distancia total de 12 metros como se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Representación de respuesta incorrecta de 8 cuerdas



Nota. Fuente propia

Recapitulando el total de respuestas incorrectas, la mayor cantidad fue para la respuesta de 8 cuerdas. En la justificación con operaciones del problema tanto para la formulación uno y dos se recurrió a la suma, división, multiplicación y dos operaciones al mismo tiempo, las cuales fueron división y multiplicación. En el caso de la formulación 1 se encontraron dos dibujos sin operaciones aritméticas como se muestra en la Tabla 2. Además, se encontraron cuatro respuestas que no correspondían a la respuesta incorrecta de 8 cuerdas, cuya representación corresponde a 8 cuerdas, pero con otras operaciones que no tienen el resultado correcto al hacerlas.

Tabla 2

Tipos de respuestas incorrectas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Suma	2	4
Dibujo sin operaciones	2	0
División	4	9
Multiplicación	13	8
Multiplicación y división	2	4
Otras respuestas con resultado diferente de 8 cuerdas	0	4
Total de casos	22	29

Nota. Fuente propia

Respuestas correctas

Las respuestas completamente correctas responden a consideraciones realistas, y en sus representaciones presentan respuestas mayores a 8 cuerdas, ya que se considera la pérdida de cuerdas en los amarres, como también en los pedazos adicionales que se utilizan para amarrar las cuerdas a los postes. A continuación se muestran los principales ejemplos en cada una de las respuestas correctas en las dos diferentes formulaciones del problema. Es necesario recordar que para estar en esta clasificación se consideraron tres factores: (1) la respuesta final; (2) la argumentación del estudiante; y (3) la representación con detalles que puede presentarse por medio de una representación esquemática o pictórica con los detalles suficientes.

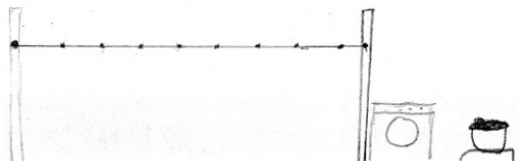
En la respuesta del uso de nueve cuerdas, la solución corresponde a calcular por medio de una división o multiplicación la distancia total requerida, que son 12 metros, y dividirla entre los 1.5 metros. Posteriormente, considerar la pérdida de cuerda al amarrarlas entre sí y a los postes. A continuación se presenta el plan para poder llevar a cabo la tarea en un estudiante que colocó la respuesta de 9 cuerdas:

1. Verificar que las cuerdas cubran los 12 metros y hacer los ajustes necesarios.
2. Amarrarlas entre sí de manera óptima.
3. Atar los extremos a cada poste
4. Verificar que la cuerda resista.

En la representación que se puede ver en la Figura 7 se presentan las 9 cuerdas con puntos que representan los amarres, y se hace una aclaración que justifica la respuesta mencionando que se debe aumentar el número total de cuerdas para cubrir el espacio que se les resta al hacer los nudos entre ellas. Esta respuesta se obtuvo de la formulación 1 del problema.

Figura 7

Representación de una respuesta completamente correcta

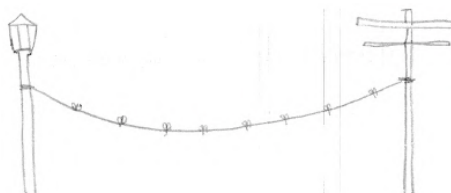


Nota. Representación de la respuesta de 9 cuerdas. Fuente propia

En otra representación de la misma respuesta de 9 cuerdas en la formulación 2 del problema, se pueden observar detalles pictóricos, como son los amarres alrededor de los postes —representados por medio de líneas—, así como la simulación de los nudos que se usan entre cuerdas. Otro detalle importante es que los postes que se usan son de un farol y de un poste de luz, relacionados con los que se pueden ver en las calles de la ciudad, tal como se observa en la Figura 8.

Figura 8

Representación de una respuesta completamente correcta



Nota. Representación de la respuesta de 9 cuerdas. Fuente propia

Por otro lado, en la respuesta de 10 cuerdas destacan argumentos similares a los que se presentan en la respuesta de 9 cuerdas, como son: *tomando en cuenta que dejaremos sobrante para atarla a los postes, quedaría justo si solo son 8 cuerdas, debido a que al atar las cuerdas se pierde un poco su longitud y por eso necesitaría más.*

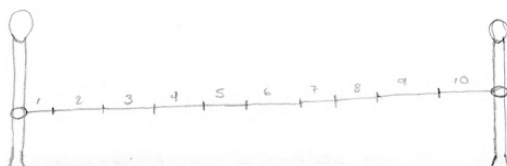
Un plan completamente detallado se presentó en la formulación 1 del problema, el cual se describe de la siguiente forma:

1. Juntar todas las cuerdas para que sea más fácil.
2. Después, atar cuerda a cuerda, hasta que sea larga.
3. Ver si del poste A al poste B alcanza, sino amarrar más, de lo contrario dejarla así.
4. Por último, atar los extremos a los postes.

Cabe destacar que en esta representación se toma un dibujo con detalles pictóricos que justifica la respuesta de las 10 cuerdas, además, señala la longitud entre cada una de ellas y hace un círculo alrededor del poste que simula el amarre de las cuerdas, tal como se puede ver en la Figura 9.

Figura 9

Representación de una respuesta completamente correcta

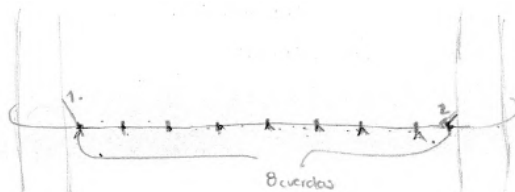


Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

De modo idéntico se presenta la respuesta de 10 cuerdas con la formulación 2 del problema, como se muestra la Figura 10. En esta representación hay ocho cuerdas amarradas entre sí. Además, se indica numéricamente la unión de dos cuerdas en los extremos que son amarradas en cada uno de los postes; por lo cual, la representación es un dibujo pictórico que muestra completamente el uso de las 10 cuerdas.

Figura 10

Representación de una respuesta completamente correcta

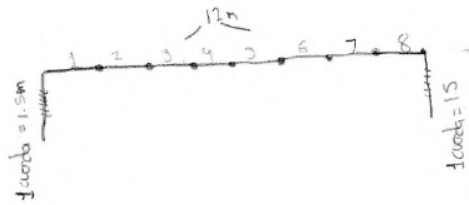


Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En cuanto a la representación de la Figura 11, que corresponde también a la formulación 2 del problema, se considera una representación no pictórica, sino más esquemática correcta y completa que representa las variables del

problema, tomando en cuenta que si queda cuerda en los extremos la dejaría en los postes, y considera la longitud de las cuerdas en su representación. Se justifica su respuesta mencionando que las dos cuerdas restantes corresponden al amarre entre cuerdas y el de alrededor de los postes.

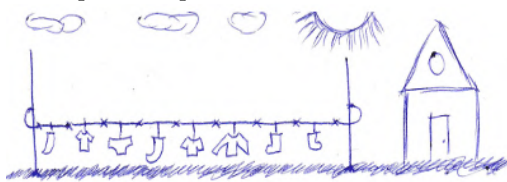
Figura 11
Representación esquemática correcta



Nota. Representación de la respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En otra representación que se dio como respuesta a la formulación 1 (Figura 12), que llamaremos dibujo completamente pictórico —ya que se presentan elementos como el sol, nubes, la ropa colgada en ganchos y una casa—, la unión de las cuerdas está representada por medio de cruces y se hace alusión al amarrar la cuerda alrededor de los postes, además de que en esta representación no se incluyen datos numéricos. La justificación de la respuesta es que se unieron 10 cuerdas para conseguir más de 12 metros de distancia entre los postes y amarrarlos a cada uno para poder colgar la ropa, son 10 cuerdas para poder darle la vuelta al poste porque con 8 quedaría justo.

Figura 12
Representación de una respuesta completamente correcta



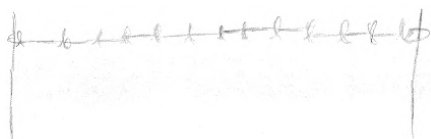
Nota. Dibujo completamente pictórico con respuesta de 10 cuerdas. Fuente propia

En la respuesta de 12 cuerdas de la primera formulación se presenta textualmente un problema al amarrar las cuerdas, pues se considera que se debe de hacer un amarre lo suficientemente bueno para que aguante y pueda llegar a los 12 metros, debido a esto se pierde la longitud, y por esa razón sería necesaria más cuerda. En primer lugar, se atan las primeras cuerdas al primer poste y se van amarrando según se necesiten. Los amarres entre ellas son los once que se presentan entre los postes, mientras que los amarres al

poste están representados por medio de un moño, lo que se muestra en la Figura 13.

Figura 13

Representación esquemática para la respuesta de 12 cuerdas



Nota. Fuente propia

En la segunda formulación del problema se da la respuesta completamente correcta de 13 cuerdas. Se presenta la justificación de que se perderán, aproximadamente, 10 centímetros de cuerda al atarlas entre sí, lo que equivale a dos metros con veinte centímetros. Es decir, a la distancia de los 12 metros entre los postes se deben de agregar, aproximadamente, tres metros más, lo cual representa 15 metros en total. La cantidad de cuerdas para 15 metros son 10, maximiza la cantidad de cuerdas al siguiente entero que son 11 (Figura 14). Adicionalmente, se agregan dos cuerdas más para atar los postes.

Figura 14

Representación de la justificación de la respuesta completamente correcta de 13 cuerdas

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ --- } 1.5 \text{ m} \\
 \times 1.5 \text{ m} \\
 \hline
 13.5 \text{ m}
 \end{array}$$

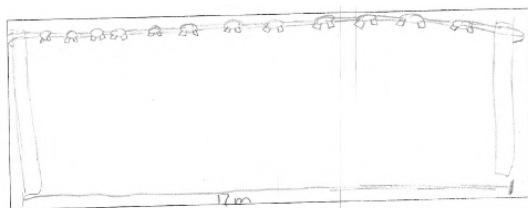
$$\begin{array}{r}
 1.5 \text{ m} \\
 \times 1.5 \text{ m} \\
 \hline
 1.5 \text{ m}
 \end{array}
 = 16.5 \text{ m}$$

Nota. Operaciones y justificación de las 13 cuerdas. Fuente propia

La Figura 15 muestra la distancia entre los postes de 12 metros, pero con el uso de trece cuerdas amarradas entre sí, representadas por medio de unos pequeños círculos; a su vez, esta cuerda pasa alrededor de los postes.

Figura 15

Representación una respuesta completamente correcta



Fuente propia

Recapitulando, se presenta una diversidad en el caso de las respuestas completamente correctas en ambas formulaciones del problema. La respuesta más popular que se encontró en este estudio fue la de 10 cuerdas. En la justificación del problema, tanto para la formulación uno y dos, se usaron dos operaciones al mismo tiempo, que en este caso fueron la multiplicación y la suma, aunque en algunos procedimientos se encontraron más de dos operaciones usadas. A continuación se presentan las respuestas en la Tabla 3.

Tabla 3
Tipos de respuestas completamente correctas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Suma	2	4
Dibujo sin operaciones	2	0
División	4	9
Multiplicación	13	8
Multiplicación y división	2	4
Otras respuestas con resultado diferente de 8 cuerdas	0	4
Total de casos	22	29

Nota. Categoría de las respuestas correctas. Fuente propia

Respuestas parcialmente correctas

Las respuestas parcialmente correctas caen en esta categoría debido a que se tienen discrepancias entre el número de cuerdas finales con la representación visual. En la Tabla 4 se presentan el número de cuerdas que son superiores a la respuesta incorrecta de 8 cuerdas. De igual forma, la justificación fue por medio de operaciones, principalmente usando la multiplicación.

Tabla 4
Tipos de respuestas parcialmente correctas para el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
9 cuerdas	1	2
10 cuerdas	2	0
11 cuerdas	1	0
Añadir de 1 a 6 cuerdas más	0	1
Total de casos	4	3

Nota. Categoría de las respuestas parcialmente correctas. Fuente propia

Es necesario hacer énfasis en que las respuestas en ambas formulaciones del problema no llegaron a ser completamente correctas debido a que la representación no fue acorde con el número de cuerdas que se presenta como respuesta final. En una de ellas no se hizo representación (Tabla 5).

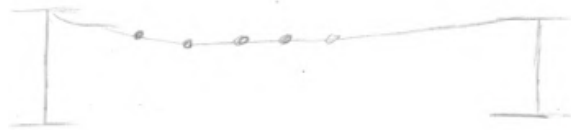
Tabla 5
Tipos de representación para la respuesta parcialmente correctas en el problema de las cuerdas

Tipos de respuesta	Imagina	Un hombre
Con representación, pero no corresponde a la respuesta final	3	3
Sin representación	1	0
Total de casos	4	3

Nota. Categoría de las respuestas correctas. Fuente propia

A continuación se presentan ejemplos de representaciones para las respuestas parcialmente correctas. En la Figura 16 se ven solo cinco uniones de cuerdas, pero en la justificación corresponde a la respuesta de 9 cuerdas, además de que no se coloca en los postes el uso de cuerda para amarrar el tendedero. De la misma forma, otro estudiante hace énfasis en que se pueden usar de una a seis cuerdas adicionales a las 8 que forman los 12 metros entre los postes, pero tampoco se representa el total de cuerdas ni los nudos necesarios entre postes.

Figura 16
Representaciones de respuestas parcialmente correctas

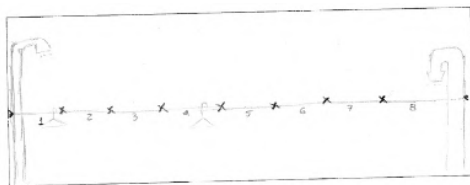


Nota. Fuente propia

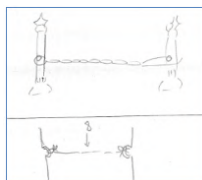
Condiciones alternativas en otro tipo de respuestas

Debido a que la naturaleza del problema depende completamente del contexto que conoce el estudiante, se tienen cuatro respuestas que corresponden a cada una de las formulaciones del problema. Algunas se presentan a continuación, describiendo las características adicionales al problema.

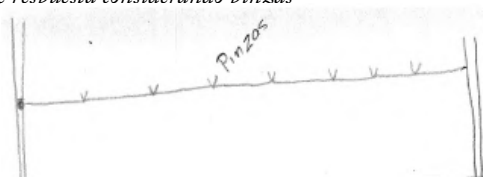
En la representación de la Figura 17, que corresponde a la formulación uno del problema, el estudiante considera que se deben usar pinzas para evitar agarrar espacio entre las cuerdas, esto con el fin de que solo se usen las 8 cuerdas que, matemáticamente, hace la suma de la distancia total. Además, propone unir el poste con cinta adhesiva para no usar más cuerdas. En la representación usa las “x” para señalar la unión con las pinzas, mientras que se usa otro símbolo para colocar el uso de la cinta adhesiva

Figura 17*Representaciones de respuesta con condición alternativa**Nota.* Representaciones de solución parcialmente correcta. Fuente propia

En la respuesta, representada en la Figura 18, se hacen varias observaciones. En primer lugar, se considera que las cuerdas son entrelazadas entre ellas mismas, conservando su longitud por completo. Se hace una observación adicional donde no es necesario rodear el poste, sino que basta con sujetarlo de extremo a extremo, por lo cual no se puede considerar en las respuestas incorrectas. Además, se justifica la respuesta porque el estudiante tiene un contexto similar en su casa, donde el tendedero está puesto de esta forma. Esta respuesta es de 8 cuerdas y las operaciones que usa para comprobar su razonamiento son una multiplicación y una división.

Figura 18*Representaciones de respuesta con cuerdas entrelazadas**Nota.* Representaciones en solución de 8 cuerdas con un contexto distinto. Fuente propia

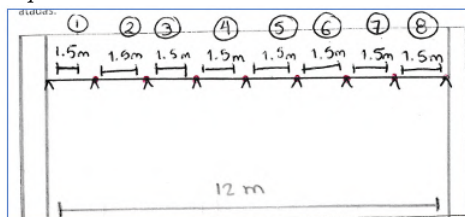
En la Figura 19, el resolutor habla del uso de otros materiales adicionales a las cuerdas, como puede ser el uso de pinzas que permita unir las entre sí, de tal forma que no se pierda su longitud al juntarlas. En este caso se mantendrían los 12 metros, además de que en los postes se usarían materiales similares para poder unirlos a ellos sin la necesidad de amarrar una cuerda alrededor de los postes.

Figura 19*Representaciones de respuesta considerando pinzas**Nota.* Fuente propia

Siguiendo un argumento similar al de la figura anterior, el estudiante habla de broches que tienen las cuerdas, los cuales permiten unir unas con otras de forma que no se pierda la longitud en las uniones entre ellas, como se puede ver en la Figura 20. De igual forma, se usa el broche para sujetar los extremos de las cuerdas a cada uno de los postes.

Figura 20

Representaciones de respuesta considerando broches



Nota. Fuente propia

CONCLUSIONES

La mayor parte de las respuestas completamente correctas se encuentra en la formulación de “experimentador inmerso”, aunque el análisis estadístico indica que no hay una diferencia significativa con respecto a las dos formulaciones del problema. Analizando cualitativamente cada una de las respuestas, las consideraciones realistas mencionan: amarres óptimos, el atar los extremos de la cuerda más larga a los postes, así como la verificación de la resistencia de la cuerda. Las representaciones que se encontraron en las respuestas correctas hacen referencia a los amarres entre las cuerdas y al atar la cuerda alrededor de los postes, así como otros elementos realistas que pueden ser ropa y una lavadora.

Por otro lado, las respuestas incorrectas utilizan las operaciones de multiplicación, división y suma, o alguna de las combinaciones de los anteriores, esto con el fin de dar una respuesta donde tengamos un número exacto de cuerdas. En las argumentaciones de los estudiantes no se menciona la pérdida de cuerda debido a los amarres. En cuanto a las representaciones de estas respuestas, se utilizan líneas rectas para representar las cuerdas y otras líneas para representar los postes, sin que haya una representación que indique los amarres entre las cuerdas. La justificación operacional en las respuestas incorrectas se debe a la presencia del “contrato didáctico” (Brousseau, 1997), que es la causa de que las respuestas no realistas abunden en las matemáticas escolares. Un aspecto de tal fenómeno es usar dos operaciones aritméticas para comprobar los resultados.

En cuanto a las respuestas parcialmente correctas, sólo hubo discrepancias con respecto a la representación y a la argumentación con su respuesta final. Si hubiese habido algún tipo de intervención adicional durante la resolución

del problema por parte del docente (pregunta orientadora o discusión en el grupo), los autores de estas respuestas hubiesen llegado a una respuesta completamente correcta. Además, en las respuestas que no se catalogaron como correctas o incorrectas, los estudiantes hicieron uso de su contexto para dar una solución realista al problema de las cuerdas, lo que muestra que, hasta cierto punto, tomaron en cuenta su entorno.

En las investigaciones futuras se debería aumentar el número de estudiantes involucrados y reforzar la idea del “experimentador inmerso”, solicitando una descripción verbal de las acciones que se deben realizar para poder colgar la ropa. Como la inclinación hacia las consideraciones realistas espontáneas aumenta con la edad, para detectar el mayor efecto de la intervención con el experimentado inmerso, los grupos de estudiantes deberían ser de secundaria y/o primaria alta.

También sería interesante agregar otro grupo experimental que haga una formulación del problema que se complementa con un dibujo del elemento necesario para la consideración realista. Aunque inicialmente tal tipo de intervención no tuvo efecto importante (Dewolf et al., 2014), las posteriores modificaciones (Weyns et al., 2017) fueron más exitosas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dra. María Elena Rodríguez Pérez (Universidad de Guadalajara) el apoyo en el análisis estadístico.

REFERENCIAS

- Acevedo, J., & Oliva, M. (1995). Validación y aplicaciones de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada*, 48(3), 339–351.
<https://bit.ly/3FIcM0r>
- Berlanga, V., & Rubio, M. J. (2012). Clasificación de pruebas no paramétricas. Cómo aplicarlas en SPSS. REIRE. *Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, 5(2), 101–113. <http://dx.doi.org/10.1344/reire2012.5.2528>
- Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26.
<https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds. & Trans.). Springer.
<https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education*, 82(1), 103–120.
<http://dx.doi.org/10.1080/00220973.2012.745468>

- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684–689. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>
- Herrera, Z. I. M., Slisko, J., & López, J. A. L. (2015). Induciendo consideraciones realistas de la solución del problema “tendedero entre dos postes” en estudiantes de secundaria: resultados iniciales y la influencia del nivel de razonamiento lógico. En L. A. H. Rebollar, J. Slisko, J., & López, J. A. L. (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación*. (Vol. 1, pp. 117–137). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. <https://bit.ly/49k3Fk3>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students’ mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger Publishers.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, 52, 1–16. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Wackerly, D. D., Mendenhall III, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning.
- Weyns, A., Van Dooren, W., Dewolf, T., & Verschaffel, L. (2017). The effect of emphasising the realistic modelling complexity in the text or picture on pupils’ realistic solutions of P-items. *Educational Psychology*, 37(10), 1173–1185. <http://dx.doi.org/10.1080/01443410.2016.1259461>
- Zwaan, R. A. (2004). The immersed experiencer: Toward an embodied theory of language comprehension. En B. H. Ross (Ed.), *Psychology of learning and motivation* (Vol. 56, pp. 35–62). Academic Press.

TERCERA TENDENCIA

ACTIVIDADES INNOVADORAS PARA EL
DESARROLLO DEL PENSAMIENTO
MATEMÁTICO

El razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos

Carlos Alberto Lugo Lugo¹, Erika García Torres² y
Santiago Alonso Palmas Pérez³

RESUMEN

El razonamiento proporcional es una idea fundamental de la matemática, este surge inicialmente de manera cualitativa hasta transformarse en un razonamiento cuantitativo. Durante su desarrollo existen diferentes aproximaciones que irrumpen con su comprensión, como la relación aditiva o el empleo injustificado de la regla de tres. El objetivo del trabajo es explorar el razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la manipulación de micromundos, identificando niveles de razonamiento que permitan caracterizarlo en esta modalidad educativa. A partir de los niveles de razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1983), se han diseñado actividades compuestas por diferentes problemas de acuerdo con los micromundos seleccionados (Excel y GeoGebra), empleando las herramientas y el lenguaje de cada uno de los software como medio de exploración por parte de los alumnos, logrando identificar, a partir de sus respuestas a los problemas y sus argumentos para justificar sus decisiones, el nivel en el que se encuentran y la implicación que tiene su construcción en colectivo. A partir de los posibles resultados y las conclusiones que se obtengan, se busca poder proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que puedan identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento proporcional, Telesecundaria unitaria, Micromundos.

¹ clugo26@alumnos.uaq.mx

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México
<https://orcid.org/0009-0004-9231-4812>

² erika.garcia@uaq.edu.mx

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México
<https://orcid.org/0000-0003-1764-7380>

³ santiagopalmas@gmail.com

Universidad Autónoma Metropolitana, Estado de México, México
<https://orcid.org/0000-0003-1175-5938>

INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional (en adelante RP) es una de las nociones matemáticas que se trabajan en diferentes niveles educativos a través de una variedad de acercamientos. Es un tipo de pensamiento complejo que implica el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes y comparaciones múltiples; además, está relacionado con los métodos del pensamiento cualitativo y cuantitativo (Heller et al., 1989).

El RP no sólo está presente en las matemáticas, sino que es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias (Mochón Cohen, 2012). Piaget lo consideraba como un componente básico del razonamiento formal, necesario para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación (Godino & Batanero, 2003).

Dentro del sistema educativo de México, el RP está integrado en los planes y programas de la educación secundaria, si bien no está presente como RP, es atendido en los aprendizajes esperados (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017) para cada año escolar:

- Primer año: Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
- Segundo año: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Tercer año: Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.

Por lo que “es un conocimiento que subyace en múltiples nociones matemáticas: la multiplicación, el número relacional, la escala, el porcentaje, la probabilidad, la función lineal entre otras” (Block, Mendoza & Ramírez, 2014, p. 2)

Este estudio toma como población a la telesecundaria unitaria debido a que es una de las modalidades más alejadas y con menor integración en el currículo, ya que no cuenta con una propuesta curricular de acuerdo a sus necesidades (García, et al., 2019). A pesar de ello, muestra aportes pedagógicos interesantes, tales como la construcción de aprendizajes en colectivo por la diversidad de edades, de pensamiento y razonamiento (Bustos Jiménez, 2013), en donde las construcciones hechas por los alumnos involucran una discusión y toma de decisiones, lo cual favorece su comunicación matemática y la justificación de sus resultados.

A partir del uso de un micromundo seleccionado (GeoGebra) y una serie de actividades desarrolladas en él, se busca identificar la manera en la que los alumnos de telesecundaria unitaria se aproximan al RP, identificando el tipo de razonamiento a partir de una clasificación por niveles (Karplus, et al., 1983), teniendo como principal enfoque las interacciones entre alumnos multigrado, alumno-micromundo y micromundo-RP.

MARCO TEÓRICO

Razonamiento proporcional

El RP es un razonamiento matemático (Fernández Verdú & Llinares Ciscar, 2012) que denota un sistema de dos variables entre las que existe una relación de función lineal y puede caracterizarse como una relación multiplicativa constante (Karplus, et al., 1983). Hace referencia a detectar, analizar, explicar y proporcionar evidencia en apoyo de afirmaciones sobre relaciones proporcionales (Lamon, 2020); además, no sólo implica el entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre dos cantidades, sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son (Modestou & Gagatsis, 2010).

La noción de proporción comienza a construirse en los primeros años educativos de manera cualitativa y lógica, antes de que se estructure cuantitativamente (Butto et al., 2019), permitiendo que se comprendan situaciones proporcionales bajo términos del tipo “en ambos casos crecen” o “las dos disminuyen”.

Respecto al RP de alumnos de secundaria, se ha identificado que acuden con mayor comodidad al análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo, y cuando llegan a aproximarse de forma cuantitativa se fundamenta, principalmente, en análisis de índole aditivo, siendo esta una aproximación errónea (Sánchez, 2013).

Existen cuantiosos estudios enfocados en el RP, de los cuales se han identificado los trabajos realizados de Karplus et al. (1983) y Lesh et al. (1988) como pioneros. Para este estudio se retoma la categorización propuesta por Karplus et al. (1983), generada a partir de las respuestas y las estrategias de resolución al problema “Mr. Tall/Mr. Short” por parte de alumnos en edad escolar (12 a 15 años), estableciendo así cinco niveles, tal como se describe en la tabla 1.

A partir de esta categorización se busca comprender el nivel de RP que tienen los alumnos de telesecundaria unitaria con el uso de dos micromundos bajo su conceptualización y perspectiva teórica.

Micromundos

Un micromundo se define como un ambiente computacional de incorporación de un conjunto coherente de conocimientos científicos y de relaciones dise-

ñadas de forma que, con un conjunto adecuado de tareas y con principios pedagógicos, estudiantes pueden participar en la exploración y construcción de actividades ricas en generación de significados (Healy & Kynigos, 2009)

Tabla 1
Niveles de razonamiento proporcional

Niveles de razonamiento proporcional	
Nivel	Descripción
Incompleto	En el nivel incompleto se adivina la respuesta o emplean una operación cuantitativa inapropiada. Se es capaz de identificar la relación de dos magnitudes, pero en el intento de resolver, se emplea alguna operación que no lleva a una solución adecuada, ya sea porque la operación no es la correcta o el algoritmo fue mal desarrollado.
Cualitativo	Se comparan las cuatro cantidades dadas, usando los términos más, menos o términos equivalentes. El razonamiento proporcional aparece en etapas iniciales bajo un razonamiento cualitativo, por lo que se puede identificar una situación de proporcionalidad cuando está aumenta o disminuye, pero aún no logra emplear un proceso cuantitativo.
Aditivo	Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa. Este nivel se desarrolla desde un razonamiento cuantitativo, pero relaciona los datos bajo estructuras aditivas.
Pre-proporcional	Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades. Se reconoce la situación de proporcionalidad y se identifica el uso de los factores multiplicativos; esta categoría está muy cercana al razonamiento proporcional, pero aún no se logra establecer la igualdad de razones, el razonamiento parte del reconocimiento del valor unitario.
Proporcional	Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia. Dentro del desarrollo del razonamiento proporcional, esta categoría es donde se puede asumir que ya se ha desarrollado un razonamiento completo, puesto que logra identificar las situaciones proporcionales de las que no la son, se identifican términos como razón, constante de proporcionalidad y, además, los procedimientos son correctos.

Nota. Propuesta tomada de Karplus et al. (1983)

La intención de un micromundo es orientar a los alumnos hacia maneras matemáticas de pensar a través de estructuras establecidas por el diseñador y el software, los alumnos deben mantener cierta autonomía, asumir la responsabilidad de sus acciones y de los resultados que producen (Noss & Hoyles, 2019). A pesar de que el trabajo no tiene fines didácticos, se contempla que el diseño creado puede desarrollar dichas habilidades en los estudiantes.

Históricamente, los micromundos se distinguían por el uso de lenguajes de programación y diseño de ambientes de exploración desde su programación hasta su interacción. Con el paso del tiempo se recurrió a utilizar el término micromundo para denominar módulos interactivos, ya sean independientes (stand-alone software) o creados dentro de otro paquete que funciona como plataforma (Cabri, Logo Micromundos, Excel, etc.). En ellos se explora una idea manipulándola con los elementos provistos por el diseñador para un fin en específico, de forma que la tendencia actual es que el usuario únicamente explore utilizando las herramientas dadas por el micromundo y no en la modificación de estos (Sacristán, 2003).

De manera específica, un micromundo matemático es un lugar para familiarizarse con un conjunto de ideas, situaciones problemáticas o actividades en donde el estudiante y el maestro pueden probar ideas dentro de un tema de interés; además, la meta es la construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal, dando oportunidades para crear modelos mentales que reflejan la estructura y composición de los sistemas formales (Weir, 1987). Es decir, a través de la manipulación que permiten los micromundos, los alumnos son capaces de probar hipótesis o procedimientos que los lleven a una formalización del aprendizaje.

Para que un ambiente computacional se considere micromundo debe de contener cuatro componentes (Hoyles & Noss, 1987):

- *El componente del estudiante.* Entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica.
- *El componente técnico.* Software o lenguaje de programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.
- *El componente pedagógico.* Estructura de la investigación y exploración de los conceptos plasmados en el componente técnico (los aspectos físicos puede ser el docente, libro, cartel, etc.).
- *El componente contextual.* Entorno social de las actividades.

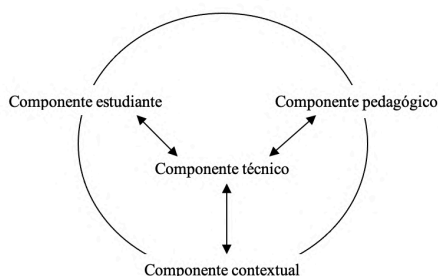
Los componentes se relacionan en la forma como se muestra en la Figura 1, teniendo como centro el componente técnico, integrando cada uno de los demás componentes en una doble dirección.

Telesecundaria unitaria

Otra parte central del trabajo y cumpliendo con el rol de componente contextual, el nivel educativo que se ha considerado pertinente para analizar el RP a partir de la interacción con un micromundo es la secundaria, debido a que en este nivel se formalizan las nociones que se han trabajado en etapas anteriores (educación primaria), tales como porcentajes y conversión de magnitudes. En secundaria surgen términos como proporcionalidad directa e inversa, constante y razón.

Figura 1

Relación de componentes que integran un micromundo



Nota. Modelo basado en la propuesta de Hoyles y Noss (1987)

Dentro de las modalidades presentes en la secundaria se ubica la telesecundaria, la cual es atendida con apoyo de un maestro generalista por grupo (SEP, 2017). Una característica de esta modalidad es que ofrece un servicio educativo con el apoyo de los medios electrónicos de comunicación social y con materiales impresos (Calixto Flores & Rebollar Albarrán, 2008).

El sistema de la telesecundaria se ve traspasado por la modalidad de escuelas unitarias, o también conocidas como multigrado. Esta modalidad se presenta en el sistema de educación básica en México, desde preescolar hasta el bachillerato.

La escuela multigrado es aquella donde los docentes atienden a alumnos de diversos grados en una misma aula. Estas escuelas surgen con la necesidad de atender alumnos que viven en zonas donde no ha sido posible establecer una secundaria general o técnica por diferentes condiciones (distancia, contexto rural, número de población, etc.).

En secundaria, sólo las escuelas para migrantes y las telesecundarias pueden ser multigrado (Santos, 2019). Debido a que la telesecundaria no cuenta con maestros para las diferentes asignaturas, un solo maestro es el responsable de todas las materias. En una telesecundaria multigrado o unitaria (el término que mejor la define), el docente, además de ser responsable de todas las asignaturas, es responsable de los tres grados.

Desde su origen, las escuelas multigrado han sido observadas como incompletas, transitorias, provisionales o compensatorias, o incluso como un auxiliar en la cobertura educativa en las zonas rurales. Aunque es reconocida su existencia, desde las políticas educativas pareciese que se ha apostado más por su subsistencia que por su consolidación (Schmelkes & Águila, 2019).

A nivel nacional, estas escuelas representan el 37.5% en educación preescolar (3 a 6 años), el 41.8% en primaria (alumnos de 6 a 12 años) y el 33.1% en telesecundarias, secundarias comunitarias e indígenas (12 a 15

años); atienden al 9.7%, 8.6% y 10.2% de alumnos respectivamente, en el ciclo escolar 2019- 2020 (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación [MEJOREDU], 2021). Si bien no es un porcentaje mayor a la mitad de las telesecundarias, el realizar estudios en esta modalidad ayuda a visualizar la educación desde un panorama alejado a lo que propone el currículo segmentado por grados escolares, otorgando la posibilidad de visualizar qué sucede en una aula donde predomina la diversidad, al identificar la combinación de experiencias, conocimientos, actitudes y formas de pensar, pueden suscitar un aprendizaje colectivo y desarrollar su capacidad de argumentación y discusión entre pares (Bustos Jiménez, 2013).

Otra de las razones para considerar este sistema es que existe una invisibilidad de la escuela multigrado en el ámbito de la investigación educativa (Arteaga, 2011). Los estudios son relativamente recientes, escasos y de corte más casual (Galván Mora & Espinosa Gerónimo 2017); por estas razones, seguir indagando en educación multigrado puede resultar de gran apoyo para los docentes que trabajan en estos centros educativos, otorgando un panorama sobre el tratamiento del RP.

Objetivo y pregunta de investigación

A partir de describir el RP, la noción de micromundos y la telesecundaria unitaria, este estudio tiene como objetivo explorar niveles de razonamiento proporcional en alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos para dar respuesta a la pregunta ¿Cómo son los niveles de razonamiento proporcional de los alumnos de telesecundaria unitaria a través de la interacción con micromundos?

Para cumplir con el objetivo se ha diseñado una serie de actividades que permiten observar y comprender los argumentos y el porqué de las respuestas de los alumnos.

MÉTODO

El estudio presente es de tipo cualitativo con alcance exploratorio. La población de este estudio está integrada por 18 participantes, alumnos pertenecientes a la telesecundaria unitaria No. 316, ubicada en el municipio de Apaseo el Alto, perteneciente al estado de Guanajuato y situada en un contexto rural. De los 18 alumnos participantes, cinco pertenecen a primer grado, ocho a segundo y cinco a tercer año. Para su participación se solicitó el consentimiento informado por parte de sus padres o tutores y su asentimiento antes del desarrollo de las actividades.

A partir del planteamiento del objetivo y la selección de la población de estudio, se trazó una ruta metodológica dividida en dos fases. En la primera fase se eligieron dos micromundos (Excel y GeoGebra), el diseño de las actividades, la primera aplicación y el análisis de los resultados obtenidos.

La segunda fase la constituye el rediseño de las actividades, la segunda aplicación, análisis de datos obtenidos y resultados.

Primera fase

La aplicación del primer diseño tuvo como finalidad conocer a los participantes, la escuela y su organización, pero sobre todo la funcionalidad de las actividades, las cuales fueron diseñadas en Excel y GeoGebra considerando la categorización de Karplus et al. (1983). Se planearon diferentes situaciones y áreas correspondientes al RP y una serie de preguntas que ayudarán a profundizar sus argumentos y sus respuestas. Ambos softwares (Excel y GeoGebra) fueron evaluados de acuerdo a las características y propiedades que deben de cumplir para considerarse como micromundos.

Excel es una hoja de cálculo desarrollada por Microsoft bajo un lenguaje de programación macro llamado Visual Basic. Algunas de sus funciones son crear y manipular cálculos, gráficas, tablas, bases de datos, etc.

Respecto a GeoGebra, se trata de un software dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos, suele ser uno de los ejemplos más claros de un micromundo matemático debido a que su manipulación permite crear situaciones en donde los sujetos pueden probar hipótesis o procedimientos, identificando elementos desde diferentes áreas matemáticas; inclusive, las herramientas con las que cuenta permite ver modelos en movimiento y analizar diferentes versiones de una sola representación. La razón de considerar a GeoGebra como parte del instrumento para nuestro estudio es porque permite analizar el RP en otro tipo de situaciones, específicamente en el ámbito geométrico.

El diseño en ambos software se desarrolló en dos actividades, en la primera se plantea una exploración controlada por el investigador en donde los participantes conocen y se involucran con las herramientas y características de cada software. En la segunda se plantea una serie de actividades para el explorar el RP, considerando el dominio que han adquirido respecto al recurso y basándose en las características de manipulación que otorgaba cada software.

La aplicación se llevó a cabo con todo el grupo distribuido en equipos de trabajo integrados por cuatro o cinco estudiantes, cada equipo tenía a su disposición una laptop con acceso a las actividades. Para tomar registro de lo que sucedía en cada equipo se contó con dispositivos de grabación, tanto de audio como de video.

A partir de la aplicación del diseño se pudieron identificar aspectos relacionados con el RP de los participantes. También se llevó a cabo un análisis de las actividades, una revisión teórica respecto a los micromundos y se tomaron decisiones respecto al tipo de intervenciones por parte del aplicador y a la metodología de pregunta-respuesta.

Segunda fase

En esta fase se realizó un rediseño de actividades, eligiendo solo GeoGebra para el desarrollo del micromundo de exploración. Se establecieron cinco actividades: exploración, dos actividades de identificación (relación entre segmentos por un deslizador y relación entre triángulos semejantes) y dos actividades de construcción (construcción de dos segmentos bajo una razón dada y construcción de un mosaico con un factor escala).

En términos teóricos se tomó la decisión de solo continuar con las actividades de GeoGebra y desechar las de Excel, ya que Excel no muestra ningún símbolo de representación disponible del proceso por el cual se llega a la construcción final, es decir, se ingresa la fórmula y se obtiene el resultado, pero no es visible para los participantes el algoritmo que establece para llegar a él.

A diferencia de la aplicación del primer diseño, se contó con la participación de observadores, los cuales participaron libremente y sin recibir ningún estímulo monetario o de algún otro tipo. Su principal función fue registrar aquellos elementos observables y audibles referentes a las actividades en términos de RP, relación entre pares y relación con el micromundo, que por las condiciones del salón de clase no podían ser capturados por los dispositivos de registro. Previo a la aplicación se consideró una reunión de preparación, en la cual se expusieron las actividades que los participantes realizarían y se compartieron elementos rescatados de la aplicación de la primera versión de las actividades, esto con el objetivo de sensibilizar a los observadores y que tuvieran mayor claridad respecto a los registros que debían hacer.

El rediseño brindó la posibilidad de que los participantes exploraran con mayor libertad, ya que, como se puede observar en la tabla 2, en el diseño original las actividades estaban referidas a un solo nivel de razonamiento. Por ejemplo, la actividad 2 fue pensada para identificar el nivel aditivo y pre-proporcional, limitando las preguntas de exploración a evidenciar solo ese tipo de razonamientos.

Como diferencia, el rediseño buscaba que los participantes se situaran en una actividad con un objetivo específico y desarrollaran cualquier idea que consideraran pertinente; por ejemplo, en la actividad dos, al buscar la relación entre dos segmentos, los participantes podían presentar cualquiera de los niveles, esto ya no dependería de las preguntas, sino de sus propias reflexiones.

Otro aspecto importante que buscaba favorecer el rediseño era priorizar la actividad matemática sobre las dificultades que podían presentar los participantes en el micromundo, es decir, que las actividades fueran sencillas en diseño, pero ricas en generación de discusión, participación e integración de todos los participantes con el micromundo. Dentro de las actividades del rediseño se planteó establecer una gradualidad en donde la primera actividad funcionara como una oportunidad para que los participantes reconocie-

ran los elementos del micromundo. En la segunda actividad se sigue contemplando una exploración, pero ya con implicaciones del RP. A partir de la actividad 3 se esperaba que los participantes pudieran manejar las herramientas de GeoGebra con un grado adecuado, en donde les fuera posible expresar su RP.

Tabla 2
Comparación entre actividades del primer diseño y del rediseño

Primer Diseño	Rediseño
1. Exploración. Actividad en donde los participantes reconocían las herramientas y los menús de GeoGebra.	1. Exploración. Actividad en donde los participantes reconocían las herramientas y los menús de GeoGebra.
2. Comparación de dos triángulos rectángulos a partir de una escala 3:1. A través de la manipulación de un deslizador, los participantes debían encontrar el factor 3:1. Referido al nivel aditivo y pre proporcional.	2. Relación entre dos segmentos por un deslizador. A partir de un deslizador, determinar cuál era la relación entre dos segmentos y bajo qué constante estaban integrados.
3. Manipulación de un triángulo intersectado por una paralela (desarrollo del teorema de Tales). Referido al nivel pre proporcional y proporcional.	3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada. A partir de una relación 0.5:1 y con apoyo de un deslizador trazar dos segmentos y describir qué relación hay entre ellos.
4. Relación entre dos triángulos contruidos con una escala 2:1 (en dos lados) y 3:1 (lado restante). Reconocer que el triángulo no estaba contruido con la misma igualdad de razones para todos los lados, y por tanto no era un triángulo semejante. Referido al nivel proporcional.	4. Relación entre triángulos semejantes. A partir de dos triángulos contruidos en relación 2:1, identificar cómo están relacionados, y qué sucede con los lados si el área de los triángulos está en relación 2:1.
5. No aplica, solo se llevaron a cabo cuatro actividades.	5. Construcción de un mosaico a partir de uno original. A partir de conocer solamente la relación entre una medida del mosaico original y del nuevo, identificar bajo qué relación están contruidos y hacer uno nuevo respetando la forma original.

En la tabla 3 se expone el objetivo de cada actividad y se explica a grandes rasgos en qué consistía; además, se integra la indicación que recibieron los participantes al momento de responder.

Tabla 3
Relación del objetivo de las actividades y su indicación

Actividad	Objetivo	Indicación
Actividad 1. Exploración	Identificar las diferentes herramientas y funciones que provee GeoGebra por medio de una exploración libre en los equipos de trabajo, esperando que los alumnos se familiaricen con el software.	Al comienzo de la página que abrieron hay un espacio que dice “exploración”, entonces van explorar de manera libre lo que pueden hacer en GeoGebra, identifiquen las diferentes herramientas, tracen lo que ustedes gusten, el objetivo es que vayan viendo cómo funciona.
Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador	Conocer la forma en la que los alumnos interpretan la relación entre dos segmentos a través del uso de un deslizador.	En el siguiente espacio hay dos segmentos y un deslizador, la intención de esta actividad es que ustedes revisen si hay alguna relación entre los segmentos, si la hay, qué tipo de relación es. De igual forma, identificar qué función tiene ahí el deslizador.
Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada	Establecer una relación entre dos segmentos a partir de una razón 0.5:1 con el uso de un deslizador o algún otro procedimiento establecido por los alumnos.	En la actividad anterior observaron una relación entre dos segmentos, ahora ustedes deben de trazar dos segmentos de forma que uno de ellos tenga la mitad del valor del otro sin importar su medida, pueden apoyarse de las herramientas que hemos revisado.
Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes	Identificar la manera en que los alumnos comprenden la relación entre dos triángulos a partir de las longitudes de sus lados y su área.	Indicación 1: En la siguiente actividad hay dos triángulos, a partir de las medidas y las características que tienen hay que revisar si se parecen en algo o si son diferentes, rescaten todo aquello que puedan ver respecto a los dos triángulos y después lo comentaremos. Indicación 2: Ya que revisaron qué relación hay entre los triángulos, manipulen el triángulo rojo de forma que su área sea la mitad de la del triángulo azul, siempre y cuando no se pierda la forma original.
Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala	Conocer el tipo de relación que establecen los alumnos entre el mosaico original y el solicitado a escala (1.5:1) a partir de las diferentes herramientas involucradas en el trazo de polígonos.	Como se puede observar, tenemos un pequeño mosaico en la parte de la actividad, y lo que se tiene que hacer es uno nuevo. Para hacerlo solamente tenemos como referencia la nueva medida de uno de los lados del triángulo azul, entonces, con esa información busquen la forma de hacer un nuevo mosaico.

RESULTADOS

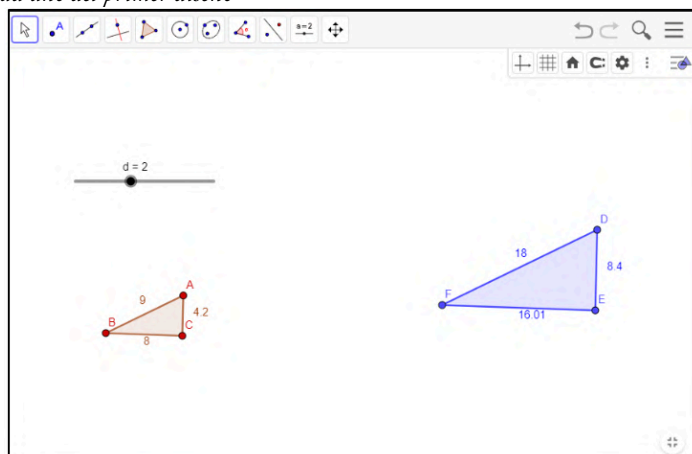
A partir de la aplicación del primer diseño y del rediseño, se ha podido observar el tipo de razonamiento que emplean los participantes en las diferentes actividades propuestas, a continuación se muestran algunos casos particulares.

Nivel cualitativo primer diseño

En la actividad uno diseñada en GeoGebra (Figura 2), en donde se establecían dos triángulos relacionados por medio de una razón de 2:1, se observaron argumentos cualitativos por parte del equipo tres, quienes solo describen la relación multiplicativa bajo argumentos cualitativos “mientras más deslicemos más aumenta”, tal como se puede observar en el siguiente fragmento:

Figura 2

Actividad uno del primer diseño



Alumno 1: *¿Qué sucede?*

Alumno 2: *Las medidas aumentan*

Investigador: *¿En cuál van?*

Alumno 1: *En la 3*

Investigador: *¿Qué sucede con las medidas del triángulo?*

Alumno 2: *Que en 2 disminuye, y en las demás aumenta*

La transcripción refiere a la manera en que los participantes respondieron a la pregunta “¿Qué sucede con las medidas del triángulo azul cuando el deslizador vale 2, 4 y 5?”, siendo su principal respuesta “en dos disminuye y en las demás aumenta”. Inicialmente, el deslizador estaba ubicado en el valor de tres, por tanto, cuando mencionan que en dos disminuye se referían a que sus medidas son menores que cuando se ubicaban en tres. Por otro lado, al decir que en las demás aumentan se refieren a cuando el deslizador está en 4 y 5.

A diferencia de un nivel incompleto, no se podría considerar como una respuesta errónea, sino que aún no logran establecer un razonamiento cuantitativo para percibir que el deslizador tiene la función de constante multiplicativa y, por tanto, determina relaciones de 2:1, 4:1 y 5:1. Si bien esta actividad evidenció el razonamiento de los alumnos en los términos descritos, las preguntas del investigador no permitieron identificar la justificación de sus respuestas, esto es ¿qué discusiones establecieron entre ellos?, o ¿cómo fue la participación al interior del equipo? Esto produjo que en el rediseño se evitara el esquema de pregunta-respuesta y se favoreciera la exploración de los participantes, con algunas intervenciones del investigador en momentos específicos.

Resultados de actividad dos del rediseño

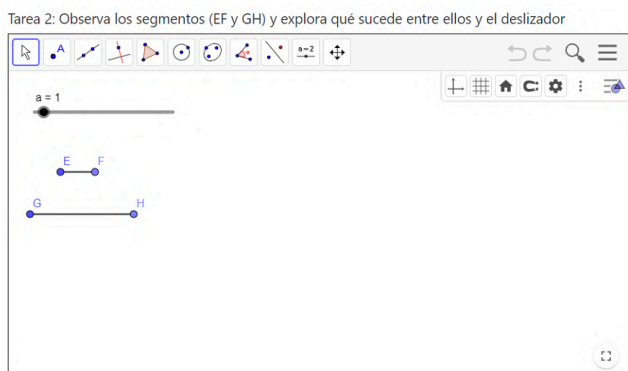
Como se ha mencionado anteriormente, parte del rediseño fue dejar de considerar que las actividades solo pueden estar relacionadas con cierto nivel, dando paso a una exploración con mayor diversidad de razonamientos y sin estar limitada por las preguntas en la hoja de trabajo. A continuación se muestran ejemplos relacionados con los resultados de la actividad dos, en donde se identifica la movilidad entre razonamientos cualitativos y pre-proporcionales, además de que se muestran interacciones entre alumnos, ayudas directas y transición entre lo tangible y el micromundo.

Razonamiento inicial

La actividad consistía en dos segmentos que estaban contruidos a partir de un deslizador (Figura 3), la longitud de uno de ellos era igual al deslizador, mientras que el otro estaba en una relación 3:1.

Figura 3

Actividad dos del rediseño



En el cuestionamiento ¿qué sucede cuando se mueve el deslizador? se obtuvieron las siguientes respuestas:

Investigador: *¿Qué sucede equipo 1?*

Alumno 2 del equipo 1: *Se agrandan*

/Alumno 3 del equipo 1, habla en voz baja/

Investigador: *Y se hacen más ¿Qué?*

Alumno 3 del equipo 1: *Más pequeño*

Investigador: Equipo 2, *¿Qué pasa cuando se mueve el deslizador?*

Alumno 1 del equipo 2: *Se hacen grandes esas rayas*

Investigador: *Se hacen grandes, ok ¿y solo se hacen grandes?*

Alumno 2 del equipo 2: *También se hacen pequeñas*

Investigador: Equipo 3, *¿Qué sucede?*

Alumno 2 del equipo 3: *Se hacen más grandes*

Investigador: *Ok, se hacen más grandes, equipo 4 ¿Qué sucede?*

Alumno 1 del equipo 4: *Disminuye y aumenta*

Alumno 2 del equipo 4: *El tamaño de las líneas*

Los participantes llevaron a cabo un razonamiento cualitativo al determinar que el deslizador aumentaba y los segmentos disminuían; aún no identificaban una relación directa entre los segmentos, por lo que se cuestionó “¿Qué relación hay entre los segmentos?”, obteniendo las siguientes respuestas:

Investigador: *Ok, ahora, ¿habrá alguna relación entre esos segmentos? ¿Se relaciona de alguna forma los segmentos?*

Alumno 1 del equipo 2: *No*

Alumno 2 del equipo 1: *De que se aumentan un*

Alumno 3 del equipo 1: *¿una relación? No se*

Alumno 3 del equipo 2: *Esta más grande uno que otro*

Alumno 1 del equipo 4: *Son líneas paralelas*

Las respuestas muestran que para algunos participantes no es evidente la relación entre los segmentos, mientras que otro participante establece una relación de rectas paralelas; en este caso, muestra un razonamiento diferente al proporcional, el cual no es incorrecto, pero dentro de los propósitos del estudio podría establecer un razonamiento incompleto, ya que no logró establecer una relación en términos proporcionales. En el caso del alumno 3 del equipo 2, la respuesta muestra un razonamiento cualitativo, pero más estructurado que la pregunta anterior, ya que establece una diferencia entre el tamaño de los segmentos, lo cual puede llegar a dilucidar la existencia de un factor que provoca el cambio.

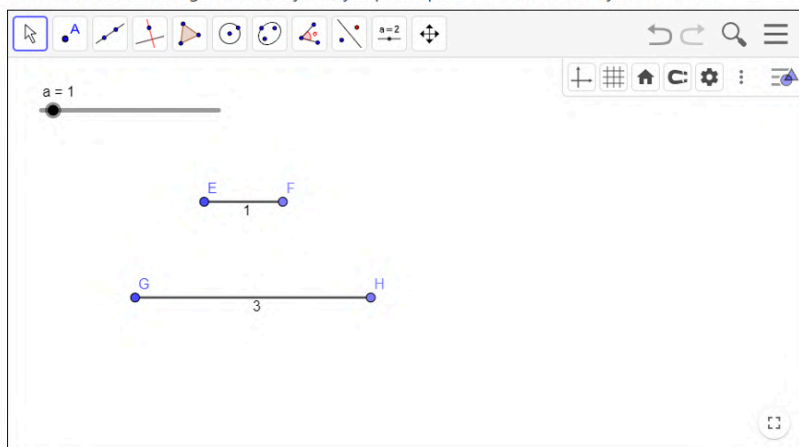
Razonamiento a partir de una decisión

Como se ha observado en la Figura 3, el diseño de la actividad proponía que los participantes interactuaran con el deslizador y establecieran una relación entre los segmentos, demostrando así razonamientos cualitativos. Una de las posibles acciones consideradas que podrían llevar a cabo los alumnos era identificar el valor de cada segmento, como se muestra en la Figura 4, con ayuda de una herramienta, y así establecer una relación cuantitativa. Debido a que ningún equipo optó por esa decisión, a través de algunas intervenciones se llevó a los alumnos a considerarlo.

Figura 4

Actividad dos del rediseño (estableciendo valores a los segmentos)

Tarea 2: Observa los segmentos (EF y GH) y explora qué sucede entre ellos y el deslizador



En la identificación de las medidas de los segmentos en diferentes valores del deslizador se observaron los siguientes razonamientos:

Investigador: *A ver entonces dijeron que había que ubicar el deslizador en ocho, ¿cuánto mide?*

Alumno 2 del equipo 1: *8 y 24*

Alumno 1 del equipo 4: *La chiquita tiene el mismo valor que el deslizador*

Investigador: *Dice su compañero que el segmento pequeño tiene el mismo valor que el deslizador, ¿Será cierto?*

Alumnos de equipo 2: *Si*

Investigador: *¿Y qué sucede con el otro? /refiriéndose al otro segmento/*

Alumno 2 del equipo 2: *Ocho veces más*

Alumno 1 del equipo 4: *Se multiplica, bueno...*

Alumno 4 del equipo 4: *Es ocho por tres*

Investigador: *¿Qué opinan los demás equipos?*

Al interior del equipo 2

Investigador: *Ya vieron que el segmento pequeño mide lo mismo que el deslizador, ¿qué pasa con el otro?*

Alumno 1 del equipo 2: *Pues no sé, está grande*

Alumno 2 del equipo 2: *Pero ésta, esa se...*

Investigador: *¿Está grande?*

Alumno 2 del equipo 2: *Si...pero, ¿cómo se puede decir?*

Investigador: *Ok, platiquenlo*

Alumno 3 del equipo 2: *¿Cómo se puede decir?, es que cuántas veces el 24 es el 8*

Alumno 2 del equipo 2: *tres por ocho*

Alumno 1 del equipo 2: *24*

Alumno 2 del equipo 2: *Abí está, engrandece tres veces más*

En el primer fragmento de transcripción se evidencia la relación directa entre el segmento y el deslizador (“la chiquita tiene el mismo valor que el deslizador”), razonamiento que fue necesario para comprender posterior-

mente la relación entre el deslizador y el otro segmento, en donde un alumno desarrolla un razonamiento incompleto al establecer que es “ocho veces más”. Si bien establece una relación multiplicativa, el factor multiplicativo que estaba considerando era erróneo. En el caso del alumno 1 del equipo 4, se manifiesta un razonamiento cualitativo al identificar que se multiplica, aún si establecer el factor multiplicativo. A diferencia de los razonamientos anteriores, el alumno 4 del equipo 4 identifica que es una relación multiplicativa y establece la relación “ocho por tres”, evidenciando un razonamiento pre-proporcional.

El segundo fragmento presenta un intercambio de opiniones al interior del equipo 2, en donde a raíz de la interrogante (¿qué pasa con el otro?) se presenta un razonamiento cualitativo por parte del alumno 1 del equipo 2 al indicar que el segundo segmento “está grande”, estableciendo una diferencia con el otro segmento sin enunciarlo en términos cuantitativos. Por otro lado, el intercambio que se da entre el alumno 3 y 2 de este equipo muestra la manera en la que llegan a construir un razonamiento proporcional, ya que no solamente establecen una relación entre las medidas de los segmentos (8 y 24), sino que identifican que el valor multiplicativo que permite esta relación es tres, dando como respuesta a la interrogante de ¿qué relación hay entre los segmentos? “engrandece tres veces más”.

Con este análisis se puede identificar que el razonamiento de los alumnos de telesecundaria unitaria transita entre los niveles cualitativos, pre-proporcional y proporcional, y el nivel cualitativo persiste durante toda la actividad.

Interacciones entre alumnos

El tipo de interacciones que se establecieron entre los participantes fue en plenaria (interacción entre todos los participantes) y al interior de los equipos. A partir de las actividades realizadas se pudo observar que la mayoría de las respuestas y justificaciones que daban los alumnos eran resultado de un diálogo entre los participantes. Ante la pregunta ¿en algún momento los dos segmentos tendrán el mismo tamaño? se desarrolló la siguiente interacción entre los alumnos del equipo cuatro:

Alumno 1 del equipo 4: *Sí, si puede*

Alumno 2 del equipo 4: *No /le demuestra recorriendo el deslizador/ y en cero no, porque no tendrían valor, y es de la única forma que pueden estar iguales.*

Alumno 4 del equipo 4: *En cuatro, a ver*

Alumno 1 del equipo 4: *Que no, que no miden lo mismo y se multiplican por tres*

/Se acerca el investigador/

Investigador: *¿Qué pensamos acá? ¿Si va a haber un punto en el que tengan el mismo tamaño?*

Alumnos del equipo 4: *No*

Investigador: *No, ¿por qué?*

Alumno 1 del equipo 4: *Porque aumenta tres la más grande al resultado normal*

Investigador: *Ok, ¿todos estamos de acuerdo?*

Alumnos del equipo 4: *Sí*

La diversidad del aula unitaria permitió que alumnos de los tres grados interactuaran en la misma actividad, reconociendo que las interacciones en el aula multigrado (o unitaria en este caso) articula múltiples voces, se contrastan y negocian significados; además, la colaboración y el soporte que se genera en una situación de interrelación motiva e involucra a los niños al aprendizaje colectivo (Lara Corro & Juárez Bolaños, 2018).

En este caso, se observa que a partir de un cuestionamiento y la manipulación del micromundo, los alumnos establecen un diálogo, en el cual el guía es el alumno 1 del equipo 4 al momento de adentrarse en el micromundo para apoyar el razonamiento de sus compañeros, llegando a un común acuerdo en que el factor multiplicativo continuará siendo 3 a pesar de los valores que tomen los segmentos. Cabe mencionar que el alumno 1 es de tercer año, mientras que sus compañeros son de los grados menores, esto lleva a considerar que las interacciones intergraduales favorecen el RP de los alumnos de aulas unitarias.

Ayudas indirectas

Dentro de los hallazgos en educación multigrado se han identificado las ayudas indirectas, las cuales se expresan mediante preguntas o a través de pistas que permiten a los alumnos continuar con la búsqueda (Block, Ramírez & Reséndiz, 2014). Si bien este tipo de ayudas hacen referencia en mayor medida a la enseñanza, dentro del estudio se presentaron situaciones donde el investigador tuvo que hacer intervenciones respecto a las actividades con la intención de que los alumnos pusieran en juego su razonamiento, un ejemplo de ello, se muestra a continuación:

Investigador: *Ok, ahora, ¿habrá alguna relación entre esos segmentos? ¿Se relaciona de alguna forma los segmentos?*

Alumno 1 del equipo 2: *No*

Alumno 3 del equipo 1: *¿una relación? No se*

Alumno 1 del equipo 1: *A ver muévelo /refiriéndose al deslizador/*

Investigador: *Para empezar, ¿se sabe cuánto valen los segmentos? ¿sabemos cuánto miden?*

Alumno 4 del equipo 4: *No*

Investigador: *¿Cómo podemos saber cuánto vale cada segmento?*

/Silencio por parte de los equipos/

Investigador: *¿Cómo podemos verlo?... Miren, si seleccionamos un segmento y vamos a donde están las letras "A" y seleccionan donde dice valor, va a decir cuánto mide /se muestra el procedimiento en la pantalla de la computadora central/*

A partir de la interrogante ¿habrá alguna relación entre los segmentos? se identificó que los participantes difícilmente harían uso de la herramienta que les ayudaba a conocer los valores, situación que hubiera detenido su análisis y su interacción en el micromundo, por tanto, la ayuda indirecta radicó en apoyar a los participantes en la identificación de los valores de los segmentos, detonando así un análisis más sofisticado respecto a la actividad propuesta. La presencia de ayudas indirectas durante el estudio giraba en

torno al uso del micromundo, de forma que no fueran invasivas en el tipo de razonamientos y toma de decisiones por parte de los equipos de trabajo.

Entre lo tangible y el micromundo

En el trabajo habitual de los participantes no se habían realizado aproximaciones al trabajo con GeoGebra, de forma que para ellos era la primera vez que manipulaban el micromundo, situación que fue evidenciada a partir de algunas acciones.

Alumno 1 del equipo 2: *Mide 1*

Alumno 2 del equipo 2: *A ver este /refiriéndose al otro segmento/*

Alumno 3 del equipo 2: *Uno y tres*

Alumno 1 del equipo 2: *Tres centímetros, podemos agarrar la regla /procede a medir con la regla sobre la pantalla de la computadora/ mide 3.5, es mentira /refiriéndose a que no mide 3/*

Balacheff y Kaput (1996) han señalado que el mayor impacto en el uso de micromundos se encuentra en el carácter epistemológico debido al realismo matemático, es decir, que las manipulaciones pueden ser tales que se genera una sensación de existencia casi material (Abrate & Pochulu, 2005). Estas aproximaciones fueron evidenciadas a partir de las acciones del equipo 2, en donde se tenía la intención de comprobar la medida del segmento tomando como referencia la regla (material tangible) y colocándola sobre él. A partir de esta interacción se puede afirmar el carácter epistemológico en la búsqueda de relacionar lo ya experimentado con lo que está siendo descubierto, además de que se evidencia que el micromundo (visto desde el enfoque construccionista) no sólo permite exponer construcciones mentales en el software, sino que estas pueden externarse al ambiente real y a la comprobación en colectivo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos a partir de la aplicación del primer diseño, el análisis de sus respuestas a las actividades y el argumento que justifica sus procedimientos, podemos tener conclusiones como:

- *Relación entre niveles.* Los niveles de RP no son mutuamente excluyentes, situación prevista en estudios anteriores (Butto et al., 2019) donde se concluye que existe una transición entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo. Es importante reconocer que las fronteras entre los niveles en ocasiones son difusas, y que dentro de cada uno es posible hacer distinciones que podrían llevar a establecer pseudo-categorías, por tanto, el ubicar a un grupo de participantes en un nivel no implica que en algún otro momento no puedan razonar de una forma distinta al nivel en el que ha sido registrado, lo cual lleva al siguiente punto.

- *Localidad.* Un alumno puede razonar de manera diferente de acuerdo al tipo de problema, recurso o área implicada; este hallazgo respalda estudios previos (Öztürk, et al., 2021) en donde se reportó que las habilidades de razonamiento proporcional difieren según el tipo de problemas. En nuestro estudio encontramos que, de acuerdo con el tipo de problema y las preguntas planteadas, el razonamiento cambia, mientras que en alguna actividad se puede mostrar una aproximación incorrecta, en otra puede haber un razonamiento sofisticado.
- *Las posibilidades del micromundo para la exploración del RP.* El micromundo ha permitido evidenciar el razonamiento con el que cuentan los participantes, permitiendo establecer relaciones entre lo que ya conocían y lo que están explorando, permitiéndoles probar procedimientos, establecer diálogos de aprendizaje a raíz de las actividades diseñadas y descartar ideas a partir del ensayo y error. Cabe destacar que el micromundo no solo lo componen las herramientas integradas en GeoGebra, sino también el diseño actividades, las intervenciones por parte del investigador y el interés generado en los alumnos.

A partir de los resultados del primer diseño, el rediseño de actividades y su aplicación, se contempla profundizar en el análisis con el propósito de que se pueda proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que sean capaces de identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes. Además, que puedan seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la introducción al razonamiento desde diferentes aproximaciones y poder romper con la práctica generalizada en donde se asume que la regla de tres en una de las únicas maneras de aproximarse a las situaciones proporcionales, así como apoyar a los alumnos a sustituir la relación aditiva por la multiplicativa y poder discriminar las situaciones proporcionales de las que no lo son.

Respecto a algunas líneas futuras para el trabajo, se considera importante profundizar en el impacto de los micromundo en la cotidianidad de la escuela multigrado, estableciendo algún taller de preparación para docentes y alumnos, en donde a los primeros se les forme en la integración de GeoGebra para trabajar la proporcionalidad, mientras que en el caso de los alumnos se les oriente en el dominio de las herramientas a profundidad.

Por otro lado, a partir de los resultados del trabajo exploratorio puede desarrollarse un trabajo de enseñanza, en donde se potencialicen las actividades y se diseñe una secuencia didáctica que permita pasar de los primeros niveles a niveles que conlleven un mayor trabajo cognitivo.

REFERENCIAS

- Arteaga, P. (2011). Los saberes docentes de maestros de primaria con grupos multigrado [Tesis de maestría no publicada], DIE-Cinvestav.
<https://bit.ly/46TiNn0>
- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education* (vol 4, pp. 469–501). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_14
- Block, D., Ramírez, M., & Reséndiz, L. (2013). Tejer currículo: La planeación de la clase de matemáticas en una escuela multigrado. En Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Ed.), *XII Congreso Nacional de Investigación Educativa* (págs. 1-10). COMIE.
- Block, D., Mendoza, T., & Ramírez, M. (2014). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. SM de Ediciones.
- Bustos Jiménez, A. M. (2013). El espacio y el tiempo en la escuela rural: algunas consideraciones sobre la didáctica multigrado. *Investigación En La Escuela*, 79 (1). 31–41. <https://doi.org/10.12795/IE.2013.i79.03>
- Butto, C., Fernández, J., Araujo, D. C., & Ramírez, A. I. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos*, 21(2). 39–52.
<https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204>
- Lara Corro, E., & Juárez Bolaños, D. (2018). La relación tutora entre estudiantes en una clase multigrado de México. *Nodos y Nudos*, 6(45), 29–42.
<https://doi.org/10.17227/nyn.vol6.num45-10390>
- Calixto Flores, R., y Rebollar Albarrán, A. M. (2008). La Telesecundaria, ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana De Educación*, 44(7), 1–11.
<https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- García, E., Santiago, F., & Zepeda, G. (2019). Enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado y telesecundarias. En S. Otten, A. G. Candela, A. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.). *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1751–1755). PME.
<https://bit.ly/3SIBivK>
- Godino, J., & Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros*. Universidad de Granada. <https://bit.ly/3SjH9BJ>
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63–76.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5>
- Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. J., & Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 26(3), 205–220.
<https://doi.org/10.1002/tea.3660260303>

- Hoyles, C., & Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(4), 581–595. <https://doi.org/10.1080/0020739870180411>
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45–90). Academic Press.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En M. Behr, & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93–118). NCTM- Lawrence Erlbaum Associates.
- Galván Mora, L. R., & Espinosa Gerónimo, L. E. (2017). Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México. *Sinéctica*, 49(2). <https://bit.ly/462YuCs>
- Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2021). Indicadores nacionales de la mejora continua de la educación en México. Cifras del ciclo escolar 2019–2020. MEJOREDUE. <https://bit.ly/45WN0ij>
- Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133–157. <https://bit.ly/47i76pP>
- Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36–53. <https://doi.org/10.1080/10986060903465822>
- Noss, R., & Hoyles, C. (2019). Micromundos, Construccinismo y Matemáticas. *Educación Matemática*, 31(2), 7–21. <https://doi.org/10.24844/em3102.01>
- Öztürk, M., Demir, Ü., & Akkan, Y. (2021). Investigation of Proportional Reasoning Problem Solving Processes of Seventh Grade Students: A Mixed Method Research. *International Journal on Social and Education Sciences*, 3(1), 48–67. <https://doi.org/10.46328/ijonses.66>
- Abrate, R. S., & Pochulu, M. D. (2005). El software educativo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas. En Universidad Nacional de Villa María (Ed.), *V Congreso Internacional Virtual de Educación* (pp.1–24). Universidad Nacional de Villa María. <https://bit.ly/49eNQv4>
- Sacristán, A. I. (2003). La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. En Instituto Tecnológico de Costa Rica (Ed.), *3er Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIE-MAC)*. Instituto Tecnológico de Costa Rica. <https://bit.ly/49iAKNh>

- Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65–97.
<https://bit.ly/49kMPlk>
- Santos, A. (2019). Escuelas multigrado en México: en busca de una nueva identidad. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 49(1), 49–66.
<https://doi.org/10.48102/rlee.2019.49.1.32>
- Schmelkes, S., & Águila, G. (2019). *La educación multigrado en México*. INEE.
<https://bit.ly/49joNXO>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave, para la educación integral*. SEP.
- Fernández Verdú, C., & Llinares Ciscar, S. (2012). Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School. *Enseñanza De Las Ciencias*, 30(1), 129–142.
<https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596>
- Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: A Logo Casebook*. HarperCollins Publishers.

Argumentos variacionales de estudiantes de ingeniería en la ejecución de una melodía

Francisco Agustín Zúñiga Coronel¹

RESUMEN

Este trabajo presenta algunos argumentos variacionales en la ejecución de una melodía. La problemática que aborda se refiere a la dificultad que tienen los estudiantes al analizar ideas variacionales en contextos físicos. El objetivo es identificar argumentos variacionales de estudiantes de ingeniería civil al interactuar con una situación de aprendizaje. Como aspectos teóricos se retoman elementos de un sistema de referencia variacional y se diseña una situación de aprendizaje con dos momentos. En el momento 1 se reconoce la causalidad y la temporización con el análisis de una gráfica: nota musical respecto al tiempo. El momento 2 se centra en la comparación y la seriación para reconocer una regularidad en las notas que permitan predecir. A continuación, se construye una gráfica de variación de la nota respecto a su duración, y con base en ella se ejecuta una melodía en una aplicación de celular y en un teclado electrónico. Se concluye que los estudiantes relacionan notas con su altura. Reconocen estados intermedios en las gráficas y ejecutan el fragmento de melodía con el uso de una gráfica variacional por medio de desplazamientos.

PALABRAS CLAVE

Argumentos, Pensamiento variacional, Melodía.

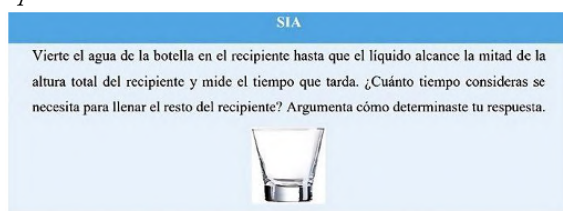
¹ maestro_coronel@hotmail.com
Universidad de Los Altos de Chiapas
<https://orcid.org/0000-0002-8340-948X>

INTRODUCCIÓN

El Pensamiento y Lenguaje Variacional aportan elementos para el estudio del cambio a través de la variación, fomentando la transversalidad de conocimientos (Secretaría de Educación Pública, 2017). En el trabajo de Caballero (2018) se analiza el llenado de recipientes mediante un sistema de referencia variacional. Por ejemplo, la Figura 1 corresponde a una situación de cambio donde se analiza la altura del líquido respecto al tiempo. Se reconoce un primer orden de variación al argumentar que la altura aumenta al transcurrir el tiempo, y un segundo orden de variación al decir que la altura aumenta cada vez más lento. Este análisis permite predecir la altura del líquido en un tiempo determinado.

Figura 1

Llenado de un recipiente



Nota. Figura retomada de Caballero (2018, p. 103)

Por su parte, Hernández (2019) estudia el comportamiento de un péndulo simple (contexto determinista) y un péndulo doble articulado (contexto caótico). En la Figura 2 se muestran diferentes máquinas de péndulos: A) péndulo simple, B) péndulo doble en reposo, C) articulación del péndulo doble, D) péndulo simple delantero y trasero. El comportamiento se analiza en cada uno de los péndulos de acuerdo con sus variaciones.

Figura 2

Máquinas de péndulos



Nota. Figura retomada de Hernández (2019, p. 51)

El análisis de circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional lo realiza Zúñiga (2020), Zúñiga et al. (2021) y Zúñiga (2022). Por ejemplo, al analizar el comportamiento de la carga eléctrica del circuito eléctrico mostrado en la Figura 3, se presenta un primer orden de variación cuando se reconoce que la luminosidad aumenta si el voltaje suministrado es mayor y disminuye si el voltaje es menor.

Figura 3
Circuito eléctrico con un led y una batería



Nota. Figura retomada de Zúñiga (2020, p. 10)

Al analizar el comportamiento del voltaje de carga de un capacitor (condensador) con los datos presentados en la Figura 4, se reconoce un primer orden de variación al argumentar que el voltaje aumenta conforme pasa el tiempo, y un segundo orden de variación al decir que el voltaje aumenta cada vez más lento.

Figura 4
Datos de medición del voltaje de carga

Tiempo en segundos	Voltaje de carga del capacitor en volts
0	0
5	1.18V
10	2.25V
15	3.20
20	4.07
25	4.84
30	5.54
35	6.17
40	6.67
45	7.24

Nota. Figura retomada de Zúñiga (2020, p. 19)

En el trabajo de López (2016) se analizan situaciones de generalización de patrones figurales y numéricos para predecir estados futuros. En la situación de la Figura 5 se pide que describan el comportamiento de los rombos respecto al número de imagen. Se pide que reconozcan el carácter estable del cambio para predecir cuántos rombos contiene la imagen 5. En este caso se agrega otra fila con 9 rombos que se suma a los rombos de la imagen an-

terior, obteniéndose 25. Por tanto, al reconocer el patrón (1, 4, 9, 16, 25, ...) se generaliza para cualquier estado futuro con la expresión:

$$n^2$$

Figura 5

Secuencia de figuras



Nota. Figura retomada de López (2016, p. 59)

En el estudio de Arciniegas y Mendoza (2022) se analiza el cambio y la variación en el contexto de consumo de datos de aplicaciones móviles, donde se identifica un comportamiento lineal en el consumo de datos de WhatsApp y Facebook, y un comportamiento no lineal en el consumo de datos de Netflix. Por su parte, Serrano–Quevedo et al. (2021) diseñan una situación de aprendizaje para el análisis de la variación en el consumo de energía eléctrica de los hogares a través de registros de representación semiótica: tabular, gráfico y algebraico.

El desarrollo del pensamiento variacional y covariacional se plantea en Thompson y Carlson (2017), donde se establecen niveles de razonamiento variacional: N1. Variable como símbolo. N2. Sin variación. N3. Variación discreta. N4. Variación bruta. N5. Variación continua gruesa. N6. Variación continua suave. Y niveles de razonamiento covariacional: N1. Sin coordinación. N2. Precoordinación de valores. N3. Coordinación gruesa de valores. N4. Coordinación de valores. N5. Coordinación continua gruesa. N6. Coordinación continua suave. Estos niveles permiten analizar comportamientos de fenómenos físicos.

Por otro lado, en el contexto musical existen diversas investigaciones, tal como la de Sánchez et al. (2006), quienes desarrollan “una herramienta automática para la segmentación de partituras musicales no manuscritas, que permite extraer pentagramas, compases y duración, y tono de las notas incluidas en ella” (p. 564). Esta herramienta procesa imágenes que posibilitan obtener líneas melódicas para el reconocimiento de patrones musicales. En el trabajo de Zúñiga et al. (2023) se hace un estudio de la música tradicional con actividades lúdicas centradas en el cambio y la variación.

Por tanto, una de las problemáticas que se reconoce es la dificultad que tienen los estudiantes al analizar ideas variacionales en contextos físicos. Esto se debe a que en el contexto escolar se priorizan prácticas algorítmicas

de naturaleza algebraica (Zúñiga et al., 2021; Cabrera & Zaldívar, 2021). En la búsqueda de contextos culturales donde se estudie el cambio y la variación se propone la ejecución de melodías, procurando la transversalidad del conocimiento al conectar las matemáticas con la música (Muñiz-Rodríguez et al., 2021; Alsina et al., 2022; Zúñiga et al., 2023). Para dicha conexión se establece la pregunta “¿qué argumentos variacionales generan estudiantes de ingeniería civil al ejecutar una melodía?” con el objetivo de identificar argumentos variacionales al interactuar con una situación de aprendizaje en un contexto musical.

ASPECTOS TEÓRICOS

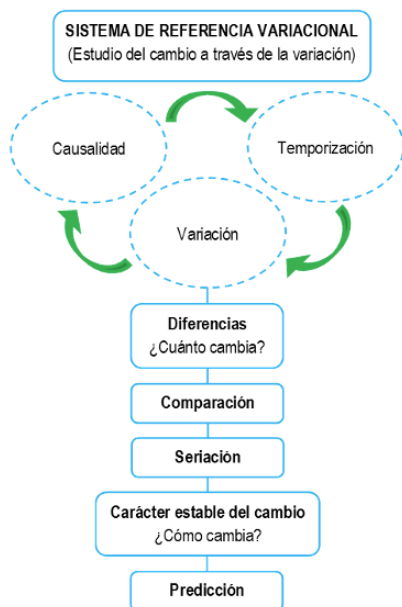
El Pensamiento y Lenguaje Variacional (abreviado como PyLVar) es una forma de pensamiento y una línea de investigación que se encarga del estudio del cambio a través de la variación (Cantoral, 2019). El cambio se asume como la modificación que sufre una variable, y la variación como la cuantificación del cambio y su comportamiento. Entonces, para el estudio del cambio a través de la variación se requiere de un sistema de referencia variacional (Caballero, 2018). Los elementos de dicho sistema se muestran en la Figura 6.

En este sistema, la causalidad se refiere a la relación entre dos variables, es decir, en reconocer qué cambia y respecto de qué cambia. Seguido, se considera la temporización al identificar estados intermedios en las variables relacionadas. Estos estados son valores que toma la variable (algo que cambia). Para procesar el cambio se requiere de estados y comparaciones (Cantoral, 2019). Al tener dos o más estados identificamos un estado posterior y un estado anterior para calcular diferencias con la expresión:

$$\text{Estado posterior} - \text{estado anterior}$$

Estas diferencias indican cuánto cambian las variables para cada dos estados. Ahora bien, al realizar la comparación entre dos estados se reconoce que, si el estado posterior es mayor que el estado anterior, la variable aumenta. Si el estado posterior es menor que el estado anterior, la variable disminuye. Al hacer la seriación (análisis de comparaciones) se reconoce el carácter estable del cambio, es decir, una regularidad en los cambios (cómo cambia). Entonces, el análisis de la variación permite reconocer si la variable aumenta o disminuye. Al identificar esta regularidad se pueden predecir estados futuros de la variable analizada. Por lo tanto, el PyLVar considera a la comparación, la seriación y la predicción como prácticas variacionales que permiten analizar comportamientos.

Este sistema representa un ciclo que comienza con la relación entre dos variables (causalidad), el reconocimiento de estados intermedios (temporización) y el comportamiento de las variables (variación).

Figura 6*Elementos de un sistema de referencia variacional**Nota.* Figura adaptada de Zúñiga (2022, p. 21)

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se diseña una situación de aprendizaje basada en conceptos de teoría musical: notas y figuras musicales, escala cromática, partitura, altura y duración de notas (Garza, 2013). Dicha situación se conforma por dos momentos. El momento 1 tiene la intención de que los estudiantes escuchen una melodía e identifiquen notas musicales en un fragmento de partitura. A continuación, construyen una gráfica de notas musicales respecto al tiempo, donde se reconoce qué cambia y respecto a qué lo hace, además de estados intermedios en las variables relacionadas. En el momento 2 se indica el Do central como la nota de referencia para reconocer notas posteriores a esta. Se construye una tabla de comparaciones con la intención de analizar la variación, es decir, si la nota aumenta (más aguda) o si disminuye (más grave). Se hace la seriación (análisis de comparaciones) para reconocer el carácter estable del cambio y se realiza la predicción de la siguiente nota musical del fragmento. Seguido, se construye una gráfica de variación de la nota respecto a su duración. Esta gráfica se usa para la ejecución del fragmento en una aplicación de celular y en un teclado electrónico, respectivamente. La situación de aprendizaje se implementó con seis estudiantes de ingeniería civil de la Universidad de Los Altos de Chiapas (véase la Figura 7), con quienes se formaron dos equipos de tres participantes.

Figura 7
Estudiantes de ingeniería civil



Situación de aprendizaje

Las actividades de cada momento de la situación de aprendizaje se presentan a continuación.

Momento 1

- A. Escucha la melodía “Para Elisa” de Beethoven.
- B. Visualiza un fragmento de la melodía (Figura 8).

Figura 8
Fragmento de partitura



- C. Identifica cada nota musical [Comienza en el Do central (13)] con base en la Figura 9 y en la Tabla 1.

Figura 9
Codificación numérica

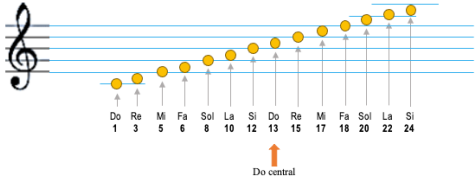
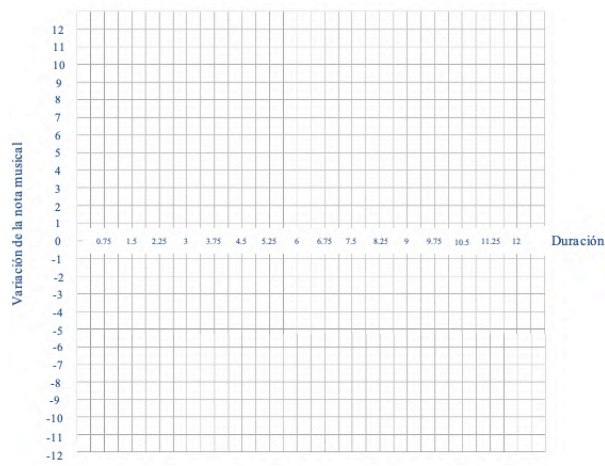


Tabla 1
Significados de algunos símbolos musicales

Sostenido: altera la nota. Es una tecla a la derecha de la nota	Becuardro: anula el efecto de la alteración	Silencio de corchea	Figura de negra. Se considera como la unidad que tiene una duración de 1.5 segundo	Corchea: mitad de la nota negra. Tiene una duración de 0.75 segundos	Dos corcheas juntas	Tres corcheas juntas	Figura de blanca: el doble de la nota negra

- B. Predice la siguiente nota musical del fragmento. Describe tu procedimiento
- C. Con base en la Tabla 2, construye la gráfica de variación de la nota musical respecto a su duración.



- D. Con base en la gráfica anterior, ejecuta la melodía con la App de piano virtual (figura 10).

Figura 10
App de piano virtual



- E. Con base en la gráfica anterior, ejecuta la melodía en el teclado electrónico (figura 11).

Figura 11
Teclado electrónico



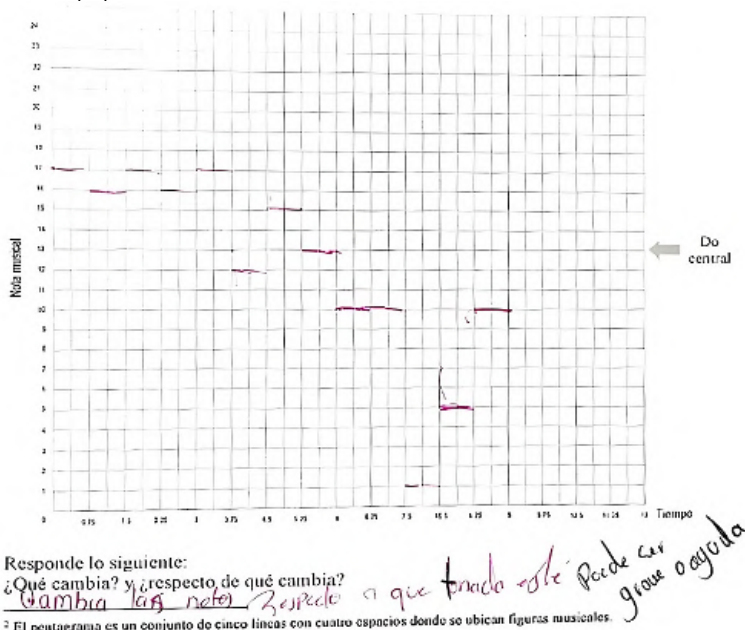
- F. Escucha de nuevo la melodía y verifica tu predicción.

Discusión del momento A

Al inicio, los estudiantes escuchan, en varias ocasiones, la melodía “Para Elisa” a través de un celular. Después, visualizan el fragmento de partitura y codifican cada nota musical. Seguido, ubican el espacio o la línea del pentagrama en el que se encuentra la nota. Los resultados del equipo 1 se muestran en la Figura 12, e indican que el número 17 representa la nota Mi ubicada en el cuarto espacio del pentagrama. El número 16 representa al Re# ubicado en la cuarta línea del pentagrama con una alteración. Las siguientes son: Mi(17), Re#(16), Mi(17), Si(12), Re(15), Do(13), La(10), Do(1), Mi(5) y La(10). Reconocen la relación de las notas respecto a su altura (grave o aguda). Identifican estados intermedios al colocar las notas en el sistema coordinado. Los segmentos que se colocan representan la duración de las notas.

Figura 12

Resultados del equipo 1

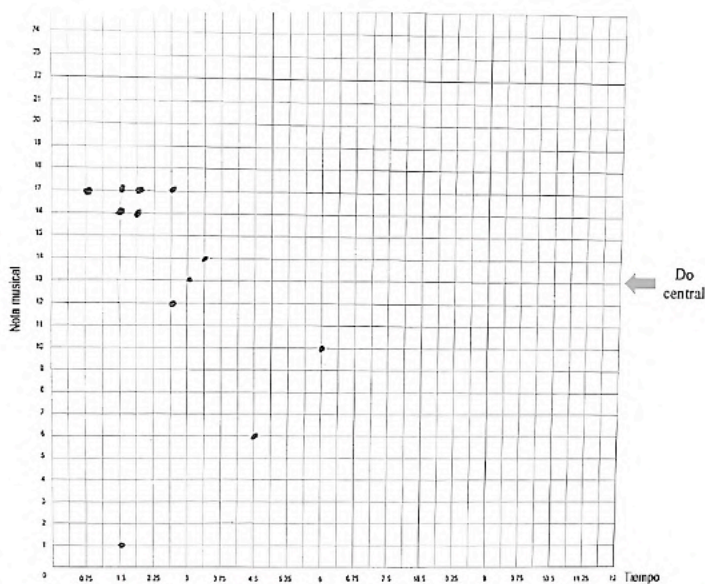


Los resultados del equipo 2 se muestran en la Figura 13. Se observa que colocan puntos por cada nota musical. La primera nota la codifican con el número 17, correspondiente a un Mi colocado en 0.75 segundos. A los 1.5 segundos colocan tres notas juntas: Mi(17), Re#(16) y Do(1). Después, colocan dos notas juntas: Mi(17) y Re#(16). Seguido, colocan otras dos notas juntas, y de ahí nota por nota. Presentan dificultades para construir la gráfica debido a que en la partitura no se establecen notas juntas. Ellos argumentan que las alineaciones en el pentagrama cambian respecto a los

puntos en el sistema coordenado. En este caso, colocan puntos que indican la duración de la nota y no segmentos. Identifican estados intermedios al situar estos puntos en el sistema coordenado.

Figura 13

Resultados del equipo 2



Responde lo siguiente:

¿Qué cambia? y ¿respecto de qué cambia?

cambia las alineaciones con respecto a los puntos

² El pentagrama es un conjunto de cinco líneas con cuatro espacios donde se ubican figuras musicales.

Discusión del momento B

En la Figura 14 se observa que los estudiantes colocan valores numéricos que representan las notas posteriores al Do central. Realizan comparaciones al colocar el signo de mayor que y menor que. Se confunden al indicar que el 15 es menor que 13, y el 13 es menor que 13, y no argumentan que el 15 es mayor que 13 y el 13 es igual que 13. Reconocen que, si la nota posterior es mayor que el Do central, esta aumenta (más aguda), y si la nota posterior es menor que el Do central, esta disminuye (más grave). Al calcular las diferencias, obtienen valores positivos y negativos, si el valor es positivo significa que la nota posterior es más aguda, y si es negativo, la nota posterior es más grave. La duración de cada nota se identifica de acuerdo con los significados de la Tabla 1. Si la figura es una corchea tiene una duración de 0.75 segundos, y si la figura es una negra, tiene una duración de 1.5 segundos. Con la Tabla 2 se analiza la variación de las notas.

Figura 14*Resultados del equipo 1*

Nota posterior	Es mayor, menor o igual que	Do central	La nota aumenta (más aguda) o disminuye (más grave)	¿Cuánto cambia?	Duración de la nota posterior <i>en segundos</i>
17	>	13	ma ^s aguda	4	0.75
16	>	13	ma ^s aguda	3	0.75
17	>	13	ma ^s aguda	4	0.75
14	>	13	ma ^s aguda	3	0.75
17	>	13	aguda	4	0.75
12	<	13	grave	-1	0.75
15	<	13	grave	2	0.75
13	<	13	grave	0	0.75
10	<	13	ma ^s grave	-3	1.5
5	<	13	ma ^s grave	-12	0.75
5	<	13	ma ^s grave	-8	0.75

En la Figura 15 se observa que los estudiantes colocan los nombres de las notas y no los valores numéricos que representan las notas posteriores al Do central. Establecen notas menores, mayores e iguales al Do central. Argumentan que, si la nota posterior es mayor que el Do central, esta es aguda, y si la nota posterior es menor que el Do central, esta es grave. Calculan diferencias y obtienen valores positivos y negativos. Si el valor es positivo significa que la nota posterior es más aguda, y si es negativo, la nota posterior es más grave. También identifican la duración de cada nota de acuerdo con los significados de la Tabla 1.

Figura 15*Resultados del equipo 2*

Nota posterior	Es mayor, menor o igual que	Do central	La nota aumenta (más aguda) o disminuye (más grave)	¿Cuánto cambia?	Duración de la nota posterior
Mi	Mayor	13	Aguda	4	0.75
Re #	Mayor	13	Aguda	3	0.75
Mi	Mayor	13	Aguda	1	0.75
Re #	Mayor	13	Aguda	3	0.75
Mi	Mayor	13	Aguda	4	0.75
Si	Mayor	13	grave	-1	0.75
Re	Mayor	13	Aguda	2	0.75
Do	Igual	13	Aguda	0	1.50
La	Menor	13	grave	-3	0.75
Do	Menor	13	grave	-12	0.75
Mi	Menor	13	grave	-8	0.75
La			grave	-3	0.75

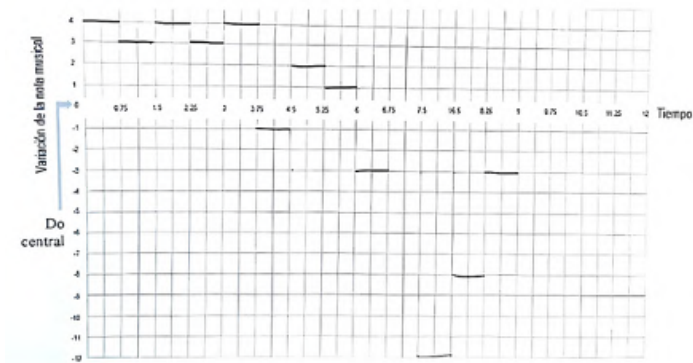
La predicción no la realizan con el análisis de las comparaciones. Ellos detectan, auditivamente, la repetición de la nota (Figura 17), en este caso con la nota Mi.

Figura 17*Predicción*

Predice la siguiente nota musical del fragmento A. Un "Mi" ya que por como suena al interpretarla podría decir que sigue un fragmento similar al del inicio, el cual inicia con esa nota.

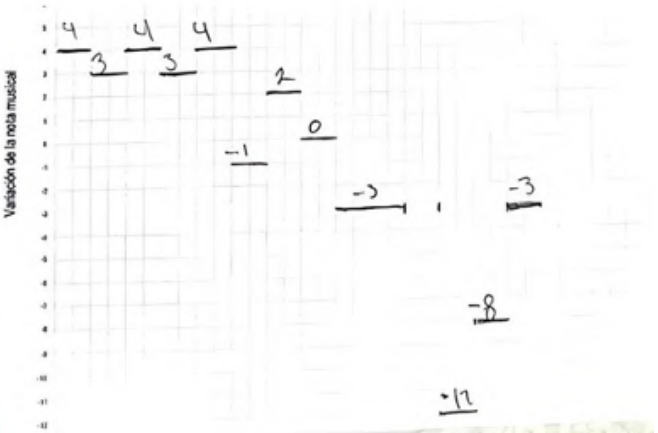
Ahora bien, la “gráfica variacional” que construye el quipo 1 se muestra en la Figura 18, donde se visualiza que colocan los valores positivos por encima del eje x y los valores negativos por debajo del eje x . Esta gráfica indica desplazamientos hacia arriba y hacia abajo. Al Do Central le corresponde el valor 0, ya que no presenta ningún desplazamiento. El tamaño de los segmentos significa la duración de las notas musicales. Por lo tanto, la gráfica representa la relación: variación de la nota musical respecto a su duración.

Figura 18
Gráfica variacional del equipo 1



Por su parte, el equipo 2 también coloca los valores positivos por encima del eje x y los valores negativos por debajo del eje x (véase la Figura 19). El tamaño de los segmentos indica la duración de las notas. En este caso, los estudiantes colocan números encima de cada segmento para identificar desplazamientos hacia arriba o hacia abajo. Este tipo de gráficas se denomina “gráfica variacional”.

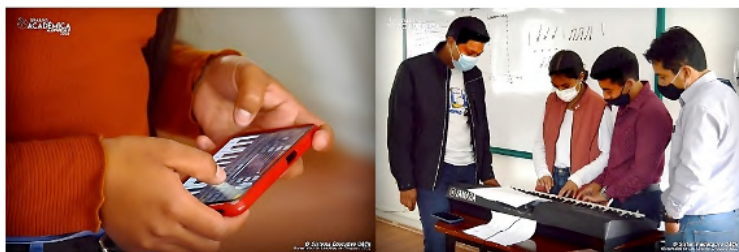
Figura 19
Gráfica variacional del equipo 2



En los resultados de la Figura 20 se observa que los estudiantes tienen incertidumbre al tocar el instrumento virtual y el electrónico. Al inicio ubican la nota de referencia (Do central), y con el uso de la “gráfica variacional” ejecutan los desplazamientos planteados. Es decir, si el primer desplazamiento es 4 significa pulsar la tecla ubicada cuatro semitonos del Do central, y si el desplazamiento es -8 significa pulsar la tecla ubicada ocho semitonos a la izquierda del Do central. Este procedimiento implica tocar una nota a la vez, que con la práctica ejecutan el fragmento de la melodía.

Figura 20

Interacción con el teclado virtual y el teclado electrónico



CONCLUSIÓN

El sistema de referencia variacional permite analizar la forma en que los estudiantes comprenden el comportamiento de las notas musicales. La causalidad permite reconocer argumentos variacionales al relacionar dos variables, es decir, las notas cambian respecto a su altura (aguda o grave), y las posiciones en el pentagrama cambian respecto a los puntos en el sistema coordenado. Los estudiantes identifican estados intermedios al colocar puntos en el sistema coordenado, permitiéndoles construir la gráfica de notas musicales respecto al tiempo. Ubican la nota de referencia (Do central) y hacen la comparación con notas posteriores. Esto permite identificar argumentos, tales como que si la nota posterior es mayor que el Do central, esta es aguda, y si la nota posterior es menor que el Do central, esta es grave.

La variación se reconoce al construir la “gráfica variacional” por medio de desplazamientos. Para tal construcción se calculan diferencias donde los argumentos que se identifican son: si la diferencia es positiva, entonces la nota posterior es más aguda, y si la diferencia es negativa, la nota posterior es más grave; además de otros argumentos como: si las diferencias son positivas, significa desplazamientos a la derecha, y si son negativas, significan desplazamientos a la izquierda. También señalan que el tamaño de los segmentos, en el sistema coordenado, representa la duración de las notas. Después, con la gráfica de variación de la nota respecto a su duración ejecutan el fragmento de la melodía al teclear los desplazamientos (izquierda y derecha) con relación al Do central.

Cabe señalar que los estudiantes presentan dificultades al predecir la nota musical debido a que no reconocen su regularidad. Ellos predicen, de manera auditiva, con la repetición de la nota. Por tanto, en este trabajo se identifican algunos argumentos variacionales en la ejecución de una melodía. Se pueden rediseñar algunas actividades con la intención de reconocer la regularidad en las notas para la identificación de otros argumentos; así como hacer uso de diferentes recursos tecnológicos (generador de partituras, mezcladores de música, analizador de frecuencias, secuenciadores, entre otros) donde se analicen comportamientos en las notas musicales.

REFERENCIAS

- Alsina, A., Contreras, M., & Reyes, J. (2022). Matemáticas en contexto en Educación Primaria: conexiones con el entorno y la música. *UNIÓN*, 18(64), 1–20. <https://bit.ly/3FHVhx4>
- Arciniegas, H., & Mendoza, E. (2022). Desarrollo de la práctica variacional de seriación en el estudio de la variación constante para un grupo diverso. En M. Márquez, J. Lugo-Armenta, S. Retamal, J. García, & G. Morales. (Eds.), *Extensos del XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 86–90). ULagos-Sochiem. <https://bit.ly/3sg53n8>
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* [Tesis de doctorado, Cinvestav]. <https://bit.ly/3shL3R6>
- Cabrera, L., & Zaldívar, J. (2021). Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En R. Flores, H. S. Sostenes González, E. R. Granados Martínez, M. C. Ocampo-Arenas, L. C. Agudelo Palacio, & D. M. Escobar Franco (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 34(2), 189–199. <https://bit.ly/45QXXDq>
- Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.
- Garza, S. (2013). *Curso básico de teoría musical*. Trillas.
- Hernández, J. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Tesis de doctorado, Cinvestav]. <https://bit.ly/3QGmhmV>
- López, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de maestría, Cinvestav]. <https://bit.ly/46VWsVV>
- Muñiz-Rodríguez, L., Pérez-Fernández, R., Ramos-Guajardo, A., Rodríguez, N., & Vigil, E. (2021). La enseñanza de las matemáticas y la música a través de un escape room: una propuesta para fomentar el aprendizaje interdisciplinar. *NÚMEROS*, 108, 309–330. <https://bit.ly/47djCGN>

- Sánchez, A., Pantrigo, J., & Pérez, J. (2006). Extracción de líneas melódicas a partir de imágenes de partituras musicales. En A. Fernández-Caballero, M. G. Manzano, E. Alonso, & S. Miguel (Eds.), *Una Perspectiva de la Inteligencia Artificial en su 50 aniversario* (Vol. II, pp. 564–569). Universidad de Castilla-La Mancha. <https://bit.ly/46Uibxr>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. SEP. <https://bit.ly/47g7cOx>
- Serrano—Quevedo, B. N., Zúñiga, F., & Acevedo, M. (2021). *Módulo de Pensamiento Variacional, Situación de aprendizaje: Variación lineal. Equipo Académico Empoderamiento Docente y Programa Trayecto Matemáticas-Fortalecimiento Docente de Grupo Techint*. <https://bit.ly/49kbOF9>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics. <https://bit.ly/3Sp2gTb>
- Zúñiga, F. (2020). Un análisis del sistema de referencia variacional en un contexto de circuitos eléctricos con estudiantes de nivel superior. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 5, 1–22. <https://doi.org/10.46618/iime.76>
- Zúñiga, F., Muñoz, G., & Morales, E. (2021). Fundamentos para diseñar situaciones de aprendizaje a través de la variación: simulación del comportamiento de un capacitor. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Actividad Docente* (pp. 79–96). Lectorum. <https://bit.ly/3tXLxE>
- Zúñiga, F. (2022). Una mirada de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional en contexto de predicción en circuitos eléctricos. *El Cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 18(2), 15–40. <https://doi.org/10.61174/recacym.v18i2.181>
- Zúñiga, F., Velasco, E., Gamboa, K., & Díaz, G. (2023). Acercamiento a la música tradicional con actividades lúdicas centradas en el cambio y la variación. *Uno. Didáctica de las Matemáticas*, 100, 54–62.

“Tendencias en la educación matemática 2023”, con la edición a cargo de Estela Juárez-Ruiz, Lidia Aurora Hernández Rebollar y Apolo Castañeda Alonso, fue publicado en formato digital PDF por Editorial de Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. La publicación tuvo lugar en la Ciudad de México en el año 2023.

Este libro surge del IX Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 9) que se realizó en noviembre de 2022 en modalidad híbrida, auspiciado por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana y la SOMIDEM. Todos los trabajos que constituyen los capítulos fueron arbitrados en un proceso doble ciego por especialistas de la Educación Matemática. Así se ha asegurado la calidad científica de los capítulos, los cuales pretenden contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los niveles educativos básico, medio superior y superior. En esta versión 2023, las investigaciones presentadas fueron realizadas en México y Colombia, por lo que marcan una tendencia en la Educación Matemática internacional. Esperamos que los resultados de estas investigaciones sean útiles a los docentes de matemáticas, estudiantes de posgrado en Educación Matemática e investigadores de esta disciplina.



SOMIDEM

Sociedad Mexicana de Investigación
y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.



Estela de Lourdes Juárez Ruiz es Doctora en Ciencias Matemáticas; profesora-investigadora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; miembro del cuerpo académico “Aprendizaje y Enseñanza de la Física y la Matemática”; pertenece al Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras



Lidia Aurora Hernández Rebollar es Doctora en Ciencias Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); profesora de tiempo completo y, actualmente, coordinadora del Posgrado en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP; es miembro del Sistema Nacional de Investigadores e investigadoras.



Apolo Castañeda es Doctor en Ciencias en Matemática Educativa por el Instituto Politécnico Nacional. Profesor-investigador de tiempo completo en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Miembro de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A.C., Miembro del Sistema Nacional de Investigadores.