

Tendencias en la educación matemática 2020



Lidia Aurora Hernández Rebollar
Gabriel Kantún Montiel
Josip Slisko Ignjatov
Editores

Tendencias en la educación matemática 2020



Lidia Aurora Hernández Rebollar
Gabriel Kantún Montiel
Josip Slisko Ignjatov
Editores



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición: 2020

ISBN: 978-607-525-710-5

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones

2 Norte 1404, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx
dgp@correo.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. C.P. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx
dirección@fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: Guadalupe Grajales y Porras • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Índice

Presentación	6
--------------	---

SECCIÓN 1

TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

CAPÍTULO 1

<i>Coaching emocional: una alternativa en el aprendizaje de las matemáticas</i>	12
<i>Imer Osiel Cantú Ramírez</i>	
<i>María S. García González</i>	

CAPÍTULO 2

<i>Valoración de la percepción y generación de ideas creativas en estudiantes universitarios STEM</i>	33
<i>Jorge Alfredo Lombardero-Chartuni</i>	
<i>Estela Juárez-Ruiz</i>	
<i>Lidia Aurora Hernández Rebollar</i>	

CAPÍTULO 3

<i>Estudio exploratorio de la comprensión del concepto transformación lineal en alumnos universitarios</i>	60
<i>Elizabeth Bañuelos Aguilar</i>	
<i>Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez</i>	

SECCIÓN 2

TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

CAPÍTULO 4

<i>Oportunidades y retos para el aprendizaje basado en proyectos: el caso de los proyectos estadísticos</i>	79
<i>Alberto Santana Ortega</i>	
<i>Ana Luisa Gómez-Blancarte</i>	

CAPÍTULO 5

Instrumento diagnóstico para la evaluación
de habilidades espaciales en sólidos de revolución:

Validación de contenido

97

Estela Juárez-Ruiz

Carina Andrea Hernández Pacheco

Josip Slisko Ignjatov, Ruth García Solano

CAPÍTULO 6

Conexiones matemáticas establecidas
por estudiantes de nivel medio superior sobre
la función exponencial y logarítmica

116

Karen Gisel Campo Meneses

Javier García-García

CAPÍTULO 7

Comprensión de problemas verbales de probabilidad utilizando
representaciones gráficas: Un estudio de análisis de errores

133

Ruth García Solano

Estela Juárez-Ruiz

CAPÍTULO 8

El *software* GeoGebra un recurso para
la enseñanza-aprendizaje del concepto del área

152

Armando Morales Carballo

Angie Damián Mojica

Adilene Venancio Cano

SECCIÓN 3

TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

CAPÍTULO 9

La formulación y resolución de problemas: herramienta
utilizada en el aula para el desarrollo de habilidades
matemáticas a lo largo de la escolaridad

172

Olimpia Rosa Castro Mora

Sammy Percy Merino Rosario

CAPÍTULO 10	
“Good” questions (not only) in mathematics education	187
<i>Jarmila Novotná</i>	
CAPÍTULO 11	
Cultural contexts in problem posing in mathematics	201
<i>Hana Moraová</i>	
CAPÍTULO 12	
El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva	214
<i>Jonathan Cervantes-Barraza</i>	
<i>Guadalupe Cabañas-Sánchez</i>	
<i>Katty Mercado Porras</i>	
CAPÍTULO 13	
La enseñanza de la igualdad mediante el uso de tres metáforas	231
<i>Viviana Hernández Ortega</i>	
<i>Carlos Antonio Alvarenga Aranda</i>	
<i>Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez</i>	
CAPÍTULO 14	
Construcciones mentales del concepto volumen de niños con síndrome de Down: la teoría APOE en el proceso de inclusión	250
<i>José Marcos López Mojica</i>	
<i>Lidia Aurora Hernández Rebollar</i>	

Presentación

Sección 1

Tendencias que impactan en la educación superior

Esta sección consiste de tres capítulos que tratan los temas más importantes en la actual enseñanza de las matemáticas en las universidades, como son aspectos emocionales en el aprendizaje, el fomento auto-evaluativo de la percepción de la creatividad en las aulas matemáticas y la exploración de los conocimientos previos que dificultan el aprendizaje de los conceptos abstractos como base para una intervención didáctica.

El capítulo 1, “*Coaching* emocional: una alternativa en el aprendizaje de las matemáticas”, cuyos autores son Imer Osiel Cantú Ramírez y María S. García González, describe el caso de Ana, una estudiante de primer año de licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, quien durante su primer semestre vivió un proceso de *coaching* emocional, que fue diseñado e implementado con la finalidad de regular la emoción de miedo que Ana experimentó en dos asignaturas. El proceso resultó exitoso porque Ana logró adquirir conocimiento matemático y conocimiento emocional que le permitieron acreditar su primer semestre y mantenerse motivada para continuar sus estudios. Este caso sirve como ejemplo del potencial de un proceso de *coaching* emocional, en el aprendizaje de las matemáticas.

Jorge Alfredo Lombardero Chartuni, Estela Juárez-Ruiz y Lidia Aurora Hernández Rebollar, en el capítulo 2, titulado “Valoración de la percepción y generación de ideas creativas en estudiantes universitarios STEM”, reportan una experiencia centrada en promover la percepción del pensa-

miento creativo y valorar la generación de ideas creativas en estudiantes de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Utilizaron las metodologías solución creativa de problemas y aula ágil invertida en el diseño de un curso-taller asistido por un blog, en el marco de la innovación educativa con la apropiación de una técnica creativa para la mejora continua del desempeño académico y laboral. Los resultados indican que los estudiantes se perciben a sí mismos como soñadores, idealistas, abiertos a experiencias e imaginativos y perciben a las personas creativas como imaginativos, de ideas variadas y con iniciativa. Los resultados de la valoración de las ideas creativas evidenciaron que los atributos de la dimensión resolución fueron los que tuvieron las más altas calificaciones, seguidos por los de elaboración y síntesis. En los atributos de la novedad, los valores que más se repitieron correspondieron al nivel bajo y en segundo lugar el nivel alto, indicando que las ideas fueron preferentemente o nada novedosas o muy novedosas.

El capítulo 3, “Estudio exploratorio de la comprensión del concepto transformación lineal en alumnos universitarios”, escrito por Elizabeth Bañuelos Aguilar, Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, describe un estudio exploratorio de la comprensión del concepto de “transformación lineal” (TL) con un grupo de estudiantes para detectar las dificultades de comprensión en un curso de “Álgebra Lineal” (AL). A partir de las dificultades encontradas y de una revisión de los trabajos actuales sobre didáctica de AL, en un segundo grupo se implementó una estrategia didáctica para subsanar algunos problemas de aprendizaje del concepto TL. Finalmente se compararon los resultados logrados en ambos grupos.

Sección 2

Tendencias que impactan en la educación media superior

En la educación media superior se inicia una especialización que se agudizará en la educación universitaria. Esto, aunado a las particularidades del desarrollo del alumno en este rango de edad, supone desafíos particulares para la educación matemática. En esta sección se presentan cinco trabajos que abordan aspectos que impactan en este nivel.

Para empezar, Alberto Santana y Ana Luisa Gómez-Blancarte en el capítulo 4 ofrecen una visión del Aprendizaje Basado en Proyectos. Escriben recomendaciones para el diseño instruccional y reflexiones sobre el uso

de este método en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El lector interesado encontrará útiles consejos para implementar esta metodología.

La transición a la universidad trae consigo la maduración de ciertas habilidades de visualización: la capacidad de dibujar un diagrama apropiado para representar un problema y usarlo para lograr su comprensión, lo cual se discute en el capítulo 5. Estela Juárez, Carina Hernández, Josip Slisko y Ruth García trasladaron habilidades visuales ya estudiadas para geometría euclidiana al campo del cálculo integral y nos comparten el proceso de construcción y validación de contenido de un instrumento para evaluar habilidades visuales en el tema de sólidos de revolución.

Luego, en el capítulo 6, tenemos la interesante contribución de Karen Gisel Campo y Javier García-García, quienes estudian las conexiones matemáticas establecidas por estudiantes de nivel medio superior al resolver tareas que involucraron a las funciones exponencial y logarítmica. Estas funciones son fundamentales para entender temas avanzados de cálculo, y las conexiones matemáticas pueden ser usadas para diseñar propuestas para una mejor comprensión.

Después, en el capítulo 7, Ruth García y Estela Juárez presentan una intervención didáctica exitosa basada en el uso de cuatro representaciones gráficas empleadas en la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos. Mediante un pre-experimento, se muestra que promover las cuatro representaciones gráficas puede favorecer la resolución de problemas de probabilidad.

Finalmente, motivados por una experiencia al dar asesorías, Armando Morales, Angie Damián y Adilene Venancio estudiaron dos trayectorias de aprendizaje del concepto de área. En el capítulo 8 proponen GeoGebra como un recurso heurístico que favorece el redescubrimiento, la inducción y generalización de la medida de área de polígonos simples en el preuniversitario.

Sección 3

Tendencias que impactan en la educación básica

En esta sección se presenta una mayor cantidad de trabajos que abordan algunas de las tendencias en la investigación que impactan en el nivel básico. Iniciamos con tres trabajos que no solo revisan la literatura relacionada con la formulación o planteamiento de problemas sino que también contienen

propuestas para que los profesores desarrollen esta habilidad. Como el taller que presentan Olimpia Castro y Sammy Percy Merino dirigido a profesores de primaria para promover el reconocimiento de la estructura de un problema y otras características que les permitan formular sus propios problemas. Lo anterior, lo han basado en una amplia experiencia adquirida del análisis de los resultados de una prueba censal que se aplica en Perú y de resultados de investigaciones de otros autores. Por su parte, en el capítulo 10, Jarmila Novotná expone varios criterios para que el docente formule buenas preguntas y buenos problemas en su clase mientras que, en el capítulo 11, Hana Moraová llama la atención de los docentes para que el contexto de los problemas que se planteen sean del interés de los alumnos y no solo del contexto matemático sino también matemáticamente correctos.

Jonathan Cervantes, Guadalupe Cabañas y Katty Mercado presentan, en el capítulo 12, una investigación donde nos comparten cómo un profesor de primaria fomentó la construcción de conocimiento matemático a través de la refutación de conclusiones que invitó a los alumnos a hacer en su clase. La argumentación es una de las competencias que se ve favorecida con este tipo de actividades y que cualquier docente puede fomentar si considera ejemplos como el que ellos exponen en este trabajo.

Luego viene el capítulo 13 que presenta una experiencia exitosa sobre la comprensión del concepto de igualdad a través de la gestión de tres metáforas. Después de una amplia revisión bibliográfica sobre el tema Viviana Hernández, Carlos Alvarenga y Pablo Zeleny muestran algunos de los problemas utilizados y las respuestas de un grupo de niños que lograron resolverlos favorablemente.

Al final de este recorrido, de investigaciones en el nivel básico, deseo mencionar el capítulo 14 del trabajo de José Marcos López Mojica, quien no solo aportó su investigación sobre el concepto de volumen dirigido y explorado en niños con síndrome de Down sino que también arbitró dos manuscritos de este libro. Su aportación queda como una muestra de un gran corazón y de su enorme potencial como investigador que en su breve estancia en esta vida compartió con muchos otros colegas del área de la educación matemática. Desde aquí y hasta donde estés enviamos nuestro reconocimiento y gratitud por haber colaborado con nosotros.

Agradecemos también al Comité científico que arbitró los capítulos de este libro:

Carmen Patricia Rosas, Eric Flores Medrano, Erika Canché Góngora, Estela Juárez-Ruiz, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, Gabriela Buendía Ábalos, Jesús Antonio Larios Trejo, José Antonio Juárez López, José Gabriel Sánchez Ruiz, José Marcos López-Mojica, José Martín Estrada Analco, Judith Alejandra Hernández Sánchez, María S. García González, María Teresa Dávila Araiza, Mario Sánchez Aguilar, Nielka Rojas González, Ruth Rodríguez Gallegos y Santiago Ramiro Velázquez.

SECCIÓN 1

TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

CAPÍTULO 1

Coaching emocional: una alternativa en el aprendizaje de las matemáticas

Imer Osiel Cantú Ramírez

María S. García González

Resumen

En el presente artículo se documenta el caso de Ana, una estudiante de primer año de licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, quien durante su primer semestre vivió un proceso de *coaching* emocional, con la finalidad de regular la emoción de miedo en dos asignaturas. El caso de Ana es exitoso, pues durante el proceso de *coaching*, logró adquirir conocimiento matemático y conocimiento emocional que le permitieron acreditar su primer semestre y mantenerse motivada para continuar sus estudios. La pretensión de este caso es servir como ejemplo del potencial de un proceso de *coaching* emocional, en el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: *Coaching* emocional, estudiantes, matemáticas, aprendizaje.

Introducción

La presente investigación se inscribe en la línea denominada *dominio afectivo*, desde donde se estudian factores como las emociones, creencias, actitudes, valores y motivación que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados de investigaciones realizadas desde el *dominio afectivo* han evidenciado que tanto el alumnado como el profesorado de matemáticas experimenta emociones negativas en la clase de matemáticas, entre ellas la más común es la ansiedad matemática, a ella se unen, el estrés, el

cansancio, el miedo y la frustración (Coppola et al., 2012; García-González, 2016). En el caso de los estudiantes, las situaciones desencadenantes de sus emociones más comunes son las actividades del aula, como asistir a clases, pasar al pizarrón, hacer las tareas, acreditar exámenes y acreditar cursos (Martínez-Sierra & García-González, 2016; 2017; Lewis, 2013), y en menor medida las creencias que tienen hacia las matemáticas (García-González, Ortega y Rodríguez, 2020), por ejemplo, de que son difíciles o aburridas. Algunas consecuencias negativas de las emociones van desde la disminución de la autoeficacia de los estudiantes que las experimentan, hasta el abandono escolar.

En la actualidad, desde el *dominio afectivo*, el avance sobre el estudio de las emociones apunta a conocer su origen y sus consecuencias en el aprendizaje de las matemáticas y, se espera como prospectiva de investigación, hacer intervenciones para ayudar tanto a los profesores como a los estudiantes a regular las emociones negativas (ver por ejemplo Middleton, Jansen y Goldin, 2018; García-González & Martínez-Sierra, 2020). Al respecto, los autores de este trabajo han apostado por la implementación de un acompañamiento que ayude a los estudiantes a regular sus emociones negativas, al cual se denomina *coaching emocional*.

En particular, en este artículo se planteó como objetivo de investigación ilustrar el potencial del *coaching* emocional en estudiantes de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero, para regular sus emociones negativas y, como resultados colaterales, mejorar su aprendizaje de las matemáticas y la no deserción de dicho programa educativo. Para alcanzarlo se diseña un estudio de caso instrumental (Stake, 1998).

Antecedentes del *coaching* emocional

El concepto de *coaching* ha existido durante décadas, pero se ha descrito con mucho más detalle en los últimos 20 años. La palabra *coaching* la entendemos en su traducción de *acompañamiento*, sin embargo, a lo largo del documento conservamos su denominación en inglés, en consonancia con los antecedentes de investigación.

De acuerdo con Knight (2007), las publicaciones del mundo de los negocios y de la educación ofrecen una imagen más clara de lo que es y no es

el *coaching*. Al respecto, este autor describe diferentes tipos de *coaching*, mismos que enseguida describimos.

- 1) *Coaching* ejecutivo (*executive coaching*). Este tipo de *coaching* proviene del mundo de los negocios, donde se ha convertido en una industria en auge, también conocido como *coaching* transformacional (*transformational coaching*) y *coaching* de procesos (*process coaching*), el *coaching* ejecutivo es un método para ayudar a las personas a ser más competentes en una o más áreas de sus vidas, generalmente profesionales.
- 2) *Coaching* coactivo (*coactive coaching*). Este tipo de *coaching* va más allá de los límites tradicionales del *coaching* ejecutivo para asumir una relación cliente-*coach* que involucra la vida de una persona. De esta manera un *coach* coactivo puede abordar cuestiones relacionadas con la educación, la salud, las finanzas, las relaciones personales, el crecimiento personal, la espiritualidad y la recreación de sus clientes, trabajando en colaboración con sus clientes para que estos puedan vivir una vida más completa, más equilibrada y más efectiva.
- 3) *Coaching* cognitivo (*cognitive coaching*). El *coaching* cognitivo es una de las formas de *coaching* más utilizadas en las escuelas estadounidenses. Costa & Garmston (2002, citados en Knight, 2007), a través de sus publicaciones y el desarrollo profesional continuo, han articulado una teoría del *coaching* que ha proporcionado herramientas para trabajar con maestros y otros educadores.

Este tipo de *coaching* se basa en el supuesto de que los comportamientos cambian después de que nuestras creencias cambian.

Todo comportamiento está determinado por las percepciones de una persona y [...] un cambio en la percepción y el pensamiento es un requisito previo para un cambio en el comportamiento [...], los seres humanos construyen su propio significado a través de la reflexión sobre la experiencia y el diálogo con los demás (Costa & Garmston, 2002, p. 7, traducción propia).

Ya sea que se lleve a cabo en una semana o durante varios años, el *coaching* cognitivo incluye tres elementos interrelacionados: (a) una conversación

de planificación; (b) un evento, que generalmente es observado por el entrenador cognitivo; y (c) una conversación reflexiva.

La *conversación de planificación* generalmente ocurre entre el entrenador y el profesor antes de un evento, con mayor frecuencia antes de que enseñe una lección. Entre otras cosas, el entrenador y el profesor, juntos, aclaran cuáles serán las metas del maestro, cómo se verá el éxito, los datos que serán necesarios para medir el éxito, cómo se recopilarán los datos y las estrategias, métodos y decisiones que se tomarán para lograr el éxito. El *evento* puede ser cualquier cosa en la que el entrenador cognitivo y el profesor estén de acuerdo, pero lo más frecuente es que sea una lección enseñada por el maestro. En la mayoría de los casos, un maestro enseña una lección empleando las estrategias, métodos y decisiones identificadas por el entrenador y que han trabajado juntos. Durante la lección, el entrenador cognitivo recopila los datos identificados como necesarios para medir el éxito. El objetivo del entrenador es recopilar datos de manera objetiva para que luego los dos puedan tener una conversación reflexiva sobre el evento.

La *conversación reflexiva* se produce después del evento. Aquí, el entrenador cognitivo y el profesor revisan los datos que el entrenador reunió mientras observaba la lección o el evento, les dan sentido a los datos descubriendo las relaciones de causa y efecto, construyen un nuevo aprendizaje, deciden cómo aplicar ese nuevo conocimiento y luego se comprometen a usar el nuevo conocimiento.

- 4) *Coaching* instruccional (instructional coaching). Los *coaches* instruccionales (IC) son desarrolladores profesionales de tiempo completo, en las escuelas. Los IC trabajan con los maestros para ayudarlos a incorporar prácticas de instrucción basadas en la investigación. Cuando los IC trabajan con los estudiantes, lo hacen con el objetivo principal de demostrar nuevas prácticas efectivas a los maestros. Al igual que los *coaches* ejecutivos, los IC deben ser expertos en desempacar las metas de sus clientes (maestros colaboradores) para que puedan ayudarlos a crear un plan para alcanzar sus metas profesionales. Al igual que los *coaches* coactivos, los IC deben contar con un repertorio de excelentes habilidades de comunicación y ser capaces de empatizar, escuchar y construir relaciones de confianza. Además, al igual que los entrenadores cognitivos, los IC deben ser altamente capacitados para facilitar la reflexión de los maestros sobre sus prácticas en el aula.

Además de la revisión de Knight (2007), identificamos otros tipos de *coaching*.

- 5) El *coaching* educativo. López y Valls (2013) definen el *coaching educativo* como una relación uno a uno, donde existen dos roles diferentes: el *coach* (acompañante) y el *coachee* (acompañado) en el que la confianza y la confidencialidad generan el ambiente de trabajo necesario para poder iniciar un proceso de crecimiento y aprendizaje. El *coach* ayuda a que el alumno descubra su propio camino, a pensar y a hacerlo responsable de su realidad, en otras palabras, el *coach* es un facilitador del aprendizaje.

Este tipo de *coaching* abre un espacio para entender las emociones que nos dificultan o potencian el aprendizaje, o la colaboración entre los profesores, o la manera de dirigir un centro. Son emociones y relaciones ligadas al rol profesional, o al proceso de aprendizaje de los estudiantes.

- 6) El *coaching* en el aula (*classroom Coaching*). De acuerdo con Yopp, Burroughs, Sutton & Greenwood (2019), este tipo de *coaching* es un método de desarrollo profesional en el que un *coach* trabaja en el aula de un maestro para mejorar su práctica docente. A decir de estos autores, muchas escuelas utilizan el *coaching en el aula* en un esfuerzo por mejorar los resultados de los estudiantes, y además existe una creciente evidencia empírica de que el *coaching* en el aula puede ser un componente del desarrollo profesional efectivo dirigido a mejorar la práctica docente y el rendimiento estudiantil.

El *coaching* emocional

Con base en las caracterizaciones anteriores, concluimos que el potencial de los diferentes tipos de *coaching* es la atención especializada que se le brinda a un sujeto con la finalidad de alcanzar un objetivo, dicho objetivo se torna común en el espacio de tiempo en el que el acompañante y acompañado interactúan. Por ello a manera de hipótesis consideramos que es posible la implementación de un tipo de *coaching* cuyo eje rector sean las emociones de los estudiantes, de esta manera, el objetivo a alcanzar es regular las emociones negativas, a este tipo, lo denominamos *coaching* emocional.

El *coaching* emocional retoma los tres elementos pilares del *coaching* cognitivo, (a) una conversación de planificación; (b) un evento y (c) una conversación reflexiva. Y del *coaching* educativo, retoma el interés por generar el ambiente de trabajo necesario para poder iniciar un proceso de aprendizaje, en particular de las matemáticas.

De esta manera el *coaching emocional* es un proceso centrado en el conocimiento emocional de un estudiante de matemáticas (acompañado) que tiene como fin la regulación de sus emociones negativas con la ayuda de un experto (acompañante). Retomando a García-González y Pascual-Martín (2017) y a García-González y Martínez-Padrón (2020), usaremos el término *conocimiento emocional*, para referirnos a la información que el estudiante tiene de sus emociones, lo que implica conocer la emoción que se experimenta y la situación que la desencadena. Teniendo conocimiento emocional se puede lograr la regulación emocional, al modificar las situaciones desencadenantes de las emociones negativas.

Entendemos los roles del *acompañante* como la persona que motivará y proporcionará estrategias para la regulación de las emociones negativas que un estudiante de matemáticas pueda presentar durante su aprendizaje. En tanto que el *acompañado* será quien en todo momento realizará el análisis de su actuar dentro del aula y de su conocimiento emocional. Así, en forma conjunta acompañante y acompañado, diseñarán estrategias de regulación emocional.

Metodología

Enfoque de la investigación

Se adopta el enfoque cualitativo, debido al énfasis en la visión de los actores y el análisis contextual en el que ésta se desarrolla, centrándose en el significado de las relaciones sociales (Vela-Peón, 2008). Este enfoque es adecuado para el objetivo planteado, debido a que se pretende regular las emociones que experimenta el estudiante de matemáticas durante su aprendizaje. Para ello, en primer lugar, es necesario conocer la realidad emocional del estudiante, conocer qué emociones experimenta en las clases de matemáticas, particularmente conocer la forma en que las emociones negativas afectan su aprendizaje, solo de esta manera se puede diseñar el proceso de *coaching* que le ayude a regular las emociones negativas.

Tipo de la investigación

Como diseño de investigación se recurrió al estudio de caso de entidad única (un solo elemento), particularmente el estudio de caso instrumental (Stake, 1998), éste se usa cuando se quiere alcanzar la comprensión de un fenómeno general que involucra, como uno de sus elementos o nexos, el caso estudiado, y se busca desarrollar una construcción teórica, por lo menos como primer propósito. De esta manera, pretendimos alcanzar la comprensión de la regulación de emociones negativas de estudiantes de licenciatura en matemáticas por medio del *coaching* emocional, a través del caso de Ana.

Contexto

La investigación tuvo como escenario la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, ésta se oferta a estudiantes egresados del bachillerato y tiene cuatro líneas terminales: Matemáticas básicas, Matemática educativa, Estadística y Computación. Tiene una duración de cuatro años. La matrícula de esta asignatura es baja, alrededor de 25%, comparada con el resto de las licenciaturas que oferta la universidad.

Una característica de los estudiantes que ingresan a esta licenciatura en Matemáticas es que, en el primer semestre, alrededor de 30% se inscriben porque no fueron aceptados en otros programas o porque quieren mejorar sus conocimientos matemáticos para poder cursar una carrera de ingeniería. El resto, lo hace por convicción, en su mayoría por que les gustan las matemáticas y por el deseo de enseñarlas, este gusto fue generado en sus años académicos anteriores por ser buenos estudiantes en matemáticas. En algunas ocasiones, este gusto por las matemáticas cambia durante el primer semestre, ya que los estudiantes conocen una matemática diferente a las de sus cursos anteriores, y en ocasiones esta confrontación los lleva a creer que no son buenos en matemáticas y experimentar emociones negativas como la frustración, el estrés, el miedo, entre otras, y en consecuencia a decidir entre enfrentar esta situación o desertar de la carrera.

Debido al panorama anterior consideramos que un proceso de *coaching* emocional puede ayudar a los estudiantes, que manifiestan emociones negativas hacia las matemáticas, a no desertar y terminar sus estudios.

Participantes

El acompañante

El acompañante es el primer autor de este escrito. De acuerdo con los preceptos del *coaching* educativo (López y Valls, 2013) la característica principal del acompañante es su pericia del tema que propicia el *coaching*, en nuestro caso la regulación de emociones negativas. Fueron dos las razones por las que se consideró que el primer autor desempeñara el rol de acompañante, en primer lugar, porque posee conocimientos de la matemática escolar desde nivel básico hasta preuniversitario, pues cursa el último año de la licenciatura en matemáticas con especialidad en Matemática Educativa. La segunda razón obedece a sus conocimientos sobre el tema de conocimiento emocional, regulación emocional y *coaching* emocional, producto de su colaboración con la segunda autora del trabajo, experta en la línea del *dominio afectivo*.

El acompañado

Para elegir el caso de estudio, se elaboró el perfil emocional (Davidson & Begley, 2012) de estudiantes de primer año de la licenciatura en matemáticas, y se eligió el que tuviera más emociones negativas.

El perfil emocional es la información sobre las emociones que experimenta un estudiante durante el aprendizaje de las matemáticas, con la intención de comprender su comportamiento y su toma de decisiones. Para elaborar el perfil emocional se usó la entrevista semiestructurada, debido a que consideramos el lenguaje como fuente para expresar y estudiar las emociones. La entrevista consistió en una serie de preguntas que tenían la intención de obtener información sobre las emociones que los estudiantes experimentan en sus clases de matemáticas, éstas han sido retomadas de la investigación de García-González y Martínez-Sierra (2016) y se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Protocolo de entrevistas para el perfil emocional

Preguntas para conocer las emociones de estudiantes de matemáticas
1. ¿Qué emociones o sentimientos experimentas en la clase de matemáticas?
2. ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que has tenido como estudiante de matemáticas?
3. ¿Cuáles son las principales experiencias negativas que has tenido como estudiante de matemáticas?
4. ¿En qué circunstancias y situaciones has experimentado felicidad o alegría en tus clases de matemáticas?
5. ¿En qué circunstancias o situaciones has experimentado tristeza o pesar en tus clases de matemáticas?

Fuente: García-González y Martínez-Sierra (2016)

Se entrevistó a un grupo de quince estudiantes, uno de los dos grupos de nuevo ingreso a la licenciatura. Las entrevistas fueron realizadas por el primer autor del artículo, cada entrevista duró aproximadamente una hora, y se llevaron a cabo en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, nodo Chilpancingo.

El análisis de los datos de la entrevista consistió en identificar qué emociones experimentaban los entrevistados y, aún más importante, que es lo que las desencadenaba, este análisis se basó en la tipología de emociones de la teoría OCC (Ortony, Clore y Collins, 1996).

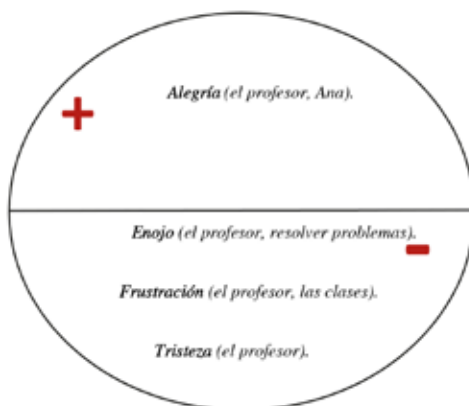
Con base en la teoría OCC al analizar las entrevistas pusimos la atención en dos características en específico, la situación desencadenante y la palabra emocional, con esto nos dimos cuenta de la valorización realizada por los entrevistados. Una vez identificados los tipos de emociones procedimos a identificar su influencia en el aprendizaje de las matemáticas, de esta manera se identificaron los perfiles emocionales de los estudiantes, y se eligió entre ellos el caso de Ana.

El caso de Ana, la acompañada

Ana es estudiante de primer año de licenciatura, tenía diecisiete años de edad al momento en que se realizó la entrevista. Ella fue elegida porque su perfil emocional estaba más cargado de emociones negativas (ver figura 1). Además, identificamos que las situaciones desencadenantes giraban en

torno a ciertas acciones de sus profesores de matemáticas y la valoración que de ellas hacía, solo en la emoción de alegría aparece Ana como agente desencadenante.

Figura 1. Perfil emocional de Ana



Para profundizar en las situaciones desencadenantes de las emociones de Ana a lo largo de sus años escolares, en la Tabla 2, se muestra la evolución de sus emociones. Notamos que la emoción de alegría estuvo presente en todos los años escolares, a excepción de la preparatoria, y ésta se debió a la forma de enseñanza de sus profesores, sin embargo, en el curso propedéutico la alegría se desencadenó por entender los temas de cálculo, en este caso Ana era la agente que desencadenaba esta emoción.

Las emociones negativas que ella ha experimentado se deben a acciones que su profesor realizaba y que ella valoraba como negativas, por ejemplo, no tomar en cuenta a los alumnos y faltar a clases, todos estos son factores externos a la matemática, sin embargo, decidimos que el caso de Ana tenía potencial para ser estudiado, porque en los cursos propedéuticos aparecen el profesor, las clases y resolver problemas como situaciones desencadenantes de las emociones de Ana. De entre las emociones negativas, el enojo denota mayor intensidad, como se lee en el siguiente fragmento.

Ana: Al principio de los cursos propedéuticos sentía *frustración*, ya que **no sabía cómo iban a ser las clases**, porque la preparatoria y la universidad son muy diferentes. Después *sentí alegría*, ya que *fui descubriendo temas que no conocía, y eso me motivaba más...*, también sentí *enojo*, ya que *había ejer-*

cicios que no podía realizar, ya sea por no entender el tema, o no haberlo visto en la preparatoria, y eso me hacía enojar tanto que quería romper las hojas de mi cuaderno.

Respecto a la tristeza se debió a que el profesor de Ana en los cursos propedéuticos frecuentemente les decía que sino estudiaban no iban a ser capaces de terminar la licenciatura, esta acción del profesor la valoraba como desmotivación y a la vez como un reto, ella estaba segura de que sería capaz de culminar la licenciatura.

Ana: La última emoción fue *tristeza*, ya que el profesor que nos dio el curso propedéutico nos dijo: **“Por ustedes el profesor no se va a detener y seguirá con los temas y si no pueden con la carrera es mejor que se salgan”**. Esto tuvo un gran impacto en mí, ya que me hizo desmotivarme, pero ahora quiero demostrarme que puedo seguir estudiando.

Tabla 2. Emociones de Ana, a lo largo de su vida académica

Nivel escolar	Emociones
Primaria	<i>Enojo:</i> El maestro les daba poca importancia a los alumnos. <i>Alegría:</i> La forma de enseñanza era agradable y comprensible. <i>Frustración:</i> Cambio de profesores.
Secundaria	<i>Alegría:</i> La forma de enseñanza era agradable y comprensible. <i>Enojo:</i> Poca asistencia del profesor a las clases.
Preparatoria	<i>Tristeza:</i> El poco apoyo que le daba su profesor a la mayoría de los alumnos.
Cursos propedéuticos (Licenciatura en Matemáticas)	<i>Tristeza:</i> Desmotivación por parte del profesor. <i>Frustración:</i> Incertidumbre de las clases de matemáticas. <i>Enojo:</i> No ser capaz de resolver problemas. <i>Alegría:</i> La comprensión de diferentes temas de cálculo.

Con base en el perfil emocional de Ana, le ofrecimos someterse a un proceso de *Coaching* emocional para ayudarla a regular las emociones negativas que experimentaba y las nuevas que pudieran presentarse durante su primer semestre, ella aceptó, y estuvo de acuerdo en que su caso fuera difundido con fines de investigación.

Fases del *Coaching* emocional

Para llevar a cabo el *Coaching emocional* se adoptaron las siete fases de la metodología del *Coaching* educativo de López y Valls (2013), que se muestran en la Tabla 3. Estas fases se corresponden con los pilares del *Coaching* cognitivo, conversación de planificación (fases 1 y 2); evento (fases 3 y 4) y conversación reflexiva (fases 5, 6 y 7).

Tabla 3. Metodología del *Coaching* emocional

Fases del <i>Coaching</i>	Actividades realizadas con Ana
1) Definición del contrato.	Perfil emocional (emociones negativas). Sede del acompañamiento.
2) Construcción de la relación.	Diálogos entre Ana y acompañante. Disposición para las sesiones de los encuentros.
3) Experiencia concreta.	Objetivo: Identificar situaciones desencadenantes de emociones negativas en las clases de Ana.
4) Observación y trabajo con el reto.	Observaciones de clase.
5) Generación de nuevo pensamiento.	Elaboración de estrategias de regulación emocional.
6) Integración de nuevos comportamientos.	Implementación de estrategias de regulación emocional.
7) Cierre.	Revisión del logro del objetivo y fin del acompañamiento.

Fase 1. Definición del contrato

El propósito en esta fase fue seleccionar al acompañante y al acompañado, así como el tiempo y el lugar donde se llevará a cabo el *coaching*. Para seleccionar al acompañado se usó como criterio el “perfil emocional” (ver sección anterior), el acompañante fue elegido por su pericia en temas de afecto y matemáticas, como se ha dicho anteriormente. El espacio físico fueron las instalaciones de la Licenciatura en Matemáticas, nodo Chilpancingo de la Universidad Autónoma de Guerrero. El tiempo del *coaching* fue de seis meses.

Fase 2. Construcción de la relación

Ana y Osiel empezaron a establecer encuentros en dónde el objetivo era construir una relación de confianza entre ambos para poder llevar a cabo el *coaching* emocional, además de establecer las reglas del proceso y la forma de implementarlas para alcanzar el objetivo común, por ejemplo, encuentros quincenales para hablar de su estado emocional respecto a los cursos de Ana y las observaciones de sus clases.

En los primeros encuentros, a dos semanas del inicio de su semestre Ana nos comentó sobre su experiencia en la facultad y su estado emocional.

Ana: Las clases han sido cansadas porque nos dejan demasiada tarea y los maestros se van muy rápido con los temas, y no te esperan, solo dan el tema y siguen y siguen. En general me he *sentido bien* **porque voy comprendiendo algunos temas.**

También comentó sobre la clase que más le gustaba y la que más le disgustaba.

Ana: El profesor de precálculo nos explica puras demostraciones y son muy extensas, se me complica un poco entenderlas, me provocan confusión, por la **velocidad en que las demuestra y por el número de demostraciones**, y tengo miedo porque **si no hago la tarea no me la va a calificar...** la materia que más me gusta es inglés, **por no tener cálculos, y me relaja mucho**, pero una que me gusta de matemáticas es la geometría porque **el profesor explica paso a paso para que pueda comprender** y eso me causa alegría ya que **le voy entendiendo a los temas.**

De lo anterior identificamos que el miedo era una de las emociones a regular, cuya situación desencadenante eran las demostraciones. Osiel habló con Ana para trabajar en esta regulación emocional, ella estuvo de acuerdo, además aseguraba que sentía gusto por estar en la licenciatura, y se sentía motivada para seguir estudiando, esto fue de gran ayuda para alcanzar el objetivo planteado.

Fase 3. Experiencia concreta

Osiel observó las clases de Ana con la finalidad de corroborar que el miedo era la emoción que más afectaba a Ana. Y encontró que éste se manifestaba también en las clases de *Lógica y Teoría de Conjuntos* además de *Precálculo*. Al respecto Ana corroboró esta información en la sesión de encuentro.

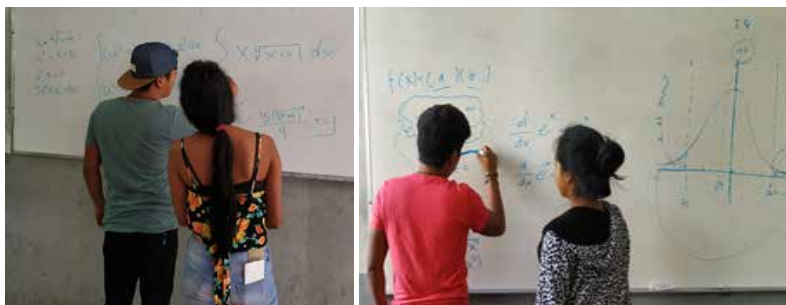
Ana: *Tengo miedo por no entender algunos temas de la clase de Lógica y Teoría de Conjuntos, pero cuando los entiendo siento alegría...* El profesor de esta materia nos ha dicho: “¿Qué hacen aquí si no le entienden!”, pero no *me hace sentir mal*, sino que lo veo como una inspiración para seguir estudiando, un reto que debo cumplir.

Al corroborar que el miedo era la emoción negativa que influía en Ana, se planteó como objetivo regularlo.

Fase 4. Observación y trabajo con el reto

En esta fase, ya identificadas las situaciones que desencadenaban el miedo de Ana (no saber demostrar y no entender temas de Lógica y Teoría de Conjuntos), se trabajó en modificarlas, para ello se implementaron asesorías matemáticas de temas de Precálculo y Lógica y Teoría de Conjuntos en las sesiones quincenales de encuentros (ver Figura 2), además de esto, se continuó observando las clases de Ana y hablando de sus estados emocionales.

Figura 2. Enseñanza de temas de Precálculo.



Fase 5. Generación del nuevo pensamiento

En esta fase el objetivo pretendido es que el acompañado implemente las estrategias propuestas para regular las emociones negativas. Como producto de esta fase se espera que el acompañado sea consciente de la forma en que reguló la emoción y que si en un futuro la situación vuelve a presentarse tendrá recursos para volver a regularla. En el caso de Ana, la regulación consistía en la comprensión de conceptos matemáticos y en aprender a demostrar.

Como producto de las asesorías y de las observaciones de clase, se notó en Ana un cambio respecto a la emoción de miedo en Precálculo, y esto fue debido a las asesorías que se le dieron, y a que en los cursos el profesor optó por explicarles paso a paso los temas, lo que ayudó a Ana a aclarar dudas, además si algo no quedaba claro podría pedir ayuda en las sesiones de encuentros.

Ana: Estos días me he sentido *alegre, me gusta la clase de Precálculo*.

Aunque se logró disminuir un poco el miedo al pasar al pizarrón en las clases de Lógica y Teoría de Conjuntos, el miedo seguía porque la didáctica de profesor no ayudaba a que las asesorías funcionaran del todo.

Ana: El profesor siempre se enfoca en otros temas del tema que va a dar, y siempre pasa a que expongan un tema y me da miedo que **me salga algo mal y me vaya a regañar**..., pero hasta ahorita no he fallado en ninguna de las veces que he pasado al pizarrón.

Un factor que elevó la intensidad del miedo en Ana en la asignatura de Lógica y Teoría de Conjuntos fue el primer examen que realizó y en el que obtuvo una baja calificación.

Ana: Obtuve baja calificación en el examen, 4.5... Yo creo que es porque el profesor quería tal cual nos enseñó las demostraciones, y yo las quise hacer de otra manera, saltándome unos pasos. Ahora **tengo miedo de no pasar la materia, me da mucho miedo**.

Para seguir con el proceso de regulación, se planeó con Ana mejorar su comprensión sobre las tablas de verdad y el teorema de Gauss, ya que era el tema que se trabajaría en las clases próximas de Lógica y Teoría de Conjuntos. Al respecto una técnica que se le sugirió fue subrayar las cosas más importantes y hacer un resumen, ella optó por grabar los textos y escucharlos después. Además, en clase cumplía con las tareas encomendadas. Creemos que esta ayuda influyó en que Ana acreditara su examen y la materia.

Ana: Estaba *muy ansiosa* por **el examen**, estudié mucho, tú me ayudaste (Osiel)..., solo tuve dudas en dos ejercicios, porque eran de diferencias, pero las demás eran de las demostraciones, cómo se constituyen y vino que hicieramos una demostración al absurdo. Eran 18 preguntas y contesté 16, y **pasé**, *me sentí aliviada*... Al final pasé la materia con 7.

Fase 6. Integración de nuevos conocimientos

En esta fase se realiza la retroalimentación de las estrategias implementadas para regular las emociones negativas y se evalúa si se han regulado las emociones o no. En el caso de Ana, la emoción de miedo fue regulada mediante la adquisición de mayor conocimiento de los temas de las materias que no comprendía, esto aunado a su motivación por estudiar y su disposición en todas las sesiones de encuentro.

Como se pudo notar en la sección anterior, el miedo fue más rápido de regular en la materia de Precálculo, pero no en la materia de Lógica y Teoría de Conjuntos, en donde hubo factores que obstaculizaron la regulación, como la actitud del profesor, al respecto Ana comenta lo siguiente.

Ana: Se *me quitó el miedo* de pasar al pizarrón, no era la única que le tenía miedo al profesor, la mayoría de mis compañeros también le tenían miedo, el profesor es muy chistoso, pero siempre quería que quedáramos mal... Recuerdo que *yo me sentía nerviosa y con miedo* al principio, y es que **había pasado tres veces al pizarrón y cuando me pasaba me desmotivaba**.... El profesor explicaba muy rápido, siempre nos daba un ejemplo y de eso quería que contestáramos las demás (actividades), pero después pasaba y todo me salía bien, con tu ayuda (Osiel) prácticamente le entendí a todo.

Fase 7. Cierre

En esta fase se realiza el cierre del *Coaching* emocional, Ana y Osiel hicieron una retrospectiva de lo vivido en los seis meses de acompañamiento.

Osiel: ¿Cómo te sentiste durante estos seis meses con el *Coaching*?

Ana: Me sentí bien, porque desquitaba todo lo que tuve durante las semanas que no hubo sesiones.

Osiel: ¿Cuáles fueron las emociones más marcadas que tuviste en el semestre?

Ana: Fue el miedo que te mencioné en todo el semestre, la alegría cuando recibía algunas calificaciones, la frustración, y la tristeza fue la que más me afectó cuando no podía con Lógica y Teoría de Conjuntos.

También se habló de la valoración del *Coaching* emocional como proceso implementado.

Osiel: ¿En qué te ayudaron nuestros encuentros?

Ana: Me ayudaste a estudiar los temas que no entendía, y esto era un punto a mi favor, me ayudaste a practicar y aprender todos los temas que nos dejaban los profes... Yo lo recomendaría a más compañeros, porque no te fuiste nada más a lo escolar sino que también a cómo me sentía, y me ayudaba mucho tener a quien contarle cómo me sentía, tú eras el único que sabía, mi familia nunca lo supo.

Osiel: ¿Crees que en verdad tiene importancia el *Coaching* emocional?

Ana: Sí, ya que muchos de mis compañeros se han salido por diferentes motivos, ya sea que no les gustó la carrera o que no pueden comprender los temas.

Se interrogó a Ana sobre la elección de Osiel como acompañante, al respecto comenta que le gustó que el *coach* fuera un alumno como ella, porque siente que hay más empatía.

Ana: Me gustó que fueras el *coach* porque entre alumnos nos comprendemos, y los profesores no están viviendo lo que está pasando con los alumnos... prefiero que sea mejor un alumno a un profesor más grande, y que fueras del sexo masculino me hizo sentir más cómoda, porque casi no hablo con muchas mujeres. Me sentí cómoda contigo.

Respecto a la implementación del *Coaching* y al enfoque emocional, comentó que le pareció adecuado y solo sugiere que hubieran sido mayor número de sesiones de los encuentros quincenales.

Ana: El tiempo estuvo bien porque las asesorías eran de acuerdo con nuestros tiempos, que podíamos manejar y me sentía bien, así que no agregaría nada... Puede que fueran más asesorías o que fueran los fines de semana.

Osiel: ¿En qué querías que se enfocaran más las entrevistas en la emocional o escolar?

Ana: Pues las dos son importantes, y las emociones tienen un lazo con el comportamiento del alumno en la escuela.

Finalmente habló de su motivación por seguir estudiando la licenciatura.

Osiel: ¿Estás motivada a seguir estudiando?

Ana: Sí, porque es la carrera que me gusta, me desmotivaría reprobar muchas materias, pero igual le seguiría echando ganas.

Discusión y conclusiones

La pretensión de este escrito ha sido mostrar el potencial del *coaching* emocional en estudiantes de primer año de licenciatura en Matemáticas mediante el caso de Ana. Al respecto podemos decir que el proceso de Ana fue exitoso, pues logró regular la emoción de miedo que experimentaba en dos cursos, Precálculo y Teoría de Conjuntos.

La regulación del miedo en el caso de Ana consistió en modificar la situación que lo desencadenaba, a saber, el escaso conocimiento de los temas de estas asignaturas y del proceso de demostración. Por tal razón, durante el proceso de *coaching* se le brindaron asesorías con la finalidad de que ella adquiriera mayor conocimiento matemático y habilidades para demostrar, además los encuentros con el acompañante siempre giraron en torno a su estado emocional, ya que es el eje rector del *coaching* emocional.

El caso de Ana lo valoramos exitoso porque logró regular el miedo, aunque creemos que en sus próximos cursos lo puede volver a experimentar, sin embargo, ahora Ana conoce un camino para modificar la situación que lo desencadena, además la motivación que tiene por estudiar puede ser un factor que la ayude en su regulación.

De acuerdo con Costa y Garmston (2002) los seres humanos construyen su propio significado a través de la reflexión sobre la experiencia y el diálogo con los demás, este precepto es un pilar del *coaching emocional*, pues gracias a la reflexión y el diálogo entre acompañante y acompañada se pudieron desarrollar las fases del acompañamiento.

El acompañante trabajó junto a la acompañada para mejorar su capacidad de reflexión sobre su conocimiento emocional, para ello empleó el recurso de las preguntas, a través del diálogo en las sesiones de encuentro y en las entrevistas, que invitaban a la acompañada a pensar sobre su comportamiento en el aula de clases, y en todo momento escuchaba atentamente para construir y mantener la conversación.

Del caso de Ana se desprende que el *Coaching emocional* puede ser una herramienta para ayudar a los estudiantes con problemas en sus cursos de matemáticas; hablar de cómo se sienten es el punto de partida, de ahí se averigua lo que los hace sentir mal y se elaboran estrategias para modificar sus estados emocionales negativos.

Referencias

- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3-4), 101-118.
- Costa, A. L., & Garmston, R. J. (2002). *Cognitive coaching: A foundation for renaissance schools*. Norwood, MA: Christopher-Gordon.
- Davidson, J., & Begley, S. (2012). *El perfil emocional de tu cerebro*. Madrid: Ed. Destino.
- García-González, M. S. (2016). "Me frustra no resolver un problema en el examen": Emociones en la clase de matemáticas. *Eutopía*, 9(24), 79-6.
- García-González, M., & Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.
- García-González, M., & Pascual-Martín, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 133-148.

- García-González, M., Ortega, J., & Rodríguez, F. (2020). “Aprender matemáticas es resolver problemas”: creencias de estudiantes de bachillerato acerca de las matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 11(2020), e726.
- García-González, M. & Martínez-Padrón, O. J. (2020). Conocimiento emocional de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(1), 153-173.
- García-González, M. S. & Martínez-Sierra, G. (2020). The history of a teacher’s relief of his mathematics anxiety: the case of Diego. *Educational Studies in Mathematics*, 103 (3), 273-291. DOI: 10.1007/s10649-020-09941-8
- Knight, J. (2007). *Instructional coaching: A partnership approach to improving instruction*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 70-6. DOI: 10.1080/14794802.2012.756636
- López, C., & Valls, C. (2013). *Coaching educativo. Las emociones al servicio del aprendizaje*. México: SM.
- Martínez-Sierra, G., & García-González, M. S. (2016). Undergraduate mathematics students’ emotional experiences in linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 87-106. DOI: 10.1007/s10649-015-9634-y
- Martínez-Sierra, G., & García-González, M. S. (2017). Students’ emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(2), 349-369. DOI: 10.1007/s10763-015-9698-2
- Middleton, J., Jansen, A., & Goldin, G. A. (2018). The complexities of mathematical engagement: Motivation, affect, and social interactions. In Jinfa C. (Ed.). *Compendium for Research in Mathematics Education*, 667-699. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Vela-Peón, F. (2008). Un acto metodológico básico de la investigación social: la entrevista cualitativa. En M. L Tarres (Coord.) *Observar*,

escuchar y comprender, sobre la tradición cualitativa en la investigación social, 63-96. México: Porrúa.

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., Sutton, J. T., & Greenwood, M. C. (2019). Variations in coaching knowledge and practice that explain elementary and middle school mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(1), 5-36. doi: 10.1007/s10857-017-9373-3

Datos de autores:

Imer Osiel Cantú Ramírez, María S. García González
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
Correos-e: ImerOsiel@outlook.com / mgargonza@gmail.com

CAPÍTULO 2

Valoración de la percepción y generación de ideas creativas en estudiantes universitarios STEM

Jorge Alfredo Lombardero-Chartuni

Estela Juárez-Ruiz

Lidia A. Hernández Rebollar

Resumen

Se reporta una experiencia centrada en promover la percepción del pensamiento creativo y valorar la generación de ideas creativas en estudiantes de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Se utilizaron las metodologías solución creativa de problemas y aula ágil invertida en el diseño de un curso-taller asistido por un blog, en el marco de la innovación educativa con la apropiación de una técnica creativa para la mejora continua del desempeño académico y laboral. Se trató de un estudio cuantitativo descriptivo correlacional. Los resultados indican que los estudiantes se perciben a sí mismos como soñadores, idealistas, abiertos a experiencias e imaginativos y perciben a las personas creativas como imaginativos, de ideas variadas y con iniciativa. Los resultados de la valoración de las ideas creativas evidenciaron que los atributos de la dimensión resolución fueron los que tuvieron las más altas calificaciones, seguidos por los de elaboración y síntesis. En los atributos de la novedad, los valores que más se repitieron correspondieron al nivel bajo y en segundo lugar el nivel alto, indicando que las ideas fueron preferentemente o nada novedosas o muy novedosas. Con respecto a las correlaciones, las dimensiones originales con atractivo y original con transformacional tuvieron valores altos positivos.

Palabras clave: Valoración del pensamiento creativo, innovación educativa, STEM, solución creativa de problemas.

Introducción

Se llevó a cabo la aplicación de la metodología solución creativa de problemas (CPS por sus siglas en inglés) en un curso-taller dirigido a estudiantes de nivel superior, para estudiar la percepción creativa de los participantes y la valoración creativa de ideas. Esta metodología se complementó con la aplicación de técnicas creativas como la lluvia y la ficha de idea para el desarrollo de habilidades de pensamiento creativo.

Los creadores de la metodología CPS, Isaksen, Dorval y Treffinger (2011) establecen que comprender la creatividad personal y la creatividad de quienes nos rodean, ayuda a tener más éxito en el uso deliberado de la creatividad. La personalidad creativa es una cuestión de esos patrones de rasgos que son característicos de las personas creativas. Un patrón creativo se manifiesta en el comportamiento creativo que incluye actividades tales como inventar, diseñar, combinar, componer y planificar.

La creatividad es un concepto dinámico, cambia a través de nuestra experiencia, Isaksen et al. (2011) resaltan que:

La creatividad es una función en combinación con tres factores: conocimiento, imaginación y evaluación (...), los profesionales en ejercicio son vistos como poseedores de un gran conocimiento y fortaleza evaluativa, pero necesitan ayuda de la imaginación (p.46).

Además, resaltan que la creatividad siempre ocurre en algún contexto o dominio de conocimiento, y que aunque la experiencia es importante y necesaria, no es suficiente para determinar la creatividad, ya que esta implica un equilibrio dinámico entre imaginación y evaluación.

Asimismo, es necesario desarrollar su propio *pensamiento creativo*; el cual es definido como

la capacidad de afrontar vacíos, paradojas, oportunidades, cambios, problemas, buscando conexiones significativas a partir de la generación de alternativas múltiples, posibilidades variadas desde diferentes puntos de vista o perspectivas, alternativas inusuales, originales y detalles para enriquecer o expandir posibilidades (Treffinger y Selby, 2008, pp. 10, 11).

La generación de muchas ideas, que tiene que ver con el pensamiento creativo, no es suficiente por sí misma para ayudar a solucionar un problema. De manera similar, si uno se basa solamente en el lado de la focalización, que tiene que ver con el pensamiento crítico, tendrá muy pocas posibilidades de las cuales elegir una idea. Los solucionadores de problemas efectivos deben utilizar ambos, el pensamiento creativo y el pensamiento crítico, generando opciones y focalizando su pensamiento.

Treffinger y Selby (2008) definen el *pensamiento crítico* como la capacidad de focalizar los pensamientos y acciones a través de la organización y análisis de posibilidades, la redefinición y desarrollo de posibilidades promisorias, la jerarquización o priorización de opciones y la elección de determinadas opciones.

Ha tenido alto impacto en el ámbito educativo la taxonomía de Bloom actualizada, la cual en la cúspide de sus niveles contiene la categoría *crear*, con las subcategorías: generar (hipotetizar), planificar (diseñar) y producir (construir) (Anderson, Krathwohl y Bloom, 2001), con una revisión y aplicación ilustrativa actualizada (Haolader, Ali y Foysol, 2015). Su aplicación en el aula es promovida por el centro para la enseñanza de la Universidad de Vanderbilt (Armstrong, 2020). De esta manera, se hace necesario que los docentes se formen en creatividad, para que puedan llevar a las aulas metodologías y técnicas adecuadas para su promoción en los estudiantes.

Por otro lado, la problemática de la valoración de soluciones y productos creativos aplicados en un entorno específico, en un contexto, en un ambiente educativo, industrial o empresarial, llevó a Susan P. Besemer y colaboradores a desarrollar un modelo de valoración de productos y resultados creativos, a través de una aproximación confiable, robusta y validada (e.g., Besemer, 2000, 2006). En este trabajo es utilizada para la valoración del producto creativo conseguido por los estudiantes.

Sustentándose en este modelo de valoración de ideas se proyectó una investigación con la integración y transferencia de métodos, para generar una innovación educativa centrada en el método CPS y el desarrollo de ideas como soluciones que coadyuven en proyectos académicos o profesionales a estudiantes de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés). El curso fue asistido por TIC a través de un blog como recurso didáctico, con funciones de repositorio de contenidos, tales como temas, documentos de lectura y análisis, artículos, encuestas, formatos de técnicas creativas y videos.

Por otra parte, De la Torre (2007) establece cuatro posibles interrogantes para el estudio de la creatividad: como bien social, la naturaleza humana y la creatividad, las explicaciones teóricas de la misma y la persona y sus procesos creativos. Es en este último en donde se ubica el interés y contexto del estudio que aquí se presenta.

Por ello, la pregunta general de investigación es ¿cómo valorar la percepción de la creatividad y la generación de ideas de estudiantes STEM al diseñar propuestas de solución creativas de problemas de su entorno?

De esta forma, el objetivo de este trabajo es valorar la percepción de la creatividad y la generación de ideas de estudiantes STEM, al diseñar propuestas de solución creativas de problemas de su entorno.

Antecedentes

El pensamiento creativo es ya básico para un recién egresado universitario, pues para conseguir empleo existen evaluaciones implícitas a través del desarrollo de proyectos en los centros empresariales de selección de personal, con campamentos de entrenamiento para proponer soluciones a problemáticas de la propia compañía. Los profesionistas con mejores propuestas de solución creativa son los que son contratados. Lo que ocurre en la actualidad lo describe muy bien De la Torre (2007), estableciendo que si bien la experiencia siempre será un apoyo inestimable, lo cierto es que los nuevos problemas requieren ideas nuevas. Anticipa que la sociedad todavía no es consciente de que su futuro depende de la capacidad de creación de sus mujeres y hombres de ciencia y empresa, de ser más creativos, por lo que hay que desarrollar y potenciar la creatividad.

Para De la Torre (2007) el progreso y desarrollo, tanto personal como social, cada vez dependerán más de la inventiva y de la capacidad creadora de las jóvenes generaciones. Campos de conocimiento donde se utilizan estos procesos creadores son: ciencia de datos, inteligencia artificial, analítica de datos y nanotecnología, entre otros muchos. En síntesis, se refieren a lo que se denomina educación de nueva generación. El problema surge de aprender a entender y usar la creatividad que se tiene, es fundamental para aquellos que estén interesados en identificar qué es la creatividad y comprender cómo se puede desarrollar (Isaksen et al., 2011).

Se pretende que el alumno pueda tomar conciencia de por qué y para qué es necesaria la creatividad en su vida personal y profesional. De la

Torre (2007) clasifica cuatro categorías de personas, según se manifiesta en ellas la creatividad:

1. *El genio creador*: tiene cualidades excepcionales para la creación.
2. *La persona creadora*: ha demostrado su creatividad en realizaciones de valor.
3. *La persona creativa*: tiene un potencial creativo no explotado plenamente.
4. *La persona pseudocreativa*: su creatividad es engañosa o contraria a valores.

El tercer tipo de persona creativa, la que tiene la potencialidad y posibilidad de crear, generar y comunicar ideas o realizaciones nuevas, es en la que se enfoca más específicamente esta investigación.

Marco Teórico

Las definiciones de creatividad son numerosas pero Isaksen et al. (2011) proponen la siguiente: “La creatividad es el proceso de generar productos únicos mediante la transformación de productos existentes. Estos productos deben ser únicos y deben cumplir con los criterios de propósito y valor establecidos por el creador” (p. 107).

Aplicando cps e integrando las técnicas creativas *lluvia de ideas* y *ficha de idea*, se busca facilitar en los estudiantes el conseguir el estado de flujo, que en palabras de Csikszentmihalyi (2016), es la situación en que existe una profunda satisfacción, se percibe la pérdida de la sensación del tiempo y la percepción de sí mismo, es decir, se pierde en la propia actividad.

Percepción de rasgos de la personalidad creativa

De interés particular es el modelo de De la Torre (2007) sobre los rasgos de personalidad. El componente actitudinal juega un papel importante en la creatividad. Al respecto, una frase de Maslow citado por De la Torre afirma que el problema de la creatividad se centra y se resuelve en la persona, por ello en este trabajo se atiende a la percepción de rasgos de la personalidad creativa.

Para Isaksen et al. (2012), la mayoría de los investigadores y educadores han enfatizado el aspecto natural de la creatividad en las personas. La

pregunta principal para ellos es ¿qué tan creativo eres? El problema podría plantearse más apropiadamente en cómo fomentar y desarrollar características creativas en todos. Un enfoque más reciente para el estudio de la creatividad en las personas se refiere a cómo las personas muestran la creatividad que tienen. En lugar de hacer la pregunta, ¿qué tan creativo soy? hacen la pregunta, ¿cómo soy creativo? (De la Torre, 2007). De estas preguntas se abordarán solo dos en esta investigación y serán atendidas a través de dos cuestionarios, los cuales se describen en la sección de método.

Generación de ideas

Basada en Isaksen et al. (2012), en la terminología de CPS, una idea es un concepto inicial o pensamiento preliminar, una opción o una posibilidad. Es una imagen tentativa que se tiene sobre cómo se podría responder a una pregunta abierta o a una declaración de problema, que lo invita a pensar en muchas, variadas o inusuales posibilidades. El enfoque principal del componente *generando ideas* del método CPS, es producir muchas opciones, posibilidades variadas e ideas nuevas para resolver un problema o efectuar un cambio. Consiste en lo siguiente.

Comienza con una declaración del problema o una pregunta que se ha redactado cuidadosamente. Generar ideas, como su nombre lo indica, tiene que ver con los esfuerzos realizados por un individuo o grupo para pensar en muchas, nuevas y variadas ideas para resolver un problema o responder una pregunta abierta.

En cualquier pregunta o planteamiento del problema se comienza por identificar algunas de las principales partes o variables involucradas. Estas se denominan “parámetros” del problema o desafío. Puede haber muchos parámetros, pero para mantener viable la cantidad de posibilidades, generalmente se centra en tres o cuatro parámetros principales. Un parámetro es una parte o elemento principal del problema que puede tomar muchas formas o tener muchos valores.

Primeramente, la pregunta clave que debe plantearse para determinar su necesidad es ¿se necesitan muchas variadas e inusuales ideas para responder a una pregunta que ya se ha formulado?

En segundo término, se aplican elementos de pensamiento creativo. En este componente y etapa, hay una fase de generación y una fase de enfoque, pero el énfasis más fuerte está en el lado generador. Al generar ideas,

se utilizarán una serie de herramientas para ayudar a producir nuevas ideas. Aplicando técnicas y pautas de CPS se generan opciones, expandiendo la mente en un esfuerzo por responder al enunciado del problema. Buscará cantidad, y también hará esfuerzos deliberados para generar ideas que se basen en nuevas perspectivas o puntos de vista, desafiará cualquier suposición y romperá con el pensamiento ligado a los hábitos, y pensará en ideas que sean únicas o inusuales. A continuación, se aplicarán elementos de pensamiento crítico; se utilizarán una o más herramientas de enfoque para seleccionar, fortalecer, ordenar o seleccionar posibilidades prometedoras.

En tercer lugar, el resultado del componente y etapa generando ideas implica la creación de posibilidades que son prometedoras, interesantes o atractivas. Algunas veces, se puede decidir si son necesarias o no más aclaraciones o redefinir el problema y regresar al componente CPS de *comprensión del problema*, o se puede decidir que realmente se necesita la generación de ideas adicionales, tal vez considerando un subproblema relacionado.

Evaluación de la creatividad

De la Torre (2007) enfatiza la necesidad no sólo de desarrollar la creatividad, sino además, de identificarla a través de instrumentos adecuados:

Es necesario contar con un medio para evaluar a la creatividad, no contar con ello equivale a reducirla a conjeturas (...) Aunque en ocasiones existan dichos instrumentos de evaluación, no siempre son los idóneos para tener una imagen real y dinámica del pensamiento creativo al generar ideas, y de su propia percepción como estudiantes creativos (p. 88).

El CPS es el modelo que se decidió utilizar en este trabajo, aunque también se considera pertinente mencionar que se consultaron otros modelos de evaluación de la creatividad, como la obra “Essentials of creativity assessment” de Kaufman, Plucker y Baer (2008). Sin embargo, se eligió CPS debido a que es un modelo que se adecuó más precisamente a la experiencia que se quiso desarrollar en el aula, por su enfoque práctico de vivir la experiencia y porque ha seguido a lo largo de los más de treinta años, con lo que hoy se conoce como un enfoque de mejora continua.

Método

A continuación se describen los elementos del método que se utilizaron en la investigación, con los siguientes apartados: enfoque didáctico, diseño, sujetos, instrumentos y procedimiento.

Enfoque didáctico

El trabajo se enfocó en dos aspectos, por un lado, en analizar cómo los estudiantes perciben su creatividad personal y de la persona creativa, y por otro, en la generación de ideas creativas, en el marco de la metodología CPS, la cual se utilizó para gestionar de manera productiva y proactiva las ideas generadas, por medio de un método de evaluación de un producto creativo.

Los temas del curso tienen una estructura flexible que permite abordarlos libremente. Las técnicas de creatividad lluvia de ideas y ficha de idea fueron implementadas en el aula, donde fue utilizada una plataforma digital interactiva multiusuario (aprovechando los recursos y servicios gratuitos en internet de Google y Wordpress) para la creación de ideas en trabajo colaborativo. Los aprendices plantearon un problema real de su contexto y propusieron muchas soluciones creativas, después seleccionaron una que analizaron por medio de la técnica de creatividad ficha de idea.

En la Tabla 1 se presentan los elementos que definen a la creatividad según el modelo CPS: los componentes, el enfoque, y las acciones y productos realizados en este estudio. El modelo se sustenta en las 4P's de la creatividad por sus palabras en inglés de persona, proceso, producto y ambiente (*person, process, product y press*).

Tabla 1. Las componentes, el enfoque y las acciones o productos de las 4P's de la creatividad en este estudio.

Elemento	Componentes	Enfoque	Acciones y productos
Persona: Características de las personas creativas	Flexibilidad, originalidad, elaboración, independencia, vitalidad, curiosidad, imaginación, tolerancia a la ambigüedad, complejidad, tomar riesgos, flujo, capacidad para hacer desde el caos al orden, alegría y sinceridad, conocimiento, capacidades y habilidades.	Percepción creativa personal y de colaboradores. Se necesita comprender tanto la creatividad personal como la creatividad de los que te rodean para contribuir a ser más exitoso en el uso deliberado de tu creatividad.	Percepción y valoración de personas como solucionadores de problemas creativos por medio de las encuestas realizadas y actividades en aula y en blog como laboratorio de ideas
Proceso: Descripción de operaciones que realizan dentro del proceso creativo	i) Preparación ii) Incubación iii) Iluminación iv) Verificación	i) investigar el problema en todas direcciones. ii) pensar en el problema de una manera no consciente o tan lógica. iii) la generación de la idea acertada, idónea, oportuna, pertinente, adecuada, indicada. iv) prueba de validez y reducción de la idea a una forma concreta o exacta.	Aplicación flexible de elementos idóneos de método CPS. Lluvia de ideas y ficha de idea. Recogida de datos y procesamiento de encuestas. Uso de blog Análisis y evaluación de productos (ficha de idea).

Elemento	Componentes	Enfoque	Acciones y productos
Producto: Resultados creativos	Escala semántica de productos creativos. Dimensiones: novedad, resolución y estilo.	Características requeridas en un producto para ser considerado creativo. Pueden ser tanto tangibles como intangibles. Ser concretos como producto o intangible como el aprendizaje o nuevo proceso o metodología	Generación de ideas (lluvia de ideas). Ficha de idea Blog Laboratorio de ideas con recursos en línea (Google y Wordpress).
Ambiente: Contexto o entorno	Recomendaciones para ayudar a dar forma a un ambiente propicio para la creatividad, la generación de ideas y la percepción creativa: 1. Proporcione libertad para probar nuevas formas de realizar tareas; permitir y alentar a cada individuo a alcanzar el éxito en un área y de una manera posible para él o ella; fomentar enfoques divergentes, proporcionando recursos y espacio en lugar de controles y limitaciones.	4. Desarrolle un sentimiento de control individual sobre lo que se debe hacer y cómo se puede hacer mejor al alentar a las personas a tener opciones e involucrarlas en los procesos de establecimiento de objetivos y toma de decisiones. 5. Apoye el aprendizaje y la aplicación de herramientas y habilidades específicas de CPS en el lugar de trabajo y en las tareas que sean apropiadas. 6. Proporcione una cantidad de tiempo adecuada para el cumplimiento de las tareas; proporcionar la cantidad correcta de trabajo en un marco de tiempo realista.	9. Respete la necesidad de un individuo de trabajar solo o en grupo. 10. Fomente proyectos autoiniciados. 11. Tolerar la complejidad y el desorden, al menos por un período. Incluso la mejor organización y planificación requiere objetivos claros y cierto grado de flexibilidad. 12. Cree un clima de respeto mutuo y aceptación entre las personas para que compartan, se desarrollen y aprendan cooperativamente. Fomentar un sentimiento de confianza interpersonal y trabajo en equipo.

Elemento	Componentes	Enfoque	Acciones y productos
	2. Señale el valor de las diferencias individuales, los estilos y los puntos de vista al permitir que las actividades, tareas u otros medios sean diferentes para varios individuos. 3. Establezca una atmósfera abierta y segura al apoyar y reforzar las ideas y respuestas inusuales de las personas cuando participan en el pensamiento creativo, exploratorio y crítico, desarrollo.	7. Proporcione un entorno no punitivo comunicándole que tiene confianza en las personas con las que trabaja. Reduzca la preocupación por el fracaso al usar los errores como positivos para ayudar a las personas a darse cuenta de los errores y cumplir con los estándares aceptables y proporcionar comentarios y opiniones afirmativas. 8. Reconozca algunos potenciales no reconocidos y no utilizados previamente. Desafiar a las personas a resolver problemas y trabajar en nuevas tareas de nuevas maneras. Hacer preguntas provocativas.	13. Fomente una alta calidad de las relaciones interpersonales y tener en cuenta factores como el espíritu de cooperación, la confrontación abierta y la resolución de conflictos, y el fomento de la expresión de ideas. 14. Asegúrese de tener el equipo, suministros y recursos adecuados que se necesitarán.

En cuanto al diseño del blog utilizado en el curso-taller, este se encuentra en la siguiente dirección electrónica: incubadoraideas.wordpress.com, al cual se accede por medio de las palabras que están tituladas en color blanco: pensamiento creativo. Ahí, se establecieron los vínculos a otras páginas significativas o portales en la red que se referencian por su enfoque requerido para la academia y, por su detallada y destacada caracterización de los perfiles académicos y profesionales que se esperan de los egresados universitarios, tanto en habilidades duras como blandas integradas interdisciplinariamente.

Con respecto al aula invertida se realizó el siguiente proceso. Inicialmente, los alumnos vieron videos en el blog, en clase o en casa, por medio de una computadora o por su teléfono celular inteligente. Posteriormente, los facilitadores resolvieron dudas individuales y ejercicios en la sesión presencial en grupos con trabajo cooperativo para resolver actividades de CPS. Se realizaron consultas, entregaron tareas, productos y actividades ya previstas tanto en el entorno virtual como en el presencial.

En cuanto a los pilares del aula invertida aquí implementada se encuentran; la cultura de aprendizaje, entorno flexible, personalización del aprendizaje y autonomía de aprendizaje.

Respecto al aprendizaje personalizado se consideraron los siguientes elementos: autonomía de aprendizaje, cultura de aprendizaje, trabajo individual y cooperativo, creación de itinerarios de trabajo colaborativo, tecnologías al servicio del aprendizaje, control de la gestión del tiempo y del trabajo, espacios o zona de trabajo flexibles, evaluación y medición del aprendizaje.

Diseño

En cuanto al diseño de la investigación, se trató de un estudio cuantitativo descriptivo correlacional.

Sujetos

Los sujetos participantes fueron seleccionados mediante muestreo probabilístico por conglomerado de una Universidad Politécnica de Puebla, en México. La muestra estuvo constituida por 64 estudiantes de las licenciaturas en Biotecnología (22), Logística y Transportes (9), Sistemas Computacionales (19) y Licenciatura en Pymes (14). Fueron 29 mujeres (45.3%) y 35 hombres (54.7%), con edades entre 18 y 21 años con una media de 18.7.

Instrumentos

Los instrumentos de recolección de datos fueron tres: dos cuestionarios propuestos por De la Torre (2007) para valorar la percepción creativa de los estudiantes y un instrumento para valorar la creatividad de una idea como producto (Besemer, 2000).

Con respecto a los cuestionarios, ambos constan de 14 ítems que se evalúan mediante una escala ordinal de 1 a 4 siendo 1 *nada*, 2 *poco*, 3 *mucho* y 4 *totalmente*. El primer cuestionario está basado en responder la pregunta ¿Qué cualidades, atributos o características creativas reconoces en ti mismo(a)? y contiene las cualidades: inconformista, natural y espontáneo, autonomía e independencia, constancia en lo que inicia, soñador e idealista, agilidad asociativa, sentido del humor, pensamiento independiente, adaptable a lo nuevo, abierto a experiencias, con intuición, curiosidad intelectual, imaginativo y sensible a problemas. El segundo cuestionario está basado en responder la pregunta ¿Qué rasgos atribuyes a las personas creativas? y contiene también catorce cualidades: no convencional, tenaz, ocurrente, de ideas variadas, emprendedor, preparado, ingenioso, inteligente, con iniciativa, independiente, sensible, original, intuitivo e imaginativo.

El instrumento para valorar la creatividad de las ideas realizadas por los estudiantes consistió en el propuesto por Susan P. Besemer llamado el Modelo de Análisis de Producto Creativo (CPAM por sus siglas en inglés; Besemer, 2000). El modelo se compone de tres dimensiones o factores que se relacionan con los tres indicadores más importantes de los productos de creatividad. Luego, cada factor se divide en categorías o facetas que describen mejor el producto (Figura 1). El modelo ha tenido pruebas de validez y confiabilidad con muchos tipos diferentes de productos en el transcurso de varios años (e.g., Besemer, 2000).

La evaluación de cada aspecto se realizó por medio de una escala ordinal con valores de 1 a 3, siendo 1 *nivel inferior*, 2 *nivel intermedio* y 3 *nivel superior*. Las ideas fueron plasmadas en una presentación en Power Point por medio de una ficha de idea la cual es una técnica de creatividad que consta de: título de la idea, descripción, dibujo o esquema, ventajas, inconvenientes, variantes, métodos de realización, problemas planteados, respuesta y conclusión (Benoit-Cervantes, 2011).

Figura 1. Modelo de Análisis de Producto Creativo (Besemer, 2000).

Novedad: Grado de novedad del producto en términos de nuevos procesos, técnicas, materiales o conceptos incluidos.	Resolución: Grado en que el producto se ajusta o satisface las necesidades de la situación problemática.	Elaboración y síntesis: Grado en que el producto combina elementos diferentes en un desarrollo refinado y coherente.
Germinal: Es probable que el producto sugiera productos creativos futuros adicionales. Original: El producto es inusual o se ve con poca frecuencia en un universo de productos hechos por personas con experiencia y capacitación similares. Transformacional: El producto es tan revolucionario que fuerza un cambio en la forma en que los usuarios, oyentes o espectadores perciben la realidad.	Adecuado: El producto responde suficientemente a las necesidades de la situación problemática. Apropiado: La solución se ajusta a la situación problemática. Lógico: El producto o solución sigue las reglas aceptadas y entendidas para la disciplina. Útil: El producto tiene aplicaciones claras y prácticas. Valioso: El producto es juzgado como valioso por los usuarios, oyentes o espectadores porque satisface una necesidad financiera, física, social o psicológica.	Atractivo: El producto llama la atención del espectador, oyente o usuario. Complejo: El producto o solución contiene muchos elementos en uno o más niveles. Elegante: La solución se expresa de forma refinada y discreta. Expresivo: El producto se presenta de manera comunicativa comprensible. Orgánico: El producto tiene un sentido de totalidad o integridad. Bien elaborado: El producto ha sido trabajado y reelaborado con cuidado para desarrollarlo en el nivel más alto posible para ese momento.

Procedimiento

La investigación se realizó durante la implementación del curso semipresencial en el periodo comprendido entre agosto y diciembre de 2018. Se efectuaron cuatro sesiones presenciales de dos horas de duración cada una, de trabajo activo en el aula con la integración de la metodología aula invertida (García, 2018). El resto del trabajo se realizó en el blog en un periodo de treinta días.

Tanto en la sesión de apertura como en la de cierre los estudiantes respondieron respectivamente los dos cuestionarios y en todas las sesiones se desarrollaron los temas previstos.

En el análisis de datos se compararon los resultados de los dos cuestionarios aplicados en las encuestas de entrada y salida, además, se hizo un análisis correlacional de las dimensiones de la idea creativa. Se utilizó el estadístico ρ de Sperman ya que los datos no mostraron evidencia de normalidad. El paquete estadístico utilizado para el análisis de los datos fue R en su versión 3.6.1 y Excel.

Resultados

La exposición de los resultados está organizada como sigue. Primero se presentan los análisis de los cuestionarios de entrada y salida y después se analiza la creatividad del producto realizado por los estudiantes por medio de la escala de Besemer (2000, 2006).

Con respecto al análisis de entrada y salida del cuestionario que respondió a la pregunta ¿Qué cualidades, atributos o características creativas reconoces en ti mismo(a)?, se puede decir lo siguiente. En la encuesta de entrada, los atributos que tuvieron las cuatro medias más altas fueron abierto a experiencias ($M = 3.6$, $DE = .6$), soñador e idealista ($M = 3.46$, $DE = .64$), adaptable a lo nuevo ($M = 3.36$, $DE = .75$) e imaginativo ($M = 3.32$, $DE = .83$).

Con respecto a las correlaciones, como se puede observar en la Tabla 2, solo hubo dos correlaciones positivas moderadas (Cohen, Manion, y Morrison, 2007) con valores $\rho \geq .5$ y $p < .001$ y, abierto a experiencias con adaptable a lo nuevo ($\rho = .61$) y agilidad asociativa con intuición ($\rho = .52$). En particular, los aspectos abiertos a experiencias con adaptable a lo nuevo que tuvieron la correlación más alta también tuvieron las medias más altas, indicando que son aspectos de creatividad que los estudiantes consideraron poseer. Con respecto a la segunda correlación entre agilidad asociativa ($M = 2.88$, $DE = .72$) con intuición ($M = 3.25$, $DE = .72$), se puede observar que el aspecto con intuición tuvo una media arriba de tres, lo cual indica que la mayoría de los estudiantes consideró poseerlo en un grado alto y se vinculó con agilidad asociativa.

Tabla 2. Encuesta de entrada.
¿Qué cualidades, atributos o características creativas reconoces
en ti mismo(a)?

Aspecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1. Inconformista	1												
2. Natural y espontáneo	.41	1											
3. Autonomía e independencia	.21	.38	1										
4. Constancia en lo que inicia	.12	.37	.49	1									
5. Soñador e idealista	.08	.38	.42	.38	1								
6. Agilidad asociativa	.18	.24	.31	.28	.43	1							
7. Sentido del humor	-.12	.12	.13	.10	.33	.28	1						
8. Pensamiento independiente	.16	.44	.41	.36	.41	.19	.19	1					
9. Adaptable a lo nuevo	.08	.16	.45	.28	.26	.33	.24	.18	1				
10. Abierto a experiencias	.18	.45	.48	.28	.43	.35	.26	.36	.61	1			
11. Con intuición	.42	.46	.41	.40	.37	.52	.25	.36	.23	.45	1		
12. Curiosidad intelectual	.20	.40	.36	.35	.41	.43	.11	.25	.28	.43	.45	1	
13. Imaginativo	.10	.40	.22	.30	.39	.34	.37	.24	.21	.17	.43	.38	1
14. Sensible a problemas	.15	.36	.18	.00	.21	-.03	.21	.13	.15	.22	.19	.06	.14

En el cuestionario de salida, los atributos que tuvieron las cuatro medias más altas fueron soñador e idealista ($M= 3.45$, $DE = .64$), abierto a experiencias ($M= 3.4$, $DE = .64$), pensamiento independiente ($M= 3.34$, $DE = .65$) e imaginativo ($M= 3.29$, $DE = .81$). Se observa que los tres atributos: soñador e idealista, abierto a experiencias e imaginativo se presentaron tanto en la encuesta de entrada como de salida con los valores más altos, por lo que podemos afirmar que son rasgos que los estudiantes consideran tener, los cuales no se modificaron por haber tomado el taller.

El análisis correlacional mostró varias correlaciones positivas moderadas con valores $\rho \geq .5$, $p < .001$ como se puede observar en la Tabla 3. Los más altos se dieron entre abierto a experiencias con adaptable a lo nuevo ($\rho = .61$), curiosidad intelectual con pensamiento independiente ($\rho = .54$), autonomía e independencia con abierto a experiencias ($\rho = .52$) y entre autonomía e independencia con pensamiento independiente ($\rho = .5$). Se repite tanto en la encuesta de entrada como de salida la correlación positiva moderada entre los atributos abierto a experiencias con adaptable a lo nuevo ($M= 3.27$, $DE = .87$) que también poseen medias muy altas indicando puntajes altos en estos aspectos por parte de los estudiantes. Esto indica que los estudiantes se consideraron abiertos a experiencias y adaptables a lo nuevo y esto no se modificó por la acción del curso-taller, es decir, son aspectos muy arraigados en los estudiantes. Estos aspectos son componentes indispensables y favorecedores de la persona creativa.

Tabla 3. Encuesta de salida.
¿Qué cualidades, atributos o características creativas
reconoces en ti mismo(a)?

Aspecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1. Inconformista	1												
2. Natural y espontáneo	.29	1											
3. Autonomía e independencia	-.08	.29	1										
4. Constancia en lo que inicia	-.10	.30	.38	1									
5. Soñador e idealista	.06	.20	.12	.21	1								

Aspecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6. Agilidad asociativa	.17	.38	.19	.25	.45	1							
7. Sentido del humor	.22	.25	.34	.26	.02	.46	1						
8. Pensamiento independiente	.05	.15	.50	.23	.12	.16	.14	1					
9. Adaptable a lo nuevo	.12	.43	.42	.30	.24	.21	.21	.12	1				
10. Abierto a experiencias	-.11	.34	.52	.24	.24	.12	.08	.27	.61	1			
11. Con intuición	.18	.43	.28	.36	.10	.18	.08	.40	.20	.33	1		
12. Curiosidad intelectual	.10	.33	.37	.24	.33	.17	-.08	.54	.15	.29	.36	1	
13. Imaginativo	.02	.18	.04	.38	.38	.25	.01	.14	.20	.16	.20	.37	1
14. Sensible a problemas	.24	.15	.08	.17	.15	.21	.01	.25	.15	-.07	.06	.40	.26

Con respecto al segundo análisis, el del cuestionario con la pregunta ¿Qué rasgos atribuyes a las personas creativas? se obtuvo lo siguiente. En la encuesta de entrada, los atributos que tuvieron las cuatro medias más altas fueron imaginativo ($M = 3.52$, $DE = .67$), de ideas variadas ($M = 3.49$, $DE = .65$), con iniciativa ($M = 3.48$, $DE = .61$) y original ($M = 3.44$, $DE = .68$). En las correlaciones, solo hubo una correlación positiva moderada con un valor $\rho \geq .5$ y $p < .001$ entre ingenioso ($M = 3.35$, $DE = .76$) con ideas variadas ($\rho = .58$). Ambos aspectos poseen medias altas.

En la encuesta de salida, los atributos que tuvieron las cuatro medias más altas fueron de ideas variadas ($M = 3.42$, $DE = .70$), imaginativo ($M = 3.40$, $DE = .76$), emprendedor ($M = 3.27$, $DE = .80$) con iniciativa ($M = 3.26$, $DE = .69$).

Con respecto a las correlaciones, hubo varias correlaciones positivas moderadas con y como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Correlaciones positivas moderadas con sus respectivos valores de ρ .



Finalmente, con respecto al análisis de creatividad del producto realizado por los estudiantes bajo la escala de Besemer (2000, 2006), se presenta inicialmente en la Tabla 4 la distribución de medias y desviación estándar de cada categoría. Los valores más altos se presentaron en la dimensión resolución: lógico, útil, valioso y apropiado, con valores de media entre 2.33 y 2.66 (en la escala de evaluación ordinal de 1 a 3). Con respecto a la dimensión elaboración y síntesis, todas las categorías tuvieron medias en el rango de 2.08 a 2.5, lo cual indica que estas categorías también fueron bien evaluadas. Los valores más bajos se presentaron en la dimensión de novedad, donde las medias no llegaron al nivel 2, quedando entre 1.83 y 1.96, indicando evaluaciones bajas y medias.

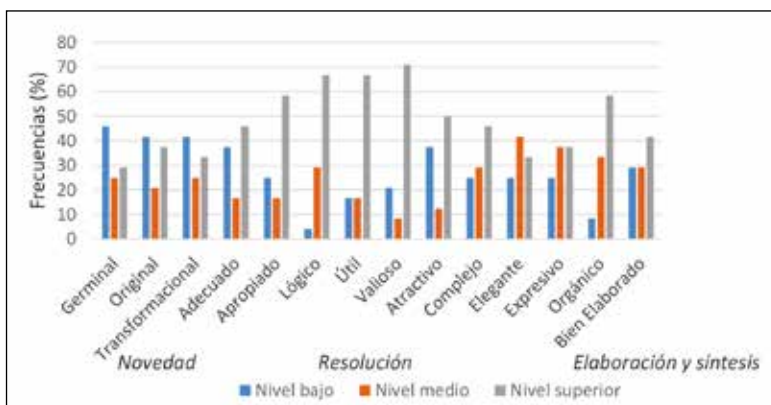
Tabla 4. Características generales de las evaluaciones de las fichas de idea.

Categoría	M	DE
<i>Novedad</i>		
Germinal	1.83	.87
Original	1.96	.91
Transformacional	1.96	.88
<i>Resolución</i>		
Adecuado	2.08	.93
Apropiado	2.33	.87
Lógico	2.6	.58
Útil	2.5	.78
Valioso	2.5	.83

Categoría	M	DE
<i>Elaboración y síntesis</i>		
Atractivo	2.13	.95
Complejo	2.08	.83
Elegante	2.08	.78
Expresivo	2.13	.8
Orgánico	2.5	.66
Bien elaborado	2.13	.85

A continuación, se presenta la distribución de frecuencias distribuidas por dimensión (Figura 3). Se confirma que las frecuencias más altas se dieron en las categorías: valioso, lógico, útil y apropiado de la dimensión resolución, y orgánico de la dimensión elaboración y síntesis. En las categorías de novedad, los valores que más se repitieron corresponden al nivel bajo y en segundo lugar el nivel alto, es decir, las ideas se evaluaron preferentemente como de bajo o de alto nivel.

Figura 3. Frecuencias en los niveles de desempeño de la ficha de idea de los participantes.



El análisis correlacional se muestra en la Tabla 5. Los resultados con valores $\rho \geq .6$ y $p < .001$ se muestran en negrita. El valor más alto corresponde a las categorías original con atractivo ($\rho = .88$) indicando una correlación

positiva alta (Cohen, Manion y Morrison, 2007). Las categorías original con transformacional (novedad) y útil con valioso (resolución) también mostraron una correlación alta positiva ($\rho = .81$).

Tabla 5. Correlaciones entre las categorías evaluadas en ideas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1. Germinal	1												
2. Original	.76	1											
3. Transformacional	.78	.81	1										
4. Adecuado	.40	.31	.27	1									
5. Apropiado	.37	.29	.38	.77	1								
6. Lógico	.04	-.03	-.06	.38	.26	1							
7. Útil	.64	.52	.57	.60	.70	.34	1						
8. Valioso	.60	.55	.59	.56	.72	.23	.87	1					
9. Atractivo	.66	.87	.8	.33	.37	.09	.56	.63	1				
10. Completo	.41	.64	.68	-.02	.02	-.01	.23	.22	.74	1			
11. Elegante	.54	.38	.39	.29	.26	.07	.50	.54	.40	.17	1		
12. Expresivo	.28	-.05	.08	.28	.05	.20	.32	.23	-.08	-.10	.47	1	
13. Orgánico	.16	-.11	0	.50	.23	.52	.25	.24	.10	-.03	.43	.29	1
14. Bien Elaborado	.38	.23	.42	.59	.59	.28	.62	.58	.36	.15	.31	.30	.5

Reflexiones

Nada es más interesante para los humanos que la actividad humana y la actividad humana más característica es resolver problemas; pensar con un propósito, idear tiene significado cuando hay un fin deseado, dijo Polya (1945, citado por Isaksen et al., 2011).

Los resultados obtenidos indican que los estudiantes se ven a sí mismos como soñadores e idealistas, abiertos a experiencias, imaginativos y adaptables a lo nuevo. La correlación más alta que se dio, tanto en la encuesta de entrada como de salida fue entre los atributos: abierto a experiencias con adaptable a lo nuevo. Con respecto a cómo ven a las personas

creativas, los estudiantes contestaron que imaginativos, de ideas variadas, con iniciativa y originales. Tanto en la encuesta de entrada como de salida se presentó una correlación media alta entre ingenioso y de ideas variadas, pero en la encuesta de salida aumentó el número de correlaciones significativas, lo cual indica que el taller promovió el considerar otras cualidades atribuibles a las personas creativas. Con respecto a la valoración de las ideas creativas, las frecuencias más altas se dieron en las categorías: valioso, lógico, útil y apropiado y orgánico. El análisis correlacional mostró correlaciones positivas altas entre las categorías original con atractivo; original con transformacional, y útil con valioso.

En cuanto al trabajo en el aula, los procesos de pensamiento creativo en la solución de un problema requieren de la creatividad, que se ha convertido en una habilidad crítica y debe incluirse en el proceso de aprendizaje en instituciones educativas (Wu, Siswanto y Mahfud, 2018). Los investigadores y profesionales se han preocupado por estudiar métodos de aprendizaje, especialmente se han enfocado en mejorar las herramientas y los métodos utilizados para apoyar la producción de ideas (Dean, Hender, Rogers y Santanen, 2006; Tran, Ho, Mackenzie y Le, 2017; Richardson y Mishra, 2018; Davies, Jindal-Snape, Collier, Digby, Hay y Howe, 2013), ya que la capacidad de generar ideas creativas es fundamental para promover la innovación, para fomentar el desarrollo del pensamiento creativo y su sistematización para las capacidades en la resolución de problemas.

Específicamente, por parte de los facilitadores se distribuyeron las actividades estratégicas en el aula, logrando la concreción de la elaboración de la ficha de idea, considerada como el antecedente de un proyecto viable, con un alcance y perspectiva definido y evaluado con la escala semántica de productos creativos. El aprendizaje de técnicas creativas y su aplicación como CPS permitió obtener un producto entregable y evaluable.

Por otra parte, de la reflexión y análisis como actividad metacognitiva mediante las encuestas que se refieren a las cualidades personales y ajenas de una persona creativa en relación a los cuestionamientos presentados en la sección de percepción creativa, y el propio proceso del curso-taller, llevaron a obtener el análisis estadístico descriptivo, la correlación y la valoración del producto creativo. La resolución de problemas se refiere a tratar de lograr alguna solución desde CPS.

Al respecto, Schoenfeld (2013) sugiere que, cuando no existe un método conocido para el individuo, éste intenta alcanzar esa alternativa de

solución y pone en juego sus conocimientos, estrategias, monitoreo y autorregulación —un aspecto de la metacognición— y sus creencias.

Por ello, se requiere orientar las actividades que originan procesos de pensamiento creativo en los aprendices, según CPS, que les permitan transformar sus conocimientos previos, construir su propio saber y desarrollar sus habilidades a través del proceso de hallar soluciones creativas a problemas de su contexto.

Con respecto a la propuesta del taller, se propuso una forma de realizar la transferencia y aplicación de elementos de CPS, de la creatividad de las ideas al salón de clase, con contenidos y técnicas que promueven la generación de ideas creativas, en un ambiente de aprendizaje dentro y fuera del aula, como una aproximación a la didáctica de la creatividad de las ideas y su evaluación.

La propuesta toma en cuenta los elementos que apoyan el desarrollo de habilidades creativas. Estos elementos son la disponibilidad de materiales apropiados, el trabajar fuera del aula o escuela, las oportunidades para la colaboración entre pares, la planificación no prescriptiva y el desarrollo del profesionalismo docente como asesores creativos en la metodología CPS.

Con respecto al segundo punto de la discusión referente a los resultados de la implementación del taller, los estudiantes experimentaron un proceso creativo de generación y desarrollo de sus ideas. La configuración y el diseño del espacio físico, las relaciones, los recursos y apoyos y el diseño del entorno en ese contexto demostraron ser un soporte clave para la creatividad, de acuerdo con Beghetto y Kaufman (2014) e Isaksen et al. (2011).

Las fichas de idea desarrolladas por los estudiantes son válidas como productos de un proceso creativo como establece Besemer (2006), quien también afirma que la creatividad es la producción de una respuesta, producto o solución nueva y apropiada para una tarea abierta.

Aunque la respuesta debe ser nueva, no puede ser simplemente diferente; debe ser apropiada para la tarea que se debe completar o para resolver el problema; es decir, debe ser valiosa, correcta, factible o de alguna manera apropiada para un objetivo particular.

Por otra parte, al usarse técnicas y herramientas de generación de ideas se obtuvieron mejores resultados en la dinámica de trabajo asistida en línea como laboratorio de ideas al eliminar el problema de la comunicación e interacción ya que, al irse produciendo pudieron compartirse entre todos los participantes sin demora al mismo tiempo, pues se compartían las tablas

que contenían las ideas generadas trabajando directamente con la plataforma de documentos y procesador de textos en línea de Google, algunos desde sus computadoras y la mayoría desde sus teléfonos celulares, conectados en línea, compartiendo y escribiendo sus ideas propuestas.

El mismo éxito de acceso y comunicación se tuvo en las actividades y tareas diseñadas para CPS en el blog y con los accesos a las encuestas por medio de los hipervínculos.

En la generación de ideas en el aula, el procesador de textos de la compañía Google permitió la producción de un conjunto más amplio de posibilidades, según CPS recomienda. En ella se puede mover, clasificar y evaluar de manera más eficiente. Se pueden colocar opciones en el orden en que se generan, se pueden clasificar a medida que se recopilan. Esta herramienta permitió a los participantes construir sobre las alternativas de los demás, inspirarse o ampliar ideas compartidas.

La redacción de ideas con esta aplicación puede ser particularmente útil para cambiar el ritmo de una sesión de generación de ideas grupales, al permitir que las personas contribuyan a los esfuerzos de generación de ideas de una manera cómoda y a su propio ritmo, y apoyar a los variados participantes. Asimismo, en cuanto a necesidades de tiempo de reflexión Isaksen et al. (2011) afirman:

Se puede proporcionar a las personas tiempo extra para la reflexión y la incubación de ideas, manteniendo un flujo de posibilidades (...), ayuda a estimular el pensamiento nuevo y original sin interrumpir el flujo existente de las ideas. En algunas situaciones, esto podría ser todo lo necesario para estimular nuevas posibilidades (p. 215).

Conclusiones

La innovación educativa sólo es posible si se tiene como aliada a la creatividad. Son articuladas cuando aparecen en una clase de trabajo docente que va de lo simple a lo complejo, de la calidad a la excelencia. Resulta interesante reflexionar qué pasaría si se asociara la creatividad a los planes y programas de estudio para intentar formar alumnos con una personalidad innovadora plenamente desarrollada, con diversidad de experiencias creativas que faciliten al estudiante la adopción de una posición transformadora en cuanto al conocimiento que está construyendo.

Asimismo, para la solución creativa de problemas con pluralidad metodológica y gran flexibilidad se reflejó la contribución sistemática de CPS, como enuncia De la Torre (2007), acercando la clase por medio de TIC, en la modalidad que sea, a las propias necesidades de la vida académica. Una vez generada la idea, seleccionada, analizada y evaluada, trabajar en ella conformando proyectos que rebasen los límites de desarrollo próximo, que sobrepase lo ya conocido, que cuente con ideas originales e innovadores.

Con el aprendizaje de la metodología CPS y la reflexión sobre la propia percepción creativa, se pretende, al mismo tiempo, observar en uno mismo el proceso seguido y las condiciones que lo acompañaron, así como valorar el resultado obtenido.

En concreto, se busca favorecer la formación de estudiantes creadores, inventores e innovadores conscientes del papel que puede jugar el pensamiento creativo en su vida académica y su futuro laboral como profesionistas.

En este trabajo se mostraron los resultados de un curso-taller para estudiantes STEM y la muestra de una integración y transferencia de metodologías creativas emergentes tanto para el docente, como en los estudiantes con impacto en el desarrollo del pensamiento creativo, al trabajar en un sistema semipresencial asistido por TIC. El objetivo previsto y alcanzado del trabajo, consistió en promover y valorar la generación y análisis de ideas creativas en estudiantes STEM para la solución de problemas y el desarrollo de pensamiento creativo.

Los resultados se analizaron bajo un enfoque cuantitativo descriptivo correlacional mediante la aplicación de tres instrumentos: dos cuestionarios y la valoración de ideas mediante un instrumento con catorce atributos distribuidos en tres dimensiones: novedad, resolución y, elaboración y síntesis que conforman la matriz semántica CPAM.

Asimismo, los resultados evidenciaron que los atributos referentes a la dimensión resolución fueron los que tuvieron más altas calificaciones, seguidos por los de elaboración y síntesis. Los atributos referentes a novedad fueron los que peor se desempeñaron. Con respecto a las correlaciones, las dimensiones: original con atractivo y original con transformacional tuvieron correlaciones positivas altas.

Los resultados de la encuesta que analizó cómo se veían ellos mismos en cuanto a ser creativos muestran que se valoraron como soñadores, idealistas, abiertos a experiencias e imaginativos, tanto en la encuesta de entrada como en la de salida. Con respecto al cuestionario que analizó

cómo los estudiantes ven a una persona creativa, se observó que los consideran imaginativos, de ideas variadas y con iniciativa. Con respecto a las correlaciones en la encuesta de entrada se dio entre ingenioso con ideas variadas, pero en la de salida aumentó el número de correlaciones significativas con valores de $p \geq .5$, lo cual indica que el taller promovió el considerar otras cualidades atribuibles a las personas creativas. Para futuras investigaciones, se considera que es de vital importancia el desarrollo de la didáctica de la creatividad en la resolución de problemas, especialmente en estudiantes de matemáticas.

Referencias

- Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* (Complete ed.). New York: Longman.
- Armstrong, P. (2020). *Blooms taxonomy*. Center for Teaching, Vanderbilt University. Recuperado de: <https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/blooms-taxonomy/>
- Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2014). Classroom contexts for creativity. *High Ability Studies*, 25(1), 53-69. <http://dx.doi.org/10.1080/13598139.2014.905247>
- Benoit-Cervantes, G. (2011). *Innovación*. México: Grupo Editorial Patria.
- Besemer, S. P. (2000). Creative product analysis to foster innovation. *Design Management Journal (Former Series)*, 11(4), 59-64.
- _____, (2006). *Creating products in the age of design: how to improve your new product ideas!* Stillwater, OK: New Forums Press.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. New York: Routledge.
- Csikszentmihalyi, M. (2016). *Fluir*. México: Kairos.
- Davies, D., Jindal-Snape, D., Collier, C., Digby, R., Hay, P., & Howe, A. (2013). Creative learning environments in education. A systematic literature review. *Thinking skills and creativity*, 8, 80-91.
- De la Torre, S. (2007). *Creatividad aplicada: recursos para una formación creativa*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.
- Dean, D. L., Hender, G. M., Rogers, T. L., & Santanen, E. L. (2006). Identifying Good Ideas: Constructs and Scales for Idea Evaluation. *Journal*

- of the Association for Information Systems, 7(10), 646-699. Recuperado de: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1413393
- García, B. P. D. (2018). *Aprendizaje multi-nivel autónomo un nuevo tipo de flipped classroom*. España: UdC.
- Haolader, F. A., Ali, M. R., & Foysol, K. M. (2015). The taxonomy for learning, teaching and assessing: Current practices at polytechnics in Bangladesh and its effects in developing students' competences. *International journal for research in vocational education and training*, 2(2), 99-118.
- Isaksen, S. G., Dorval, K. B., & Treffinger, D. J. (2011). *Creative approaches to problem solving: A framework for innovation and change*. California, USA: Sage Publications.
- Kaufman, J. C., Plucker, J. A., & Baer, J. (2008). *Essentials of creativity assessment* (Vol. 53). New Jersey: USA: John Wiley & Sons.
- Richardson, C., y Mishra, P. (2018). Learning Environments that support student creativity: Developing the SCALE. *Thinking Skills and Creativity*, 27, 45-54. doi: 10.1016/j.tsc.2017.11.004
- Schoenfeld, A. H. (2013). *Cognitive science and mathematics education*. New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203062685>
- Tran, T. B. L., Ho, T. N., Mackenzie, S. V., y Le, L. K. (2017). Developing assessment criteria of a lesson for creativity to promote teaching for creativity. *Thinking Skills and Creativity*, 25, 10-26. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2017.05.006>
- Treffinger, D. J., & Selby, E. C. (2008). *Comprendiendo y desarrollando la creatividad: una aproximación práctica*. *Revista de Psicología*, XXVI (1), 7-21.
- Wu, M., Siswanto, I., & Mahfud, T. (2018). The role of cognitive and affective behavior in predicting the creative thinking of university students. *International Journal of Innovation, Creativity and Change*, 4(2), 90-103.

Datos de autores:

Jorge Alfredo Lombardero-Chartuni, Universidad de Guadalajara (México).

Estela Juárez-Ruiz, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).

Correos-e: jlombard2020@gmail.com, estela.juarez@correo.buap.mx, lidia.hernandez@correo.buap.mx

CAPÍTULO 3

Estudio exploratorio de la comprensión del concepto transformación lineal en alumnos universitarios

Elizabeth Bañuelos Aguilar
Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Resumen

La enseñanza tradicional, basada en la exposición formal, hace que la mayoría de los estudiantes no puedan articular los conocimientos previos y no sean capaces de comprender el alcance de la definición abstracta de transformación lineal (TL). El principal propósito del presente trabajo fue realizar un estudio exploratorio de la comprensión del concepto de TL con un grupo de estudiantes para detectar las dificultades de comprensión en un curso de Álgebra Lineal (AL) ofrecido en la FCFM-BUAP. A partir de las dificultades encontradas y al hacer una revisión de los trabajos actuales sobre didáctica de AL, en un segundo grupo se hace una intervención, que consistió en realizar una estrategia didáctica para subsanar algunos problemas de aprendizaje del concepto TL y finalmente se comparan los resultados de ambos grupos. Con este trabajo buscamos mejorar la comprensión del concepto TL mediante una propuesta de enseñanza que ayude a los estudiantes a relacionar conceptos, ayudándose además del uso algún libro para facilitar el tránsito a una presentación abstracta.

Palabras clave: Álgebra lineal, transformación lineal, comprensión, puente cognitivo.

Introducción

El Álgebra Lineal (AL) es una materia que se imparte en al Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, como parte importante en el área de álgebra, así como en computación, electrónica e ingenierías, aunque es

común que se le considere difícil de aprender a nivel formal. Algunos estudiantes se enfrentan a obstáculos durante el desarrollo de los procesos cognitivos y conceptuales que implican su estudio, situación que puede deberse al elevado grado de abstracción de sus temas. Siendo uno de ellos el de transformación lineal (TL), el cual puede parecer un concepto claro y sencillo, sin embargo, suele ser complejo para los estudiantes; ya que por ejemplo piensan que muchas funciones son lineales.

A medida que el curso de AL avanza los estudiantes en algún momento se confunden al pasar de $\mathbb{R}^n$ y matrices a trabajar en un espacio vectorial abstracto, tienen dificultades con ejercicios donde se pide hacer demostraciones en cualquier espacio, o ejercicios con la definición de TL, es decir, que lo que parecía sencillo se vuelve inesperadamente complicado y abstracto. Además, les resulta difícil captar el proceso de generalización, por ejemplo, pasar de las demostraciones de teoremas en $\mathbb{R}^n$ a trabajar de manera abstracta: axiomas, definiciones, teoremas y su demostración.

El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que se considera importante en varias profesiones por sus múltiples aplicaciones a la solución de muy diversos problemas, es por eso que la mayoría de las universidades contienen en sus programas al menos un curso de esta disciplina. En este contexto, la forma de enseñar el AL de una manera más efectiva es obviamente un problema interesante, hay que considerar las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. El trabajo del docente es guiar o facilitar al estudiante el acceso a una presentación formal, consolidando las partes básicas; sin olvidar que el estudiante puede consultar su libro. Es imposible que el docente explique todo, el alumno debe hacer trabajo independiente, debe prepararse para cursos posteriores.

El principal propósito del presente trabajo fue realizar un estudio exploratorio de la comprensión del concepto de transformación lineal con un grupo de estudiantes para detectar sus dificultades de comprensión en un curso de Álgebra Lineal ofrecido en la FCFM- BUAP.

En nuestra opinión, tal análisis no puede realizarse si se separan tajantemente los conocimientos previos de cursos anteriores y los libros usados como apoyo para impartir el curso, los libros de texto han cambiado con respecto a ediciones previas. En la FCFM se imparte un curso previo de geometría analítica y un curso de teoría de ecuaciones (plan 2016). En otras licenciaturas se debe considerar si los alumnos tienen experiencia con vectores, de no ser así, sería recomendable consultar libros como *Geome-*

tría vectorial de Rene Benítez, *Geometría analítica moderna* de William Wooton o *Álgebra Superior* de Humberto Cárdenas que ayudarán a reforzar conocimiento previo de vectores.

El objetivo es identificar y clasificar las principales dificultades y tipo de error asociado a la solución de ejercicios típicos que aparecen en los libros de texto.

Basándonos en el trabajo de Rodríguez (2011) hacemos la clasificación de las soluciones a los ejercicios propuestos en el instrumento aplicado. Y haciendo una revisión de los trabajos actuales sobre didáctica del Álgebra Lineal, en un segundo grupo se hace una intervención que consiste en realizar una sugerencia didáctica para subsanar algunos problemas de aprendizaje del concepto TL. Finalmente, se comparan los resultados de ambos grupos.

El estudio de estos problemas se llevó a cabo a través del seguimiento de dos grupos de Álgebra Lineal no seleccionados, en el que los sistemas de ecuaciones y su solución juegan un papel importante como conocimientos previos. Buscamos mejorar la comprensión del concepto TL mediante el diseño de una propuesta de enseñanza que ayude a los estudiantes a relacionar conceptos mediante el señalamiento explícito, de cómo, a partir de ejemplos previos de espacio vectorial, se generaliza de manera axiomática para dar la definición de espacio vectorial y otros conceptos, y que más adelante al resolver ejercicios el alumno deberá tener presente que hay muchos ejemplos concretos de espacio vectorial ($\mathbb{R}^3$, polinomios, matrices), donde puede aplicar las definiciones abstractas, con pequeños cambios, y esto no lo debe confundir.

La presentación del trabajo está dada en dos partes. En la primera parte se presentan los resultados del diagnóstico realizado a un primer grupo y en la segunda parte la intervención correspondiente a un segundo grupo.

Marco Teórico

En 1990, dada la problemática que se presentaba sobre el aprendizaje del AL, se forma un comité en USA, denominado Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG), que discutió asuntos relacionados con los problemas de la enseñanza y aprendizaje del AL. He hizo un conjunto de recomendaciones para mejorar el currículo de esta materia. LACSG fue conformado por David Carlson, Charles R. Johnson, David C. Lay y A. Duane Porter

(1997), para mejorar el currículo de Álgebra Lineal. Son ellos quienes recomiendan apartarse de la abstracción y acercarse a un curso más concreto, basado en matrices. Dicho grupo tiene influencia en la redacción de los libros actuales, donde se nota claramente el enfoque hacia las aplicaciones de AL en muchas ramas de las ciencias y la ingeniería.

La enseñanza del AL y, sobre todo, las dificultades de los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta disciplina han recibido la atención de varios investigadores que están trabajando sobre la didáctica del AL. En el libro *On the teaching linear álgebra*, editado por Jean Luc Dorier, aparecen capítulos elaborados por varios autores, en particular el capítulo: El obstáculo del formalismo en álgebra lineal de Robert, Robinet y Rogalski. La naturaleza abstracta del AL y el uso de diferentes tipos de lenguajes son algunas de las fuentes de obstáculos que se identifican en estas investigaciones. No es sorprendente que AL sea muy abstracta y difícil para la mayoría de los estudiantes.

En 1997 Dubinsky publicó un artículo donde advertía que las dificultades que tienen los estudiantes con los conceptos de AL no pueden y no deben evitarse concentrarse en los aspectos computacionales de esta materia y eludiendo la abstracción. Dubinsky sostenía que la abstracción y el formalismo son la esencia de las matemáticas y por tanto, se debe encontrar maneras de facilitar a los estudiantes experiencias agradables cuando los encuentran y durante su iniciación en la disciplina.

Los estudios que se relacionan con nuestro trabajo son los siguientes: La investigación de Rodríguez (2011), explica que una de las dificultades a tener en cuenta es la falta de interés de los estudiantes en el aprendizaje, como también el formalismo en cada definición que se les presenta. Tiene por objetivo realizar un diagnóstico sobre el curso AL desarrollado por la Universidad de los Andes, y a partir de este diagnóstico determinar cuáles eran las principales dificultades que se presentaban en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho curso.

El AL abstracta supone que el alumno es capaz de usar varios lenguajes y representaciones con facilidad. Los docentes y los libros de texto se mueven entre estos lenguajes y representaciones con fluidez, pero no se les da tiempo a los estudiantes comprender las definiciones, teoremas y demostraciones en un enfoque formal. Es un error suponer que los estudiantes comprenderán conforme pasa el curso, sin mayores contratiempos. La mayoría de los estudiantes no tienen el marco cognitivo para realizar

el cambio de representación con facilidad y por ello tienen dificultades al realizar los ejercicios cuando consideramos diferentes espacios vectoriales, no hacen los cambios necesarios.

Otra investigación que revisamos es la de Ulicab y Oktac (2006) que tiene por título “Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica” la cual tiene por objetivo principal observar las conexiones que los estudiantes desarrollan entre conceptos y su naturaleza. En su trabajo tratan de explicar por qué los estudiantes no tienen éxito en la resolución de problemas donde piden determinar una TL por medio de las imágenes de los vectores de una base.

En Molina (2007), “Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico” se menciona que un rasgo característico del AL es el alto nivel de abstracción. Lo anterior se traduce en un problema para los estudiantes, los cuales habían terminado una licenciatura en enseñanza de las matemáticas, ellos tienden a olvidar dichos conceptos vistos desde un enfoque formal, como es el caso de las propiedades de la TL.

A pesar de la abundancia en investigación sobre el tema de TL, no se encuentran trabajos que se aboquen a los aspectos cognitivos relacionados con la TL en alumnos que estudian en una facultad de ciencias, esta investigación pretende contribuir justamente en esta dirección.

En lo que se refiere a las causas de las dificultades para los estudiantes se distinguen dos: la naturaleza del AL (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para su comprensión (dificultades cognitivas). Frente a estas dificultades proponemos para un segundo grupo “crear puentes cognitivos” para facilitar el paso a la abstracción (Díaz, 2002).

Vinner (1991) señala que la solución de los problemas detectados en el aprendizaje y la enseñanza del AL va más allá de la elaboración de nuevos libros de texto y de reformar el currículo. Se requiere prestar atención a los procesos de pensamiento de los estudiantes.

En los cursos donde se aplicaron los exámenes que sirven de materia de análisis, se hizo énfasis en relacionar los conceptos previos y las definiciones abstractas de espacio vectorial y TL. Es extremadamente difícil aislar un solo concepto y luego comprobar si se comprende (Orton, 2003); por lo cual se buscó relacionar los nuevos conceptos con el conocimiento previo de los alumnos. Anita Woolfolk (2010) da algunas sugerencias al docente para ayudar a los alumnos a comprender conceptos. Tomamos como guía los principios del aprendizaje que establece el documento de la

OCDE titulado “The nature of learning” específicamente en el principio 7 denominado “Un rasgo fundamental del aprendizaje es que las estructuras de conocimiento complejo se construyan a partir de piezas más básicas de conocimiento y de modo jerárquico. Si están bien construidas, estas estructuras proporcionan un conocimiento que puede transferirse a situaciones nuevas”.

John Biggs (2005) desarrolló una manera de evaluar los resultados del aprendizaje conocida como taxonomía SOLO (Structure of the Observer Learning Outcome) que es un excelente medio para clasificar los aprendizajes esperados desde los niveles más concretos a los niveles más abstractos y complejos. Esta teoría nos ayudó a comprender una idea expresada por D. Perkins:

La comprensión no es un asunto de todo o nada, sino que es gradual. El siguiente esquema ilustra perfectamente nuestra concepción, conforme se sube en la escalera el alumno es capaz de relacionar mejor los conceptos, axiomas, definición y teoremas, por tanto, nos permite evaluar la calidad del trabajo de nuestros estudiantes. La taxonomía SOLO propone cinco niveles, en términos de su complejidad como a continuación se describe y como lo muestra la Figura 1:

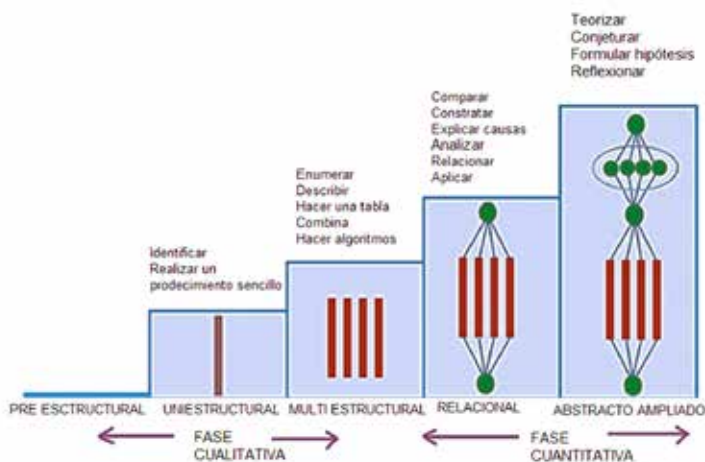


Figura 1: Representa la taxonomía SOLO como una escalera, donde el estudiante conforme relaciona conceptos, sube. Tomada de Biggs, J. & Tang, C. (2011). Teaching for Quality Learning at University, p. 91.

- i. *Preestructural*: El estudiante no identifica conceptos y no establece relaciones entre ellos.
- ii. *Uniestructural*: El estudiante responde lo planteado, pero de forma limitada raramente alcanza conclusiones o lo hace precipitadamente.
- iii. *Multiestructural*: El estudiante no es capaz de explicar el modo en que se relacionan conceptos e ignora las posibles incoherencias en sus argumentos.
- iv. *Relacional*: El estudiante enlaza e integra varios conceptos de modo coherente, los detalles son enlazados a la conclusión del ejercicio.
- v. *Abstracto ampliado*: El estudiante tiene la capacidad de generalizar para ir más allá de la información presentada.

Metodología

Se realizó una investigación exploratoria trabajando con dos grupos de cursos académicos, describimos en forma general las dificultades de los alumnos encontradas en sus repuestas a ejercicios típicos que aparecen en los libros de texto. El proceso consistió en trabajar en un curso de Álgebra Lineal con alumnos de la FCFM-BUAP para analizar las respuestas a un examen de siete preguntas con el fin de distinguir cada uno de los problemas que se produjeron al contestarlo. Las siete preguntas con incisos se aplicaron en sesiones de dos y de una hora.

Durante el curso de AL, el docente expuso los principales contenidos del programa, pero ilustrando los diferentes conceptos con numerosos ejemplos de libros que los alumnos pueden conseguir. Se consideró la siguiente secuencia de temas: sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, subespacios, combinación lineal, dependencia e independencia, base, dimensión y transformación lineal.

La estrategia de enseñanza que seguimos para el primer grupo fue consultar libros y resolver ejercicios de cada sección del capítulo TL principalmente. Durante este proceso notamos que estos ejercicios aparecen en todos los libros que consultamos, es por ello que diremos que son ejercicios típicos de TL. Dentro de estos ejercicios encontramos matrices, polinomios, imagen de los vectores y preimagen de los vectores.

Una vez que el docente da la secuencia de temas y aplica la estrategia de enseñanza propuesta, se recaban datos, estos son los obtenidos por exámenes escritos. Los datos recabados se analizan para saber qué partes

de la estrategia no están funcionando o qué conocimientos le hacen falta al estudiante para llegar a comprender el tema y poder mejorarlo. Después de obtener los resultados se muestran de manera cualitativa (porcentajes).

Participantes

Los participantes son estudiantes de 4° semestre de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) seleccionados de una manera no probabilística, por lo cual no pretende que los resultados sean representativos. En el curso I se aplicó el examen en dos partes, en la primera parte participaron 45 y, en la segunda parte, 40 estudiantes; en el curso II, 37 estudiantes.

Los estudiantes participantes son de distintas licenciaturas que se imparten en la facultad: Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física, Física Aplicada y Actuaria. Además, cabe señalar que los estudiantes ya tomaron materias previas útiles para un curso de AL tales como; Matemáticas Básicas, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Geometría Analítica del Espacio y Teoría de Ecuaciones. Los cursos previos a Álgebra Lineal cambian en cada universidad y carrera concreta. En nuestra opinión, el curso previo de Teoría de ecuaciones permite que el curso de AL inicie con espacios vectoriales, y las transformaciones lineales como capítulo 2 y por ello nuestro estudio exploratorio no puede aplicarse a otras universidades.

Instrumento: se aplica el cuestionario diseñado por Oktac (2008), porque son ejercicios típicos de los libros de Álgebra Lineal.

La razón para la selección del instrumento es que nos permitió concentrarnos en resolver ejercicios que aparecen en libros de texto de edición actual fáciles de conseguir. Cualquier docente tendría la oportunidad de resolver algunos o dejarlos de tarea. Sobre este material se podría juzgar la comprensión de los alumnos participantes.

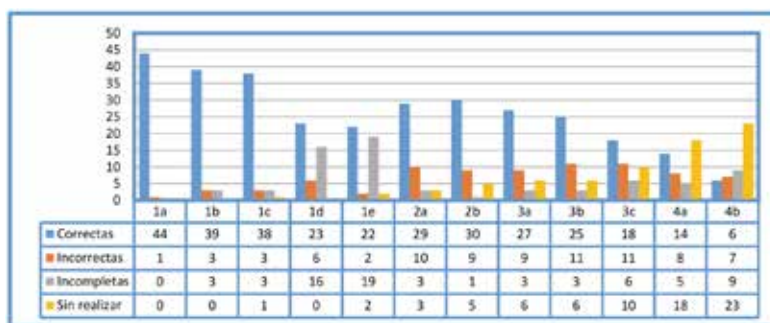
Resultados

Posterior a la aplicación de los exámenes y con base en la estrategia didáctica sobre la comprensión del concepto TL, se obtuvo que en el curso I, 59% de los estudiantes comprenden y realizan correctamente los ejercicios, mientras que 29% tuvo dificultades para realizar o completar con éxito el examen, mientras que los resultados de la segunda parte nos mues-

tran que 63% de los estudiantes relaciona y comprende los conceptos, 23% confunde conceptos. Así, 87% de los estudiantes en la primera y segunda parte del examen realizaron los ejercicios con solución correcta, incorrecta e incompleta.

Con 4% aumentan las soluciones correctas e incorrectas en el segundo grupo, sin embargo, disminuye 10% los ejercicios incompletos respecto a la primera parte. Se evalúa y clasifica cada pregunta de los exámenes según el tipo de respuesta que proporciona cada estudiante como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Evaluación de preguntas de la primera parte del examen.



La solución incorrecta que tiene mayor frecuencia en los ejercicios resueltos es: 3b y 3c con un 24.4%, estos ejercicios están relacionados con polinomios, deficiencias en el manejo de conceptos y uso inapropiado de procedimientos. Un ejemplo de ello es Figura 3;

Figura 3. Este es un ejemplo de una solución de un alumno

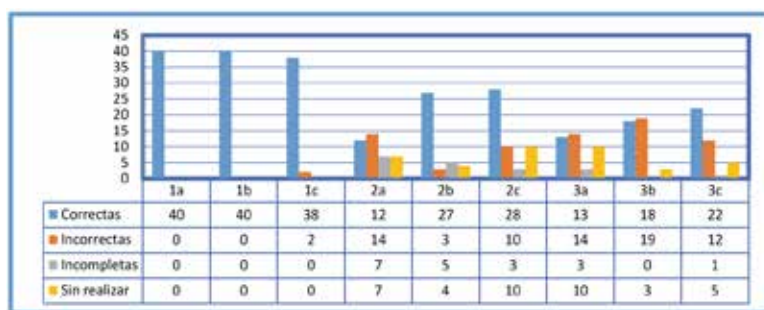
3) ¿Cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$
 $T(a + ax + ax^2 + ax^3) = T(a) + T(ax) + T(ax^2) + T(ax^3)$
 $= T(a + ax + ax^2 + ax^3)$
 $= a + ax + ax^2 + ax^3$
 $\therefore$ si es una transformación lineal.

b) $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2(a_2x^2)$
 $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = T(a_0) + T(a_1x) + T(a_2x^2)$
 $= T(a_0) + T(a_1x + a_2x^2)$
 $= T(a_0) + xT(a_1 + a_2x)$
 $\therefore$ No son iguales, pues no cumple con la definición.

Tenemos 42.2% de soluciones incompletas en el ejercicio 1e, se pidió al alumno dar con sus propias palabras la definición de TL, con la intención de observar la coherencia entre sus argumentos de incisos anteriores y las características de su definición. De ahí que se observa insuficiente manejo de conceptos y uso de procedimientos básicos de manera inapropiada. En la segunda parte del examen se observaron los datos de la Figura 4.

Figura 4. Evaluación de preguntas de la segunda parte del examen



Un 47.5% da solución incorrecta al ejercicio 3b. Aparentemente la dificultad del ejercicio está en que los alumnos no tienen presente con qué tipo de conceptos están trabajando, ni mucho menos la relación entre ellos, confundiendo los conceptos de imagen, dimensión del núcleo, y del dominio de la función de manera inadecuada como se muestra en la Figura 5. El error de la solución del ejercicio está en identificar si la afirmación es cierta o falsa: Sea $L: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ una transformación lineal definida por $L(x) = Ax$ para x en $\mathbb{R}^6$. Si $\text{nulidad}(L) = 3$, entonces $\text{rango}(L) = 7$.

Figura 5. Este es el ejemplo de la solución de un alumno en la segunda parte del examen

X b) Verdadero, pues $\text{nul}(L) + \text{rango}(L) = \dim(L)$ y aquí,
 $\text{nul}(L) + \text{rango}(L) = 3 + 7 = 10 = \dim(L) //$

La solución incompleta que tiene mayor porcentaje en los ejercicios resueltos es el ejercicio 2a, que se refiere a demostrar que un polinomio con grado menor o igual a 3 es isomorfo a una matriz 2×2 . La dificultad en la solución del ejercicio está en que los alumnos no comprenden el concepto de isomorfismo. Otra dificultad es que el alumno no relaciona sus conocimientos previos sobre funciones, como inyectividad y sobreyectividad.

A pesar de que se trata de ayudar al estudiante mediante el diseño de una propuesta de enseñanza, hay dificultades para comprender el concepto de TL porque muchos no captan lo invariante en los ejercicios. En la siguiente tabla se observan los errores en porcentaje que cometen los estudiantes del curso I (26%) y el curso II (11%). Los errores que se encontraron en los exámenes los clasificamos siguiendo el trabajo de Rodríguez (2011):

Tipo 1: Dificultades en el lenguaje; se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.

Tipo 2: Aprendizaje deficiente de conceptos previos; aquellos cometidos por deficiencias en el manejo de conceptos matemáticos y uso inapropiado de procedimientos básicos.

Tipo 3: Asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento; son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas o debidos a asociaciones incorrectas causados por la falta de articulación para adaptarse a situaciones nuevas.

Tipo 4: Dificultades para obtener información espacial; aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico; mala interpretación de lo algebraico a lo geométrico o deficiencia en relacionar conceptos geométricos.

Tipo 5: Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes; son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Mediante el análisis de las tablas anteriores se identifica que el tipo de error que más cometen los estudiantes en el curso I es del tipo conceptual, al igual que el curso II, a diferencia que el curso II únicamente cometen errores de ese tipo y no se observan errores cognitivos. La Tabla 1 muestra los errores y el tipo de error cometido;

Tabla 1. Porcentaje de errores por curso

Error	Curso I	Curso II
Tipo 1	5.1%	3%
Tipo 2	11.2%	8%
Tipo 3	4%	0%
Tipo 4	2.7%	0%
Tipo 4	3%	0%

Cabe resaltar que el tipo de error que cometen más los estudiantes es de tipo 2, debido a un aprendizaje deficiente y falta de fortaleza conceptual en los conceptos matemáticos previos.

Conclusiones

Los estudiantes del primer grupo están en un nivel básico de comprensión. Al analizar las soluciones de los exámenes se observa que existe un conflicto cognitivo causado por la falta de conexión entre conceptos, este conflicto es generado por adquirir un concepto y haber hecho una imagen inadecuadamente, respecto a otra del mismo concepto, se crea así un conflicto entre el concepto previo y el nuevo que el estudiante creía correcto (Díaz Barriga, 1997).

A través de los resultados obtenidos y con la idea de utilizar los errores como oportunidades para aprender y enseñar, se estructura una intervención en un segundo grupo, diseñando una secuencia didáctica.

Intervención, resultados grupo 2

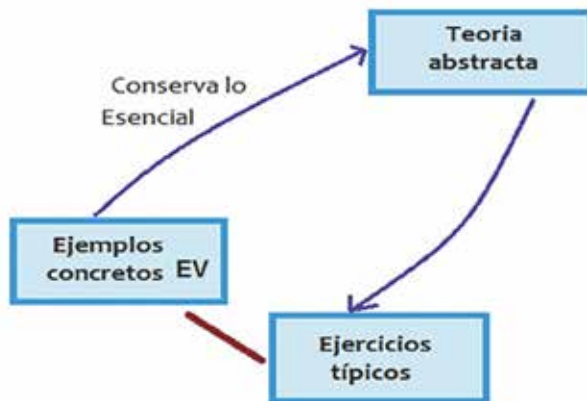
El proceso de intervención consistió en trabajar con un segundo grupo de alumnos de la FCFM-BUAP. Se decide diseñar una estrategia haciendo énfasis en el uso de puente cognitivo para explicar el cambio conceptual entre espacios vectoriales trabajados previamente y el concepto de espacio vectorial abstracto. En la presentación formal, sin mayor ceremonia, ni motivación se dan las definiciones, teoremas y demostraciones. Con la

estrategia didáctica se intenta llenar el espacio entre los conocimientos de cursos previos de los alumnos y la presentación axiomática.

También se aplicó el mismo examen que al grupo I, en una sesión de 3 horas. Se trabajaron los ejercicios de varios libros de texto, insistiendo que son ejemplos del concepto general y que pueden ser desarrollados en diferentes espacios (matrices, polinomios etc.) Por esta razón se hizo una revisión de libros de diversos autores, en ediciones recientes y se identificaron los más comunes, de las secciones correspondientes. El tema de TL se cubre demostrando los principales teoremas. Se tiene cuidado en la exposición en clase con los siguientes puntos

1. Se da la definición formal de TL, se hace notar que no incluye efecto geométrico, pero en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden pedir ejemplos donde la transformación es una rotación.
2. Uso de diferentes ejemplos de espacio vectorial, permitiendo que los alumnos adquieran las abstracciones al reconocer lo que es común a muchos ejemplos particulares (Figura 6).

Figura 6. Representación de cómo se pretende conservar y aplicar lo esencial



3. Uso de puentes cognitivos; según Ausubel (1998) el docente debe explicar al alumno la relación entre los conocimientos previos y los conocimientos nuevos, para ayudar a un aprendizaje significativo (Figura 7).

Figura 7. Representación del puente cognitivo



Esto se hace trabajando en dos columnas como en la Tabla 2.

Tabla 2. Puente cognitivo en TL

Conceptos previos	Conceptos nuevos
Espacios vectoriales concretos. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$. Matrices. Polinomios. Se indican las propiedades usuales de la suma y producto por escalar.	Definición de Espacio vectorial. Axiomas para las dos operaciones. Definición de Transformación lineal

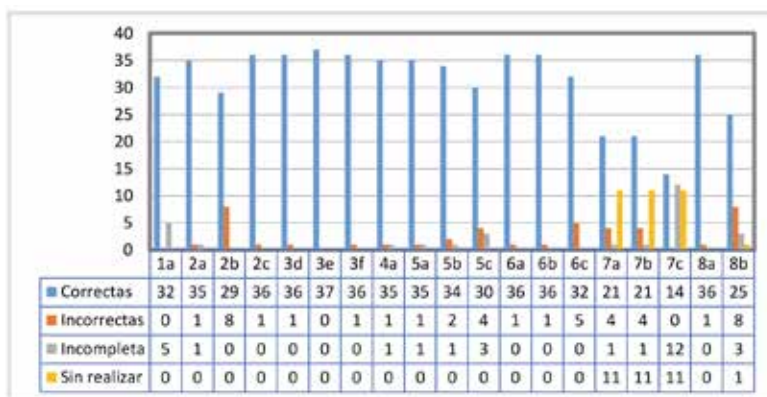
Nota: la columna de la izquierda son los conceptos previos de TL y partir de ellos se trata de llegar a la columna derecha.

Una vez que el docente da la secuencia de temas y se realizan ejemplos de libros de texto, se recaban datos, estos son los obtenidos por exámenes escritos. Se aplica un examen final que consta del cuestionario diseñado por Roa y Oktac (2008) con pequeños cambios. El examen consta de 8 ejercicios. Después se clasifica la solución en los niveles de comprensión según la teoría de la taxonomía Biggs.

Resultados

Posterior a la aplicación de los exámenes con base a la estrategia didáctica aplicada para la comprensión del concepto transformación lineal se analizan los resultados del curso II y se observa que los resultados del curso II son más satisfactorios que los del curso I, con un 84% los estudiantes comprenden los conceptos básicos que involucra el concepto de TL. Mientras que el 16% de los estudiantes tienen soluciones incorrectas (7%), incompletas (4%) o no realizaron el ejercicio (5%). Al revisar y clasificar los exámenes del segundo grupo observamos la frecuencia por pregunta en la Figura 8.

Figura 8. Evaluación de preguntas del segundo grupo



Los ejercicios 2b y 8b son los que con mayor frecuencia los estudiantes tienen una solución incorrecta (21.6%) debido a que realizan de forma inadecuada los cálculos algebraicos y no comprenden la diferencia entre imagen y pre imagen, lo que significa que no ven a la TL como una función. Mientras que 97.3% entienden la diferencia. El ejercicio que con mayor frecuencia los estudiantes no completan (32.4%) es el 7c debido a que no relacionan el concepto de isomorfismo y solo comprenden la mitad de lo que pide el ejercicio. Los únicos ejercicios que los estudiantes no realizaron son el 7a, 7b, 7c y 8b, pero los de mayor frecuencia son el 7a, 7b y 7c con un 29.7%.

Análisis

Posterior a la clasificación de respuestas, se usa la teoría de taxonomía SOLO para ver cómo aumenta la complejidad de la actuación de un estudiante cuando logra el dominio de muchas tareas referentes al concepto de transformación lineal. El modelo muestra las distintas etapas que componen el desarrollo de aprendizaje, llevándolo desde lo más superficial hacia lo más profundo. Esta forma de clasificar los resultados de aprendizaje según el nivel de complejidad, permite evaluar los resultados de aprendizaje en términos de calidad para conocer el nivel de comprensión alcanzado, como en la Tabla 3 que compara a los dos grupos por nivel.

Tabla 3. Porcentaje de comprensión por curso

Compresión	Curso I	Curso II
Nivel 1	25.1%	12.5%
Nivel 2	37.8%	32.9%
Nivel 3	15.6%	31.9%
Nivel 4	7.4%	10.6%
Nivel 5	3.1%	7.1%

La mayor parte de los estudiantes del curso I se encuentra en el segundo nivel de comprensión con un 37.8%, en el curso II con un 32.9. El curso II tiene un 17.8% de estudiante en un aprendizaje profundo nivel 4 y 5.

Conclusión

Como puede verse al comparar el porcentaje en nivel 3, 4 y 5 el segundo grupo mejora. Esto nos indica que hubo un efecto positivo con la estrategia didáctica implementada en el grupo 2.

Comentarios finales

La problemática de la comprensión de los alumnos es difícil, sin embargo, en nuestro caso indicamos que muchos autores opinan la falta de

comprensión se debe al obstáculo del formalismo. Con la secuencia didáctica lo que se buscó fue suavizar este problema, es decir, los alumnos perciben ejercicios en diferentes espacios vectoriales (polinomios, matrices) como muy diferentes, no distinguen que deben aplicar en mismo concepto TL, en nuestro caso, únicamente cambian los detalles, pues claramente matrices y polinomios operan diferente.

Por otro lado la definición de TL es sencilla en apariencia, con base en la taxonomía sólo podemos darnos cuenta que la comprensión es gradual y lo que se persigue es relacionar un concepto como TL con otros, en nuestro caso con teoremas, y esto constituye un objeto deseable, pues no basta con repetir la definición. Los alumnos no aprenden al mismo ritmo de la exposición en clase, es necesario tender puentes entre los conocimientos previos y una exposición formal, a la que los alumnos deben acceder en vista a estudios posteriores de álgebra moderna.

Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. Novak, J. & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.
- Benítez, R. (2015). *Geometría vectorial*. (3ª ed.). Trillas.
- Biggs, J. & Tang, C. (2011). *Teaching for Quality Learning at University*. McGraw-Hill.
- Biggs, J. B. (2005). *Calidad del Aprendizaje Universitario*. Narcea.
- Cárdenas H., Raggi, F., Luis, E., & Tomás, T. (1995). *Álgebra Superior*. (2ª ed.). Trillas.
- Carlson, D., Charles, J., Lay, D., & Porter, D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, (1ª ed., vol. 24). (pp.41-46). Mathematical Association of America <http://www.jstor.org/stable/2686430>
- Díaz, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias para un aprendizaje significativo*. Trillas.
- Dorier, J., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En *The teaching of linear algebra* (pp. 85-124).
- Dubinsky, E. (1997), *On Learning Quantification, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. (Vol. 16). (pp. 335-362).

- Dumont, H., Istance D., & Benavides, F.(2010). *The nature of learning*. OCDE. www.oecd.org/edu/ceri/innovativelearningenvironments.htm
- Molina, J. G. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En *Revista Latinoamericana* (pp. 241-273).
- Orton, A., (2003) *Didáctica de las matemáticas*. Morata.
- Perkins, D. (2000). *Aula inteligente*. Gedisa-SEP, Biblioteca para la actualización del maestro.
- Roa, S. O. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Cinvestav-IPN.
- Rodríguez, H. C. (2011). *Diagnóstico de las dificultades de la enseñanza-aprendizaje en un curso de Álgebra Lineal. XIII CIAEM-IACME*.
- Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education*. International Handbook of mathematics Education. (pp. 827-876). Kluwer A. P.
- Uicab, R., & Oktac, A. (2006). *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemáticas Educativa. (pp. 459-490).
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics,. En *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer academic publishers.
- Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa*. Pearson educación
- Wooton, W., Beckenbach, E., Fleming, F. J. (1985) *Geometría analítica moderna*. Publicación cultural.

Datos de autores:

Elizabeth Bañuelos Aguilar, Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).
Correos-e: vrenjaries@hotmail.es, pzeleny61@hotmail.com

SECCIÓN 2
TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN
MEDIA SUPERIOR

CAPÍTULO 4

Oportunidades y retos para el aprendizaje basado en proyectos: el caso de los proyectos estadísticos

Alberto Santana Ortega
Ana Luisa Gómez-Blancarte

Resumen

Basados en una revisión de literatura sobre el trabajo con proyectos estadísticos, en este artículo se exponen aspectos relacionados con el uso de proyectos para la enseñanza y aprendizaje de la estadística, así como los retos y oportunidades que conlleva la implementación de los mismos. Como parte de las aportaciones de este artículo, se ofrece una visión acerca del trabajo con proyectos, de manera que cubran cinco criterios que todo proyecto debiera considerar para promover un Aprendizaje Basado en Proyectos. Además, se plantean recomendaciones para el diseño instruccional y se ofrecen algunas reflexiones que buscan motivar a los profesores en servicio y a los futuros docentes para utilizar el enfoque con proyectos como una alternativa moderna y eficiente para promover la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

Palabras clave: Proyectos Estadísticos, Aprendizaje Basado en Proyectos, Enseñanza-Aprendizaje de la Estadística.

Introducción

El trabajo con proyectos, de acuerdo con Knoll (2012) y Pecore (2015), tuvo sus orígenes a principios del siglo XVIII, en París, Francia. Knoll menciona que los estudiantes avanzados de la Real Academia de Arquitectura (Académie royale d'architecture) tenían que demostrar sus conocimientos y habilidades mediante la planificación de proyectos de construcción (e.g., iglesias, monumentos, palacios y castillos). En 1865, el Instituto

Tecnológico de Massachusetts fue la primera institución educativa en utilizar los proyectos como método de enseñanza. Según Ulrich (2016), el profesor John Dewey fue quien, en 1910, propuso los proyectos como una forma de “aprender haciendo”, basada en los intereses de estudio de los alumnos y en un enfoque constructivista. Knoll (2012) reporta que en 1914 el gobierno estadounidense incorporó el aprendizaje por proyectos en las escuelas vocacionales, pero fue hasta 1918 que el trabajo por proyectos tomó su auge con la publicación de un documento titulado *El Método de Proyectos*, presentado por William Heard Kilpatrick. Él consideraba que los proyectos estudiantiles motivan a los alumnos a desarrollar sus habilidades y a alcanzar altos niveles de conocimiento, y también permiten a los estudiantes apreciar, disfrutar y confiar en las actividades escolares (Pecore, 2015).

Para Kilpatrick (1918), un proyecto era un acto intencional, de tal manera que él consideraba que la educación basada en proyectos prepara mejor para la vida, pues un acto intencional constituye en sí mismo la vida. Si bien la idea de los proyectos ya existía antes de Kilpatrick, la difusión que él hizo al aplicar proyectos en situaciones educativas, a través de su agrupación llamada “el club de propaganda de los proyectos” (Knoll, 2012), dio lugar al reconocimiento que los proyectos tienen en el ámbito educativo. A principios de 1990, el método de proyectos como modelo de enseñanza y de aprendizaje fue reconocido bajo el enfoque de Aprendizaje Basado en Proyectos (PBL, por sus siglas en inglés), entendido como “un modelo que organiza el aprendizaje alrededor de proyectos” (Thomas, 2000, p. 1).

En estadística los proyectos son reconocidos por su utilidad para lograr cambios en la forma en que se aborda el estudio de esta disciplina (Sagarribai, 2015). De acuerdo con algunas investigaciones en educación estadística, el uso de proyectos ha sido considerado un buen método de enseñanza para el profesor y de aprendizaje para el estudiante (e.g., Baglin et al., 2013; Bailey et al., 2013), aunque, el uso de proyectos estadísticos tiende a ser promovido más como una manera de evaluar el aprendizaje de los estudiantes (American Statistical Association, ASA, 2016; Garfield & Ben-Zvi, 2008), ya sea para evaluar una parte del curso o el curso completo, este último caso es menos frecuente (Biajone, 2006). Además, los proyectos tienden a emplearse como un recurso para repasar los temas previamente estudiados durante las clases o en prácticas de laboratorio (Biehler, 2007).

Ante el potencial que tiene el trabajo con proyectos, el propósito de este artículo es doble: primero, mostrar cómo se ha abordado el uso de proyectos como método para el estudio de la estadística; segundo, identificar las oportunidades y retos asociados con dicho método. Para ello, se presentan dos grandes secciones relacionadas con: (1) el uso de proyectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística y (2) las oportunidades y retos de dicho uso. En la primera sección se describen aspectos relacionados con la implementación de los proyectos en las aulas, las fases en que se organiza el trabajo con proyectos y las actividades que conlleva cada fase. En la segunda sección, las oportunidades y retos de dicha implementación. Finalmente, como consideraciones finales se ofrece una visión de criterios que deben considerarse para abordar el trabajo con proyectos como un verdadero método para favorecer el aprendizaje.

Método

Para esta revisión de la literatura se utilizó el método de investigación documental que consiste en hacer un análisis de documentos que contienen información sobre el tema que se quiere estudiar (Bailey, 1994). Los documentos revisados fueron aquellos relacionados con el trabajo con proyectos estadísticos. Los documentos incluidos en la revisión debían especificar, en la medida de lo posible, detalles de la implementación de proyectos en el aula para la enseñanza de la estadística. Se realizaron búsquedas en diversas fuentes de información, incluidas revistas internacionales de investigación (e.g., *Revista de investigación sobre educación estadística*, SERJ por sus siglas en inglés), actas de congresos (e.g., *Conferencia internacional sobre enseñanza de la estadística*, ICOTS por sus siglas en inglés), tesis doctorales (e.g., Sovak, 2010) y de maestría (e.g., Córdoba, 2012). Estas fuentes fueron elegidas porque aportan elementos teóricos y metodológicos importantes sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el trabajo con proyectos estadísticos. La revisión abarcó publicaciones entre 1994 —porque fue el año de publicación de los documentos más antiguos que fueron encontrados— y 2017 —porque esta revisión terminó a finales de ese año— y fueron considerados documentos en español e inglés. La búsqueda de información se realizó usando internet, mediante el buscador Google Académico, recolectándose un total de 77 documentos que abordaban el tema de proyectos estadísticos. Las palabras clave usadas

para la búsqueda de trabajos en inglés incluyeron “statistical”, “statistics” y “projects”; y para la búsqueda en español se consideraron las palabras “proyectos” y “estadísticos”.

Uso de proyectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística

De acuerdo con Batanero y Díaz (2005), los proyectos estadísticos (en adelante PE) son un tipo particular de investigaciones —estadísticas— que tratan de integrar dentro de un proceso más amplio de investigación. Young (2017) establece que un PE implica un proceso amplio de actividades que inician con un problema, de cualquier rama del conocimiento, o preguntas de investigación que serán respondidas con métodos estadísticos y que termina en un informe escrito en el que se presentarán los hallazgos encontrados. Así, un PE consiste de una serie de actividades sistematizadas para responder a una pregunta de investigación mediante técnicas estadísticas y presentar el trabajo en un informe escrito o en un póster. Es importante sugerir que los hallazgos encontrados se deben dar a conocer a la mayor cantidad posible de personas, ya sea de forma oral o mediante un cartel, pues de esta manera se comparte información con otros y además permite mostrar el potencial de aplicación de la estadística para la resolución de problemas (Bailey et al., 2013).

En educación estadística, se reconoce la importancia de los PE desde varias perspectivas: como una herramienta importante para evaluar aspectos del aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a experimentar diferentes etapas en el planteamiento y solución de un problema estadístico (del Mas et al., 2007; Franklin et al., 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2008; ASA, 2016); como una estrategia de enseñanza para el aprendizaje de estadística (Batanero y Díaz, 2005; Ojeda, 2011); como un medio ideal para proporcionar experiencias de aprendizaje y reflexionar sobre la investigación estadística (MacGillivray & Pereira-Mendoza, 2011; Makar & Fielding-Wells, 2011) y como un método para fomentar el desarrollo de la cultura estadística (Conti & Carvalho, 2014), el razonamiento estadístico (Sovak, 2010) y el pensamiento estadístico (Binnie, 2002).

En las aulas, antes de hacer que los alumnos inicien de lleno con las actividades de los PE, se sugiere que los docentes deberían utilizar al menos unas cinco horas de su curso para realizar un buen encuadre —fijar

lineamientos para aclarar las actividades que se van a hacer y cómo se van a realizar— con sus estudiantes, en el que se puedan mostrar ejemplos de PE, explicar lo que se espera que ellos hagan, presentar el programa de la asignatura y establecer los aprendizajes esperados, organizar el trabajo de forma individual o en equipos, especificar el marco de evaluación y dar a conocer a los alumnos su plan de acción. Una vez terminado el encuadre, los estudiantes pueden empezar con el desarrollo de los PE.

Hallazgos sobre la implementación de los PE

Por lo regular, los PE se implementan al final del curso y tienen una duración promedio de cerca de dos meses. No obstante, los proyectos pueden durar todo el semestre e iniciar desde el principio del curso (Verhoeven, 2011). En general, sólo se desarrolla un proyecto por cada curso (Baglin et al., 2013), aunque hay algunos casos en los que se pueden realizar hasta tres (Sisto, 2007). Aunque los PE pueden desarrollarse de forma individual (Carnell, 2008), se encontró que en la mayoría de los casos se realizan en equipos de entre tres hasta cinco integrantes (Nascimento & Martins, 2008).

Los PE son evaluados durante todo el tiempo que dura su desarrollo y cuando se presentan los productos finales del proyecto; para la evaluación generalmente se usan rúbricas de evaluación (Figuroa et al., 2014). Cabe destacar que los proyectos pueden ser evaluados por parte del docente (Ghinis et al., 2005), aunque hay posibilidad de que los estudiantes participen evaluando el trabajo de sus compañeros (Bulmer, 2010). Hay cursos en que todos los proyectos que se realizan son expuestos frente a un grupo de personas de forma oral (Santos y César, 2006), mediante un cartel o póster científico (Halvorsen, 2010). Un póster científico es un material impreso en formato grande —e.g., de 90 cm x 120 cm— en el que se resumen visualmente los aspectos fundamentales de un proyecto de investigación (e.g., problema, metodología, resultados, conclusiones). El cartel puede ser leído por el espectador o presentado verbalmente por el autor.

Luego de hacer evaluaciones parciales o finales del trabajo de los alumnos, es necesario dar retroalimentación a los estudiantes para que reflexionen sobre las fortalezas y debilidades de sus proyectos, y puedan hacer las correcciones necesarias para mejorarlos.

Fases de implementación de los PE

Existen diversas fuentes que hablan del proceso para desarrollar los proyectos estadísticos (Wild & Pfannkuch, 1999; Batanero y Díaz, 2005; ASA, 2016), sin embargo, no hay unificación de criterios sobre la cantidad de fases en las que se debería desarrollar un PE. En general se pudieron identificar siete fases (Figura 1) que podrían servir como referencia para entender el proceso de implementación de los proyectos.

Figura 1. Fases de un proyecto estadístico



A continuación, se expone una descripción general de las actividades representativas de cada fase de un PE (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción general de las actividades en cada fase

Fases del proyecto	Descripción general de las actividades
1) Elección del tema o problema de interés	Definir y delimitar adecuadamente el tema o problema de estudio elegido para el proyecto.
2) Formulación de preguntas de investigación	Redactar las preguntas estadísticas que orientarán el proyecto
3) Planeación de las actividades	- Diseñar un plan de acción para desarrollar el proyecto. - Identificar la fuente de datos (mediciones, simulaciones o bases de datos). - Definir las variables, la población y la muestra para el proyecto. - Definir el tipo de estudio estadístico (descriptivo, correlacional, inferencial, comparativo).

Fases del proyecto	Descripción general de las actividades
	• Elegir las pruebas estadísticas que han de realizarse, dependiendo de la naturaleza de los datos y del contexto. • Determinar el <i>software</i> a utilizar en el análisis de datos. • Elaborar el instrumento para la recolección de datos.
4) Recolección de datos	• Recolectar o generar los datos • Limpiar los datos
5) Procesamiento y análisis de datos	• Se debe hacer una transnumeración de los datos. Es decir, procesar la información para obtener tablas, gráficas y estadísticos descriptivos. • Realizar el análisis de información • Generar hipótesis
6) Interpretación de resultados y conclusiones	• Interpretar las tablas, gráficas y estadísticas descriptivas. • Interpretar los resultados de las pruebas estadísticas aplicadas • Hacer una interpretación holística de los resultados de acuerdo con el contexto del tema del proyecto. • Dar respuesta a las preguntas estadísticas y proponer soluciones al problema estadístico planteado. • Plantear nuevas preguntas de investigación.
7) Difusión y comunicación oral y escrita de los resultados	• Redactar el informe final. • Elaborar un póster científico con los resultados del proyecto. • Presentar los hallazgos ante la comunidad estudiantil y si es posible a una audiencia general.

Aunque la cantidad y el tipo de actividades que se realizan dependen de la naturaleza del proyecto (e.g., aplicación de encuestas, experimental) que sea planteado por el instructor, las descripciones anteriores pueden servir como una guía que puede ayudar a orientar el trabajo con PE.

Oportunidades y retos en la implementación de proyectos estadísticos

Se encontró que existen una serie de oportunidades y retos que subyacen al diseño e implementación de PE, los cuales se analizan enseguida.

Oportunidades

El trabajo con PE brinda oportunidades tanto a docentes como a los alumnos. Para el profesor, los proyectos le permiten que pueda atraer la atención de sus estudiantes y abre la opción de lograr un alto nivel de motivación (Jolliffe, 2002); puede llevar la estadística fuera del salón de clases para contextualizar su aplicación y evidenciar su utilidad (Verhoeven, 2013). Al desarrollar la experiencia con PE se van consolidando las habilidades docentes necesarias para asegurar un buen desarrollo de actividades, hasta alcanzar un compromiso profesional para utilizar de manera sostenida esta estrategia de enseñanza (Makar, 2008).

En cuanto a los estudiantes, los PE pueden apoyar para mejorar la forma en que los alumnos aprenden colaborativamente (Walsh, 2011) y les permiten conocer y utilizar la tecnología necesaria para desarrollarlos (Spence & Bailey, 2015). Los estudiantes tienen la posibilidad de mejorar sus conocimientos, habilidades y actitudes en los cursos de estadística (Villazcán, 2014), ya que el trabajo con proyectos coloca al alumno como protagonista del proceso de aprendizaje. Los proyectos tienden a mejorar las habilidades comunicativas orales y escritas (Halvorsen, 2010) y permiten desarrollar la curiosidad, la maduración conceptual y procedimental en estadística (Dierker et al., 2016). Además, los PE les brindan la oportunidad de construir su propio conocimiento (Ramirez-Faghih, 2012) y de fomentar el cumplimiento de responsabilidades (Bailey et al., 2013).

Retos

Además de los beneficios, también es necesario considerar los retos que implica el trabajo con PE. Para los profesores, algunos retos se relacionan con la gran cantidad de tiempo que se requiere para poder implementarlos (Rivera, 2015), así como con problemas de gestión del aula porque deben equilibrar su participación con la autonomía del alumno. Los docentes tienen un gran reto porque deben enfocarse en una pregunta de conducción y vincular los temas de aprendizaje con las diversas actividades del proyecto, ya que el objetivo de los PE es promover que los estudiantes construyan su propio conocimiento por medio de las actividades, en lugar de que sea el instructor el que se dedique a enseñar tradicionalmente los temas. Además, en los PE se debe diseñar un marco de evaluación alternativo —no basado

exclusivamente en pruebas escritas estandarizadas— para evaluar el conocimiento y las habilidades de los alumnos. La gran carga de trabajo que significa para el profesor tener que planificar las actividades y diseñar un marco de evaluación adecuado para los PE puede ser un factor que limite su uso en las aulas (Bulmer, 2010). Asimismo, aplicar proyectos obliga a los maestros a que reconsideren y rediseñen los criterios de evaluación que van a utilizar durante el trabajo de sus estudiantes, de manera que le permitan medir objetivamente los logros alcanzados en todas las etapas del proyecto (Nascimento et al., 2014).

Para superar algunas complejidades de forma efectiva, los docentes deben hacer cambios profundos en su forma de enseñar (Terán y Nascimbene, 2015). Una débil formación docente en estadística o en didáctica de la estadística puede limitar el logro de resultados adecuados, pues se requiere que el profesor oriente, asesore y acompañe a los estudiantes a lo largo del proceso (Makar, 2004).

Por su parte, los estudiantes pueden enfrentarse a dificultades relacionadas con la falta de coordinación y organización del trabajo en equipo (Holmes, 1997). Es posible que algunos estudiantes tengan problemas al elegir el tema de estudio, sobre todo cuando no han sido informados de las opciones que existen (Wardrop, 1999). La recolección y procesamiento de datos puede resultar muy tediosa y difícil para los alumnos (Halvorsen, 2010), así como el grado de complejidad de los temas estadísticos que se aborden en los proyectos (Carnell, 2008). Durante el desarrollo de PE los estudiantes enfrentan problemas relacionados con la redacción de preguntas de investigación significativas; dificultades asociadas con la complejidad de gestionar el tiempo; retos al realizar transformaciones adecuadas de los datos y procesar la información; así como dificultades para desarrollar una lógica operativa para apoyar la toma de decisiones (Batanero y Díaz, 2005).

Los estudiantes deberán entender que los proyectos requieren que ellos sean los actores centrales en las actividades propuestas. Será necesario que tomen conciencia de que tendrán mayor oportunidad de aprender si experimentan con responsabilidad y autonomía todas las tareas que conforman el PE.

Conclusiones finales

Aunque el gran potencial que tiene el trabajo con PE ha sido documentado reiteradamente (e.g., Inzunza, 2017), es necesario aclarar que no cualquier

proyecto puede ser considerado un ejemplo representativo del PBL. Por lo tanto, es fundamental reconocer y entender las características que hacen que un proyecto sea una auténtica muestra del PBL. De acuerdo con Thomas (2000), se puede decir que se trata de un verdadero PBL si se cumplen cinco criterios: 1) centralidad, 2) preguntas de investigación, 3) investigación constructiva, 4) autonomía, 5) realismo.

El criterio de *centralidad* se relaciona con dos elementos fundamentales: en primer lugar, de acuerdo con esta característica, los proyectos son el plan de estudios. En el PBL, el proyecto es la estrategia central de enseñanza porque los estudiantes encuentran y aprenden los conceptos centrales de la disciplina a través del proyecto. Hay casos en que el trabajo del proyecto sigue la instrucción tradicional —clases magistrales hechas por el docente— de tal manera que el proyecto sirve para proporcionar ilustraciones, ejemplos, práctica adicional o aplicaciones prácticas para material enseñado inicialmente por otros medios. Sin embargo, de acuerdo con este criterio esos proyectos de aplicación no se consideran representativos del PBL. En segundo lugar, el criterio de centralidad significa que los proyectos de enriquecimiento —con actividades en un contexto extracurricular que generalmente se aplican a estudiantes de “alta capacidad”— en los que los estudiantes aprenden contenidos que se encuentran fuera del plan de estudios tampoco son ejemplos de PBL, sin importar qué tan creativos, atractivos o motivadores sean.

El segundo criterio es la existencia de *preguntas de investigación* orientadoras o problemas que impulsan a los estudiantes a encontrar y conflictuar con los conceptos y principios centrales de la disciplina. Las preguntas que los estudiantes persiguen, así como las actividades y los productos que ocupan su tiempo, deben estar orquestadas al servicio de un importante propósito intelectual (e.g., desarrollar la cultura, el razonamiento y el pensamiento estadístico).

El criterio de *investigación constructiva* señala que las actividades centrales del proyecto deben implicar buscar y resolver problemas, la transformación y construcción del conocimiento, lograr nuevos entendimientos y nuevas habilidades por parte de los estudiantes. Las investigaciones pueden ser procesos de diseño, toma de decisiones, búsqueda de problemas, resolución de problemas, descubrimiento o construcción de modelos. Pero, para ser considerado como un proyecto tipo PBL, las actividades centrales del proyecto deben promover nuevos conocimientos por parte de los estu-

diantes. Si las actividades centrales del proyecto no representan ninguna dificultad para el estudiante o pueden llevarse a cabo con la aplicación de información o habilidades ya aprendidas, el proyecto es un ejercicio, no un verdadero proyecto en el marco del PBL.

El criterio de *autonomía* se refiere a la responsabilidad y toma de decisiones que el proyecto provoca en los estudiantes. Generalmente, los proyectos tipo PBL no están dirigidos por los instructores con guiones específicos o perfectamente delineados para su simple aplicación y desarrollo. Los ejercicios y prácticas de laboratorio, así como los folletos instructivos con secuencias de actividades no son ejemplos de PBL, incluso si están centrados en los problemas y son fundamentales para el plan de estudios. Los proyectos tipo PBL no terminan en un resultado predeterminado ni toman caminos predefinidos. Los proyectos dentro del marco del PBL incorporan mucha más autonomía, elección, tiempo de trabajo no supervisado y responsabilidad del estudiante que en la enseñanza tradicional.

El último criterio es el *realismo*, lo cual significa que los proyectos incorporan elementos desafiantes de la vida real. Los verdaderos proyectos tipo PBL no deben ser simples trabajos escolares descontextualizados. En el PBL se deben incorporar características que den una sensación de autenticidad a los estudiantes. Estas características pueden incluir el tema o problema de interés, las tareas y actividades a realizar, los roles que juegan los estudiantes, el contexto dentro del cual se lleva a cabo el trabajo del proyecto, los colaboradores que trabajan con los estudiantes durante el proyecto, los productos que se generan durante todo el proceso, la audiencia que recibe información sobre los productos generados del proyecto, o los criterios por los cuales se evalúan los productos o actividades (e.g., reporte escrito, póster). El PBL incorpora desafíos de la vida real donde el foco de atención se centra en resolver problemas o en responder preguntas auténticas —no simuladas— y donde las soluciones propuestas deben tener el potencial para ser implementadas de forma efectiva.

Resulta fundamental que en el diseño instruccional se consideren dichos criterios que, en términos generales, sugieren que el proyecto sea la fuente central de aprendizaje de los temas de la disciplina. De acuerdo con tales criterios, consideramos que el principal reto al que se enfrentan los docentes es lograr que los proyectos sean la forma principal de aprendizaje para los alumnos, es decir, que los proyectos se conviertan en la estrategia central de enseñanza (criterio 1).

Sin embargo, para muchos docentes puede surgir una interrogante: ¿cómo hacer de los proyectos la estrategia central de enseñanza y no sólo un método de evaluación final o de aplicación de los temas del programa de estudio? Se sugiere que el trabajo con los PE inicie casi al mismo tiempo en que comience la asignatura o el curso que el instructor debe desarrollar, que su implementación dure el mayor tiempo posible —al menos un cuatrimestre y preferentemente todo un semestre— y que de ser posible el PE sea ponderado para evaluar completamente todo un curso o una asignatura.

Además de una labor cuidadosa en el diseño de su propuesta didáctica, los instructores deben ser capaces de evitar la costumbre de presentar los temas a los estudiantes antes de que estos últimos indaguen y busquen profundizar sobre esos tópicos por su propia cuenta, por eso deberán limitarse en la cantidad de lecciones magistrales que presenten frente al grupo. Los instructores que opten por implementar el PBL en sus cursos deberán ser capaces de delegar responsabilidades y confiar en sus estudiantes. El profesor debe asegurarse de comunicar a sus estudiantes desde un principio que su labor no se enfocará en “dar clases”, más bien en orientarlos y asesorarlos para resolver las dudas que vayan surgiendo durante el proyecto. De esta manera los estudiantes tendrán plena conciencia de que para lograr sus aprendizajes siempre tendrán actividades específicas por realizar y muchas cosas que investigar. Sin importar el nivel en el que laboren, los docentes sentirán muchas veces que sus estudiantes no avanzan o que no hacen el trabajo de la forma en que se espera, sin embargo, deberán entender que eso es parte del proceso de aprendizaje y de transformación que se espera observar en sus alumnos.

Los proyectos no solo deben ofrecer una mayor flexibilidad para los estudiantes, sino que también transforma el papel de los docentes. Al implementar proyectos, los profesores se convierten en facilitadores que pueden superar las limitaciones de las clases tradicionales en las que ellos son los protagonistas centrales. Este método faculta a los maestros a aplicar diversas actividades que pueden ayudar a fomentar una cultura colaborativa, el interés y la motivación de los alumnos por el estudio de la disciplina. Cuando un profesor se anima a implementar PE debe dominar los temas curriculares que espera que sus alumnos aprendan durante las actividades didácticas, así como tener un buen conocimiento didáctico para aplicar esta metodología, pues de lo contrario la experiencia puede resultar muy complicada y desalentadora tanto para él como para sus estudiantes.

Así que para lograr que —en el corto plazo— el uso de proyectos se convierta en una práctica común en las aulas de clases, es indispensable que los futuros docentes puedan participar en actividades de formación en las que tengan oportunidad de realizar todas las fases de un PE antes de integrarse formalmente a su labor profesional, de tal manera que esa experiencia sirva para adquirir los conocimientos estadísticos y las habilidades docentes necesarias que les permita lograr un buen desempeño cuando ellos mismos tengan el interés de implementar proyectos en sus cursos. Desarrollar más y mejores experiencias con PE les permitirán, tanto a los profesores en servicio como a los que están en formación, a comprometerse con la implementación de esta forma de trabajo en sus aulas.

Este manuscrito es la versión en español del capítulo titulado *Opportunities and challenges for project-based learning: the case of statistical projects* (Santana y Gómez-Blancarte, 2019), y fue publicado en el libro titulado *Research reports in Mathematics Education: the classroom*.

Referencias

- American Statistical Association (2016). *GAISE College report, revision committee guidelines for assessment and instruction in statistics education, college report 2016*. ASA. Recuperado de: https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GaiseCollege_Full.pdf
- Baglin, J., Bedford, A., & Bulmer, M. (2013). Students' experiences and perceptions of using a virtual environment for project-based assessment in an online introductory statistics course. *Technology Innovations in Statistics Education*, 7(2), 1-8.
- Bailey, K.D. (1994). *Methods of Social Research*. The Free Press.
- Bailey, B., Spence, D. & Sinn, R. (2013). Implementation of discovery projects in statistics. *Journal of Statistics Education*, 21(3), 1-24.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. P. Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas 9* (pp.125-164). ICE.
- Biajone, J. (2006). *Promoting positive attitudes towards statistics in pedagogy students through project work* [Ponencia]. Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Bahia, Brasil. Recuperado de: <http://iaseweb.org/documents/papers/icots7/C408.pdf>

- Biehler, R. (2007). *Assessing students' statistical competence by means of written reports and project work* [Ponencia]. IASE/ISI-Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics, Guimaraes, Portugal. International Statistical Institute. Recuperado de: <https://iase-web.org/documents/papers/sat2007/Biehler.pdf?1402524994>
- Binnie, N. (2002). *Using projects to encourage statistical thinking* [Ponencia]. Sixth International Conference on Teaching Statistics, Cape Town, South Africa. International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/icots6/10_69_bi.pdf?1402524959
- Bulmer, M. (2010). *Technologies for enhancing project assessment in large classes* [Ponencia]. Eighth International Conference on Teaching Statistics. International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_5D3_BULMER.pdf?1402524970
- Carnell, L. (2008). The effect of a student-designed data collection project on attitudes toward statistics. *Journal of Statistics Education*, 16(1), 1-15.
- Conti, K., & Carvalho, D. (2014). Statistical literacy: developing a youth and adult education statistical project. *Statistics Education Research Journal*, 13(2), 164-177.
- Córdoba, J. (2012). *Propuesta para la enseñanza de la estadística en el grado decimo trabajada por proyectos* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Recuperado de: <http://bdigital.unal.edu.co/10298/1/01186847.2012.pdf>
- delMas, R., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.
- Dierker, L. Alexander, J., Cooper, J. L., Selya, A., Rose, J., & Dasgupta, N. (2016). Engaging diverse students in statistical inquiry: a comparison of learning experiences and outcomes of under-represented and non-underrepresented students enrolled in a multidisciplinary project-based statistics course. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 10(1), Artículo 2. <https://doi.org/10.20429/ijstl.2016.100102>
- Figuroa, S., Baccelli, S., y Prieto, G. (2014). Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción en una enseñanza de la estadística con proyectos. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana De Matemática Educativa* 27 (pp. 541-550). CMME.

- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education* (GAISE) report: a pre-k-12 curriculum framework. American Statistical Association.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice*. Springer.
- Ghinis, D., Chadjipantelis, T., & Bersimis, S. (2005). Experiences from teaching statistics using directed projects in greek elementary school. *Teaching Statistics*, 27(1), 2-7.
- Halvorsen, K. (2010). *Formulating statistical questions and implementing statistics projects in an introductory applied statistics course* [Ponencia]. Eighth International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_4G3_HALVORSEN.pdf?1402524970
- Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 153-164). ios Press. Recuperado de: <http://iase-web.org/documents/book1/chapter12.pdf>
- Inzunza, C. S. (2017). Potencial de los proyectos para desarrollar motivación, competencias de razonamiento y pensamiento estadístico. *Actualidades Investigativas en Educación*, 17(3). Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/29874>
- Jolliffe, F. (2002). *Statistical investigations-drawing it all together* [Ponencia]. Sixth International Conference on Teaching Statistics, Cape Town, South Africa. International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/icots6/3e2_joli.pdf?1402524960
- Kilpatrick, W. H. (1918). The project method. *Teachers College Record*, 19(4), 319-335.
- Knoll, M. (2012). "I had made a mistake": William H. Kilpatrick and the project method. *Teachers College Record*, 114(2), 1-45.
- MacGillivray, H., & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study, The 18th ICMI Study* (pp. 109-120). Springer.

- Makar, K. (2004). *Developing statistical inquiry: prospective secondary mathematics and science teachers' investigations of equity and fairness through analysis of accountability data* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Texas.
- Makar, K. (2008). *A model of learning to teach statistical enquiry* [Ponencia]. IASE Roundtable Conference: Challenges for Teaching and Teacher Education, Monterrey, Mexico. International Statistical Institute. https://iase-web.org/documents/papers/rt2008/T4P4_Makar.pdf?1402524990.
- Makar, K., & Fielding-Wells, F. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman. *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study, The 18th ICMI Study* (pp. 347-358). Springer.
- Nascimento, M., & Martins, J. (2008). *Teaching and learning of statistics: the project approach* [Ponencia]. 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, México. International Statistical Institute. Recuperado de: <https://www.mathunion.org/icmi/research-and-development-teaching-and-learning-statistics>
- Nascimento, M., Martins, A., y Estrada, A. (2014). La vida es sueño: proyectos de estadística en ingenierías. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 475-483). IEM.
- Ojeda, M. (2011). *Aprender estadística con proyectos: memoria de una experiencia replicable*. Universidad Veracruzana.
- Pecore, J. (2015). From Kilpatrick's project method to project-based learning. En M. Y. Eryaman y B. C. Bruce (Eds.), *International Handbook Of Progressive Education* (pp. 155-171). Peter Lang Publishing.
- Ramirez-Faghih, C. (2012). *Fostering change in college students' statistical reasoning and motivation through statistical investigation* [Tesis doctoral, Universidad de California]. Recuperado de: <https://www.semanticscholar.org/paper/Fostering-Change-in-College-Students'-Statistical-Ramirez-Faghih/c3510706e5628f8ca4c74d-2169792726f15f4ebb>
- Rivera, E. (2015). El aprendizaje de la estadística a partir de la investigación. *Uno*, 69(1), 63-69.

- Sagarribai, M. (2015). *Aprendizaje de estadística y probabilidad en 4º ESO mediante la metodología basada en proyectos* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Internacional de La Rioja. Recuperado de: https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/3149/Martin_Sagarribai_Sesma.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Santana, A., & Gómez-Blancarte A. L. (2019). Opportunities and challenges for project-based learning: the case of statistical projects. En A. Rosas (Ed.), *Research reports in Mathematics Education: the classroom* (pp. 17-46). LD Books.
- Santos, N., & Cesar, M. (2006). *Project work in statistics: statistics learning as a tool to help students' knowledge about their educational community* [Ponencia]. Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Bahia, Brasil. International Statistical Institute. <https://iase-web.org/documents/papers/icots7/C418.pdf?1402524967>
- Sisto, M. (2007). *Using peer assessment of project presentations to develop skills as consumers of statistical information* [Ponencia]. IASE Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics, Guimarães, Portugal. Recuperado de: <http://iase-web.org/documents/papers/sat2007/Sisto.pdf>
- Sovak, M. (2010). *The effect of student-driven projects on the development of statistical reasoning* [Tesis doctoral, Universidad de Pittsburgh]. Recuperado de: https://pdfs.semanticscholar.org/4183/e66e547f77edcb4acaa6d9916184228cfa4e.pdf?_ga=2.130062095.1853274655.1584504940-122469191.1583861923
- Spence, D., & Bailey, B. (2015). Technologies to facilitate each stage of student-directed statistics projects. En P. Bogacki. (Ed.), *Electronic Proceedings of the Twenty seventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 220-228). Pearson.
- Terán, T., y Nascimbene, A. (2015). *El material didáctico que aporta el alumno. Una experiencia de construcción significativa del aprendizaje a través de proyectos* [Ponencia]. IASE 2015 Satellite Conference, Rio de Janeiro, Brasil. International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/sat2015/IASE2015%20Satellite%2059_TERN.pdf?1438922693
- Thomas, J. (2000). *A review of research on project-based learning*. San Rafael, CA: The Autodesk Foundation. Recuperado de: http://www.bobpearlman.org/BestPractice/PBL_Research.pdf

- Ulrich, C. (2016). John Dewey and the project-based learning: landmarks for nowadays Romanian education. *Journal of Educational Sciences & Psychology* 1(6), 54-60.
- Verhoeven, P. (2011). *Taking statistics outside the classroom: researching the community* [Ponencia]. IASE 2011 Satellite Conference, Dublin, Ireland. International Statistical Institute. Recuperado de: [https://iase-web.org/documents/papers/sat2011/IASE2011Paper2.4 Verhoeven.pdf?1402524996](https://iase-web.org/documents/papers/sat2011/IASE2011Paper2.4%20Verhoeven.pdf?1402524996)
- Verhoeven, P. (2013). *Engaging students in statistics education: situated learning in statistics projects* [Ponencia]. 59th ISI World Statistics Congress, Hong Kong, China. Recuperado de: <https://www.statistics.gov.hk/wsc/IPS045-P3-S.pdf>
- Villazcán, M. (2014). *Comparación de métodos de enseñanza sobre el aprendizaje de conceptos de estadística inferencial en normalistas* [Reporte de especialidad]. Universidad Veracruzana.
- Walsh, T. (2011). Implementing project based survey research skills to grade six ELP students with the survey toolkit and TinkerPlots. *Journal of Statistics Education*, 19(1). Recuperado de: <http://ww2.amstat.org/publications/jse/v19n1/walsh.pdf>
- Wardrop, R. (1999). Small student projects in an introductory statistics course. En T. Moore (Ed.), *Teaching Statistics, MAA Notes No. 52* (pp. 19-25). Mathematical Association of America.
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. Recuperado de: [http://iase-web.org/documents /intstatreview/99. Wild.Pfannkuch.pdf](http://iase-web.org/documents/intstatreview/99.Wild.Pfannkuch.pdf)
- Young, L. J. (2017, marzo 20). *What is a statistical project?* American Statistical Association. Recuperado de: <https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/EDU-statproject.pdf>.

Datos de autores:

Alberto Santana Ortega, Escuela Normal Rural “Carmen Serdán” (México)

Ana Luisa Gómez-Blancarte, Instituto Politécnico Nacional (México)

Correos-e: jgsraso@gmail.com, algomezbl@ipn.mx

CAPÍTULO 5

Instrumento diagnóstico para la evaluación de habilidades espaciales en sólidos de revolución: Validación de contenido

*Estela Juárez-Ruiz, Carina Andrea Hernández Pacheco,
Josip Slisko Ignjatov, Ruth García Solano*

Resumen

En este trabajo se plantea el problema de la evaluación de habilidades visuales espaciales en el tema de sólidos de revolución, y se describe el proceso de construcción y validación de contenido de un cuestionario de preguntas abiertas, para ser aplicado en estudiantes de tercer año de bachillerato y primer año de licenciatura. A partir del análisis de investigaciones sobre el tema, se describe la identificación de cinco habilidades y cómo se definen indicadores específicos para cada una de ellas, en el tema de sólidos de revolución. Con estos indicadores, se diseñaron los ítems del cuestionario y se realizó su evaluación mediante el juicio de cinco expertos en educación matemática, por medio de un instrumento que valoró las categorías sobre claridad, coherencia y relevancia de cada ítem, además la suficiencia del conjunto de ítems, en una escala ordinal de 1 a 4. Mediante el estadístico V de Aiken, se analizó la concordancia de las valoraciones de cada ítem y cada categoría. Los resultados mostraron valores bajos de concordancia en algunos ítems y categorías, pero después de realizar modificaciones al instrumento e indicadores y una segunda evaluación por los mismos jueces, se lograron altos niveles de concordancia y valoraciones en los ítems.

Palabras clave: Visualización, geometría, sólidos de revolución

Introducción

La importancia del proceso de visualización en la Educación Matemática es un tema que ha sido abordado por diversos investigadores. Un ejemplo

de ello es el trabajo de Gutiérrez (1996), quien destaca que la visualización y la representación gráfica se han venido reconociendo en este campo, por lo que presenta una indagación teórica sobre los conceptos relacionados al campo de la visualización, tales como “imagen mental”, “imagen espacial” y “pensamiento espacial”, entre otras.

A partir de la información que Gutiérrez recolectó, propuso un marco teórico sobre la actividad de visualización, unificando la terminología utilizada por los autores estudiados, e interpretando los conceptos definidos por ellos en una sola composición. Además, en la segunda parte de su artículo, plantea preguntas relacionadas con el análisis del comportamiento de estudiantes de primaria y secundaria cuando utilizan algún *software* dinámico en 3-dimensiones, las cuales son discutidas bajo el marco teórico que había organizado previamente.

Por otro lado, Gonzato, Godino y Neto (2011) trabajaron en un estudio preocupados por la evaluación del conocimiento didáctico-matemático que tienen futuros profesores sobre la visualización de objetos tridimensionales. Para ello, construyeron un cuestionario que refleja aspectos específicos de las diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas: el conocimiento común, especializado y ampliado del contenido y el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. El objetivo que marcaron los autores para este trabajo fue el de describir el proceso de construcción del cuestionario, para evaluarlos desde el paradigma de la investigación de diseño.

Las tareas relacionadas con aspectos específicos de la visualización de objetos tridimensionales fueron sobre coordinación e integración de las vistas de objetos, rotación de un objeto en el espacio, plegar y desplegar desarrollos, composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional y generación de sólidos de revolución. Todo esto permitió que futuros profesores explicitaran algunos aspectos de sus diversos tipos de conocimientos. Además, la implementación del cuestionario a un grupo piloto les permitió hacer la selección y algunos cambios pertinentes de las tareas para una versión final del mismo (Gonzato et al., 2011).

Andrade y Montecino (2013) por su parte, identificaron en su estudio acerca de la conversión de registros de representación en cálculo integral, que existen dificultades en estudiantes universitarios chilenos para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Una de las causas que señalan los autores, es que en la educación chilena no se promueven los procesos cognitivos de razonamiento y visualización espacial. Como no se tiene un buen dominio de esos procesos, Andrade y Montecino indican que existe una dificultad en los estudiantes en la conversión del registro algebraico al registro gráfico, la cual es una problemática que se debe atender por medio de propuestas de actividades que involucren los cambios de registros entre los diferentes tipos de representaciones semióticas. De no ser así, manifiestan los autores, pueden presentarse conflictos cognitivos al cambiar de dimensiones, ya que observaron que existen deficiencias en los estudiantes participantes en representar imágenes o figuras tridimensionales en dos dimensiones, complejizando tal representación a través de lápiz y papel.

El trabajo de Blanco, Diego-Mantecón y Sequeiros (2019) también destaca que la visualización es un aspecto esencial en el razonamiento matemático, en el proceso de resolución de problemas, argumentación y prueba de diversas áreas de las matemáticas. Además, debido a los elementos visuales que se presentan en geometría, la visualización es considerada parte fundamental en esta área. El objetivo de su trabajo se basó en analizar los procesos de visualización que manifiestan futuros maestros al resolver una tarea de generación y representación de sólidos de revolución, para conocer cómo los generan, qué imágenes mentales crean y qué tipo de representación utilizan para comunicar tales imágenes; e identificar las dificultades que presentan con relación a dichos procesos. Desde un enfoque ontosemiótico y desde una metodología de investigación mixta se analizó la información, encontrando errores en el procesamiento visual de la información. Los autores afirman que los errores presentados son causados por las dificultades para movilizar habilidades de reconocimiento de relaciones y posiciones espaciales.

Planteamiento del problema

Desde el punto de vista de la psicología y la interdisciplinaridad, se ha observado que la puntuación de un estudiante en tareas relacionadas con capacidades visuales espaciales predice el éxito del estudiante en las disciplinas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, por sus siglas en inglés). El estudio desarrollado por Wai, Lubinski y Benbow (2009) es una muestra de ello. En su investigación, los participantes fueron extraídos

por medio de una muestra aleatoria estratificada de escuelas secundarias de EUA, (Grados 9-12, $N = 400,000$), y les dieron seguimiento longitudinal durante más de 11 años. Sus hallazgos demostraron que la capacidad visual espacial evaluada durante la adolescencia, es un atributo psicológico destacado entre los jóvenes que posteriormente logran credenciales educativas avanzadas y ocupaciones en STEM.

El término visualización en el contexto de las matemáticas, difiere algo del uso común en la psicología. En la visualización matemática lo que interesa es la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado, para representar un concepto o problema matemático y usar el diagrama para lograr su comprensión, y como ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo, sino un medio hacia un fin, que es la comprensión (Zimmermann y Cunningham, 1991).

El trabajo de Duval (1999) titulado “Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático, cuestiones básicas para aprender” es un referente en el tema de visualización en el contexto matemático; en él el autor también establece que la representación y la visualización son el núcleo de la comprensión en matemáticas, y que es necesaria porque muestra la organización de las relaciones, pero no es primitiva, porque no es una mera percepción visual.

De esta manera, los procesos de visualización son fundamentales para poder comprender temas específicos de matemáticas, como es el caso de sólidos de revolución.

En el cálculo de volúmenes de este tipo de sólidos, los estudiantes tienen dificultades tanto para visualizar los sólidos tridimensionales y cómo se generan, a través de la rotación de una figura plana alrededor de una recta (por ejemplo, los estudios de Mofolo-Mbokane, Engelbrecht y Harding, 2013 y Rösken y Rolka, 2006), como para comprender y utilizar la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx,$$

Confunden la expresión anterior con la siguiente, que es errónea:

$$V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx,$$

pues están “cognitivamente fijos en algoritmos y procedimientos en lugar de reconocer las ventajas de visualizar” (Rösken y Rolka, 2006, p. 463). Manifiestan problemas algebraicos porque no identifican en un primero momento que la expresión:

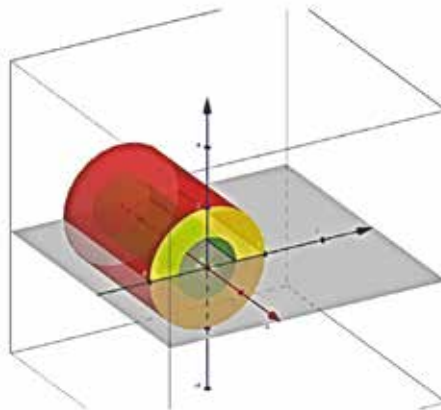
$$(f(x))^2 - (g(x))^2 \neq (f(x) - g(x))^2$$

Y geométrico, porque les cuesta trabajo visualizar, por un lado, cómo se genera un sólido de revolución; y por otro, el problema del cálculo del volumen de un sólido de revolución con agujero, como es el caso del cilindro recto mostrado en la Figura 1. Los estudiantes proponen calcular el volumen del cilindro hueco con la fórmula equivocada: $\pi(R-r)^2h$, donde R y r denotan los radios mayor y menor del cilindro respectivamente y es el largo, y no identifican que es necesario realizar el volumen total menos el volumen del hueco por separado:

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

De este problema geométrico y algebraico se genera la confusión que se generaliza al cálculo de volúmenes de figuras más complejas (para ver más sobre este problema, consultar Andrade y Montecino, 2013).

Figura 1. Cilindro recto (Imagen hecha en el *applet* de GeoGebra de Del Río, s.f.).



Habiendo identificado este problema en los estudiantes, surge la pregunta de cómo evaluar qué habilidades de visualización espacial poseen los estudiantes en este tema, con el objetivo de establecer un punto de partida para el diseño de una propuesta de aprendizaje o secuencia didáctica que ayude a desarrollarlas.

Por lo anterior, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo diseñar un instrumento diagnóstico que evalúe habilidades de visualización espacial en el tema de sólidos de revolución, para ser aplicado en estudiantes de bachillerato y primer año de licenciatura?

El objetivo general del trabajo es diseñar un cuestionario de preguntas abiertas que permita evaluar habilidades visuales espaciales involucradas en el tema de sólidos de revolución, para ser aplicado en estudiantes de bachillerato y primer año de licenciatura, con validez de contenido, sustentado en habilidades visuales.

La hipótesis es que si se realiza la validez de contenido por medio del juicio de expertos a la propuesta de cuestionario, es posible lograr una concordancia significativa entre sus valoraciones. Esta investigación se enmarca en el tema de sólidos de revolución desde la perspectiva del cálculo integral, de ahí el nivel de los estudiantes, grados 12-13.

Marco teórico

De acuerdo con Zimmermann y Cunningham (1991) y Hershkowitz et al., (1989, citado en Arcavi, 2003), Arcavi (2003, p. 217) define visualización como sigue:

Capacidad, proceso y producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, dibujos, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, la visualización está vinculada con algunas capacidades del individuo, llamadas capacidades visuales espaciales, las cuales han ido conformándose a través de la preparación de instrumentos para examinar estas capacidades. Cornoldi y Vecchi (2004) describen un listado de capacidades cognitivas extraídas de

estudios o revisiones, tales como organización visual, escaneo visual planeado, orientación espacial, reconstrucción visual, generación de la imagen y manipulación de la imagen, entre otras, y proporcionan una definición de cada una de ellas (ver tabla 1.1 en Cornoldi y Vecchi, 2004, p. 16).

Miragliotta, Baccaglini-Frank y Tomasi, (2017) proporcionan una interpretación de estas capacidades visuoespaciales desde la perspectiva de la Educación Matemática, basándose en la teoría de conceptos figurales de Fischbein (1993) y en la aprehensión cognitiva de Duval (1995), en el contexto de la geometría euclidiana.

Con respecto a la teoría de conceptos figurales, Fischbein (1993) estableció que el pensamiento geométrico está constituido por una interacción constante entre el componente figural de las figuras, y el componente conceptual de las figuras. Ambos componentes deben considerarse, si uno está interesado en investigar procesos involucrados en el procesamiento y manipulación de imágenes vinculadas en la resolución de tareas geométricas.

En general, según Fischbein, los conceptos y las figuras constituyen dos entidades mentales diferentes, pues afirma:

Por un lado, un concepto es una representación simbólica (casi siempre verbal), utilizada en el proceso de pensamiento abstracto que posee un significado general correspondiente a un ensamble de representaciones concretas con respecto a lo que ellas tienen en común [...] En contraste, una imagen mental es una representación sensorial de un objeto o un fenómeno. (Fischbein, 1993, p.139).

El pensamiento geométrico trata con objetos mentales llamados *conceptos figurales*, que no son reducidos, ni a figuras usuales ni a conceptos genuinos, sino a entidades que poseen tanto propiedades conceptuales como figurales. El *componente conceptual* se refiere a cualidades como idealidad, abstracción, generalidad y perfección, mientras que el *componente figural* corresponde a las propiedades espaciales como forma, posición y magnitud (Fischbein, 1993).

Por otro lado, Duval (1995) considera una figura como una *aprehensión cognitiva* pues “hay varias formas de ver un dibujo o un arreglo de estímulo visual” (p. 143). El proceso de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una aprehensión cognitiva. Esta acción no es unívoca, pues hay diferentes formas de “ver” un

dibujo o de interpretar un estímulo visual. Duval distinguió cuatro formas de aprehensión cognitiva: perceptual, secuencial, discursiva y operativa.

La aprehensión perceptiva se caracteriza por el reconocimiento de una configuración (una forma, una representación de una cosa...), en el plano o en profundidad, puede reconocer lo que se percibe e identificar una o varias figuras o subfiguras sin asociarle ninguna afirmación matemática.

La aprehensión secuencial se produce cuando se construye una configuración o se describe su construcción. En este caso las diferentes unidades figurales emergen en un orden que está en relación con sus propiedades matemáticas.

La aprehensión discursiva se produce cuando se establece una asociación de las configuraciones con sus propiedades matemáticas a través del habla (definiciones, propiedades, etc.) que determinan sin ambigüedad el dibujo representado.

Finalmente, *la aprehensión operativa* se caracteriza por la realización de alguna modificación a la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorientándolos en el plano de la figura o en una pantalla en un proceso figural específico. Estas modificaciones pueden ser realizadas mental o físicamente, a través de varias operaciones (Duval, 1995).

Con base en la teoría de conceptos figurales y la teoría de la aprehensión cognitiva, Miragliotta et al., (2017) eligen algunas capacidades visuales espaciales y transponen la definición original a la esfera del pensamiento geométrico. En su investigación las siguieron llamando capacidades, sin embargo, en este estudio las llamaremos habilidades, pues tienen un componente de aprendizaje matemático. Se definen a continuación.

- *Organización visual* es la habilidad para reconocer conceptos figurales a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.
- *Escaneo visual* es la habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación.
- *Reconstrucción visual* es la habilidad para reconstruir el componente figural de un concepto figural en una representación dada, de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.
- *Generación de imágenes* es la habilidad de reproducir en la mente instantáneamente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo.

- *Manipulación de la imagen* es la habilidad de usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta. Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva (Miragliotta et al., 2017).

Método

El diseño de la investigación es de corte cuantitativo, del tipo prueba de hipótesis. El estudio es conducido en tres etapas: Construcción de los indicadores de desempeño para cada una de las dimensiones de visualización, establecidas por Miragliotta et al., (2017), para el caso específico de sólidos de revolución; diseño de los ítems del instrumento conforme a cada uno de los indicadores ya establecidos; y validación del contenido por medio de jueces expertos y el estadístico V de Aiken (Aiken, 1980, 1985).

Con respecto al primer punto, se diseñan para cada una de las dimensiones de visualización para el tema de sólidos de revolución diversos indicadores, como puede observarse en la Tabla 1.

Tabla 1. Indicadores de visualización espacial para sólidos de revolución.

Dimensiones	Indicador
Organización visual	Identifica conceptos figurales planos y tridimensionales.
Escaneo visual	Reconoce las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación. Describe las propiedades de un sólido de revolución a partir de su representación.
Reconstrucción visual	Construye una figura geométrica tridimensional a partir de indicaciones escritas.
Generación de imágenes	Genera imágenes de sólidos de revolución siguiendo instrucciones.
Manipulación de la imagen	Desarrolla sólidos de revolución a través de la manipulación de figuras planas.

Con respecto al diseño de los ítems, inicialmente se construye un instrumento con nueve ítems distribuidos en seis preguntas, una por cada indicador, pero después de la primera revisión por los jueces expertos y atendiendo a sus sugerencias, se obtuvo un instrumento con quince ítems distribuidos en ocho preguntas.

Los jueces evaluaron la claridad, coherencia y relevancia de cada una de las preguntas del instrumento, y la suficiencia del conjunto de ítems. Las definiciones de cada categoría se muestran en la Tabla 2 (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008).

Tabla 2. Descripción de las categorías de evaluación de los ítems

Categoría	Definición
Claridad	El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.
Coherencia	El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.
Relevancia	El ítem es esencial o importante, es decir debe ser incluido.
Suficiencia	Los ítems son suficientes para obtener una medición completa de lo que se pretende medir.

Cada una de las preguntas se somete a juicio de experto en el formato de la Figura 2. Contiene la dimensión a evaluar con su definición, la propuesta de indicador, la propuesta de ítems, y las categorías a evaluar: claridad, coherencia y relevancia, así como un apartado para observaciones. Al final de la prueba se pregunta por la suficiencia del conjunto de preguntas. La calificación otorgada por cada juez es un número en una escala ordinal de 1 a 4, siendo 1 *no cumple con el criterio*, 2 *bajo nivel*, 3 *moderado nivel* y 4 *alto nivel*.

Figura 2. Formato de presentación de ítem
para la evaluación de los jueces

DIMENSIÓN	INDICADOR	ÍTEM	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
Reconstrucción visual Capacidad para reconstruir el componente figurativo de un concepto figurativo en una representación dada de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.	4. Construye una figura geométrica tridimensional a partir de indicaciones escritas.	5. Dibuja en tres dimensiones una esfera de radio R colocada en el centro de una mesa cuadrada de lado $4R$. La esfera tiene un agujero cilíndrico de radio $r < R$ que la traspasa y es perpendicular a la mesa.			
Observaciones:					

Los jueces evaluaron cada una de las preguntas del cuestionario en dos momentos diferentes en el tiempo, de forma cuidadosa e independiente. En cada una de ellas se evaluó la concordancia de sus valoraciones a través de la V de Aiken (Aiken, 1980, 1985), que es un estadístico diseñado para realizar validez de contenido por medio del juicio de expertos, aplicable a pequeñas o grandes muestras de jueces y con categorías de calificación en la escala ordinal. El rango de valores que toma este estadístico es de 0 a 1, un valor de $V = 0$ se obtiene cuando todos los jueces seleccionan la calificación mínima, y un valor $V = 1$ de cuando todos los jueces seleccionan la calificación más alta posible.

Si N evaluadores inspeccionan una pregunta, en una escala de calificaciones ordinales de c categorías. Se asigna un peso de 0 a cada una de las n_0 calificaciones que caen en la menor categoría, un peso de 1 a las n_1 calificaciones asignadas en la siguiente categoría, y así sucesivamente hasta asignar un peso de $c - 1$ a cada una de las n_{c-1} calificaciones en la c -ésima categoría, entonces V se calcula por medio de la fórmula

$$V = \sum_{i=1}^{c-1} \frac{in_i}{N(c-1)}$$

(para más detalles ver Aiken, 1980). Una forma equivalente de calcular este estadístico se puede ver en Penfield y Giacobbi (2004).

En Aiken (1985) se proporciona una tabla con medidas probabilísticas del valor desconocido poblacional V , denotado por Vp , para un rango de categorías de calificación de 2 a 7, un rango de evaluadores de 2 a 25 y niveles de significancia del 95% y del 99%, con la prueba de hipótesis siguiente (ver Penfield y Giacobbi, 2004):

$$H_0: Vp = 0.5, H_a: Vp > 0.5$$

En nuestro estudio, con un nivel de significancia del 99%, 5 jueces expertos y 4 niveles de evaluación, el valor de Vp es de 0.93 (Aiken, 1985).

Resultados

En la evaluación de la primera versión del instrumento, los jueces realizaron observaciones, comentarios y sugerencias a los ítems. La V de Aiken se muestra en la Tabla 3. En las primeras dos preguntas se obtuvieron valores de V menores a 0.93 por lo que no fue posible rechazar la hipótesis nula de que no existe concordancia entre los jueces. En la suficiencia del conjunto de ítems (no mostrada en la Tabla 3) se obtuvo una $Vp = 0.8$, también baja, de tal manera que tampoco se rechazó la hipótesis nula.

Tabla 3. Valores del estadístico V de Aiken en la primera evaluación de expertos

Pregunta	Claridad	Coherencia	Relevancia
Pregunta 1	0.87	0.73	0.87
Pregunta 2	0.73	0.87	0.93
Pregunta 3	0.93	1	1
Pregunta 4	0.93	1	1
Pregunta 5	1	1	1
Pregunta 6	0.93	0.93	1

Una vez que se atendieron las observaciones hechas por los expertos, se corrigió el instrumento, tanto en la redacción de algunos indicadores como en la de algunos ítems, quedando un instrumento de quince ítems

distribuidos en ocho preguntas que fue enviado nuevamente a los cinco jueces. Los resultados de esta segunda evaluación con el estadístico V de Aiken se muestran en la Tabla 4. En todas las evaluaciones con excepción de una, se obtuvieron valores que permitieron rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa que establece una concordancia significativa entre los evaluadores.

Tabla 4. Valores del estadístico V de Aiken de la segunda evaluación de expertos

Pregunta	Claridad	Coherencia	Relevancia
Pregunta 1	0.8	1	1
Pregunta 2	1	1	1
Pregunta 3	0.93	1	1
Pregunta 4	1	0.93	1
Pregunta 5	1	1	1
Pregunta 6	0.93	0.93	1
Pregunta 7	1	1	1
Pregunta 8	1	1	1

En la Figura 3 se muestra el ítem cuatro en su versión final. Este ítem corresponde a la dimensión generación de la imagen y al indicador: genera imágenes de sólidos de revolución siguiendo instrucciones.

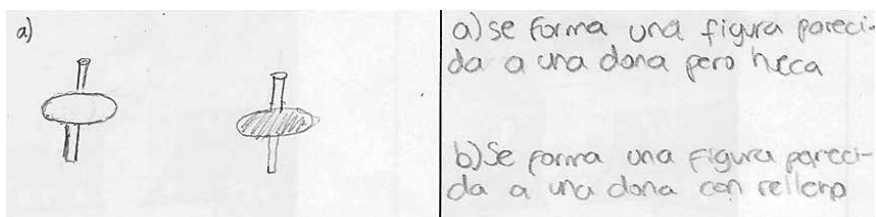
Figura 3. Ítem del instrumento correspondiente a la generación de imágenes

4. Describe en forma escrita o con un dibujo la figura tridimensional que se genera al hacer girar cada una de las siguientes figuras alrededor de sus rectas correspondientes.



Una forma de identificar las habilidades visuales con el instrumento validado es interpretando si la respuesta del estudiante cumple o no con el indicador correspondiente de la dimensión evaluada. Un ejemplo se muestra en la Figura 4, donde se presentan dos respuestas al ítem cuatro de la Figura 3 dadas por dos estudiantes cuando se aplicó la prueba piloto. El estudiante de la figura izquierda no genera las imágenes correctas, visualiza que al girar la circunferencia alrededor de la recta se genera un elipsoide hueco y un elipsoide relleno en el caso del círculo. Por el contrario, las respuestas dadas en la figura de la derecha indican que el estudiante pudo generar en ambos casos las imágenes, las cuales describe correctamente en forma escrita.

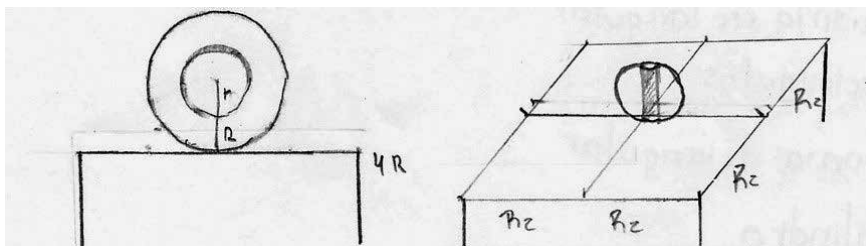
Figura 4. Ejemplos de respuestas al ítem 4



Otro ejemplo se muestra en la Figura 5. El ítem cinco corresponde a la dimensión de reconstrucción visual, cuyo indicador es: Construye una figura geométrica tridimensional a partir de indicaciones escritas. El enunciado de este ítem dice: Dibuja en tres dimensiones una esfera de radio R colocada en el centro de una mesa cuadrada de lado $4R$. La esfera tiene un agujero cilíndrico de radio $r < R$ que la traspasa y es perpendicular a la mesa.

Como puede observarse en la Figura 5, el estudiante que dibujó la figura de la izquierda presenta problemas para interpretar lo que significa “un agujero perpendicular a la mesa”, pues desde la perspectiva que muestra en su dibujo el agujero es paralelo a la mesa. Por el contrario, el estudiante que dibujó la figura de la derecha siguió las instrucciones y realizó un dibujo que cumple con las indicaciones dadas en el enunciado del problema.

Figura 5. Ejemplos de respuesta al ítem 5 de la prueba.



Reflexiones

En este trabajo se presentó una propuesta de cuestionario con el objetivo de identificar habilidades visuales espaciales en el tema de sólidos de revolución, para ser aplicado en estudiantes de tercer año de bachillerato y primer año de licenciatura (grados 12-13). Cuenta con 15 ítems de los cuales 12 son de respuesta abierta y tres de opción múltiple. Los ítems de opción múltiple atendieron la dimensión de escaneo visual cuyo indicador es: Reconoce las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación. El cuestionario fue diseñado para responderse en 60 minutos, que es el tiempo usual de las clases de matemáticas.

La decisión de que la mayoría de los ítems fueran de respuesta abierta fue tomada debido a que, por un lado, se buscó evaluar la habilidad del estudiante para crear o describir imágenes o dibujos apropiados, para representar conceptos y evaluar su comprensión, que es lo que interesa en la visualización matemática (Zimmermann & Cunningham, 1991).

Por otro lado, hay evidencia de que los ítems de opción múltiple son ambiguos en educación matemática a la hora de establecer criterios de decisión en la asignación de niveles de desempeño de los estudiantes. Un ejemplo de ello es en Geometría con la teoría de Van Hiele. En efecto, Gutiérrez y Jaime (1987, citado en Gutiérrez, 2012), diseñaron y aplicaron dos test de opción múltiple basados en los niveles de Van Hiele en los temas de geometría espacial y medida de magnitudes geométricas, a estudiantes de la escuela de Magisterio de Valencia. Gutiérrez (2012) explica que durante el análisis de datos de dicha investigación identificaron problemas metodológicos causados por la decisión de asignar el número de un nivel de razonamiento al estudiante.

Algunas de las razones acerca de los problemas metodológicos que tuvieron, explica Gutiérrez, es que los ítems de opción múltiple tienen la desventaja de que se pueden responder correctamente por azar, o porque las respuestas incorrectas son demasiado obvias, o porque es posible llegar a la respuesta correcta en niveles altos de Van Hiele por sentido común, sin necesidad de usar el razonamiento matemático sofisticado propio de estos niveles (Gutiérrez, 2012).

Trabajar con cuestionarios de respuesta libre o abierta evita cometer errores como los ya mencionados, da oportunidad a los estudiantes de expresar su propuesta de solución en forma escrita o a través de un dibujo y permite una evaluación cuantitativa o una valoración cualitativa, es decir, permite realizar estudios con un enfoque de investigación mixto.

Los ítems del instrumento fueron diseñados con el objetivo de evaluar cada una de las habilidades visuales establecidas por Miragliotta et al., (2017), con base en indicadores como los propuestos en este trabajo. De la misma forma, estas habilidades e indicadores pueden ser el sustento teórico para el diseño de propuestas didácticas, que tengan el propósito de desarrollar estas habilidades de visualización espacial en el tema de sólidos de revolución en estudiantes de los niveles antes mencionados.

Conclusión

En este trabajo se mostró el proceso de construcción y validación de contenido de un cuestionario, para evaluar habilidades visuales en el tema de sólidos de revolución, para ser aplicado en estudiantes de tercer año de bachillerato y primer año de licenciatura. Asimismo, se estableció un posible camino que pueda orientar a estudiantes que se están formando como investigadores, en cómo diseñar y validar sus propios instrumentos de evaluación.

La validación por expertos del instrumento en su versión final mostró una concordancia estadísticamente significativa a través del estadístico de Aiken en el análisis de cada pregunta, en cada categoría evaluada: claridad, coherencia, relevancia, así como en la suficiencia del número de ítems.

Las habilidades visuales propuestas por Miragliotta et al. (2017) fueron diseñadas para Geometría Euclidiana, pero los autores de este trabajo las trasladaron al campo del cálculo integral, lo cual muestra que los descriptores de estas habilidades son flexibles para poder trasladarse a diversos

campos, solo definiendo indicadores adecuados para cada contenido temático de matemáticas. Estos indicadores pueden sustentar no solo el diseño de instrumentos de evaluación, sino de propuestas didácticas y su análisis.

Referencias

- Aiken, L. R. (1980). Content validity and reliability of single items or questionnaires. *Educational and Psychological Measurement*, 40(4), 955-959. <https://doi.org/10.1177/001316448004000419>
- Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, 45(1), 131-142. <https://doi.org/10.1177/0013164485451012>
- Andrade, M. M., & Montecino, M. A. (2013). Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 26* (pp. 473-479). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Blanco, T. F., Diego-Mantecón, J. M., & Sequeiros, P. G. (2019). Procesos de visualización en una tarea de generación y representación de cuerpos de revolución. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, 33(64), 768-789. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16>
- Cornoldi, C., & Vecchi, T. (2004). *Visuo-spatial working memory and individual differences*. New York: Psychology Press.
- Del Río, L. (n.d.). Calculadora de sólidos de revolución. Recuperada enero 22, 2020, de <https://www.geogebra.org/m/xa43BaV6>
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In M. J. Sutherland R. (Ed.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0>
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, México.
- Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances En Medición*, 6(1), 27-36. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/302438451>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Gonzato, M., Godino, D. J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5-37.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In *20th P.M.E. Conference* (pp. 3-19). Valencia, España.
- Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar: Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática (serie Crítica y fundamentos, nº 41)* (pp. 43-59). Graó: Barcelona.
- Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., & Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. . . *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate*, 40(B), 339-360.
- Mofolo-Mbokane, B., Engelbrecht, J., & Harding, A. (2013). Learning difficulties with solids of revolution: classroom observations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(7), 1065-1080. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.823253>
- Penfield, R. D., & Giacobbi, P. R. (2004). Applying a score confidence interval to Aiken's item content-relevance index. *Measurement in Physical Education and Exercise Science*, 8(4), 213-225. https://doi.org/10.1207/s15327841mpee0804_3
- Rösken, B., & Rolka, K. (2006). A Picture is Worth a 1000 Words-The Role of Visualization in Mathematics Learning. In N. S. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague. Retrieved from <https://eric.ed.gov/?id=ED496932>

- Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835. Recuperado de: <https://doi.org/10.1037/a0016127>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? In S. C. W. Zimmermann (Ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Datos de autores:

Estela Juárez-Ruiz, Carina Andrea Hernández Pacheco, Josip Slisko Ignjatov, Ruth García Solano
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
Correos-e: estela.juarez@correo.buap.mx, carinah30@hotmail.es, josipslisko47@gmail.com,
ruth.garciasol@correo.buap.mx

CAPÍTULO 6

Conexiones matemáticas establecidas por estudiantes de nivel medio superior sobre la función exponencial y logarítmica

Karen Gisel Campo Meneses

Javier García-García

Resumen

La literatura especializada, así como el currículum mexicano, muestran la importancia de estudiar las conexiones matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello, esta investigación responde a la pregunta ¿qué conexiones matemáticas establecen los estudiantes de bachillerato al resolver tareas que involucran a las funciones exponencial y logarítmica? Las conexiones matemáticas se entienden como un proceso en el que una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, teoremas, procedimientos y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Este trabajo es un estudio de casos, en el cual se emplea la Entrevista Basada en Tareas (previamente validadas) para la colecta de datos, cuyos resultados fueron analizados utilizando el análisis temático. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes establecen cinco de las seis tipologías de conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual, donde la conexión matemática de reversibilidad (la conexión central para trabajar estas funciones) es establecida solo por tres de los diez estudiantes.

Palabras clave: conexiones matemáticas, función exponencial, función logarítmica.

Introducción

La matemática por su naturaleza misma está estructurada de tal manera que sus conceptos se encuentran interrelacionados unos con otros formando un todo coherente, es decir, está formada por conexiones matemáticas.

Así, las conexiones entre conceptos matemáticos, entre estos con otras disciplinas y con la vida real se ha constituido en una de las metas del currículum de diversos países (e.g MEN, 1998; NTCM, 2013; SEP, 2017) y constituyen un campo de investigación que reclama cada vez más atención por parte de la comunidad internacional de investigadores en Didáctica de las Matemáticas y de las administraciones educativas a nivel mundial (e.g. Mhlolo, 2012). Esto porque, de acuerdo con varias investigaciones (e.g. Bingölbali y Coşkun, 2016; Businskas, 2008; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2013; García-García y Dolores-Flores, 2018) las conexiones matemáticas, además de ser inherentes a las matemáticas, son una habilidad indispensable que deben desarrollar los estudiantes cuando se les enseña matemáticas porque les permite el desarrollo de habilidades de razonamiento y comunicación.

Asimismo, el establecimiento de conexiones matemáticas contribuye a que los estudiantes tengan una comprensión más profunda y duradera (Eli et al., 2013). Por esta razón, esta investigación se enfoca en el estudio de las conexiones matemáticas, pero particularmente, las asociadas a las funciones exponencial y logarítmica, ya que son conceptos base para la comprensión de conceptos matemáticos más avanzados, en especial en el campo del cálculo, además de tener un conjunto amplio de aplicaciones prácticas en diversas disciplinas y en la vida real (Cano, 2012).

Existen diferentes enfoques en el estudio de las conexiones matemáticas. Entre ellos están aquellas investigaciones que se centran en las conexiones entre las representaciones semióticas (e.g Moon, Brenner, Jacob y Okamoto, 2013); las que estudian aquellas conexiones matemáticas que surgen cuando estudiantes o profesores resuelven problemas de aplicación o de modelado (e.g Yoon, Dreyfus y Thomas, 2010) y las investigaciones que estudian las conexiones matemáticas centradas en un concepto matemático particular (e.g Bingölbali y Coşkun, 2016). A este último enfoque pertenece la presente investigación.

En lo que respecta a las funciones en estudio existen algunas investigaciones relacionadas con la función exponencial (e.g Sastre, Cañibano y D'Andrea 2017; Sureda y Otero, 2013; Castro et al., 2017), sobre la función logarítmica (e.g Escobar, 2014) y sobre ambas funciones en conjunto (e.g Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara, 2016). Estas investigaciones coinciden en que estas funciones son base para temas más avanzados en Cálculo, son funciones que casi no se les presta atención en

la escuela y que requiere de su aprendizaje en tanto que tienen una forma de variación particular que debe ser estudiada.

En este sentido, en el presente escrito, se responde a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conexiones matemáticas establecen los estudiantes de bachillerato al resolver tareas que involucran a las funciones exponencial y logarítmica?

Marco conceptual

Las conexiones matemáticas se asumen, de acuerdo con García (2018) y García-García y Dolores-Flores (2018, 2020), como una relación verdadera que establece un estudiante entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, procedimientos o teoremas entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Estas son exteriorizadas a través de los argumentos escritos, orales o gestuales que los estudiantes evidencian en el momento en que resuelven las tareas matemáticas que se les proponen. Estos autores consideran los siguientes tipos de conexiones matemáticas, mismos que constituyen nuestro marco de referencia para estudiarlas en este trabajo:

- *Representaciones diferentes*: Están referidas a la relación entre los diferentes registros semióticos en los que puede ser expresado un mismo concepto matemático, por ejemplo: lenguaje natural-gráfico, algebraico-gráfico, numérico-tabular, etcétera, o bien, expresado en dos formas distintas dentro de un mismo registro.
- *Parte-todo*: Se refiere a las relaciones lógicas entre conceptos matemáticos, bien sea de generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (un concepto matemático está contenido en otro).
- *Procedimental*: Referida al uso de reglas, algoritmos o fórmulas establecidas dentro de un registro semiótico que son usados para resolver tareas matemáticas. Tales conexiones son de la forma A es un procedimiento utilizado cuando se trabaja con el objeto B. En estas, los algoritmos se convierten en poderosas herramientas que permiten a los estudiantes operar con facilidad, eficiencia y precisión siempre y cuando comprendan el razonamiento que está detrás de ellos.
- *Significado*: Son aquellas conexiones matemáticas establecidas entre un concepto matemático y su definición, o entre un concepto

matemático y una idea relacionada con el sentido que se le otorgue o su contexto de uso.

- *Reversibilidad*: Referida a las relaciones bidireccionales entre dos objetos matemáticos, es decir, se puede partir de un concepto A para llegar a B e invertir el proceso partiendo de B para regresar al A.
- *Característica*: Está referida a la relación entre el concepto y un atributo invariante o rasgo que lo puede distinguir de otros, o bien referida a una relación entre dos conceptos, representaciones, procedimientos mediante un elemento o rasgo en común.

Metodología

La presente investigación es cualitativa, particularmente un estudio de caso, que de acuerdo con Kothari (2004), es una forma de hacer investigación a profundidad de una unidad social (ya sea una persona, una familia, una institución, un grupo cultural, etcétera), lo que implica la observación cuidadosa y el análisis completo de un número limitado de eventos o condiciones. Su objetivo es localizar los factores que explican los patrones de comportamiento de la unidad dada como una totalidad integrada (Kothari, 2004).

Para la colecta de datos se usó a la entrevista basada en tareas que permite recolectar información escrita y verbal a través de la interacción entre un entrevistador (investigador) y un entrevistado (estudiante) en relación con una o más tareas matemáticas (Goldin, 2000).

Contexto de la investigación e instrumento

La investigación se realizó en una preparatoria de la ciudad de Chilpancingo, Guerrero, México. Participaron diez estudiantes de quinto semestre que estaban cursando Cálculo Diferencial y ya habían trabajado las funciones exponenciales y logarítmicas. Los estudiantes participaron por voluntad propia y consintieron el uso de sus datos en esta investigación. En adelante, nos referiremos a ellos como E1, E2, E3..., E10.

El cuestionario (ver tabla 1) —previamente validado por expertos y a través de una aplicación piloto— que se les aplicó constaba de cuatro tareas: en la primera se presentaron dos progresiones (una aritmética de diferencia 1 y otra geométrica de razón 2) en una tabla, a fin de que los estudiantes completaran la tabla, encontraran la relación que hay entre am-

bas progresiones y la evidenciaran a través de una expresión matemática; en la segunda, se les presentó un problema de contagio de una enfermedad donde se usa, además del registro lenguaje natural, el tabular y el gráfico para ser analizados y encontrar tanto el número de personas infectadas en ciertos días o el día en el que había cierta cantidad de personas infectadas; en la tercera, se presentó un problema donde se relacionó la estatura y el peso de los niños entre cinco y trece años de edad y se les pidió encontrar el peso de un niño dada la estatura, encontrar la estatura dado el peso y posterior a ello encontrar la función que modelaba el peso y la que modelaba la altura y finalmente, en la cuarta, se preguntó sobre la definición de las funciones exponencial y logarítmica. Con cada tarea se buscó identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes establecen al resolverlas.

Tabla 1. Tareas planteadas a los estudiantes

1. Completa la siguiente tabla y explica la estrategia usada.

-3	-2		0	1	2	3		5		7		9
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		1	2	4	8	16	32				

- Encuentra una expresión matemática que relacione el término de la segunda fila con el término de la primera fila.
- ¿Qué términos de la primera fila se corresponden con 1024 y de la segunda?

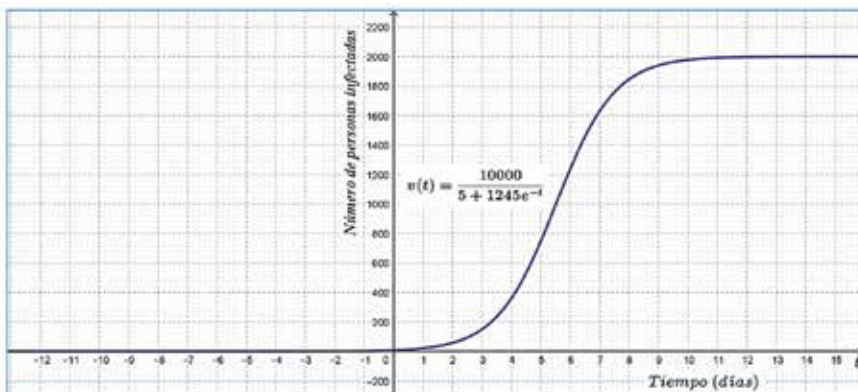
2. Una enfermedad infecciosa comienza a esparcirse en un grupo de 10 000 estudiantes en una universidad. Después de días, el número de personas infectadas se modela mediante la función:

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-kt}}$$

Donde t significa tiempo medido en días y k una constante

-
- a. ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente?
- b. Si después de dos días hay 54 personas infectadas (Sugerencia: con este dato puedes encontrar el valor de k). Considerando el valor de k que encuentres, ¿Cuántas personas estarán infectadas en cinco días?
- c. Considerando $k = 1$, la gráfica que modela el número de personas infectadas es la que se muestra enseguida. Observa la gráfica (ver Figura 1) y responde las preguntas que se plantean.
- ¿En cuánto tiempo habrá 1000 personas infectadas?
 - ¿Cuál es el dominio de la función $v(t)$? ¿Cuál es el dominio que tiene sentido en la situación planteada?
 - ¿Durante qué días la infección se propaga lentamente?
 - ¿Durante qué días la infección se propaga con mayor rapidez?
3. La relación de Ehrenberg $\ln w = \ln 2.4 + (1.84)h$ es una fórmula empírica que relaciona la altura h (en metros) con el peso promedio w (en kilogramos) para niños entre cinco y trece años.
- a. Si una niña de ocho años pesa 28.8 kg ¿cuál es su estatura promedio?
- b. ¿Cuál es el peso promedio de un niño de diez años cuya altura es de 1.5 metros?
- c. ¿Cuál es la función que permite conocer el peso promedio para cualquier niño cuya edad varía entre cinco y trece años? Grafique la función.
- d. ¿Cuál es la función que permite conocer la estatura promedio para cualquier niño cuya edad varía entre cinco y trece años? Grafique la función.
-
4. Define qué es función exponencial y función logarítmica. ¿Existe alguna relación entre ellas? ¿Cuál?
-

Figura 1. Gráfica de la tarea 3



Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se empleó el análisis temático. Este es útil porque permite identificar y analizar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada (Braun y Clarke, 2012). Se eligió porque ofrece ventajas como: es flexible para un conjunto grande o pequeño de datos, puede ser utilizado si existe o no teoría (en nuestro caso es un análisis basado en teoría) y, ha sido utilizado previamente en investigaciones donde los estudiantes resuelven tareas matemáticas que involucran operaciones algebraicas o bien gráficas (García-García y Dolores-Flores, 2018, 2019).

Este método consta de seis fases, las cuales fueron seguidas en esta investigación:

Fase 1. Familiarización con los datos. Implica conocer detalladamente las producciones (verbales, escritas o gestuales) de los estudiantes, involucrarse con los datos para familiarizarle con el lenguaje que estos utilizan y así comprender su forma de razonar.

Fase 2. Generación de códigos iniciales. En esta fase se organiza la información en grupos de un mismo significado. Para ello se debe codificar la mayor cantidad posible de patrones de la información y se incorpora en cada código la información suficiente para no olvidar la perspectiva contextual. Para lograrlo, en este estudio analizamos las producciones escritas (acompañada de las respuestas a la entrevista) de los participantes, identificando proposiciones donde los estudiantes relacionaran o vincularan dos ideas matemáticas. Por ejemplo, la aseveración “Las dos (función exponencial y logarítmica) son crecientes y una va en sentido contrario a la otra” se convirtió en el código: *las funciones exponencial y logarítmica son funciones inversas*.

Esta codificación se fue refinando conforme avanzaba el proceso hasta analizar todas las narrativas de los estudiantes entrevistados.

- *Fase 3.* Búsqueda de temas. Consiste en revisar los datos codificados para identificar áreas de similitud; se agrupan aquellos que comparten algún rasgo de tal manera que se formen familias de códigos y, se describe la característica particular de cada una. Teniendo en cuenta esto, se asigna un tema o subtema a cada agrupación.

pación de códigos y con fines de la presente investigación. Como convención, en este trabajo, cada tema y subtema corresponden a las conexiones matemáticas, en particular las seis tipologías descritas en García (2018).

- *Fase 4. Revisión de temas.* Consiste en una recodificación y el descubrimiento de nuevos temas explicitando un límite. Para ello se debe realizar una lectura de los temas establecidos y por supuesto de los códigos agrupados, la cual debe hacerse analizando si el tema propuesto es útil en relación con la pregunta de investigación, si hay coherencia, si la agrupación realizada es correcta de tal forma que se verifique y se asegure que los temas escogidos sean acordes a los objetivos planteados y cuáles son sus límites. Este proceso permite tanto crear y modificar los temas, subtemas y códigos como desechar los existentes.
- *Fase 5. Definición y denominación de temas.* Implica el establecimiento de jerarquías de acuerdo con la identificación de los datos. Esta fase requiere que el investigador realice y escriba detalladamente el análisis de cada tema identificando la esencia de cada uno a fin de construirle un nombre conciso e informativo (Braun y Clarke, 2012).
- *Fase 6. Redacción del informe.* Se refiere a la estructura del informe de tal forma que esté sustentada en la comprensión e interpretación de la información recogida. Para ello se debe tener un conjunto de temas completamente definidos y analizados para proceder a la redacción del escrito, lo cual implica unir la narrativa analítica y los extractos de datos (vívidos), a fin de contarle al lector una historia coherente y persuasiva sobre los datos, y contextualizarla en la literatura existente.

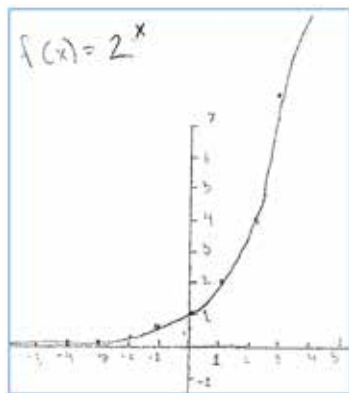
Resultados y análisis

Una vez realizado el análisis temático, se identificó en la producción de algunos estudiantes, cinco de las seis tipologías de conexiones previstas en el marco conceptual. A continuación, se exponen las conexiones matemáticas evidenciadas por los estudiantes en cada una de las tareas propuestas.

Tarea 1

Las conexiones matemáticas evidenciadas en esta tarea es la conexión parte-todo, la cual aparece en las producciones de los estudiantes al encontrar la regularidad y la conexión de representaciones diferentes asociadas a la función exponencial $f(x) = 2^x$. En general el análisis temático muestra que las dos conexiones fueron establecidas por los diez estudiantes. Por ejemplo, todos los estudiantes son capaces de establecer una conexión de representaciones diferentes entre el registro tabular y la expresión $f(x) = 2^x$, pero solo E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 realizan una conexión de representaciones diferentes entre una representación simbólica y una gráfica (ver figura 2).

Figura 2. Conexión de representaciones diferentes realizada por E6 en la tarea 1.



Respecto a la conexión matemática parte-todo, los estudiantes son capaces de establecerla cuando encuentran la expresión que relaciona las progresiones propuestas. Además, entienden tal expresión como un caso particular (parte) de la familia de funciones, específicamente de la familia de las funciones exponenciales (todo), como se observa en el extracto de E2.

E2: Estoy viendo que sería así (hace varios cálculos). Sería 2 elevado a la x .

Entrevistador: Escríbelo y comprueba tu resultado.

E2: (Comprueba con $x = 4$ y con $x = -2$)

Entrevistador: ¿La expresión que tú encontraste es una función o no?

E2: Sí, es una función.

Entrevistador: ¿Por qué?

E2: Porque me está ayudando a sacar los resultados de la tabla (escribe la respuesta en la hoja).

Entrevistador: ¿Qué función sería esa?

E2: Sería una función exponencial

Entrevistador: ¿Por qué?

E2: Porque estamos usando exponente, porque la estamos elevando a una literal (escribe en la hoja la respuesta).

Tarea 2

Esta tarea, que constó de tres incisos, no fue resuelta por todos los diez estudiantes. En el inciso a solo E2, E3, E4, E5, E6, E8 y E10 reconocen las condiciones de la tarea planteada estableciendo así la conexión matemática de tipo procedimental entre la expresión inicial y el procedimiento realizado para encontrar la cantidad de personas infectadas. Esto lo logran al identificar la variable a reemplazar, por lo que evalúan la función en $t = 0$ correctamente.

El inciso b es resuelto solo por E3 quien evidencia haber establecido la conexión matemática de tipo procedimental y de reversibilidad (figura 3). Esta última (referida al uso de la relación inversa: $(\ln(e^x) = x)$) era indispensable para establecer la primera.

Figura 3. Parte de la respuesta de E3 al inciso b de la tarea 2

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{10000}{5 + 1245e^{-2t}} \\
 54 &= \frac{10000}{5 + 1245e^{-2K}} \\
 K &= \left(5 + 1245e^{-2K} \right) (54) = 10000 \\
 (270 + 67250e^{-2K}) &= 10000 \\
 67250e^{-2K} &= 10000 - 270 \\
 67250e^{-2K} &= 9730 \\
 e^{-2K} &= \frac{9730}{67250} = 0.14 \\
 e^{-2K} &= 0.14 \\
 \ln e^{-2K} &= \ln 0.14 \\
 -2K &= \ln 0.14 \\
 K &= \frac{\ln 0.14}{-2} \\
 K &= 0.15
 \end{aligned}$$

El inciso *c* lo responden todos los estudiantes, quienes establecen la conexión matemática característica cuando describen el comportamiento de la función que modela la propagación de la enfermedad. Su resolución también exigía realizar las conexiones parte-todo (entre la gráfica y la gráfica extendida) y procedimental en el registro gráfico (para encontrar visualmente el dominio, rango e intervalos de crecimiento). Por ejemplo, en el extracto de E4 se observa que establece la conexión procedimental cuando mediante el proceso de visualización encuentra los intervalos de crecimiento de la función (conecta la gráfica con el procedimiento visual).

E4: La infección se propaga lentamente desde el primero al segundo.

Entrevistador: ¿Por qué?

E4: Es que desde el cero también sería, pero no sé cómo explicarlo. Sería poner desde el cero día hasta el segundo.

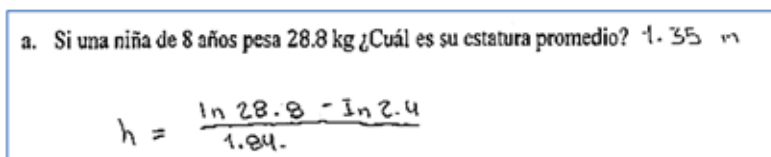
Entrevistador: ¿Por qué en esos días y no en otros? ¿Cómo te das cuenta de que son días?

E4: Porque en la gráfica se ve. En tres empieza a subir muy rápido

Tarea 3

Esta tarea constó de cuatro incisos, los cuales fueron resueltos en su totalidad por algunos estudiantes. En el inciso *a*, E3, E5, E6 y E10 establecieron la conexión procedimental al relacionar la expresión inicial con el procedimiento de resolver una ecuación de primer grado y así encontrar el valor particular de la altura (ver figura 4).

Figura 4. Respuesta de E5 al inciso *a* de la tarea 3



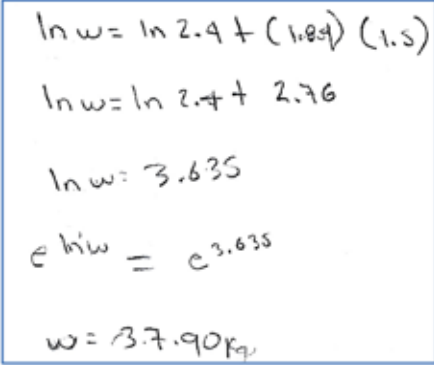
a. Si una niña de 8 años pesa 28.8 kg ¿Cuál es su estatura promedio? 1.35 m

$$h = \frac{\ln 28.8 - \ln 2.4}{1.24}$$

En el inciso *b*, solo E3, E4 y E10 establecen la conexión procedimental y la conexión de reversibilidad en el registro simbólico ($e^{\ln w} = w$). Esto, cuando resuelven una ecuación logarítmica empleando la relación inversa entre el logaritmo natural y la exponencial natural (ver el caso E4, figura 5). En el inciso *c*, similar al inciso anterior, solo E3, E4 y E10 lograron establecer

las conexiones matemáticas: procedimental, en el momento de encontrar la expresión simbólica de la función, de hacer su gráfica y de encontrar el dominio y el rango; parte-todo, cuando consideran que la función que modela el peso es un caso particular de la familia de funciones exponenciales; de reversibilidad ($e^{\ln w} = w$) para encontrar la expresión simbólica de la función que modela el peso; característica, en el momento en el que determinan el dominio y rango y representaciones diferentes, cuando relacionan de manera coherente la expresión simbólica con el lenguaje natural y la gráfica de la función que modela el peso.

Figura 5. Respuesta de E4 al inciso *b* de la tarea 3



The image shows a student's handwritten work for finding the value of w given $\ln w = 3.635$. The work is as follows:

$$\ln w = \ln 2.4 + (1.83)(1.5)$$

$$\ln w = \ln 2.4 + 2.76$$

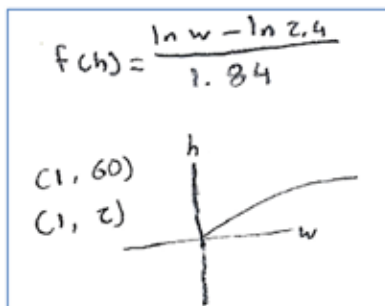
$$\ln w = 3.635$$

$$e^{\ln w} = e^{3.635}$$

$$w = 37.90 \text{ kg}$$

En el inciso *d*, E10, E3 y E4 lo responden correctamente estableciendo las conexiones procedimental, para encontrar la expresión simbólica de la función, hacer su gráfica, y encontrar el dominio y el rango; parte-todo, cuando asumen que la función que permite hallar la altura en función del peso es logarítmica; de reversibilidad, entre las gráficas, dominios y rangos; característica, cuando establecen el dominio y rango de la función partiendo de las características generales de la función logarítmica y representaciones diferentes, cuando relacionan la expresión simbólica, lenguaje natural y gráfica de la función que modela la estatura promedio. Por ejemplo, E10 evidencia tales conexiones mediante el desarrollo de este inciso, encontrando la expresión simbólica de la función y realizando su respectiva gráfica (ver figura 6).

Figura 6. Respuesta de E10 al inciso d de la tarea 3.



Tarea 4

Esta tarea constó de una pregunta en la que se pretendió indagar si los estudiantes conocían la relación de reversibilidad entre la función exponencial y la logarítmica, lo cual exigía, además, el establecimiento de la conexión matemática de significado respecto a cada función. El análisis temático muestra que solo E3, E4 y E10 establecieron la conexión matemática de reversibilidad usándola competentemente para resolver diferentes tareas. Por ejemplo, E10 manifiesta la relación de inversas (ver extracto de E10), pero también la emplea para resolver ecuaciones, realizar gráficas y encontrar dominios y rangos.

Entrevistador: ¿Crees que existe alguna relación entre las funciones exponencial y logarítmica?

E10: Que sería lo contrario a cada una de ellas. Que la exponencial, si no se puede obtener un valor, se usa la logarítmica.

Entrevistador: ¿Cómo son entonces?

E10: Son inversas.

En lo que respecta a la conexión matemática de significado, algunos estudiantes fueron capaces de establecerla con la función exponencial o bien con la función logarítmica, pero hubo una inclinación hacia la primera. Esto pudo deberse a que, en asignaturas previas, los estudiantes habían trabajado algunas cuestiones relacionadas con la función exponencial, como las leyes de exponentes en el nivel básico (secundaria), mientras que la función logarítmica la estudian por primera vez en Cálculo Diferencial en bachillerato y, en ocasiones de manera superficial o rápida.

Conclusión

El interés de este trabajo estuvo centrado en identificar las conexiones matemáticas que establecían los estudiantes mexicanos del bachillerato (el caso de diez estudiantes) al resolver tareas que involucraron a las funciones exponencial y logarítmica. Para ello, usando el análisis temático, logramos identificar que la mayoría de ellos emplean cinco de los seis tipos de conexiones matemáticas previstas en el marco conceptual. No obstante, la conexión de reversibilidad sólo es evidenciada por tres de ellos. Establecer esta conexión en los diferentes registros de representación es clave para resolver tareas que involucren funciones exponenciales y logarítmicas, ya que se trata de funciones inversas. Esto implica, a su vez, realizar las conexiones matemáticas de tipo: parte-todo, representaciones diferentes, característica, significado y procedimental con cada función. El no establecimiento de estas conexiones matemáticas respecto a una de las funciones impide que el estudiante pueda realizar la conexión de reversibilidad, porque para lograrlo es necesario comprender cada función (lo cual se evidencia en el establecimiento de las conexiones matemáticas).

Particularmente la conexión matemática procedimental (en el registro simbólico) fue una de las menos establecidas por los estudiantes. En ocasiones mostraron dificultad para aplicar propiedades de las funciones o bien aplicar los axiomas de campo de los números reales. Por el contrario, mostraron mayor habilidad para realizar gráficas de algunas funciones exponenciales y logarítmicas (conexión representaciones diferentes), manifestar definiciones (conexión de significado), establecer dominios y rangos o bien describir comportamientos de las funciones específicamente usando el registro gráfico (conexión característica y parte-todo), que, para trabajar de manera algorítmica, esto puede deberse a la forma en que se les enseña en el aula. Este resultado es opuesto a lo encontrado por Escobar (2014), pues en su investigación manifiesta que los estudiantes tienden a usar la función logarítmica principalmente de manera algebraica ya que se les suele enseñar en el aula priorizando este registro y las respectivas operaciones en el mismo.

De manera general, cuando los estudiantes se enfrentaron a la primera tarea, las estrategias usadas estuvieron enfocadas en identificar una expresión que modelara un comportamiento lineal, posterior a ello un comportamiento cuadrático y como última estrategia acudieron a pensar en un

comportamiento exponencial. Este resultado coincide con lo reportado por Sureda y Otero (2013) y es evidencia de que los estudiantes tienen más presente las funciones algebraicas (principalmente la lineal y la cuadrática) que las trascendentes. Por ello, es necesario hacer más énfasis en el aprendizaje de comportamientos logaritmo-exponenciales en el aula de clases cuando se aborden estas funciones, incluso involucrar diferentes comportamientos para que ellos aprendan a identificar qué clase de función puede modelar determinados comportamientos.

En este sentido, se considera importante fomentar el aprendizaje de estas funciones mediante el establecimiento de las conexiones matemáticas, ya que, como la literatura muestra, éstas contribuyen a la comprensión de un objeto por parte del sujeto. Así las conexiones matemáticas pueden ser usadas para diseñar propuestas de aula en pro de una comprensión sólida tanto de las funciones exponencial y logarítmica como de la relación entre ellas.

Además de lo anterior, lo encontrado en esta investigación puede servir como base para indagar sobre las conexiones fomentadas por el profesor de matemáticas al abordar las funciones exponencial y logarítmica. Incluso, se pueden estudiar aquellas conexiones matemáticas que se promueven desde el plan de estudios de matemáticas, particularmente las sugeridas para estas funciones. Posiblemente eso explique, en parte, los resultados obtenidos en esta investigación, pero también pueden servir de base para que, junto a los resultados reportados en este trabajo, se propongan intervenciones de aula que desarrolle en los estudiantes la habilidad de usar conexiones matemáticas.

Referencias

- Bingölbali, E. y Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework for Enhancing the use of Making Connections Skill in Mathematics Teaching. *Education and Science*, 41(183), 233-249.
- Braun, V. y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper (Ed.), *Handbook of Research Methods in Psychology*. (pp. 57-71). Washington, DC: American Psychological Association.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. (Tesis doctoral no publicada). Simon Fraser University, Canada.

- Cano, J. M. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una Institución educativa oficial de Medellín*. (Tesis maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M. y Fuentes, M. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 5(13), 1-12.
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, 113(3), 120-134.
- Escobar, N. V. (2014). Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica. *Revista Brasileira de Historia da Matemática*, 14(29), 83-115.
- Ferrari-Escolá, M., Martínez, G. y Méndez-Guevara, M. (2016). “Multiply by adding”: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 42(2016), 92-108.
- García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, International. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227-252.
- García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2019). Pre-university students’ mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 1-22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students’ mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-25. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly y R. A. Lesh

- (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kothari, C.R. (2004). *Research Methodology. Methods and Techniques*. Jaipur, India: New Age International Publisher.
- Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive Level: A Tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 16(2), 176-191.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. y Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers 'understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(3), 201-227.
- NCTM. (2013). *Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sastre, P., Cañibano, A. y D'Andrea, R. (2017). Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente. *Unión*, (48), 84-96.
- SEP. (2017). *Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. Asignatura: Cálculo diferencial*. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Calculo_Diferencial.pdf
- Sureda, P. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, 25(2), 89-118.
- Yoon, C., Dreyfus, T. y Thomas, M. O. J. (2010). How high is the Tramping Track? Mathematising and Applying in a Calculus Model-Eliciting Activity. *Mathematics Education Research Journal*, 22(1), 141-157.

Datos de autores:

Karen Gisel Campo Meneses, Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
Correos-e: karencampo@uagro.mx, jagarcia@uagro.mx

CAPÍTULO 7

Comprensión de problemas verbales de probabilidad utilizando representaciones gráficas: Un estudio de análisis de errores

Ruth García Solano

Estela Juárez-Ruiz

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación cuyo objetivo fue promover cuatro representaciones gráficas en la resolución de problemas verbales de probabilidad para la reducción de errores de acuerdo con el modelo de Newman en estudiantes de educación media superior. La investigación consistió en una intervención con un diseño preexperimental en un solo grupo con pretest y postest. Asimismo, se realizó un estudio correlacional para identificar los errores del modelo de Newman con mayor vinculación. Los datos analizados pertenecen a 18 estudiantes inscritos en un curso remedial de estadística y probabilidad del nivel medio superior, en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México. Los resultados fueron analizados en el programa R versión 3.6.1. En la prueba de hipótesis usando el estadístico t Student para muestras relacionadas, se encontró una diferencia significativa entre las medias del pretest y el postest. En las pruebas de correlación se obtuvieron valores altos entre el error de comprensión y los errores de transformación, habilidades de proceso y codificación. La conclusión del estudio es que promover las cuatro representaciones gráficas puede favorecer la resolución de problemas de probabilidad y coadyuvar a reducir la presencia de errores en el modelo propuesto por Newman.

Palabras clave: Probabilidad, representaciones gráficas, resolución de problemas, nivel medio superior.

Introducción

En la educación media superior una de las principales competencias disciplinares a fomentar es la resolución de problemas de matemáticas (Secretaría de Educación Pública, SEP, 2017), sin embargo, los esfuerzos en el desarrollo de estas habilidades han reportado resultados poco alentadores (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, Planea, 2017).

En México, la prueba Planea (2017) registró que 66.2% de los estudiantes de nivel medio superior se ubican en el nivel de logro I (insuficiente), lo que sugiere que presentan dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinan incógnitas o variables, para establecer y analizar relaciones entre dos variables. En el nivel de logro II (regular) se ubicaron 23.3% de los estudiantes, indicando que son capaces de expresar en lenguaje matemático situaciones donde se desconoce un valor o bien se requiere identificar relaciones de proporcionalidad entre dos variables, resolviendo problemas que implican proporciones entre cantidades. En el nivel de logro III (bueno) se ubica 8% de los estudiantes que emplean lenguaje matemático para resolver problemas que requieren del cálculo de valores desconocidos. Finalmente, solo 2.5% de los estudiantes se ubica en el nivel de logro IV (sobresaliente), lo que significa que dominan las reglas para transformar y operar con el lenguaje matemático, expresando formalmente las relaciones que existen entre dos variables de una situación o fenómeno.

La propuesta curricular del componente básico del marco curricular común de la educación media superior (SEP, 2017), privilegia la construcción del conocimiento matemático en situaciones contextuales, incorporando la algoritmia y la memorización como medios necesarios, pero no suficientes, para la construcción y uso del conocimiento matemático. Así, limita el empleo de las estrategias memorísticas y repetitivas de la enseñanza tradicional, para fortalecer el sentido de “lo propiamente matemático” en diversas situaciones de aprendizaje.

El Marco Curricular Común de la Educación Media Superior para México (SEP, 2017) propone una articulación jerárquica en tres dimensiones: Ejes, Componentes y Contenidos centrales y específicos:

- *Eje:* Organiza y articula los conocimientos, destrezas, habilidades, actitudes y valores de las competencias de los campos disciplinares y es el referente para favorecer la transversalidad interdisciplinar.

- *Componente*: Genera o integra los contenidos centrales y responde a formas de organización específica de cada campo disciplinar.
- *Contenido central*: Corresponde a los aprendizajes fundamentales y se refiere al contenido de mayor jerarquía dentro de los programas de estudio.
- *Contenido específico*: Corresponde a los contenidos centrales y, por su especificidad, establece el alcance y profundidad de su abordaje.

El eje propuesto para articular el campo de las matemáticas en el nivel medio superior establece como base tres competencias disciplinares:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (SEP, 2017, p.78)

A pesar de ser fundamental en uno de los ejes principales del modelo educativo 2016 vigente en México, en la enseñanza de las matemáticas no se cuenta con una definición única de lo que es un problema. Por un lado, Rico (2002) lo concibe como una actividad científica vinculada a la educación. Meyer (1986) lo considera un sinónimo de pensamiento y cognición. Brandsfor y Stein (1986) lo describen como un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada. Para Pelares (1993) son situaciones que requieren una búsqueda de solución y Puig (1996) lo plantea desde la percepción de los sujetos, quienes determinan o no la existencia de un problema.

Los estudios sobre resolución de problemas también son muy diversos, algunos incluyen estrategias heurísticas para resolver problemas (Polya, 1945), investigaciones de cómo los estudiantes resuelven problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985) y la identificación de etapas en la resolución de problemas matemáticos y sus errores (Rohmah y Sutiarto, 2018). Estos estudios ofrecen a los docentes elementos teóricos para diseñar e implementar en las aulas metodologías que permitan a los estudiantes solucionar

problemas matemáticos en su contexto. Por otra parte, el estudio de Sugrue (1995) evalúa las habilidades de resolución de problemas en algunos estudiantes, proponiendo un marco teórico con dominios específicos que consideraron el conocimiento, la metacognición y la motivación. El estudio reporta que la percepción sobre lo atractivo de solucionar un problema causa que los estudiantes incrementen sus conocimientos.

En este trabajo de investigación se estudia la falta de comprensión de problemas verbales (*word problems*), que como los define Verschaffel (2000), son ejercicios matemáticos en los que se presenta la información en un lenguaje ordinario, a menudo con una narrativa de algún tipo, en lugar de en notación matemática. Particularmente, sobre las dificultades que muestran algunos estudiantes de nivel medio superior y superior, en los temas de probabilidad condicional y teorema de Bayes (Donghui y Gary, 2018). Para poder atender esta dificultad, se estableció una estrategia de enseñanza consistente en promover el uso de cuatro representaciones gráficas del espacio muestral completo y reducido: cuadrado unitario (Böcherer-Linder y Eichler, 2017), diagrama de árbol, diagrama de Venn y tabla de doble entrada, implementadas a través del diseño de una intervención didáctica.

Por ello, el presente estudio tuvo como objetivo evaluar una intervención didáctica basada en el uso de cuatro representaciones gráficas empleadas en la resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos (Böcherer-Linder y Eichler, 2017), en estudiantes de nivel medio superior.

Marco Teórico

Estudiando los métodos de resolución de problemas, identificamos dos facetas de las matemáticas, por un lado, son la ciencia rigurosa de Euclides, una ciencia deductiva. Pero también están en constante formación y desarrollo, entonces se presentan como una ciencia inductiva.

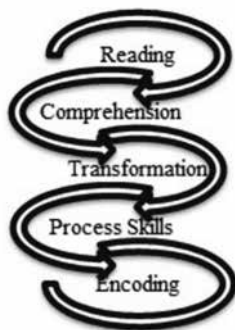
Newman (1977) estableció que vinculado al proceso de resolución de problemas existen cinco fases involucradas: (1) lectura, (2) comprensión, (3) transformación, (4) habilidades de proceso y (5) codificación. Cada fase determina un error relacionado, los cuales se describen a continuación:

- a) *Error en la lectura*, implica la habilidad de los estudiantes para leer problemas matemáticos e identificar oraciones y símbolos matemáticos utilizados.

- b) *Error de comprensión*, básicamente consiste en que los estudiantes puedan comprender problemas matemáticos desde el lenguaje natural.
- c) *Error de transformación*, es la habilidad de los estudiantes para determinar el método de solución matemática.
- d) *Error en habilidades de proceso*, es la habilidad del estudiante para realizar operaciones básicas necesarias para resolver el problema de forma correcta.
- e) *Error de codificación*, es la habilidad del alumno para integrar los elementos en una respuesta acorde con la pregunta.

Una descripción grafica de modelo propuesto por Newman se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Modelo de Newman para el análisis de errores en la resolución de problemas.



Fuente: Abdullah, Abidin, Ali, 2015, p. 135.

Existe evidencia de que no todos los estudiantes son capaces de resolver problemas ya que tienen dificultades en fases específicas del modelo propuesto por Newman (1977). Por ejemplo, en el estudio de Effandi y Siti (2010), los estudiantes mostraron dificultades en la fase de transformación y en la fase de habilidades de proceso. Por otra parte, en el estudio realizado por Susanti, Kusumah, y Sabandar (2014) se descubrió que algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver problemas son: (1) leer e interpretar datos, (2) determinar y remplazar datos y (3) hacer conclusiones y argumentos. Por lo tanto, los docentes deben identificar

las dificultades y errores cometidos por los estudiantes y adoptar enfoques apropiados para mejorar sus prácticas de enseñanza (Ashlock, 2005).

Algunos estudios (Abdullah et al. 2015; Effandi y Siti, 2010; Prakitipong y Nakamura, 2006) han demostrado que el modelo utilizado para clasificar y categorizar los errores de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos propuesto por Newman es confiable para los profesores de matemáticas. Según Effandi y Siti (2010), el modelo de análisis de errores de Newman tiene la jerarquía que clasifica los tipos de errores en función de los niveles de resolución de problemas por parte de los estudiantes. La declaración anterior coincide con los estudios de Ellerton y Clements (1996), quienes expresan que Newman usó la palabra “jerarquía”, refiriéndose a que si los estudiantes fallan en cualquier nivel de resolución de problemas, se ven impedidos a obtener la solución requerida.

La primera etapa para resolver un problema matemático consiste, por un lado, en desentrañar la información relevante del enunciado y por otro, reestructurarla o transformarla en una que el estudiante entienda. En esta conversión del problema, el solucionador extrae los conceptos de la descripción textual del problema mediante el uso de su conocimiento semántico y lingüístico. Utiliza su conocimiento lingüístico para comprender el lenguaje escrito, y su conocimiento semántico para establecer el significado de las expresiones lingüísticas. El estudiante conecta las oraciones en una descripción del problema y produce una representación coherente del mismo (Pribul y Bodner, 1987).

En esta etapa, el solucionador realiza procesos de pensamiento que le permiten establecer representaciones internas y externas del problema a resolver. Una representación interna es la forma en que el solucionador almacena los componentes del problema en su mente. En contraste, las representaciones externas son manifestaciones físicas de esta información, como un dibujo o una lista de información, que captura elementos particulares de una representación interna (Bodner y Domin, 2000).

Larkin, McDermott, Simon y Simon (1980) establecen que, para trabajar en el problema, el solucionador debe convertir la cadena de palabras con la que se presenta, en una representación mental interna que puede ser manipulada en un esfuerzo por resolver el problema. Comprender el problema significa construir para el solucionador, una representación interna a partir de la comprensión lingüística y semántica; además de expresar la solución en una representación externa.

La situación epistemológica particular de las matemáticas, con respecto a los otros campos del conocimiento, conduce a conferir a las representaciones un rol primordial. Dado que son el único medio de acceso a los objetos matemáticos; esto plantea el problema cognitivo del tránsito entre diferentes representaciones de un mismo objeto matemático (Duval, 2016). Este tránsito entre diferentes representaciones es cotidiano en el aula de matemáticas, donde se da una práctica muy específica por parte de los docentes, al usar simultáneamente dos registros semióticos. Uno se da cuando se plantean problemas, se dan instrucciones y explicaciones en el lenguaje natural mientras los procedimientos y soluciones se escriben y trabajan en expresiones simbólicas, como si las expresiones verbales pudieran volver transparente el tratamiento simbólico propio de las matemáticas (Duval, 2000).

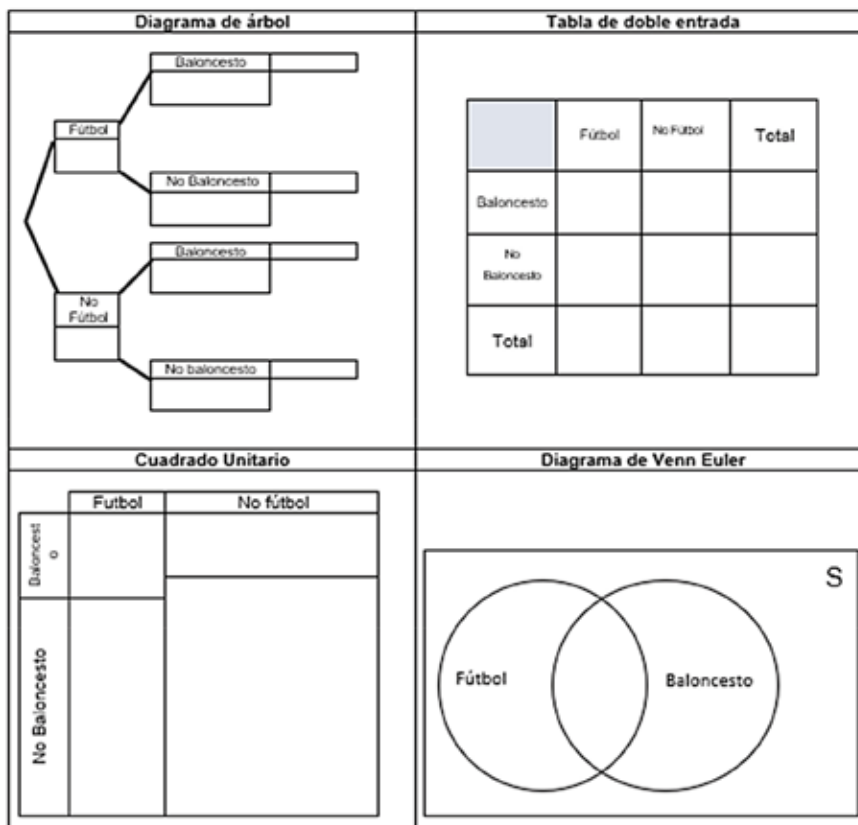
La simple “traducción” de los términos de un problema verbal, a expresiones simbólicas entraña obstáculos para el estudiante que con frecuencia no puede superar con éxito, cualquiera que sea el contenido matemático del que se trate (Duval, 2002). Tan pronto como aparecen las dificultades de conversión, se consideran un signo de incompreensión conceptual. Las representaciones tanto internas como externas se reconocen como un componente clave del razonamiento en la resolución de problemas (Fernández, 2013). Por su parte, Arcavi (2003, p. 224) argumenta que la visualización puesta al servicio de la resolución de problemas puede también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa a los problemas matemáticos.

Las representaciones requieren mostrar apropiadamente ciertas características para fomentar la comprensión en los estudiantes (Böcherer-Linder y Eichler, 2017). La principal característica atribuida por Arcavi (2003, p. 216) es que “ofrecen un método de ver lo invisible”. Cuando Arcavi menciona *ver lo invisible*, se refiere a percibir las relaciones e interacciones que se encuentran en un problema verbal sin ser evidentes para los estudiantes.

En el caso particular de la probabilidad, existen diferentes representaciones gráficas útiles para abordar un problema verbal, que pueden integrar la información estadística, utilizando frecuencias absolutas o relativas que además implican dentro del mismo gráfico relaciones entre eventos o sucesos del problema a solucionar. Estas representaciones gráficas permiten a los estudiantes comprender el problema verbal y razonarlo en busca de la solución de acuerdo con la lógica de inclusión de conjuntos (Barey y Slo-

man, 2007). Las representaciones gráficas que se consideran en el presente estudio son (Figura 2): el diagrama de árbol, el diagrama de Venn, la tabla de doble entrada y la propuesta de Böcherer-Linder y Eichler (2017) del *cuadrado unitario*, como parte de la etapa de comprensión en la resolución de problemas verbales de probabilidad.

Figura 2. Las cuatro representaciones gráficas empleadas.



Fuente: Elaboración propia

En el diagrama de árbol, las relaciones lógicas entre eventos y eventos dependientes (conjuntos y subconjuntos) se visualizan mediante líneas. Los subconjuntos están en un nivel más bajo que los conjuntos en el diagrama de árbol y las ramas conectan los subconjuntos con los conjuntos,

lo que implica jerarquía (Böcherer-Linder y Eichler, 2017). Para utilizar el diagrama de Venn como una representación estadística, se realiza el cambio estratégico del conjunto universo (U) por el espacio muestral (S), considerando los eventos como conjuntos y subconjuntos conservando sus propiedades, operaciones y características. La tabla de doble entrada permite visualizar la mayoría de las interacciones entre los conjuntos y subconjuntos visualizándolos en filas y columnas. Finalmente, el cuadrado unitario es un esquema conformado por un cuadrado representando el espacio muestral completo, las relaciones de conjuntos y subconjuntos se visualizan por áreas que se incrustan en otras áreas, sin relación jerárquica, lo que significa que las relaciones se pueden considerar tanto horizontales como verticales (Böcherer-Linder y Eichler, 2017). El cuadrado unitario se puede entender también como una conexión visual entre fracciones y probabilidades, al considerar las subdivisiones en áreas como una fracción del espacio muestral.

Método

El estudio se realizó bajo dos esquemas, el primero cuantitativo correlacional descriptivo que Hernández, Fernández, y Baptista (2014) describen, tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular. En esta investigación tuvo el propósito de identificar relaciones entre los errores del modelo de Newman cometidos al resolver los problemas. El segundo esquema trató de un diseño preexperimental con un solo grupo, con pretest y posttest.

La población objeto de estudio consistió en un grupo de estudiantes inscritos en el curso extraordinario uno del ciclo escolar 2018-2019 de la Unidad de Aprendizaje Curricular: Estadística, Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas, correspondiente al plan 06 del programa de bachillerato universitario en la Preparatoria Emiliano Zapata de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Dicho grupo estuvo integrado por 18 estudiantes, con edades entre 17 y 18 años, la mayoría residentes de la ciudad de Puebla, en México, que se encontraban distribuidos por género, turno y área terminal de acuerdo con la Tabla 1.

Tabla 1. Distribución de los estudiantes por género, turno y área terminal.

	Matutino		Vespertino	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
Humanidades	3	2	3	1
Ciencias Sociales	0	0	5	4

El instrumento utilizado para la recolección de los datos estuvo conformado por cuatro problemas verbales del tema de probabilidad condicional y teorema de Bayes, los cuales fueron seleccionados de varios libros de texto y contextualizados por un grupo de tres profesores miembros de la Academia de Matemáticas de la Preparatoria Emiliano Zapata. En la Figura 3 se muestra como ejemplo el tercer problema.

Figura 3 Tercer reactivo de la evaluación diagnóstica

3. Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (A, B, C), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
- Realice el diagrama de Venn que representa el problema.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que una camiseta, elegida al azar, esté defectuosa?
 - Si al seleccionar al azar la camiseta sale defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de haber sido producida por la máquina B?

Fuente: Academia de Unidad de la preparatoria Emiliano Zapata

La investigación inicia con la aplicación de un pretest, cuyo objetivo fue identificar si los estudiantes eran capaces de solucionar los problemas verbales propuestos y de acuerdo con el modelo de Newman, cuantificar los errores que cometieron.

En el pretest a cada inciso del problema se le asignó un puntaje de 0 a 5 puntos de acuerdo con cada uno de los cinco errores propuestos por el modelo de Newman, asignando a cada error un valor 0 si el estudiante no cometió el error y 1 si cometió dicho error. Además, para el estudio estadístico se consideró un tercer valor: espacio en blanco, cuando la evidencia recabada no permitió identificar la ausencia o presencia de un error determinado. Esto ocurrió por ejemplo cuando el estudiante simplemente no escribió nada como respuesta, lo que no permitió tener evidencia de que se

cometió también un error de procedimiento o de codificación, sencillamente no hubo evidencia, por tanto, en la base de datos se registró un espacio vacío. Además, se evaluó cada uno de los errores de manera independiente, sin establecer de antemano alguna relación entre ellos, con el propósito de verificar si estaban correlacionados.

Los criterios para evaluar cada uno de los errores del modelo de Newman en esta investigación fueron los siguientes:

- Se consideró un *error de lectura* cuando el estudiante no realizó ninguna acción u omitió algún dato proporcionado en el enunciado del problema.
- Un *error de comprensión* cuando utilizó incorrectamente conceptos o propiedades o bien no logró integrar la información del problema en un esquema o representación gráfica en la que se aprecie el espacio muestral al que se refiere el problema.
- Un *error de transformación* cuando el estudiante eligió incorrectamente un modelo de solución. Para este análisis se consideraron apropiadas las transformaciones correspondientes al diagrama de árbol, el diagrama de Venn, el cuadrado unitario, la tabla de doble entrada y las representaciones analíticas de probabilidad condicional o Teorema de Bayes.
- Se consideró un *error en habilidades de proceso* si el estudiante realizó incorrectamente procedimientos u operaciones aritméticas, o si incluyó datos extraños durante el procedimiento al solucionar el problema.
- Finalmente, se consideró un *error de codificación* cuando la respuesta al problema planteado no fue coherente con la pregunta realizada, careció de unidades de medida, fue representado como un porcentaje o bien no logró expresarla en el lenguaje natural. Por ejemplo, si la pregunta se refiere a la cantidad de camisetas y el estudiante contesta exclusivamente con un valor real, se considera un error de codificación.

Con estos datos se realizó el estudio correlacional descriptivo para analizar posibles relaciones entre los errores de Newman.

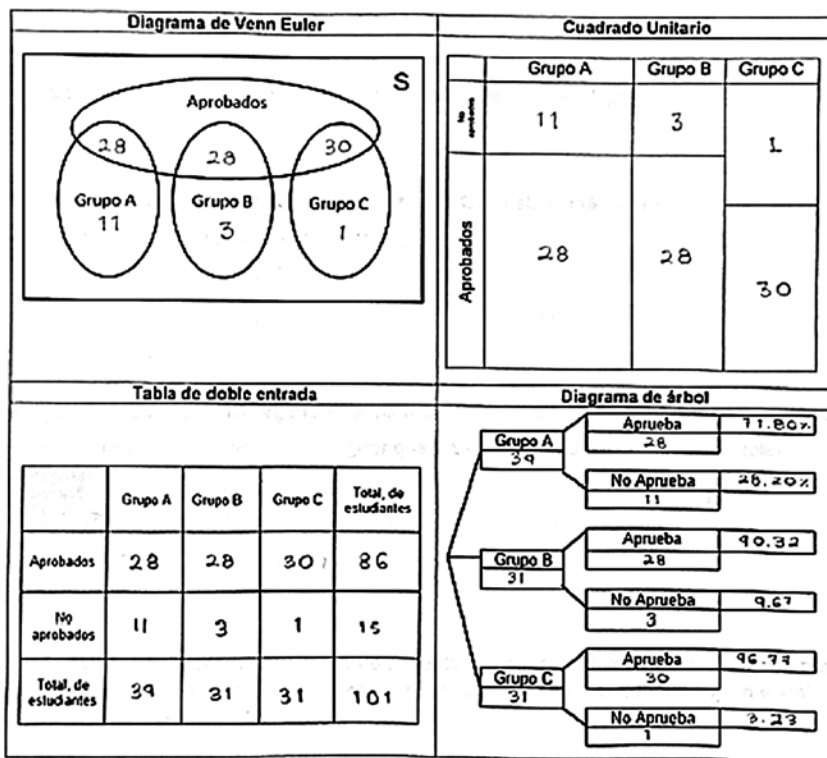
A continuación, se diseñó una intervención didáctica centrada en reducir los errores del modelo de Newman presentes en la resolución de problemas verbales de probabilidad en espacios muestrales completos y

reducidos, como consecuencia de los resultados del estudio cuantitativo descriptivo correlacional, mediante la promoción de las cuatro representaciones gráficas para comprender el problema verbal planteado. Un ejemplo de actividad resuelta por un informante se muestra en la Figura 4.

Figura 4 Actividad 1 de la segunda sesión de la intervención

Instrucciones: Lee el siguiente problema y utilizando alguna o algunas de las representaciones graficas que se presentan, integra la información del problema de forma coherente, después responde las preguntas.

1. La profesora Luisa atendió tres grupos, 39 de sus estudiantes estaban en el grupo A. En los grupos B y C la misma cantidad de estudiantes 31 en cada uno. En los grupos A y B, aprobaron 28 estudiantes en cada uno y del tercer grupo 30 aprobaron.



Fuente: Elaboración propia

La intervención didáctica se implementó en tres sesiones de cien minutos cada una. En una sesión posterior se aplicó el postest, el cual consistió en cuatro problemas equivalentes a los aplicados en el pretest. Finalmente se realizó el análisis estadístico de las pruebas pretest y postest mediante estadística descriptiva e inferencial.

Resultados

En el estudio preliminar cuantitativo correlacional descriptivo, se recopilaban 810 datos del pretest de los cuales, 243 (30%) correspondieron a errores en el modelo de análisis propuesto por Newman. En la Figura 5 se muestra la distribución por cada uno de ellos. El que se presentó con mayor frecuencia fue el de codificación con 33%, seguido del de comprensión con un porcentaje de presencia de 30%, y los de transformación y habilidades de proceso con valores cercanos (19% y 16%) respectivamente, el gráfico también muestra la cantidad de respuestas sin error y la ausencia de respuestas.

Figura 5. Distribución de errores en el modelo propuesto por Newman en la evaluación pretest. Fuente: Elaboración propia.



Se calcularon las correlaciones entre los pares de errores del modelo de Newman y se realizaron pruebas estadísticas por cada par, para verificar la existencia de una correlación no nula:

$$H_0: r_{x,y} = 0; H_a: r_{x,y} \neq 0$$

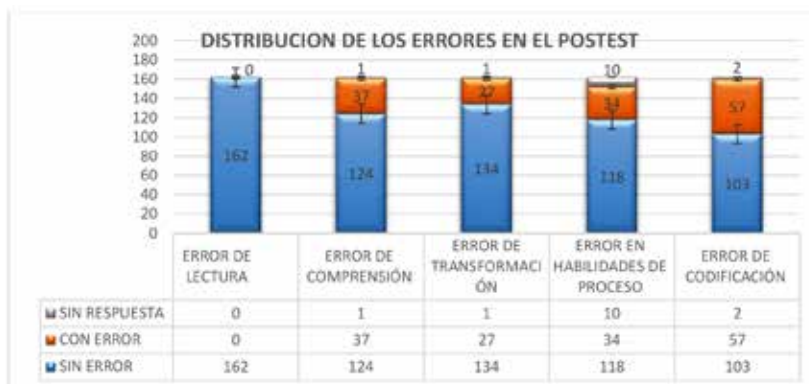
Algunas de las correlaciones no se lograron establecer por la cantidad de datos recopilados. Sin embargo, para las que sí lograron ser calculadas, todas fueron estadísticamente significativas, con p-valores menores a 0.05. Esto significa que existe una relación directa y jerárquica entre los diversos tipos de error, indicando que cuando un estudiante comete un error en una fase del modelo de Newman, continuará cometiendo errores en las etapas posteriores.

Las correlaciones más altas se dieron entre los siguientes errores: comprensión vs transformación (0.3450), comprensión vs habilidades de proceso (0.4630) y comprensión vs codificación (0.6490), todos ellos con un p-valor menor o igual a 9.80×10^{-4} . Esto significa que cuando un estudiante comete un error de comprensión, muy probablemente también comete errores de transformación, de habilidades de proceso y de codificación.

El presente estudio propone que, al disminuir el error de comprensión mediante una intervención didáctica, que promueve el uso de cuatro representaciones gráficas, se puede disminuir también la presencia de otros tres errores del modelo propuesto por Newman, en el proceso de resolución de problemas de probabilidad en espacios muestrales completos y reducidos.

Al comparar los resultados del pretest (Figura 5) con el postest (Figura 6) se observa que además de la modificación en la frecuencia absoluta de los errores de acuerdo con el modelo propuesto por Newman, se registró un incremento en las respuestas proporcionadas por los estudiantes y los cinco errores del modelo registraron decrementos significativos.

Figura 6. Distribución de errores en el modelo propuesto por Newman en el postest



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica se observa que el error de lectura se redujo en 2.46%, aumentando el registro sin respuesta en 9.25%, el de comprensión registró un decremento de 22.22% aumentando las respuestas en un 25.30%, para el de transformación la disminución es de 11.11% con un incremento en respuestas del 11.72%, en el de habilidades de proceso se registró el menor decremento apenas de 3.70%, pero el mayor aumento en respuestas de 33.33%, el decremento en el de codificación es de 14.81% con un incremento en las respuestas de 31.48%. De esta manera, el uso de las cuatro representaciones gráficas propuestas a los estudiantes con el objetivo de mejorar la comprensión del problema tuvo un efecto positivo al reducir la presencia del error de comprensión en más de 20%.

Por lo tanto, en general, se afirma que en el presente estudio el uso de las cuatro representaciones gráficas como estrategia de solución, muestran dos resultados: por un lado, se incrementaron las respuestas a problemas verbales del tema de probabilidad en espacios muestrales completos y reducidos, y por otro, se redujo considerablemente la presencia de errores de acuerdo con el modelo de análisis propuesto por Newman en el proceso de solución.

El comparativo en el uso de las cuatro representaciones gráficas por parte de los estudiantes, tanto en la evaluación pretest como en el postest se muestra en la Tabla 2. El diagrama de árbol muestra una apropiación por parte de los estudiantes similar entre ambas evaluaciones, de alrededor de 30%. Sin embargo, el diagrama de Venn muestra un decremento de 18 puntos porcentuales y la tabla de doble entrada un incremento superior a 30%. Contrario a los estudios de Böcherer-Linder y Eichler (2017), la propuesta del cuadrado unitario no fue adoptada por los estudiantes como una representación gráfica útil en la resolución de problemas verbales de probabilidad en espacios muestrales completos y reducidos. En resumen, la representación gráfica que más adoptaron los estudiantes como resultado de la intervención didáctica, fue la tabla de doble entrada.

Tabla 2. Comparativo de representaciones utilizadas por los estudiantes entre el pretest vs el postest

	Pretest	Postest
Diagrama de Venn	40 %	22 %
Diagrama de árbol	35 %	32 %
Tabla de doble entrada	10 %	46 %
Cuadrado Unitario	0 %	0%
Sin solución	15 %	0%

Fuente: Elaboración propia

Con el puntaje asignado a cada reactivo se asignó una calificación en una escala valorativa de 0 a 10 donde cero correspondió a 45 errores cometidos y 10 a cero errores cometidos. Esto permitió realizar pruebas de normalidad a la muestra de 18 estudiantes. En un primer análisis se detectó un caso atípico, consistente con un estudiante que faltó a una de las tres sesiones de la intervención didáctica, por lo que fue retirado. Al realizar nuevamente las pruebas con los datos restantes se registraron evidencias de normalidad (Tabla 3):

Tabla 3 Concentrado de resultados de las pruebas de normalidad

Dimensión	Shapiro-Wilk		Kolmogorov-Smirnov		Jarque Bera	
	W	p	D	p	X^2	p
Pretest	0.95464	0.5338	0.18525	0.604	0.95569	0.6201
Postest	0.95607	0.5591	0.14108	0.8876	0.99282	0.6087

Fuente: Elaboración propia

Estos resultados permitieron realizar una prueba *t Student* para comparar el pretest con el postest bajo las siguientes hipótesis nula y alternativa:

$$H_0: \mu_{postest} - \mu_{pretest} = 0, H_a: \mu_{postest} - \mu_{pretest} > 0.$$

En el resultado de la prueba, se obtiene un valor de $t = -7.4263$ y un p-valor de $1.436e-06$. Dado que el p-valor es menor a 0.05, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa de que la media del postest es significativamente mayor a la del pretest. Esto indica que hubo un avance significativo en el desempeño de los estudiantes a través de la intervención que promueve las cuatro representaciones gráficas.

Conclusión

La promoción de las cuatro representaciones gráficas en la intervención didáctica, como estrategia para comprender e integrar la información estadística de un problema verbal de probabilidad, registró una disminución en los errores que cometieron los estudiantes de nivel medio superior en la resolución de problemas verbales de probabilidad en espacios muestrales completos y reducidos de acuerdo con el modelo de análisis propuesto por Newman en el proceso de solución así como un incremento en las respuestas por parte de los estudiantes.

El uso de las representaciones gráficas permitió a los estudiantes percibir y establecer relaciones entre los distintos eventos, mostrando un mayor apego, apropiación y eficiencia a la tabla de doble entrada en comparación con el diagrama de árbol, diagrama de Venn y cuadrado unitario.

La finalidad de este estudio fue valorar cuantitativamente la disposición de los estudiantes de nivel medio superior a utilizar diversas representaciones gráficas e incluso transitar entre ellas para comprender y solucionar problemas de probabilidad en espacios muestrales reducidos. Estudios subsecuentes pueden enfocarse en comparar la efectividad y eficiencia de las representaciones gráficas propuestas.

Referencias

- Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., & Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science*, 11(21), 133-142. <https://doi.org/10.5539/ass.v11n21p133>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>

- Bodner, G., & Domin, D. (2000). Mental models: The role of representations in problem solving in Chemistry. *University Chemistry Education*, 4, 24-30.
- Böcherer-Linder, K. & Eichler, A. (2017). The Impact of Visualizing Nested sets: An Empirical Study on Tree Diagrams and Unit Squares. *Frontiers in Psychology*, 7, 1-11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.02026>
- Donghui, Y. & Gary, E. (2018). The turtleback Diagram for Conditional Probability. *The open Journal of Statistics*, Vol 8(4), 684-705. <https://doi.org/10.4236/ojs.2018.84045>
- Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 135-170.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*. Papers presented in this Working Group of PME-NA, 1998-2002 (pp. 311-336). México: Cinvestav-IPN.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Énfasis.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta Ed). México: Mc Graw Hill.
- Larkin, J., Mc Dermott, J., Simon, D., & Simon, H. (1980). Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems. *Science*, 208(4450), 1335-1342.
- Meyer, R. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona, España: Paidós.
- Pribul, J., & Bodner, G. (1987). Spatial ability and its role in organic chemistry: a study of four organic courses. *Journal of Research in Science Teaching*, 24, 229-240
- Rico, L. (2002). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rohmah, M., & Sutiarto, S. (2018). Analysis Problem Solving in Mathematical Using Theory Newman. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 671-681. <https://doi.org/10.12973/ejmste/80630>

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando Florida: Academic Press, INC.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior*. (1º ed.). Ciudad de México.
- Sugrue, B. (1995). A Theory Based Framework for Assessing Domain l-Specific Problem- Solving Ability. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 14(3), 29-35. <http://doi.org/10.1111/j.1745-3992.1995.tb00865.x>
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse: Swets & Zeitlinger B.V.

Datos de autores:

Ruth García Solano, Maestría en Educación Matemática, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).

Estela Juárez-Ruíz, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Correos-e: ruth.garciasol@correo.buap.mx, estela.juarez@correo.buap.mx

CAPÍTULO 8

El *software* GeoGebra un recurso para la enseñanza-aprendizaje del concepto del área

Armando Morales Carballo

Angie Damián Mojica

Adilene Venancio Cano

Resumen

Se describe una propuesta teórico-didáctica para la planeación de enseñanza del concepto de área de polígonos simples en el preuniversitario, dentro de esta se describen dos líneas hipotéticas de aprendizaje, la primera se basó en procesos de conteo para la inducción y formulación de la fórmula de Pick para determinar la medida de áreas; la segunda, se basó en el método griego y en el uso de las transformaciones isométricas, ambos procesos fueron mediados por el uso del *software* GeoGebra.

Producto de la elaboración, descripción y valoración de la propuesta se destacan como resultados fundamentales que las dos trayectorias de aprendizaje aportan elementos para la asimilación del concepto de área de polígonos simples. En la transición a la posición estándar de las figuras planas a través del uso de las traslaciones y rotaciones, el método del conteo y la inducción de la fórmula de Pick jugaron un papel importante. De manera análoga, la transformación de un polígono a un triángulo de área equivalente y del uso de las transformaciones isométricas para llevar a la posición estándar tal figura, dotó de significado al concepto de medida de área y de las fórmulas clásicas usuales.

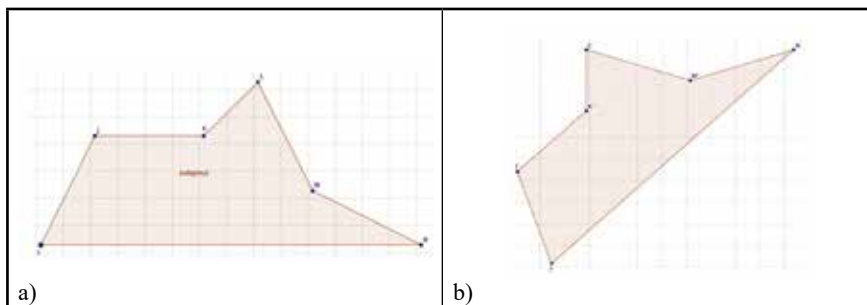
Palabras clave: Propuesta teórico-didáctica, recurso heurístico, área, polígono simple, transformación isométrica.

Introducción

El concepto de área de figuras planas es un contenido importante dentro del sistema de contenidos propuestos en los planes y programas de estudios de enseñanza-aprendizaje de la matemática en los niveles básico, preuniversitario y universitario en carreras de Matemáticas o en carreras afines. La importancia de este contenido radica en que su estudio, en parte posibilita el desarrollo de nociones de la geometría y del cálculo integral, y también imbrica en la adquisición de herramientas matemáticas para la resolución de problemas.

Recientemente, los autores del presente trabajo tuvieron la oportunidad de asesorar a un grupo de treinta estudiantes de primer grado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, la asesoría versó sobre tópicos de elementos de geometría, posteriormente, se les aplicó a los alumnos un sistema de actividades sobre la noción y determinación de la medida del área (una actividad que en el ciclo escolar anterior fue aplicada a un grupo de nueve estudiantes del preuniversitario), luego de la aplicación se identificó que veintiún estudiantes de los treinta que conformaron el grupo presentaron dificultades para determinar la medida del área de un polígono irregular, ver Figura 1, b); sólo a groso modo establecieron la manera de hacerlo cuando uno de sus lados es paralelo al eje horizontal, ver Figura 1, a).

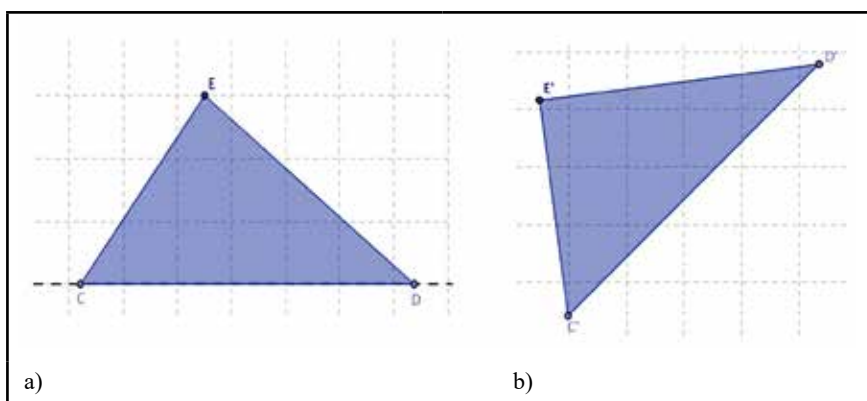
Figura 1. Polígono irregular en dos posiciones diferentes.



Fuente: Elaboración propia

Con la intención de explorar más sobre esta dificultad, se preguntó a este grupo de estudiantes sobre la manera de determinar la medida del área de un triángulo y, al respecto, se identificó en ellos que la dificultad manifestada en el caso anterior, prevalece en el caso de triángulos. En el inciso a) de la Figura 2 se presenta el caso de un triángulo cuyo uno de sus lados es horizontal y para esa situación los estudiantes pudieron determinar la medida del área, no así para los triángulos como el caso b) de la figura.

Figura 2. Representación de un triángulo en dos posiciones distintas.



Fuente: Elaboración propia

Esta dificultad pone de manifiesto la necesidad de concebir y elaborar propuestas que contribuyan en el tratamiento de los contenidos de la geometría plana, en particular del concepto de área y su medida.

Importancia del concepto de área desde las investigaciones en matemática educativa

En este campo se han desarrollado diversos trabajos en torno al concepto de área, dentro de estos podemos citar a (Corberán, 1996; Arenas, 2012; García, 2013; López, Silva y Fuentes, 2013; González, 2014; Marmolejo y González, 2015 y Hernández, 2016) los investigadores destacan la importancia del estudio del área desde los niveles primaria a universitario, y coinciden en la búsqueda de estrategias y alternativas que favorezcan los procesos de comprensión, y la aplicación del concepto a la resolución de

problemas. Por ejemplo, García (2013) realiza una investigación en la que se plantea como objetivo detectar qué características manifiestan los niños de primaria respecto de la construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas, en el proceso de la búsqueda de la fundamentación del trabajo citado se destaca la atención a las siguientes problemáticas: Introducir distintas unidades de medida de diversas forma antes de presentar la unidad cuadrada, relegar el tratamiento de las fórmulas al finalizar el proceso, reconociendo el impacto que tiene el modelo lineal en la lógica del niño; viabilizar la propuesta a otras superficies poligonales, en particular, al cuadrado y al triángulo; emprender la construcción del concepto a través de la resolución de problemas en contextos que le otorguen sentido.

De manera particular, se resalta la necesidad del tratamiento de la comparación y ordenamiento de superficies utilizando métodos directos e indirectos de medición, equivalencia de superficies, medida de una superficie, unidades no convencionales, transformación de figuras de manera que se conserve el perímetro y variar el área o viceversa, deducción y utilización de fórmulas para el cálculo del área del rectángulo, del cuadrado y del triángulo.

La investigación documenta que las actividades que se implementaron posibilita, por ejemplo, que los profesores en formación y en servicio permitan otorgar sentido a su enseñanza y reflexionar acerca de sus propuestas, interpretar el cómo aprenden los niños de nivel primaria, mediante la observación, entre otras.

Elementos teóricos y metodológicos

Tratamiento de los conceptos. Los conceptos son parte de la estructura matemática y juegan un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático y en la explicación de la realidad objetiva (Ballester, 1992). Gran parte de las dificultades sobre la comprensión de los contenidos matemáticos que se documentan en las investigaciones radica en la ausencia del tratamiento de los conceptos. Este trabajo tiene su fundamento en los procesos de asimilación de los conceptos y de manera particular atendemos una de las operaciones conceptuales: la determinación de la medida del área de un polígono simple.

En relación a los procesos de asimilación de los conceptos, Morales, Locia y Marmolejo (2014) establecen que para la asimilación se deben cumplir las siguientes etapas: *Aproximación al concepto*. En esta etapa se

reconoce el concepto a nivel intuitivo en sus distintas representaciones, es necesario operar con él a fin de diferenciarlo con otros conceptos sobre objetos matemáticos. *Formalización del concepto.* La formalización del concepto abarca las bases de la fase anterior, y esencialmente está encaminada a favorecer el proceso de formación y definición del concepto, por ello, metodológicamente, se consideran la aproximación, la formalización, la valoración y el control como etapas fundamentales de la propuesta, y dentro ellas se desarrollan dos líneas hipotéticas de trayectoria de aprendizaje del concepto de área. *Identificación del concepto.* En esta fase se identifica la vía para determinar la medida del área de un polígono simple a través de las líneas hipotéticas planteadas. *Aplicación del concepto.* Se describe el proceso a seguir para determinar la medida del área, se aplican las fórmulas clásicas.

En cada una de las etapas del proceso de asimilación los procedimientos heurísticos son una herramienta fundamental ya que constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientar y aportar elementos en los procesos de comprensión y determinación del concepto sobre la base de resolución de problemas (Torres, 2013). Según el autor, los procedimientos heurísticos se clasifican en principios, reglas y estrategias las cuales interactúan durante los procesos de búsqueda, elaboración y aplicación de la vía de solución. Así, los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar directamente la idea de solución principal de resolución; posibilita determinar, por tanto, los medios y la vía de solución, dentro de estos principios heurísticos se identifican: la analogía, reducción e inducción (Müller, 1997). La estrategia que se expone aquí utilizará la inducción como un principio necesario para la generalización de la determinación de medidas de área de polígonos simples, siguiendo dos líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje.

Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver el problema. A este respecto Müller (citado en Torres, 2013) clasifica las reglas heurísticas en generales y especiales. Las reglas generales son:

- Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, tratar de encontrar triángulos iguales que contengan esos segmentos o ángulos homólogos.

- Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al resultado deseado, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que sean fáciles de construir.

Algunas reglas especiales son:

- El método de lugares geométricos, consistente en determinar al menos dos conjuntos de puntos a los que pertenece el punto buscado y determinar la intersección de ambos conjuntos.
- El método de las transformaciones geométricas que radica en construir una figura que cumpla parcialmente con las condiciones exigidas y después obtener la figura deseada mediante una transformación geométrica.

Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución y contribuyen a determinar la vía de solución de la situación abordada. Por ejemplo, el trabajo hacia adelante y el trabajo hacia atrás. El trabajo hacia adelante parte de los datos hasta llegar a la solución de la situación, el trabajo hacia atrás se examina lo que se busca y con el conocimiento actual se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Simón y Tzur (2004) identifican las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de la siguiente manera: Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. En esta dirección, investigadores como (León, Díaz, y Guilombo, 2014) coinciden en que las THA refieren a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede movilizarse, son hipotéticas debido a que las trayectorias reales del aprendizaje de los estudiantes dependen de las condiciones de existencia de cada individuo y en que el aprendizaje de los individuos tiene ciertas regularidades.

Las THA proporcionan al investigador un criterio racional para decidir el diseño que habrá de considerar y las conjeturas de cómo hacer evolucionar los aprendizajes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca

del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre este proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas. Este constructo se fundamenta en los siguientes supuestos:

1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos.
3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.
4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En relación al objeto de estudio en este trabajo el concepto de área y su medida. Se describen dos trayectorias hipotéticas para su comprensión.

Línea de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje 1

Esta trayectoria está basada en el método del conteo, y se apoya en el uso del *software* para posibilitar mediante lo dinámico-visual las etapas de acercamiento a la intuición del comportamiento de puntos en el interior, de la frontera y de la relación entre ellos para la medición del área, inducción de la fórmula de Pick y su aplicación en el cálculo, mediante el uso de las transformaciones isométricas del plano: traslación y rotación se llevan los triángulos a las posiciones estándar, y se contrasta a nivel teórico el resultado de este proceso con la aplicación de las fórmulas clásicas. En la última etapa se redescubre que la fórmula de Pick y las fórmulas clásicas para medir áreas de triángulos determinan la misma medida.

La THA describe la siguiente vía: se divide en triángulos el polígono simple, en cada triángulo se aplica la fórmula de Pick, mediante la traslación y rotación se lleva a la posición estándar cada triángulo, y se posibilita la aplicación de la fórmula clásica “la mitad de la base por la altura”, este proceso favorece el significado y comprensión de los conceptos asociados y el de las fórmulas clásicas. Como actividades de fijación se motiva a la prueba matemática basada en el conocimiento de la fórmula para determi-

nar el área del rectángulo, en primera instancia se plantea la determinación y justificación del proceso para medir el área de un triángulo rectángulo y posteriormente para un triángulo cualquiera; en este caso se ponen en juego la fórmula para medir el área de un rectángulo y el uso del teorema de Pitágoras, finalmente, se propone analizar y justificar la siguiente propiedad:

Dadas dos paralelas l_1 y l_2 , si en l_1 se fijan dos puntos y un tercer punto movable en l_2 . Con la información dada se construye el triángulo ABC , al mover mover el punto C en l_2 se forman una infinidad de triángulos y sin embargo, se demuestra que el área permanece constante.

Línea de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje 2

Esta trayectoria está basada en el método de los griegos acerca de la cuadratura. Luego del estudio de la cuadratura de un rectángulo, de la transformación de un rectángulo y de manera general de un cuadrilátero a un triángulo manteniendo la medida de sus área, se usa aquí el método para transformar un polígono simple a un triángulo de área equivalente mediante el uso de la geometría dinámica que posibilita el *software* geogebra, y mediante el uso de las transformaciones: traslación y rotación se lleva la figura final a la posición estándar, posición en la cual es aplicable de manera sencilla la fórmula clásica, y finalmente la determinación de la medida del área del polígono original.

El software como recurso heurístico en la actividad de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los distintos niveles han motivado tanto a investigadores como a docentes hacia la búsqueda de nuevas herramientas para incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Las tendencias actuales sobre la enseñanza de la Matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología educativa como una herramienta que favorezca dichos procesos. Investigadores como (Marmolejo y Campos, 2012; Arango, Gavirria y Valencia, 2015) resaltan la importancia de incorporar el uso de las tecnologías en el trabajo en el aula, ya que estos recursos permiten a los alumnos explorar otros ambientes que favorecen la resolución de las actividades de enseñanza que se les proponen y que, con sólo el uso del lápiz y papel, o

la información de los libros de texto, notas de clase, entre otros, les sería difícil de obtenerlas.

(Morales et al., 2014; Morales, 2016 y Morales, Locia y Salmerón, 2016) señalan que el *software* GeoGebra es un recurso heurístico que permite, vía la visualización y manipulación, identificar patrones de comportamientos, propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos. Destacan, además, que se favorecen los procedimientos heurísticos de analogía, reducción, inducción y generalización. Estas conclusiones fueron identificadas a partir del análisis de propuestas basadas en el *software* que los investigadores han realizado para el tratamiento de problemas relativos a perímetros, áreas, sobre el concepto de mediana y del estudio de las transformaciones de traslación y rotación en la enseñanza de la geometría en el preuniversitario.

Elementos matemáticos

Los elementos matemáticos fundamentales que se consideran en la propuesta son: área, polígono simple, punto reticular, red reticular, red poligonal, fórmulas clásicas para medir áreas de figuras planas, fórmula de Pick, traslación, rotación, transformación geométrica.

Metodología

La propuesta didáctica se fundamenta en los elementos teóricos antes descritos, es de tipo cualitativa con carácter descriptivo. La elaboración, descripción y valoración se llevan a cabo en los siguientes momentos.

1. Tomando en cuenta los procesos de asimilación de conceptos que se asume en el trabajo, favorece estructurar la propuesta en tres etapas: preparación de las condiciones de nivel de partida, identificación de condiciones para la inducción de la medida del área e inducción de la medida del área de polígonos simples.
2. Se concibió describir dos Líneas de Trayectoria Hipotética del Aprendizaje (LTHA), una basada en el método del conteo y la segunda, en el método griego. Éstas LTHA se propusieron en función de las necesidades cognitivas para favorecer los procesos de asimilación del concepto de área.

3. La descripción de cada una de las trayectorias hipotéticas del aprendizaje se realiza considerando las etapas que estructuran la propuesta. Finalmente, la valoración se da en el plano teórico, ya que el trabajo queda a ese nivel.

Cabe destacar que el *software* GeoGebra se usó en cada una de las etapas de desarrollo de las dos líneas de trayectorias hipotéticas del aprendizaje, ya que, como se ha fundamentado en este trabajo, se asumen como un recurso heurístico fundamental.

Propuesta didáctica

Se concibe que las propuestas didácticas son producto de elaboraciones más complejas como las llamadas metodologías. Sin embargo, las propuestas también pueden ser diseñadas en función de la perspectiva del profesor, del alumno, del plan de estudios y principalmente en función del contenido (Morales et al., 2014). En este sentido, se ha considerado una propuesta de carácter metodológico cuya característica principal es la de proveer un método de enseñanza, en el cual los procedimientos heurísticos favorezcan la inducción en el estudio del área de polígonos simples utilizando como herramienta principal el *software* GeoGebra.

La propuesta didáctica consta de las siguientes etapas: Preparación de las condiciones del nivel de partida, identificación de condiciones para la inducción de la medida del área e inducción de la medida del área de polígonos simples. Dentro de estas fases se han proyectado dos líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje, una a través de la inducción y generalización de la fórmula de Pick y otra basada en el método de los griegos; ambas trayectorias pretenden ser un acercamiento hacia la significación de área y la determinación de su medida. Cabe mencionar que previo a las actividades tratadas se realizó el análisis de investigaciones en torno a la fórmula de Pick y su uso en la determinación de áreas, dentro de los trabajos revisados destacan (Ramírez, 2010; Jiménez y Blanco, 2017; Verduzco, Briseño, Palmas, y Vázquez, 2000), de igual manera se revisaron libros clásicos de la geometría que permitieron la comprensión del método griego utilizado en el desarrollo.

Discusión y resultados: Acercamiento mediante la inducción de la fórmula de Pick

Etapas 1. Preparación de las condiciones del nivel de partida

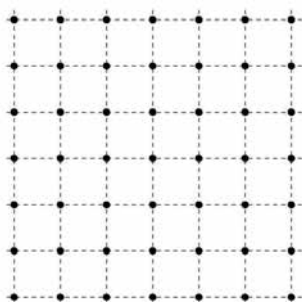
En esta etapa, se propone la determinación de medida de áreas de figuras planas (triángulos y cuadriláteros) que cumplen la siguiente condición, tener un lado horizontal, la actividad se lleva a cabo mediante el uso del *software* GeoGebra. El objetivo fundamental en esta etapa es que los alumnos visualicen la forma y posición de la figura de estudio, por otro lado, identifican las fórmulas en juego a partir del dato numérico que muestra el *software*. En caso de que se manifiesten dificultades se activará la cuadrícula y el sistema coordenado, a fin de apoyar la significación.

Posterior a la descripción dada se propone mostrar en la vista gráfica del *software* una figura plana (triángulo o cuadrilátero) que cumple la siguiente condición: ninguno de sus lados es paralelo al eje horizontal y se pide determinar la medida de su área. Previo a indicar esta actividad se oculta la vista algebraica, por lo que, de entrada no se observa el dato numérico que indica la medida del área. Esta acción pretende orientar hacia el objetivo y motivación del porqué buscar otras formas para determinar la medida de áreas.

A partir del planteamiento anterior, y con la finalidad de desarrollar la inducción como tratamiento de área de polígonos simples y la fórmula de Pick, se proponen las siguientes tareas:

- Construir una trama, en lugar de un geoplano y mostrarla en la vista gráfica de geogebra. Una manera de hacerla es con la instrucción de *ListaPuntos*[<Lista de le coordenadas>]. Por ejemplo, se ha introducido una lista de puntos y se ven reflejados en la vista gráfica, se ha cuidado que sean puntos reticulares (aquellos que tienen como componentes números enteros), en la siguiente ilustración se observa la trama.

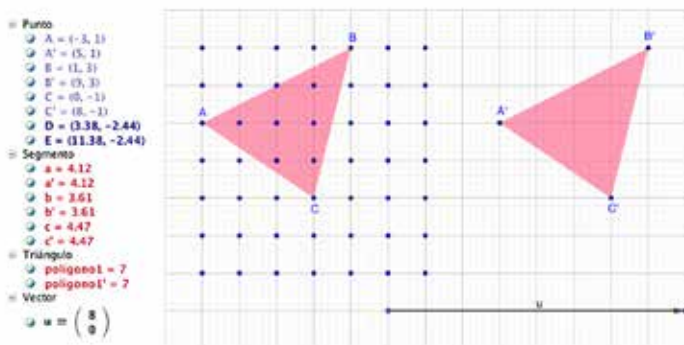
Figura 3. Trama de puntos reticulares



Fuente: Elaboración propia

- Se construye un triángulo sobre la trama, cuidando que sus vértices sean puntos de ella. Posterior a ello, mediante una traslación, se traslada a cualquier parte de la vista gráfica un triángulo construido. Podrá observarse que mover un vértice del triángulo en la trama; éste cae en otro punto de ella. La construcción puede hacerse mediante las indicaciones siguientes: Activar la opción *polígono*, hacer clic por tres puntos de la trama, en orden, es decir; ir del primer punto al segundo, del segundo al tercero, y del tercero al primer punto, en cada caso hacer clic para formar el triángulo. Luego, activar la herramienta *vector*, hacer clic en la vista gráfica y prolongarlo según se desee, luego hacer clic para que quede construido. Para trasladar el triángulo en la trama, según el vector construido, activar la herramienta *traslación*, dar clic en el triángulo y luego en el vector, se ha hecho la traslación. A partir de aquí, se activa la vista algebraica del *software* con la finalidad de mostrar la medida del área cada que se hacen variar vértices del triángulo en puntos de la trama, como se observa en la siguiente figura:

Figura 4. Traslación del triángulo construido en la trama a una posición fuera de ella.



Fuente: Elaboración propia

Posterior a esto, se propone reflexionar en lo siguiente: ¿Qué otras estrategias se favorecen con el recurso del *software* para determinar las medidas de área que se muestran en la vista algebraica cada que movemos los vértices del triángulo? Esta pregunta es fundamental, pues da entrada hacia la búsqueda de estrategias de corte heurístico que permitan la identificación de un caso de la fórmula de Pick para resolver el problema de área, prescindiendo de las fórmulas clásicas, además de contar con una base de inducción hacia la fórmula de Pick. También se puede motivar la actividad hacia el uso de las transformaciones isométricas en el plano: traslación y rotación, para dar respuesta a la medida de áreas de triángulos que no tienen algún lado paralelo al eje horizontal.

Etapas 2. Identificación de condiciones para la inducción sobre la medida del área de polígonos simples y la fórmula de Pick.

Para desarrollar esta etapa de la estrategia, se propone lo siguiente:

- Se utiliza la construcción del triángulo de la figura anterior, y se motiva hacia la realización de operaciones aritméticas con el número de puntos identificados dentro y en la frontera del triángulo, como un principio de búsqueda para determinar la medida del área. Se aprovecha esta actividad para precisar sobre los puntos reticulares interiores del triángulo, y los de la frontera. A través del ensayo

y error determinan la medida del área, por supuesto apoyándose en el *software*. De manera análoga, construyen en la trama cuadriláteros, y en general se pueden construir polígonos simples (para este caso se tendrá que ampliar la trama), establecen y verifican sus conjeturas.

- En esta actividad se promueven también las construcciones de tablas con registros del número de puntos dentro y en la frontera del polígono (número par de lados, número impar de lados); estos registros ayudan a identificar ciertos comportamientos, que posteriormente permitirán identificar las condiciones.
- Se reflexiona sobre las condiciones que deben cumplir los polígonos, para verificar la fórmula de Pick.
- Con el análisis llevado a cabo, y las conjeturas establecidas se posibilitan algunas conclusiones:
 - El área P de todo el polígono simple (una red poligonal) es $P = I + B/2 - 1$ donde I indica el número de puntos reticulares interiores y, indica el número de puntos sobre la frontera del polígono.
 - Algunas investigaciones han reportado que para la prueba de este resultado conviene justificar primero la fórmula para triángulos y rectángulos (actividad que se puede orientar en primera instancia mediante la utilidad del *software* geogebra), posterior a ello, probar que si la fórmula vale para dos polígonos simples con interiores disjuntos y lado común, entonces vale para la unión y finalmente, probar que todo polígono simple, se puede descomponer en triángulos disjuntos y por tanto verificar la fórmula (el *software* GeoGebra da la posibilidad de visualizar algunos casos de triangulación y verificación de la fórmula).
 - Se realizan construcciones de casos no muy complejos del enunciado anterior y se llevan a cabo las pruebas indicando las medidas de área y, por supuesto, la validez de la fórmula de Pick para estos casos.

Etapla 3. Inducción del área de polígonos simples y la fórmula de Pick.

A pesar de que en el nivel medio superior no se trabaja o se sistematiza la inducción, se aprovecha la información producto del análisis del

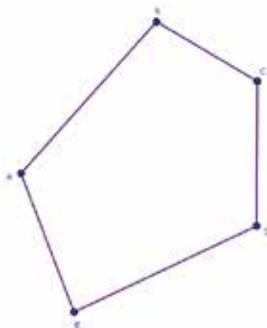
comportamiento de los polígonos construidos y sobre su medida del área, para finalmente, en una actividad conjunta profesor-alumno:

- Hacer los procesos de generalización de la fórmula de Pick, y por lo tanto, institucionalizar las condiciones que deben cumplir el tipo de polígono en donde tiene aplicación.
- Se identifican los conceptos en torno a los polígonos simples, al área, y en torno a la fórmula de Pick.
- Se propone estudiar un polígono simple, y se comprueba el uso de la fórmula para medir el área.

Acercamiento mediante el método griego

Producto de la aplicación de las tres etapas que describe la estrategia, se favoreció la transformación del polígono irregular (Figura 5) a un triángulo cuya medida de su área es igual a la del polígono original.

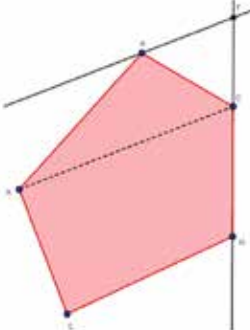
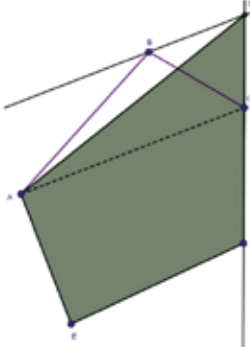
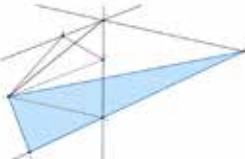
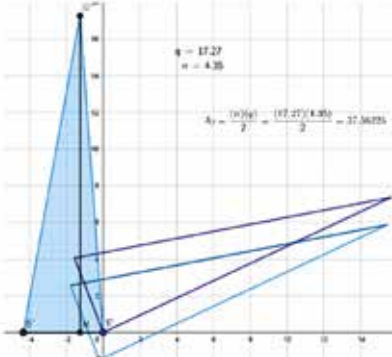
Figura 5. Polígono irregular objeto de transformación



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 6 se muestra la aplicación del método griego en la transformación del pentágono irregular a un triángulo cuyas áreas son equivalentes, dicho proceso fue realizado mediante el uso del *software* geogebra. En el inciso e) de la figura; se realizó con el *software* una transformación isométrica: rotación, con la finalidad de colocar el triángulo logrando que uno de sus lados tenga una posición horizontal, ésta es la posición estándar que generalmente ilustran los textos, en esta posición no presenta dificultad la utilidad de la fórmula clásica.

Figura 6. Descripción del método griego
y de las transformaciones isométricas

		
a) $A[P(ABCDE)] = 37.57$	b) Trazo de la paralela a la diagonal $\overline{AC}$ por el punto B y la recta que pasando por D y C , interseca a la paralela en el punto F .	c) $A[P(AFDE)] = 37.57$
	 $h = 17.27$ $b = 4.35$ $A_2 = \frac{(b)(h)}{2} = \frac{(4.35)(17.27)(1.000)}{2} = 37.56225$	
d) El polígono principal se ha transformado al triángulo AEG , cuya área $A[T(AEG)] = 37.57$	e) Al aplicarse dos transformaciones isométricas del plano (traslación y rotación) se ha obtenido la posición usual que se presenta en los textos; al introducir la fórmula para medir el área de un triángulo: $A = (1/2)bh$. En este caso, la medida obtenida es de 37.56225.	

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

En la concepción y descripción de la estrategia se muestra que a pesar de que la fórmula de Pick tiene restricciones de tipo conceptual para su uso, su inducción posibilita un primer acercamiento hacia los recursos de corte heurístico que favorecen la medida de áreas de polígonos simples (un acercamiento mediante el conteo). El segundo acercamiento basado en el método griego, favorece mediante recursos geométricos el proceso de transformaciones de polígonos irregulares a triángulos, en el paso a la colocación estándar de los triángulos se resignifica el papel de la traslación y la rotación, estas transformaciones junto con el método de los griegos arrojan elementos que posibilitan una manera de demostrar la fórmula para medir el área de un triángulo, y favorecen algunas propiedades esenciales que reafirman el concepto de área.

Estos acercamientos hacia el tratamiento del concepto de área dotan de elementos para la comprensión de las fórmulas clásicas usuales y además, se destaca que las transformaciones isométricas del plano: traslación y rotación son una alternativa para facilitar la posición estándar de las figuras, en donde sean aplicables dichas fórmulas, logrando así la consistencia en el proceso de medición.

El *software* GeoGebra juega un papel central como recurso heurístico, ya que lo dinámico-visual favorece el redescubrimiento, la inducción y generalización de la medida de área en un proceso de conteo, y potencia los significados de las transformaciones isométricas en un proceso de transformación geométrica.

Referencias

- Arango, J., Gavirria, D. y Valencia, A. (2015). Differential Calculus Teaching through Virtual Learning Objects in the Field of Management Sciences. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 176, 412-418. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.490>
- Arenas, M. F. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.
- Ballester, S. (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática, La Habana, Ed. Pueblo y Educación; 1.

- Corberán, R. M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia, España.
- Hernández, E. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.
- García, G. B. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: las interacciones y el análisis cognitivo* (Tesis de Doctorado). Universidad de Huelva, España.
- González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquía, Colombia.
- Jiménez, C. y Blanco, L. J. (2017). El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro. *Números*, 94, 7-21.
- León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 9-28.
- López, R. E., Silva, D. y Fuentes, J. A. (2013). GeoGebra en el estudio de áreas y perímetros. *Pistas Educativas*. No. 104, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- Marmolejo, J. E. y Campos, V. (2012). Pensamiento lógico matemático con scrath en el nivel básico. *Vínculos* 9(1), 87-95.
- Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 10(1), 45-58.
- Morales, A. (2016) propuesta didáctica para la enseñanza de la traslación de coordenadas y su uso en la graficación de curvas. *Premisa*, 18(71), 1-16.
- Morales, A., Marmolejo, J. E., y Locia, E. (2014). El software GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. *Premisa*, 16(63), 20-28.
- Morales, A., Locia, E., y Salmerón, P. (2016). *Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario*. Atenas, 3(35), 64-79.

- Müller, H. (1997). *El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la enseñanza general politécnica y laboral*. Instituto Superior Pedagógico Frank País García.
- Ramírez, J. L. (2010). *El teorema de Pick y redes de puntos*. MATerials MATemàtics, Vol. 5, pp. 1-41. Publicación electrónica de divulgación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona. España.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de Matemáticas. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. A., Sosa, L. (Eds.). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 205-221). Díaz de Santos.
- Verduzco, J., Briseño, L., Palmas, O. y Vázquez, R. (2000). *Áreas de figuras en el geoplano*. Facultad de Ciencias, UNAM: México.

Datos de autores:

Armando Morales Carballo, Angie Damián Mojica, Adilene Venancio Cano
Universidad Autónoma de Guerrero (México).
Correos-e: armando280@hotmail.com

SECCIÓN 3

TENDENCIAS QUE IMPACTAN EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

CAPÍTULO 9

La formulación y resolución de problemas: herramienta utilizada en el aula para el desarrollo de habilidades matemáticas a lo largo de la escolaridad

Olimpia Rosa Castro Mora
Sammy Percy Merino Rosario

Resumen

De los resultados obtenidos en la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE), se ha logrado obtener una aproximación de los logros y dificultades que tienen los estudiantes para formular o crear problemas matemáticos. Desde este escenario, el taller busca evidenciar cómo la formulación de problemas permite desarrollar la intuición y creatividad de los estudiantes, sus habilidades para establecer relaciones, interpretar condiciones, argumentar sus posturas y, además, usar de manera flexible sus conocimientos matemáticos.

El taller está dirigido a docentes de primaria y secundaria, tendrá un carácter activo, participativo y práctico. En grupos, los participantes identificarán la estructura que debe tener todo problema, las diversas situaciones que pueden ser utilizadas en el aula para formular un problema, atendiendo a los procesos cognitivos que se ponen en juego al crear y resolver problemas, a partir de las evidencias que se tienen en las evaluaciones estandarizadas.

Palabras clave: Formulación, problemas, creatividad, habilidades.

Introducción

En la actualidad, la formulación de problemas adquiere una especial importancia en el proceso de la enseñanza aprendizaje de la Matemática, Ayllón y Gómez (2014) refieren que las tareas de formulación permiten el incremento del conocimiento matemático, la motivación, la creatividad, la

disminución de la ansiedad hacia las matemáticas, la superación de errores matemáticos y la posibilidad de que los docentes utilicen estas tareas como instrumento evaluador. En ese mismo sentido, Malaspina (2013) identifica a la formulación de problemas como una herramienta que fortalece las capacidades para resolver problemas; formular interrogantes; identificar problemas e investigar sobre ellos; establecer conexiones con otros conocimientos, desarrollar la creatividad de los estudiantes y fortalecer su autoestima. Fernández (2007) afirma que la formulación o creación de problemas ayuda a los estudiantes a descubrir su error e identificarlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos, generando reflexión sobre el error cometido, y disminuyendo en el docente su ignorancia sobre las dificultades que pueden tener sus estudiantes frente a una tarea matemática.

Desde este escenario, se reconoce que las tareas vinculadas a la formulación de problemas desarrollan “niveles elevados de razonamiento que hacen posible la construcción de un conocimiento matemático” (Ayllón y Gómez, 2014) y permiten evidenciar la comprensión de diversas nociones matemáticas de los estudiantes (Malaspina, 2013). Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2005) mencionan, además, que la formulación de problemas moviliza procesos cognitivos cuando los estudiantes tienen que editar, seleccionar, comprender y organizar la información involucrada en una situación, así como, al traducir esta información de una forma de representación a otra.

Antecedentes

En el Perú, hace varios años, se aplica una Evaluación Censal de Estudiantes (ECE), a varios grados de la escolaridad con el fin de conocer en qué medida se alcanzan los logros de aprendizaje y tener un acercamiento a las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la matemática. En este sentido, la ECE da a conocer al sistema educativo peruano las dificultades que evidencian los estudiantes al finalizar el 4° grado de primaria y el 2° grado de secundaria de la educación básica. Respecto a la formulación de problemas, el Ministerio de Educación del Perú (2017a, 2017b) afirma que los estudiantes presentan diversas dificultades para desarrollar este tipo de tareas que involucran: utilizar la información que se ofrece al formular el problema, establecer relaciones coherentes entre las variables que se involucran en el proceso de formulación e identificar los elementos

que permiten construir un problema (como la información, requerimiento, el entorno matemático y el contexto) propuestos por Malaspina (2013), entre otras dificultades.

Las siguientes son las principales dificultades que se evidencian en la formulación de problemas, desde los resultados de la ECE:

- No toman en cuenta la información propuesta.
- Se vinculan a nociones matemáticas muy sencillas para el grado evaluado.
- No identifican los elementos que conforman un problema.
- Tendencia a establecer relaciones entre variables que son explícitas o se obtienen de una lectura directa.
- Tendencia a utilizar más a los números naturales.
- No discriminan la información que es relevante para resolver el problema.
- Asumen que las respuestas a los problemas siempre tienen que ser cuantitativas y no cualitativas.

A partir de los hallazgos encontrados en la ECE se puede generar espacios de reflexión del porqué los estudiantes no logran obtener desempeños aceptables al formular problemas: ¿por qué podría estar ocurriendo esto?, ¿qué dificultades se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje?, ¿qué oportunidades tienen los estudiantes para formular y no solo resolver problemas?

Metodología

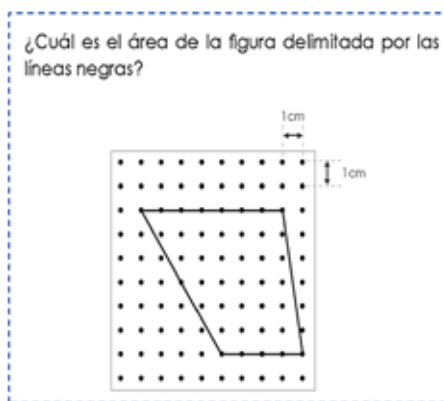
Este es un taller teórico-práctico donde los docentes evidencian la importancia que tiene la formulación de problemas en el desarrollo de las habilidades y conocimientos matemáticos de sus estudiantes, generando, como docentes, situaciones en el aula que estimulan a sus estudiantes a crear, argumentar, razonar, problematizar, identificar sus errores y cuestionar sus creencias, vinculando lo aprendido con una matemática útil pero a la vez significativa para su vida.

Este taller está dirigido a docentes de primaria y secundaria (de preferencia desde el 4° grado de primaria hasta el 3° de secundaria) quienes intercambian opiniones en pequeños grupos de trabajo y que estará centrado en la participación activa de los asistentes luego de presentar evidencias

teóricas que sustentan la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje. Luego, los docentes identifican los elementos que constituyen un problema. Según Malaspina (2013), un problema matemático tiene cuatro elementos fundamentales: la información, conformada por los datos y condiciones que se establecen en el problema; el requerimiento, que es lo que se pide encontrar; el contexto, que puede ser intramatemático o extramatemático y el entorno, constituido por los conocimientos matemáticos que pueden utilizar los estudiantes al resolver un problema.

Por ejemplo, la figura 1 es una tarea aplicada a la ECE 2016 de segundo de secundaria, nos permite reconocer los elementos fundamentales que conforman un problema matemático:

Figura 1. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2015-2° Secundaria.

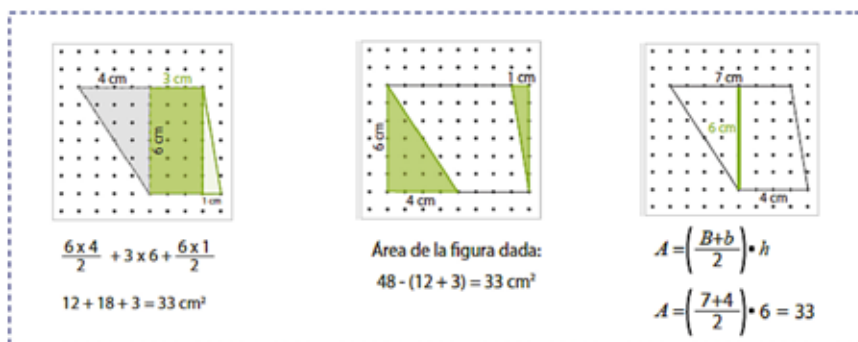


- a) Información: Distancia entre puntos 1cm. Figura cuadrilátero.
- b) Requerimiento: Área del cuadrilátero.
- c) Contexto: Intramatemático.
- d) Entorno matemático: Lados paralelos. Altura de polígonos. Clasificación de cuadriláteros.

Que el estudiante identifique estos elementos es importante porque asegura la comprensión de la situación planteada, el poder aprovechar toda información brindada en el mismo, así como poder organizar esta información y los conceptos matemáticos involucrados para dar respuesta pertinente a lo requerido en la tarea.

En esta tarea mostrada en el ejemplo, vemos que el estudiante pudo usar diversas estrategias para su solución, unas gráficas, otras simbólicas. Asimismo, la manera de abordarla pudo darse desde el descomponer la figura propuesta en dos triángulos y un rectángulo y luego sumar el área de esas partes. Otra posibilidad pudo ser el componer con la figura propuesta un rectángulo que lo incluya y luego descomponerlo en partes, así, al rectángulo formado se le restaría el área de los triángulos señalados. Otra forma de abordar pudo ser analizar los elementos de la figura y la relación entre ellos, en este caso un cuadrilátero con un par de lados paralelos, lo que les permite clasificarlo como trapecio y poder utilizar la fórmula del área del trapecio a partir del reconocimiento de sus elementos como bases y altura. La figura 2 muestra estas estrategias.

Figura 2. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2015-2° Secundaria.



Cabe resaltar que, a pesar de tener diferentes maneras de abordarlo, aplicando distintos conceptos matemáticos y distintas opciones de utilizar los recursos del formato gráfico presentado, en la ECE 2016 de segundo grado de secundaria se obtuvo como resultado nacional que 25,8% de los estudiantes respondieron adecuadamente a esta tarea. Es probable que este resultado se deba a que los estudiantes no identifican los elementos fundamentales del problema, es decir, no logran obtener todos los datos necesarios, ya sean explícitos, como la medida de los segmentos paralelos que son de 7 y 4 cm o implícitos, como es identificar la medida de la altura (o distancia entre las paralelas) que es de 6 cm. Otro factor que puede influir en no resolver adecuadamente la tarea es la noción de área, que muchas

veces puede confundirse con perímetro o que no se comprende bien esta noción y la asocian con una fórmula como es que, todo lo de área es *base por altura* sin atender a las características de la figura.

Evidencias como esta, afirman la importancia de identificar los elementos fundamentales en un problema tanto para su resolución como para formular un problema nuevo. En el enfoque de resolución de problemas, tiene también parte importante la creación o formulación de los mismos. Investigaciones afirman la importancia en la formación matemática de este proceso de formulación y señalan pautas que ayudan a desarrollar estas habilidades. Así, Fernández y Barbarán (2017) consideran, por ejemplo, que situaciones que presentan información incompleta favorecen el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, ya que el estudiante hace uso de procesos metacognitivos y es consciente de las relaciones que intervienen en su resolución, además, le ayuda a descubrir el error y a identificarlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos.

Posteriormente, se presentará a los docentes diversas situaciones que pueden ser utilizadas en el aula para formular problemas. Según Fernández (2007) estas situaciones pueden ser las siguientes:

- a) *Generativas*. Fomentan actitudes problematizadoras en los estudiantes. Se centra en fomentar el razonamiento lógico y no en cantidades ni operaciones.
- b) *De estructuración*. En ellos los estudiantes crean y resuelven problemas a partir de los elementos que la componen.
- c) *Enlaces*. Permiten manejar la información de manera diversa y conectar las partes del problema para generar otro abordaje.

En el taller se pedirá a los participantes crear algunas situaciones que podrían ser presentadas en el aula con la finalidad de despertar en el estudiante esa actitud problematizadora e indagadora que se requiere para la formulación. A continuación se presentan algunos ejemplos.

- a) *Generativas*: centradas en el razonamiento lógico, y no en cantidades ni operaciones.
 - *Sin números*: refuerza la relación entre los hechos y los supuestos. Ejemplo: Al comprarse una pelota, ¿qué pasó con su dinero?
 - *Para deducir ideas*: se brinda información para realizar deducciones. Ejemplo: Tiene monedas de S/2 y de S/5. ¿Quién puede comprar más cosas?

- *Cualitativas*: busca que el estudiante pregunte por información, hasta resolver el problema. Ejemplo: Luis realizó compras. ¿Cuánto dinero le queda?
 - *Enunciados abiertos*: se brinda información a partir de una foto, un esquema, una oración, etc. y el estudiante debe redactar un problema que la emplee.
- b) *De estructuración*: en ellos los estudiantes crean y resuelven problemas a partir de los elementos que la componen. Es decir, en estas situaciones los estudiantes pueden identificar los cuatro elementos fundamentales de todo problema.
- *Una respuesta dada*: por ejemplo, inventa un problema cuya respuesta sea 12 tarjetas.
 - *Una expresión matemática*: por ejemplo, inventa un problema que se use $450-90$ en su solución.
 - *Cumpliendo dos condiciones*: por ejemplo, inventa un problema...
 - Con información de un cartel y cuya respuesta sea $S/20$.
 - En el contexto de un partido de voleibol y con la operación $25-12$.
- c) **Enlaces**: permiten manejar la información de manera diversa y conectar las partes del problema para generar otro abordaje. Por ejemplo, preguntar a partir de un enunciado y una operación.

Luego, se presentan variadas situaciones que han sido propuestas en la Evaluación Censal de Estudiantes, con el objetivo de concretizar los principales aspectos mencionados anteriormente, es decir, identificar la estructura de un problema, distinguir los tipos de problema que se pueden crear, e interpretar las condiciones que les permitirán formular un problema, tanto al docente como al estudiante. Asimismo, en el desarrollo del taller, los participantes podrán interactuar y poner en práctica su experiencia para analizar las habilidades y procesos cognitivos que se pondrían en juego al encomendar una tarea de formulación o creación de problemas a sus estudiantes y, asimismo, valorarán el papel que tienen las evaluaciones estandarizadas, en el desarrollo de aprendizajes sólidos, atendiendo a los procesos cognitivos implicados, conociendo sus concepciones o creencias, identificando sus dificultades y orientando de manera adecuada el error, visto como una oportunidad de aprendizaje.

En la figura 3 se presenta una situación donde se le pide al estudiante de cuarto grado de primaria que invente un problema tomando dos condiciones: datos de la imagen y respuesta dada.

Figura 3. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2016-4° Primaria.

Crea un problema con los datos de la siguiente imagen. Asegúrate que su respuesta sea: "Mariela tiene 12 tarjetas".

Escribe el problema aquí:

Respuesta: Mariela tiene 12 tarjetas.



Mariela Pedro
tiene 4 tarjetas.

En esta tarea, un 40,7% de los estudiantes lograron formular adecuadamente un problema evidenciando la comprensión de los significados tanto aditivos como multiplicativos y también se apreció el conocimiento de la estructura de un problema al mostrar sus elementos.

Algunos ejemplos de respuesta adecuada, donde se aplican significados aditivos, se muestran en la figura 4.

Figura 4. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2016-4° Primaria.

Pedro tiene 8 tarjetas menos que Mariela. ¿Cuántas tarjetas tiene Mariela?	Mariela y Pedro van a jugar con tarjetas y tienen 10. Pedro tiene 4 tarjetas. ¿Cuántas tarjetas tiene Mariela?	Mariela tiene dieciséis tarjetas y le regaló cuatro a su mejor amigo y hermano Pedro. Si Mariela le regaló cuatro tarjetas a Pedro ¿Cuántas tarjetas tiene Mariela?
Situación aditiva de comparación	Situación aditiva de combinación	Situación aditiva de cambio

La figura 5 muestra otro ejemplo de respuesta donde los estudiantes aplican en su formulación significados multiplicativos.

Figura 5. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2016-4° Primaria.

Mariela y Pedro van a jugar
con tarjetas y tienen 16, Pedro
tiene 4 tarjetas ¿Cuántas
tarjetas tiene Mariela?

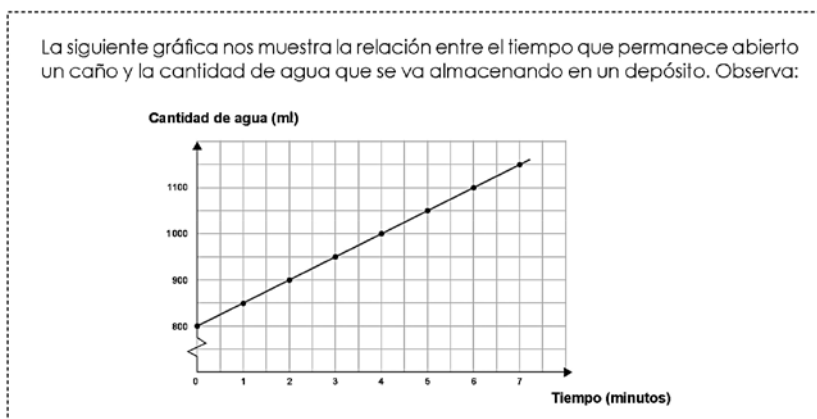
Estos ejemplos muestran las bondades de la formulación al propiciar que el estudiante aplique los conceptos que está aprendiendo en situaciones totalmente nuevas. Por otro lado, es también importante apreciar que la formulación de problemas pone de manifiesto algunos errores que evidencian dificultades en los estudiantes en el proceso de aprendizaje de estas nociones. Así, vemos en la figura 6 algunos ejemplos de los errores de los estudiantes especialmente en la estructura del problema o en atender a las condiciones establecidas.

Figura 6. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2016-4° Primaria.

Mariela tiene 8 tarjetas Pedro tiene 4 tarjetas ¿Cuántas tarjetas en total entre los dos?	un niño tenía 16 tarjetas y pedro me tenía mi mamá le regaló 4 tarjetas se que con 12
Estructura el problema, pero no cumple la condición de respuesta.	Situación con los datos y respuesta pedida, pero no hay el requerimiento.
$P=16$ $M=?$ $P=16-M=M$ $M=12$	si mariela tiene 12 tarjetas a pedro le falta 8 para que lenga igual
Opera con los datos y no redacta el problema	No cumple la condición de respuesta y no hay requerimiento.

En otra fase del taller se abordó la formulación del problema a partir de la función pedagógica que debe asumir el docente. Se enmarcó esta tarea tomando en cuenta los elementos que conforman la competencia matemática como son: los conocimientos, las capacidades y los contextos involucrados. En esta etapa se solicita al docente crear con propósitos específicos problemas a partir de estímulos dados y que estos sean de diversa complejidad como de aplicación de distintos aspectos matemáticos. En la figura 7 se muestra un ejemplo de una situación propuesta en la ECE en donde se retira la parte del requerimiento con la finalidad de que pueda ser utilizada para desarrollar habilidades en la formulación de problemas desde la propuesta del maestro.

Figura 7. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2015-2° Secundaria.



En la situación mostrada, se le pide al docente que identifique los elementos y condiciones que se encuentran inmersas en dicha situación. Luego, se le pide que identifique cuáles podrían ser las posibles nociones matemáticas que estarían vinculadas a la misma (por ejemplo, funciones, proporcionalidad, patrones, etcétera), así como, los procesos cognitivos que el estudiante podría desarrollar a partir de las consignas dadas al momento de estructurar la formulación del problema. Atendiendo a las habilidades que se quieren desarrollar en los estudiantes y a los conocimientos que se quieren involucrar en la tarea, se les pide realizar actividades para crear situaciones a partir:

- De una respuesta dada.
- Dada algunas condiciones adicionales.
- De argumentos o justificaciones vinculadas a la situación.
- De una pregunta incompleta.
- De una expresión matemática dada.
- De una modificación de los datos o condiciones inicialmente propuestas.

Es importante señalar que desde la experiencia del taller se pudo apreciar la creatividad del docente, su invención y criterio pedagógico en la formulación solicitada. Sin embargo, en la mayoría de los casos esto quedaba solo en problema de lectura de información o de cálculo directo simple.

A continuación, expresaremos algunas formulaciones realizadas por los docentes que eran muy tradicionales tanto de lectura como de cálculo directo.

Ejemplo de formulaciones que pedían lectura directa del gráfico:

- A los tres minutos de abierto el caño ¿cuánta agua hay en el depósito?
- ¿Después de cuánto tiempo abierto el caño, el depósito tiene 1100 ml?

Ejemplo de formulaciones que pedían un cálculo simple:

- ¿Cuánta agua habría en el depósito a los ocho minutos de abierto el caño?
- ¿Después de cuánto tiempo abierto el caño, el depósito tendría 2000 ml?

Otros ejemplos dados se centraban solo en el contenido matemático sin tomar en cuenta el contexto:

- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- ¿Cuál es el intercepto con el eje y?
- Escribe la ecuación de la recta.

Por otro lado, algunos docentes buscaban formular preguntas más interesantes y descuidaban si la información dada era la necesaria para lo pedido.

Por ejemplo:

- ¿En cuántos minutos ese caño llenará el depósito? (No se conoce la capacidad del depósito)
- ¿Cuál es la capacidad total del depósito?

Después del análisis realizado a los problemas propuestos evidenciaron que no se abordaron problemas de razonamiento, argumentación, conjeturas, etcétera. De allí, comenzaron a surgir otras propuestas de muy buena intención pedagógica. Por ejemplo:

- Cuando se abrió el caño, ¿el depósito estaba vacío? Explica tu respuesta.
- Si la capacidad del depósito es de 1400 ml, ¿en qué tiempo llenaría ese caño el depósito si al inicio hubiese estado vacío?
- Jorge dice que si en seis minutos ese caño ha llenado 1100 ml de depósito, entonces, en doce minutos llenará 2200 ml. ¿Es correcta la afirmación de Jorge? Explica tu respuesta.

Finalmente, de actividades similares, el docente podrá reflexionar su práctica pedagógica, la relevancia y la pertinencia de su intervención en el proceso de aprendizaje del estudiante, y la importancia que tiene su labor en una adecuada y oportuna retroalimentación ante las posibles dificultades que tengan sus estudiantes al formular y resolver sus problemas.

Resultados esperados

Concluido el taller, los participantes actuarán en tareas individuales y grupales e intercambiarán sus producciones, serán capaces de:

- Valorar la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje, desde el desarrollo de la creatividad en sus estudiantes, pasando por el uso y la conexión de diversos conocimientos hasta llegar a calar en sus motivaciones e intereses.
- Identificar los elementos que estructuran la formulación o creación de un problema e interpretar la relación entre estos.
- Identificar las diversas situaciones que propician condiciones adecuadas para la formulación de problemas en sus estudiantes.
- Desarrollar habilidades que le permitan enriquecer sus conocimientos didácticos y disciplinares a través de la formulación de problemas.
- Concientizar sobre la importancia que tiene la formulación de problemas al generar espacios para problematizar desde situaciones cotidianas, lo que fortalece el sentido y el propósito de una matemática significativa y útil para la vida de los estudiantes.

Consideraciones finales

- Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio, ya que permitirá equiparar la importancia de la resolución respecto a la formulación de problemas, siendo estos complementarios y necesarios para el desarrollo autónomo de habilidades y conocimientos en los estudiantes.
- La formulación de problemas nos permite tener una mirada más cercana del enfoque de Resolución de Problemas ya que representa la naturaleza integradora de la matemática, al problematizar para crear y resolver situaciones en diversos contextos.
- La formulación de problemas debe ser un proceso inmerso en la resolución de estos, ya que desde las estrategias que se buscan para resolverlos se pueden crear nuevas situaciones que permiten controlar y darle soluciones a los problemas originales.
- La formulación de problemas permite el desarrollo de la creatividad, la habilidad para plantear y hacer uso intencional de sus conocimientos, así como, evidenciar los errores originados por sus creencias, concepciones y las diversas dificultades que aparecen a lo largo de la escolaridad.

Referencias

- Ayllón, M. (2012). *Invencción-Resolución de Problemas por alumnos de Educación Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. <https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf>
- Ayllón, M. F. & Gómez, I. A. (2014). *La invencción de problemas como tarea escolar*. *EA, Escuela abierta: revista de Investigación Educativa*, (17), 29-40. Recuperado el 29 de marzo de 2019 en: <file:///I:/LaInvenccionDeProblemasComoTareaEscolar-4801331.pdf>
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 57-69.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.

- Fernández, J. (2007). Apúntate un tanto y tantea el punto. *Resolución de problemas Matemáticos* (pp, 85-102). Recuperado el 10 de abril de 2018 en <http://www.grupomayeutica.com/documentos/24%20MEC-APUNTATE%20UN%20TANTO%20Y%20TANTEA%20EL%20PUNTO-UIMP.pdf>
- Fernández, J. A. & Barbarán, J. (2017). El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas Educación y Futuro. *Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 36, (pp, 153-176). Recuperado el 10 de abril de 2018 en https://www.researchgate.net/publication/318113418_El_desarrollo_de_competencias_matematicas_a_traves_de_modelos_de_situaciones_problematicas
- Ministerio de Educación, Minedu. (2017a). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?*. 2° y 4° grados de primaria. Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016.pdf>
- Ministerio de Educación, Minedu. (2017b). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?*. 2° grado de secundaria. Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación (Minedu) (2018). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?* 4° grado de primaria. Lima: Autor. Recuperado el 5 de mayo de 2019 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-4P.pdf>
- Ministerio de Educación (Minedu) (2018). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?* 2° grado de secundaria. Lima: Autor. Recuperado el 5 de mayo de 2019 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-2S.pdf>
- Malaspina, U. (2007). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Recuperado el 10 de abril de 2018 en: file:///H:/Relme32/formulaci%C3%B3n%20deproblemas%20_malaspina.pdf
- Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo. Retrieved from <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/729.pdf>

- Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 19-28.
- Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162.
- Silver, E., Mamona, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 27(3), 293-309.

Datos de autores:

Olimpia Rosa Castro Mora, Sammy Percy Merino Rosario
Oficina de Medición de la Calidad de los aprendizajes, Ministerio de Educación (Perú)
Correos-e: ocastro@minedu.gob.pe, pmerino@minedu.gob.pe

CAPÍTULO 10

“Good” questions (not only) in mathematics education

Jarmila Novotná

Abstract

In the chapter, the author focuses on communication in the classroom; more specifically on one type of questions, the so-called “good” questions. A question is classified as a “good” question if there exists more than one answer that can be accepted and that requires more than mere reference to known facts; pupils can learn something when they answer it and discuss it and teachers can learn something about their pupils’ understanding of mathematics from the pupils’ answers. “Good” questions are one of the tools for creating an environment supporting discussion among pupils and between pupils and their teacher, which are of key importance in constructivist-led teaching. The chapter focuses on posing and formulating “good” questions and their use in education.

Keywords: communication in the classroom, “good” questions, constructivist-led teaching.

Introduction

In the past, to focus on communication in the classroom meant to focus primarily on the teacher’s language. Nowadays, more attention is paid to communication between the teacher and their pupils and among pupils themselves. The attention has moved from the language of texts to the language of discourse.

The discussion of pupils with the teacher as well as discussions among pupils are important elements of constructivist-led education. Discussions

are organized in such a way to allow pupils discover something new, to formulate a hypothesis, to discuss different solutions of the given task, etc. To give pupils enough space for these activities is often very difficult for teachers because they cannot prepare such communication in advance and have to respond quickly to the situation that emerges in the classroom. In a lesson, the teacher asks a number of questions, most of which are not prepared in advance.

In this chapter we focus on one type of questions suitable for supporting pupils' discussion with the teacher but also with each other, the so called "good" questions, one of the form of questions supporting the development of discussion.

Conceptual framework

There is a variety of ways in which pedagogical discourse in the classroom can be improved. In literature, this problem is often approached from different perspectives. Let us present a (non-exhaustive) list of them.

Heyd-Metzuyanin and Shabtay (2019) examine teachers' pedagogical discourse and their participation in mathematical discourse during problem solving episodes. They focus on teachers' narratives about 'good' mathematics teaching. Moyer and Milewicz (2002) study appropriate questioning techniques as an important part of mathematics teaching. Hricova and Pcolinska (2015, 2016) claim that various methods for the development of communication are needed, namely discussion, presentation and activity. They study relationships between knowledge and communication competences in competence-based learning process. Slowiaczek, Klayman, Sherman and Skov (1992) try to find out what a good question and a good answer are in hypothesis testing. They show the importance of behaving in an interactive, multistage process including posing selected questions, interpreting data and drawing inferences.

A "good" question for us is a question that supports constructivist and activating approaches, not a question that is well formulated and well communicated to the pupils. Our understanding of a "good" question comes from the idea developed originally by Sullivan and Clarke and their team (Sullivan and Clarke, 1988, 1990, 1991; Clarke and Sullivan, 1990; Sullivan, Clarke and Wallbridge, 1991; Clarke, Sullivan and Spandel, 1992; Sullivan and Lilburn, 2010 etc.). The main characteristics of this type of

questions are their content-specific focus and the opportunity for answers at different levels of sophistication (Clarke, Sullivan and Spandel, 1992: 209).

Questions that are closed and can be answered conclusively are called ordinary questions in this chapter. Ordinary questions test pupils' knowledge of facts; the pupil either knows the answer, or does not. They are a good tool for checking pupils' knowledge. Teachers, when using them, should only be testing clearly defined and previously taught content in a limited period of time (an in-advance announced exam). The use of ordinary questions gives pupils a chance to be successful if they revise properly. However, the pupil who prepares for being tested the next day and who wants to get a good mark will often not remember the information in a longer-term horizon. Moreover, the tested pupils are in stress and stress is a demotivating factor in lifelong learning (individuals do not learn to love to learn new things). Often, testing becomes a form of punishment. Associating asking questions to punishment is unacceptable (Jančaříková, Jančařík and Novotná, 2012).

In Table 1, a comparison of the use of ordinary and good questions according to (Jančaříková, Jančařík and Novotná, 2012) is presented.

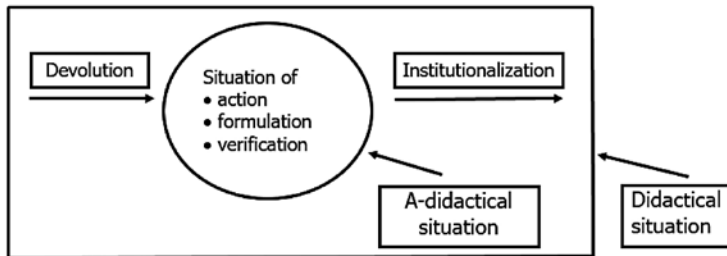
Table 1

Pupils	Ordinary question	Good question
Experience success	Who answers first. In the class, a group of "Successful pupils" is formed = pupils who learn to answer quickly.	Everybody who makes effort.
Experience failure	Absolute majority (all but one). In the class, a group of "Weaker pupils" is formed = pupils who hardly ever answer correctly.	Hardly anybody. Failure is linked with low attention and insufficient attitude to work.
Mutual pupils' relationships	Disrupted by concurrence, rivalry and elitism.	Can flourish. Pupils cooperate.
Feelings	Stress, fight, inferiority.	Contentment, respect to personality, self-confidence.
Lifelong learning	Placed at risk.	Supported.

Pupils	Ordinary question	Good question
Ability to present one's own opinions	Suppressed.	Supported and developed.
Ability to critically evaluate presented information	Not developed.	Developed.

In preparation of teaching episodes based on the use of “good” questions in the classroom, the Theory of Didactical Situations (TDS) (Brousseau, 1997) was used. The objective of a didactical situation is to teach somebody something. It consists of three main phases: devolution, a-didactical situation and institutionalization (see Fig. 1).

Fig. 1



Devolution is the process through which the teacher manages to put the pupil in a didactical situation in the position of being a simple actor in an a-didactical situation. A-didactical situation is the situation that can be presented to pupils and solved by them without any help from the teacher. The objective of a-didactical situation is to enable pupils to develop their knowledge independently. Institutionalization is the process of incorporating an isolated piece of knowledge into the individual's structure of knowledge.

Method

In the paper, we focus on the following issues: What does a “good” question consist of? How can a teacher pose “good” questions? How can a teacher use “good” questions in the classroom?

In accordance with (Sullivan and Lilburn, 2010), we understand by a “good” question a question that meets the following criteria:

- More than one answer can be accepted.
- It requires more than a mere reference to known facts.
- Pupils can learn something when they answer the question and discuss it.
- Teachers can learn something about their pupils’ understanding of mathematics from their pupils’ answers.

“Good” questions are a specific type of open questions.

Sullivan and Lilburn (2010) propose two ways of posing “good” questions. Both of them have three steps:

- Starting from the end
 - a) Choose the topic
 - b) Pose a closed question and find the answer to it
 - c) Transform the formulation and create a “good” question

Example:

Phase a)	Phase b)	Phase c)
Rounding	12 seconds	My coach told me that I covered 100 m in approximately 12 seconds. What time could his stop-watch show?

- Adapting a commonly used question
 - a) Choose the topic
 - b) Choose a common question
 - c) Convert it into a “good” question

Example:

Phase a)	Phase b)	Phase c)
Geometry	What is a square?	What do you know about a square?

In our research, we observed posing of “good” questions by different groups of respondents: practising teachers at primary and secondary schools and student teachers at faculties of education in the Czech Republic. At second-

dary level, we worked with pre- and in-service teachers of mathematics, biology and environmental studies. All participants were acquainted with the concept of “good questions” and the above described two ways of posing them. The questions the respondents produced were discussed and analysed using the four features that characterize “good” questions. Errors were identified; in such cases, the questions were reformulated into “good” questions. Didactical situations in which “good” questions were used were designed. Piloting of the proposals was observed and analysed after the event.

Results

Examples of “good” questions

In this section, two groups of examples of “good” questions are presented: questions developed by Sullivan and Lilburn (2010) for primary mathematics (Table 2) and questions produced by mathematics teachers and student teachers in our experiment (Table 3).

Table 2

Question	Aim
Find a rectangle that can be created from 12 equal squares.	To show that different rectangles can have the same area.
Patsy has a squared paper with the length of one square 1 cm. She tries to cover 65 squares. Which shapes can she cover the 65 squares with?	To show the use a unit shape for comparing areas.
I have 24 chocolates. I want to create a box for them. What can this box look like?	To show the decomposition of a number into a product of two factors. Note: The question focuses on multiplication more than on area. Will pupils find that there are more possibilities?
One third of candies in the box is wrapped in red paper. How can you draw candies in the box?	To represent a part of a whole in different ways.
Let $\frac{\quad}{5} + \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{5}$. Which numbers may there be in the numerators?	To prepare pupils for the concept of common denominator.

Question	Aim
I am cutting pizzas. How many quarters may I obtain if I cut different numbers of pizzas?	To give pupils the idea of simple and compound fractions.
How can we represent $\frac{2}{3}$?	To remind pupils about diversity of representations of fractions.

Table 3

Question	Aim
A rectangular garden is surrounded by a 720 m long fence. What can its dimensions be?	To show that different rectangles can have the same perimeter.
Pelmanism has 32 pairs of pictures. How can its cards be arranged in a rectangular or square form, if we want to have no more than 20 cards in each row and column?	To show decomposition of a number into a product of two factors. Note: In the set of natural numbers.
Number 40 is a product. What can its factors be?	To show decomposition of a number in a product of two factors. Note: The type of numbers is not announced.
Find a fraction between $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{7}$.	To give pupils the idea that the order in the set of rational numbers is dense.
Find the numbers x and y , whose difference is greater than 3.	To remind pupils of properties of subtraction.
You have an important meeting in a town which is 200 km away. You can use a motorway where the speed limit is 130 km/h. The meeting starts at 10 o'clock. What time should you leave home to be at the meeting in time?	“Good” question in an interdisciplinary situation.

In (Jančaříková and Novotná, 2019), 288 questions posed by the respondents are analysed. 192 of them were classified as “good” questions. Problems discerned in the respondents’ “good” questions can be divided into two groups: A. The questions posed are not “good” questions, B. The questions posed are formally “good” questions but are not formulated well for various reasons (in the following text they are called “seemingly good” questions).

A. The questions posed are not “good” questions

- a) Respondents ask yes/no questions

Examples: “Can a rectangle be divided into two congruent parts?”, “Have you ever considered why it is important for nature to be covered by snow when it is below zero?” (The only possible answer is yes/no.)

- b) Respondents pose questions that allow only one answer (or one desired answer).

Examples: “What is the sum of the interior angles in a triangle?” (only one answer based on the data is possible), “If you are on a trip with your school and have an empty plastic bag from your sandwich, what will you do with it?” (The teacher obviously expects their pupils to answer they will take it back to civilization and put it in a dustbin.)

B. Seemingly “good” questions

- c) Unreal setting

Example: “Mum baked a rhubarb cake and left a message to her family that she is taking $\frac{2}{8}$ of the cake with her for a visit to Granny. What portion of the cake could Dad and his son eat to leave a sufficiently big portion of the cake to Mum?” (The situation does not reflect how families communicate.)

- d) Wrong problem formulation

Example: “What might the diagram represent (x stand for digits 0, ...9)?”

				x
		x	x	x
		x	x	x
x	x	x	x	x
x	x	x	x	x
1	2	3	4	5

(The diagram does not represent any operation with natural numbers.)

e) Unclear task

Example: “How can we negate the given functions in a way that de Morgan’s rules are used correctly?” (The formulation of the question does not make sense; only someone who understands the topic can deduce what the author probably meant.)

f) Too vague wording

Example: “In how many ways can one half of a rectangle be coloured?”

g) Questions with too complicated wording

These questions could be classified as “good” questions that, however, lack their motivational function or lead to demotivation once set in the classroom.

Example: “Change the nine-digit number 123456789 in such a way that you replace two different digits by number 2 and the created number is divisible by 3.” (The same would be possible with a number with fewer digits. Nine digits may become the reason why some pupils refuse to get involved in the creative search for an answer.)

Use of “good” questions in the classroom

When piloting the use of “good” questions in didactical situations in the sense of (Brousseau, 1997), the features from this theory had to be taken into account. The course of a lesson based on Brousseau’s theory is different from traditional lessons where pupils’ activities are directed by the teacher during the whole lesson. According to Brousseau, only two phases of lessons are controlled by the teacher-devolution and institutionalization. In a didactical situation, it is pupils who are responsible for finding answers to the posed question(s).

1st phase-Devolution

Posing a “good” question means posing the question (e.g. by giving out hand-outs with the question, presenting the question on the blackboard or interactive board, projecting the question from a computer, collective reading of the question etc.) and checking that everybody understands (pupils should have the opportunity to ask the teacher e.g. what it means to answer the question, the teacher answers or delegates answering to one of the pupils). The teacher’s help does not include any hint on the solving

process. The pupils' task is to find the answer; the teacher does not do it for them.

2nd phase-A-didactical situation

Pupils are looking for correct answers to the posed question. The recommended form for this phase is group work. Groups are expected to work without any teacher's intervention. If too many pupils do not know how to start, the teacher may interrupt the work and continue the discussion from devolution. If it does not help, a simplified question can be posed. In no case does the teacher offer hints on how to solve the task. If there is one or more faster groups, a similar, e.g. a more complicated "good" question can be posed.

The teacher observes what pupils do but does not intervene in their work. It is not necessary to wait until all groups find the answer.

3rd phase – Institutionalization

A whole class discussion follows. Groups present their solutions and explain why they chose their solving procedure. Each group summarizes the procedure, the teacher records all answers of all groups e.g. on the blackboard. The presented answers can differ in the level of generality of proposed solutions, in their level of real life perspective etc. ^[F]_[SEP] The fact that a group presents correct answers does not mean that they understand everything. Therefore, it is useful to summarize important moments and explain them. If everything works as it should, some pupils should be able to do the summary without the teacher.

It is recommended to pose further questions similar to the original one so that pupils can see that their procedure is/is not applicable more generally.

Example: Pupils look for answers to the following "good" question.

Two fifth (2/5) of pupils of the school go to the school library every day. How many pupils can there be in the school and how many of them go to the library every day?

- Simplification, e.g. use of fractions pupils are more familiar with ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...)
- Help, e.g. use of buttons, of a picture, ...

- Question for fast solvers, e.g. What happens if $\frac{3}{5}$ instead of $\frac{2}{5}$ of pupils go to the library?
- Examples of answers:
 - In the school, there can be any number of pupils.
 - In the school, there are 100 students, 40 of them go to the library.
 - The number of pupils in the school is a multiple of 5, e.g. 5, 10, 15, 20, ...; 2, 4, 6, 8, ... go to the library.
- Similar questions might be e.g.: In a survey, it was discovered that $\frac{3}{4}$ of population like The Beatles. How many people answered the question and how many of them liked The Beatles?

The teacher's role varies according to the phase of the situation. When starting the activity, instructions and motivation is the teacher's main task. During the a-didactical situation, the teacher does not provide hints, pupils work on their own as much as possible. In the final discussion and summarization, the teacher has to manage the classroom discussion that allows the class to detect doubtful, incomplete etc. answers. The teacher does not make decisions about whether answers are correct but helps pupils to learn to explain, to use and accept legitimate arguments and to defend their statements. The teacher may delegate these activities to a pupil or a group of pupils. The use of "good" questions in didactical situations puts a lot of demands on the teacher, mainly fast reactions to pupils' suggestions and recognition of correct answers.

Discussion

Sullivan and Lilburn (2010) introduced the use of good questions in mathematics education of young pupils. In (Jančařík, Jančaříková and Novotná, 2013; Novotná and Jančaříková, 2018), the use of "good" questions is extended to higher grades of primary and secondary schools and to didactics of natural sciences, environmental education or education to sustainable development and other sciences.

Jančaříková, Jančařík and Novotná (2012) claim that the teacher's decision to use "good" questions in the educational process often results in the development of favourable psychosocial climate. If there is not just one correct answer and almost any pupil's answer can be perceived as meaningful and interesting, pupils perceive themselves successful and valuable.

They are calmer and relationships among them are not corrupted by rivalry and competition.

Asking “good” questions can develop pupils’ innate playfulness, creativity and their motivation to discover hidden and covert patterns in the surrounding world. Overuse of ordinary questions results in loss of self-confidence; it happens even faster in mathematics and sciences where the pupil cannot be expected to know the answer to most of the ordinary questions. Therefore, it is important that teachers define the areas that will be tested by ordinary questions clearly, e.g. they make lists of products that will be subject to testing (Jančaříková, Jančařík and Novotná, 2012).

Conclusion

Our society needs citizens who are able to test and verify traditional concepts, individuals who are able to scrutinize “generally acknowledged truths” and critically test them. Teachers should try to bring their pupils to think, learn, analyze, criticize and be able to solve also problems that are not regular.

If teachers pose “good” questions, it is without any doubt beneficial for pupils’ future lives and careers and thus for all society. However, asking “good” questions is not sufficient. If we want “good” questions to support creativity, the whole learning process must undergo a change. The teacher must react to pupils’ answers appropriately (in a responsible, creative and systematic way), which is far from easy. It requires interest, knowledge of the discipline and also courage (Jančaříková, Jančařík and Novotná, 2012).

Both posing and using “good” questions in lessons requires that teachers get introduced to the concept of “good” questions theoretically but also to get some practical experience. As our research confirmed, a lecture is not sufficient to equip teachers with the skills needed for posing “good” questions. They need to understand characteristic features of “good” questions and the potential they bear. Only when teachers pose their own “good” questions, experience and analyse appropriateness of their formulations for different groups of pupils, they learn to see the pitfalls and their pupils’ difficulties when trying to answer “good” questions. That is why this concept has become part of undergraduate pre-service teacher training at Faculty of Education, Charles University.

References

- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Clarke, D., & Sullivan, P. (1990). Is a question the best answer?. *Australian Mathematics Teacher*, 46(3), 30-33.
- Clarke, D., Sullivan, P., & Spandel, U. (1992). Student response characteristics to open-ended tasks in mathematical and other academic contexts. In *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 209-221). Richmond, New South Wales: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Heyd-Metzuyanim, E., & Shabtay, G. (2019). Narratives of ‘good’ instruction: teachers’ identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM Mathematics Education*, 51, 541-554. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-01019-3>
- Hricova, D., & Pcolinska, L. (2015). Testing knowledge and communication during the competency-based learning process. In *Proceedings ERIE 2015* (pp. 190-197). Prague: Czech University of Life Sciences Prague.
- Hricova, D., & Pcolinska, L. (2016). Is there a relationship between knowledge and communication competences of students? In *Proceedings ERIE 2016* (pp. 211-219). Prague: Czech University of Life Sciences Prague.
- Jančařík, A., Jančaříková, K., & Novotná, J. (2013). “Good” questions in teaching. *Procedia* [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) - [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) *Social* [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) and [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) *Behavioral* [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) [HYPERLINK “http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428”](http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428) *Sciences*, 93, 964-968.
- Jančaříková, K., & Novotná, J. (2019). Posing good questions-Why are good questions posed not always good? In *Proceedings ERIE 2019* (pp. 105-112). Prague: Czech University of Life Sciences Prague.

- Jančaříková, K., Jančařík, A., Novotná, J. (2012). Koncept dobrých otázek. *Poradce ředitele školy*, 36-41. [Concept of good questions. In Czech.]
- Moyer, P., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 293-315. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021251912775>
- Novotná, J., & Jančaříková, K. (2018). "Good" questions in teaching mathematics and biology. Presented at the international conference *STEM vzdelávanie a inklúzia kultúrnych odlišností*, Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia, 28.8.2018. Organized by 'Intercultural learning in mathematics and science education' IncluSMe project.
- Slowiaczek, L.M., Klayman, J., Sherman S.J., & Skov, R.B. (1992). Information selection and use in hypothesis testing: What is a good question, and what is a good answer? *Memory & Cognition*, 20(4), 392-405. <http://dx.doi.org/10.3758/BF03210923>
- Sullivan, P., & Clarke, D. (1988). Asking better questions. *Journal of Science and Mathematics Education in South East Asia*, 11, 14-19.
- Sullivan, P., & Clarke, D. (1990). *Communications in the Classroom*. Geelong: Deakin University Press.
- Sullivan, P., & Clarke, D. (1991). Catering to all abilities through "Good" questions. *Arithmetic Teacher*, 39(2), 14-21.
- Sullivan, P., Clarke, D., & Wallbridge, M. (1991). *Problem solving with conventional mathematics content: Responses of pupils to open mathematical tasks. Research Report 1*. Oakleigh: Mathematics Teaching and Learning Centre.
- Sullivan, P., & Lilburn, P. (2010). *Activités ouvertes en mathématiques*. Montréal: Chenelière Education.

Datos de autor:

Jarmila Novotná, Charles University, Faculty of Education, Prague, (Czech Republic)
Correo-e: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

CAPÍTULO 11

Cultural contexts in problem posing in mathematics

Hana Moraová

Abstract

The chapter looks at the issue of problem posing in mathematics classrooms and on one of its aspect-posing word problems in non-mathematical contexts that are motivating and appealing to contemporary children and teenagers. While word problems in textbooks are usually set in very conservative and outdated contexts distant from pupils' interests, the paper shows that teachers are able to pose this kind of problems, if they are aware of the importance of focusing on non-mathematical contexts of the problems they pose and provided chance and space to practice their skills and discuss and analyse posed problems together. Then they are able to prepare tailor-made word problems for each particular group of pupils responding to their interests. When posing problems, teachers should never forget that they must be mathematically correct. Problem posing reveals teachers' misconceptions in what number sentences actually represent in reality.

Keywords: word problems, problem posing, cultural context.

Introduction

Teaching for the 21st century means developing skills that pupils will need in their future, although this future is hard to foresee and it is not easy to predict what exactly will be needed. Thus, more attention should be paid to development of skills and competences than to knowledge. For example, mathematics education can develop very important skills and abilities not

relevant only in mathematics: critical thinking, creativity, problem solving, handling data, reasoning and looking for applicable solving procedures.

If teachers want to make mathematics meaningful to the new generation, it is essential that they present it not only in a way that is attractive and comprehensible to their pupils, but that also corresponds to their everyday experience and is something that belongs to their lives. If mathematics taught in a too academic way, pupils may fail to see its usefulness and relevance for their lives. Meany and Lange (2013) also warn that if pupils fail to recognize mathematics they naturally do at home in school mathematics, they are not able to use the existing knowledge to solve mathematics at school.

Word problems are one of critical areas in teaching of mathematics (Vondrová and Žalská, 2013). It is a topic that tends to be unpopular with pupils as well as teachers. At the same time, word problems are the area in teaching mathematics where we have the opportunity to show pupils that mathematics is a useful tool for solving common, everyday situations and problems, to show that mathematics matters. However, this will only happen under the condition that the context of the word problems is based on the pupils' everyday life, their interests and situations they face in their lives. However, as it will be argued below, classroom reality is often different and word problems used in lessons are very often very distant from experience of young learners. Teachers of mathematics rely heavily on textbooks and most word problems used in lessons are from textbooks, which often means they are outdated (the textbooks are written years before they are published and then they are used for many years in the school).

Research in the field of word problems, conducted in the Czech Republic on Czech textbooks (Moraová, 2018), shows that the roots of many textbooks of mathematics come from the 1990s and the context of these problems (i.e. what problems and situations the protagonists of word problems solve) reflect the reality of life in the late 1980s rather than contemporary life. Also research among student teachers and in electronic materials (Moraová, 2014; Moraová, 2017) shows that the tendency is to pose word problems in very conservative contexts.

The aim of the chapter is to discuss whether and how teachers may pose problems tailor-made for their pupils' interest and life experience that are much closer to everyday reality of the learners than problems available in hard copy textbooks (and often also in online materials).

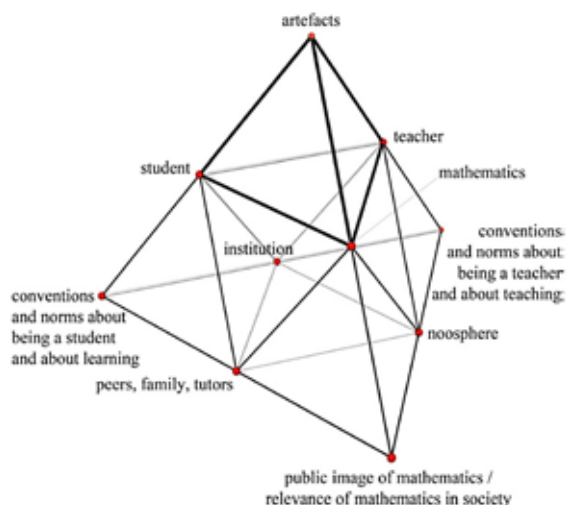
Conceptual framework

There are three basic argumentative threads in the conceptual framework for this study.

The first one focuses on the extent of use of mathematics textbooks in lessons of mathematics showing how much time young learners spend in the cultural world created by authors of mathematics textbooks. The second thread focuses on research of cultural contexts actually present in textbooks of mathematics. The third focuses on problem posing as an essential tool a teacher should master and the potential it bears for mathematics lessons and the area of word problems.

Research shows that textbooks play a crucial role in mathematics lessons. They are used in lesson planning as well as in conducting the lessons. Baldwin and Baldwin (1992) found in Canada that teachers use the textbook 70 to 90% of lessons. Askew collaborators (2010) present the results of TIMSS 2007 where 65% of 5th grade mathematics teachers and 60% of 9th grade teachers stated they worked with a textbook most of the lesson. In TIMSS 2011 research 75% of primary pupils claim that textbooks are the primary source for them in mathematics lessons (Mullis et al., 2012). Similar is reported about Nordic countries (Lepik et al., 2015). While working with a textbook of mathematics, pupils come across many images of everyday life. Yet, it seems not much attention is paid to the textual (non-mathematical, cultural) content. This despite the fact that, as Rezat and Straesser (2012) point out, what happens in a lesson of mathematics is not just the traditional teacher-pupil-mathematics interaction (the concept of the didactical triangle). There are a number of other factors that structure a mathematics lesson (including artefacts, culture, community). In other words, artefacts used within a lesson (i.e. textbooks and also problems posed by teachers) affect this lesson as well as the general idea of what it means to be doing mathematics, what it means to be a pupil and a teacher in a mathematics lesson and what mathematics is for our society and culture. Rezat and Straesser developed the model of socio-didactical tetrahedron to describe the reality of mathematics education (See Fig. 1).

Fig.1: The socio-didactical tetrahedron according to Rezat and Straesser (2012)



Moraová (2018) conducted a research study in textbooks of mathematics for 6th graders in the Czech Republic with the aim of finding what images of real life Czech pupils come across in their textbooks of mathematics. Five different sets of textbooks were analysed with respect to the cultural (non-mathematical) contexts used by the authors in word problems. The contexts were classified into categories and the frequency of the use of various contexts was calculated. Table 1 shows the frequency of the use of different textbooks used in Czech schools.

Table 1: Non-mathematical contexts of word problems used in 5 sets of textbooks for 6th grade in the Czech Republic

Topic	Coufalová et al.	Odvárko & Kadleček	Šarounová et al.	Herman et al.	Molnár et al.
Job	16.35%	11.59%	10.53%	24.56%	11.76%
Free time	16.35%	13.77%	11.58%	14.04%	20.59%
School	5.77%	10.14%	13.68%	5.26%	7.35%
Shopping	15.38%	10.14%	6.32%	15.79%	13.24%

Topic	Coufalová et al.	Odvárko & Kadleček	Šarounová et al.	Herman et al.	Molnár et al.
Finance	6.73%	5.07%	6.32%	3.51%	8.82%
Science	5.77%	1.45%	8.42%	12.28%	0.00%
Do-it-yourself	5.77%	28.26%	7.37%	15.79%	5.88%
Sewing	3.85%	0.00%	5.26%	1.75%	0.00%
Cooking and eating	7.69%	1.45%	0.00%	3.51%	2.94%
Sport	3.85%	7.25%	22.11%	3.51%	19.12%
Cars	2.88%	2.17%	2.11%	0.00%	7.35%
Other	9.62%	8.70%	6.32%	0.00%	2.94%

This distribution of contexts only confirms that contexts used in mathematics textbooks do not reflect on reality. Current Czech children's interests are social media, youtubers, world of music, celebrities, travelling and holidays, sport, shopping (but not buying food) and nowadays the environment, sustainable growth or climatic change. These contexts are not used in Czech textbooks of mathematics with the exception of sport and shopping (which is, however, most often buying grocery products, rarely clothes).

Contexts like *Do-it-yourself*, *Sewing* are historical. These activities were quite common in the time of communist regime where things and skilled workers were not much available, which meant people learned to help themselves. In the 1980s, fathers would be described doing actions like decorating, building fences around gardens or building cots for rabbits. Mothers would be described as persons who sew fashionable clothes trying to imitate what was in the West. Today's children are not likely to see their parents do these things and the described activities must sound like from a different world.

What is also interesting is the gender distribution of different contexts. In the world of jobs, women are shop assistants and men shop keepers, women are cooks and teachers, while men are drivers and directors.

The category of food preparation is female dominated, the category of science male dominated.

The word problems in the studied set of textbooks present only nuclear families-mother, father, two children and grandparents in the countryside. All characters have traditional Czech names. Minorities are excluded from the textbooks.

Moraová (2017) conducted a study of non-mathematical (cultural) contents of online materials developed by teachers of mathematics to see if in-service teachers were more creative when posing word problems. The hypothesis was that the online environment would be more flexible with respect to cultural contexts as the time span of the created problems need not be as long like in hard-copy textbooks. The conducted study, however, showed that the world in-service teachers create in word problems of their multimedia materials is very stereotypical, far from real life and defending old-fashioned middle-class values and traditions. In-service teachers whose materials were analysed in the study failed adapt the contexts to the world as it is now, they failed to use the potential of the new medium (online multimedia materials). Although uploading materials is virtually for free and gives the authors the chance to be innovative in their contexts, they tend to create problems similar to those they were brought up on. Instead of responding to the current state of society, the conditions of their classrooms and interests of contemporary young learners, they tend to replicate the same cultural patterns they had come across as primary and secondary school pupils.

Out of the 162 online problems that were analyzed, the largest group has the setting of food, eating it, buying it or preparing it (52%). (In problems posed by teacher trainees this was 61%). There are some differences. A brand new setting of word problems in multimedia materials is the animal world. This is very likely to be connected to the facility of using pictures in color, making the problems more attractive. Multimedia teaching materials do not use the setting of the world of technology.

The selection of settings in online materials is very similar to the settings of problems posed by teacher trainees in pen and paper (Moraová, 2014) and also to the settings of word problems that are common in Czech textbooks of mathematics (see Table 1). Out of the 117 word problems posed by pre-service primary school teachers, 69 (59%) were set in the context of food. 44 (64%) of all these problems include cakes (cakes, cakes with poppy seed filling and cottage cheese filling-28), birthday cakes (8), desserts (3), sponge cakes (2), cupcakes (2) and pizza (1). Sponge cakes

were baked by the grandmother, 4 cakes were baked by mothers and 1 cake by grandmother. There is no male baking. Men tend to be slightly more often the consumers. In 18 word problems cakes are eaten by girls and boys together. In 12 word problems, cakes are eaten only by boys and in 6 cases cakes are eaten only by girls (Moraová, 2014).

This implies that more attention should be paid to problem posing, including the issue of non-mathematical and cultural aspects of mathematics education at the level of teacher education. Preservice and in-service teachers of mathematics need to grow aware of the fact that they are not only teaching mathematics, but also teaching culture and moulding the new generation. Moreover, their insistence on the use of the most traditional images may make mathematics distant to those learners who come from different cultural backgrounds and have diametrically different experience with everyday life. And that contradicts the principle of equity and equal chances in education. As Favilli and collaborators show (2015), mathematics classrooms are no longer culturally homogeneous. If we do not want to exclude some of the pupils, we must look for variety.

Problem posing in teacher training is a method leading to enhancement of teachers' subject didactic competence. The complex nature of this competence implies that problem posing can have several functions:

- It is an educational tool because a teacher must often pose problems that are e.g. related to a specific situation in the class (Silver & Cai 2005).
- It is also a diagnostic tool that helps teachers to uncover deficits and obstacles in students' knowledge (Silver & Cai 1996; English 1997; Harel, Koichu, & Manaster 2006; Tichá & Hošpesová 2013).
- It is also a diagnostic tool that uncovers misunderstandings and misconceptions of future teachers-may show substantial deficits in teacher trainees' knowledge.
- It can be a significant motivational element leading to deeper inquiry into the content of the subject matter, resulting especially in deeper study and effort to improve one's knowledge base for teaching, deeper understanding of concepts, in boosting repertoire of interpretation.

Problem posing at schools is needed to supplement official curricular documents, to help practice what does not work for a specific group of learners,

to motivate learners by using tailor made settings and to diagnose problems of pupils if they try to pose problems on their own (for their classmates).

Method

The described research study was conducted with participants of workshops at a conference for Czech in-service teachers *Dva dny s didaktikou matematiky* (Moraová & Novotná, 2019) and during the Sixth International Workshop “Trends in Research-Based Mathematics Education” at the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (November 13-November 16, 2019). There were about 50 participants.

The participants were first introduced to the theory of problem posing and relevance of cultural contexts of word problems. Then they were asked to pose problems on their own, setting them in contexts meaningful and interesting for children and teenagers in the Czech Republic and Mexico.

Activity 1:

Pose a problem for the following equation:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

Use environments motivating for your pupils.

Sample word problems given to the participants as illustration of what is expected:

Traditional

- David has eaten $\frac{1}{2}$ of Martin’s ham and mushroom pizza and $\frac{3}{4}$ of Jane’s quarto formaggi pizza. How much pizza has he eaten in total?
- There were $\frac{3}{4}$ of a pizza left on the table. Petr and Jane came home and each of them ate $\frac{1}{2}$ of the pizza. How much of the pizza did each of the children eat?

Less usual

- When John came home from school, instead of doing homework he was chatting on Whatsapp with his friends for $\frac{1}{2}$ hour and playing a videogame for $\frac{3}{4}$ hour. How much time was he procrastinating?

- Mum lent her son money to buy new, fashionable shoes. He managed to pay back one half in the first month from his wages from the part time-job. Mum told him that if he excelled in the maths test, he would only have to pay $\frac{3}{4}$ of the remaining debt. How much of the whole debt will he have to pay?

Activity 2

- Make a number expression from numbers 2, 3, 5, 7 in a way that each number is used only once and the result is 10. You can use brackets, change their order, add, subtract, multiply and divide.

Possible expressions:

- $(3 + 7 - 5) \times 2$
- $3 \times 5 - 7 + 2$
- $3 \times 5 - (7 - 2)$
- $(7 - 3 - 2) \times 5$
- $5 - 3) \times (7 - 2)$
- $(3 + 2) \times (7 - 5)$

Now pose word problems using cultural settings interesting for contemporary pupils. Focus on two things at the same time: make sure that the word problem really represents the given number expression and that it is set in a context interesting for today's children or teenagers.

Sample solutions shown to the participants:

$$(7 - 3 - 2) \times 5$$

The following happened to Anna every day in this week:

Anna got seven different exercises to solve in mathematics for homework. She managed to solve three at school during the breaks and two at home in the afternoon. How many exercises will she have to solve at home at the weekend to have finished everything by Monday?

$$3 \times 5 - 7 + 2$$

John and Mary got a box of chocolates. The candies were in 3 rows of 5 chocolates. Both of them wanted to take the chocolates as fast as possible and knocked the box over. They picked up the chocolates on the floor and

found there were seven missing. The looked again and found 2 more chocolates. How many chocolates did they manage to find?

$$(3 + 7 - 5) \times 2$$

Roman plays a computer game. In the first level, he starts with 3 tokens. He wins seven and loses five. The situation is repeated in the second level. How many tokens does Roman have after completing both levels?

Results and discussion

The problems posed by the teachers were of very different qualities. Some participants struggled to break free from the stereotypes they were brought up on. On the other hand, many participants could use very interesting contexts including computer games, social networks or sport.

The discussion with the workshop participants showed that they found it very hard to pose problems for number expressions $3 \times 5 - (7 - 2)$, $(5 - 3) \times (7 - 2)$ and $(3 + 2) \times (7 - 5)$. It proved to be extremely difficult to express number expression with brackets in everyday language.

Comparison of problems posed by Czech and Mexican participants did not show major differences between contexts interesting for Czech and Mexican learners. The only difference is that it is much more common for women in Mexico to stay at home and look after their families than in the Czech Republic, where women are more active in their careers, which may have impact on images of women in word problems.

Conclusion

The above reported work with in-service teachers shows that, if they are well introduced to the issue of importance of non-mathematical context of problems, they are able to be creative and pose problems set in contexts that are closer to everyday pupils' reality.

There may be two major problems of school reality. For the one thing, textbooks are heavily relied on in lessons of mathematics and present very stereotypical, conservative and outdated cultural contexts. Secondly, the issue of non-mathematical context of problems is not brought adequately to pre- and in-service teachers' as it might seem (to curriculum developers) not substantially important. Naturally, much more attention is paid to use

of mathematics and good understanding of mathematical concepts in mathematics teacher education than to the stories teachers tell in mathematics lessons through word problems.

However, if teachers are informed about importance of use of interesting non-mathematical contexts and work with these deliberately in problem posing, they are able to pose very interesting and entertaining problem. The only danger is that they might not be able to convert the mathematical basis correctly.

We are convinced that the “literary” aspect of problem posing needs to be more developed in pre-service and in-service teacher training.

References

- Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S., & Tomei, A. (2010). *Values and Variables Mathematics education in high-performing countries*. London: Nuffield Foundation.
- Baldwin, P., & Baldwin, D. (1992). The portrayal of women in classroom textbooks. *Canadian Social Studies*, 26(3), 110-114.
- Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Lávička, M., & Potůček, J. (2011). *Matematika pro 6. ročník základní školy*, 2. upravené vydání. Praha: Fortuna.
- English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Favilli, F., et al. (2015). *Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language-Teachers' Needs and Teaching Materials*. Università di Pisa.
- Harel, G., Koichu, B. & Manaster, A. (2006). Algebra teachers' ways of thinking characterizing the mental act of problem posing. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, 241-248). Prague, Czech Republic: Charles University.
- Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2012). *Matematika. Úvodní opakování*, 2. vydání. Praha: Prometheus.
- Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2012). *Matematika. Kladná a záporná čísla*, 2. vydání. Praha: Prometheus.
- Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2012). *Matematika. Dělitelnost*, 2. vydání. Praha: Prometheus.

- Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics class-room-the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 129-156.
- Meany, T., & Lange, T. (2013). Learners in Transition between Contexts. In M.A. (Ken) Clements, A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *The Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 169-201), Springer International Handbooks of Education, Vol. 27. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.
- Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., Slouka, J., & Růžicková, B. (2007). *Matematika 6. Učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos.
- Moraová, H. (2014). Non-mathematical content of mathematics word problems posed by teacher trainees. In M. Houška, I. Krejčí & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Efficiency and Responsibility in Education (ERIE 2014)* (pp. 463-470). Praha: CULS.
- Moraová, H. (2017). Do Authors of Online Electronic Materials for Teaching Mathematics use Their Potential to use Non-Stereotypical Cultural Settings? *The Electronic Journal of e-Learning*, 15(3), 235-243. Retrieved from: www.ejel.org.
- Moraová, H. (2018). *Nematematický svět učebnic matematiky pro 6. ročník základních škol a v oblasti finanční matematiky*. Dizertační práce. Praha: PedF UK.
- Moraová, H., & Novotná, J. (2019). Motivační kontexty slovních úloh. In N. Vondrová (ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků* (pp. 97-103). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill (USA): Boston College.
- Odvárko, O., & Kadleček, J. (2005). *Matematika pro 6. ročník základní školy*, 2. vydání. Praha: Prometheus.
- Odvárko, O., & Kadleček, J. (2011). *Matematika 1 pro 6. ročník základní školy. Opakování z aritmetiky a geometrie*, 3. přepracované vydání. Praha: Prometheus.
- Odvárko, O., & Kadleček, J. (2010). *Matematika 2 pro 6. ročník základní školy. Desetinná čísla. Dělitelnost*, 3. přepracované vydání. Praha: Prometheus.

- Odvárko, O., & Kadleček, J. (2010). *Matematika 3 pro 6. ročník základní školy. Úhel, trojúhelník. Osová souměrnost. Krychle a kvádr*, 3. přepracované vydání. Praha: Prometheus.
- Rezat, S., & Straesser, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 44(5), 641-651.
- Silver, E.A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12, 3, 129-135.
- Šarounová, A., Mareš, J., Růžicková, J., & Väterová, V. (2008). *Matematika 6. 1. díl*, 2. vydání. Praha: Prometheus.
- Šarounová, A., Mareš, J., Růžicková, J., & Väterová, V. (2009). *Matematika 6. 2. díl*, 2. vydání. Praha: Prometheus.
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1, 133-143.
- Vondrová, N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy. In M. Rendl & N. Vondrová (Eds.), *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (pp. 63-126). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Datos de autor:

Hana Moraová, Faculty of Education, Charles University, Prague (Czech Republic)
 Correo-e: moraova@seznam.cz

CAPÍTULO 12

El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva

*Jonathan Cervantes-Barraza
Guadalupe Cabañas-Sánchez
Katty Mercado Porras*

Resumen

El propósito de este artículo es evidenciar cómo el profesor, desde lo colectivo, apoya la construcción de conocimiento matemático a través de la refutación de conclusiones. Se presentan dos episodios de clase y los argumentos contruidos por estudiantes de primaria al resolver dos tareas matemáticas. Se reconstruyeron los argumentos de los estudiantes y su respectiva estructura a fin de mostrar el rol del profesor como apoyo en la construcción de conocimiento matemático mientras validan o refutan conclusiones. Se reconoce que las preguntas del profesor: 1) generan espacios para que los estudiantes validen el contenido matemático de los argumentos, 2) fomentan la construcción de argumentos y 3) favorecen oportunidades de aprendizaje basado en la gestión del error.

Palabras clave: Argumentación, refutación, matemáticas, profesor, primaria.

Introducción

En el marco de la investigación en Matemática Educativa, se reconoce a la argumentación y la refutación, esenciales en la actividad matemática que se desarrolla en el salón de clases (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez, & Reid, 2019; Knipping & Reid, 2019; Komatsu & Jones, 2019), porque favorecen el desarrollo de habilidades comunicativas de los estudiantes (Mercer, 2009), la comprensión de ideas matemáticas (Rumsey, Guarino, Gildea, Cho, & Lockhart, 2019), a la vez que revelan algo acerca

de la lógica de las prácticas de la clase de matemáticas (Reid, Knipping, & Crosby, 2011). Desde la perspectiva del currículum, diversos planes y programas de estudios (e.g., Secretaría de Educación Pública (SEP), 2011, 2017; Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006) y estándares de matemáticas (e.g., National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; Common Core State Standards Initiative (CCSSI), 2010) demandan fomentar la argumentación matemática desde los primeros años de la escolaridad, a fin de que los estudiantes desarrollen habilidades argumentativas mientras justifican, refutan o demuestran tareas matemáticas en lo individual o en lo colectivo. El rol del profesor en este proceso, se concibe como quien guía el aprendizaje, apoya la construcción de argumentos de estudiantes con base en preguntas (Singletary & Conner, 2015) y fomenta la interacción a través de la argumentación colectiva al implementar acciones pedagógicas como anticipar respuestas de los estudiantes, gestionar el error, entre otras (Solar, 2018; Graham & Lesseig, 2018). El propósito de este artículo es evidenciar cómo el profesor desde lo colectivo, contribuye en la construcción de conocimiento matemático a través de la refutación de conclusiones. Para ello, se reconstruyó la argumentación colectiva suscitada en clase de matemáticas, apoyados de la propuesta metodológica de Knipping y Reid (2015, 2019).

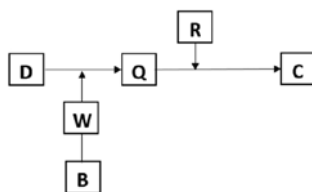
Argumentación colectiva

El concepto de argumentación se entiende como toda la actividad central de presentar aserciones-conclusiones, razones, recibir críticas que cuestionen la validez de las aserciones-conclusiones y presentar razones en función de las críticas (Toulmin, 1958/2003). En esta actividad, se distingue el razonamiento de la argumentación porque el razonamiento implica la acción de presentar razones con el fin de soportar una conclusión, en cambio, la argumentación involucra la construcción de conclusiones y razones que presenta un argumentador para convencer a una audiencia. Toulmin en su obra, señala que todo argumento tiene una estructura conformada por seis elementos (ver Figura 1). *Los datos* (D), refieren al conjunto de evidencias, hechos aceptados o información que permiten soportar la tesis del argumentador, es decir, *la aserción-conclusión* (C). Un tercer elemento, *la garantía* (W), brinda una conexión entre los datos y la aserción, con base en propiedades, reglas, o generalidades matemáticas. En función de

apoyar a la garantía, *el respaldo* (B), presenta un sustento amplio referente a definiciones, teoremas y axiomas matemáticos. *La refutación* (R), refiere a las excepciones de la aserción o los casos que no soporta la garantía, y el *calificador modal* (Q), expresa la fuerza de la aserción a través de calificadores: certeramente, siempre, para todo “equis”, por mencionar algunos.

En el salón de clase, la argumentación matemática ocurre en la interacción entre los estudiantes y el profesor con el objetivo de construir un consenso matemático y convencer al grupo sobre la validez de sus argumentos (Krummheuer, 1995, 2015). En efecto, a la actividad social y racional que ocurre en la interacción entre estudiantes-profesor con el propósito de construir una conclusión final con base en evidencias (datos) y razones válidas (garantía) se le cataloga como la argumentación colectiva (Krummheuer, 2015). Se ha documentado que la estructura básica de un argumento se le denomina “núcleo” y se compone de los elementos: datos, conclusión y garantía. Este autor reconoce que la estructura de la argumentación colectiva suscitada con estudiantes se conforma por cadenas de argumentos que tienen conclusiones que cumplen la función de dato (C/D) para construir un nuevo argumento.

Figura 1. Elementos y estructura de un argumento (Toulmin, 1958/2003).



La refutación

La refutación en Matemática Educativa se ha estudiado desde dos perspectivas teóricas, una tiene que ver con la lógica de las pruebas y refutaciones propuesta en la obra de Imre Lakatos (1976), autor que concibe la refutación en términos de contraejemplos en el contexto de las pruebas matemáticas con el fin de descubrir y validar conocimiento matemático. En cambio, la segunda postura refiere a la obra *Los usos de los argumentos* de Stephen Toulmin (1958/2003), quien plantea una forma diferente de

reconstruir argumentos en el contexto de la vida cotidiana con base en una estructura básica conformada por seis elementos, entre ellos la refutación. En este artículo, consideramos el estudio de los argumentos que construyen estudiantes de primaria, desde la postura de Toulmin, en razón de que permite recopilar aspectos importantes que tienen lugar en la interacción en el salón de clase. En el marco de la argumentación colectiva, referimos al término refutación a la expresión matemática que niega completamente una parte del argumento, es decir, se pueden refutar los datos, la garantía o la conclusión (Knipping & Reid, 2015). En esta investigación centramos la atención en analizar la refutación de conclusiones.

Consideraciones metodológicas

Los argumentos presentados en este artículo son parte de un estudio más amplio desarrollado con estudiantes de quinto de primaria (9-11 años de edad) con el objetivo de fomentar la argumentación colectiva desde la refutación de conclusiones en el contexto de tareas matemáticas que involucran contenido matemático de los ejes temáticos (SEP, 2011): sentido numérico y pensamiento algebraico (SN-PA), forma espacio y medida (FE-M) y manejo de la información (MI). Presentamos dos episodios de clase en el marco de dos tareas matemáticas, la primera refiere al contenido “elementos de la división” del eje SN-PA, y la segunda, a la “clasificación de triángulos con base en la medida de los ángulos internos” del eje FE-M.

Tareas matemáticas

El diseño de las tareas consideró principios de diseño reportados en Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza (2019) con el propósito de fomentar la argumentación colectiva en el salón de clase. Estos principios están relacionados con la formulación de la tarea en términos de un enunciado con conclusiones falsas, incluir preguntas con respuestas cerradas que gestionan la confrontación de argumentos. Las preguntas de la tarea cuestionan a los estudiantes sobre su postura frente a la respuesta hipotética (conclusión falsa) y con ello favorecer que los estudiantes compartan sus respuestas y justificaciones para convencer a los demás.

Tarea 1: Encuentra el dividendo

La tarea matemática titulada “encuentra el dividendo” (ver Figura 2), aborda al concepto de división y la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo. Su formulación situó a los estudiantes a trabajar sobre una situación hipotética que demandó determinar el dividendo de una división una vez proporcionados el divisor, cociente y residuo. Con el propósito de generar la confrontación de argumentos, el enunciado de la tarea incluye una respuesta/conclusión falsa que propone una solución a la cuestión de la tarea.

Figura 2. Tarea matemática “Encuentra el dividendo”.

Mario tiene como compromiso de matemáticas resolver una división, él sabe que el divisor es 14, el cociente es 243 y el residuo es 3, pero no sabe cuál es el dividendo.

$$\begin{array}{r}
 243 \\
 14 \overline{) } \\
 \underline{0} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 0 \\
 \underline{0} \\
 3
 \end{array}$$

Una amiga le ayuda con la tarea y le dice que el dividendo es 3402, porque es el número que obtiene cuando multiplica 14 por 243.

Analiza la respuesta y la justificación de la amiga de Mario. ¿estás de acuerdo? Argumenta tu respuesta.

Fuente: Autores

El enunciado de la tarea contiene información sobre los elementos de una división de números naturales, su respectiva casilla que permite resolverla y una conclusión falsa que sugiere una estudiante hipotética. La pregunta de la tarea cuestiona a los estudiantes sobre su punto de vista frente a la conclusión falsa, con ello se demanda al estudiante resolver la división y concluir con respecto a lo solicitado. Las preguntas de este tipo fomentan la argumentación colectiva en el salón de clase y favorecen que los estudiantes compartan sus respuestas, las justifiquen, las refuten y las validen.

Tarea 2: El caso del triángulo equilátero con un ángulo de noventa grados

La tarea matemática que se presenta en este artículo tuvo lugar en el marco de un estudio más amplio referente a la promoción de la argumen-

ción colectiva y el análisis de la clasificación de triángulos con base en la medida de los ángulos internos. Se diseñó con el propósito de situar a los estudiantes en argumentar sobre la existencia de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, con un ángulo menor de 90° , mayor de 90° o igual a 90° . En este artículo se presenta como parte de los resultados un episodio que refiere a la existencia o no de triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados.

*Tarea: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90° ?
Justifica tu respuesta.*

La tarea se planteó en términos de pregunta que demanda al estudiante una respuesta del tipo “sí” o “no” y analizar la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados (triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados es la conclusión falsa). Con base en lo requerido por la tarea, solicita a los estudiantes presentar además de su conclusión, una justificación que le permita convencer a los compañeros de la clase.

Análisis y recolección de los datos

La reconstrucción de la argumentación colectiva en el salón de clase de matemática se apoyó de la propuesta de Knipping y Reid (2015), quienes delimitan tres pasos: 1) Reconstruir la secuencia argumentativa junto con el significado de la conversación (F.A), 2) analizar argumentos locales y estructuras argumentativas, y 3) comparar las estructuras de argumentación. La estructura de la argumentación colectiva se constituye de los elementos que conforman un argumento, presentados como cadenas de argumentos con base en algunas convenciones (Knipping & Reid, 2015; Cervantes-Barraza et al., 2019). La conclusión (C) se representa mediante cuadrados, las garantías (W) y respaldos (B) con rombos sin relleno, los datos (D) con círculos, la refutación (R) con rombos rellenos con color negro, las refutaciones que se convierten en conclusiones (R/C) con un rombo inscrito en un cuadrado y la intervención del profesor con dos signos de interrogación (?).

Los datos del estudio provienen de los argumentos escritos y verbales de los estudiantes, tomados a través de las producciones escritas, grabaciones de audio y video. Centramos la atención en los episodios donde los estudiantes argumentaron y refutaron las conclusiones presentadas por sus

compañeros durante la interacción. Seguidamente, se transcribieron y se reconstruyeron las estructuras de los argumentos.

Resultados

Reportamos el análisis de los argumentos contruidos por los estudiantes y las intervenciones del profesor en la solución de tareas matemáticas. Se presentan dos episodios de la argumentación suscitada en dos tareas matemáticas, una que refiere a encontrar el dividendo en una división, y otra sobre la existencia o no de triángulos equiláteros con un ángulo de 90° .

Episodio 1: Encuentra el dividendo

La tarea demandó a los estudiantes encontrar el dividendo de una división que tiene como divisor 14, cociente 243 y residuo 3, así también, construir argumentos que justificaran o refutaran la conclusión falsa que contiene el enunciado de la tarea. Con base en las respuestas de los estudiantes del momento individual, el profesor favoreció la interacción y la construcción de argumentos en lo colectivo desde la lectura del enunciado de la tarea en términos de información inicial (D1) (Figura 3). En este contexto, Daniela toma los datos proporcionados por la tarea matemática y concluye (C1) estar de acuerdo con la conclusión falsa de la tarea, es decir, multiplicar el divisor por el cociente para determinar el dividendo. Justifica su conclusión con base en el producto de los números: “doscientos cuarenta y tres” por “catorce”, contenido matemático que refiere a la garantía (w1) del argumento de Daniela.

Con base en el argumento construido por Daniela, el profesor preguntó a toda la clase en función de brindar nuevos datos (D2) y apoyar la conclusión (C1) (ver Figura 4). Participaron varios estudiantes con sus conclusiones y garantías referentes al procedimiento para determinar el dividendo sin multiplicar el divisor por el cociente (w2, w3), además, justifican determinar el dividendo de una división con base en la resolución del ejercicio planteado. La intervención del profesor con preguntas permitió validar los argumentos presentados y propició que otros estudiantes refutaran (R1/C) las garantías (w2, w3), con el propósito de negar el contenido del argumento y a la vez indicar que el residuo de la división es “tres” y no “cero” (WR1).

Figura 3. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <1>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
D1	Profesor	En la tarea no se sabe cuál es el dividendo... ¿Qué pueden decir? ¿Cuál es el dividendo?	<pre> graph LR D1([D1]) -- "¿?" --> C1[C1] C1 -- "¿?" --> W1{W1} </pre>
C1	Daniela	Es el número que dice la amiga de Mario...	
¿?	Profesor	¿Cuál es ese número?	
C1	Daniela	Es tres mil cuatrocientos dos...	
¿?	Profesor	¿Cómo supiste que ese es el dividendo?	
W1	Daniela	Multipliqué doscientos cuarenta y tres... por catorce.	

La refutación (r1), además de invalidar el contenido matemático de la garantía (w2) del argumento de Iván, favoreció que los estudiantes presentaran sus argumentos para determinar el dividendo. En el extracto <4> del episodio de clase, el profesor cuestionó a los estudiantes sobre el procedimiento que hicieron para determinar el residuo (D3), implicando que la estudiante Michel concluyera (c3) la relación entre los elementos de la división de forma implícita, es decir, presenta un ejemplo: “Tomas el resultado de doscientos cuarenta y tres por catorce y le sumas el tres...” sin mencionar que el producto del divisor por el cociente más el residuo equivale al dividendo. Con base en el argumento de Michel, el profesor propició que los estudiantes Gael y Gerardo presentaran evidencia (w4, w5) para justificar la conclusión de Michel (Figura 5).

Figura 4. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <2 y 3>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
D2	Profesor	¿Quién multiplicó como Daniela?	<pre> graph TD D2((D2)) -- "¿?" --> W2{W2} D2 -- "¿?" --> W3{W3} W2 -- "¿?" --> W3 W3 -- "¿?" --> R1[R1] R1 -- "¿?" --> WR1{WR1} subgraph 2 D2 W2 W3 end subgraph 3 R1 WR1 end </pre>
C2	Estudiantes	Levantaron la mano: Iván, Karla, Saraí, Dulce, Itandewi y otros... ¿Alguien hizo algo diferente a una multiplicación...?	
C2	Iván	¡Yo hice una división!	
W2	Iván	[El estudiante pasa a la pizarra y resuelve la división de tres mil cuatrocientos dos entre catorce]	
¿?	Profesor	¿Cuánto es el residuo?	
W3	Estudiantes	Residuo cero...	
¿?	Profesor	¿Todos los que tienen residuo cero están de acuerdo con la respuesta de la amiga de Mario?	
R1/C	Gael, Jorge, Juan de Dios, Manuel, Jesús, ...	¡No!	
WR1	Juan de Dios	Porque tiene que dar residuo tres...	
¿?	Profesor	¿Cómo saben que tiene que dar residuo tres?	
WR1	Gael, Saraí	Porque la tarea dice que debe ser tres	

Figura 5. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <4>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
D3	Profesor	¿Qué hicieron para que la división tuviera un residuo tres?	
C3	Michel	Tomas el resultado de doscientos cuarenta y tres por catorce y le sumas el tres...	
¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Michel...? ¿Por qué hay que sumarlo?	
W4	Gael	Porque si no lo sumamos no nos va dar residuo tres...	
W5	Gerardo	Yo dividí varias veces... y encontré que el dividendo doscientos cuarenta y tres entre catorce daba residuo tres.	

Con el objetivo de construir un consenso matemático en relación con los elementos de la división de números naturales, el profesor preguntó sobre la respuesta “conclusión falsa” que incluía la tarea. Lo que implicó que varios estudiantes (e.g., Gael, Valentín, Juan de Dios y Alejandro) concluyeran (C4) que la respuesta de la amiga de Mario era incorrecta (ver Figura 6). Además, que los estudiantes justificaran las conclusiones con base en la relación matemática entre el divisor, cociente, residuo y dividendo (W6).

Figura 6. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <5>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
¿?	Profesor	¿Qué podemos concluir?	<pre> graph LR A[¿?] --> B[C4] A --> C{W6} C --- D[5] subgraph Box [] A B C D end </pre>
C4	Gael, Valentín, Juan de Dios, Alejandro...	¡Que la amiga de Mario estaba equivocada!	
¿?	Profesor	Y... ¿Cómo encontramos un dividendo...?	
W6	Michel	Multiplicando el cociente por el divisor y le sumamos el residuo...	

Las intervenciones del profesor en la argumentación colectiva suscitada en este episodio, evidencian cómo las preguntas del profesor desencadenaron un conjunto de argumentos y refutaciones que construyeron los estudiantes en lo colectivo, con el fin de establecer la conclusión final de la clase y propiciar oportunidades para que los estudiantes reflexionaran sobre la conclusión falsa propuesta como parte del enunciado de la tarea.

Episodio 2: El caso del triángulo equilátero con un ángulo de noventa grados

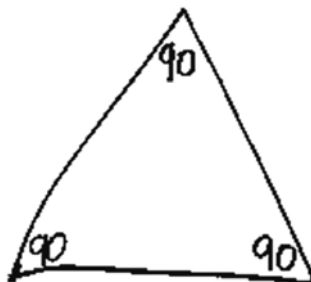
La tarea cuestionó a los estudiantes sobre la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados. Su respuesta implicó la construcción de un argumento en el que la conclusión y su justificación convencieran a los compañeros de la existencia o no de ese tipo de polígonos. El profesor planteó la tarea en voz alta, mediante una lectura: *¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados?* Pregunta que en el argumento tiene la función de dato (D1). El profesor motivó la participación de los estudiantes y la construcción de argumentos en lo colectivo (ver Figura 7).

Figura 7. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <1>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
D1	Profesor	¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados?	
C1	Andrea	¡Sí existen!...	
W1	Andrea	Porque sus ángulos son iguales [la estudiante pasa a la pizarra y dibujó un triángulo con tres ángulos de noventa grados]	

La estudiante Andrea concluye que este tipo de triángulo existe (C1), justifica su conclusión con base en una de las características invariantes del triángulo equilátero (W1) y un dibujo de un triángulo en la pizarra con ángulos interiores de noventa grados (Ver Figura 8). Sin embargo, las medidas de los ángulos interiores del triángulo que propuso Andrea no satisfacen la propiedad “la suma de los ángulos internos de un triángulo es ciento ochenta grados”.

Figura 8. Dibujo del triángulo con ángulos internos de noventa grados realizado por Andrea en la pizarra.



La intervención del profesor contribuyó a que los estudiantes Kimberly y José refutaran la conclusión de Andrea (Véase Figura 9). Su refutación, además de negar la conclusión de Andrea, funciona como la conclusión en su argumento. El contenido de la garantía (WR1), en el argumento de Kimberly implicó a la propiedad general que cumple todo triángulo, esto es, que *la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a ciento ochenta grados*. Que, en el caso de Andrea, de haberla implicado en su análisis a la cuestión, sin duda su conclusión habría sido que no existen ángulos de noventa grados en ese tipo de triángulos.

Figura 9. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <2>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de la respuesta de Andrea?	
R1	José y Kimberly	¡Está equivocada!	
WR1	Kimberly	¡Porque la suma de los ángulos interiores se pasa de ciento ochenta!	

En otra intervención el profesor preguntó al resto del grupo sobre la conclusión de Andrea. Ello favoreció que otra estudiante, Madison, la refutara e invalidara la garantía que fundamenta la conclusión de Andrea (Ver Figura 10). Como Kimberly, Madison implicó a la propiedad general arriba señalada, al invalidar la garantía de Andrea mediante la frase “se pasa de ciento ochenta”.

Figura 10. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <3>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de la respuesta de Andrea?	
R2	Madison	¡No!... ¡No existen!	
WR2	Madison	¡Porque la suma de los ángulos es igual a doscientos setenta... y se pasa de ciento ochenta!	

Las preguntas del profesor promovieron la participación de otros estudiantes como José, quien también refutó (R3) la conclusión de Andrea y justificó que ese tipo de triángulo no puede existir, en razón de que se convertiría en un cuadrado (ver Figura 11). Para apoyar su argumento, el estudiante dibujó en la pizarra tres ángulos de noventa grados (ver Figura 12), e implícitamente, recurrió a la definición de cuadrado como garantía (WR3), es decir, reconoce que si un polígono tiene tres ángulos rectos entonces puede ser un cuadrado.

Figura 11. Transcripción y estructura de la argumentación, extracto <4>.

F.A	Participante	Transcripción	Estructura del argumento
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir los demás?	
R3	José	¡No! ... ¡No existen!	
WR3	José	¡Porque se convertirá en un cuadrado y la suma se pasa de ciento ochenta!	

Figura 12. Dibujo de un triángulo que se convierte en cuadrado.



El profesor en este episodio propició la refutación y espacios de reflexión entre los estudiantes con el fin de validar el contenido matemático de los argumentos, revisar el cumplimiento de las características invariantes y propiedades que satisfacen los objetos matemáticos en estudio (e.g., los argumentos de Kimberly, Madison y José refieren a propiedades del triángulo y a la definición de polígonos de forma implícita).

Reflexiones finales

Este artículo evidencia cómo el profesor apoya la construcción de conocimiento matemático a través de la refutación de conclusiones desde lo colectivo. Identificamos que el rol del profesor es fundamental en este proceso, porque desafía a los estudiantes a construir argumentos válidos mientras refutan una conclusión. Así también, promueve el aprendizaje basado en el error, es decir, permite que los estudiantes con respuestas incorrectas las presenten ante sus compañeros para que los demás refuten y de ese modo, construyan conocimiento matemático.

Las refutaciones propiciadas por el profesor favorecieron que los estudiantes construyeran argumentos para convencer al argumentador sobre la validez o no de su argumento, en el episodio 2 intervinieron cuatro estudiantes refutando la conclusión de Andrea con el propósito de convencerla sobre la no existencia de triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados. Además, favoreció que los estudiantes recurrieran a la definición de polígono para mostrar una consecuencia negativa de considerar tres ángulos de noventa grados como lo propuso Andrea en su argumento.

De los resultados presentados, la intervención del profesor con preguntas en la argumentación colectiva contribuyó a que los estudiantes validaran el contenido matemático de los argumentos propios y de los compañeros; construyeran nuevos argumentos en respuesta a las refutaciones, desarrollaran habilidades argumentativas y construyeran conocimiento matemático en lo colectivo.

Referencias bibliográficas

- Cabañas-Sánchez, G., & Cervantes-Barraza, J. (2019). Principios que fundamentan el diseño de tareas matemáticas en una planificación didáctica. *Revista Uno*, 85, 7-12.
- Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G., & Reid, D. (2019). Complex argumentation in elementary school. *PNA*, 13(4), 221-246.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf
- Graham, M., & Lesseig, K. (2018). Tool kit for early-career teachers focus issue back-pocket strategies. *Mathematics Teacher*, 112(3), 173-178.
- Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C., Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Cham, Switzerland: Springer.
- Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En Kaiser, G., & Presmeg, N. (Eds.) *Compendium for early career researchers in mathematics education*. (pp. 3-31). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1
- Komatsu, K., & Jones, K. (2019). Task design Principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(4), 801-824. DOI: 10.1007/s10763-018-9892-0
- Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. (pp. 229-269). Hillsdale: Erlbaum.
- _____, (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping., & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-94-017-9181-6_3

- Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (trad. C. Solís). Madrid: Alianza.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D. C.
- Mercer, N. (2009). Developing Argumentation: Lessons Learned in the Primary School. En M. Muller Mirza & A-N, Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education. Theoretical Foundations and Practices* (pp. 177-194). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-98125-3_7.
- Mueller, M., Yankewitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning*, 7(2), 1-20.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, 6(1), 1-10.
- Rumsey, C., Guarino, J., Gildea, R., Cho, Y., & Lockhart, B. (2019). Tools to support K-2 students in mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, 25(4), 208-217.
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). *Plan de estudios*, SEP: México, Distrito Federal.
- Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Plan y programas de estudios para la educación básica*. SEP: México, Distrito Federal.
- Singletary, L. M., & Conner, A. M. (2015). Focusing on mathematical arguments. *Mathematics teacher*, 109(2), 143-147.
- Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 155-176.
- Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.

Datos de autores:

Jonathan Cervantes-Barraza, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Katty Mercado Porras
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
Correos-e: jacervantes@uagro.mx, gcabanas@uagro.mx, kattymercadoPORRAS@gmail.com

CAPÍTULO 13

La enseñanza de la igualdad mediante el uso de tres metáforas

Viviana Hernández Ortega
Carlos Antonio Alvarenga Aranda
Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Resumen

Un concepto fundamental para el álgebra escolar es el de igualdad, Falkner, Levi y Carpenter (1999) comentan que los niños tienen problemas para manejar el concepto de igualdad. Pang y Kim (2018) hacen un estudio más amplio con niños en Corea sobre el mismo tema. Kindt et al. (2006), indican que hay tres metáforas para introducir la igualdad al inicio del álgebra escolar. Los niños tratan la igualdad de manera no simétrica, están acostumbrados a leer de izquierda a derecha por su trabajo previo en aritmética, por ello son importantes las actividades que los lleven a entender que la igualdad es una relación simétrica, reflexiva y transitiva, para tener una mejor comprensión de la solución de ecuaciones por el método de hacer operaciones en ambos lados de la igualdad. Las metáforas más utilizadas son la balanza de dos platillos, el equilibrio se traduce como igualdad; trueque donde se establecen equivalencias en valor y el juego de la cuerda donde dos grupos de personas jalan en sentidos opuestos. Este trabajo es de tipo exploratorio, se reportan las soluciones de niños de primero de secundaria que asisten de manera voluntaria a un taller en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, los sábados de 9 a 11 horas (primavera 2019), para los problemas que se presentaron utilizan alguna de las tres metáforas ilustradas gráficamente. Un resultado que consideramos importante es que los alumnos muestran habilidad para resolver este tipo de problemas y por ello es una vía muy útil para enseñar la solución de ecuaciones.

Palabras clave: Enseñanza del álgebra, concepto de igualdad, ecuaciones lineales.

Introducción

Es importante señalar que los niños están acostumbrados a leer de izquierda a derecha expresiones que implican realizar operaciones aritméticas, por su trabajo previo en aritmética, a la derecha del signo igual deben poner el resultado. Pero no consideran que la igualdad sea una relación simétrica, por ello son importantes las actividades que los lleven a considerar que la igualdad es una relación de equivalencia, es decir es reflexiva, simétrica y transitiva.

Resolver problemas recreativos con ilustraciones lleva a los niños a efectuar sustituciones, cancelar o eliminar términos, manejar equivalencias; previo a introducir la idea formal de que si realizamos operaciones iguales a ambos lados de la igualdad, la igualdad no se altera. Queremos saber si esto de alguna manera facilita el tránsito hacia la resolución de ecuaciones, porque es común que los problemas recreativos se presenten con algún tipo de ilustración, en comparación con los problemas típicos, que deben resolverse planteando primero la ecuación después de comprender el enunciado; porque hay de problemas a problemas, en algunos casos obtener la ecuación correcta a partir del enunciado puede ser complicado para los alumnos.

Tomamos de van Reeuwijk (2001) la idea de que la enseñanza y el aprendizaje en las matemáticas debe ser un proceso de formalización progresiva. Propone partir de situaciones concretas y poco a poco introducir las literales para representar los números, en la figura 1 vemos un ejemplo: dos sombrillas y una gorra cuestan 80 pesos, una sombrilla y dos gorras cuestan \$76. El docente propone usar abreviaturas y luego usar letras para las incógnitas: S= sombrilla, G = gorra; pero se insiste en que representan el precio de los objetos, no los objetos. El problema se acompaña con un dibujo de los objetos de que trata el problema, el precio de cada objeto es desconocido, lo que se conoce es el importe de alguna combinación de objetos, están implícitos el signo de igualdad y de suma.

Figura 1. Gorras y sombrillas, ejemplo de ecuaciones gráficas (Van Amerom, 2002, p. 12).



El problema general es ¿qué camino tomar para enseñar álgebra escolar? ¿Qué temas tratar primero? No se comentan las diferentes propuestas, porque en casi todas ellas en algún momento se deben plantear y resolver problemas de tipo algebraico; es decir, problemas con enunciado donde puede ser ventajoso identificar al número desconocido como, en algunos casos, puede ser más sencillo usar aritmética. La vía que hemos seleccionado es a través de la resolución de problemas con enunciado, para introducir el uso de la igualdad usamos problemas que incluyen un dibujo de balanza. Kindt et al. (2006), indican que hay tres metáforas para introducir la igualdad en álgebra escolar, mismas que usamos en el presente trabajo.

Planteamiento del problema: ¿Qué porcentaje de aciertos tendrán los niños que asisten al taller, al resolver problemas que usan alguna de las metáforas? ¿Qué argumentos usan para explicar su solución? ¿Usan símbolos algebraicos?

Antecedentes

La comprensión de la igualdad

Los estudiantes de secundaria deben entender que la igualdad es una relación que expresa la idea de que las dos expresiones matemáticas tienen el mismo valor. Usualmente, el signo de igualdad se utiliza en la primaria al final de una operación, y se espera que el alumno indique el resultado. Con

expresiones numéricas, tales como, los niños están en lo correcto al pensar que el signo de igualdad es una señal para calcular y escribir el resultado a la derecha, pero en álgebra se requiere que usen de manera consciente la simetría y la transitividad de la igualdad, esto demanda más atención.

Resolver una ecuación implica el proceso formal de efectuar la misma operación en ambos lados de la igualdad. Aunque es común enseñar primero las reglas de transposición de términos: “cambiamos de miembro pero cambiamos de signo”, “lo que está dividiendo pasa multiplicando”.

Van Amerom (2003), describe cómo abordar las dificultades que tienen los estudiantes con la transición de la aritmética al álgebra y describe los modelos para resolver ecuaciones. Es comenzar desde las estrategias informales de los estudiantes para luego construir métodos más formales, como cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones de 2×2 . En aritmética la resolución de problemas implica cálculos sencillos con números conocidos, mientras que el álgebra escolar requiere razonar sobre cantidades desconocidas. Existen diferencias con respecto a la interpretación de letras, símbolos, expresiones y el concepto de igualdad en aritmética y álgebra. Kieran y Filloy (1989) indican que para aprender álgebra no se requiere únicamente hacer explícito lo que está implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. Lo que Arcavi (1994) llama “sentido del símbolo”. Que el uso de símbolos ayude a pensar al niño, a resolver problemas. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de resolver problemas, a uno algebraico resulta difícil para muchos estudiantes.

Usar símbolos para representar “incógnitas” y escribir ecuaciones para resolver problemas de enunciado es un obstáculo para los estudiantes, por la sencilla razón de que no ven la necesidad de usarlos, como se reporta en varias investigaciones, una de ellas, es la de Arcavi (1994) donde propone un cuadrado mágico que debe completarse, luego propone un segundo cuadrado mágico que debe completarse, pero que no tiene solución. La forma más sencilla de probarlo es usar una literal y como se tiene la condición de ser mágico nos lleva a una igualdad contradictoria, es decir, sin solución; pero los sujetos de su investigación no lo hacen.

En la transferencia de un problema de palabras a una ecuación, el significado del signo igual cambia de enunciar un resultado a indicar una equivalencia, un mismo número se expresa de dos formas. Cuando el nú-

mero desconocido aparece en ambos lados de la igualdad la ecuación ya no puede resolverse mediante operaciones inversas, es necesario manipular el número desconocido, esto resulta difícil para los niños, pero en problemas recreativos, los niños de manera natural operan las equivalencias entre los objetos, se proporcionan ejemplos más adelante.

Los problemas aritméticos se pueden resolver directamente y las operaciones intermedias tienen sentido. Por otra parte, los problemas algebraicos necesitan traducirse y escribirse primero en representaciones formales, las cuales después pueden ser resueltas. Y los pasos intermedios pueden carecer de sentido en relación al enunciado, por ejemplo hallar un número, tal que el número más su mitad da 60, la ecuación a resolver es $x + x/2 = 60$.

Que puede transformarse en $x + 2x = 120$; pero 120 no se menciona en el enunciado, este paso u otro equivalente no tiene sentido según el enunciado inicial del problema.

Los pasos algebraicos para “despejar” simplemente son vistos como algo extraño, por esta razón los alumnos terminan viendo el proceso de manera mecánica, como algo que hay que hacer, pero sin comprender por qué.

Falkner, Levi y Carpenter (1999) proponen a los niños el problema $8 + 4 = [] + 5$ y obtienen respuestas erróneas ¿Por qué los niños tienen tantos problemas con este ejercicio? Evidentemente, los estudiantes tienen una comprensión limitada de la igualdad, si piensan que 12 o 17 es la respuesta que va en la casilla. Tienen ideas erróneas sobre la igualdad que no se elimina con uno o dos ejemplos. Se detecta una dificultad muy clara en el uso de la igualdad, que no se trabaja en ningún libro de secundaria en México, excepto en fórmulas para áreas y perímetros: Área = base x altura.

Los alumnos dan diversas soluciones a $8 + 4 = x + 5$ la más común es 12. En lugar de x se puede usar otro símbolo. Se transcribe la tabla con los porcentajes de respuestas que obtienen de los niños, el porcentaje cambia de acuerdo al grado escolar.

Tabla 1. Tomada de Falkner, Levi y Carpenter (1999).

Porcentaje de niños que ofrecieron varias soluciones a $8 + 4 = x + 5$						
Grado	Respuestas					Número de niños
	7	12	17	12 y 17	Otro	
1	0%	79%	7%	0%	14%	42
1 y 2	6%	54%	20%	0%	20%	84
2	6%	55%	10%	14%	15%	174
3	10%	60%	20%	5%	5%	208
4	7%	9%	44%	30%	11%	57
5	7%	48%	45%	0%	0%	42
6	0%	84%	14%	2%	0%	145

Por otro lado, de manera empírica notamos que los estudiantes mexicanos de 5° y 6° de grado no usan el signo de igualdad. Durante una clase, donde se les pide realizar factorizaciones de los números menores que 100, como se muestra en la tabla de abajo, se escriben en el pizarrón los primeros números en calidad de ejemplo de lo que se quiere. Se pide que continúen indicando si el número es primo o dando su factorización. Pero se observa que no usan el signo de igualdad, a veces usan colores diferentes o una línea vertical para separar. No han tenido oportunidad de usar el signo de igualdad, por ello no lo usan de manera espontánea.

Tabla 2. Factorización en primos de los primeros naturales.

2	22
3	23
$4 = 2 \times 2$	24
5	25
$6 = 3 \times 2$	26
7	27
$8 = 4 \times 2$	28

$9 = 3 \times 3$	29
$10 = 2 \times 5$	30
$\vdots$	$\vdots$
$20 = 5 \times 4$	Etcétera

Los niños al factorizar números naturales omiten el signo igual.

Elaboración propia

Figura 4. Transcripción de la libreta de un niño. Con una línea vertical separa las expresiones en su lugar debería aparecer el signo de igualdad pero el niño no usa el signo.

Balanzas y número perdido	
10(2)	5(4)
8(2)	4(4)
6(3)	3(6)
$2(2)+7(7)$	5(9)
$2(1)+1(1)$	3(1)
2(8)	8(2)
10(4)	$10(2)+5(4)$
$8(2)+4(2)$	$5(2)+6(1)+8(1)$
9(3)	$9(1)+3(6)$
9(5)	$1(1)+4(1)+5(8)$

Kieran (1992, p. 393) comenta algo parecido a lo expresado anteriormente pero además indica que es usual que los niños pongan el signo igual entre dos expresiones que no son equivalentes. Por ejemplo, al resolver el problema: “Si empiezo la semana con 75 pesos, luego gano otros 24 pesos, y gasto 37 pesos, ¿cuántos pesos tendré al final de la semana? Los estudiantes escriben $75 + 24 = 99 - 37 = 62$, no respetan las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad.

Otra actividad que se propuso a niños donde no usan el signo igual fue el problema de las pesas: con pesas de 1, 3, 9 y 27 gramos pueden obtener

los pesos exactos de 1 a 40 gramos, para ilustrarlo se explica mostrando una balanza de dos platillos, en una bolsa se indica el peso a obtener, los pesos se ilustran con paquetes de dados.

Figura 2. Niño resolviendo el problema de los pesos y balanza.



Figura 3. Grupo de dados con unidades, para simular los pesos 1, 3, 9, 27.



El niño de la fotografía resuelve fácilmente la actividad, pero no usa el signo de igualdad.

Knuth et al. (2006) hacen una investigación con niños de secundaria (USA) sobre su comprensión del signo de igualdad y hacen las siguientes preguntas:

La flecha hacia arriba apunta a un símbolo.

$$3+4 = 7$$

↑

- a) ¿Cuál es el nombre del símbolo?
- b) ¿Qué significa el símbolo?
- c) ¿Puede el símbolo significar algo más? En caso afirmativo, por favor explíquelo.

Las siguientes respuestas de los alumnos son representativas de las respuestas codificadas como operacionales:

- “Cuál es la suma de los dos números”.
- “Un signo que conecta la respuesta al problema”.
- “Que la respuesta del problema es”.
- “El total”.
- “Cuánto suman los números juntos”.

Por el contrario, las siguientes respuestas de los alumnos son relacionales:

- “Significa que lo que está a la izquierda y a la derecha del signo significa lo mismo”.
- “Lo mismo que, el mismo valor”.
- “El lado izquierdo del signo de igual y el lado derecho del signo igual son el mismo valor”.
- “La expresión en el lado izquierdo es igual a la expresión en el lado derecho”.

Tabla 3 Porcentaje de los tipos de respuesta

Best Definition	Grade 6	Grade 7	Grade 8
Operational	53	36	52
Relational	32	43	31
Other	15	20	17
No response/don't know	0	1	0

Resolución de ecuaciones

Según Kieran (1992, p. 400) los diferentes métodos para la resolución de ecuaciones se clasifican en los siguientes tipos:

- Usar hechos numéricos
- Usar de técnicas de conteo
- “Cover-up” (cubriendo)
- Resolución hacia atrás
- Sustituciones por prueba y error
- Transposición (cambiar de lado y de cambiar signo)
- Efectuar la misma operación en ambos lados

Los dos primeros métodos son de aritmética, al resolver $5 + n = 8$, se recuerda que $5 + 3$ es 8; o se cuenta, y se observa que hay tres números para ir de 5 a 8.

En el método de *Cover up* se resuelve la ecuación $2x + 9 = 5x$ así: como $2x + 9$ es $5x$ el 9 debe ser equivalente a $3x$ ya que $2x + 3x$ es $5x$; por lo tanto x debe ser 3.

El método de ir hacia atrás es análogo al de resolución en aritmética. Para resolver $2x + 4 = 18$, se empieza por el lado derecho, y yendo de derecha a izquierda, “deshace las operaciones” usando en cada paso operaciones inversas:

$$18 - 4 = 14; \frac{14}{2} = 7.$$

El método de prueba y error es frecuentemente practicado por los alumnos al comienzo, rápidamente se descarta por demandar mucho tiempo. Desafortunadamente los estudiantes también lo descartan para el proceso de verificación de la solución.

El método de trasposición de términos, esto es “cambiar de lado, cambiar de signo” y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación (enfoque formal), se percibe como diferente. Los estudiantes que empiezan con el álgebra parece que perciben de forma bastante diferente esos dos métodos de resolución de ecuaciones (Kieran, 1992). El procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de una ecuación pone el énfasis en la simetría de una ecuación; simetría que no se tiene cuando se usa la trasposición de términos.

Los primeros cinco métodos, llamados intuitivos resultan difíciles de generalizar. Sin embargo, los estudiantes tienen más éxito cuando dominan los métodos intuitivos y formales que cuando únicamente dominan sólo un tipo de ellos (Petitto, 1979, citado por Kieran, 1992), en el taller partimos

de las soluciones de los niños para ir formalizando poco a poco, resolviendo problemas que aparecen en concursos de matemáticas como “Canguro matemático” y concurso de matemática primavera.

Las tres metáforas

Problemas con balanzas

Figura 5. Problema con piñas, plátanos y manzanas, equivalencias en peso (Van Reeuwijk, 2001).



10 bananas = 2 piñas (pesos iguales)

1 piña = 2 bananas + 1 manzana

1 manzana = ¿Cuántas bananas?

Figura 6. Hallar el peso de Kuka y Kika.



Problema 32, Problemas introductorios para la 30ª.

Olimpiada OMM (2016). ¿Cuánto pesan Kuka y Kika?

Problemas de equivalencia o trueque

En un pueblo lejano no hay dinero y en el mercado la gente intercambia sus productos, los animales se cambian de acuerdo con la siguiente lista

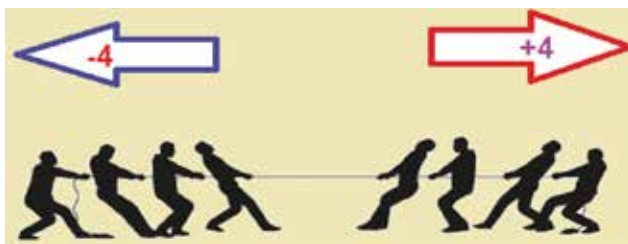
1 guajolote = 5 gallos
1 pato + 2 gallinas = 3 gallos
4 gallinas = 1 pato

¿Cuántas gallinas necesita Pablito si quiere volver con un pato, un guajolote y un gallo?

Este tipo de problemas se trabajaron en el taller impartido en FCFM. Se dispone de la antología de problemas trabajados cada sábado.

Juego de la cuerda

Figura 7. Positivos y negativos con el juego de la cuerda, suma cero.



Fuente: Imagen de Internet modificada por nosotros.

Metodología

Población

Los niños que asisten al taller lo hacen de manera voluntaria, en su mayoría cursaban primero de secundaria en escuelas públicas. Por lo tanto, los niños no fueron seleccionados de ninguna manera, por ejemplo, por sus resultados en algún tipo de examen. El taller se desarrolla con problemas para concursos de matemáticas tipo cotorra, canguro matemático, en cada sesión se resuelven diez problemas, los niños pasan al pizarrón a explicar su solución, los niños aprenden de otros niños.

Nunes et al. (1997) comenta, el maestro debería tomar como punto de partida para la enseñanza del estudiante los conocimientos previos del

alumno. “Usar el conocimiento previo como trampolín”. Por ello, en el taller damos libertad en la resolución de problemas, por ello los niños han desarrollado en alguna medida sus habilidades matemáticas, no se les da clase de álgebra en forma tradicional, se menciona el uso de literales como una forma de abreviar el proceso de solución.

Diseño del instrumento.

En Vega Cortázar (2016) se propone el uso del juego de la cuerda para enseñar negativos (dibujo anterior), de un lado se coloca un numero positivo y del otro uno negativo, según el número de personas (igual de “fuertes y de peso”). Pero recién encontramos los problemas del juego de la cuerda y se propusieron a los niños que asisten al taller. No conocíamos los problemas que aparecen en Kindt y Abels (2006), con ellos se elaboró nuestro Instrumento usando el juego de la cuerda, que es la tercera metáfora. A los alumnos se les proponen los siguientes problemas.

1. A) Izquierda 4 búfalos y a la derecha 5 caballos: termina en empate



B) 1 elefante contra 1 búfalo y a la izquierda 2 caballos: termina en empate



¿Quién gana si compiten 1 elefante y 3 caballos contra 4 búfalos?



Explica cómo llegaste a tu respuesta _____

2. Búfalos, elefante y renos. Imagina que es posible poner a los animalitos a tirar de la cuerda y se obtienen los siguientes resultados

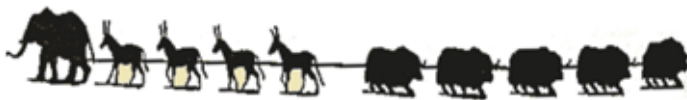


5 búfalos contra 8 renos: **empate (1)**



Un elefante contra 1 búfalo y 4 renos: **empate (2)**

¿Quién gana ahora? Sí a la izquierda un elefante y 4 renos, derecha 5 búfalos

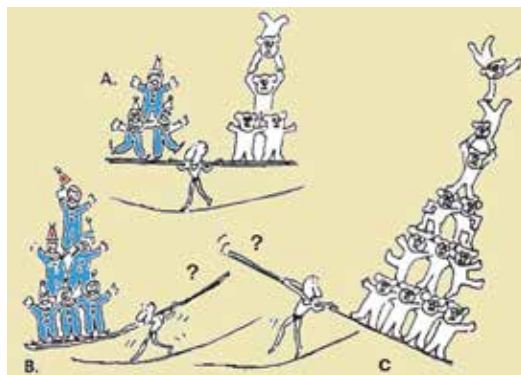


Explica como llegaste a tu respuesta.

Las imágenes anteriores son de Kindt y Abels (2006).

Un tercer problema: problema del acróbata

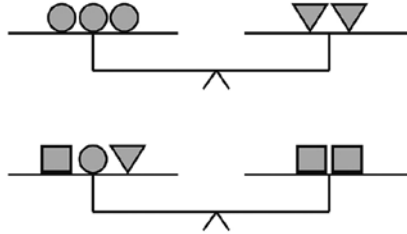
Figura 8. Equilibrando osos y payasos (Yeager, 1996).



Se pide hallar la cantidad de osos que equilibran los dibujos B y C.

Cuarto problema.

Figura 9. Círculos, triángulos y cuadrados en una balanza.



Si las balanzas del dibujo están en equilibrio, ¿a qué es igual $\bigcirc \nabla \nabla \nabla$?

Aparece como problema 17 en Gauss contest 2019, University of Waterloo.

Recolección de datos

Como se comentó, se trabaja con los niños resolviendo diez problemas en una sesión de dos horas una vez a la semana, se les proponen los problemas y se recoge su solución escrita. Se hizo en dos partes, una aplicando los tres problemas a los niños, y en otro momento se aplicó el problema de la figura 9.

Resultados

Como se indicó nuestro estudio es exploratorio, por ello nos limitamos a clasificar las respuestas como correctas o incorrectas y ver cuál fue el proceso de solución.

Tabla 4. Porcentaje de aciertos a las tres preguntas

	Aciertos	Porcentaje
Pregunta 1 elefante y caballos	35	76.087
Pregunta 2 elefante y renos	30	65.217
Pregunta 3 payasitos y osos	33	71.739

Tabla 5. Número de alumnos que resolvieron las tres preguntas, dos, una o cero

Aciertos	3	2	1	0	total alumnos
Alumnos	24	8	10	4	46
Porcentaje	52.174	17.391	21.739	8.696	100.000

Tabla 6. Tipo de solución para el cuarto problema

	Solución aritmética	Solución algebraica	Método de la balanza	Total
Número de alumnos	4	3	11	18

Método experto es la solución que hace uso de la simetría de la igualdad, que en el problema propuesto consiste en invertir uno de los dibujos, para que los triángulos queden del mismo lado en ambos dibujos.

Figura 10. Aplicando la simetría de la igualdad

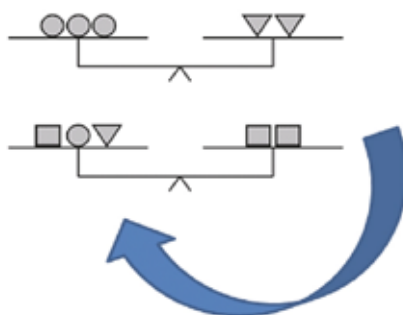


Tabla 7. Porcentaje de soluciones correctas, se dividió en dos columnas, para resaltar el método experto que si se observó en varias soluciones.

Método de la balanza	Método experto	Porcentaje de soluciones correctas
11	8	44.44

Conclusiones

Hay un 76.087% de alumnos que resolvieron el problema 1 correctamente, hay 65.217% de aciertos a la pregunta 2 del juego de la cuerda, lo que da respuesta al problema planteado. Ya habíamos observado que en general los niños pueden resolver este tipo de problemas pero no sabíamos qué porcentaje lo lograba de manera independiente. En nuestra opinión los porcentajes son buenos y muestran que los alumnos realizan las operaciones mentales de sustitución y de cancelación lo que les permite encontrar la “incógnita” que pide el problema.

Un buen porcentaje de alumnos resuelve los problemas propuestos en el taller, pero no hacen uso de símbolos algebraicos, simplemente hacen las operaciones mentales para manejar las equivalencias, sustituir y encontrar lo que se pide. Lo cual constituye un buen antecedente para poco a poco introducir el uso de incógnitas y las operaciones para resolver ecuaciones y sistema de ecuaciones. Algunos alumnos ya utilizan símbolos algebraicos para resolver problemas, lo hacen por iniciativa propia, ya son conscientes de que usar literales ayuda a resolver el problema.

Queda claro que los alumnos al ver dibujos pueden realizar las operaciones mentales que los llevan a resolver el problema planteado más fácilmente, que cuando deben manipular incógnitas, es decir, estas mismas operaciones mentales son más difíciles en un contexto simbólico.

Implicaciones para la educación en México

En nuestra opinión, resolver problemas con enunciado, acompañados de una ilustración que utilice una de las tres metáforas, es un camino viable para iniciar el estudio del álgebra en secundaria, ya que disminuye de manera importante la dificultad para introducir el uso de símbolos algebraicos. La balanza es un recurso visual útil para enseñar la simetría de la igualdad.

Aunque sólo se trabajaron ecuaciones de primer grado y sistemas 2×2 muy sencillos en el taller, y no se consideraron funciones o patrones numéricos, es de resaltar que el enfoque actual en la enseñanza de las matemáticas de una u otra manera pide resolver problemas como competencia o habilidad. El trabajo desarrollado en el taller permite explorar las capacidades de los alumnos de primero de secundaria para resolver problemas, y se observa como poco a poco varios alumnos incorporan el uso de incógnitas al resolver nuevos problemas, la iniciativa nace de ellos, no es una imposición, por lo cual es una habilidad que no perderán si siguen con sus estudios posteriores. En este sentido se está en buen camino para resolver una gran dificultad en la enseñanza del álgebra elemental:

Si el significado emerge con el uso, uno debería manipular símbolos para “sentirlos” y entenderlos, pero ¿cómo podemos usar algo sin entender su sentido?

Bibliografía

- Arcavi A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics* 14(3), 24-35.
- Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. C. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 232-236.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp 229-240.
- Kindt, M., Abels, M., Dekker, T., Meyer, M.R., Pligge M.A., & Burrill, G. (2006). *Comparing quantities*. Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute.
- Knuth E. J., Stephens A. C., McNeil N. M., Alibali M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 37, No. 4, 297-312.
- Nunes T., Carraher D. W., Schliemann, A. D. (1997). *En la vida diez en la escuela cero*. México: Siglo XXI.

- Pang J. and Kim J. W. (2018). Characteristics of Korean Students' Early Algebraic Thinking: A Generalized Arithmetic Perspective. In Kieran C., (ed). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. ICME 13 Monographs.
- Pérez Seguí M. L. y Gómez Ortega J. A. (2016). *Olimpiada mexicana de matemáticas*. Problemas introductorios para la 30ª. Olimpiada mexicana de matemáticas (2016).
- Recuperado de: http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folleto/Introduccion_30.pdf
- University of Waterloo The center for education in mathematics and computing. Gauss mathematics contest. Recuperado de www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests/2019/2019Gauss7Contest.pdf
- Van Amerom, B.A. (2002). *Reinvention of Early Algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Thesis doctoral Utrecht University, Centre for science and mathematics education.
- Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 54, No. 1, Realistic Mathematics Education. pp. 63-75 Springer.
- Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization an example on "solving systems of equations. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 12th international commission on mathematical instruction (ICMI) study conference "The Future of the Teaching and Learning of Algebra"*. Vol. 2 Melbourne: University of Melbourne, pp 613-620
- Vega Cortázar (2016). *Enseñanza del álgebra a través de la formalización progresiva*. Tesis licenciatura BUAP- FCFM. Recuperado de: <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AlmaVegaCortazar.pdf>
- Yeager D. (1996). *Daily problems and weekly puzzlers grade 5*. Ideal School Supply Co.

Datos de autores:

Viviana Hernández Ortega, Carlos Antonio Alvarenga Aranda, Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Correos-e: vivianainfo3gv@gmail.com, Alvarenga.201005003@gmail.com, pzeleny61@hotmail.com

CAPÍTULO 14

Construcciones mentales del concepto volumen de niños con síndrome de Down: la teoría APOE en el proceso de inclusión

José Marcos López Mojica
Lidia Aurora Hernández Rebollar

En el presente informe de investigación se pretende responder a la pregunta ¿cuáles construcciones mentales desarrollan los niños con síndrome de Down en el aprendizaje del concepto volumen? Tiene como objetivo caracterizar las construcciones mentales de estos niños en tareas sobre el volumen. El marco teórico se ajusta a lo señalado por la teoría APOE, el cual describe el proceso de comprensión de conceptos matemáticos. La investigación, con enfoque cualitativo, presenta tres fases: análisis teórico de las estructuras y mecanismos mentales, diseño de las actividades sobre el concepto volumen y, finalmente, la aplicación y análisis de los datos de entrevistas individuales semiestructuradas. Así, en este documento se presenta una descomposición genética inicial del concepto en cuestión, con las estructuras y mecanismos mentales que podrían desarrollar los niños con este tipo de discapacidad; una secuencia compuesta por dos actividades que buscaron promover y hacer evidentes las estructuras y mecanismos supuestos y una reflexión sobre lo observado en la aplicación de las actividades. Los resultados sugieren un acercamiento a la idea de volumen como función, al relacionar una variedad de sustancias que se vierten en cierto tipo de recipientes (que varían en su forma) con el espacio que ocupa cada una de ellas (las sustancias).

Palabras clave: Matemáticas escolares, síndrome de Down, inclusión.

Introducción

Debido al cambio acelerado que se vive actualmente, es indispensable que todo ciudadano tenga acceso a los conocimientos de la educación básica

y, desde el enfoque de la integración (García-Cedillo, 2018), es imperante que los docentes de educación especial dominen los conocimientos matemáticos de la educación regular para que puedan enseñarlos a los niños con discapacidad o sin ella. Además, deben estar preparados para orientar y apoyar al docente de primaria regular que tiene niños con discapacidad en su grupo.

Este señalamiento conduce a las interrogantes sobre ¿qué conocimientos matemáticos tienen los docentes de educación especial para la enseñanza de las matemáticas a niños con discapacidad? De manera particular, ¿cuentan con estrategias de enseñanza para desarrollar actividades matemáticas que consideren las particularidades de la discapacidad? Antes de responder, resalta de manera natural cuestionarse sobre los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes con discapacidad en actividades matemáticas.

En López-Mojica y Ojeda (2013) se argumenta que la formación en matemáticas del futuro docente de educación especial es general, derivada de sólo un curso de matemáticas durante sus cuatro años de formación. Señalan, como un asunto urgente, la capacitación de los docentes frente a grupo en temas de matemáticas, que incluyan temas de probabilidad y de estadística, para garantizar un conocimiento básico integral.

Por otra parte, Cronwell (1974) señalaba que las personas con síndrome de Down no tenían las habilidades necesarias para adquirir un pensamiento matemático debido a su desarrollo lento. En cambio, investigaciones actuales han demostrado que la idea anterior es errónea (Bruno y Noda, 2007). Por ejemplo, Porter (1999) analizó los principios de orden, correspondencia *uno a uno* y cardinalidad de niños con síndrome de Down de 7 a 13 años. En sus resultados se observaron mejoras en el principio de correspondencia uno a uno y en el de orden estable. Pero se detectó que los niños tienen dificultades para aprender los nombres de los números debido al desarrollo lento de su lenguaje.

Por su parte, Nye, Fluck y Buckley (2001) compararon la habilidad procedimental de contar (independientemente y con la ayuda de los padres) y la comprensión conceptual de la cardinalidad en un grupo de 23 niños con síndrome de Down. Se les pidió contar una colección de juguetes (para evaluar la actividad procedimental), recitar la serie numérica en alto (principio del orden estable) y dar un número de juguetes (para evaluar la comprensión de la cardinalidad). Observaron que con ayuda de un adulto mejoran en sus tareas numéricas.

Por su parte, Noda y Bruno (2010) entrevistaron a un grupo de estudiantes con síndrome de Down ante la resolución de problemas aditivos simples y operaciones de suma y resta. Los objetivos de esta investigación eran analizar cómo resolver sumas y restas en tres formatos diferentes de actividad; contextualizadas en problemas aditivos simples, con material manipulativo y algoritmos presentados con papel y lápiz; analizar las estrategias y procedimientos que utilizan en las operaciones e identificar errores y analizar si sus dificultades tienen relación con alguna de sus características cognitivas. Los resultados conciernen a que la resta les fue difícil de resolver más que la suma y que los alumnos con dificultades de aprendizaje pasan por los mismos niveles procedimentales que la población sin dificultades. Los estudiantes emplearon procedimientos menos abstractos (dedos o fichas). Identificaron dificultades en la comprensión de los enunciados de los problemas, en especial en los de la resta. Además, tienen indicios en señalar una deficiencia en la memoria de corto plazo.

Noriega y Villaseñor (2015) se interesaron en la comprensión de la conservación de la materia de niños con síndrome de Down (5-14 años). Los participantes provenían de diferentes centros escolares, a quienes aplicaron entrevistas individuales semiestructuradas, con el objetivo de caracterizar el pensamiento matemático a través de sus desempeños ante actividades de peso, área y volumen. Los resultados orientan a señalar nociones de conservación para peso, área y volumen, según los estadios de conservación, de reversibilidad inversa (Piaget e Inhelder, 1962), en correlación con el uso de esquemas compensatorios (Vygotski, 1997): motriz, auditivo y visual.

En una indagación reciente, López-Mojica, Cárdenas, Sánchez y Aceves (2017) caracterizaron el pensamiento algebraico de niños con síndrome de Down, corroboraron el uso del esquema compensatorio visual y motriz en el desempeño de los jóvenes ante tareas que implicaban la identificación de un patrón geométrico.

Dado lo anterior, según las investigaciones consultadas hasta el momento, podemos señalar tres aspectos esenciales para caracterizar el pensamiento matemático de niños con síndrome de Down: a) Uso de la memoria de trabajo como base para la actividad matemática, b) Uso del esquema perceptual visual a manera de esquema compensatorio y c) Tendencia a usar referentes concretos para la comprensión de las instrucciones.

Los tres aspectos señalados hasta el momento no se han empleado en una misma actividad matemática, por lo que se conjetura que estos puedan

servir para desarrollar el pensamiento matemático y establecer el tipo de construcciones mentales del concepto volumen, para los niños con síndrome de Down. Por lo tanto, planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿cuáles construcciones mentales desarrollan los niños con síndrome de Down cuando se enfrentan al aprendizaje del concepto volumen?

Se toma como referencia el volumen por ser un concepto matemático que se presenta en todos los niveles de la educación obligatoria y porque genera mayor dificultad entre estudiantes y profesores; que a su vez, dada su epistemología, se le otorga una variedad de fenomenologías (Sáiz, 2003).

Teoría APOE en el proceso de inclusión

Antes de explicar los elementos que conforman la descomposición genética que expone las construcciones mentales de los participantes en el estudio, es necesario hacer una reflexión sobre cómo una teoría que tiene bases cognitivas favorecería al proceso de inclusión.

El presente documento concuerda con lo señalado por Florian (2010) y García, Romero, Aguilar, Lomelí y Rodríguez (2013) sobre establecer una coincidencia entre integración educativa y educación inclusiva, el reto está en identificar y apoyar de manera complementaria a los niños con discapacidad que así lo requieran. Además, la instrucción del docente debe ser diversificada (Florian, 2010); es decir, “los docentes deben conocer diversas formas de enseñar para utilizar las adecuadas al contexto y a los alumnos que atienden” (Romero y García, 2013, p. 88).

En ese sentido, es necesario prestar atención en cómo diseñar una estrategia de enseñanza diversificada más que una diferente (Florian, 2010), pues la primera tendría más beneficios para todos los alumnos dada la diversidad de su aula. Es decir, “las estrategias de enseñanza y las intervenciones que han sido diseñadas para atender a una discapacidad en específico o a una necesidad educativa especial han resultado benéficas para otros” (Florian, 2010, p. 29).

Por lo tanto, la acepción de inclusión que se asume en el documento es la establecida por García, Escalante, Escandón, Fernández, Mustri y Puga (2000) como un proceso con el cual se busca que los alumnos con necesidades educativas especiales (NEE) puedan estudiar en las escuelas regulares, ofreciéndoles apoyos educativos según sus particularidades. Es decir, “ofrecer los apoyos específicos que precisan los estudiantes con NEE

con y sin discapacidad” (García, et al, 2013, p.5). El énfasis está en “apoyos específicos” pues es ahí donde el área de matemática educativa tendría mayor incidencia.

Entonces, una interpretación de *inclusión en matemática educativa* es la comprensión de la variedad de producciones que los estudiantes presentan en relación al contenido matemático a desarrollar en el aula y a sus propias cualidades. Es de señalar que, la comprensión de la variedad de producciones, permitirá generar estrategias de enseñanza diversificada y caracterizar los conocimientos que los profesores deberán construir para aquellas.

Uno de los apoyos específicos (García, et al, 2013) sería la identificación de las construcciones mentales que realizaría el niño con discapacidad para poder establecer el tipo de actividades matemáticas y así promover el desarrollo de un pensamiento matemático, pues como se precisó en la sección anterior, para caracterizar el pensamiento matemático de niños con síndrome de Down se requiere de procesos cognitivos que son particulares de esta población.

Dentro de las bondades que aporta la teoría APOE, en el proceso de inclusión, es que tiene como objeto de estudio la comprensión de los conceptos matemáticos (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) lo cual explica a través de construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, reversión, des-encapsulación y asimilación) que permiten transitar de una estructura a otra.

La base fundamental de esta teoría es que el conocimiento matemático se evidencia ante la necesidad del individuo a responder en una situación problemática en su contexto social determinado (Dubinsky y McDonald, 2001). Por lo que se enfatiza el enfrentamiento del individuo a situaciones matemáticas que generen una reflexión (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Bajo aquellas premisas, con énfasis en la abstracción reflexiva, Dubinsky (1991) propone la teoría “para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado” (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p. 91). Por lo que

cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado. De esta manera puede reestructurar su conocimiento me-

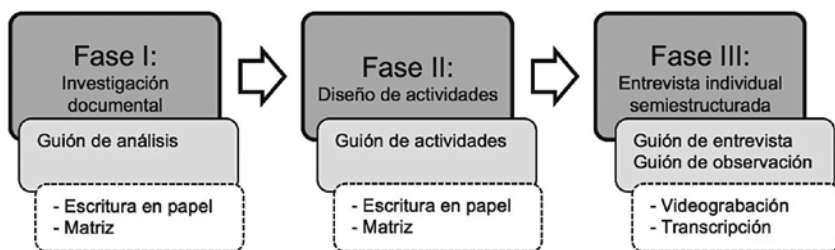
diante una reorganización de las estructuras en un nivel más elevado, donde el nuevo conocimiento es asimilado (Roa-Fuentes y Okaç, 2010, p. 92).

Las construcciones mentales se refieren a las transformaciones que realizan los individuos al resolver una tarea de la situación problemática planteada (Bermúdez y López, 2015). Si un individuo realiza transformaciones sobre un concepto matemático dependiente de estímulos externos entonces desarrolla “*acciones* del concepto matemático”. Si estas acciones son interiorizadas, la construcción mental resultante es el “*proceso* del concepto matemático”. Si el individuo asume al proceso como un todo y a éste le aplica acciones, la construcción resultante, por medio del encapsulamiento, es el “*objeto* matemático”. En ese sentido, un *esquema* es el conjunto de acciones, procesos y objetos, además de otros esquemas, del concepto matemático (Hernández, Pérez y Borja, 2018). La descripción de las estructuras y mecanismos mentales que se suponen necesarios para construir cierto concepto es a lo que se le denomina descomposición genética (DG) del concepto.

Método

La investigación cualitativa (Vasilachis, 2006) que subyace al presente informe se organiza en tres fases (ver figura 1) y tiene un enfoque exploratorio (Monje, 2011). El método se ajusta al que es propio de la Teoría APOE constituido por tres elementos: un análisis teórico, el diseño e implementación de instrumentos de investigación y la recolección y análisis de los datos (Arnon et al., 2014). En esta investigación, la primera fase consistió en el análisis de las estructuras y mecanismos mentales que tendrían que construir niños con síndrome de Down para la comprensión del concepto de volumen. Para lo anterior, fue necesario documentarse sobre los conocimientos matemáticos previos de las personas con síndrome de Down al momento de estudiar el tema de volumen; el enfoque de inclusión que se asumiría y sobre la fenomenología del concepto en estudio. La segunda fase se dedicó a diseñar las actividades didácticas que permitirían construir las estructuras mentales planteadas en la descomposición genética propuesta. La tercera fase corresponde a la aplicación y análisis, a través de entrevistas individuales semiestructuradas, de las actividades didácticas diseñadas.

Figura 1. Procedimiento de la investigación



La entrevista semiestructurada se entiende como la interacción entre dos individuos cuando uno le plantea preguntas al otro para alcanzar un objetivo —el de obtener datos de la comprensión del segundo respecto a una situación o a conceptos implicados en una tarea— (Zazkis y Hazzan, 1999), por lo que es relevante el tipo de comunicación posible con cada caso debido al síndrome. El análisis de las respuestas o producciones de los participantes se guía por la descomposición genética inicial y permite validarla o proponer modificaciones que lleven a un refinamiento de la misma.

La implementación de las actividades se realizó en un escenario a modo de entrevista individual semiestructurada con tres niños con síndrome de Down: E1 (7 años), E2 (10 años) y E3 (12 años). Los tres informantes cursaban el nivel de educación básica y el tipo de comunicación se caracterizó por palabras aisladas, además se contó con la autorización de los padres de familia.

Descomposición genética inicial

Las investigaciones realizadas en el marco de la teoría APOE han dado cuenta de la construcción de conceptos matemáticos del nivel superior, algunos de ellos son función de dos variables, derivada, integral, base, etc. (Hernández y Trigueros, 2012). Sin embargo, consideramos que para el caso de las personas con discapacidad, esta teoría permitiría establecer una vía específica del cómo construyen su conocimiento matemático. En palabras de Hernández y Trigueros (2012) “una ventaja de esta teoría es que la información generada a partir de una descomposición genética, validada mediante investigación con estudiantes, se puede utilizar para diseñar material didáctico” (p. 68).

Así, la descomposición genética (DG) es un modelo que permite el “análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje” (Trigueros, 2005). Además, resulta ser un instrumento que *da cuenta del comportamiento observable del sujeto* (Trigueros, 2005, p. 8). En ese sentido, Inhelder (1971) plantea que el desarrollo intelectual de las personas con discapacidad se caracteriza por una organización progresiva de mecanismos operatorios, por lo que toma relevancia el comportamiento de sus conductas relativas ante situaciones con un soporte físico.

El concepto volumen es uno de los que se encuentran presentes en planes de estudio del nivel preescolar, primaria y secundaria, también es uno de los que presenta mayores dificultades en su construcción. En particular, el volumen como magnitud ha estado carente de estrategias de enseñanza y de aprendizaje (Sáiz, 2003).

Según Sáiz (2003) al concepto volumen se le pueden asociar los siguientes significados: a) espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, a) espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, b) cantidad de unidades que forman un cuerpo, c) espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido y d) función de medida o una integral. De manera particular, la descomposición genética inicia con la promoción del volumen como el espacio que ocupa un cuerpo para arribar al significado de volumen como función de medida. Es necesario realizar esta transición debido a que, desde el aspecto matemático, el volumen puede considerarse como una función de medida, de la cual es necesario establecer el dominio y codominio (Sáiz, 2003). Además, la función de volumen debe ser finitamente aditiva e invariante por movimientos rígidos (Azagra, 2006); es decir, $v(A)$ denota el volumen de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$, la función debe satisfacer:

$$v\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m v(A_i)$$

Para toda familia finita de conjuntos con volumen que sean disjuntos dos a dos (Azagra, 2006, p. 16).

De lo anterior, se propone una DG inicial (ver figura 2) considerando los siguientes aspectos: a) la acepción del concepto volumen como espacio que ocupa un cuerpo para arribar al volumen como una función de medida,

b) uso de esquemas compensatorios en el pensamiento matemático de niños con síndrome de Down y c) el desempeño de los niños con discapacidad como organización progresiva de mecanismos operatorios.

Se inicia con *acciones* de estimación del espacio que ocupa una sustancia en dos recipientes con la misma capacidad pero de diferente forma. Esta estimación se motiva por la pregunta ¿qué cantidad de sustancia se necesita para llenar los recipientes? Al reflexionar sobre por qué se requiere la misma cantidad de sustancia en ambos recipientes se espera que el sujeto piense sobre el espacio que ocupa la sustancia y que se dé cuenta de que éste es el mismo, aunque la forma del recipiente cambie. La repetición de estas acciones con diferentes tipos de sustancias, de consistencia granular a fina y después a líquida, llevarán a la interiorización de estas acciones de estimación y a la construcción de una *concepción proceso* en la que el sujeto es capaz de estimar el espacio que ocuparán diferentes tipos de sustancias en ambos recipientes de la misma capacidad pero de diferente forma.

El sujeto realiza la *acción de estimar* el espacio que ocupan diferentes tipos de sustancias, pero mismo peso en un recipiente fijo. Esta estimación se motiva por la pregunta ¿cuál sustancia ocupa más espacio en el recipiente (fijo)? Al reflexionar sobre el hecho de que el espacio que ocupa cada sustancia depende de su consistencia: granular, menos granular, fina o líquida, el sujeto interioriza estas acciones y construye un *proceso* en el que es capaz de estimar que, el espacio que ocupa cada sustancia depende de la consistencia de la misma. Entre más granular sea la sustancia mayor será el espacio que ocupará en el recipiente, aunque la cantidad de sustancia es la misma en todos estos casos.

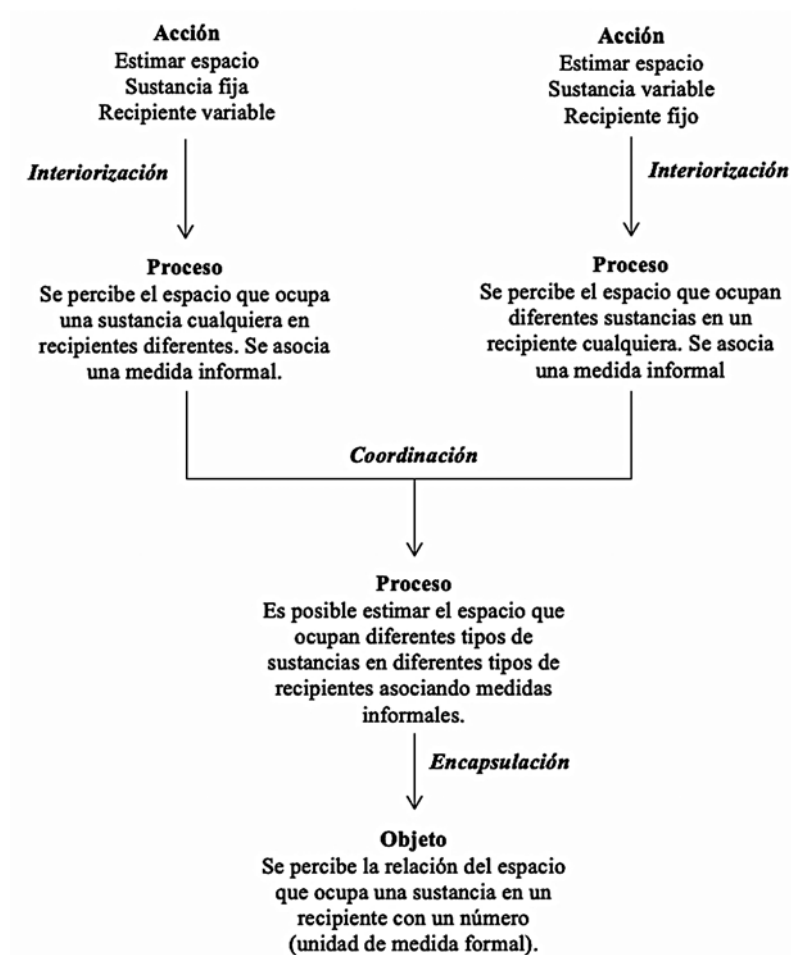
Estos dos procesos se *coordinan* con la *medición informal* de las sustancias en los diferentes recipientes, en la que se calcula el espacio ocupado con medidas como medios, tercios y cuartos de cada recipiente. Lo anterior lleva al sujeto a construir una *concepción proceso* del concepto volumen en su significado informal de espacio que ocupan diferentes tipos de sustancias en diferentes tipos de recipientes.

Con la consigna de variar la sustancia en los recipientes se pretende que los estudiantes identifiquen la relación entre el tipo de sustancia con el espacio que ocupa dentro del contenedor. Este tipo de concepción se genera con la pregunta ¿cuál sustancia cubre más espacio en el recipiente? Las exploraciones de los participantes dependerán del nivel de comunicación que éste presente.

En sintonía con las acciones iniciales, se pretende que para este nivel se establezca una generalidad entre el tipo de sustancia y el lugar que ocupa en el recipiente.

La comparación del espacio ocupado de diferentes sustancias en diferentes recipientes y la asociación de una medida formal a esos espacios ocupados se espera que lleven al estudiante a encapsular el proceso construido previamente y a la construcción del objeto volumen.

Figura 2. Descomposición genética inicial para el concepto volumen



Las actividades

Se aplicó una secuencia denominada “Las botellas” (ver tabla 1) con dos actividades, que consistió en presentar dos recipientes de la misma capacidad con diferente tamaño y forma, el objetivo fue que el estudiante estimara la cantidad de sustancia necesaria para llenar el recipiente (volumen por medio de la observación y comprobación de capacidad del llenando). Las sustancias van de granos con partículas grandes a sustancia granular fina, hasta llegar al líquido.

Tabla 1. Secuencia de actividades para el concepto volumen

Actividad	Objetivo	Material
1. Conservación de volumen y estimación de cantidad de sustancia en diferente recipiente.	Identificar el espacio que ocupa una sustancia en determinado recipiente, variando la forma de éste.	-Dos recipientes del mismo tamaño y diferente forma con la misma cantidad de sustancia.
2. Conservación de volumen y estimación de la cantidad de sustancia en el mismo recipiente.	Identificar el espacio que ocupa una sustancia en un mismo recipiente.	-Dos recipientes del mismo tamaño y forma con la misma cantidad de sustancia.

La implementación de las actividades

Algunos de los desempeños que sugerirían una construcción mental acción es que se tendría que reconocer que ambas botellas tienen el mismo volumen diferenciando solo la forma de éstas.

Los primeros desempeños de los estudiantes se generaron con la pregunta ¿a cuál botella le cabrá más sustancia (frijol, arroz, arena, azúcar, agua)? En un principio los tres estudiantes eligieron la botella que a simple vista era la más alta (ver figura 4), pero después de corroborar que en ambas cabía la misma cantidad de arena, sus respuestas sugirieron la identificación de la relación tipo de sustancia-tamaño de la botella.

Figura 3. Ejemplo de material empleado para la actividad “Las botellas”.



Figura 4. Acciones de E3 al elegir el recipiente más alto



En el mismo sentido, el estudiante E2, eligió el recipiente más alto, pero corrobora que en ambos “cabe” (producción emitida por el estudiante) la misma cantidad de arena; la conducta emitida fue tomar el recipiente que previamente había llenado y lo vació al otro que no había elegido (ver figura 5).

Figura 5. Acciones de E2 al corroborar la cantidad de arena en ambos recipientes



Al momento de tener los recipientes de la misma forma, las conductas que sugieren el acercamiento a la comprensión del espacio ocupado en éste fueron del tipo motriz y visual. Por ejemplo, E1 comparaba con sus dedos índices la “altura” del líquido en los contenedores (ver figura 6).

Figura 6. Acciones de E1 al corroborar la cantidad de agua en los recipientes.



En una exploración reciente (López-Mojica, Noriega y Martínez, 2020) sobre una actividad para la conservación de materia, niños con síndrome de Down recurren al uso de esquemas perceptuales visual y motriz para estimar el volumen. Es decir, sus respuestas van acompañadas de acciones como juntar los recipientes para estimar la cantidad de agua en cada recipiente y usar sus dedos índices a manera de señalar la igualdad en altura. Lo anterior persistió en el estudiante E3, quien para estimar el volumen de los recipientes con la sustancia “líquido”, recurrió al uso de sus dedos índices para cotejar la “misma cantidad de agua”.

Primeras conclusiones

Se han diseñado y aplicado dos actividades matemáticas que fomentaron las acciones descritas en la DG. Con el llenado de recipientes utilizando diferentes sustancias se aprovecharon las habilidades motoras y visuales de los niños para la comparación y la estimación del espacio que ocupaban las sustancias. Hasta el momento los resultados sugieren la identificación de las dos variables involucradas y la coordinación de éstas de manera simultánea para la construcción de una concepción proceso de volumen.

Según las primeras exploraciones, los desempeños de los estudiantes sugieren un avance en identificar la correspondencia entre las dos varia-

bles (sustancia y recipiente) para constituir una estructura de proceso. Sin embargo, se requiere de más aplicaciones para confirmar que es posible alcanzar la concepción objeto.

Cabe señalar que el empleo de material concreto ha permitido a los estudiantes un acercamiento a la comprensión del concepto de volumen, según Inhelder (1971) ha favorecido una organización progresiva de mecanismos operatorios, como el llenado y la estimación de la cantidad de sustancia.

Hasta el momento se puede conjeturar que el tipo de actividades se pueden plantear en un contexto de inclusión, a manera de favorecer la comprensión de conceptos matemáticos atendiendo la diversidad en el aula (Florian, 2010). Es decir, actividades de referencia de este tipo serían una oportunidad de aprendizaje lo suficientemente accesible para todos (Florian, 2010) y que promovería la participación en el aula.

Referencias bibliográficas

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS theory. *A framework for research and curriculum development in mathematics education*, 5-15.
- Azagra, D. (2006). Cálculo integral. Volumen y conjunto de medida cero. Nota de clase. Consultado en diciembre 2018. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~dazagar/docencia/cap2.pdf>
- Bermúdez, E. y López, J. (2015). Una didáctica de la matemática para la formación de la diversidad: síndrome de Down. *Acta Latinoamericana de Matemáticas Educativa*, 28(1), 652-658.
- Bruno, A. y Noda, A. (2007). Investigaciones sobre matemáticas y síndrome de Down. *Revista interuniversitaria de formación para el profesorado*, VIII, 29-50.
- Cronwell, A. (1974). Development of language, abstraction and numerical concept formation in Down syndrome children. *American Journal of Mental Deficiency*, 79 (2), 179-190.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D.

- Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Florian, L. (2010). Special education in the era of inclusion: The end of special education or a new beginning. *The psychology of education review*, 34(2), 22-27.
- García-Cedillo, I. (2018). La educación inclusiva en la Reforma Educativa de México. *Revista de Educación Inclusiva*, 11(2), 49-62.
- García, I., Escalante, I., Escandón, M. C., Fernández, L. F., Mustri, A. y Puga, A. (2000). *La integración educativa en la escuela regular. Principios, finalidades y estrategias*. Fondo Mixto de Cooperación Técnica y Científica México-España.
- García, I., Romero, S., Aguilar, L., Lomelí, K., y Rodríguez, D. (2013). Terminología internacional sobre la educación inclusiva. *Actualidades Investigativas en Educación*, 13(1), 1-29. DOI: 10.15517/AIE.V13I1.11712
- Hernández, L., Pérez, A., y Borja, I. (2018). La construcción del concepto de transformación lineal en estudiantes de matemáticas aplicadas y actuaría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 525-533.
- Hernández, L., y Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24(3), 67-87.
- Inhelder, B. (1971). *Le diagnostic du raisonnement chez les débiles mentaux*. París: Delachaux et Niestlé.
- López-Mojica, J. M., Cárdenas, C., Sánchez, Y., y Aceves, L. (2017). Pensamiento algebraico de jóvenes con síndrome de Down: la noción de patrón geométrico. En L. Aké, J. Cuevas (Eds.). *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 77-96). México: Cenejus.
- López-Mojica, J. M., Noriega, A. y Martínez, C. (2020). Nociones matemáticas (masa y volumen) de niños con síndrome de Down. *Revista Eletrônica de Educação*, 14(1), 1-19.
- López-Mojica, J., y Ojeda, A. (2013). La formación en matemáticas del docente de educación especial: una experiencia en estocásticos. En J. Carrillo, V. Ontiveros, P. Ceceñas. *Formación docente: un análisis desde la práctica* (pp. 18-38). México: Red Durango de Investigadores Educativos, A. C.
- Maturana, H. (2003). *Desde la biología a la psicología*. Buenos Aires: Lumen.

- Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Una guía didáctica*. Colombia: Universidad Surcolombiana.
- Noda, A. y Bruno, A. (2010). Operaciones básicas en alumnos con síndrome de Down. *PNA*, 4(4), 143-159.
- Noriega, A., y Villaseñor, V. (2015). *Caracterización del pensamiento matemático de niños con síndrome de Down*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad de Colima.
- Nye, J., Fluck, M., y Buckley, S. (2001). Counting and Cardinal Understanding in Children with Down's Syndrome and Typically Developing Children. *Down's Syndrome Research and Practice*, 7(2), 68-78.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1962) *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*. París: Delachaux et Niestlé.
- Porter, J. (1999), Learning to Count: A Difficult Task? *Down's Syndrome Research and Practice*, 6(2), 85-94.
- Roa-Fuentes, S. y Okaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Romero, S., y García, I. (2013). Educación especial en México. Desafíos de la educación inclusiva. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 7(2), 77-91.
- Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 18(8), 447-478.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.
- Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Madrid: Gedisa.
- Vygotski, L. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obra Escogidas V*. Madrid: Visor Dis.
- Zazkis, R. y Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics educations research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

Datos de autores:

José Marcos López Mojica, Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Correo-e: lidia.hernandez@correo.buap.mx

Tendencias en la educación matemática 2020

libro electrónico

se terminó de editar en el mes de octubre de 2020,
en El Errante Editor, S.A. de C.V.,
Privada Emiliano Zapata 5947,
San Baltazar Lindavista, Puebla, Pue.

Peso del archivo en pdf: 3.51 MB

Este libro surge del VI Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación que se realizó en noviembre de 2019 en las instalaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Todos los trabajos que constituyen los capítulos fueron arbitrados en un proceso doble ciego por especialistas de la Educación Matemática. Son, por tanto, contribuciones que cumplen con las características de investigaciones científicas en el área y que pretenden mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de todos los niveles educativos. Esperamos que sea útil tanto para docentes como para estudiantes e investigadores de la Educación Matemática.



BUAP

textos
Científicos



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas