BUAP ediciones

LA MAGIA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS

DAVID HERRERA CARRASCO
FERNANDO MACÍAS ROMERO
LUIS ALBERTO GUERRERO MÉNDEZ

Manuales y textos
ciencias exactas

La magia de los espacios métricos

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Luis Alberto Guerrero Méndez
Autores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: Ma. Lilia Cedillo Ramírez
Secretario General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Director General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2025
ISBN: 978-607-2637-10-8

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768
https://publicaciones.buap.mx/ | libros.dgp@correo.buap.mx
https://publicaciones.buap.mx/?q=content/libros-pdf

Diseño de portada: Daniel Domínguez Málaga

Hecho en México
Made in Mexico

Dedicado a quienes por ellas somos lo que somos...

Chío y Caro

Para mi madre, Luz María, mi mejor amiga y el faro que ha iluminado cada paso de mi vida. Gracias por tu amor infinito, tu sabiduría y tu luz inagotable. Con todo mi cariño, Luis.

La magia de los espacios métricos

Autores

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Luis Alberto Guerrero Méndez

Índice General

Presentación

Introducción: Este libro tiene como objetivo principal apoyar a los alumnos en el estudio de los espacios métricos. Aunque existen numerosas publicaciones sobre este tema, consideramos necesario crear un material que se adapte específicamente al programa de estudios de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), teniendo en cuenta las características particulares de nuestros estudiantes.

Propósito y enfoque: Nuestro propósito es presentar la teoría de los espacios métricos de manera clara, lógica y consistente. Para lograr esto, hemos seleccionado cuidadosamente ejemplos y contraejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios para resolver. Es importante destacar que el conocimiento de las definiciones y teoremas no es suficiente para aprobar el curso; es fundamental entender cómo aplicarlos para resolver problemas posteriores.

Contexto y antecedentes: En los cursos de Cálculo Avanzado, se han estudiado conceptos como conjuntos abiertos, cerrados, compactos y conexos, así como propiedades de subconjuntos del espacio euclidiano. En este libro, se extienden estos conceptos a los espacios métricos, permitiendo introducir la distancia y la convergencia de sucesiones, y aplicar estos conceptos a la topología.

Estructura y contenido: A lo largo de este libro, se presentan varios ejemplos de cómo se pueden aplicar los conceptos de espacios métricos a diferentes situaciones. Se introduce la función distancia y se analiza su relación con la desigualdad del triángulo. También se explora la definición de espacios métricos y su aplicación en diferentes contextos.

Agradecimientos: A nuestros compañeros de la FCFM BUAP Antonio de Jesús Libreros López, Felipe de Jesús Aguilar Romero, Leonardo Ramírez Aparicio, David Rodríguez Hernández, Daniel Domínguez Málaga, Kevin Águila Méndez y Diana Cuaya Simbro, así como a todos los estudiantes de los cursos de Análisis Matemático en $\mathbb{R}^n$ y Análisis Matemático en Espacios Métricos, por sus valiosas observaciones y apoyo incondicional en la mejora de este libro.

También expresamos nuestra más sincera gratitud a los revisores externos a la BUAP: la Dra. Rocío Leonel Gómez, el Dr. Carlos Islas Moreno y el Dr. Florencio Corona Vázquez, por su exhaustiva revisión y comentarios constructivos, que han enriquecido significativamente la versión final de esta obra.

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Luis Alberto Guerrero Méndez
Autores

Espacios métricos, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-2637-10-8

Capítulo 1

Conjuntos y funciones

Comenzamos nuestra travesía por estos interesantes temas recordando nociones básicas de conjuntos y funciones, necesarias para una mejor comprensión de los capítulos posteriores.

1.1 Propiedades de funciones

El producto cartesiano es una operación entre conjuntos, dando como resultado otro conjunto. En esta sección iniciamos con el producto cartesiano de dos conjuntos.

Sean X y Y dos conjuntos. Para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ podemos considerar un nuevo objeto (x, y) que llamaremos **pareja ordenada.** Las parejas ordenadas están determinadas por la siguiente condición: $(x, y) = (z, w)$ si, y sólo si, $x = z$ y $y = w$. En particular, $(x, y) = (y, x)$ si, y sólo si, $x = y$. Al conjunto de parejas ordenadas (x, y), donde $x \in X$ y $y \in Y$ se le llama producto cartesiano de X y Y, y lo denotamos por $X \times Y$. En el caso en que $X = Y$, el conjunto $X \times Y$ se denota también como X^2. De manera más precisa, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1. Sean X y Y conjuntos. El **producto cartesiano** de X con Y, denotado por $X \times Y$, es

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Es importante observar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \times X = \{(z, x)\colon z \in \emptyset,\ x \in X\} = \emptyset$, ya que la condición $z \in \emptyset$ no puede ser satisfecha. Un razonamiento análogo muestra que $X \times \emptyset = \emptyset$.

Si $(x, y) \in X \times Y$, a x se le llama primera coordenada de (x, y) y a y segunda coordenada de (x, y).

En el siguiente teorema, establecemos resultados que relacionan el producto cartesiano de conjuntos con las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos.

Teorema 1.2. Si X, Y y Z son conjuntos, entonces se cumple lo siguiente

(1) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

(2) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$.

(3) $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$.

Demostración. Veamos el inciso *(1)*. Sea $(x, y) \in X \times (Y \cup Z)$. Luego, $x \in X$ y $y \in Y \cup Z$. Tenemos que, $x \in X$ y ($y \in Y$ o $y \in Z$). Por la propiedad distributiva de la conjunción, ($x \in X$ y $y \in Y$) o ($x \in X$ y $y \in Z$). Así, $(x, y) \in X \times Y$ o $(x, y) \in X \times Z$. Por lo tanto, $(x, y) \in (X \times Y) \cup (X \times Z)$. La otra contención se demuestra de manera similar. Los incisos *(2)* y *(3)* se dejan como ejercicio al lector. $\square$

El concepto de función surge de las relaciones que se dan entre variables (dependiente e independiente). Leonhard Euler fue quien precisó este concepto. Las funciones son importantes en todas las áreas de las Matemáticas, en particular en la Topología de Espacios Métricos, donde juegan un papel esencial; por lo tanto, precisamos enseguida su definición.

Definición 1.3. Sean X y Y conjuntos. Una **función** de X en Y es un subcojunto f de $X \times Y$ con la propiedad de que para cada $x \in X$, existe un único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Notación 1.4. Sean X y Y conjuntos. Si f es una función de X en Y, este hecho suele escribirse así:

$$f : X \to Y, \text{ o bien, } X \xrightarrow{f} Y.$$

Si $x \in X$ y $f : X \to Y$ es una función, al único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$ lo denotaremos por $y = f(x)$. De este modo, $y = f(x)$ si y sólo si $(x, y) \in f$.

En toda función, siempre es importante tener bien claro como es su dominio y su imagen, por lo que recordamos a continuación su definición.

Definición 1.5. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. El **dominio** de f, denotado por Dom_f, es el conjunto X. El **codominio** de f, denotado por Cod_f, es el conjunto Y. La **imagen** de f, denotado por Im_f, es el conjunto $\{y \in Y : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } (x, y) \in f\} = \{f(x) \in Y : x \in X\}$.

Es preciso mencionar que la imagen de una función f también se conoce como el **rango** de f y, en este caso, se denota por Ran_f.

Ejemplo 1.6. Para aclarar más el concepto de función tenemos lo siguiente.

(1) Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ y $f = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a)\}$. El subconjunto f de $X \times Y$ no es función porque $(1, a) \in f$ y $(1, b) \in f$, es decir, el elemento $y \in Y$ tal que $(1, y) \in f$ no es único.

(2) Sean X y Y conjuntos, $b \in Y$ y $f = X \times \{b\} = \{(x, b) : x \in X\}$. El subconjunto f de $X \times Y$ es una función tal que para todo $x \in X$, se tiene que $f(x) = b$. La función f se llama **función constante** b.

(3) Sean X un conjunto y $f = \{(x, x) : x \in X\}$. El subconjunto f de $X \times X$ es una función tal que para todo $x \in X$, se tiene que $f(x) = x$. La función f se llama **función identidad** en X y se denota como 1_X o Id_X. Si $A \subset X$, entonces el subconjunto $g = \{(a, a) : a \in A\}$ de $A \times A$ es una función tal que para todo $a \in A$, se tiene que $g(a) = a$. La función g se llama **función inclusión** de A en X y se denota por i_A.

(4) Sea X un conjunto. El **conjunto potencia** de X, denotado usualmente por $\mathscr{P}(X)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de X. Sea $f = \{(A, X \setminus A) : A \in \mathscr{P}(X)\}$. El subconjunto f de $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ es una función tal que para todo $A \in \mathscr{P}(X)$, se tiene que $f(A) = X \setminus A$.

A partir de una función f, se puede obtener otra función parecida a f, definida en un subconjunto del dominio de f; dicha función se llama restricción de f.

Definición 1.7. Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$ y $f : X \to Y$ una función. La **función restringida** de f a A, denotada por $f|_A$, es la función $f \cap (A \times Y)$.

La imagen directa de un subconjunto del dominio de una función y la imagen inversa de un subconjunto del codominio de una función también son importantes dentro de la teoría de las funciones; por esta razón, veamos cómo se define cada una de ellas.

Definición 1.8. Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \to Y$ una función.

1. La **imagen de** A bajo f (o **imagen directa de** A bajo f), denotada por $f(A)$, es el conjunto
$$\{y \in Y : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\} = \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$
2. La **imagen inversa de** B bajo f, denotada por $f^{-1}(B)$, es el conjunto
$$\{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Observación 1.9. Sean X y Y conjuntos, $A \subset X$ y $f : X \to Y$ una función. Si $a \in A$, entonces $f(a) \in f(A)$. Si $f(x) \in f(A)$, ¿entonces $x \in A$?

No siempre. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$. Tenemos que $f([1, 3]) = [1, 9]$, además, $f(-2) = (-2)^2 = 4 \in f([1, 3])$, pero $-2 \notin [1, 3]$.

Ahora, es conveniente recordar la noción de familia indexada, ya que se usará de manera frecuente de aquí en adelante.

Definición 1.10. Sean Λ y X conjuntos. Una **familia indexada** por Λ de elementos de X (o con índices en Λ), denotada por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, es una función $f : \Lambda \to X$ tal que $f(\lambda) = x_\lambda$.

La unión e intersección arbitrarias de conjuntos también son fundamentales para los tópicos de este libro, por lo que a continuación recordamos su definición.

Definición 1.11. Sean X un conjunto no vacío y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de X. La **unión** de los elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{ existe } \lambda \in \Lambda \text{ tal que } x \in A_\lambda\}.$$
La **intersección** de los elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda, \text{ para cada } \lambda \in \Lambda\}.$$

Algunas propiedades básicas de una función son las siguientes.

Teorema 1.12. Sean X y Y conjuntos, A y B subconjuntos de X, C y D subconjuntos de Y y $f : X \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente

(1) $A = \emptyset$ si y sólo si $f(A) = \emptyset$.

(2) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(3) $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.

(4) Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$.

(5) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(6) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(7) Si $C \subset$ D, entonces $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

(8) $f^{-1}(D \setminus C) = f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$.

(9) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(10) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Demostración. Veamos que se cumple *(1)*. Supongamos que $A = \emptyset$ y que $f(A) \neq \emptyset$. Como $f(A) \neq \emptyset$, existe $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, lo cual es una contradicción porque $A = \emptyset$. Por lo tanto, $f(A) = \emptyset$ si $A = \emptyset$. Ahora supongamos que $f(A) = \emptyset$ y que $A \neq \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$, existe $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A)$, lo cual es una contradicción porque $f(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $A = \emptyset$ si $f(A) = \emptyset$.

Veamos que se cumple *(3)*. Sea $y \in f(B) \setminus f(A)$. Existe $x \in B$ tal que $y = f(x) \in f(B)$ y $f(x) \notin f(A)$. Notemos que $x \notin A$, porque si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$, lo cual es una contradicción. Así, $x \in B \setminus A$ y por lo tanto $f(x) \in f(B \setminus A)$, es decir, $y \in f(B \setminus A)$. Por lo que concluimos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.

Veamos que se cumple *(4)*. Supongamos que $A \subset B$ y sea $y \in f(A)$. Así, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A \subset B$, tenemos que $x \in B$. Así,

$f(x) = y \in f(B)$. Por lo tanto, $f(A) \subset f(B)$.

Veamos que se cumple *(7)*. Supongamos que $C \subset D$ y sea $x \in f^{-1}(C)$. Luego, $f(x) \in C$. Como $C \subset D$, tenemos que $f(x) \in D$. Así, $x \in f^{-1}(D)$. Por lo tanto, $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

Veamos que se cumple *(8)*. Sea $x \in f^{-1}(D \setminus C)$. Esto significa que $f(x) \in D \setminus C$, es decir, $f(x) \in D$ y $f(x) \notin C$. Así, $x \in f^{-1}(D)$ y $x \notin f^{-1}(C)$, es decir, $x \in f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$. Por lo tanto, $f^{-1}(D \setminus C) \subset f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$. De manera análoga se puede probar que $f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D \setminus C)$. Así, $f^{-1}(B') \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(B' \setminus A')$.

Los incisos *(2)*, *(5)*, *(6)*, *(9)* y *(10)* quedan como ejercicio para el lector. $\square$

Proposición 1.13. Sean X y Y conjuntos y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ familias de subconjuntos de X. Se cumple lo siguiente

(1) $X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

(2) $X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

(3) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{\mu\in M} (A_\lambda \cap B_\mu)\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$.

(4) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \bigcup \left(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap_{\mu\in M} (A_\lambda \cup B_\mu)\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cup B_\mu)$.

(5) Si $f : X \to Y$ es una función, entonces

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$$

(6) Si $f : X \to Y$ es una función, entonces

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$$

(7) Si $f : X \to Y$ es una función y $\{C_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de subconjuntos de Y, entonces

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} C_\omega\right) = \bigcup_{\omega\in\Omega} f^{-1}(C_\omega).$$

(8) Si $f : X \to Y$ es una función y $\{C_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de subconjuntos de Y, entonces

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\omega\in\Omega} C_\omega\right) = \bigcap_{\omega\in\Omega} f^{-1}(C_\omega).$$

Demostración. Veamos que se cumple *(2)*. Sea $x \in X \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Esto equivale a que $x \notin \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \notin A_{\lambda_0}$, es decir, $x \in X \setminus A_{\lambda_0}$. Luego, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$. La otra contención se obtiene de la misma forma, y así se tiene que $X \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

Veamos que se cumple *(3)*. Sea $C \subset X$. Primero veamos que $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Para esto, sea $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C$. Luego, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $x \in C$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$ y $x \in C$. Luego, $x \in A_{\lambda_0} \cap C$. Por lo tanto, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Así, $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$.

Ahora, sea $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0} \cap C$, es decir, $x \in A_{\lambda_0}$ y $x \in C$. Luego, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ y $x \in C$. Por lo tanto, $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C$. Así, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C) \subset \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C$.

Concluimos que $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$.

Ahora, usando el hecho de que $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C)$ con

$C = \bigcup_{\mu \in M} B_\mu$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap C \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap C) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(A_\lambda \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)\right)
\end{aligned}$$

Ahora, usando el hecho de que $\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) \cap A_\lambda = \bigcup_{\mu\in M} (B_\mu \cap A_\lambda)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(A_\lambda \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right)\right) &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) \cap A_\lambda\right) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\bigcup_{\mu\in M} (B_\mu \cap A_\lambda)\right) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\bigcup_{\mu\in M} (A_\lambda \cap B_\mu)\right) \\
&= \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cap B_\mu).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left(\bigcup_{\mu\in M} (A_\lambda \cap B_\mu)\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

Veamos que se cumple *(5)*. Sea $f : X \to Y$ una función y $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de X. Mostraremos que $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$.

Para esto, sea $y \in f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. Existe $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$ y $f(x) = y$. Esto significa que $y = f(x) \in f(A_{\lambda_0})$. Así, $y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$. De manera análoga se obtiene que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \subset f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$, concluyéndose que

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$$

Los incisos *(1), (4), (6), (7)* y *(8)* quedan como ejercicio para el lector. □

Definición 1.14. Sean X y Y conjuntos con $X \neq \emptyset$ y $f : X \to Y$ una función. La función f es **inyectiva** (o uno a uno) si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, se cumple que $f(x) \neq f(y)$. La función f es **suprayectiva** si $f(X) = Y$. La función f es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

Teorema 1.15. Sea $f : X \to Y$ una función, con $X \neq \emptyset$. Las siguientes proposiciones son equivalentes

(1) La función f es inyectiva.

(2) Para cualesquiera $x, y \in X$, se cumple que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

(3) Existe una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ (es decir, f tiene inversa izquierda).

(4) Para cualquier conjunto Z y cualesquiera funciones $h, k : Z \to X$, tales que $f \circ h = f \circ k$ se cumple que $h = k$ (f es cancelable por la izquierda).

(5) Para todo $A \subset X$, se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

(6) Para cualesquiera $A, B \subset X$, se tiene que $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

(7) Para cualquier $A \subset X$, se tiene que $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

(8) Para cualesquiera $A, B \subset X$, se tiene que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Demostración. El hecho de que *(1)* es equivalente a *(2)* es evidente.

Veamos que *(1)* implica *(3)*. Supongamos que f es inyectiva. Sean $x_0 \in X$ (recordar que $X \neq \emptyset$) y $g : Y \to X$ definida, para cada $y \in Y$, por

$$g(y) = \begin{cases} x_0 & \text{si } y \notin f(X), \\ x & \text{si } y = f(x) \in f(X). \end{cases}$$

Primero veamos que g es una función bien definida. Para esto, sean $y, y' \in Y$ y supongamos que $g(y) \neq g(y')$. Veremos que $y \neq y'$. Tenemos cuatro casos

(i) $y \in f(X)$ y $y' \in f(X)$.

(ii) $y \in f(X)$ y $y' \notin f(X)$.

(iii) $y \notin f(X)$ y $y' \in f(X)$.

(iv) $y \notin f(X)$ y $y' \notin f(X)$.

Si se da el caso (i), es decir, si $y, y' \in f(X)$, entonces existen $x, x' \in X$ tales que $f(x) = y$ y $f(x') = y'$. Por definición de g, tenemos que $g(y) = x$ y $g(y') = x'$. Además, por hipótesis $g(y) \neq g(y')$, es decir, $x \neq x'$. Como f es inyectiva, tenemos que $f(x) \neq f(x')$, es decir, $y \neq y'$.

Si se da el caso (ii), es decir, si $y \in f(X)$ y $y' \notin f(X)$, entonces obviamente $y \neq y'$. Si se da el caso (iii), también se tiene obviamente que $y \neq y'$.

Si se da el caso (iv), es decir, si $y \notin f(X)$ y $y' \notin f(X)$, entonces $g(y) = x_0 = g(y')$, lo cual es una contradicción, porque por hipótesis $g(y) \neq g(y')$.

Así, g es una función bien definida.

Ahora, probaremos que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Para esto, sea $x \in X$. Luego, $f(x) \in f(X)$. Por como está definida g tenemos que $g(f(x)) = x$. Así, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$, concluyéndose que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Veamos que *(3)* implica *(4)*. Sean Z un conjunto y $h, k : Z \to X$ funciones tales que $f \circ h = f \circ k$. Supongamos que $f : X \to Y$ tiene inversa a la izquierda g, es decir, $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Notemos que $h = \mathrm{Id}_X \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k = \mathrm{Id}_X \circ k = k$. Así, $h = k$.

Veamos que *(4)* implica *(5)*. Sean $A \subset X$ y $x \in f^{-1}(f(A))$. Luego, $f(x) \in f(A)$. Por lo tanto, existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. Sean $h, k : \{1\} \to X$ funciones tales que $h(1) = x$ y $k(1) = a$. Así, $(f \circ h)(1) = f(x) = f(a) = (f \circ k)(1)$. Por hipótesis, $h = k$. Luego, $x = a$. Así, $x \in A$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Demuestre la otra contención para concluir que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Veamos que *(5)* implica *(6)*. Sean $A, B \subset X$. Por *(3)* del teorema 1.12, sabemos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$. Resta ver que $f(B \setminus A) \subset f(B) \setminus f(A)$. Sea $y \in f(B \setminus A)$. Existe $x \in B \setminus A$ tal que $f(x) = y$. Así, $x \in B$ y $x \notin A$. Por hipótesis, $A = f^{-1}(f(A))$. Por lo tanto, $x \in B$ y $x \notin f^{-1}(f(A))$. Así, $f(x) \notin f(A)$ y $f(x) \in B$, es decir, $f(x) \in f(B) \setminus f(A)$, concluyéndose que $f(B \setminus A) \subset f(B) \setminus f(A)$. Por Teorema 1.12, inciso *(3)*, tenemos que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$. Por lo tanto, $f(B) \setminus f(A) = f(B \setminus A)$.

Veamos que *(6)* implica *(7)*. Sea $A \subset X$. Usando la hipótesis $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$. Ahora, como $f(X) \subset Y$, tenemos que $f(X) \setminus f(A) \subset Y \setminus f(A)$. Así, $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

Veamos que *(7)* implica *(8)*. Sean $A, B \subset X$. Por *(6)* del teorema 1.12, sabemos que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Es suficiente mostrar que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Sea $y \in f(A) \cap f(B)$. Existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Supongamos que $b \notin A$, es decir, $b \in X \setminus A$. Luego, $y = f(b) \in f(X \setminus A)$. Ahora, por hipótesis, $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$, por lo que $y = f(b) \in Y \setminus f(A)$, es decir, $y \notin f(A)$, lo cual es una contradicción porque $y \in f(B) \cap f(A)$. Así, $b \in A \cap B$. Luego, $y = f(b) \in f(A \cap B)$, concluyéndose que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Por lo tanto, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Veamos que *(8)* implica *(1)*. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Luego, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. Así, $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por hipótesis $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$. Además, notemos que para todo $z \in X$, se tiene que $f(\{z\}) = \{f(z)\}$. Luego, $f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}$. Por lo tanto, $\{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \emptyset$. Así, $f(x) \neq f(y)$. Por lo que f es inyectiva. □

Teorema 1.16. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes propiedades son equivalentes

(1) La función f es suprayectiva.

(2) Para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(3) Existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ (f tiene inversa derecha).

(4) Para todo conjunto Z, si $h, k : Y \to Z$ son funciones y $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$ (f es cancelable por la derecha).

(5) Para cualquier $B \subset Y$, se tiene que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

(6) Para todo $A \subset X$, se tiene que $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

Demostración. La equivalencia de los enunciados *(1)* y *(2)* es inmediata.

Veamos que *(2)* implica *(3)*. Observemos que, como f es suprayectiva, $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$; además, para cualquier $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ y para cualquier $y' \in Y$, con $y' \neq y$, se tiene que $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$. Luego, la familia $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ es una partición del conjunto X. Por el Axioma de Elección (véase pág. 17), existe $B \subset X$ tal que para todo $y \in Y$, se tiene que $B \cap f^{-1}(y) = \{x_y\}$, para algún $x_y \in X$.

Sea $g : Y \to B$ definida, para cada $y \in Y$, por $g(y) = x_y$. Observemos que x_y es el único elemento que pertenece a $B \cap f^{-1}(y)$, por lo tanto g está bien definida. Además:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\
&= f(x_y) \\
&= y \\
&= \mathrm{Id}_Y(y).
\end{aligned}$$

Luego, $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Veamos que *(3)* implica *(4)*. Supongamos ahora que existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Sean Z un conjunto y $h, k : Y \to Z$ funciones tales que $h \circ f = k \circ f$. Tenemos que

$$\begin{aligned} h &= h \circ \mathrm{Id}_Y \\ &= h \circ (f \circ g) \\ &= (h \circ f) \circ g \\ &= (k \circ f) \circ g \\ &= k \circ (f \circ g) \\ &= k \circ \mathrm{Id}_Y \\ &= k. \end{aligned}$$

demostrándose así lo que se quería.

Veamos que *(4)* implica *(5)*. Sabemos que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. Supongamos que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subsetneq B$. Luego, $B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right) \neq \emptyset$. Sean $h, k : Y \to \{1, 2\}$ funciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h(y) &= 1 \text{ para toda } y \in Y, \\ k(y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \notin B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right), \\ 2 & \text{si } y \in B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que h y k son distintas, porque existe al menos un $y \in B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right)$ tal que $h(y) = 1$ y $k(y) = 2$. Mostraremos a continuación que $h \circ f = k \circ f$. Sea $x \in X$. Tenemos dos casos: $x \in f^{-1}(B)$ o $x \notin f^{-1}(B)$.

Supongamos que $x \in f^{-1}(B)$. Entonces $f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, es decir, $f(x) \notin B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right)$. Por lo tanto, $k(f(x)) = 1 = h(f(x))$. Luego, $(k \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$, para toda $x \in f^{-1}(B)$.

Supongamos ahora que $x \notin f^{-1}(B)$. Luego, $f(x) \notin B$. Así, $f(x) \notin B \setminus f\left(f^{-1}(B)\right)$. Por lo tanto, $k(f(x)) = 1 = h(f(x))$. Así, para toda $x \in X \setminus f^{-1}(B)$, se tiene que $(h \circ f)(x) = (k \circ f)(x)$.

De lo anterior, podemos concluir que $h \circ f = k \circ f$, y por hipótesis, tenemos que $h = k$, lo cual es una contradicción, pues ya hemos visto que estas dos funciones son diferentes. Por lo tanto, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Veamos que *(5)* implica *(6)*. Para esto, sea $A \subset X$. Por hipótesis, $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$. Como $f^{-1}(Y) = X$, tenemos que $f(X) = Y$. Luego, $Y \setminus f(A) = f(X) \setminus f(A)$. Por *(3)* del teorema 1.12, tenemos que $f(X) \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$. Por lo tanto, $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

Veamos que *(6)* implica *(1)*. Como $\emptyset \subset X$, por hipótesis, $Y \setminus f(\emptyset) \subset f(X \setminus \emptyset)$. Notemos que $f(X \setminus \emptyset) = f(X)$ y $Y \setminus f(\emptyset) = Y \setminus \emptyset = Y$. Luego, $Y \subset f(X)$. Como $f(X) \subset Y$, concluimos que $f(X) = Y$. Por lo tanto, f es suprayectiva. □

Corolario 1.17. Sean X, Y y Z conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Se cumple lo siguiente

(1) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(2) Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.

(3) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

(4) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

Demostración. Veamos que se cumple *(3)*. Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Por el inciso *(3)* del teorema 1.15, existe $h : Z \to X$ tal que $h \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_X$. Ahora, como $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, tenemos que $(h \circ g) \circ f = \mathrm{Id}_X$. Por el teorema 1.15, inciso *(3)*, tenemos que f tiene inversa por la izquierda, y así f es inyectiva.

Los incisos *(1)*, *(2)* y *(4)* quedan como ejercicio para el lector. □

Teorema 1.18. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes

(1) La función f es biyectiva.

(2) Para cualquier $y \in Y$, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(3) Para todo $A \subset X$, se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$ y para todo $B \subset Y$, se tiene que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

(4) Para cualquier $A \subset X$, se tiene que $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

(5) Existen funciones $g, h : Y \to X$ tales que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ y $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$.

(6) Existe una única función $m : Y \to X$ tal que $f \circ m = \mathrm{Id}_Y$ y $m \circ f = \mathrm{Id}_X$ (la función m se denota por f^{-1}).

Demostración. Es una consecuencia de los Teoremas 1.15 y 1.16. □

Observación 1.19. Sean X y Y conjuntos.

(a) Si $f : X \to Y$ es inyectiva, por el inciso *(3)* del teorema 1.15, existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Luego, por el teorema 1.16, inciso *(3)*, tenemos que g es suprayectiva.

(b) Si $f : X \to Y$ es inyectiva, entonces la función inyectiva $f|^{f(X)} : X \to f(X)$, definida para todo $x \in X$, por $f|^{f(X)}(x) = f(x)$, es una función biyectiva.

(c) Si $f : X \to Y$ es suprayectiva, por el inciso *(3)* del teorema 1.16, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Luego, por el inciso *(3)* del teorema 1.15, tenemos que g es inyectiva.

1.2 Axioma de elección y algunas equivalencias

Para lo sucesivo, se requiere del conocimiento del axioma de elección. Existen muchas equivalencias de éste (véase por ejemplo el capítulo 8 de [5]). Una de estas equivalencias es la siguiente, la cual se utiliza para definir el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos.

Axioma de elección. Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $s(A_\lambda) \in A_\lambda$.

Una función s con las propiedades descritas anteriormente es llamada **función de elección** para $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Así, el axioma de elección dice que cada familia no vacía de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

La equivalencia del axioma de elección que se utilizará principalmente en este libro es la siguiente.

Axioma de elección. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos. Si para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se tiene $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$,, entonces existe un conjunto B tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $B \cap A_\lambda$ tiene sólo un elemento.

1.3 Conjuntos numerables y no numerables

Las definiciones de conjunto finito, infinito, numerable e infinito numerable son importantes en nuestro estudio de los espacios métricos, por esta razón dedicamos esta sección a revisar lo más básico de estas clases de conjuntos.

Definición 1.20. Dos conjuntos X y Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$.

Si X y Y son equipotentes lo denotaremos por $X \sim Y$.

La cardinalidad de un conjunto es una característica importante, por lo que detallamos a continuación este concepto.

Definición 1.21. Para cada conjunto X es asignado un número cardinal llamado la **cardinalidad** de X y es denotado por $|X|$.

En [5, Corolario 9.53] se demuestra formalmente que a cada conjunto siempre se le puede asignar un número cardinal.

Notación 1.22. Podemos decir que el símbolo $|X|$ es la etiqueta que representa la cantidad de elementos que posee el conjunto X, por ejemplo, para el conjunto $\emptyset$, definimos que $|\emptyset| = 0$. Cuando decimos que $\mathfrak{m}$ es un número cardinal es porque $\mathfrak{m}$ representa la cardinalidad o el número de elementos de algún conjunto X y, obviamente, la de cualquier conjunto equipotente a X. Decimos que $|X| = |Y|$ si y sólo si X y Y son equipotentes. El conjunto $\{1, \ldots, n\}$ se denota por J_n.

Definición 1.23. Sean X y Y conjuntos. Decimos que $|X| \leq |Y|$ si existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Si $|X| \leq |Y|$ y $|X| \neq |Y|$, entonces escribimos $|X| < |Y|$.

Teorema 1.24. [5, Corolario 9.55] El axioma de elección implica que para cualesquiera conjuntos A y B o bien $|A| \leq |B|$ o $|B| \leq |A|$, es decir, el orden $\leq$ es lineal.

Así, si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son números cardinales, cuando escribimos $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ significa que, al tomar conjuntos X y Y tales que $|X| = \mathfrak{m}$ y $|Y| = \mathfrak{n}$, siempre existe una función inyectiva $f : X \to Y$. La expresión $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ significa que, para los conjuntos X y Y, existe una función inyectiva $f : X \to Y$, pero no existe una función biyectiva entre X y Y.

Es importante mencionar que, para cualquier conjunto Y, estamos considerando a la función $\emptyset$ como una función inyectiva, con dominio el conjunto $\emptyset$ y rango incluido en Y. Así, para cualquier número cardinal $\mathfrak{m}$, siempre se cumple que $0 \leq \mathfrak{m}$.

Teorema 1.25. Si $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{s}$ son números cardinales, entonces

(a) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}$,

(b) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{s}$, entonces $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{s}$.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. $\square$

Definición 1.26. Una **relación de equivalencia** es una relación binaria R definida en un conjunto no vacío X tal que

(1) Para todo $x \in X$: $x \; R \; x$ (propiedad reflexiva);

(2) Para todo $x, y \in X$: si $x \; R \; y$, entonces $y \; R \; x$ (propiedad simétrica);

(3) Para todo $x, y, z \in X$: si $x \; R \; y$ y $y \; R \; z$, entonces $x \; R \; z$ (propiedad transitiva).

En una clase de conjuntos $\mathcal{C}$, tener la misma cardinalidad (ser equipotentes) es una relación de equivalencia; es decir, si $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, se cumple lo siguiente:

(1) Para todo $X \in \mathcal{C}$: $|X| = |X|$ (propiedad reflexiva);

(2) Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$:, si $|X| = |Y|$, entonces $|Y| = |X|$ (propiedad simétrica);

(3) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:, si $|X| = |Y|$ y $|Y| = |Z|$, entonces $|X| = |Z|$ (propiedad transitiva).

El número cardinal asignado al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es denotado por $\aleph_0$ y se conoce como **aleph zero**.

El número cardinal asignado al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es denotado por $\mathfrak{c}$ y se conoce como **continuum**. Si le gusta conocer un poco más de cardinales, puede consultar [3, I.2].

1.4 Conjuntos finitos

Definición 1.27. Sean X un conjunto y $n \in \mathbb{N}$.

1. $|J_n| = n$.
2. El conjunto X es **finito** si X es igual al conjunto vacío o si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|X| = |J_n|$ esto lo denotamos por $|X| < \aleph_0$.

Teorema 1.28. [5, Lema 7.2] Si $n \in \mathbb{N}$, entonces no existe una función inyectiva de J_n sobre un subconjunto propio X de J_n.

Corolario 1.29. Sean X y Y conjuntos. Si X es finito y $Y \subsetneq X$, entonces no existe una función inyectiva de X en Y.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Corolario 1.30. Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Si $n \neq m$, entonces no existe una función biyectiva de J_m en J_n.
2. Sea X un conjunto finito. Si $|X| = m$ y $|X| = n$, entonces $m = n$.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Teorema 1.31. Si X es un conjunto finito, Y es un conjunto y $f\colon X \longrightarrow Y$ es una función, entonces $f(X)$ es finito. Más aún $|f(X)| \leq |X|$.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Teorema 1.32. Si X es un conjunto finito y $Y \subset X$, entonces Y es finito. Más aún $|Y| \leq |X|$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $n = |X|$. Si $n = 0$, $X = \emptyset$, entonces $Y = \emptyset$ y el resultado es inmediato. Supongamos válido para $n = k$. Sea $|X| = k+1$ y $Y \subset X$. Si $Y = X$, no hay nada que probar. Si $Y \subset X \setminus \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$, entonces por hipótesis inductiva $|Y| \leq k < k+1$. En cualquier caso, Y es finito y $|Y| \leq |X|$. □

Proposición 1.33. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número cardinal n satisface $n < \aleph_0$.

Demostración. Como $J_n \subset \mathbb{N}$, automáticamente se tiene que $n \leq \aleph_0$. Por otro lado, si $f\colon J_n \to \mathbb{N}$ es una función, entonces para el número $m_0 = \text{máx}\{f(1), \ldots, f(n)\}+1$ se cumple que $m_0 \in \mathbb{N}\setminus\{f(1), \ldots, f(n)\}$. Por lo tanto, f no es suprayectiva y en consecuencia f no es biyectiva. Así $n \neq \aleph_0$. $\square$

Es importante distinguir entre conjunto finito, infinito, numerable e infinito numerable, por eso enunciamos a continuación lo siguiente.

Definición 1.34. Sean X un conjunto.

1. El conjunto X es **infinito** si no es finito.

2. El conjunto X es **numerable** si $|X| \leq \aleph_0$.

3. El conjunto X es **infinito numerable** si $|X| = \aleph_0$.

4. El conjunto X es **más que numerable** si X no es numerable.

Observación 1.35. Sea X un conjunto.

(1) Si X es finito, la cardinalidad de X es el número de elementos de X. Así, si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $|X| = n$. Además, esto implica que existe una función biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$.

(2) Si X es un conjunto infinito numerable, entonces existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

(3) Si X es un conjunto numerable, entonces X es finito o X es infinito numerable.

Teorema 1.36. Sea X un conjunto finito no vacío. Si Y es un subconjunto propio de X, entonces $|Y| < |X|$.

Demostración. Por la Proposición 1.32, tenemos que $|Y| \leq |X|$. Si $|Y| = |X|$, entonces existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Lo cual contradice al corolario 1.29. $\square$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 1.37. El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, no es finito.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito. Sea $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$. Ahora, sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $f(n) = 2n$. Notemos que f es una función biyectiva. En consecuencia, $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$. Lo que contradice al Teorema 1.36. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ no es finito. □

Como el conjunto de los números naturales no es finito, se obtiene el corolario siguiente.

Teorema 1.38. Todo conjunto infinito numerable tiene un subconjunto propio infinito numerable.

Demostración. Sea X un conjunto infinito numerable. Entonces existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Luego, $f|_{2\mathbb{N}} : 2\mathbb{N} \longrightarrow f(2\mathbb{N})$ también es biyectiva. Así, $|f(2\mathbb{N})| = |2\mathbb{N}|$. Ahora, como $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$, tenemos que $f(2\mathbb{N}) \subsetneq X$. Además, en la demostración del corolario 1.37 vimos que $|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Con todo, hemos probado que existe el conjunto $f(2\mathbb{N})$ tal que es infinito numerable y está contenido propiamente en X. □

Teorema 1.39. Todo conjunto infinito tiene un subconjunto propio infinito numerable.

Demostración. Sea X un conjunto infinito. Si X es infinito numerable, por el teorema 1.38, obtenemos lo que queremos. Supongamos que X es un conjunto infinito no numerable y $x_1 \in X$. Por el inciso (b) del ejercicio 11, página 33, tenemos que $X \setminus \{x_1\}$ es infinito. Luego, existe $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ y entonces $X \setminus \{x_1, x_2\}$ es infinito. Continuamos sucesivamente y vemos que $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ es infinito, es decir, existe $x_n \in X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ con $x_i \neq x_j$ e $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e $i \neq j$. Denotamos por $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_1, x_2\}$, y así sucesivamente hasta $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Notemos que $B \subset X$. Ahora, sea $u : \mathbb{N} \to B$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $u(n) = x_n$. Veamos que u es biyectiva. Para ver que u es inyectiva, sean $n, n' \in \mathbb{N}$ con $n' \neq n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n' < n$. Por construcción, $x_n \in A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n'}, x_{n'+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ y entonces $x_n \neq x_{n'}$. Como $u(n) = x_n$ y $u(n') = x_{n'}$, tenemos que $u(n) \neq u(n')$. Así, u es inyectiva. Ahora, para ver que u es suprayectiva sea $b \in B$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \in A_{n_0} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$. Luego, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ tenemos que $b = x_j = u(j)$. Por lo tanto, u es suprayectiva. Así, u es biyectiva, y en consecuencia B es infinito numerable. □

Continuando con la revisión de propiedades básicas de conjuntos, recordemos qué es el mínimo de un conjunto, para enseguida enunciar el principio del buen orden, el cual nos ayuda a demostrar el teorema 1.42.

Definición 1.40. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. El número a_0 es el mínimo de A, denotado por $\min A$, si a_0 es una cota inferior de A y $a_o \in A$.

Teorema 1.41. [1, Teorema 3.5.11] (Principio del buen orden) Si $X \subset \mathbb{N}$ y $X \neq \emptyset$, entonces X tiene mínimo.

Teorema 1.42. Si X es un conjunto infinito numerable y $Y \subset X$, entonces Y es finito o infinito numerable.

Demostración. Como X es infinito numerable, existe una biyección $f : \mathbb{N} \to X$. Podemos denotar los elementos de X como una sucesión de términos distintos: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, donde $x_n = f(n)$.

Sea $Y \subset X$. Si $Y = \emptyset$, entonces Y es finito y la proposición se cumple. Supongamos que $Y \neq \emptyset$. Sea

$$I = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in Y\}.$$

Como $I \subset \mathbb{N}$, consideramos dos casos:

1. **Si I es acotado:** Entonces I tiene un número finito de elementos, digamos k. Como cada índice corresponde a un único elemento de Y, el conjunto Y tiene exactamente k elementos. Por lo tanto, Y es finito.

2. **Si I no es acotado:** Entonces I es un conjunto infinito. Por el Principio del Buen Orden (teorema 1.41), podemos definir una sucesión de índices de la siguiente manera:

    - $n_1 = \min(I)$
    - $n_2 = \min(I \setminus \{n_1\})$
    - $n_k = \min(I \setminus \{n_1, \dots, n_{k-1}\})$

    Esta construcción nos da una sucesión estrictamente creciente $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Dada $g : \mathbb{N} \to Y$ mediante $g(k) = x_{n_k}$. Notemos que

    - g es inyectiva porque si $k \neq j$, entonces $n_k \neq n_j$, y como los elementos de X son distintos, $x_{n_k} \neq x_{n_j}$.

- g es suprayectiva porque para cualquier $y \in Y$, existe $m \in I$ tal que $y = x_m$. Como la sucesión $\{n_k\}$ es creciente y agota I, existe algún k tal que $n_k = m$.

Al ser g una biyección, Y es infinito numerable.

En ambos casos, Y es finito o numerable. □

Probar que: Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.

Demostración. Para el caso más general, supongamos que $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots\}$. Podemos definir una función suprayectiva $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ mediante:

$$f(n) = \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ b_{n/2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Esta función asegura que todos los elementos de ambos conjuntos estén en la lista $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$. Como $A \cup B$ es la imagen de una función desde $\mathbb{N}$, y ya probamos que cualquier subconjunto de un numerable es finito o numerable, se concluye que $A \cup B$ es numerable. □

Teorema 1.43. Sean X y Y conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

(a) Si f es inyectiva y Y es infinito numerable, entonces X es finito o infinito numerable.

(b) Si f es suprayectiva y X es infinito numerable, entonces Y es finito o infinito numerable.

(c) Si X es infinito numerable, entonces $f(X)$ es finito o infinito numerable.

Demostración. (a) La función $f|^{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ es biyectiva. Luego, $|X| = |f(X)|$. Como $f(X) \subset Y$, por el teorema 1.42, tenemos que $f(X)$ es finito o infinito numerable. Por lo tanto, X es finito o infinito numerable.

(b) Por el teorema 1.16, inciso *(3)*, existe una función $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Luego, por el inciso *(3)* del Corolario 1.17, tenemos que g es inyectiva. Ahora, por (a), tenemos que Y es finito o infinito numerable.

(c) Como $f|_X^{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ es suprayectiva, por (b), tenemos que $f(X)$ es finito o infinito numerable.

$\square$

Si tenemos una familia infinito numerable de conjuntos no vacíos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces su producto cartesiano, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ o por $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, es la colección de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es la familia de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ que asocian a cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $f(n)$ que pertenece a A_n.

Siguiendo esta misma idea y usando el axioma de elección (véase pág. 17), podemos definir de manera más general el producto cartesiano.

Definición 1.44. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección no vacía y arbitraria de conjuntos, su producto cartesiano, denotado por $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, es

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \colon f(\lambda) \in X_\lambda, \text{ para cualquier } \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Notemos que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es el conjunto formado por todas las funciones de elección de la familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Además, si para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $X_\lambda \neq \emptyset$, por el axioma de elección (véase pág. 17), se obtiene que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Si existe un conjunto X tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ el conjunto $X_\lambda = X$, entonces $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ se denota también como X^Λ.

Ahora, recordemos la definición de intervalo en el conjunto de los números reales.

Definición 1.45. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío. Se dice que A es un **intervalo** si para cualesquiera $a, b \in A$, con $a \leq b$, y para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq s \leq b$, se tiene que $s \in A$.

Proposición 1.46. Los siguientes conjuntos son infinito numerables:

1. $\mathbb{Z}$,
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
3. $A \times B$, si A y B son infinito numerables,
4. $\mathbb{Q}$,
5. La unión numerable de una familia de conjuntos infinito numerables es infinito numerable.
6. Si $X_1, \ldots, X_k$ son infinito numerables, entonces $X_1 \times \cdots \times X_k$ es infinito numerable.
7. El conjunto de todos los puntos con ambas coordenadas racionales en el plano.
8. El conjunto de todos los intervalos con extremos racionales.
9. Todos los polinomios con coeficientes racionales.
10. Los números algebraicos (α es algebraico si existen numeros enteros $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tales que $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$).
11. El conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Demostración. 1. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, para cada $m \in \mathbb{Z}$, por

$$f(m) = \begin{cases} 2m & \text{si } m > 0, \\ -2m+1 & \text{si } m \leq 0. \end{cases}$$

Tenemos que f está bien definida y es inyectiva (verifíquelo). Ahora, por el teorema 1.43, inciso (a), tenemos que $\mathbb{Z}$ es finito o infinito numerable. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, tenemos que $\mathbb{Z}$ no es finito. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ es infinito numerable.

2. Mostraremos ahora que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable. Definimos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como $f(n,m) = 2^n 3^m$. Por el teorema 1.43, iniciso (a), bastará probar que f es inyectiva para concluir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable.

Supongamos que $f(n,m) = f(n',m')$, es decir, $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$. Como 2 y 3 son coprimos, tenemos que $2^n = 2^{n'}$ y $3^m = 3^{m'}$. Concluimos que $(n,m) = (n',m')$, y por tanto, f es inyectiva. Así, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable.

3. Sean A y B infinito numerables. Esto significa que existen dos funciones biyectivas $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow A$, $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow B$. Definimos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$ como $f(n,m) = (f_1(n), f_2(m))$. Tenemos que f es biyectiva (es un buen ejercicio para el lector). Por lo tanto, $A \times B$ es infinito numerable.

4. Sean $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(m,n) = \dfrac{m}{n}$. Es claro que f es una función suprayectiva. Luego, por el teorema 1.43, inciso (b), tenemos que $\mathbb{Q}$ es numerable. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ no puede ser finito. Así, Q es infinito numerable.

5. Sea $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección infinito numerable de conjuntos infinito numerables. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función biyectiva $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$. Sea
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
dada por $f(n,m) = f_n(m)$. Sea $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_{n_0}$. Como f_{n_0} es suprayectiva, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(m_0) = a$. Así, $f(n_0, m_0) = a$. De esto, tenemos que f es suprayectiva. Por el teorema 1.43, inciso (b), tenemos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable. Como $A_{n_0} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y A_{n_0} es infinito numerable, tenemos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ no puede ser finito. Así, concluimos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es infinito numerable.

Queda como ejercicio para el lector verificar que la unión finita de una familia de conjuntos infinito numerables es infinito numerable.

Los incisos $6 - 11$ quedan como ejercicio para el lector. □

Teorema 1.47. Si A es un conjunto infinito y E es un conjunto numerable, entonces $|A \cup E| = |A|$.

Demostración. Sea A infinito y E numerable.
Primero supongamos que $A \cap E = \emptyset$. Por el teorema 1.39, existe $B \subset A$ tal que $|B| = |\mathbb{N}|$. Luego, por el inciso 5 de la proposición 1.46, tenemos que $|B \cup E| = |\mathbb{N}|$. Así, $|B \cup E| = |B|$. Esto significa que existe una función biyectiva $\varphi : B \cup E \to B$. Ahora, sea $f : A \cup E \to A$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in B \cup E, \\ x & \text{si } x \notin B \cup E. \end{cases}$$

Como φ es biyectiva, la función f también lo es. Por lo tanto, $|A \cup E| = |A|$. Supongamos ahora que $A \cap E \neq \emptyset$. Aplicamos el primer caso a los conjuntos A y $E_1 = E \setminus A$, y obtenemos que $|A \cup E_1| = |A|$. Ahora, notemos que $A \cup E_1 = A \cup E$. Luego, $|A \cup E_1| = |A \cup E|$. Por lo tanto, $|A \cup E| = |A|$. $\square$

Teorema 1.48. Si A es un conjunto infinito no numerable y E es un conjunto numerable, entonces $|A \setminus E| = |A|$.

Demostración. Sean A un conjunto infinito no numerable y E un conjunto numerable. Si $E \cap A = \emptyset$, entonces $A \setminus E = A$, y por lo tanto $A \setminus E$ es infinito no numerable.

Supongamos que $A \cap E \neq \emptyset$. Luego, $(A \setminus E) \cup (A \cap E) = A$. Como $A \cap E \subset E$, tenemos que $A \cap E$ es numerable. Por el teorema 1.47, se tiene que $|(A \setminus E) \cup (A \cap E)| = |A \setminus E|$. Así, $|A| = |A \setminus E|$. $\square$

Teorema 1.49. Un conjunto A es infinito si y sólo si A tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto propio de él.

Demostración. Primero, sean A un conjunto infinito y E un subconjunto finito de A.

Si A no es numerable, por el teorema 1.48, tenemos que $|A \setminus E| = |A|$. Así, A tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto propio de él.

Si A es infinito numerable, entonces $A \setminus E$ es finito o infinito numerable. Como $A \setminus E$ es infinito, entonces $A \setminus E$ es infinito numerable. Por lo tanto, $A \setminus E \sim A$, es decir, $|A \setminus E| = |A|$. Tenemos que A tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto propio de él.

La proposición inversa se sigue inmediatamente del Teorema 1.36. $\square$

Corolario 1.50. La siguientes relaciones se cumplen:

$$[0,1] \sim (0,1) \sim (0,1] \sim [0,1).$$

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Teorema 1.51. $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector.
Sugerencia: Ver que la función $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ es biyectiva. □

Ahora, consideremos el siguiente conjunto y veamos que no es infinito numerable

$$2^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \colon f \textit{ es una función}\}.$$

Teorema 1.52. $2^{\mathbb{N}}$ no es infinito numerable.

Demostración. Supongamos que $2^{\mathbb{N}}$ es infinito numerable. Podemos escribir entonces $2^{\mathbb{N}} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots\}$, con $\chi_i : \mathbb{N} \to \{0,1\}$.

Sea la función $\chi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ dada por

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_n(n) = 1, \\ 1 & \text{si } \chi_n(n) = 0. \end{cases}$$

Veamos que $\chi \notin \{\chi_1, \ldots \chi_n, \ldots\}$. Supongamos que $\chi \in \{\chi_1, \ldots, \chi_n, \ldots\}$. Entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\chi = \chi_n$. Pero si $\chi_n(n) = 1$, $\chi(n) = 0$ (y viceversa), lo cual es una contradicción. Luego, $\chi \notin \{\chi_1, \ldots \chi_n, \ldots\}$ y por lo tanto $2^{\mathbb{N}}$ no es infinito numerable. □

Teorema 1.53. El intervalo $[0,1]$ no es infinito numerable.

Demostración. Sea

$$E = \{x \in [0,1] : x \text{ tiene dos representaciones decimales diferentes}\}.$$

Como E es infinito numerable (demostrarlo), por el teorema 1.47, basta mostrar que $A = [0,1] \setminus E$ no es infinito numerable.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que A es infinito numerable. Entonces, existe una enumeración completa de sus elementos:

$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$. Podemos escribir cada elemento x_i mediante su representación decimal única (ya que hemos excluido los elementos de E):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0.x_{11}x_{12}x_{13}\ldots x_{1n}\ldots \\ x_2 & = & 0.x_{21}x_{22}x_{23}\ldots x_{2n}\ldots \\ x_3 & = & 0.x_{31}x_{32}x_{33}\ldots x_{3n}\ldots \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots x_{nn}\ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

donde x_{ij} representa la cifra en la j-ésima posición decimal del número x_i. Ahora, construiremos un número $x = 0.y_1y_2y_3\ldots y_n\ldots$ definiendo sus cifras decimales y_i mediante el argumento de diagonalización de Cantor:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{si } x_{ii} = 1 \end{cases}$$

Esta elección garantiza dos condiciones fundamentales: $x \in [0,1] \setminus E$: El número x solo contiene las cifras 1 y 2 en su desarrollo decimal. Al no contener colas infinitas de ceros ni de nueves, su representación es única y no pertenece a E. x no está en la lista: Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el número x difiere de x_n al menos en la n-ésima cifra decimal, ya que por construcción $y_n \neq x_{nn}$. Por lo tanto, x es un elemento de A que no está incluido en la enumeración $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Esto contradice la suposición de que A es numerable (es decir, que la función $\phi : \mathbb{N} \to A$ es suprayectiva). Al ser A no numerable y estar contenido en $[0,1]$, concluimos que el intervalo $[0,1]$ es no numerable. □

Teorema 1.54. [2, Teorema A.51] $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Sean A y B conjuntos. Si existe un $C \subset B$ tal que $C \sim A$ y no existe $D \subset A$ tal que $D \sim B$, decimos que $|A| < |B|$. Esto es equivalente a decir que existe una función inyectiva $f : A \to B$ y no existe una función inyectiva $g : B \to A$.

Si existen $D \subset A$ tales que $D \sim B$ y $C \subset B$ tales que $C \sim A$, decimos que $|A| = |B|$, lo cual equivale a decir que existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Este resultado es conocido como el *Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein* [2, Teorema A.31].

Teorema 1.55. Dado cualquier conjunto A, tenemos que $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Demostración. Hay que demostrar que existe una función $f : A \to \mathscr{P}(A)$ inyectiva, pero que no existe $g : \mathscr{P}(A) \to A$ inyectiva.

Definimos $f : A \to \mathscr{P}(A)$ tal que $f(x_0) = \{x_0\}$, que es una función inyectiva.

Para la segunda parte, bastará con mostrar que no existe una función suprayectiva de A en $\mathscr{P}(A)$. Supongamos, por el contrario, que $h : A \to \mathscr{P}(A)$ es una función suprayectiva. Sea $X = \{x \in A : x \notin h(x)\} \subset A$. Por ser h suprayectiva, existe un $a \in A$ tal que $h(a) = X$, ya que $X \in \mathscr{P}(A)$. Si $a \in X$, entonces $a \notin h(a) = X$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, si $a \notin X$, entonces $a \in h(a) = X$, que también es una contradicción. Luego, no existe una función suprayectiva entre A y $\mathscr{P}(A)$. Así, $|A| < |\mathscr{P}(A)|$. $\square$

Definición 1.56. Sean A y L conjuntos, $A^L = \{f : L \to A : f \text{ es función}\}$.

Proposición 1.57. Sean $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, L$ y M conjuntos no vacíos. Tenemos que:

1. $(A^L)^M \sim A^{L\times M}$,
2. Si $A_1 \sim B_1$ y $A_2 \sim B_2$, entonces $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$,
3. Si A es infinito numerable, entonces $2^A \sim 2^{\mathbb{N}}$,
4. Si $A \sim B$, entonces $A^L \sim B^L$.

Demostración.

1. Crearemos una función biyectiva $h : (A^L)^M \to A^{L\times M}$. Para esto, notemos que si $f \in (A^L)^M$, entonces $f : M \to A^L$. Luego, para cada $m \in M$, tenemos que $f(m) : L \to A$, además para todo $l \in L$ se tiene que $f(m)(l) \in A$. Así, sea $h : (A^L)^M \to A^{L\times M}$ definida, para todo $f \in \left(A^L\right)^M$, por $h(f) = g$, donde g es una función $g : L \times M \to A$ definida, para cada $(l, m) \in L \times M$, por $g(l, m) = f(m)(l)$. Queda para el lector demostrará que esta función es biyectiva.

3. Si A es infinito numerable, entonces existe una función biyectiva $g : A \to \mathbb{N}$. Sea $\varphi : 2^{\mathbb{N}} \to 2^A$ definida, para cada $h \in 2^{\mathbb{N}}$, por $\varphi(h) = h \circ g$. Esta función es biyectiva (demostrarlo). Así, $2^A \sim 2^{\mathbb{N}}$.

$\square$

Los incisos 2 y 4 quedan como ejercicio para el lector.

Teorema 1.58. Los siguientes conjuntos son equipotentes a $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
2. $\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R} : x$ no es algebraico$\}$,
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$,
4. $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es una función continua$\}$,
5. $[0, 1) \times [0, 1)$,
6. $\mathbb{R}^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
7. El conjunto de todas las rectas en el plano,
8. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Demostración. 1. Como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito y $\mathbb{Q}$ es infinito numerable, por el teorema 1.47, tenemos que $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de los números reales algebraicos. Tenemos que $\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{T}$. Además, $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{T}$ es infinito y $\mathcal{A}$ es infinito numerable (inciso (10) de la proposición 1.46, página 26). Por el teorema 1.47, tenemos que $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}) \cup \mathcal{A} \sim \mathbb{R} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{T}$.

3. Del Teorema 1.54 y del inciso 4 de las proposición 1.57, tenemos que $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$ implica que $\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$; ahora por el inciso 1 de la proposición 1.57, tenemos que $\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{Q}} \sim 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$. Además, $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

4 . Para demostrar que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$, sea $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ definida, para cada función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por $\varphi(f) = f|_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$.

Veamos que φ es inyectiva. Sean $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supongamos que $\varphi(f) = \varphi(g)$, es decir, $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Existe una sucesión de racionales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim x_n = x$. Como f y g son funciones continuas, $\lim f(x_n) = f(x)$ y $\lim g(x_n) = g(x)$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(x_n) = g(x_n)$. Luego, $f(x) = g(x)$, de donde concluimos que $f = g$.

Ahora, como $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}$, existe una función biyectiva $h : \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Así que $h \circ \varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es inyectiva. Luego, $|\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$.

Ahora, sea $l : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, por $l(x_0) = f_{x_0}$, donde $f_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f_{x_0}(x) = x_0$. Como l es inyectiva (ejercio para el lector), tenemos que $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})|$. Por el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, concluimos que $|\mathbb{R}| = |\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})|$.

Los incisos 5, 6, 7 y 8 quedan como ejercicio para el lector. □

1.5 Ejercicios

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   (a) Si X es un conjunto y $F = \{(D, y) : D \in \mathscr{P}(X), y \in X\}$, entonces F es una función.

   (b) Si $X = Y = \mathbb{R}$, y $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, entonces C es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

2. Demostrar los incisos (2), (5), (6), (9) y (10) del Teorema 1.12.

3. Dar un ejemplo donde la contención del inciso *(3)*, del Teorema 1.12, sea propia.

4. Terminar la demostración de las propiedades de la proposición 1.13.

5. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

6. Dar un ejemplo donde no se cumpla que $A = f^{-1}(f(A))$.

7. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función y $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

8. Demostrar los incisos (1), (2) y (4) del Corolario 1.17.

9. Demostrar el Teorema 1.18.

10. Demostrar que la equipotencia de conjuntos es una relación de equivalencia en la clase que tiene como elementos a los conjuntos.

11. Demostrar lo siguiente.

(a) Si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es finito.

(b) Si A es infinito y E es finito, entonces $A \setminus E$ es infinito.

12. Demostrar que si X es un conjunto finito, entonces $\mathscr{P}(X)$ es finito.

13. Demostrar que si X es un conjunto infinito, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|X| > |J_n|$

14. Demostrar que la unión infinito numerable de conjuntos finitos, ajenos dos a dos, es infinito numerable.

15. Demostrar incisos 4, 6 al 10 y 11 de la proposición 1.46.

16. ¿Existe una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$?

17. ¿Existe una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$?

18. Demostrar el Teorema 1.51. [Sugerencia: demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es biyectiva].

19. Demostrar que la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es equipotente a $\mathbb{R}$. [Sugerencia: mostrar que $\mathbb{R} \sim S^1 \setminus \{(0, 1)\} \sim S^1$].

20. Demostrar que la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ es equipotente a $\mathbb{R}^2$.

21. Sean X un conjunto y $2^X = \{f : X \to \{0, 1\} : f \text{ es función}\}$. Demostrar que $2^X \sim \mathscr{P}(X)$. [Sugerencia: Para $A \subset X$, sea $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ dada por $\chi_A(t) = 0$, si $t \notin A$ y $\chi_A(t) = 1$, si $t \in A$].

22. Demostrar los incisos 2 y 4 de la proposición 1.57.

23. Demostrar las siguientes relaciones entre conjuntos.

(a) $2^{\mathbb{N}} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$,

(b) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

24. Demostrar los incisos $5 - 8$ del teorema 1.58.

Espacios métricos, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-2637-10-8

Capítulo 2

Espacios métricos

2.1 Métricas

La noción de espacio métrico fue desarrollada por primera vez por el matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942) a principios del siglo XX. En su libro “Grundzüge der Mengenlehre” (Fundamentos de la teoría de conjuntos), publicado en 1914, Hausdorff formalizó y definió la noción de un espacio métrico, estableciendo los conceptos fundamentales de distancia, convergencia, límites y continuidad en este contexto (véase [4] y [11]). Esta teoría ha sido fundamental en el estudio del análisis matemático y la topología.

Comenzamos este capítulo definiendo los conceptos de métrica y espacio métrico.

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una **métrica** para X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$:

(a) $d(x, y) \geq 0$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El teorema siguiente nos dice que una función d que cumpla con los incisos (a), (c) y (d) es automáticamente una métrica.

Teorema 2.2. Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces d es una métrica para X si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Demostración. Claramente, tenemos que si d es una métrica, entonces d satisface (i), (ii) y (iii). Recíprocamente, supongamos que d satisface (i) ,(ii) y (iii). Veamos que d es una métrica para X. Bastará probar que d es simétrica. Sean $x, y \in X$. Por (iii), tenemos

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) \text{ y } d(y, x) \leq d(y, y) + d(x, y).$$

Usando (ii), concluimos que $d(x, y) \leq d(y, x)$ y $d(y, x) \leq d(x, y)$. Entonces $d(x, y) = d(y, x)$. Por lo tanto, d es una métrica para X. □

Definición 2.3. Un **espacio métrico** es una pareja formada por un conjunto no vacío X y una métrica d definida para X.

Notemos que un conjunto X podría tener asignadas distintas métricas, por lo que, al hablar de un conjunto como espacio métrico, es importante precisar cuál es su métrica.

Notación 2.4. Si X es un espacio métrico con métrica d, entonces lo denotamos por (X, d).

Veamos algunos ejemplos de métricas definidas en conjuntos conocidos, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, el conjunto de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y el conjunto de sucesiones.

Teorema 2.5. Las funciones definidas en cada inciso son métricas.

1. La función $d^1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, para cada $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por $d^1(x, y) = |x - y|$ es una métrica en $\mathbb{R}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $d^n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, por

$$d^n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es una métrica en $\mathbb{R}^n$ conocida como **métrica euclidiana**.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, por
$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$
donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es una métrica en $\mathbb{R}^n$ conocida como la **métrica del taxista**.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, por
$$M(x,y) = \text{máx}\left\{|x_i - y_i| : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\},$$
donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $\mathcal{C}[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas de $[a,b]$ a $\mathbb{R}$. La función $d : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ está dada por $d(f,g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}$ es una métrica en $\mathcal{C}[a,b]$.

6. Sea
$$\mathcal{S} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$
La función $d^{\infty} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definida, para cada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$, por
$$d^{\infty}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$
es una métrica en $\mathcal{S}$.

7. Sea X un conjunto no vacío. La función $D : X \times X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x, y \in X$, por
$$D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$
es una métrica para X, la cual es llamada **métrica discreta** , y en tal caso, X considerado con esta métrica se llama **espacio métrico discreto.**

Demostración. Veamos que en efecto las anteriores son métricas.

3. Comprobar los incisos 1 y 2 de la Definición 2.1 es inmediato. Veamos que se cumple el inciso 3. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, y $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \\
&= d_1(x,z) + d_1(z,y).
\end{aligned}$$

5. Veamos que d es una métrica. Primero, por definición $d(f,g) \geq 0$. Ahora, si $d(f,g) = 0$, entonces para toda $t \in [a,b]$, $|f(t) - g(t)| = 0$. Luego, para toda $t \in [a,b]$, $f(t) = g(t)$ y por lo tanto $f = g$. De la misma forma, si $f = g$ se sigue que $d(f,g) = 0$.

Finalmente, sean $f, g, h \in C$. Para cada $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
&|f(t) - g(t)| = |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \\
\leq &|f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \\
\leq &\max\{|f(x) - h(x)| : x \in [a,b]\} + \max\{|h(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.
\end{aligned}$$

Así, $\max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\} \leq d(f,h) + d(g,h)$ y por lo tanto $d(f,g) \leq d(f,h) + d(g,h)$.

6. Por definición, $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$. Igualmente tenemos que $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ si y sólo si $\bar{x} = \bar{y}$.

Mostraremos que d cumple con el inciso 3 de la Definición 2.1. Para esto, sea $\bar{z} = (z_1, \ldots) \in A$. De la métrica euclidiana obtenemos que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i)^2}.$$

Tomando límites, $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{y},\bar{z})$.

Los incisos 1, 2, 4 y 7 quedan como ejercicio para el lector. $\square$

2.2 Isometrías y subespacios métricos

Una isometría es una función que preserva la distancia entre los puntos de un espacio métrico X y los puntos de otro espacio métrico Y.

Definición 2.6. Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Decimos que f es una **isometría** si para cualesquiera $x,y \in X$, se tiene que $d_X(x,y) = d_Y(f(x),f(y))$.

Observación 2.7. Ser isométricos es una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos

Dado un subconjunto de un espacio métrico se le puede dotar de una métrica para que sea también un espacio métrico.

Definición 2.8. Sea X un espacio métrico con métrica d. Dado un subconjunto Y de X, podemos considerar de manera natural la función $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por $d_Y = d|_{Y\times Y}$. Notemos que d_Y es una métrica. Así, Y es un espacio métrico, y d_Y es llamada **métrica inducida** en Y. Diremos que Y es un **subespacio métrico** de X con métrica d_Y.

Observación 2.9. Dos acuerdos amigables en este libro es que cuando hablemos del espacio métrico $\mathbb{R}^n$ estaremos pensando que $\mathbb{R}^n$ tiene asignada la métrica euclidiana, a menos que se diga lo contrario; y cuando hablemos de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ estamos pensando que tales subconjuntos tienen asignada la métrica inducida de la mética euclidiana, para cada $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Ejercicios

1. Demostrar que el resto de las funciones del teorema 2.5 son métricas.

2. En cada uno de los siguientes incisos, decir si la función d, definida para cada $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es una métrica

i. $d(x,y) = (x-y)^2$,

ii. $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$,

iii. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$,

iv. $d(x,y) = |x - 2y|$,

v. $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

3. Dado un espacio métrico (X,d), demostrar que

   i. $|d(x,z) - d(y,w)| \leq d(x,y) + d(z,w)$,

   ii. $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

4. Mostrar que si $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

   Usando esta desigualdad probar que $\varphi : \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 \, dt},$$

   es una métrica.

5. Si d es una métrica sobre X, definimos para $x, y \in X$:

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

   Demuéstrese que d' es una métrica sobre X.

6. Sea $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de métricas para X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x, y \in X$, $d_n(x,y) \leq 1$. Demostrar que

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x,y)}{2^n}$$

   es una métrica para X.

7. Sea X el conjunto de todas las sucesiones reales $\{x_n\}$ acotadas. Demostrar que $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ define una métrica para X.

8. Sea X el conjunto de todas las sucesiones reales. Demostrar que
$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n!(1 + |x_n - y_n|)}$$
define una métrica para X.

9. Sean (X, d) un espacio métrico, Y un subconjunto no vacío de X y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Probar que $d_f : Y \times Y \to \mathbb{R}$ definida por $d_f(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ es una métrica para Y.

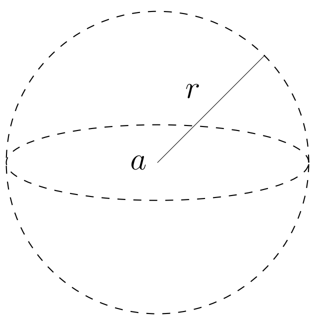
10. Encontrar una métrica para $(-1, 1)$ que no sea la inducida por $\mathbb{R}$, ni la métrica discreta. [Sugerencia: La función $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ es biyectiva (véase el Teorema 1.51)].

11. Encuentre las métricas para proponer una isometría entre $\mathcal{C}[0, 1]$ y $\mathcal{C}[0, 2]$.

2.4 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

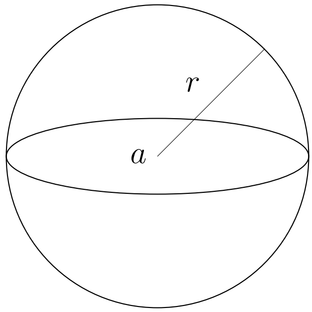
Ahora que ya sabemos qué es un espacio métrico, podemos hablar de ciertos conceptos topológicos definidos en los espacios métricos.

Definición 2.10. Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}$, con $r \geq 0$. La **bola abierta** con centro en a y radio r es el conjunto
$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$



La **bola cerrada** con centro en a y radio r es el conjunto

$$C(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}.$$



Sean (X,d) un espacio métrico, $a \in A \subset X$ y $r > 0$. La bola en A con centro en a y radio r, denotada por $B_A(a,r)$, es el conjunto

$$\begin{aligned} B_A(a,r) &= \{y \in A : d(a,y) < r\} \\ &= \{z \in X : d(z,a) < r \text{ y } z \in A\} \\ &= \{z \in X : d(z,a) < r\} \cap A \\ &= B_X(a,r) \cap A. \end{aligned}$$

Así, $B_A(a,r) = B_X(a,r) \cap A$.

La noción de métricas equivalentes es importante dentro de la Topología, por lo que la revisamos a continuación.

Definición 2.11. Suponga que d y $\hat{d}$ son métricas para el conjunto X. Entonces d y $\hat{d}$ son **métricas equivalentes** si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada $r > 0$, existen números $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $B_d(x,\varepsilon_1) \subset B_{\hat{d}}(x,r)$ y $B_{\hat{d}}(x,\varepsilon_2) \subset B_d(x,r)$.

Ejemplo 2.12. En $\mathbb{R}^2$ la métrica del taxista T y la métrica euclidiana d^2 son equivalentes. Para ver esto, sean $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Notemos que si $\varepsilon_1 = \dfrac{r}{2}$ y $y = (y_1,y_2) \in B_{d^2}(x,\varepsilon_1)$, entonces

$$d^2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < \varepsilon_1.$$

Luego,

$$T(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \leq 2\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \leq 2\varepsilon_1 = r.$$

Así, $y \in B_T(x,r)$. Por lo tanto, $B_{d^2}(x,\varepsilon_1) \subset B_T(x,r)$. Ahora, si $\varepsilon_2 = r$ y $y=(y_1,y_2) \in B_T(x,\varepsilon_2)$, entonces

$$T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < \varepsilon_2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d^2(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2} + \sqrt{(x_2-y_2)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < \varepsilon_2 = r. \end{aligned}$$

Así, $y \in B_{d^2}(x,r)$. Por lo tanto, $B_T(x,\varepsilon_2) \subset B_{d^2}(x,r)$. Por lo tanto, la métrica del taxista T y la métrica euclidiana d^2 son equivalentes en $\mathbb{R}^2$.

El concepto de conjunto abierto es bastante importante dentro de la Topología; en particular, para los espacios métricos, tenemos lo siguiente.

Definición 2.13. Sea $A \subset X$. Decimos que A es un **conjunto abierto** de X si para cada $a \in A$, existe un $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$.

Observación 2.14. Sea X un espacio métrico.

(a) Si $r = 0$, entonces $B(a,r) = \emptyset$.

(b) $B(a,r) \subset C(a,r)$.

(c) $\emptyset$ y X son abiertos de X.

Al conjunto $B(x,r) \setminus \{x\}$ le llamaremos **bola agujerada**.

El conjunto abierto más básico en un espacio métrico es la bola abierta.

Teorema 2.15. Sean X un espacio métrico, $a \in X$ y $r \geq 0$. Entonces $B(a,r)$ es un abierto de X.

Demostración. Si $r = 0$, entonces $B(a,r) = \emptyset$ y tenemos lo que se quiere. Supongamos que $r > 0$. Dado $p \in B(a,r)$, tenemos que $s = r - d(p,a) > 0$. Veamos que $B(p,s) \subset B(a,r)$. Sea $q \in B(p,s)$, entonces

$$d(q,a) \leq d(q,p) + d(p,a) < s + d(p,a) = r - d(p,a) + d(p,a) = r.$$

Así, $q \in B(a,r)$, concluyéndose que $B(p,s) \subset B(a,r)$. Por lo tanto, $B(a,r)$ es un abierto de X. $\square$

Ejemplo 2.16. Los siguientes son ejemplos de conjuntos abiertos:

1. Sea X un conjunto no vacío considerado con la métrica discreta. Todo subconjunto A de X es abierto de X, ya que si $a \in A$ y $0 < r < 1$, $B(a,r) = \{a\} \subset A$. En particular, $\{x\}$ es un abierto de X, para toda $x \in X$.

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, el intervalo $(x-r, x+r) = B(x,r)$ es abierto de $\mathbb{R}$.

3. En $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana, si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, el conjunto $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, conocido como rectángulo abierto.

Lema 2.17. Sean X un espacio métrico y $U \subset A \subset X$. Entonces U es abierto de A si y sólo si existe V abierto de X tal que $U = V \cap A$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que U es un abierto de A, con $x \in U$. Entonces, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_A(x, \varepsilon_x) \subset U$, de donde

$$U = \bigcup_{x \in A} B_A(x, \varepsilon_x) = \bigcup_{x \in A} (B_X(x, \varepsilon_x) \cap A) = \left(\bigcup_{x \in A} B_X(x, \varepsilon_x) \right) \cap A.$$

Sea $V = \bigcup_{x \in A} B_X(x, \varepsilon_x)$. Observar que V es un abierto de X. De modo que, $U = V \cap A$.

($\Leftarrow$) Para demostrar el recíproco, sea V un abierto de X. Queremos demostrar que $V \cap A$ es abierto de A. Sea $y \in V \cap A$. Como V es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_X(y, r) \subset V$, entonces $B_X(y,r) \cap A \subset V \cap A$, por lo que $V \cap A$ es abierto de A. $\square$

Podemos construir conjuntos abiertos en un espacio métrico uniendo o intersecando conjuntos abiertos, tal como nos dice el siguiente teorema.

Teorema 2.18. Sean X un espacio métrico y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Entonces

(a) El conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X.

(b) Si Λ es finito, entonces $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X.

Demostración. (a) Sea $p \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Existe $\lambda_p \in \Lambda$ tal que $p \in U_{\lambda_p}$. Como U_{λ_p} es abierto de X, existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset U_{\lambda_p}$. Como $U_{\lambda_p} \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, tenemos que $B(p,r) \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X.

(b) Sea $q \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $q \in U_\lambda$. Como cada U_λ es un abierto de X, existe $r_\lambda > 0$ tal que $B(q, r_\lambda) \subset U_\lambda$. Como Λ es finito, existe $r = \min\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\} > 0$. Luego, $B(q,r) \subset B(q,r_\lambda) \subset U_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Así, $B(q,r) \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X. $\square$

Observe que la condición de que $\mathcal{U}$ sea finito en (b) es esencial para que podamos dar la existencia del radio r. sin embargo, uno podría pensar que, para asegurar la existencia de r en cualquier caso, podríamos definirlo como el ínfimo; lo cual es correcto, pero el problema que conlleva esto es que no se puede asegurar en este caso que $r > 0$. Para entender mejor lo discutido, prestemos atención al siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.19. La intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto.

Consideremos como espacio métrico a $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que I_n es un abierto de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ no es un abierto de $\mathbb{R}$. Para ver esto, sea $p \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $-\dfrac{1}{n} < p < \dfrac{1}{n}$, o bien, $|p| < \dfrac{1}{n}$. Dado $r > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < r$. De esto, para cada $r > 0$, se cumple que $|p| < r$. Además,

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

concluimos que $p = 0$. Por lo tanto,

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Además, para cada $r > 0$, $(-r, r) \not\subset \{0\}$. Por lo tanto, $\{0\}$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ y es intersección numerable de abiertos de $\mathbb{R}$.

Dentro de la Topología, el concepto de vecindad de un punto es de suma importancia, por lo que a continuación precisaremos.

Definición 2.20. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $V \subset X$. Se dice que V es una **vecindad** de x si existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset V$.

Observación 2.21. Si X es un espacio métrico y $x \in X$, entonces cualquier conjunto abierto U de X con $x \in U$ es una vecindad de x.

Definición 2.22. Sea X un espacio métrico y $x \in X$. La colección de vecindades de x se llama **sistema de vecindades** de x en X y se denota por $\mathcal{V}(x)$.

El concepto de conjunto cerrado también es bastante importante en la Topología; por esta razón, tenemos a continuación su definición.

Definición 2.23. Sean X un espacio métrico y $F \subset X$. Decimos que F es un cerrado de X si su complemento, $X \setminus F$, es un abierto de X.

Ejemplo 2.24. Sea X un espacio métrico.

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son cerrados de X.

2. Para todo $x \in X$ y $r > 0$, el conjunto $C(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ es cerrado de X.

3. Si X tiene la métrica discreta, entonces cualquier subconjunto U de X es cerrado de X, ya que $X \setminus U$ es abierto de X.

Ver que, en efecto los conjuntos antes mencionados son conjuntos cerrados es un ejercicio para el lector.

Teorema 2.25. Sea X un espacio métrico y $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos cerrados de X. Entonces

(a) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es un cerrado de X,

(b) si Λ es finito, entonces $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es un cerrado de X.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

2.5 Cerradura, interior, frontera y derivado

Definición 2.26. Sea X es un espacio métrico y $A \subset X$,

(a) el **interior** de A en X, denotado por $\operatorname{int}_X(A)$, es el conjunto

$$\{x \in X : \text{ existe } r_x > 0 \text{ tal que } B(x, r_x) \subset A\},$$

(b) la **cerradura** de A en X, denotada por $\operatorname{cl}_X(A)$, es el conjunto

$$\{x \in X : \text{ para cada } r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Propiedades importantes del interior y de la cerradura se enlistan a continuación.

Teorema 2.27. Sean X un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces,

(a) $\operatorname{int}_X(A) \subset A$,

(b) $\operatorname{int}_X(A)$ es abierto de X,

(c) A es abierto de X si y sólo si $A = \operatorname{int}_X(A)$,

(d) si $A \subset B$, entonces $\operatorname{int}_X(A) \subset \operatorname{int}_X(B)$,

(e) si B es abierto de X y $B \subset A$, entonces $B \subset \operatorname{int}_X(A)$,

(f) $\operatorname{int}_X(A)$ es la unión de los subconjuntos abiertos de X contenidos en A,

(g) $\text{int}_X(A \cap B) = \text{int}_X(A) \cap \text{int}_X(B)$,

(h) $\text{int}_X(A) \cup \text{int}_X(B) \subset \text{int}_X(A \cup B)$.

Demostración. (a) Por la definición de $\text{int}_X(A)$ es obvio.

(b) Por la definición de $\text{int}_X(A)$ es obvio.

(c) Supongamos que A es abierto de X. Por el inciso (a), bastara probar que $A \subset \text{int}_X(A)$. Sea $a \in A$. Como A es abierto de X, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Entonces, $a \in \text{int}_X(A)$. Por lo tanto, $A = \text{int}_X(A)$. La suficiencia es inmediata del inciso (b).

(d) Sea $x \in \text{int}_X(A)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A \subset B$. De esto, $x \in \text{int}_X(B)$. Por lo tanto, $\text{int}_X(A) \subset \text{int}_X(B)$.

(e) Por el inciso (d), tenemos que $\text{int}_X(B) \subset \text{int}_X(A)$. Como B es abierto de X, por el inciso (b), sabemos que $B = \text{int}_X(B)$. Por lo tanto $B \subset \text{int}_X(A)$.

(f) Sea $\mathcal{U} = \{U \subset A : U \text{ es abierto de } X\}$. Claramente $\bigcup \mathcal{U} \subset A$. Además, por el teorema 2.18 (a), sabemos que $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto de X. Por el inciso (e), tenemos que $\bigcup \mathcal{U} \subset \text{int}_X(A)$. Por otro lado, dado $x \in \text{int}_X(A)$, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Como $B(x, r)$ es abierto de X, tenemos que $B(x, r) \in \mathcal{U}$. En consecuencia, $x \in B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\text{int}_X(A) \subset \bigcup \mathcal{U}$. Concluimos la prueba.

(g) Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, por el inciso (d), se cumple que $\text{int}_X(A \cap B) \subset \text{int}_X(A) \cap \text{int}_X(B)$. Por otro lado, sabemos por el inciso (a), $\text{int}_X(A) \cap \text{int}_X(B) \subset A \cap B$. Como $\text{int}_X(A) \cap \text{int}_X(B)$ es abierto de X, por el inciso (e), tenemos que $\text{int}_X(A) \cap \text{int}_X(B) \subset \text{int}_X(A \cap B)$.

(h) Por el inciso (d) es claro este resultado.

$\square$

Teorema 2.28. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces

(a) $X \setminus \text{int}_X(A) = \text{cl}_X(X \setminus A)$,

(b) $X \setminus \text{cl}_X(A) = \text{int}_X(X \setminus A)$.

Demostración. (a). Sea $x \in X \setminus \mathrm{int}_X(A)$. Entonces $x \notin \mathrm{int}_X(A)$, es decir, para cada $r > 0$, $B(x,r) \not\subset A$. Luego, para cada $r > 0$, $B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Así, $x \in \mathrm{cl}_X(X \setminus A)$. Por lo tanto, $X \setminus \mathrm{int}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(X \setminus A)$. Tomando los argumentos recíprocos llegamos a que $\mathrm{cl}_X(X \setminus A) \subset X \setminus \mathrm{int}_X(A)$.

(b). Sea $B = X \setminus A$. Por el inciso (a), sabemos que

$$X \setminus \mathrm{int}_X(B) = \mathrm{cl}_X(X \setminus B).$$

Tomando complemento de ambos lados, $\mathrm{int}_X(B) = X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus B)$. Como $B = X \setminus A$, concluimos que $X \setminus \mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{int}_X(X \setminus A)$. □

Teorema 2.29. Si X es un espacio métrico y $F, G \subset X$, entonces

(a) $F \subset \mathrm{cl}_X(F)$,

(b) $\mathrm{cl}_X(F)$ es cerrado de X,

(c) F es cerrado de X si y sólo si $F = \mathrm{cl}_X(F)$,

(d) $F \subset G$ implica que $\mathrm{cl}_X(F) \subset \mathrm{cl}_X(G)$,

(e) si G es cerrado de X y $F \subset G$, entonces $\mathrm{cl}_X(F) \subset G$,

(f) $\mathrm{cl}_X(F)$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a F,

(g) $\mathrm{cl}_X(F \cup G) = \mathrm{cl}_X(F) \cup \mathrm{cl}_X(G)$,

(h) $\mathrm{cl}_X(F \cap G) \subset \mathrm{cl}_X(F) \cap \mathrm{cl}_X(G)$.

Demostración. (a) Claramente se cumple.

(b) Por el teorema 2.27 (b), sabemos que $\mathrm{int}_X(X \setminus F)$ es abierto de X. Luego, por el teorema 2.28 (b), tenemos que $X \setminus \mathrm{cl}_X(F)$ es abierto de X. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(F)$ es cerrado de X.

(c) Supongamos que F es cerrado de X. Entonces $X \setminus F$ es abierto de X. Luego, por el teorema 2.27 (c), sabemos que $X \setminus F = \mathrm{int}_X(X \setminus F)$. Usando el teorema 2.28 (b), concluimos que $X \setminus F = X \setminus \mathrm{cl}_X(F)$. Por lo tanto, $F = \mathrm{cl}_X(F)$. La suficiencia es inmediata del inciso (b).

□

Los demás incisos quedan como ejercicio para el lector.

Otro concepto topológico importante es el derivado de un conjunto.

Definición 2.30. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. El **derivado** de A, denotado por A', es el conjunto

$$A' = \{x \in X : \text{para cada } r > 0, \text{ se tiene que } (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A los elementos del derivado de A les llamamos **puntos límite** de A, o **puntos de acumulación** de A.

El punto x es un **punto aislado** de A si $x \in A \setminus A'$.

Teorema 2.31. Sea X un espacio métrico y $A, B \subset X$. Entonces

(a) $A' \subset \mathrm{cl}_X(A)$,

(b) A' es cerrado de X,

(c) $\mathrm{cl}_X(A) = A' \cup A$,

(d) A es cerrado de X si y sólo si $A' \subset A$,

(e) si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$.

(f) $\mathrm{cl}_X(A)' = A'$.

Demostración. (a) Por la definición de A' y $\mathrm{cl}_X(A)$ es claro.

(b) Por el teorema 2.29 (a), sabemos que $A' \subset \mathrm{cl}_X(A')$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(A')$. Veamos que $x \in A'$. Para esto sea $r > 0$. Sabemos que $B\left(x, \frac{r}{2}\right) \cap A' \neq \emptyset$. Así, existe $y \in A'$ tal que $d(y,x) < \frac{r}{2}$. Si $x = y$, entonces $x \in A'$, obteniendo lo que deseamos. Supongamos que $x \neq y$. Entonces $\delta = d(y,x) > 0$. Como $y \in A'$, existe $z \in (B(y,\delta) \setminus \{y\}) \cap A$. Notemos que $z \neq x$. Más aún,

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) = 2d(y,x) < r.$$

De esto, $z \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$. Así, $x \in A'$. Por lo tanto, $A' = \mathrm{cl}_X(A')$. Por el teorema 2.29 (c), concluimos que A' es cerrado de X.

(c) Por el inciso (a) y el teorema 2.29 (a), tenemos que $A' \cup A \subset \mathrm{cl}_X(A)$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Supongamos que $x \notin A \cup A'$. Entonces $x \in X \setminus A$ y existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \setminus \{x\} \subset X \setminus A$. Luego, $B(x,r) \subset X \setminus A$, o bien, $B(x,r) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice que $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. De esto, $x \in A \cup A'$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(A) = A' \cup A$.

(d) Usando el teorema 2.29 (c) y el inciso (c), obtenemos inmediatamente el resultado. Por la definición de conjunto derivado es claro que ocurre (e).

(f) Por el teorema 2.29 (a) y el inciso (e), tenemos que $A' \subset \mathrm{cl}_X(A)'$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(A)'$. Veamos que $x \in A'$. Para esto sea $r > 0$. Sabemos que $\left(B\left(x, \frac{r}{2}\right) \setminus \{x\}\right) \cap \mathrm{cl}_X(A) \neq \emptyset$. Así, existe $y \in cl_X(A)$ tal que $0 < d(y,x) < \frac{r}{2}$. Sea $\delta = d(y,x) > 0$. Como $y \in \mathrm{cl}_X(A)$, existe $z \in B(y,\delta) \cap A$. Notemos que $z \neq x$. Más aún,

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) = 2d(y,x) < r.$$

De esto, $z \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$. Así, $x \in A'$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(A)' \subset A'$. $\square$

La frontera de un conjunto es fundamental al revisar la topología de un conjunto; veamos a continuación su definición y las propiedades importantes de este conjunto.

Definición 2.32. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, la **frontera** de A en X, denotada por $\mathrm{fr}_X(A)$, es el conjunto

$$\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus A),$$

es decir,

$$\mathrm{fr}_X(A) = \{x \in X : \text{para cada } r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

Teorema 2.33. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces:

(a) $\mathrm{fr}_X(A)$ es cerrado de X,

(b) $\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{fr}_X(X \setminus A)$,

(c) $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{fr}_X(A) = \emptyset$,

(d) $\mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{fr}_X(A)$,

(e) $X = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{fr}_X(A) \cup \mathrm{int}_X(X \setminus A)$,

(f) A es cerrado de X si y sólo si $\mathrm{fr}_X(A) \subset A$.

Demostración. (a). Como $\mathrm{fr}_X(A)$ es la intersección de cerrados, por el teorema 2.25, tenemos que $\mathrm{fr}_X(A)$ es un conjunto cerrado de X.

Por la definición de frontera es obvio (b).

(c). Notemos que $\mathrm{fr}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(X \setminus A)$. Luego, por el teorema 2.28 (a), tenemos que $\mathrm{fr}_X(A) \subset X \setminus \mathrm{int}_X(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_X(A) \cap \mathrm{fr}_X(A) = \emptyset$.

(d) Usando que $\mathrm{int}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(A)$ y el teorema 2.28 (a), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{fr}_X(A) &= \mathrm{int}_X(A) \cup [\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus A)] \\
&= (\mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(A)) \cap (\mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(X \setminus A)) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{int}_X(A) \cup (X \setminus \mathrm{int}_X(A))) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap X \\
&= \mathrm{cl}_X(A).
\end{aligned}$$

(e) Usando el inciso (d) y el teorema 2.28 (b), el resultado es inmediato.

(f) Por el teorema 2.29 (c) y el inciso (d) es claro que se cumple esta equivalencia. □

Ejemplo 2.34. Los siguientes son ejemplos del interior, la cerradura, el derivado y la frontera de algunos conjuntos

1. Si X es un espacio métrico discreto y $x \in X$, entonces $\mathrm{int}_X(\{x\}) = \{x\}$ y $\mathrm{cl}_X(\{x\}) = \{x\}$.

   Por otro lado, $\{x\}' = \emptyset$ y $\mathrm{fr}_X(\{x\}) = \emptyset$.

2. En $(\mathbb{R}, |\ |)$, $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, porque si $x \in \mathbb{Q}$, para toda $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$, ya que existen números irracionales en el intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

   Además, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Es claro que $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$. Ahora, para verificar la otra contención, obsérvese que si $x \in \mathbb{R}$, para toda $\varepsilon > 0$, $\dot{B}(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, es decir, $x \in \mathbb{Q}'$.

Tenemos que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, ya que $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Obsérvese que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado de $\mathbb{R}$.

3. Consideremos ahora $\mathbb{R}$ con la métrica discreta. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}, \\ \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}, \\ \mathbb{Q}' &= \emptyset, \\ \mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Para finalizar este capítulo, veamos como se calcula la distancia de un punto a un conjunto y la distancia de un conjunto a otro conjunto.

Definición 2.35. Sean (X, d) un espacio métrico, A, B subconjuntos no vacíos de X y $x_0 \in X$.

(a) La **distancia** de x_0 a A es

$$d(x_0, A) = \text{ínf}\{d(x_0, x) : x \in A\},$$

(b) La **distancia** de A a B es

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Observación 2.36. Sea $A = [0, 1/2]$ un subconjunto del espacio métrico $[0, 1]$ con la topología euclidiana. Queremos demostrar que $\mathrm{int}_{[0,1]}(A) = [0, 1/2)$.

Demostración. Recordemos que el interior de A en $X = [0, 1]$ está dado por:

$$\mathrm{int}_X(A) = \{x \in A\colon \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(x) \cap [0, 1] \subset [0, 1/2]\}.$$

Analicemos los puntos por casos:

1. **Caso** $x = 0$**:** Consideremos el punto 0. Notemos que para cualquier $0 < \epsilon < 1/2$, la bola abierta en el espacio relativo es:

$$B_\epsilon(0) \cap [0, 1] = [0, \epsilon).$$

Como $[0, \epsilon) \subset [0, 1/2]$, el punto 0 es un punto interior en el espacio relativo $[0, 1]$. Por lo tanto, $0 \in \mathrm{int}_{[0,1]}(A)$.

2. **Caso $0 < x < 1/2$:** Para cualquier punto en el intervalo abierto, existe $\epsilon = \text{mín}\{x, 1/2 - x\} > 0$. Entonces:

$$B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset [0, 1/2]$$

Por lo tanto, $(0, 1/2) \subset \text{int}_{[0,1]}(A)$.

3. **Caso $x = 1/2$:** Para cualquier $\epsilon > 0$, la bola $B_\epsilon(1/2) \cap [0, 1]$ contiene puntos de la forma $1/2 + \delta$ (donde $\delta < \epsilon$). Dichos puntos no pertenecen a $[0, 1/2]$. Por lo tanto, no existe ninguna bola abierta alrededor de $1/2$ contenida en A. Así, $1/2 \notin \text{int}_{[0,1]}(A)$.

$\square$

Topología Relativa: Es crucial especificar que el interior es respecto a $[0, 1]$. Si el interior fuera respecto a $\mathbb{R}$, el punto 0 no sería un punto interior, y el resultado sería $(0, 1/2)$. Como el espacio ambiente «termina» en 0, la "bola" alrededor de 0 sólo se extiende hacia la derecha, lo que permite que sea un punto interior en este contexto específico.

2.6 Ejercicios

1. Sean X un espacio métrico con métrica d y A, B subconjuntos no vacíos de X y $x_0 \in X$. Demuestre que:

   (a) Si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$,

   (b) No siempre $d(x_0, A) = 0$ implica que $x_0 \in A$,

   (c) $d(x_0, A) = 0$ si y sólo si $x_0 \in \text{cl}_X(A)$,

   (d) $d(A, B) = d(\text{cl}_X(A), \text{cl}_X(B))$,

   (e) $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, B) : a \in A\} = \text{ínf}\{d(b, A) : b \in B\}$,

   (f) $A \cap B \neq \emptyset$ implica que $d(A, B) = 0$,

   (g) No siempre $d(A, B) = 0$ implica que $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Sean X un espacio métrico y A, B subconjuntos de X. Dar un ejemplo en el cual $\text{int}_X(A) \cup \text{int}_X(B) \neq \text{int}_X(A \cup B)$.

3. Sea (X, d) un espacio métrico. Considere la función $\hat{d} : X \times X \to [0, \infty)$ definida, para cada $(x, y) \in X \times X$, por $\hat{d}(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Demuestre que $\hat{d}$ es una métrica para X y que d y $\hat{d}$ son métricas equivalentes.

4. Sean X un espacio métrico y A, B subconjuntos de X. Dar una condición para la cual $\mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{int}_X(B) = \mathrm{int}_X(A \cup B)$.

5. Dar un ejemplo de una familia $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de cerrados en un espacio métrico X cuya unión no es un cerrado de X.

6. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. ¿Será cierto que $(\mathrm{cl}_X(A')) = A'$? Véase (b) y (f) del teorema 2.31.

7. Considérese $(\mathbb{R}, |\ |)$. Verifique lo siguiente:

   (a) Si $S = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, entonces

      (i) $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(S) = \emptyset$,

      (ii) $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(S) = S \cup \{0\}$,

      (iii) $S' = \{0\}$,

      (iv) $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}}(S) = S \cup \{0\}$.

   (b) Si $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$, entonces $(A')' = \{0\}$ y $((A')')' = \emptyset$.

   (c) Pruebe la existencia de un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(F) = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(F) = \mathbb{R}$.

   (d) Si $E \subset \mathbb{R}$, con $E \neq \emptyset$, E acotado y $y = \sup E$ implica que $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(E)$.

8. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Demostrar que $\mathrm{fr}_X(A) = \mathrm{cl}_X(A) \setminus \mathrm{int}_X(A)$.

9. Demostrar que un conjunto no vacío en un espacio métrico X es abierto si y sólo si es la unión de una familia de bolas abiertas.

10. Demostrar que todo conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es la intersección de una familia a lo más numerable de conjuntos abiertos.

11. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico X.

(a) ¿Es cierto que:

  (i) $\mathrm{fr}_X(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{fr}_X(A)$,
  (ii) $\mathrm{fr}_X(\mathrm{int}_X(A)) \subset \mathrm{fr}_X(A)$,
  (iii) $\mathrm{fr}_X(A \cup B) \subset \mathrm{fr}_X(A) \cup \mathrm{fr}_X(B)$?

(b) Probar que si $\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}_X(A \cup B) = \mathrm{fr}_X(A) \cup \mathrm{fr}_X(B)$.

(c) Demostrar que $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ y $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(d) Probar que si A es abierto de X, entonces $A \cap \mathrm{cl}_X(B) \subset \mathrm{cl}_X(A \cap B)$.

(e) Demostrar que si A es abierto de X y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(B) = \mathrm{cl}_X(A \cap B)$.

(f) Sea A un conjunto abierto de X. Probar que $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$

(g) ¿Son ciertos los dos resultados anteriores si no se supone A abierto?

(h) Definamos $\alpha(A) = \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A))$ y $\beta(A) = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(A))$.

  (i) ¿Es cierto que $\alpha(A) = \beta(A)$?
  (ii) Si A es abierto, entonces $A \subset \alpha(A)$.
  (iii) Si A es cerrado, entonces $\beta(A) \subset A$.
  (iv) ¿Es cierto que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$? y ¿$\beta(\beta(A)) = \beta(A)$?
  (v) Encuentre un espacio métrico X y un subconjunto $A \subset X$ tales que los siguientes conjuntos sean diferentes dos a dos:

$$A,\ \mathrm{int}_X(A),\ \mathrm{cl}_X(A),\ \alpha(A),\ \beta(A),\ \alpha(\mathrm{int}_X(A)),\ \beta(\mathrm{cl}_X(A)).$$

12. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

(a) Si A es finito, entonces $A' = \emptyset$.

(b) Si $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y A no es numerable, entonces su derivado $A' \neq \emptyset$.

(c) Si $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y A' es numerable, entonces A es numerable.

(d) Si A es numerable, entonces A' es numerable.

(e) Si $A' = \emptyset$, entonces A es finito.

13. Propiedad de Hausdorff: Sean X un espacio métrico y $F \subset A \subset X$. Demostrar que F es cerrado de A si y sólo si existe G cerrado de X tal que $F = G \cap A$.

14. Sean Y un subespacio métrico de X y V un subconjunto propio de Y. Demostrar que si V es abierto de Y, entonces $Y \setminus V = \mathrm{cl}_X(Y \setminus V) \cap Y = \mathrm{cl}_X(X \setminus V) \cap Y$.

15. Sean X un espacio métrico, Y un subespacio de X y $A \subset Y$. Probar que:

    (a) $\mathrm{int}_X(A) \cap Y \subset \mathrm{int}_Y(A)$.

    (b) Si Y es abierto de X, entonces $\mathrm{int}_X(A) \cap Y = \mathrm{int}_Y(A)$.

    (c) $\mathrm{int}_Y(A) = (X \setminus \mathrm{cl}_X(Y \setminus A)) \cap Y$.

    (d) $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$.

16. Sea X un espacio métrico. Demostrar que si $x_1, x_2 \in X$, entonces existen conjuntos abiertos U_{x_1}, U_{x_2} de X, ajenos tales que $x_1 \in U_{x_1}$ y $x_2 \in U_{x_2}$.

17. Demostrar el teorema 2.25.

18. Demostrar los incisos (d), (e), (f), (g) y (h) del teorema 2.29.

Espacios métricos, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-2637-10-8

Capítulo 3

Espacios métricos compactos y conexos

3.1 Compacidad

Otro concepto topológico relacionado con los espacios métricos es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956), el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene una subcubierta finita. En 1903, Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio Euclidiano. La definición actual esencialmente se debe a P. S. Aleksandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

Definición 3.1. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de X.

(a) Decimos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta** de X si $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Si además cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto de X, decimos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta** de X.

(b) Una **subcubierta** de $\mathcal{U}$ es un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ que también es una cubierta de X. Si $\mathcal{V}$ es un conjunto finito, decimos que $\mathcal{V}$ es una subcubierta finita .

(c) El espacio métrico X es **compacto** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Proposición 3.2.

1. Todo espacio métrico finito es compacto.
2. El conjunto $\mathbb{R}$ no es compacto.
3. El conjunto $Y = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es compacto.

4. El conjunto $(0,1)$ no es compacto pero $[0,1]$ sí lo es.

Demostración. Veamos que las afirmaciones anteriores son verdaderas.

1. Sean X un conjunto finito y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de X. Como X es finito, tenemos que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dado que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in U_i$. Sea $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}$. Notemos que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Así, $\mathcal{V}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, X es compacto.

3. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in U_0$. Como U_0 es abierto de Y, existe $r > 0$ tal que $(-r, r) \cap Y \subset U_0$. Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$. Así, para cada $n \geq N$, tenemos que $\frac{1}{n} \in (-r, r) \cap Y$. Luego, $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \geq N\right\} \subset U_0$. Por otro lado, para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_n$. Sea $\mathcal{V} = \{U_0, U_1, \ldots, U_{N-1}\}$. Notemos que $Y \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N-1} U_i$. Así, $\mathcal{V}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, Y es compacto.

4. Mostraremos primero que $(0,1)$ no es compacto. Para esto, sea

$$\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $(0,1)$. Sea $x \in (0,1)$. Como $x > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $\frac{1}{N} < x$. Luego, $\frac{1}{N} < x < 1$, es decir, $x \in \left(\frac{1}{N}, 1\right)$. Por lo tanto, $(0,1) \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Así, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $(0,1)$.

Ahora, sea $\mathcal{V} = \left\{\left(\frac{1}{n_1}, 1\right), \ldots, \left(\frac{1}{n_m}, 1\right)\right\}$. Notemos que $\mathcal{V}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$. Tomando a $k = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$, tenemos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se cumple que $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{n_i}$. Así, $\frac{1}{k+1} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n_i}, 1\right)$ y

$\frac{1}{k+1} \in (0,1)$. Luego, $\mathcal{V}$ no es una cubierta de $(0,1)$. Así, $\mathcal{U}$ no admite una subcubierta finita. Por lo tanto, $(0,1)$ no es compacto.

Para probar que $[0,1]$ es compacto. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de $[0,1]$. Sea

$$A = \{x \in [0,1] \colon [0,x] \textit{ tiene una subcubierta finita de } \mathcal{U}\}.$$

Notemos que existe $V_0 \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in V_0$, es decir, $[0,0] \subset V_0$, de ahí que $0 \in A$, por lo anterior $A \neq \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$ y $A \subset [0,1]$ (ya que todo $x \in A$ cumple que $x \in [0,1]$), A está acotado superiormente, donde 1 es una cota superior de A (dado que 1 es cota superior de $[0,1]$). Además, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $[0,\epsilon_1) \subset V_0$, entonces $(0,\epsilon_1) \subset A$. Sea $p = \sup(A)$ que cumple que $p > 0$, de ahí que $p \in (0,1]$. Como $p \in (0,1]$ entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $p \in V$, de ahí que existe $\epsilon_2 > 0$ donde $(p-\epsilon_2, p) \subset V$ y existe $x \in (p-\epsilon_2, p)$ tal que $x \in A$, es decir, existen $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ tales que $[0,x] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$.

Como $x \in (p-\epsilon_2, p) \subset V$ entonces $x \in V$, de ahí que $[0,x] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup V$, pero $p \in V$, así, $[0,p] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup V$, que es la unión de un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. De lo anterior podemos asegurar que $p \in A$. Notemos que $0 < p \leq 1$, entonces $p < 1$ o $p = 1$. Supongamos que $p < 1$. Si ocurre esto existe $\epsilon_3 > 0$ tal que $(p, p+\epsilon_3) \subset V$ y $p + \epsilon_3 < 1$, de ahí que $\frac{2p+\epsilon_3}{2} \in (p, p+\epsilon_3] \subset V$, donde $(p, \frac{2p+\epsilon_3}{2}] \subset V$. Entonces

$$\left[0, \frac{2p+\epsilon_3}{2}\right] = [0,p] \cup \left(p, \frac{2p+\epsilon_3}{2}\right] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup V.$$

Es decir, $\frac{2p+\epsilon_3}{2} \in A$, pero $\frac{2p+\epsilon_3}{2} > p = \sup(A)$. Luego, $\frac{2p+\epsilon_3}{2} \notin A$. Por lo tanto $p = 1$. Como $p = 1$ $[0,1] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k \cup V$, donde $\{U_1, \ldots, U_k, V\} \subset \mathcal{U}$ es un conjunto finito. De lo anterior, $[0,1]$ es subconjunto de una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $[0,1]$ es compacto.

El inciso 2 queda como un ejercicio para el lector. □

Teorema 3.3. Sea Y un subespacio métrico de X y $K \subset Y$. Entonces K es compacto en Y si y sólo si K es compacto en X.

Demostración. $(\Rightarrow)$. Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de K en X. Para todo $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $V_\lambda \cap Y$ es un abierto de Y. Luego,

$$K \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \right) \cap Y = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap Y).$$

Así, $\{V_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de K en Y. Como K es compacto en Y, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (V_{\lambda_i} \cap Y) = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} \right) \cap Y$. Por lo tanto, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$, concluyéndose que K es compacto en X.

Queda como ejercicio para el lector probar la afirmación recíproca. □

La demostración del teorema 3.4, conocido como **propiedad de Hausdorff**, queda como un ejercicio para el lector:

Teorema 3.4. Si X es un espacio métrico y $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Todo compacto es cerrado:

Teorema 3.5. Sea X un espacio métrico. Si $K \subset X$ y K es compacto, entonces K es cerrado de X.

Demostración. Veamos que $X \setminus K$ es abierto de X. Sea $x \in X \setminus K$. Dado $y \in K$, por el teorema 3.4, existen conjuntos abiertos U_y y V_y de X, ajenos, tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$. Como

$$K \subset \bigcup_{y \in K} V_y,$$

por la compacidad de K, existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Sea $W = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Como $V_{y_i} \cap W \subset V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$, tenemos que

$$K \cap W \subset (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) \cap W = (V_{y_1} \cap W) \cup \cdots \cup (V_{y_n} \cap W) = \emptyset.$$

Así, $W \subset X \setminus K$. Como $x \in W$ y W es un abierto de X, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset W$. Luego, $B(x, r) \subset X \setminus K$. Por lo tanto, $X \setminus K$ es abierto de X. Por la definición 2.23, tenemos que K es cerrado de X. □

El hecho de que K sea cerrado no implica que sea compacto. Por ejemplo $\mathbb{R}$ es cerrado de $\mathbb{R}$ y no es compacto.

La compacidad se hereda a los conjuntos cerrados:

Teorema 3.6. Sean X un espacio métrico y $F, K \subset X$. Si $F \subset K$, con F cerrado (en X o en K) y K es compacto, entonces F es compacto.

Demostración. Sean X un espacio métrico, F un conjunto cerrado de X y K un conjunto compacto tal que $F \subset K \subset X$. Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta en X de F. Como F es cerrado de X, su complemento $X \setminus F$ es abierto de X. Luego, $K \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \cup (X \setminus F)$. Como K es compacto, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} \cup (X \setminus F)$. Así, $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$, por lo tanto F es compacto. $\square$

La demostración del corolario 3.7 se queda como ejercicio para el lector.

Corolario 3.7. Sean F y K subconjuntos de un espacio métrico X. Si K es compacto y F es cerrado de X, entonces $F \cap K$ es compacto.

Teorema 3.8. Sea $\mathcal{F} = \{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de conjuntos compactos en X. Si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita (toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía), entonces

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \neq \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda = \emptyset$. Sea $K_1 \in \mathcal{F}$. Entonces $K_1 \cap \left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}} K_\lambda\right) = \emptyset$. Sea $x \in K_1$. Tenemos que $x \in X \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}} K_\lambda$, es decir, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}} (X \setminus K_\lambda)$. Por lo tanto, $K_1 \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}} (X \setminus K_\lambda)$. Obsérvese que $\{X \setminus K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1\}}$ es una cubierta abierta de K_1. Como K_1 es compacto, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ tales que

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} (X \setminus K_{\lambda_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{m} K_{\lambda_i},$$

por lo que $K_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_{\lambda_i} \right) = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tiene la propiedad de intersección finita. Así, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$. $\square$

Definición 3.9. Sean X un espacio métrico con métrica d y $A \subset X$, con $A \neq \emptyset$. El conjunto A es **acotado** si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in A$, se tiene que $d(x, y) \leq k$.

Observación 3.10. Toda bola abierta es un conjunto acotado. Para ver esto, sean X un espacio métrico con métrica d, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. Tenemos que $B(x, r)$ es un conjunto acotado porque para cualesquiera $p, q \in B(x, r)$, tenemos que $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < r + r$.

Teorema 3.11. Sean A y B subconjuntos no vacíos de un espacio métrico X. Entonces se satisface lo siguiente:

(a) Si B es acotado y $A \subset B$, entonces A es acotado.

(b) A es acotado si y sólo si existe el supremo de $\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

(c) Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado.

(d) La unión finita de conjuntos acotados es acotada.

Demostración. (a) Es claro que es cierto.

(b) Es claro que es cierto.

(c) Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como A y B son acotados, por el inciso (b), existen $k_1 = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ y $k_2 = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$. Definimos a $k = k_1 + d(a, b) + k_2$. Sean $x, y \in A \cup B$. Si $x, y \in A$ o $x, y \in B$ es claro que $d(x, y) \leq k$. Supongamos que $x \in A$ y $y \in B$. Entonces

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq k_1 + d(a, b) + k_2 = k.$$

Por lo tanto, $A \cup B$ es acotado.

(d) Usando indución matemática y el inciso (c) claramente concluimos.

$\square$

Definición 3.12. Sean X un espacio métrico con métrica d y A un subconjunto acotado de X. El **diámetro** de A, denotado por diám(A), es

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

Teorema 3.13. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$ no vacío. Entonces A es acotado si y sólo si existen $p \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(p,r)$.

Demostración. ($\Leftarrow$). Como $B(p,r)$ es acotado, por el teorema 3.11, inciso (a), tenemos que A es acotado.

($\Rightarrow$). Supongamos que A es acotado. Sea $p \in A$ y $r = \text{diám}(A) + 1$. Dado $a \in A$, sabemos que $d(a,p) \leq \text{diám}(A)$. Luego, $d(a,p) < r$, o bien, $a \in B(p,r)$. Por lo tanto, $A \subset B(p,r)$. □

Teorema 3.14. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es acotado, entonces $\text{diám}(\text{cl}_X(A)) = \text{diám}(A)$.

Demostración. Sea $r > 0$. Dados $p, q \in \text{cl}_X(A)$, existen $a_p \in B\left(p, \frac{r}{2}\right) \cap A$ y $a_q \in B\left(q, \frac{r}{2}\right) \cap A$. Luego,

$$d_X(p,q) \leq d_X(p,a_p) + d_X(a_p,a_q) + d_X(a_q,q) < \frac{r}{2} + \text{diám}(A) + \frac{r}{2} = r + \text{diám}(A).$$

De esto, $\text{cl}_X(A)$ es acotado, más aún, $\text{diám}(\text{cl}_X(A)) \leq r + \text{diám}(A)$. Como $A \subset \text{cl}_X(A)$, es claro que $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(\text{cl}_X(A))$. Así, para cada $r > 0$, $0 \leq \text{diám}(\text{cl}_X(A)) - \text{diám}(A) \leq r$. Por lo tanto, $\text{diám}(\text{cl}_X(A)) = \text{diám}(A)$. □

Definición 3.15. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es **precompacto** o **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset B(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_n, \varepsilon)$.

Proposición 3.16.

1. Si A es un subconjunto compacto, no vacío, de un espacio métrico X, entonces A es precompacto.

2. Todo conjunto finito es precompacto.

3. El hecho de que A sea precompacto no implica que A sea finito. Por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ es precompacto pero no finito.

4. Cualquier intervalo (a, b) es precompacto.

5. Si X es discreto y A es subconjunto de X que es precompacto, entonces A es finito.

Demostración. Veamos el inciso 1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ y A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i, \varepsilon)$.

Ahora, veamos el inciso 5, para esto sea $\varepsilon = 1$. Existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i, \varepsilon) = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Por lo tanto, A es finito.

Los incisos 2, 3 y 4 quedan como ejercicio para el lector. □

Notemos que de los incisos 2 y 5 tenemos que en un espacio métrico discreto X, un subconjunto A de X es precompacto si y sólo si A es finito.

Teorema 3.17. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es precompacto, entonces A es acotado (en particular, los espacios métricos compactos son acotados).

Demostración. Como A es preocompacto, para $\varepsilon = 1$, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset B(a_1, 1) \cup \cdots \cup B(a_n, 1)$. Sabemos que cada $B(a_i, 1)$ es acotado y la unión finita de acotados es acotada. Así, A es subconjunto de un conjunto acotado. Por el teorema 3.11, inciso (a), concluimos que A es acotado. □

Observación 3.18. El hecho de que un conjunto A sea acotado no implica que sea precompacto. Por ejemplo, si X es un espacio métrico discreto e infinito y A es un subconjunto de X que es infinito, tenemos que $\sup\{D(a, b) : a, b \in A\} = \sup\{0, 1\} = 1$. Luego, por el teorema 3.11, inciso (b), el conjunto A es acotado. Además, por la Proposición 3.16, inciso 5, tenemos que A no es precompacto.

La precompacidad es una propiedad hereditaria:

Teorema 3.19. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto precompacto de X. Si B es un subconjunto no vacío de A, entonces B es precompacto.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es precompacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset B\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Salvo reordenamiento, podemos suponer que $B\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right), \ldots, B\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ son las únicas bolas que intersecan a B, para algún $m \leq n$. Notemos que $B \subset B\left(a_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Sea $b_i \in B \cap B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, para cada $i \leq m$. Veamos que

$$B \subset B(b_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(b_m, \varepsilon).$$

Sea $b \in B$. Entonces existe $i \leq m$ tal que $b \in B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Así,

$$d_X(b, b_i) \leq d_X(b, a_i) + d_X(a_i, b_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $b \in B(b_i, \varepsilon)$. Concluimos que $B \subset B(b_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(b_m, \varepsilon)$. Por lo tanto, B es precompacto. $\square$

Ahora hablemos de conjuntos densos y espacios métricos separables, para esto tenemos las siguientes definiciones y ejemplos.

Definición 3.20. Sea X un espacio métrico. Un conjunto A contenido en X es **denso** en X si $\text{cl}_X(A) = X$.

Ejemplo 3.21. Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$ (verifíquelo).

Definición 3.22. Un espacio métrico X es **separable** si contiene un conjunto denso en X y numerable.

Observación 3.23. Un subespacio A de un espacio métrico X es separable si y sólo si contiene un conjunto $S \subset A$ numerable tal que $A \subset \text{cl}_X(S)$.

Observación 3.24. Si A es un subespacio del espacio métrico X, $S \subset A$ y $A \subset \text{cl}_X(S)$, entonces $\text{cl}_X(A) = \text{cl}_X(S)$.

Ejemplo 3.25. El espacio métrico $\mathbb{R}$ es separable porque $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.26. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es separable, entonces toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta numerable.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Como A es separable, existe un subconjunto numerable S de A tal que $A \subset \mathrm{cl}_X(S)$. Supongamos que $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Sea $H = \left\{B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) : x_n \in S, m \in \mathbb{N}\right\}$. Este conjunto es infinito numerable (probarlo), por lo que podemos escribir $H = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A, y cada B_n tiene radios suficientemente pequeños, el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : \text{existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } B_n \subset U\}$ es no vacío. Notemos que M es numerable. Para toda $n \in M$, sea $U_n \in \{U \in \mathcal{U} : B_n \subset U\}$. Demostraremos que $\{U_n\}_{n\in M}$ es una cubierta abierta de A.

Sea $x \in A$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Además, hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in \mathrm{cl}_X(S)$, tenemos que $B\left(x, \frac{1}{m}\right) \cap S \neq \emptyset$. Así, sea $x_k \in B\left(x, \frac{1}{m}\right) \cap S$. Luego, $x \in B(x_k, \frac{1}{m})$, con $x_k \in S$. Denotaremos por B_k a $B\left(x_k, \frac{1}{m}\right)$.

Se mostrará que $k \in M$. Sea $y \in B_k$. Entonces

$$
\begin{aligned}
d_X(x,y) &\leq d_X(y,x_k) + d_X(x_k,x) \\
&< \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\
&= \frac{2}{m} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Así, $y \in B(x, \varepsilon)$, por lo que $B_k \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. Luego, $k \in M$ y por lo tanto $\{U_n\}_{n\in M}$ es una cubierta abierta de A. De hecho, $\{U_n\}_{n\in M}$ es una subcubierta numerable de A. □

Teorema 3.27. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico X y toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta numerable, entonces A es separable.

Demostración. La demostración es un ejercicio al lector. □

Teorema 3.28. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es precompacto entonces A es separable.

Demostración. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto precompacto de X. Tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, existen $a_1^m, \ldots, a_{n_m}^m \in A$ tales que $A \subset B\left(a_1^m, \dfrac{1}{m}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_{n_m}^m, \dfrac{1}{m}\right)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $S_m = \{a_1^m, \ldots, a_{n_m}^m\}$. Consideremos

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m.$$

Notemos que S es numerable. Veamos que $A \subset \mathrm{cl}_X(S)$. Sean $a \in A$ y $r > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{M} < r$. Como $A \subset B\left(a_1^M, \dfrac{1}{M}\right) \cup \cdots \cup B\left(a_{n_M}^M, \dfrac{1}{M}\right)$, tenemos que $a \in B\left(a_j^M, \dfrac{1}{M}\right)$, para algún $j \in \{1, \ldots, n_M\}$. Luego, $d_X(a, a_j^M) < \dfrac{1}{M} < r$. Así, $a_j^M \in B(a, r) \cap S$. Luego, $a \in \mathrm{cl}_X(S)$. Por lo tanto, A es separable. $\square$

Definición 3.29. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto A de X es **relativamente compacto** si $\mathrm{cl}_X(A)$ es un compacto.

Proposición 3.30.

1. El intervalo $(0, 1)$ es relativamente compacto.

2. Todo compacto es relativamente compacto.

3. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico. Si B es relativamente compacto y $A \subset B$, entonces A es relativamente compacto.

Demostración. Verifiquemos la afirmación 3. Si $A \subset B$, entonces $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(B)$. Además, $\mathrm{cl}_X(B)$ es compacto y $\mathrm{cl}_X(A)$ es cerrado, por lo que $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto.

Los incisos 1 y 2 quedan como ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 3.31. Todo conjunto relativamente compacto es precompacto.

Demostración. Sea A un subconjunto relativamente compacto de X. Luego, $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto. Por el inciso 1 de la Proposición 3.16, tenemos que $\mathrm{cl}_X(A)$ es precompacto. Como $A \subset \mathrm{cl}_X(A)$, por el teorema 3.19, tenemos que A es precompacto. $\square$

Teorema 3.32. Sea X un espacio métrico. Si A es cerrado de X y relativamente compacto, entonces A es compacto.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Definición 3.33. Un subconjunto A de un espacio métrico X satisface la **propiedad de Bolzano-Weierstrass** (lo denotaremos por B-W), si todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A (es decir, para cualquier $T \subset A$, siendo T un conjunto infinito, se tiene que $T' \cap A \neq \emptyset$).

Teorema 3.34. Sea X un espacio métrico. Si A es un subconjunto de X con la propiedad Bolzano-Weierstrass, entonces A es precompacto.

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ tiene la propiedad B-W y que A no es precompacto. Luego, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$, se tiene que $A \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon_1)$.

Como $A \not\subset B(x_1, \varepsilon_1)$, existe $x_2 \in A \setminus B(x_1, \varepsilon_1)$. Pero $A \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon_1)$, por lo que existe $x_3 \in A \setminus \left[\bigcup\limits_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon_1)\right]$. Continuamos el proceso hasta tomar $x_n \in A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_1)$. Obsérvese que $d_X(x_i, x_j) \geq \varepsilon_1$.

Sea $L = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Tenemos que $L \subset A$ y L es infinito. Como A tiene la propiedad B-W, tenemos que $L' \cap A \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in L' \cap A$. En $B(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2})$ existe un número infinito de puntos de L (verifíquelo). Sean $x_i, x_j \in B(x_0, \frac{\varepsilon_1}{2}) \cap L$ tales que $d_X(x_i, x_j) \leq d_X(x_i, x_0) + d_X(x_j, x_0) < \varepsilon_1$. Pero $d_X(x_i, x_j) \geq \varepsilon_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A es precompacto. □

Teorema 3.35. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Tenemos que A es compacto si y sólo si A tiene la propiedad Bolzano-Weierstrass.

Demostración. Supongamos que A es compacto y que no tiene la propiedad B-W. Entonces existe un subconjunto infinito T de A tal que $T' \cap A = \emptyset$. Luego, para toda $x \in A$, se tiene que $x \notin T'$. Así, existe ε_x para el cual $[B(x, \varepsilon_x) \setminus \{x\}] \cap T = \emptyset$. Por lo tanto, $|B(x, \varepsilon_x) \cap T| \leq 1$.

Notemos que $A \subset \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon_x)$. Como A es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon_{x_i})$, así $T \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x, \varepsilon_x)$. Luego,

$$T = \left(\bigcup_{n=1}^{m} B(x, \varepsilon_x) \right) \cap T = \bigcup_{n=1}^{m} \left(B(x, \varepsilon_x) \cap T \right).$$

Como $T = \bigcup_{i=1}^{m} (B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \cap T)$, tenemos que T es la unión finita de conjuntos que tienen a lo más un punto. Entonces T tiene a lo más m elementos, lo cual contradice el hecho de que T sea infinito.

Supongamos ahora que A tiene la propiedad B-W. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Por el teorema 3.34, tenemos que A es precompacto. Por el teorema 3.28, tenemos que A es separable. Luego, por el teorema 3.26, tenemos que A tiene una subcubierta $\{B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots\}$ numerable de $\mathcal{U}$.

Mostraremos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $A \not\subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Sea $y_1 \in A$. Como $A \not\subset B_1$, tomamos $y_1 \in B_1$. Existe $y_2 \in A \setminus B_1$ y $A \not\subset B_1 \cup B_2$. Continuamos el proceso, tomando $y_n \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, y construimos el conjunto infinito $T = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \subset A$. Entonces, existe $y_0 \in T' \cap A$. Sea $y_0 \in B_m$. Entonces, B_m tiene una infinidad de elementos de T, porque $y_0 \in T'$. Existe $l > m$ tal que $y_l \in B_m$, pero $y_l \in A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_m \cup B_{m+1} \cup \cdots \cup B_{l-1})$. Por lo tanto, $y_l \notin B_m$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, concluyéndose que A es compacto. $\square$

Podemos resumir los conceptos hasta ahora estudiados con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{relativamente} & & \\ \text{B-W} & 3.34 & & & \\ & \searrow & \text{compacto} & & \\ \Updownarrow 3.35 & 3.16, 1 & \Downarrow 3.31 & 3.28 & \\ \text{compacto} & \Rightarrow & \text{precompacto} & \Rightarrow & \text{separable} \\ \Downarrow 3.5 & & \Downarrow 3.17 & & \\ \text{cerrado} & & \text{acotado} & & \end{array}$$

Definición 3.36. Sea $n \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $I_i = [a_i, b_i]$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Una n-**celda** es el producto cartesiano

$$\prod_{i=1}^{n} I_i.$$

$I_1 = [a_1, b_1]$
$I_1 \times I_2$
$[a, b] \cong [c, d]$
$(I_1 \times I_2) \cong (J_1 \times J_2) \cong C((0, 0), 1)$

Lema 3.37. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{\mathcal{A}_m : m \in \mathbb{N}\}$ una colección de n-celdas. Si para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{A}_{m+1} \subset \mathcal{A}_m$, entonces $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m \neq \emptyset$.

Demostración. Como cada $\mathcal{A}_m$ es una n-celda, sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\mathcal{A}_m = [a_1^m, b_1^m] \times \cdots \times [a_n^m, b_n^m].$$

Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $A_i = \{a_i^m : m \in \mathbb{N}\}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, sabemos que $\mathcal{A}_{m+1} \subset \mathcal{A}_m$. Así,

$$a_i^m \leq a_i^{m+1} < b_i^{m+1} \leq b_i^m.$$

De esto, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que b_i^m es cota superior de A_i. Sea $x_i = \sup A_i$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $a_i^m \leq x_i \leq b_i^m$, es decir, $x_i \in [a_i^m, b_i^m]$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in [a_1^m, b_1^m] \times \cdots \times [a_n^m, b_n^m]$. Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in \mathcal{A}_m$. $\square$

Teorema 3.38. Sea $n \in \mathbb{N}$. Toda n-celda es un conjunto compacto (con la métrica euclidiana).

Demostración. Sean $\mathcal{A}_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $2\delta = \text{diám}(\mathcal{A}_1)$. Para probar que $\mathcal{A}_1$ es compacto procedamos por contradicción. Para esto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathcal{A}_1$ que no admite subcubiertas finitas. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $c_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$. Notemos que los intervalos $[a_i, c_i]$ y $[c_i, b_i]$ determinan 2^n n-celdas cuya unión es $\mathcal{A}_1$. De esto, al menos una de estas n-celdas, a la cual denotaremos por $\mathcal{A}_2$, no puede ser cubierto por una subcolección finita de $\mathcal{U}$, ya que en caso contrario $\mathcal{U}$ tendría una subcubierta finita para $\mathcal{A}_1$. Además, $\text{diám}(\mathcal{A}_2) = \dfrac{\delta}{4}$. Realizando este proceso de manera recursiva obtenemos una colección $\{\mathcal{A}_m : m \in \mathbb{N}\}$ de n-celdas que satisface:

(1) para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{m+1} \subset \mathcal{A}_m$,

(2) $\mathcal{A}_m$ no puede ser cubierto por una subcolección finita de $\mathcal{U}$ y

(3) $\text{diám}(\mathcal{A}_m) = \dfrac{\delta}{2^m}$.

Por el Lema 3.37, existe $x \in \mathcal{A}_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in \mathcal{A}_1$, y por tanto, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Luego, $B(x, r) \subset U_x$, para algún $r > 0$. Por la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{2^m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ a cero, sabemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^M} < \dfrac{r}{\delta}$. Como $x \in \mathcal{A}_M$ y $\text{diám}(\mathcal{A}_M) = \dfrac{\delta}{2^M}$, tenemos que $\mathcal{A}_M \subset B(x, r) \subset U_x$, contradiciendo a (2). Por lo tanto, $\mathcal{A}_1$ es compacto. $\square$

Teorema 3.39. (Heine-Borel) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si y sólo si K es acotado y cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La necesidad es obvia por el teorema 3.5 y el teorema 3.17. Supongamos que K es acotado y cerrado de $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 3.13, existen $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $K \subset B(p, r)$. Sea

$$\mathcal{A} = [p_1 - r, p_1 + r] \times \cdots \times [p_n - r, p_n + r].$$

Notemos que $\mathcal{A}$ es una n-celda que contiene a K, porque $B(p, r) \subset \mathcal{A}$. Por el teorema 3.38, tenemos que $\mathcal{A}$ es compacto. Como K es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $\mathcal{A}$, por el teorema 3.6, concluimos que K es compacto. $\square$

Un ejemplo de espacio métrico donde no se cumple el teorema de Heine-Borel es el espacio métrico (X, d), donde $X = (0, 1)$ y $d(x, y) = |x - y|$. En este espacio, el conjunto $(0, 1)$ es cerrado y acotado, pero no es compacto, como se demostró anteriormente.

Otro ejemplo es el espacio métrico de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. En este espacio, el conjunto $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

Teorema 3.40. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es acotado, con $A \neq \emptyset$, entonces A es relativamente compacto.

Demostración. Como A es acotado, existen a_1,a_2,$\ldots$, a_n,b_1,$\ldots$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = B$. Notemos que B es cerrado de $\mathbb{R}^n$ (¿por qué?). Luego, $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(B) = B$, por el teorema 3.39, tenemos que $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto. Así, A es relativamente compacto. $\square$

3.2 Compacidad local

Esta sección está dedicada a revisar la compacidad local, es decir, espacios métricos tales que, aunque no son compactos, tienen la propiedad de la compacidad en alguna vecindad de cada punto.

Definición 3.41. Un espacio métrico X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que V es compacto.

Teorema 3.42. Un espacio métrico X es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que U es abierto de X y $\mathrm{cl}_X(U)$ es compacto.

Demostración. Supongamos que X es un espacio métrico localmente compacto y sea $x \in X$. Por definición, existe una vecindad V de x tal que V es compacto. Luego, existe un conjunto U abierto de X tal que $x \in U \subset V$. Como V es un subconjunto compacto de X, por el teorema 3.5, tenemos que V es cerrado de X. Luego, $\mathrm{cl}_X(U) \subset \mathrm{cl}_X(V) = V$. Así, por el teorema 3.6, tenemos que $\mathrm{cl}_X(U)$ es compacto.

La proposición recíproca es obviamente verdadera. $\square$

Teorema 3.43. Un espacio métrico X es localmente compacto si y sólo si para cada $x \in X$ existe un sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de x tal que para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ tenemos que V es compacto.

Demostración. Supongamos que X es un espacio métrico localmente compacto y sea $x \in X$. Sea U un conjunto abierto de X con $x \in U$. Por definición, existe una vecindad V de x tal que V es compacto. Notemos que $U \cap \mathrm{int}_X(V)$ es un conjunto abierto de X contenido en el conjunto compacto V. Existe un abierto W de V tal que $x \in W \subset \mathrm{cl}_V(W) \subset U \cap \mathrm{int}_X(V)$. Así, existe un abierto A de X tal que $V \cap A = W$. Como V es una vecindad de x, tenemos que $x \in \mathrm{int}_X(V) \cap A \subset W \subset \mathrm{cl}_V(W)$. Notemos que $\mathrm{int}_X(V) \cap A$ es un abierto de X y $\mathrm{cl}_V(W)$ es compacto. Luego, $\mathrm{cl}_V(W)$ es una vecindad compacta de x contenida en U.

La proposición recíproca es obviamente verdadera. □

Teorema 3.44. Sean X un espacio métrico localmente compacto y Y un subconjunto de X.

1. Si Y es un abierto de X, entonces Y es localmente compacto.

2. Si Y es localmente compacto y $\mathrm{cl}_X(Y) = X$, entonces Y es abierto de X.

Demostración.

1. Sea $y \in Y$. Como X es localmente compacto, existe una vecindad V de y tal que V es compacto. Como Y es abierto de X, tenemos que $Y \cap V$ es una vecindad de y en X. Existe una vecindad compacta W de y en X tal que $W \subset Y \cap V$ (veáse el teorema 3.43). Así, W es una vecindad compacta de y en Y. Por lo tanto Y es localmente compacto.

2. Sea $y \in Y$. Como Y es localmente compacto, existe una vecindad V de y en Y tal que V es compacto. Como V es vecindad de y en Y, existe un abierto U de Y tal que $y \in U \subset V \subset Y$. Como U es abierto de Y, existe un abierto W de X tal que $U = W \cap Y$. Veremos que $y \in W \subset Y$. Obviamente $y \in W$. Notemos que $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) \cap Y = \mathrm{cl}_X(U) \cap Y = \mathrm{cl}_Y(U)$. Como $\mathrm{cl}_Y(U)$ es compacto, el conjunto $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) \cap Y$ también es compacto. Por el teorema 3.5, tenemos que $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) \cap Y$ es cerrado de X. Además, $W \cap Y \subset \mathrm{cl}_X(W \cap Y) \cap Y$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) \subset \mathrm{cl}_X(W \cap Y) \cap Y$. Así, $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) \subset Y$. Como $W \cap \mathrm{cl}_X(Y) \subset \mathrm{cl}_X(W \cap Y)$ y como $\mathrm{cl}_X(Y) = X$, tenemos que $W \subset \mathrm{cl}_X(W \cap Y) \subset Y$. Así, Y es abierto de X.

□

Ejemplo 3.45. Todo espacio métrico X con la métrica discreta es localmente compacto porque cada subconjunto singular es abierto de X y compacto. Si X es infinito y tiene la métrica discreta, entonces todas las bolas cerradas de radio menor que 1, que son conjuntos singulares, son compactos; todas las otras bolas son iguales a X, el cual no es compacto.

Observación 3.46. No todo subespacio de un espacio métrico localmente compacto es localmente compacto. Por ejemplo, el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ no es localmente compacto; en efecto, no existen subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Q}$ cuya cerradura sea compacto en $\mathbb{Q}$. Los subconjuntos cerrados de espacios métricos localmente compactos son localmente compactos; curiosamente, también lo son los subconjuntos abiertos.

3.3 Ejercicios

1. Encontrar un espacio métrico X y dos bolas abiertas B_1 y B_2 de radios r_1 y r_2, respectivamente tales que $B_1 \subset B_2$ pero $r_1 > r_2$.

2. Construir un conjunto compacto de números reales, con la métrica euclidiana, cuyos puntos de acumulación formen un conjunto numerable.

3. a. Encontrar una familia de cerrados de $\mathbb{R}$ tales que la intersección de todos los elementos de ésta sea vacía, pero la intersección de cualquier subfamilia finita de ella tenga intersección no vacía.

   b. El mismo ejercicio que el inciso anterior, pero ahora los elementos de la familia son acotados.

   c. En $\mathbb{R}$, sea d la métrica

   $$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|},$$

   y sea $F_n = [n, \infty)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Probar que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ y acotados, pero que

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

4. En $\mathbb{Q}$ como subespacio euclidiano de $\mathbb{R}$, sea $E = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\}$. Demostrar que E es cerrado de $\mathbb{Q}$ y acotado pero que E no es compacto. ¿Es E abierto de $\mathbb{Q}$?

5. Demostrar que si un subconjunto A del espacio métrico X es acotado, entonces $\text{diám}(\text{cl}_X(A)) = \text{diám}(A)$, para concluir, demostrar que A es acotado si y sólo si $\text{cl}_X(A)$ es acotado.

6. Demostrar que el intervalo (a, b) es precompacto.

7. Demostrar que $\mathbb{R}$ es separable.

8. Probar que si $A \neq \emptyset$ y toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta numerable, entonces A es separable.

9. Probar que si X es separable y A es un subconjunto no vacío de X, entonces A es separable y $A \setminus A'$ es numerable.

10. Probar que en un espacio métrico separable, toda familia de conjuntos abiertos y ajenos dos a dos es numerable.

11. Probar que todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos ajenos dos a dos.

12. ¿Es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ separable? Justifique su respuesta.

13. Encontrar un conjunto no acotado y cuyo interior sea acotado.

14. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta. Mostrar que $\text{cl}_X(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(x_1, \ldots, x_n) : |(x_1, \ldots, x_n)| < 1\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{(x_1, \ldots, x_n) : |(x_1, \ldots, x_n)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Además, $\text{fr}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_2$, donde

$$\mathcal{C}_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) : |(x_1, \ldots, x_n)| = 1\}.$$

15. Demostrar que todo conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es intersección de una familia numerable de abiertos de $\mathbb{R}$.

16. Demostrar los incisos 2, 3 y 4 de la proposición 3.16

17. Demostrar el teorema 3.27.

3.4 Conexidad

Una de las nociones básicas e imprescindibles de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1883 por C. Jordan (1838-1922), para la clase de los subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914 por F. Hausdorff y, en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Definición 3.47. Un par de subconjuntos (S, T), no vacíos, abiertos de un espacio métrico X es una **separación** de X si $X = S \cup T$ y $S \cap T = \emptyset$.

Observación: Supóngase que X es un espacio métrico, S y T son no vacíos, ajenos, cerrados de X y $X = S \cup T$. Entonces S y T son una separación de X porque sus complementos T y S son abiertos de X. Si X es separado por S y T, entonces S y T son abiertos y cerrados de X.

En general, la separación de un conjunto no es única.

Definición 3.48. Un espacio métrico X es **conexo** si no existe una separación de X. Decimos que X es **disconexo** si existe una separación de X. Un subconjunto A de X es conexo si A, con la métrica relativa, es conexo.

Lema 3.49. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Entonces A es disconexo si y sólo si existe $S \subsetneq A$, con $S \neq \emptyset$ tal que S es abierto y cerrado de A.

Demostración. Supongamos que A es disconexo. Entonces $A = S \cup T$. Ambos S y T son abiertos y cerrados en A. Así, $S \subsetneq A$ puesto que $T \neq \emptyset$, y $S \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que existe $S \subsetneq A$, con $S \neq \emptyset$ y S abierto y cerrado de A. Sea $T = A \setminus S$. Entonces $T \neq \emptyset$. Como S es cerrado de A, tenemos que T es abierto de A. Además, $T \cap S = \emptyset$ y $A = S \cup T$. Así, A es disconexo. □

Lema 3.50. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de A son $\emptyset$ y A.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. □

Teorema 3.51. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X, con A conexo. Si $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$, entonces $A \cap \operatorname{fr}_X(B) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos las hipótesis y que $A \cap \mathrm{fr}_X(B) = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \mathrm{fr}_X(B)) \\ &= A \cap (B \cup \mathrm{fr}_X(B)) \\ &= A \cap \mathrm{cl}_X(B) \\ &= A \cap (\mathrm{int}_X(B) \cup \mathrm{fr}_X(B)) \\ &= (A \cap \mathrm{int}_X(B)) \cup (A \cap \mathrm{fr}_X(B)) \\ &= A \cap \mathrm{int}_X(B). \end{aligned}$$

Por un lado, $A \cap B = A \cap \mathrm{cl}_X(B)$, que es cerrado de A, y $A \cap B = A \cap \mathrm{int}_X(B)$, que es abierto de A. Entonces, $A \cap B$ es abierto y cerrado de A. Como A es conexo y $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = A$. Esto implica que $A \subset B$. Luego, $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$, lo cual contradice una de las hipótesis. Por lo tanto, $A \cap \mathrm{fr}_X(B) \neq \emptyset$. □

Teorema 3.52. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X con A conexo. Si $A \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A)$, entonces B es conexo.

Demostración. Supóngase que existen dos abiertos S y T de X tales que $B = (S \cap B) \cup (T \cap B)$ y $(S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset$. Como $A \subset B$, tenemos que $A = (A \cap S) \cup (A \cap T)$. Dado que A es conexo, $A \cap S = \emptyset$ o $A \cap T = \emptyset$. Podemos suponer que $A \cap S = \emptyset$. Entonces $A = A \cap T$, lo que implica que $A \subset T$.

Nótese que $\mathrm{cl}_X(A) \cap S = \emptyset$, porque de lo contrario $A \cap S \neq \emptyset$.

Como $B \subset \mathrm{cl}_X(A)$, tenemos que $B \cap S = \emptyset$. Por lo tanto B no admite ninguna separación. Así, B es conexo. □

Corolario 3.53. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si A es conexo, entonces $\mathrm{cl}_X(A)$ es conexo.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

Teorema 3.54. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conexos en X. Si existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que para cualquier $A \in \mathcal{F}$, se cumple que $A \cap A_0 \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ es conexo.

Demostración. Sea $B = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$. Sean S, T abiertos de X tales que $B = (S \cap B) \cup (T \cap B)$ y $(S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{F}$. Como $A \subset B$, tenemos que $A = (S \cap A) \cup (T \cap A)$ y $(S \cap A) \cap (T \cap A) = \emptyset$. Como A es conexo, tenemos que A no admite separación. Luego, $T \cap A = \emptyset$ (o bien $S \cap A = \emptyset$). Así, $A = S \cap A$ (o bien $A = T \cap A$). Luego, $A \subset S$ (o bien $A \subset T$). En particular, supongamos que $A_0 \subset S$. Si para algún $A \in \mathcal{F}$, se tiene que $A \subset T$, implica que $A \cap A_0 \subset (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset$. Esto es una contradicción. Luego, para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \subset S$. Así, $B \subset S$. Por lo que $B \cap S = B$. Luego, $B \cap T = \emptyset$. Por lo tanto, B no admite una separación, y así B es conexo. $\square$

Corolario 3.55. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conexos en X. Si $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ es conexo.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

Definición 3.56. Sean p un punto de un espacio métrico X y $\mathcal{F}$ la familia de conexos en X que contienen a p. Definimos $C(p) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. Por el Corolario 3.55, tenemos que $C(p)$ es un conexo. De hecho, es el conexo «más grande» en X que contiene a p. A $C(p)$ le llamamos **la componente de X que contiene a** p . Una **componente** C de X es $C(p)$, para algún $p \in X$.

Definición 3.57. Un espacio métrico X es **totalmente disconexo** si para todo $p \in X$, se cumple que $C(p) = \{p\}$.

Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Entonces $A = \bigcup_{p \in A} C(p)$. Además, si $C(p) \cap C(q) \neq \emptyset$, entonces $C(p) \cup C(q)$ es conexo y $C(p) \subset C(p) \cup C(q)$. Como $C(p)$ es la componente que contiene a p, tenemos que $C(p) = C(p) \cup C(q)$. De la misma manera, $C(q) = C(p) \cup C(q)$, por lo que $C(p) = C(q)$.

De lo anterior, concluimos que dos componentes en A son idénticas o son ajenas. Podemos entonces definir la relación de equivalencia, $p \sim q$ si y sólo si $C(p) = C(q)$, para $p, q \in A$.

Lema 3.58. Sea X un espacio métrico. El conjunto X es conexo si y sólo si X tiene una única componente.

Demostración. $(\Leftarrow)$. Sea C la única componente de X. Como X es la unión de las componentes en X, entonces $X = C$. Como C es conexo, entonces X es conexo.

($\Rightarrow$). Supongamos que X es conexo. Sea $x \in X$. Como $C(x)$ es la componente que contiene a x, entonces $x \in C(x)$ y por lo tanto $X \subset C(x)$. Además, $C(x) \subset X$, y por lo tanto $C(x) = X$. $\square$

Lema 3.59. Sea X un espacio métrico. Entonces X es conexo si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un subconjunto conexo A de X tal que $x, y \in A$.

Demostración. La demostración es un ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 3.60. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X con $A \neq \emptyset$, entonces las componentes de A son cerrados de A.

Demostración. Sea C una componente de A. Entonces $C \subset \mathrm{cl}_X(C) \cap A \subset \mathrm{cl}_X(C)$. Por el teorema 3.52, se tiene que $\mathrm{cl}_X(C) \cap A$ es conexo. Además, como $C \subset \mathrm{cl}_X(C) \cap A$, tenemos que $C = \mathrm{cl}_X(C) \cap A$; así, C es cerrado de A, porque $\mathrm{cl}_X(C)$ es cerrado de X. $\square$

Observación: No siempre las componentes de un conjunto A son abiertos de A.

3.5 Conexidad local

La conexidad y la conexidad local son conceptos independientes, veamos en esta sección un poco de conexidad local.

Definición 3.61. Decimos que un espacio métrico X es **localmente conexo en** $p \in X$, si para cualquier abierto U en X, con $p \in U$, existe un abierto y conexo W en X tal que $p \in W \subset U$.

Definición 3.62. Un espacio métrico X es **localmente conexo** si para cualquier punto $p \in X$, se tiene que X es localmente conexo en p.

Teorema 3.63. Si en el espacio métrico X toda bola abierta es un conjunto conexo, entonces X es conexo y localmente conexo.

Demostración. Primero se mostrará que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset U$. Por hipótesis, $B(p, \varepsilon)$ es conexo y sabemos que es abierto. Además $p \in B(p, \varepsilon) \subset U$, por lo que X es localmente conexo en p, para cualquier punto $p \in X$, concluyéndose que X es localmente conexo.

Queda como ejercicio al lector terminar la demostración. $\square$

Teorema 3.64. Un espacio métrico X es localmente conexo si y sólo si las componentes de todo conjunto abierto de X son conjuntos abiertos en X.

Demostración. Supóngase que X es localmente conexo. Sean U abierto de X y C una componente de U. Se mostrará que C es abierto.

Sea $x \in C$. Entonces $x \in U$, por lo que existe W abierto y conexo tal que $x \in W \subset U$, porque X es localmente conexo. Luego, $x \in W \subset C$, por lo que C es abierto.

Por otro lado, sean $x \in X$ y U abierto de X tal que $x \in U$. Supóngase que C_x es la componente de U que tiene a x. Por hipótesis, C_x es un abierto y por ser componente es conexo. Como $x \in C_x \subset U$, X es localmente conexo. □

3.6 Conexidad en $\mathbb{R}$

En esta sección conoceremos algunos resultados importantes de la conexidad en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.65. Los intervalos son los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $I = \{x\}$, con $x \in \mathbb{R}$, entonces I es conexo. Supongamos que I tiene más de un punto y que I no es conexo. Entonces, existen S y T abiertos de I, no vacíos y ajenos tales que $S \cup T = I$. Sean $y \in S$ y $z \in T$. Supongamos que $y < z$. Es claro que $C = [y, z] \cap S \neq \emptyset$. Además, C es acotado superiormente: z es una cota superior. Así, existe $\alpha = \sup C$. Luego, $y \leq \alpha \leq z$. Además, $\alpha \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(S)$. Luego, $\alpha \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(S) \cap I$. Pero S es cerrado de I. Entonces $S = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(S) \cap I$ (probarlo). Por lo tanto, $\alpha \in S$. Como $z \in T$, tenemos que $\alpha < z$. Como S es abierto de I, existe $r > 0$ tal que $B(\alpha, r) \cap I \subset S$. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < t < \text{mín}\{z, \alpha + r\}$. Entonces $t \in (\alpha - r, \alpha + r) \cap I$. Ya que $t \in S$, $t \in [y, z] \cap S = C$. Entonces $t \in C$ y $\alpha < t$, lo cual es una contradicción. Por lo que I es conexo.

Supongamos ahora que $A \subset \mathbb{R}$ es un conexo. Mostraremos que es un intervalo. Para esto, supongamos que no lo es, es decir, existen $x, y \in A$, con $x < y$ y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x < r < y$ pero $r \notin A$. Entonces,

$$A = [(-\infty, r) \cap A] \cup [(r, \infty) \cap A] .$$

Nótese que $(-\infty, r) \cap A$ y $(r, \infty) \cap A$ son abiertos ajenos en A. Entonces A no es conexo, lo cual es una contradicción. □

Corolario 3.66. El espacio métrico $\mathbb{R}$ es conexo y es localmente conexo.

Demostración. Toda bola abierta $B(x, r) = (x - r, x + r)$ es un intervalo, luego es conexo. Por el teorema 3.63, $\mathbb{R}$ es conexo y localmente conexo. $\square$

Teorema 3.67. Todo conjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia numerable de intervalos abiertos ajenos dos a dos.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$ y abierto de $\mathbb{R}$. Denotamos por $F = \{C_x\}_{x \in A}$ a la familia de componentes de A. Sabemos que $A = \bigcup\limits_{x \in A} C_x$. Los elementos de F son ajenos dos a dos. Además, como A es abierto y $\mathbb{R}$ es localmente conexo, por el teorema 3.64, tenemos que C_x es abierto y conexo en $\mathbb{R}$, para todo $x \in A$. Entonces C_x es un intervalo abierto.

Veamos ahora que F es numerable. Sea $r_x \in \mathbb{Q} \cap C_x$. Definimos $f : F \to \mathbb{Q}$, como $f(C_x) = r_x$. Para $C_x \neq C_y$, con $x, y \in A$, $f(C_x) = r_x \neq r_y = f(C_y)$. Entonces f es inyectiva, por lo que F es numerable. $\square$

3.7 Ejercicios

1. Sea X un espacio métrico. Probar que T es abierto y cerrado de X si y sólo si $\mathrm{fr}_X(T) = \emptyset$.

2. Mostrar que la imagen de la función $sen(\frac{1}{x})$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un conjunto conexo.

3. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X, con $A \neq \emptyset$. Probar que $A' = \{x \in X : x \in \mathrm{cl}_X(A \setminus \{x\})\}$.

4. Muestre que en general, el interior de un conjunto conexo no es conexo.

5. Sean A, B dos conjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico X. Demostrar que si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

6. Suponga que A y B son conexos y $A \subset B$. Si C es abierto y cerrado del subespacio métrico $B \setminus A$, demostrar que $A \cup C$ es conexo.

7. Se dice que A y B están separados si A y B son subconjuntos de X tales que $\mathrm{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$. Probar que si A y B son ajenos, y ambos abiertos o cerrados de X, entonces están separados.

8. Supóngase que A y B están separados. Demostrar que

$$A \cup B \text{ abierto de } X \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son abiertos de } X.$$

$$A \cup B \text{ cerrado de } X \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son cerrados de } X.$$

9. Demostrar que si $d(A, B) > 0$, entonces A y B están separados. Muestre con un ejemplo que el recíproco en general es falso.

10. Demostrar que un espacio métrico X es disconexo si y sólo si es la unión de dos conjuntos separados y no vacíos.

11. Si A y B son conjuntos conexos de X y no están separados, demuestre que $A \cup B$ es conexo. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos conexos y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Demostrar que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es conexo.

12. Demostrar que un espacio métrico discreto, de más de un punto, es totalmente disconexo y localmente conexo.

13. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es disconexo en la recta real.

14. Sea A un conjunto conexo, abierto y cerrado de un espacio métrico X. Demostrar que A es una componente de X.

15. Sean A y B conjuntos conexos y $A \subset B$. Si C es una componente de $B \setminus A$, demuéstrese que $B \setminus C$ es conexo.

16. Sea C una componente de un conjunto abierto A de un espacio métrico localmente conexo X. Probar que $A \cap \mathrm{fr}_X(C) = \emptyset$.

17. Sea C una componente de un subespacio A de un espacio métrico localmente conexo X. Demostrar:

    (a) $\mathrm{int}_X(C) = C \cap \mathrm{int}_X(A)$.
    (b) $\mathrm{fr}_X(C) \subset \mathrm{fr}_X(A)$.
    (c) Si A es cerrado, entonces $\mathrm{fr}_X(C) = C \cap \mathrm{fr}_X(A)$.

18. Se dice que un **espacio métrico** (X, d) es **encadenado** si para todo $\epsilon > 0$ y todo $x, y \in X$, existen puntos $x_0, x_1, \ldots, x_N \in X$ con $x_0 = x, x_N = y$ tales que $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$. Demostrar que si (X, d) es conexo, entonces es encadenado.

19. Demostrar que el conjuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$ con, al menos, una coordenada irracional es conexo.

20. Sea C un conjunto no vacío, cerrado y acotado superior e inferiormente en la recta real. Probar que C es un intervalo cerrado o bien puede obtenerse de un intervalo cerrado removiendo una familia numerable de intervalos abiertos, ajenos dos a dos, cuyos extremos están todos en C.

21. Dar un ejemplo de un subespacio métrico A de un espacio métrico X que no sea conexo, pero que exista $t \in X$ tal que $A \cup \{t\}$ sí lo sea.

Espacios métricos, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-2637-10-8

Capítulo 4

Sucesiones, límites y espacios métricos completos

En este capítulo abordamos el concepto de sucesión y su relación con los espacios métricos, para así conocer la noción de espacio métrico completo.

4.1 Sucesiones

Iniciamos esta sección con la definición y notación básica del concepto de sucesión y convergencia.

Definición 4.1. Sea X un espacio métrico. Una **sucesión** en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$.

Notación 4.2. Dada una sucesión $f : \mathbb{N} \to X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos $f(n)$ por x_n, y a la sucesión f la denotamos por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además, el símbolo $R(x_n)$ denota al conjunto $Im(f) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 4.3. En un espacio métrico X, una sucesión $f : \mathbb{N} \to X$ es **acotada** si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.

Definición 4.4. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d_X) **converge al punto** $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d_X(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Observación 4.5. La definición anterior equivale a que para toda $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B(x_0, \varepsilon)\}$ sea finito.

Una sucesión puede ser convergente en un espacio métrico específico, pero en otros espacios métricos no necesariamente, tal como nos muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.6. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{R}_+$.

Observación 4.7. Sea X un espacio métrico y $x_0 \in X$. Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, no necesariamente $x_0 \in R(x_n)'$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ considérese la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n = 5$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Claramente, la sucesión converge a 5, pero $5 \notin \{5\}' = \emptyset$.

Proposición 4.8. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $x_0 \in X$. Si $R(x_n)$ es infinito, entonces $x_0 \in R(x_n)'$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0. Por observación 4.5, tenemos que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B(x_0, \varepsilon)\}$ es finito; luego $(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap R(x_n)$ es infinito. Por lo tanto, $x_0 \in R(x_n)'$. $\square$

Si $R(x_n)$ tiene un único punto de acumulación, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no necesariamente converge, tal como nos muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9. Considérese la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Tenemos que $R(x_n)' = \{0\}$ y la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge (probar estas dos últimas afirmaciones es un ejercicio para el lector).

Teorema 4.10. Si una sucesión en un espacio métrico converge a un punto, éste es único.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 y a x_0', con $x_0 \neq x_0'$. Como X es un espacio métrico, existen abiertos U y V en X tales que $U \cap V = \emptyset$ y $x_0 \in U$, $x_0' \in V$ (vea ejercicio 16 de la página 57). Como la sucesión converge a ambos puntos x_0 y x_0', existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$ y si $n \geq N'$, entonces $x_n \in V$. Sea $M = \max\{N, N'\}$. Si $n \geq M$, entonces $x_n \in U \cap V$, lo cual es una contradicción porque $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Definición 4.11. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **creciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq x_{n+1}$. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **decreciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \geq x_{n+1}$.

Teorema 4.12. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) en $\mathbb{R}$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 4.13. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X y $x_0 \in X$. Entonces, $x_0 \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A, con $x_n \neq x_m$ siempre que $n \neq m$, tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0.

Demostración. Supongamos que $x_0 \in A'$. Luego, existe $x_1 \in (B(x_0, 1) \setminus \{x_0\}) \cap A$. Sea $\varepsilon_2 \leq \text{mín}\{d(x_0, x_1), \frac{1}{2}\}$. Sea $x_2 \in (B(x_0, \varepsilon_2) \setminus \{x_0\}) \cap A$. (Nótese que por la definición de A', el elemento x_2 en efecto existe y que $x_1 \neq x_2$). Ahora, sean $\varepsilon_3 \leq \text{mín}\{d(x_0, x_2), \frac{1}{3}\}$ y $x_3 \in (B(x_0, \varepsilon_3) \setminus \{x_0\}) \cap A$, con $x_1 \neq x_3 \neq x_2$. Continuamos sucesivamente hasta tener $\varepsilon_n \leq \text{mín}\{d(x_0, x_{n-1}), \frac{1}{n}\}$ y tomamos $x_n \in (B(x_0, \varepsilon_n) \setminus \{x_0\}) \cap A$. Notemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A y para cualesquiera n y m diferentes, se tiene que $x_n \neq x_m$. Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Además, si $n \geq N$, entonces $\frac{1}{N} \geq \frac{1}{n}$. Obsérvese también que $\varepsilon_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, para todo $n \geq N$, se tiene que $d(x_n, x_0) < \varepsilon_n < \varepsilon$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0.

La demostración de la suficiencia es un ejercicio para el lector. $\square$

Comúnmente, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en un espacio métrico X y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, este hecho suele escribirse como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Corolario 4.14. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X y $x_0 \in A$. Entonces $x_0 \in \text{cl}_X(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

Definición 4.15. Si $f, g : \mathbb{N} \to X$ son sucesiones, decimos que g es una **subsucesión** de f si existe una función inyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g = f \circ h$.

Notación 4.16. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión y g es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, suele denotarse a la subsucesión por $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $y_n = g(n) = (f \circ h)(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$.

Ejemplo 4.17.

1. Toda sucesión es una subsucesión de sí misma.

2. Si a una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico X "se le quita" un número finito de términos, lo que queda es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es a su vez una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4. Reordenar los términos de una sucesión trae como resultado una subsucesión.

5. Si $R(x_n)$ es finito, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión constante.

6. Si $R(x_n)$ es infinito y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos distintos en $R(x_n)$, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostraremos las afirmaciones 2, 5 y 6.

2. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X. Supongamos que a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ le quitamos $\{x_n : n \in M\}$, donde M es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Sabemos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \setminus M$. Así, existe una función biyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus M$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n = g(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}$. Tenemos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una nueva sucesión en X, la cual por definición, es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

5. Sea $f : \mathbb{N} \to X$ tal que $f(n) = x_n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $R(x_n) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Además, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(x_i)$. Por hipótesis, existe $m \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f^{-1}(x_m)$ es infinito. Luego, $\mathbb{N} \sim f^{-1}(x_m)$ y por lo tanto $f^{-1}(x_m)$ es infinito numerable. Así, existe una función biyectiva $h : \mathbb{N} \to f^{-1}(x_m)$ tal que $f(h(m)) = x_m$. Esto implica que $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva y $y_n = f(h(m)) = x_{h(n)} = x_m$ define una subsucesión constante.

6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe m_n tal que $y_n = x_{m_n}$. Definimos $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $h(m) = m_n$. Si $n \neq n_1$, con $n_1 \in \mathbb{N}$, entonces $y_n \neq y_{n_1}$, pues la sucesión es de términos distintos. Entonces $x_{m_n} \neq x_{m_{n_1}}$, lo cual implica que $m_n \neq m_{n_1}$, o sea, h es inyectiva, concluyéndose que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Los incisos 1, 3 y 4 quedan como ejercicio para el lector.

Teorema 4.18. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 en un espacio métrico X, entonces toda subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0.

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, existe una función inyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $y_n = f(h(n)) = x_{h(n)}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B(x_0, \varepsilon)\}$. Es claro que A es finito. Como h es inyectiva, $h|_{h^{-1}(A)}$ lo es. Por 1.23, tenemos que $|h^{-1}(A)| \leq |A|$, por lo que $h^{-1}(A)$ es finito. Note que

$$\begin{aligned} h^{-1}(A) &= \{n \in \mathbb{N} : h(n) \in A\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : x_{h(n)} \notin B(x_0, \varepsilon)\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : y_n \notin B(x_0, \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Sea $M = \text{máx}\, h^{-1}(A)$. Para todo $n > M$, se tiene que $y_n \in B(x_0, \varepsilon)$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. □

Definición 4.19. Sea X un espacio métrico. Un subconjunto no vacío A de X es **compacto por sucesiones**, denotado por "C-S", si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente en A.

Teorema 4.20. Sea A un subconjunto, no vacío, de un espacio métrico X. Entonces A es compacto por sucesiones si y sólo si A es Bolzano-Weierstrass.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que A es compacto por sucesiones. Si A es finito, A es Bolzano-Weierstrass. Supongamos que A es infinito. Sea T un subconjunto infinito de A. Mostraremos que $T' \cap A \neq \emptyset$.

Como T es un conjunto infinito, existe un subconjunto infinito numerable M de T, con $M = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Con los elementos de M, formamos la sucesión de términos distintos $x_n \in T$. Como $T \subset A$ y A es compacto por sucesiones, existe una subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $a \in A$. Por el teorema 4.13, tenemos que $a \in T'$ y por lo tanto $a \in T' \cap A$. Así, A es Bolzano Weierstrass.

Demostrar la afirmación recíproca es un ejercicio para el lector. □

Corolario 4.21. Sea A un subconjunto, no vacío, de un espacio métrico X. Entonces A es compacto por sucesiones si y sólo si A es compacto.

Demostración. Por el teorema 4.20, tenemos que A es compacto por sucesiones si y sólo si A es B-W. Por el teorema 3.35, tenemos que A es B-W si y sólo si A es compacto. $\square$

Definición 4.22. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d_X). La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de **Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema 4.23. Toda sucesión convergente en un espacio métrico X es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x_0 \in X$. Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe un natural N tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $d_X(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $l, m \in \mathbb{N}$, con $l, m \geq N$. Entonces,

$$d_X(x_l, x_m) \leq d_X(x_l, x_0) + d_X(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. $\square$

La afirmación recíproca es falsa. Tómese por contraejemplo la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}_+$. Esta sucesión es de Cauchy (verifíquelo) pero no converge en $\mathbb{R}_+$ porque $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 y $0 \notin \mathbb{R}_+$.

Definición 4.24. Un espacio métrico X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Proposición 4.25. Sean (A, d') es un subespacio métrico de (X, d) y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en A.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Como $d(x_n, x_m) = d'(x_n, x_m)$, concluimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en A. $\square$

Teorema 4.26. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X. Entonces:

1. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces $R(x_n)$ es precompacto.
3. La afirmación recíproca de la anterior no es verdadera siempre.
4. Si $R(x_n)$ es precompacto, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy.
5. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y $R(x_n)' \neq \emptyset$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Demostración. 1. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe una función inyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{h(n)}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ siempre que $n, m \geq N$. Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ para el cual $d(y_n, y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $n > N'$.

Sea $A = h^{-1}(\{1, 2, \ldots, N-1\})$. Como A es finito, tiene máximo, al cual denotamos por M. Ahora, sean $n \geq N$ y $m > \max\{M, N'\}$. Como $m > M$, tenemos que $m \notin A$. Luego, $h(m) > N$. Así, $d(x_n, x_{h(m)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Además, como $m > N'$ y $x_{h(m)} = y_m$, tenemos que $d(x_{h(m)}, y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{h(m)}) + d(x_{h(m)}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

2. Sea $\varepsilon > 0$. Para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Obsérvese que si $n, m > N$, entonces $x_n, x_m \in B(x_N, \varepsilon)$. Luego, $R(x_n) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$, por lo que $R(x_n)$ es precompacto.

3. Para mostrar que la afirmación recíproca no siempre es verdadera, considérese la sucesión definida por

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Tenemos que $R(x_n)$ es precompacto pero la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy.

4. Se deja como ejercicio.

5. Como $R(x_n)' \neq \emptyset$, tenemos que existe $y \in R(x_n)'$. Por el teorema 4.13, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $R(x_n)$ de términos distintos que converge a y. Como puede verse en el ejemplo previo al Teorema 4.18, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por el inciso 1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

□

Teorema 4.27. El espacio métrico $\mathbb{R}$ es completo.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Por *2* del teorema 4.26, tenemos que $R(x_n)$ es precompacto, luego por el teorema 3.17, tenemos que $R(x_n)$ es acotado, es decir, $R(x_n)$ está acotado superior e inferiormente.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ las cotas inferior y superior de $R(x_n)$, respactivamente. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha \leq x_n \leq \beta$.

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea R_m el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ y $y_m = \sup R_m$. Consideremos la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $R_{m+1} \subset R_m$. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $y_{m+1} \leq y_m$. Por lo que la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es decreciente.

Por otro lado, notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\alpha \leq y_m$, es decir, $R(y_m)$ está acotado inferiormente. Por el teorema 4.12, tenemos que $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente, de hecho, $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $y = \inf R(y_m)$.

Ahora veremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq M_1$, entonces $|x_n - x_{n'}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Como $y < y + \dfrac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $y + \dfrac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de $R(y_m)$. Así, existe $y_{M_2} \in R(y_m)$ tal que

$$y \leq y_{M_2} < y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$. Como $M \geq M_2$ y $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ es decreciente, tenemos que $y \leq y_M \leq y_{M_2} < y + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$y - \frac{\varepsilon}{2} < y_M < y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y_M = \sup R_M$, tenemos que $y - \dfrac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de R_M. Así, existe $x_N \in R_M$ tal que $y - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_N < y_M$. Luego,

$$y - \frac{\varepsilon}{2} < x_N < y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notemos que $M_1 \leq M \leq N$. Luego, para todo $n \geq N$, tenemos que $n, N \geq M_1$. Vimos que como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, si $n, N \geq M_1$, entonces $|x_n - x_N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, es decir,

$$x_N - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{2}.$$

También vimos que $y - \dfrac{\varepsilon}{2} < x_N < y + \dfrac{\varepsilon}{2}$, de donde obtenemos que

$$y - \varepsilon < x_N - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad x_N + \frac{\varepsilon}{2} < y + \varepsilon.$$

Luego, para todo $n \geq N$, tenemos que

$$y - \varepsilon < x_n < y + \varepsilon,$$

es decir, $|x_n - y| < \varepsilon$. Así, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y.

Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo. □

Corolario 4.28. El espacio métrico $\mathbb{R}^n$ es completo.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. □

Teorema 4.29. Sea X un espacio métrico. Entonces X es completo si y sólo si todo conjunto precompacto en X es relativamente compacto.

Demostración. Supongamos que X es completo y que $A \subset X$ es precompacto. Mostraremos que $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto por sucesiones.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $\mathrm{cl}_X(A)$. Como A es precompacto, $\mathrm{cl}_X(A)$ lo es (mostrar esta afirmación). Entonces, $R(x_n)$ es precompacto. Por el número 4 del Teorema 4.26, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como X es completo, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = p \in X$. Así, $p \in \mathrm{cl}_X(A)$, por lo que la cerradura de A es compacto por sucesiones. Luego, $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto, y así A es relativamente compacto.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Por el inciso 2 del Teorema 4.26, tenemos que $R(x_n)$ es precompacto. Por hipótesis, $\mathrm{cl}_X(R(x_n))$ es compacto. Por el corolario 4.21, tenemos que $\mathrm{cl}_X(R(x_n))$ es compacto por sucesiones, por lo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por el inciso 1 del Teorema 4.26, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, por lo que X es completo. $\square$

Corolario 4.30. Si X es un espacio métrico no completo, entonces existe un subconjunto A de X precompacto que no es relativamente compacto.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

Corolario 4.31. Sean X es espacio métrico y A un subconjunto de X. Si A es compacto, entonces A es completo.

Demostración. Sean $A \subset X$, con $A \neq \emptyset$ compacto y $B \subset A$. Entonces, $\mathrm{cl}_X(B) \subset \mathrm{cl}_X(A) = A$, por lo que $\mathrm{cl}_X(B)$ es compacto. En particular, si B es precompacto, $\mathrm{cl}_X(B)$ es compacto, de donde B es relativamente compacto. Así, A es completo. $\square$

Teorema 4.32. Si X es un espacio métrico discreto, entonces es completo.

Demostración. Vamos a usar el Teorema 4.29. Para esto, sea $A \subset X$ un precompacto. Entonces A es finito. Así, $A = \mathrm{cl}_X(A)$ y $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto, por lo que A es relativamente compacto. Así, por el teorema 4.29, tenemos que X es completo. $\square$

Teorema 4.33. Si X es un espacio métrico completo y F es un cerrado de X, entonces F es completo.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en F. Como $F \subset X$, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X. Ahora, como X es completo, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$. Además, por el corolario 4.14, tenemos que $x \in \text{cl}_X(F) = F$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en F, y por lo tanto F es completo. □

Teorema 4.34. Sea X un espacio métrico. Si $F \subset X$ y (F, d_F) es completo, entonces F es cerrado de X.

Demostración. Para ver que F es cerrado de X probaremos que $\text{cl}_X(F) = F$. Sea $x \in \text{cl}_X(F)$. Por el corolario 4.14, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en F tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Como $\text{cl}_X(F) \subset X$, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en X. Por el teorema 4.23, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X. Así, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en F. Como (F, d_F) es completo, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en F, es decir, $x \in F$. Por lo tanto, $\text{cl}_X(F) \subset F$. Como siempre se cumple que $F \subset \text{cl}_X(F)$, conlcuimos que $\text{cl}_X(F) = F$. Así, F es cerrado de X. □

4.2 Teorema de Baire

Definición 4.35. Sea A subconjunto de un espacio métrico X.

1. A es **denso** en X si $\text{cl}_X(A) = X$,
2. A es **fronterizo** en X si $X \setminus A$ es denso en X,
3. A es **denso en ninguna parte** en X si $X \setminus \text{cl}_X(A)$ es denso en X.

Ejemplo 4.36. Como $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, tenemos que el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso y fronterizo en $\mathbb{R}$.

Teorema 4.37. Sean A, B y C subconjuntos de un espacio métrico X. Entonces

1. X no es denso en ninguna parte en X ni fronterizo en X. El conjunto $\emptyset$ es denso en ninguna parte en X y fronterizo en X.
2. A es denso en ninguna parte en X si y sólo si $\text{cl}_X(A)$ es fronterizo en X.

3. Si A es cerrado de X y fronterizo en X, entonces A es denso en ninguna parte en X.

4. Si A es denso en ninguna parte en X, entonces A es fronterizo en X.

5. A es fronterizo en X si y sólo si $\text{int}_X(A) = \emptyset$.

6. Si A es abierto de X y fronterizo en X implica que $A = \emptyset$.

7. A es denso en ninguna parte en X si y sólo si $\text{int}_X(\text{cl}_X(A)) = \emptyset$.

8. Si $A \subset B$ y B es fronterizo en X o denso en ninguna parte en X. entonces A es fronterizo en X o denso en ninguna parte en X.

Demostración. 1. X no es denso en ninguna parte en X porque $X \setminus \text{cl}_X(X) = \emptyset$ y $\text{cl}_X(\emptyset) \neq X$. De manera análoga se pueden ver las otras afirmaciones del inciso 1.

2. Tenemos que A es denso en ninguna parte en X si y sólo si $\text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(A)) = X$, lo cual equivale a que $\text{cl}_X(A)$ sea fronterizo en X.

3. Si A es fronterizo en X, entonces $\text{cl}_X(X \setminus A) = X$. Como A es cerrado de X, tenemos que $A = \text{cl}_X(A)$, por lo que $X = \text{cl}_X(X \setminus A) = \text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(A))$. Así, A es denso en ninguna parte en X.

4. Como $A \subset \text{cl}_X(A)$, tenemos que $X \setminus \text{cl}_X(A) \subset X \setminus A$. Como A es denso en ninguna parte en X, tenemos que $X = \text{cl}_X(X \setminus \text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_X(X \setminus A)$. Por lo tanto $X = \text{cl}_X(X \setminus A)$, implicándose que A es fronterizo en X.

5. Tenemos que $\text{int}_X(A) = \emptyset$ si y sólo si $X = X \setminus \text{int}_X(A)$, lo cual equivale a que $X = \text{cl}_X(X \setminus A)$ (véase la parte (a) de 2.28). Luego, $X \setminus A$ es denso en X. Así, A es fronterizo en X.

6. Como A es denso en ninguna parte en X, $\text{cl}_X(A)$ es fronterizo en X, lo que equivale a que $\text{int}_X(\text{cl}_X(A)) = \emptyset$.

7. Se deja como ejercicio para el lector.

8. Supongamos que $A \subset B$, con B fronterizo en X. Como $\text{int}_X(A) \subset \text{int}_X(B) = \emptyset$, tenemos que $\text{int}_X(A) = \emptyset$. Así, A es fronterizo en X.

$\square$

Teorema 4.38. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X, entonces los conjuntos $(X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup A$ y $(X \setminus A) \cup \mathrm{int}_X(A)$ son densos en X.

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup A) &= \mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup \mathrm{cl}_X(A) \\
&\supset (X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup \mathrm{cl}_X(A) \\
&= X
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X((X \setminus A) \cup \mathrm{int}_X(A)) &= \mathrm{cl}_X(X \setminus A) \cup \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(A)) \\
&\supset \mathrm{cl}_X((X \setminus A)) \cup \mathrm{int}_X(A) \\
&= (X \setminus \mathrm{int}_X(A)) \cup \mathrm{int}_X(A) \\
&= X,
\end{aligned}$$

obtenemos el resultado. □

Teorema 4.39. Si A es abierto o cerrado de un espacio métrico X, entonces $\mathrm{fr}_X(A)$ es denso en ninguna parte en X.

Demostración. Para $A \subset X$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(\mathrm{fr}_X(A)) &= \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{fr}_X(A)) \\
&= \mathrm{cl}_X(X \setminus (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus A))) \\
&= \mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus A))).
\end{aligned}$$

Si A es abierto de X, entonces $X \setminus A$ es cerrado de X. Por lo que $\mathrm{cl}_X(X \setminus A) = X \setminus A$.

Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus A))) &= \mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup (X \setminus (X \setminus A))) \\
&= \mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup A) \\
&= \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup \mathrm{cl}_X(A) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(\mathrm{fr}_X(A)) = X,$$

es decir, $\mathrm{fr}_X(A)$ es denso en ninguna parte en X.

Por otro lado, si A es cerrado de X, tenemos que $A = \mathrm{cl}_X(A)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X(A)) \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus A))) &= \mathrm{cl}_X((X \setminus A) \cup (X \setminus \mathrm{cl}_X(X \setminus A))) \\
&= \mathrm{cl}_X((X \setminus A) \cup (X \setminus (X \setminus \mathrm{int}_X(A)))) \\
&= \mathrm{cl}_X((X \setminus A) \cup \mathrm{int}_X(A)) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(\mathrm{fr}_X(A)) = X,$$

es decir, $\mathrm{fr}_X(A)$ es denso en ninguna parte en X.

$\square$

Teorema 4.40. Si A y B son subconjuntos densos en ninguna parte en el espacio métrico X, entonces $A \cup B$ es denso en ninguna parte en X.

Demostración. Por el teorema 4.37 (7), veamos que $\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A \cup B)) = \emptyset$. Sea $C = \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A \cup B))$. Además,

$$C \subset \mathrm{cl}_X(A \cup B) = \mathrm{cl}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(B).$$

Luego,

$$C \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(B)) \subset \mathrm{cl}_X(A)$$

implica que

$$\mathrm{int}_X(C \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(B))) \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A)).$$

Por hipótesis, $\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(A)) = \emptyset$, luego, $\mathrm{int}_X(C \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(B))) = \emptyset$. Como $C \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(B))$ es abierto de X, luego $C \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(B)) = \emptyset$. Así, $C \subset \mathrm{cl}_X(B)$. Luego,

$$\mathrm{int}_X(C) \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(B)),$$

Como C es abierto de X y B es denso en ninguna parte en X, se concluye que $C = \emptyset$. Por lo tanto, $A \cup B$ es denso en ninguna parte en X. $\square$

Corolario 4.41. Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de un espacio métrico X. Si $A_1, \ldots, A_n$ son densos en ninguna parte en X, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es denso en ninguna parte en X.

Demostración. Sean $A_1, \ldots, A_n$conjuntos densos en ninguna parte en X. Haremos la prueba por inducción.
Para $n = 2$, consideremos los conjuntos A_1, A_2 densos en ninguna parte en X. Por el teorema 4.40, tenemos que $A_1 \cup A_2$ es denso en ninguna parte en X.
Ahora, supongamos que se cumple para $n-1$ conjuntos, es decir, $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ es denso en ninguna parte en X. Veamos que se cumple para n conjuntos.
Tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n$$

y por hipótesis de inducción, los conuntos $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ y A_n son densos en ninguna parte en X. Por el teorema 4.40, tenemos que $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n$ es denso en ninguna parte en X, es decir, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es denso en ninguna parte en X. □

Observación 4.42. La unión arbitraria de conjuntos densos en ninguna parte no necesariamente es un conjunto denso en ninguna parte.

Considérese, por ejemplo, $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ no es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, aún cuando $\{x\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Lema 4.43. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X. Si $A \setminus B$ es fronterizo en X y B es denso en ninguna parte en X, entonces A es fronterizo en X.

Demostración. Como $A \setminus B$ es fronterizo en X, tenemos que

$$\begin{aligned}
X &= \mathrm{cl}_X(X \setminus (A \setminus B)) \\
&= \mathrm{cl}_X(X \setminus (A \cap (X \setminus B))) \\
&= \mathrm{cl}_X((X \setminus A) \cup B) \\
&= \mathrm{cl}_X(X \setminus A) \cup \mathrm{cl}_X(B) \\
&= (X \setminus \mathrm{int}_X(A)) \cup \mathrm{cl}_X(B).
\end{aligned}$$

Luego, $\text{int}_X(A) \subset \text{cl}_X(B)$, lo que implica que $\text{int}_X(A) \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(B))$. Como B es denso en ninguna parte en X, tenemos que $\text{int}_X(\text{cl}_X(B)) = \emptyset$. Así, $\text{int}_X(A) = \emptyset$, por lo que A es fronterizo en X. □

Corolario 4.44. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X. Si B es denso en ninguna parte en X y A no es fronterizo en X, entonces $A \setminus B$ no es fronterizo en X.

Demostración. Supongamos que $A \setminus B$ es fronterizo en X. Por el lema 4.43, se tiene que A es fronterizo en X, esto es una contradicción a la hipótesis. □

Observación 4.45. Sea X un espacio métrico, como $B(x, r) \subset C(x, r)$, tenemos que $C(x, r)$ no es fronterizo en X.

Lema 4.46. Sea X un espacio métrico. Si A no es fronterizo en X y $\varepsilon > 0$, entonces existe $x \in A$ tal que $C(x, \delta) \subset A$ con $\delta < \varepsilon$.

Demostración. Sea $x \in \text{int}_X(A)$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Tomamos a $r' < \text{mín}\{r, \varepsilon\}$. Entonces $B(x, r') \subset C(x, r') \subset B(x, r)$, por lo que $C(x, r') \subset A$. □

Definición 4.47. Un espacio métrico X tiene la **propiedad de Cantor** si toda familia infinito numerable $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos no vacíos y cerrados de X tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_{n+1} \subset A_n$ e $\text{ínf}\{\text{diám}\,(A_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$, tiene intersección no vacía.

Obsérvese que tales familias deben cumplir que $\text{diám}\,(A_{n+1}) \leq \text{diám}\,(A_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{\text{diám}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Luego, $\text{lím}\,\text{diám}(A_n) = \text{ínf}\{\text{diám}\,(A_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Ahora, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_n$. Por lo que $\text{diám}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \text{diám}(A_n)$. Así, $\text{diám}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \text{ínf}\{\text{diám}\,(A_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Luego, $\text{diám}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ (ya que un diámetro no puede ser negativo). Finalmente, como $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, concluimos que $\left|\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right| = 1$.

Teorema 4.48. [Cantor] Un espacio métrico es completo si y sólo si tiene la propiedad de Cantor.

Demostración. Supongamos que el espacio métrico X es completo y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia infinito numerable de conjuntos no vacíos y cerrados de X tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_{n+1} \subset A_n$ e $\inf\{\text{diám}\,(A_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$. Tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X. Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Notemos que ε no puede ser cota inferior del conjunto $\{\text{diám}\,(A_n) : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual implica que, para algún A_k, se tiene que $\text{diám}(A_k) < \varepsilon$. Ahora, notemos que para todo $n, n' \geq k$, $A_n \subset A_k$ y $A_{n'} \subset A_k$. Luego, $x_n, x_{n'} \in A_k$. Así,

$$d_X(x_n, x_{n'}) \leq \text{diám}(A_k) < \varepsilon.$$

Como el espacio métrico es completo, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, para algún $x \in X$. Ahora, veamos que X tiene la propiedad de Cantor. Para esto, consideremos un A_m cualquiera. Por construcción, tenemos que $\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ está contenido en A_m, además es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por el teorema 4.18, tenemos que $\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ converge a x. Por el teorema 4.13, tenemos que x es un punto de acumulación de A_m. Por el corolario 4.14, tenemos que $x \in \text{cl}_X(A_m)$. Ahora, como A_m es cerrado de X, tenemos que $\text{cl}_X(A_m) = A_m$, por lo que concluimos que $x \in A_m$. Así, para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in A_m$, es decir, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, concluyendo que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene intersección no vacía.

Ahora, supongamos que el espacio métrico X tiene la propiedad de Cantor y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Consideremos la familia infinito numerable de subsucesiones de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \\
S_2 &= \{x_n\}_{n=2}^{\infty}, \\
S_3 &= \{x_n\}_{n=3}^{\infty}, \\
&\vdots \\
S_m &= \{x_n\}_{n=m}^{\infty}, \\
S_{m+1} &= \{x_n\}_{n=m+1}^{\infty}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea A_m el rango de S_m. Notemos que $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una familia infinito numerable de subconjuntos de X tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_m \neq \emptyset$ y $A_{m+1} \subset A_m$. Además, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, n' \geq k$: $d_X(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$. Notemos que por construcción, si $x_n, x_{n'} \in A_k$, entonces $n, n' \geq k$, de donde $d_X(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$, lo cual implica que $\text{diám}(A_k) \leq \varepsilon$. Se sigue que $\text{ínf}\{\text{diám}(A_m) : m \in \mathbb{N}\} = 0$.

Consideremos ahora la familia infinito numerable $\{\text{cl}_X(A_m)\}_{m=1}^{\infty}$. Notemos que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\text{cl}_X(A_m)$ es no vacío, cerrado de X y $\text{cl}_X(A_{m+1}) \subset \text{cl}_X(A_m)$. Ahora, como $\text{diám}(\text{cl}_X(A_m)) = \text{diám}(A_m)$, por el teorema 3.14, también se tiene que $\text{ínf}\{\text{diám}(\text{cl}_X(A_m)) : m \in \mathbb{N}\} = 0$.

Luego, por hipótesis, existe un único punto

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{cl}_X(A_m).$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $\text{cl}_X(A_k)$ tal que $x \in \text{cl}_X(A_k)$ con $\text{diám}(\text{cl}_X(A_k)) < \varepsilon$. Por construcción, para todo $n \geq k$ tenemos que $x_n \in A_k \subset \text{cl}_X(A_k)$. Luego, para todo $n \geq k$, tenemos que $d_X(x_n, x) \leq \text{diám}(\text{cl}_X(A_k)) < \varepsilon$. Así, $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ converge a x. Por lo tanto, X es completo. □

Definición 4.49. Sea A subconjunto de un espacio métrico X. El conjunto A es de la **primera categoría, o magro,** si es unión de una cantidad infinito numerable de conjuntos densos en ninguna parte en X. Se dice que A es de la **segunda categoría** si A no es de la primera categoría.

Ahora, veamos un teorema muy importante.

Teorema 4.50 (Baire)**.** Todo conjunto de la primera categoría en un espacio métrico completo es fronterizo.

Demostración. Demostración. Sean X un espacio métrico completo y $A \subset X$ tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{int}_X(\text{cl}_X(A_n)) = \emptyset$. Veremos que $\text{int}_X(A) = \emptyset$.

Si $A = \emptyset$, A es fronterizo en X. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Sea S un conjunto no vacío y abierto de X. Obsérvese que S no es fronterizo en X. Existe una bola cerrada C contenida en S. Por hipótesis A_1 es denso en ninguna parte en

X y por la observación 4.45 tenemos que C no es fronterizo en X. Luego, por el lema 4.43, tenemos que $C \setminus A_1$ no es fronterizo en X. Así, existe una bola cerrada C_1 tal que $C_1 \subset C \setminus A_1$ y diám$(C_1) \leq 1$. Como C_1 no es fronterizo en X y A_2 es denso en ninguna parte en X, por el lema 4.43, tenemos que $C_1 \setminus A_2$ no es fronterizo en X. Entonces existe una bola cerrada C_2 tal que y $C_2 \subset C_1 \setminus A_2$ y diám$(C_2) \leq \frac{1}{2}$. Continuando recursivamente obtenemos bolas cerradas $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots$ tales que

$$S \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots,$$

y para cada $n \in \mathbb{N} : C_{n+1} \subset C_n \setminus A_{n+1}$ y diám$(C_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$.

Así, tenemos una familia $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cerrados de X, con $C_n \neq \emptyset$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$: $C_{n+1} \subset C_n$ y diám$(C_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$. Luego, ínf$\{$diám$(C_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Como X es completo, por el teorema de Cantor (teorema 4.48), tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}.$$

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in C_n$, en particular $x \in C_1 \subset S$. Por lo tanto, $x \in S$. También, si $x \in C_{n+1} \subset C_n \setminus A_{n+1}$, entonces $x \notin A_{n+1}$. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x \notin A_n$, por lo que $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Así, $S \not\subset A$. Por lo tanto, $\operatorname{int}_X(A) = \emptyset$, concluyendo que A es fronterizo en X. □

Ahora, veamos que significa que un espacio métrico sea de Baire.

Definición 4.51. Un espacio métrico X es de **Baire** si para toda familia $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos de X y densos en X se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en X.

Algunas consecuencias inmediatas se enuncian en el resultado siguiente.

Teorema 4.52. Si X es un espacio métrico completo, entonces

1. Todo abierto no vacío de X es de la segunda categoría.
2. X es de la segunda categoría.
3. Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces existe un natural n_0 tal que

$$\operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(A_{n_0})) \neq \emptyset.$$

4. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos densos en ninguna parte en X, entonces
$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

5. X es de Baire.

Demostración. 1. Sea U un conjunto no vacío y abierto de X. Notemos que U no es magro, pues si lo fuera, por el teorema de Baire, tendríamos que $\text{int}_X(U) = \emptyset = U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, U es de la segunda categoría.

2. Como X es abierto de X, por el inciso anterior tenemos que X es de la segunda categoría.

3. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{int}_X(\text{cl}_X(A_n)) = \emptyset$. Por el inciso 7 del teorema 4.37, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que A_n es denso en ninguna parte en X. Así, por la definición 4.49, tenemos que X es de primera categoría, lo cual contradice el inciso 2. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}_X(\text{cl}_X(A_{n_0})) = \emptyset$.

4. Supongamos que $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Luego, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Ahora, por la definición 4.49, tenemos que X es de primera categoría, lo cual contradice el inciso 2, por lo tanto $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

5. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos abiertos de X y densos en X. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $X \setminus A_n$ es fronterizo en X.

Como $\text{cl}_X(X \setminus A_n) = X \setminus A_n$ tenemos que $X \setminus A_n$ es denso en ninguna parte en X. Entonces, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ es magro y por el teorema de Baire, este es fronterizo. Finalmente, $X \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n \right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso. □

Definición 4.53. Un subconjunto A de un espacio métrico X es G_δ si es la intersección numerable de abiertos de X. El conjunto A es F_σ si es unión numerable de cerrados de X.

Proposición 4.54. El conjunto $\mathbb{Q}$ es F_σ en $\mathbb{R}$ y no es G_δ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{x\}$ es cerrado de $\mathbb{R}$. Además, notemos que $\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$. Como $\mathbb{Q}$ es infinito numerable, concluimos que $\mathbb{Q}$ es F_σ en $\mathbb{R}$.

Ahora veamos que $\mathbb{Q}$ no es G_δ en $\mathbb{R}$. Para esto, supongamos que $\mathbb{Q}$ es G_δ. Luego, $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde cada U_n es abierto de $\mathbb{R}$. Así, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}\setminus U_n)$, donde $\operatorname{int}_X \operatorname{cl}_X((\mathbb{R}\setminus U_n)) = \emptyset$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus U_n$ es fronterizo, además de ser cerrado. Así, $\mathbb{R}\setminus U_n$ es denso en ninguna parte en X. Luego, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (R\setminus\mathbb{Q}) = \left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}\setminus U_n)\right)$, por lo que $\mathbb{R}$ es magro. Esto es una contradicción porque $\mathbb{R}$ es completo.

Concluimos entonces que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ. □

Definición 4.55. Sean (X, d_X) un espacio métrico y $r > 0$. Si A es un subconjunto de X, entonces la bola abierta con centro en A y radio r, es $B_r(A) = \{x \in X : d_X(x, A) < r\}$.

Teorema 4.56. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X, entonces $\operatorname{cl}_X(A)$ es G_δ y $\operatorname{int}_X(A)$ es F_σ.

Demostración. Si $A = \emptyset$, entonces A es G_δ y F_σ. Sean $A \neq \emptyset$ y $r > 0$. Obsérvese que el conjunto $B_r(A) = \{x \in X : d_X(x, A) < r\}$ es abierto de X.

Además, notemos que $\operatorname{cl}_X(A) = \{x \in X : d_X(x, A) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{cl}_X(A)$ es G_δ.

Como $X\setminus \operatorname{int}_X(A) = \operatorname{cl}_X(X\setminus A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde U_n es abierto para cada natural n. Entonces, $\operatorname{int}_X(A) = X\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X\setminus U_n)$, que es una unión numerable de conjuntos cerrados de X. □

Definición 4.57. Sea A subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que A es un **conjunto perfecto** si $A = A'$.

Ejemplo 4.58.

1. $\mathbb{R}$ y $[a, b]$, con $a \neq b$, son perfectos.

2. Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, es perfecto.

Teorema 4.59. Si X es un espacio métrico perfecto y completo, entonces X no es infinito numerable.

Demostración. Supongamos que X es infinito numerable. Como X es perfecto, tenemos que $X = X'$, es decir, para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap X$ tiene un número infinito de elementos. Luego, para todo $x \in X$ tenemos que $\text{int}_X(\{x\}) = \emptyset$. Por *5* del teorema 4.37, para todo $x \in X$, tenemos que $\{x\}$ es fronterizo en X. Ahora, como para todo $x \in X$, tenemos que $\text{cl}_X(\{x\}) = \{x\}$, por *7* del teorema 4.37, para todo $x \in X$, tenemos que $\{x\}$ es denso en ninguna parte en X. Como $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, concluimos que X es de la primera categoría. Esto es una contradicción, porque X es completo. Así, X no es infinito numerable. □

Corolario 4.60. Si X es un espacio métrico compacto y perfecto, entonces X no es infinito numerable.

Demostración. Por el corolario 4.31, tenemos que X es completo y por el teorema 4.59, tenemos que X no es infinito numerable. □

Corolario 4.61. Sean X un espacio métrico completo y A un subconjunto de X. Si A es perfecto, entonces A no es infinito numerable.

Demostración. Si A es perfecto, $A = A'$. Por 2.31 (b), A es cerrado de X. Así, A es completo. Por el teorema 4.59, tenemos que X no es inifinito numerable. □

Corolario 4.62. Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $[a, b]$, con $a < b$, no son infinito numerables.

Demostración.

1. Por el teorema 4.27, tenemos que $\mathbb{R}$ es completo y por el ejemplo 4.58, tenemos que $\mathbb{R}$ es perfecto. Luego, por el teorema 4.59, tenemos que $\mathbb{R}$ no es infinito numerable.

2. Por el teorema 3.39, tenemos que $[a, b]$ es compacto y por el ejemplo 4.58, tenemos que $[a, b]$ es perfecto. Luego, por el teorema 4.60, tenemos que $[a, b]$ no es infinito numerable.

$\square$

4.3 Conjunto de Cantor

Ahora no podemos dejar pasar por alto al conjunto de Cantor, por esta razón revisamos aquí en esta sección algunas propiedades importantes del conjunto de Cantor: es compacto, perfecto y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Para esto, primero comenzamos recordando (o tal vez conociendo por primera vez) cómo es el conjunto de Cantor.

Sea $P_1 = [0, 1]$.

Ahora, dividimos al intervalo $[0, 1]$ en tres subintervalos:

$$I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad J_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad J_{12} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$

Notemos que $[0, 1] = J_{11} \cup I_{11} \cup J_{12}$.

Sea $P_2 = [0, 1] \setminus I_{11} = J_{11} \cup J_{12}$.

Ahora, sean

$$I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \ I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$J_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \ J_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \ J_{23} = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \ J_{24} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Sea $P_3 = \bigcup_{k=1}^{2^2} J_{2k}$.

Podemos continuar el proceso hasta construir 2^n intervalos cerrados ajenos $J_{n1}, \ldots, J_{n2^n}$. Notemos que cada uno de estos intervalos tienen longitud $\frac{1}{3^n}$. Así, $I_{(n+1)k}$ es el intervalo abierto con el mismo centro que J_{nk} y de longitud

$\frac{1}{3^{n+1}}$. Luego, $J_{nk} \setminus I_{(n+1)k}$ es la unión de intervalos cerrados y ajenos $J_{(n+1)(2k-1)}$ y $J_{(n+1)2k}$ de longitud $\frac{1}{3^{n+1}}$. Obtenemos entonces

$$P_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} J_{nk} \subset P_n.$$

Definición 4.63. Al conjunto $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ le llamamos el **Conjunto de Cantor.**

Observación 4.64. Para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que $J_{nk} \not\subset P$. Además, los extremos de J_{nk} pertenecen a P.

Teorema 4.65. Sea P el conjunto de Cantor. Entonces P es compacto, perfecto y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.

Demostración. Como para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que J_{nk} es cerrado de $\mathbb{R}$ y P_n es la unión de ellos, entonces P_n es cerrado de $\mathbb{R}$. Luego, P es cerrado de $\mathbb{R}$, pues es la intersección de cerrados de $\mathbb{R}$.

Ahora, como $P \subset [0, 1]$ y $[0, 1]$ es compacto, entonces P es compacto.

Sea $x \in P$. Mostraremos que $x \in P'$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Notemos que existe $k_n \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $x \in J_{nk_n}$. Como los extremos de J_{nk_n} pertenecen a P y la longitud de J_{nk_n} es $\frac{1}{3^n}$, tenemos que $J_{nk_n} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Por lo tanto, los extremos de J_{nk_n} pertenecen a $P \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Luego, $x \in P'$. Como P es cerrado de $\mathbb{R}$, tenemos que $P' \subset P$. Así, $P = P'$ y por lo tanto P es perfecto.

Como P es cerrado de $\mathbb{R}$, basta mostrar que P es fronterizo para mostrar que es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, es decir, $\text{int}_X(P) = \text{int}_X(\text{cl}_X(P)) = \emptyset$.

Supongamos que $\text{int}_X(P) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}_X(P)$. Existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset P$. Además, existe un natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$. Así, $(x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}) \subset (x - \delta, x + \delta) \subset P$. Ahora, como $x \in P_n$, existe un $k_n \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $x \in J_{nk_n}$. Como la longitud de J_{nk_n} es $\frac{1}{3^n}$, tenemos que $J_{nk} \subset (x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}) \subset P$, lo cual es una contradicción. Luego, $\mathrm{int}_X(P) = \emptyset$, y así P es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 4.66. [7, Teorema 1.17] Sea P el conjunto de Cantor. Entonces,

$$P = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \text{con } x_n \in \{0,2\}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Corolario 4.67. El conjunto de Cantor P no es infinito numerable.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

4.4 Límite de funciones

Definición 4.68. Sean X y Y espacios métricos, $A \subset X$, $a \in A'$ y $f : X \to Y$ una función. El **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a a es b, denotado por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, si para todo abierto U de Y, con $b \in U$, existe un abierto V de X, con $a \in V$ tal que

$$f\left((V \setminus \{a\}) \cap A\right) \subset U,$$

es decir, para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, tenemos que $f(x) \in U$.

Lema 4.69. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, A un subconjunto de X, $a \in A'$ y $f : X \to Y$, con $b \in Y$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$, si $0 < d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), b) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $B_{d_Y}(b, \varepsilon)$ es un abierto de Y, existe un abierto V de X, tal que $a \in V$ y si $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $f(x) \in B_{d_Y}(b, \varepsilon)$. Ahora, como V es abierto de X, existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_X}(a, \delta) \subset V$; además, $(B_{d_X}(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A \subset (V \setminus \{a\}) \cap A$. Por lo tanto, si $x \in (B_{d_X}(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $f(x) \in B_{d_Y}(b, \varepsilon)$.

Ahora, sea U un abierto de Y con $b \in U$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_Y}(b, \varepsilon) \subset U$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in A \cap (B_{d_X}(a, \delta) \setminus \{a\})$, se tiene que $f(x) \in B_{d_Y}(b, \varepsilon) \subset U$. $\square$

Teorema 4.70. Sean X y Y espacios métricos, A un subconjunto de X, $f : A \to Y$ una función y $a \in A'$. Si el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces éste es único.

Demostración. Supongamos que hay dos límites b_1, b_2 con $b_1 \neq b_2$. Luego, existen U_1 y U_2 ajenos y abiertos de Y tales que $b_1 \in U_1$ y $b_2 \in U_2$ (vea el ejercicio 16 de la pág. 57).

Por definición de límite, existen V_1 y V_2 abiertos de X tales que $a \in V_1 \cap V_2$ y si $x \in (V_i \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $f(x) \in U_i$, para $i \in \{1, 2\}$.

Sea $V = V_1 \cap V_2$. Notemos que V es un abierto de X con $a \in V$. Luego, si $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $f(x) \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como esto es una contradicción, concluimos que $b_1 = b_2$. $\square$

Teorema 4.71. Sean X y Y espacios métricos, $f : A \subset X \to Y$ una función y $a \in A'$.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, entonces para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, tenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.
2. Si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ y la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces cada una de estas sucesiones converge al mismo punto b y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Demostración. 1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos distintos en A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Sea U un abierto de Y con $b \in U$. Por hipótesis, tenemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Luego, existe un abierto V de X tal que $a \in V$ y para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, se tiene que $f(x) \in U$.

Por otro lado, como $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $x_n \in (V \setminus \{a\}) \cap A$. Luego, si $n \geq N$, entonces $f(x_n) \in U$, lo cual significa que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

2. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en A tales que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. Así, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = p$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = q$. Mostraremos que $p = q$.

Como la sucesión $\{x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$ converge a a, por hipótesis $\{f(x_0), f(y_0), \ldots\}$ y cualquier subsucesión suya convergen a algún $z \in Y$.

Es decir, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z$ y $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = z$, por lo que $p = z = q$.

El resto de la demostración queda como ejercicio para el lector. □

Teorema 4.72. Sean X y (Y, d_Y) espacios métricos. Si $f : A \subset X \to Y$ es una función, $a \in A'$ y $\lim_{x\to a} f(x) = b$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto V de X con $a \in V$ tal que para cada $x, y \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, se tiene que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es un abierto de Y con $b \in B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, existe un abierto V de X con $a \in V$ tal que si $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $f(x) \in B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Sean $x, y \in (V \setminus \{a\}) \cap A$. Luego, $f(x) \in B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $f(y) \in B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ahora, notemos que $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), b) + d_Y(f(y), b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Teorema 4.73. Sean X y (Y, d_Y) espacios métricos con (Y, d_Y) completo, $f : A \subset X \to Y$ una función y $a \in A'$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto V tal que $a \in V$ y para cualesquiera $x, y \in (V \setminus \{a\}) \cap A$ se cumple que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, entonces el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un abierto V de X con $a \in V$, tal que si $x, y \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ahora, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A que converge a a. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in (V \setminus \{a\}) \cap A$. Luego, si $n, m \geq N$, entonces $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es completo, tenemos que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Por el teorema 4.71, el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. □

Corolario 4.74. Sean X y (Y, d_Y) espacios métricos con (Y, d_Y) completo, $f : A \subset X \to Y$ un función y $a \in A'$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto V de X con $a \in V$, tal que si $x, y \in (V \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

4.5 Ejercicios

1. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Demostrar que si se suprime de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto finito y arbitrario

de sus términos y se conservan los restantes en el mismo orden relativo, se obtiene una subsucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Recordemos que una **relación de orden** es una relación binaria R definida en un conjunto no vacío X tal que

   (a) Para todo $x \in X : x\ R\ x$ (propiedad reflexiva);

   (b) Para todo $x, y \in X$: si $x\ R\ y$ y $y\ R\ x$, entonces $x = y$ (propiedad antisimétrica);

   (c) Para todo $x, y \in X$: si $x\ R\ y$ y $y\ R\ z$, entonces $x\ R\ z$ (propiedad transitiva).

   ¿Establece el concepto de subsucesión una relación de orden sobre el conjunto de todas las sucesiones en un conjunto no vacío X? Justifique su respuesta.

3. ¿Establece el concepto de reordenación de términos una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las sucesiones en un conjunto no vacío X? Justifique su respuesta.

4. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en un espacio métrico tales que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \neq y_n\}$ es finito. Demostrar que ambas convergen al mismo límite o ambas carecen de límite.

5. Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Demostrar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a x, entonces el conjunto $R(x_n) \cup \{x\}$ es compacto.

6. Demostrar que el rango de una sucesión convergente es relativamente compacto. Dar un contraejemplo que revele que el recíproco no es cierto.

7. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X. Supongamos que:

   (a) El conjunto $R(x_n)$ es relativamente compacto y admite un único punto de acumulación $z \in X$.

   (b) Para cada $x \in R(x_n)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n = x\}$ es finito.

   Demostrar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z. Además, probar que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $R(x_n)$ es infinito, entonces se cumple (a). También, dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en la que se cumple (a) y no (b), pero que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea convergente a z, y otro donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no sea convergente.

8. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que tiene límite x. Probar que si $y < x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $y < x_n$.

9. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que tiene límite $x \neq 0$. Probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces x_n tiene el mismo signo que x.

10. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y con $x < y$. Demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, se tiene que $x_n < y_n$.

11. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y con $x_n < y_n$. Demostrar que $x \leq y$. Dar un ejemplo en el que $x = y$.

12. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en un espacio métrico X y $x \in X$. Probar las siguientes implicaciones:

    (a) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

    (b) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, entonces $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

13. Demostrar que todo número real es el límite de una sucesión de términos racionales.

14. Probar que una sucesión, cuyo rango es relativamente compacto, admite una subsucesión convergente.

15. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:

    (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$: $x_n \leq y_n \leq z_n$,

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

    Probar que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

16. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ es divergente al infinito si para cada $k > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n| > k$.
    (a) Pruebe que una sucesión divergente al infinito no puede ser convergente.
    (b) Dé un ejemplo de una sucesión real que no es convergente ni divergente al infinito.
17. Probar que una sucesión creciente en $\mathbb{R}$, cuyo rango no está acotado superiormente, es divergente al infinito.
18. Sea A un conjunto no acotado en $\mathbb{R}$, demuestre que existen sucesiones divergentes al infinito en A.
19. Demostrar que toda subsucesión de una sucesión divergente al infinito es divergente al infinito.
20. Demostrar que, si toda esfera cerrada en un espacio métrico es compacta, entonces el espacio métrico es completo.
21. Demostrar que toda subsucesión de una sucesión de Cauchy es de Cauchy.
22. Demostrar que las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico discreto son las semiconstantes (es decir, a partir de un momento, la sucesión es constante).
23. Demostrar que todo espacio métrico discreto es completo.
24. Probar que toda sucesión de Cauchy, cuyo rango es finito, es semiconstante.
25. Demostrar que el conjunto derivado (se supone no vacío) de un conjunto precompacto en un espacio métrico completo, es compacto.
26. Sea S un conjunto denso en un espacio métrico X, tal que toda sucesión de Cauchy en S es convergente (no necesariamente en S). Demostrar que X es completo.
27. Probar que, si todo conjunto cerrado y acotado de un espacio métrico X constituye un subespacio completo, entonces X es un espacio métrico completo.

28. Demostrar que toda n-celda en $\mathbb{R}^n$ es compacto.

29. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico compacto. Demostrar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y sólo si toda subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente, converge a x.

30. Sea $\{A_0, A_1, \ldots\}$ una familia infinito numerable de conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$, tal que A_0 es acotado, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que A_k es cerrado de X y $A_{k+1} \subset A_k$. Demostrar que $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ es cerrado de X y no vacío.

31. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ cuyo rango R_0 es acotado. Definamos la familia infinito numerable de conjuntos $\{R_0, R_1, \ldots\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que R_n es el rango de la sucesión $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Construyamos un par de sucesiones reales $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \text{ínf}\, R_n$ y $z_n = \sup R_n$. Demuestre que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes.

    El *Límite inferior de oscilación* y el *límite superior de oscilación* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se definen y se escriben, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

    Probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente si y sólo si sus límites de oscilación son iguales, en cuyo caso, ése es el límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

32. Con el mismo planteamiento y notación del ejercicio 30, demuestre que:

    (a) $A = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} cl_X(R_n)$ es no vacío.

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \text{ínf}\, A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = \sup A$.

33. Probar que toda sucesión en $\mathbb{R}^n$ cuyo rango es acotado, admite una subsucesión convergente.

34. Sea X un espacio métrico tal que toda familia infinito numerable de

$$\{\mathrm{cl}_X(B(x_1, r_1)), \mathrm{cl}_X(B(x_2, r_2)), \ldots\}$$

con $r_n \to 0$ y $\mathrm{cl}_X(B(x_{n+1}, r_{n+1})) \subset \mathrm{cl}_X(B(x_n, r_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tiene intersección no vacía.

Probar que el espacio métrico X es completo.

35. Demostrar el recíproco del teorema 4.20.

36. ¿Es cierto el recíproco del inciso 5 del teorema 4.52?

37. Probar que la unión en una familia infinito numerable de conjuntos magros es un conjunto magro.

38. Demostrar que todo subconjunto de un conjunto magro es magro.

39. Probar que en $\mathbb{R}$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es magro y el de los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría.

40. Sean X un espacio métrico y A, B subconjuntos X. Suponga que A es abierto de X y que $A \cap B$ es magro. Demostrar que $\mathrm{cl}_X(A) \cap B$ es magro. Bajo estas mismas hipótesis, ¿el conjunto $\mathrm{cl}_X(A \cap B)$ será magro?

41. Sean X un espacio métrico y A, C subconjuntos X con $C \subset A$. Suponga que A es abierto de X y que C es compacto. Demostrar que existe $r > 0$ tal que para cada $x \in C$ se tiene que $B(x, r) \subset A$.

42. Mostrar que el recíproco del Corolario 4.31 no es verdadero.

43. Sean X un espacio métrico, $f\colon A \subset X \to \mathbb{R}$ funciones, $a \in A'$. Supongamos que el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Demostrar que:

(a) Si $b < c$, entonces existe una vecindad V de a tal que para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$ se tiene que $f(x) < c$.

(b) Si $b \neq 0$, existe una vecindad V de a tal que para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$ se tiene que $f(x)$ tiene el mismo signo que b.

44. Sean X un espacio métrico, $f, g\colon A \subset X \to \mathbb{R}$ funciones, $a \in A'$. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b_2$.

    Demostrar que:

    (a) Si $b_1 < b_2$, existe una vecindad V de a tal que para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$ se tiene que $f(x) < g(x)$.

    (b) Si para una vecindad V de a se cumple que para cada $x \in (V \setminus \{a\}) \cap A$ se tiene que $f(x) < g(x)$, entonces $b_1 \leq b_2$.

45. Sean X un espacio métrico, $f, g, h\colon A \subset X \to \mathbb{R}$ funciones, $a \in A'$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$. Probar que, si para cada $x \in A$ se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, entonces el $\lim_{x\to a} g(x)$ existe y es igual a b.

46. Sean X un espacio métrico, $b \in X$ y $f\colon A \subset \mathbb{R} \to X$ una función. Suponga que A no está acotado superiormente. El límite de f en $+\infty$ es b, denotado por $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, si para cada vecindad V de b existe un $K > 0$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) \in V$.

47. Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Considere a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X como una función $f\colon \mathbb{N} \to X$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = x_n$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Capítulo 5

Funciones continuas

Este capítulo está dedicado a las funciones continuas; se hace una revisión de las propiedades de tales funciones y su relación con los espacios métricos.

5.1 Continuidad puntual

Comenzamos esta sección con la noción de función continua en un punto de un espacio métrico.

Definición 5.1. Sean X y Y espacios métricos, $a \in A \subset X$. Una función $f : A \to Y$ es **continua** en a si para todo abierto V de Y con $f(a) \in V$, existe un abierto U de X con $a \in U$ tal que $f(U \cap A) \subset V$.

Ahora un lema que nos presenta la continuidad puntual desde una perspectiva similar a la que se da en cursos iniciales de Cálculo.

Lema 5.2. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $a \in A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función. La función f es continua en a si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

Enseguida un teorema que nos muestra que una función siempre será continua en un punto aislado, también nos presenta la noción de continuidad puntual vía un límite (de manera similar como en los cursos básicos de Cálculo).

Teorema 5.3. Sean X y Y espacios métricos, $a \in A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función. Se cumple lo siguiente.

1. Si a es un punto aislado de A, entonces f es continua en a.

2. La función f es continua en a si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demostración. Veamos *1.* Sea V un abierto de Y con $f(a) \in V$. Como a es un punto aislado de A, tenemos que $a \in A \setminus A'$, por lo que existe un abierto U de X tal que $a \in U$ y $U \cap A = \{a\}$. Luego, $f(U \cap A) = f(\{a\}) \subset V$. Así, f es continua en a.

Veamos *2.* Sea $a \in A'$. Supongamos que f es continua en a. Veamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para esto, sea V un abierto de Y con $f(a) \in V$. Como la función f es continua en a, existe un abierto U de X con $a \in U$ tal que $f(U \cap A) \subset V$. Notemos que, $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset f(U \cap A) \subset V$. Luego, $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$. Así, por definición, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ahora, sea $a \in A'$ y supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por el lema 4.69 y el lema 5.2, se obtiene que f es continua en a. $\square$

La continuidad puntual también se puede abordar por medio de sucesiones tal como los asegura el siguiente resultado.

Teorema 5.4. [6, Teorema 6.2] Sean X y Y espacios métricos, $a \in A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función. La función f es continua en a si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Ahora, un teorema interesante sobre el límite de una composición de funciones.

Teorema 5.5. Sean X, Y y Z espacios métricos y $f : A \subset X \to Y$ y $g : B \subset Y \to Z$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si para cada $a \in A'$, se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in B$ y g es continua en b, entonces $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$.

Demostración. Primero, obsérvese que la funcion $g \circ f : A \subset X \to Z$ existe. Sea W un abierto de Z con $g(b) \in W$. Como g es continua en b, existe un abierto V de Y con $b \in V$ tal que $g(V \cap B) \subset W$. Como $V \cap B$ es un abierto de Y con $b \in V \cap B$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, existe un abierto U de X con $a \in U$ tal que $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V \cap B$. Así,

$$g(f((U \setminus \{a\}) \cap A)) \subset g(V \cap B) \subset W,$$

es decir,

$$(g \circ f)((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset W,$$

lo cual significa que $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$. $\square$

El siguiente teorema nos muestra que la composición de funciones continuas es continua.

Teorema 5.6. Sean X y Y espacios métricos, $a \in A \subset X$ y $f : A \to Y$, $g : B \to Z$ funciones. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Demostración. Si $a \in A \setminus A'$, entonces por *1* del teorema 5.3, tenemos que $g \circ f$ es continua en a.

Si $a \in A'$, entonces por *2* del teorema 5.3 y el teorema 5.5, tenemos que $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. Así, nuevamente por 2 del teorema 5.3, concluimos que $g \circ f$ es continua en a. $\square$

5.2 Continuidad global

En esta sección se estudia la continuidad de una función, pero ya no en un punto, sino en un conjunto.

Definición 5.7. Sean X y Y espacios métricos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función. La función f es **continua** en A si f es continua en cada $a \in A$.

Si f es continua en su dominio decimos simplemente que f es continua.

El siguiente lema nos presenta una función continua que mide la distancia desde un punto dado a todos los puntos del espacio métrico.

Lema 5.8. Sea (X, d) un espacio métrico y $a \in X$. La función $f : X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in X$, por $f(x) = d(x, a)$ es continua en X.

Demostración. Sabemos que para cualesquiera $x_0, y \in X$ se cumple que

$$|d(x_0, a) - d(y, a)| \leq d(x_0, y),$$

es decir, $|f(x_0) - f(y)| \leq d(x_0, y)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Si $d(x_0, y) < \delta$, entonces $|f(x_0) - f(y)| < \delta = \varepsilon$. Esto significa que $\lim_{y \to x_0} f(y) = f(x_0)$. Por 2 del teorema 5.3, tenemos que f es continua en x_0. Como esto sucede en cada punto $x_0 \in X$, podemos concluir que f es continua en X. $\square$

Ahora, un lema similar al inmediato anterior nos presenta una función continua que mide la distancia desde un conjunto dado a todos los puntos del espacio métrico.

Lema 5.9. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. La función $g : X \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in X$ por $g(x) = d(x, A)$ es continua en X.

Demostración. Sabemos que para cualesquiera $x_0, x \in X$ se cumple que

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x, x_0).$$

es decir, $|g(x) - g(x_0)| \leq d(x, x_0)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $|g(x) - g(x_0)| < \delta = \varepsilon$, por lo que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Por *2* del teorema 5.3, para cada $x_0 \in X$, tenemos que g es continua en x_0. Como esto sucede en cada punto $x_0 \in X$, podemos concluir que g es continua en X. □

Ahora, un teorema que nos dice que la composición de funciones continuas es continua.

Teorema 5.10. Sean X, Y y Z espacios métricos, $f : A \subset X \to Y$ y $g : B \subset Y \to Z$ tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en A y g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en A.

Demostración. Por el teorema 5.6, tenemos que $g \circ f$ es continua en cada punto de A. □

Existen proposiciones equivalentes de la continuidad de una función en un conjunto tal como lo asegura el resultado siguiente.

Teorema 5.11. Sean X y Y espacios métricos y $f : A \subset X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función f es continua en A.
2. Para cada abierto V de Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de A.
3. Para todo cerrado V de Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es cerrado de A.
4. Para cualquier $U \subset A$ se tiene que $f\left(A \cap \mathrm{cl}_X(U)\right) \subset \mathrm{cl}_Y(f(U))$.

Demostración. Veamos que *1* implica *4*. Sean U un subconjunto no vacío de A y $y \in f\left(A \cap \mathrm{cl}_X(U)\right)$. Así, existe $x \in A \cap \mathrm{cl}_X(U)$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in \mathrm{cl}_X(U)$, por el corolario 4.14, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en U que converge a x. Por otro lado, como $x \in A$, por hipótesis, tenemos que f es continua en x. Así, por el teorema 5.4, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Obsérvese que para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(x_n) \in f(U)$, es decir, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $f(U)$ que converge a $f(x)$. Por el corolario 4.14, concluimos que $y = f(x) \in \mathrm{cl}_Y(f(U))$. Así, $f\left(A \cap \mathrm{cl}_X(U)\right) \subset \mathrm{cl}_Y(f(U))$.

Nótese que $f(A \cap \mathrm{cl}_X(U)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(U))$ equivale a que $\mathrm{cl}_Y(f(A \cap \mathrm{cl}_X(U))) = \mathrm{cl}_Y(f(U))$.

Veamos que *4* implica *3*. Sea V un cerrado de Y. Por hipótesis,

$$f(A \cap \mathrm{cl}_X(f^{-1}(V))) \subset \mathrm{cl}_Y(f(f^{-1}(V))) \subset \mathrm{cl}_Y(V) = V,$$

por lo que $A \cap \mathrm{cl}_X(f^{-1}(V)) \subset f^{-1}(V)$.

Además, $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A \subset \mathrm{cl}_X(f^{-1}(V)) \cap A$. Así, $f^{-1}(V) = A \cap \mathrm{cl}_X(f^{-1}(V))$ y por lo tanto $f^{-1}(V)$ es cerrado de A.

Veamos que *3* implica *2*. Sea V un abierto de Y. Entonces $Y \setminus V$ es cerrado de Y. Por hipótesis, $f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado de A. Además,

$$f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = A \setminus f^{-1}(V),$$

por lo cual $f^{-1}(V)$ es abierto de A.

Veamos que *2* implica *1*. Sea $x \in A$. Supongamos que V es un abierto de Y tal que $f(x) \in V$. Por hipótesis, $f^{-1}(V)$ es un abierto de A y $x \in f^{-1}(V)$, por lo que $f(f^{-1}(V)) \subset V$, es decir, f es continua en cada punto de A, lo cual significa que f es continua en A. $\square$

Las funciones continuas no envían conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, ni conjuntos cerrados en conjuntos cerrados, a continuación enunciamos este hecho de manera más formal.

Observación 5.12. Sean X y Y espacios métricos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua en A. Si U es abierto (cerrado) de A, no implica que $f(U)$ sea un abierto (cerrado) de Y.

Un ejemplo dice más que mil palabras.

Ejemplo 5.13. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = d_{\mathbb{R}}(x, 0)$. Por el lema 5.8, tenemos que f es continua en $[-1, 1]$. Notemos que $(-1, 1)$ es abierto de $[-1, 1]$ y que $f(-1, 1) = [0, 1)$. Como $[0, 1)$ no es abierto de $\mathbb{R}$, este es un ejemplo de que una función continua no envía abiertos en abiertos.

La imagen inversa bajo una función continua de cualquier conjunto abierto (cerrado) del codominio de la función es un conjunto abierto (cerrado) en el dominio de la función.

Corolario 5.14. Sean X y Y espacios métricos, A un abierto (cerrado) de X y $f : A \to Y$ una función. La función f es continua en A si y sólo si para cada abierto (cerrado) V de Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto (cerrado) de X.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. $\square$

Ahora, es momento de conocer uno de los conceptos más importantes en Topología, es un tipo de función especial que, cuando existe, indica que dos espacios métricos son equivalentes, topológicamente hablando.

Definición 5.15. Sean X y Y espacios métricos. Un **homeomorfismo** es una función biyectiva y continua $h : X \to Y$ tal que $h^{-1} : Y \to X$ es continua. Dos espacios métricos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ y lo denotamos por $X \simeq Y$.

Veamos un par de ejemplos clásicos de homeomorfismos. El primero nos dice que cualquier intervalo abierto es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$; el segundo nos dice que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un intervalo abierto contenido en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5.16. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$, es biyectiva, continua y tiene función inversa f^{-1} definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f^{-1}(x) = (b - a)x + a$, que también es continua. Como $f((a, b)) = (0, 1)$, tenemos que la restricción de f al intervalo (a, b) es un homeomorfismo, es decir, (a, b) es homeomorfo a $(0, 1)$.

Ejemplo 5.17. La función $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f(x) = \tan x$, es biyectiva, continua y tiene función inversa f^{-1} definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $f^{-1}(x) = arctan(x)$, que también es continua. Así, f es un homeomorfismo entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\mathbb{R}$.

En la clase de los espacios métricos, ser homeomorfos es una relación de equivalencia (véase la definición 1.26); es decir, si X, Y, y Z son espacios métricos, se cumple lo siguiente:

1. $X \simeq X$ (propiedad reflexiva);
2. si $X \simeq Y$, entonces $Y \simeq X$ (propiedad simétrica);
3. si $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$, entonces $X \simeq Z$ (propiedad transitiva).

Ejemplo 5.18. En el ejemplo 5.17 vimos que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por otro lado, por el ejemplo 5.16 con $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es homeomorfo a $(0, 1)$. Luego, por la propiedad transitiva de los homeomorfismos, tenemos que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(0, 1)$.

Definición 5.19. Un **arco** es un espacio métrico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Sean J un arco, $p, q \in J$ y $h : [0, 1] \to J$ un homeomorfismo. Supongamos que $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Los puntos p y q se llaman **puntos extremos** de J y en este caso se dice que J es un arco que va de p a q. Un espacio métrico X es **arco conexo** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco que va de x a y.

Ahora veamos qué es una extensión de una función en un conjunto.

Definición 5.20. Sean X y Y espacios métricos, $A \subset B \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua. Una **extensión** de f en B es una función continua $g : B \to Y$ tal que para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = g(x)$, es decir, $g|_A = f$.

Si dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo codominio, entonces la colección de imágenes que coinciden entre ambas funciones forman un conjunto cerrado.

Lema 5.21. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $A \subset X$ y $f, g : A \to Y$ funciones continuas en A. El conjunto

$$B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

es cerrado de A.

Demostración. Sea $h : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$ por $h(x) = d_Y(f(x), g(x))$. Veamos que h es una función continua en A. Para esto, sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Como f y g son continuas en a, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d_Y(g(x), g(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, si $d_X(x, a) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |h(x) - h(a)| &= |d_Y(f(x), g(x)) - d_Y(f(a), g(a))| \\ &\leq d_Y(f(x), f(a)) + d_Y(g(x), g(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$. Por *2* del teorema 5.3, para cada $a \in X$, tenemos que h es continua en a, concluyéndose así que h es continua en A.

Ahora, como $\{0\}$ es cerrado de $\mathbb{R}$ y h es continua en A, por *3* del teorema 5.11, tenemos que $h^{-1}(\{0\})$ es cerrado de A, es decir

$$h^{-1}(\{0\}) = \{x \in A : d_Y(f(x), g(x)) = 0\} = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

es cerrado de A. □

Lema 5.22. Sean X y Y espacios métricos y $A \subset X$. Si $f, g : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ son funciones continuas en $\mathrm{cl}_X(A)$ y $f|_A = g|_A$, entonces para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$ se cumple que $f(x) = g(x)$.

Demostración. Sea $B = \{x \in \mathrm{cl}_X(A) : f(x) = g(x)\}$. Notemos que $A \subset B \subset \mathrm{cl}_X(A)$. Por el lema 5.21, el conjunto B es cerrado de $\mathrm{cl}_X(A)$. Luego, $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{cl}_X(B) = B \subset \mathrm{cl}_X(A)$. Así, $\mathrm{cl}_X(A) = B$ y por lo tanto, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, se tiene que $f(x) = g(x)$. □

Teorema 5.23. Sean X y Y espacios métricos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua en A. Existe una función continua $g : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ tal que $g|_A = f$ si y sólo si para cada $a \in A'$ existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Además, g es única.

Demostración. Supongamos que existe una función continua $g : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ tal que $g|_A = f$. Veremos que si $a \in A'$, entonces el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. Para esto, sea $a \in A'$. Notemos que $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{Id}(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a$. Como g es continua en $a \in \mathrm{cl}_X(A)$, por el teorema 5.5, tenemos que $\lim\limits_{x \to a} (g \circ \mathrm{Id})(x) = g(\lim\limits_{x \to a} \mathrm{Id}(x)) = g(a)$. Por otro lado, como para todo $x \in A$, tenemos que $(g \circ \mathrm{Id})(x) = f(x)$, tenemos que $\lim\limits_{x\to a}(g\circ \mathrm{Id})(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Luego, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g(a)$. Así, hemos demostrado que el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ sí existe.

Ahora, supongamos que para cada $a\in A'$ el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Veremos que existe una función continua $g:\mathrm{cl}_X(A)\to Y$ tal que $g|_A=f$, y que además, g es única. Para esto, sea $g:\mathrm{cl}_X(A)\to Y$ definida, para cada $a\in \mathrm{cl}_X(A)$, por

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & \text{si } a\in A,\\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si } a\in A',\end{cases}$$

(recuerde que $\mathrm{cl}_X(A)=A\cup A'$).

Notemos que si $a\in A\cap A'$, por un lado $g(a)=f(a)$ y por otro $g(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Como f es continua en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, por lo que la función está bien definida.

Veamos que g es continua en $\mathrm{cl}_X(A)$. Para esto, sea $a\in \mathrm{cl}_X(A)$. Si a es un punto aislado de A, por *1* del teorema 5.3, tenemos que g es continua en a.

Si $a\in A'$, por definición de g tenemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g(a)$. Sea V un abierto de Y tal que $g(a)\in V$. Existe $r>0$ tal que $B\left(g(a),r\right)\subset V$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g(a)$, por definición, existe un abierto U de X con $a\in U$ tal que $f((U\setminus\{a\})\cap A)\subset B\left(g(a),r\right)\subset \mathrm{cl}_Y(B\left(g(a),r\right))\subset V$.

Sea $B=U\setminus\{a\}$. Luego, $f(B\cap A)\subset \mathrm{cl}_Y(B\left(g(a),r\right))$. Sea $z\in B\cap \mathrm{cl}_X(A)$ y sea W un abierto de X con $z\in W$. Como B es abierto de X, tenemos que $W\cap(B\cap A)=(W\cap B)\cap A\neq\emptyset$, pues $z\in \mathrm{cl}_X(A)$. Así, $z\in \mathrm{cl}_X(B\cap A)=(B\cap A)\cup(B\cap A)'$. Si $z\in B\cap A$, $f(z)\in f(B\cap A)\subset \mathrm{cl}_Y(B\left(g(a),r\right))\subset V$. Así, si $z\in A$, entonces $f(z)=g(z)\in V$.

Por otro lado, si $z\in(B\cap A)'\subset A'$, tenemos que el $\lim\limits_{x\to z} f(x)=g(z)$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $B\cap A$ que converge a z. Luego, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}=\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $g(z)$. Además, $f(x_n)\in f(B\cap A)$, por lo que $g(z)\in \mathrm{cl}_Y(f(B\cap A))\subset \mathrm{cl}_Y(B\left(g(a),r\right))\subset g((U\setminus\{a\})\cap \mathrm{cl}_X(A))\subset V$, por lo que $g(z)\in V$ y así $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$. Por lo tanto, g es continua en a.

Mostremos ahora que si existe $g:\mathrm{cl}_X(A)\to Y$ tal que $g|_A=f|_A$, entonces es única. Para esto, supongamos que hay otra función continua $h:\mathrm{cl}_X(A)\to Y$ tal que $h|_A=f|_A=g|_A$. Como g y h son continuas en $\mathrm{cl}_X(A)$, por el lema 5.21, para todo $x\in \mathrm{cl}_X(A)$ tenemos que $h(x)=g(x)$. Así, g es única.

$\square$

5.3 Continuidad en espacios métricos compactos

En esta sección se revisa la influencia que tienen las funciones continuas en los conjuntos compactos. Uno de los resultados más relevantes es que la compacidad se preserva bajo funciones continuas, tal como lo asegura el resultado siguiente.

Teorema 5.24. Sean X y Y espacios métricos. Si $A \subset X$, $f : A \to Y$ es una función continua y A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $f(A)$. Luego, $f(A) \subset \bigcup\limits_{B\in\mathcal{C}} B$. Como todo $B \in \mathcal{C}$ es abierto de Y y f es continua en A, para todo $B \in \mathcal{C}$ tenemos que $f^{-1}(B)$ es abierto de A. Luego, para todo $B \in \mathcal{C}$, existe un abierto U de X tal que $f^{-1}(B) = A \cap U$. Sea

$$\mathcal{G} = \{U \colon U \text{ es abierto de } X \text{ y } f^{-1}(B) = A \cap U, \text{ para } B \in \mathcal{C}\}.$$

Veamos que $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de A, es decir, que $A \subset \bigcup\limits_{U\in\mathcal{G}} U$. Para esto, sea $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A) \subset \bigcup\limits_{B\in\mathcal{C}} B$. Así, existe $B_1 \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in B_1$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}(B_1) = A \cap U_1$, para $U_1 \in \mathcal{G}$. Así, $x \in U_1 \subset \bigcup\limits_{U\in\mathcal{G}} U$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta de A.

Ahora, como A es compacto, existen $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{G}$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$. Notemos que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que $f^{-1}(B_i) = A \cap U_i$. Veremos que $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$. Sea $y \in f(A)$. Existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Como $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$, existe U_j tal que $x \in U_j$. Luego, $x \in A \cap U_j = f^{-1}(B_j)$. Así, $y = f(x) \in B_j \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$. Por lo tanto, $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$. Como $\{U_1, \ldots, U_m\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$ concluimos que $f(A)$ es compacto. $\square$

Corolario 5.25. Sean X y Y espacios métricos, A un subconjunto compacto de X y $f : A \to Y$ una función continua. Si U es cerrado de A, entonces $f(U)$ es cerrado de Y.

Demostración. Sea U un cerrado de A. Como A es compacto, tenemos que U es compacto. Por el teorema 5.24, tenemos que $f(U)$ es compacto. Así, $f(U)$ es cerrado de Y. $\square$

Teorema 5.26. Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto compacto de X. Si $f : A \to f(A) \subset Y$ es una función inyectiva y continua, entonces $f^{-1} : f(A) \to A$ es continua.

Demostración. Sea U un cerrado de X. Obsérvese que como f es biyectiva, tenemos que $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U) = f(U \cap A)$. Como U es cerrado de X, f es continua y A es compacto, entonces $f(U)$ es cerrado de Y. Así, $f(U \cap A) = f(U) \cap f(A)$ es cerrado de $f(A)$. Luego, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$ es cerrado de $f(A)$. Por lo tanto, f^{-1} es continua. $\square$

Corolario 5.27. Sean X y Y espacios métricos. Si X es compacto y $f : X \to Y$ es una función biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Como f es continua en X y X es compacto, por el teorema 5.24, tenemos que $f(X)$ es compacto. Luego, por el teorema 5.26, tenemos que $f^{-1} : f(X) \to X$ es continua, por lo tanto, por la definición 5.15, concluimos que f es un homeomorfismo. $\square$

Lema 5.28. Si A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, entonces A tiene máximo y mínimo.

Demostración. Si A es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, entonces A es acotado. Luego, el $\sup A$ existe, con $\sup A \in A'$. Como A es cerrado de $\mathbb{R}$, tenemos que $A' \subset \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(A) = A$. Así, $\sup A \in A$. De forma similar, existe $\inf A$, y se puede ver que $\inf A \in A$, concluyendo que todo conjunto compacto contenido en $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. $\square$

Definición 5.29. Sean X un espacio métrico y $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ una función. La función f alcanza el **máximo absoluto** en $p \in A$ si para cualquier $a \in A$, se tiene que $f(a) \leq f(p)$. La función f alcanza el **mínimo absoluto** en $q \in A$ si para todo $a \in A$, se tiene que $f(q) \leq f(a)$.

Teorema 5.30 (Weierstrass)**.** Si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico X y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en A.

Demostración. Si $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ es continua y A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto. Por el lema 5.28, tenemos que $f(A)$ tiene máximo y mínimo, es decir, existen $p, q \in A$ tales que para todo $a \in A$, se cumple que $f(p) \leq f(a) \leq f(q)$. $\square$

Como consecuencia, si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico X con métrica d_X, consideramos $f : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por $f(x) = d_X(x_0, x)$, para algún $x_0 \in A$. Por el lema 5.8, tenemos que f es continua. Luego, por el teorema 5.24, tenemos que $f(A)$ es compacto, por el lema 5.28, existe $q \in A$ tal que $f(q) \leq f(a)$, para todo $a \in A$. De acuerdo a la definición 2.35, tenemos que $d_X(x_0, q) = d_X(x_0, A)$. Supongamos además que B es un subconjunto compacto de X. Sea $g : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por $g(x) = d_X(x, B)$. Como g es continua, por el teorema 5.24, tenemos que $g(A)$ es compacto, y así g alcanza su máximo y su mínimo en A, es decir, existe $q \in A$ tal que para cada $a \in A$, se cumple que $g(q) \leq g(a)$; además, ya que B es compacto, existe $b \in B$ tal que $d_X(q, B) = d_X(q, b)$, por lo que $d_X(q, b) = d_X(A, B)$.

Lema 5.31. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Si A y B son subconjuntos de X tales que A es compacto, B es no vacío y cerrado de X y $A \cap B = \emptyset$, entonces $d_X(A, B) > 0$.

Demostración. Como A es compacto, existe $q \in A$ tal que $d_X(q, B) = d_X(A, B)$. Ahora, como A y B son ajenos, tenemos que $q \notin B = \mathrm{cl}_X(B)$, pues éste es cerrado de X. Así, $d_X(q, \mathrm{cl}_X(B)) = d_X(q, B) > 0$, por lo que $d_X(A, B) > 0$. $\square$

Observación 5.32. Si A y B son cerrados y ajenos, puede suceder que $d_X(A, B) = 0$.

5.4 Continuidad en espacios métricos conexos

Ahora toca el turno de revisar la influencia que tienen las funciones continuas en los conjuntos conexos. Uno de los resultados más importantes es que la conexidad se preserva bajo funciones continuas, tal como lo asegura el resultado siguiente.

Teorema 5.33. Sean X y Y espacios métricos. Si A es un subconjunto conexo de X y $f : A \to Y$ es una función continua en A, entonces $f(A)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $f(A)$ no es conexo. Existe $V \subset f(A)$ tal que $V \neq \emptyset$ y V es abierto y cerrado de $f(A)$. Así, existen un abierto V_1 de Y y un cerrado V_2 de Y tales que $V = V_1 \cap f(A) = V_2 \cap f(A)$. Como f es continua, $f^{-1}(V_1)$ es abierto de A y $f^{-1}(V_2)$ es cerrado de A. Además,

$$\begin{aligned} f^{-1}(V_1) &= f^{-1}(V_1 \cap f(A)) \\ &= f^{-1}(V_2 \cap f(A)) \\ &= f^{-1}(V_2) \\ &= f^{-1}(V), \end{aligned}$$

por lo que $f^{-1}(V) \subset A$ es abierto y cerrado de A. Luego, A no es conexo. $\square$

Veamos algunas consecuencias de este teorema.

Corolario 5.34. Sea X un espacio métrico.

1. Si A es un subconjunto conexo de X y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A, entonces $f(A)$ es un intervalo.

2. Si I es un intervalo contenido en $\mathbb{R}$ y $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en I, entonces $f(I)$ es un intervalo.

3. Si A es un subconjunto compacto y conexo de X y $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ es una función continua en A, entonces $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

4. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado.

5. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \to [c, d]$ es una función continua y biyectiva, entonces $f((a, b)) = (c, d)$.

6. Sean A es un subconjunto conexo de X y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Si para $a, b \in A$ se tiene que $f(a) < c' < f(b)$, con $c' \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in A$ tal que $f(c) = c'$.

7. Sean A es un subconjunto conexo de X y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Si para $a, b \in A$ se tiene que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $c \in A$ tal que $f(c) = 0$.

8. Cualquier conjunto conexo con más de un punto es infinito pero no es infinito numerable.

9. Sea A un subconjunto de X. Entonces A es conexo si y sólo si para cada función continua $f : A \to \mathbb{R}$, se cumple que $f(A)$ es un intervalo.

10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. El inciso *1* se sigue del inciso 8.

2. Por el teorema 3.65, el intervalo I es un conjunto conexo, así, por el inciso *1* tenemos que $f(I)$ es un intervalo.

3. Por el inciso *1* como A es conexo, tenemos que $f(A)$ es un intervalo, además, como A es compacto, por el teorema 5.24, tenemos que $f(A)$ es compacto. Ahora, como $f(A) \subset \mathbb{R}$, por el teorema 3.39, tenemos que $f(A)$ es cerrado y acotado.

4. Por el teorema 3.65, tenemos que $[a, b]$ es conexo. Ahora, como $[a, b]$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $[a, b]$ es cerrado y acotado, por el teorema 3.39, tenemos que $[a, b]$ es compacto. Luego, por el inciso *3*, concluimos que $f([a, b])$ es cerrado y acotado.

5. Se deja como ejercicio.

6. Como f es continua y A es conexo, por el inciso *1*, tenemos que $f(A)$ es un intervalo. Además, $f(a), f(b) \in f(A)$ y $f(a) < c' < f(b)$. Así, $c' \in f(A)$. Luego, existe $c \in A$ tal que $f(c) = c'$.

7. Como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo contrario podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(a) < 0 < f(b)$. Luego, por el inciso *5*, existe $c \in A$ tal que $f(c) = 0$.

8. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por $f(x) = d_X(x, x_0)$, con $x_0 \in A$. Por el lema 5.8, tenemos que f es continua. Ahora, como A es conexo, por el inciso *1*, tenemos que $f(A)$ es un intervalo. Además, existe $b \in A$, con $b \neq x_0$ tal que $f(x_0) = 0 < d_X(b, x_0) = f(b)$. Luego, $f(A)$ es no singular.

Existe $[a, b]$, con $a < b$, contenido en $f(A)$. Tenemos que $f(A)$ es infinito pero no es infinito numerable. Luego, como $f : A \to f(A)$ es suprayectiva, concluimos que A es infinito pero no es infinito numerable.

9. Supongamos que A no es conexo. Existen conjuntos U y V, abiertos y cerrados de A, ajenos y ambos no vacíos cuya unión es A. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U, \\ 1 & \text{si } x \in V. \end{cases} .$$

Si W es un abierto de $\mathbb{R}$, es posible que

1. $0, 1 \in W$,
2. sólo $0 \in W$,
3. sólo $1 \in W$
4. $0, 1 \notin W$.

Si sucede lo primero, $f^{-1}(W) = A$; si suceden lo segundo o lo tercero, $f^{-1}(W) = U$ ó $f^{-1}(W) = V$ respectivamente. Por último, si $0, 1 \notin W$, entonces $f^{-1}(W) = \emptyset$. En todos estos casos, $f^{-1}(W)$ es un abierto de A, por lo que f es continua. Ahora notemos que $f(A) = \{0, 1\}$ no es conexo, y por lo tanto $f(A)$ no es un intervalo.

La proposición recíproca queda como ejercicio para el lector.

10. Si A es un abierto de $\mathbb{R}$, entonces existe una familia de intervalos abiertos $\mathcal{C}$ tal que $A = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$, por lo que $f(A) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} f(I)$. Para cada $I \in \mathcal{C}$, por 5, $f(I)$ es un intervalo abierto. Luego $f(A)$ es abierto de $\mathbb{R}$. Queda como ejercicio para el lector mostrar que esto implica que f^{-1} es continua.

$\square$

5.5 Continuidad uniforme

La continuidad uniforme es también muy importante e interesante cuando se estudian los espacios métricos, por esta razón dedicamos esta última sección del libro a este concepto.

Definición 5.35. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función. La función f es **uniformemente continua** en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$, si $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Lema 5.36. Sean X y Y espacios métricos.

1. Si $A \subset X$ y $f : A \to Y$ es la función definida para cada $x \in A$ por $f(x) = b$, para algún $b \in Y$, entonces f es uniformemente continua.

2. La función identidad $f : X \to X$ es uniformemente continua.

3. Si X es un espacio métrico discreto y $f : X \to Y$ es una función, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Mostraremos que el inciso *3* es verdadero.

Como X es un espacio métrico discreto, la métrica para X es la función D definida, para cualesquiera $x, y \in X$, por

$$D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y d_Y la métrica para Y. Para $\delta < 1$ y $x, y \in A$, si $D(x, y) < \delta < 1$, entonces $D(x, y) = 0$, lo cual implica que $x = y$, es decir, $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Los incisos 1 y 2 quedan como ejercicio para el lector. □

Definición 5.37. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos y $f : A \subset X \to Y$ una función. La función f satisface la **condición de Lipschitz** en A si existe $k > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$, se cumple que $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$.

Observación 5.38. Si f satisface la condición de Lipschitz, entonces f es uniformemente continua (dado $\varepsilon > 0$, elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$). Nótese sin embargo que la afirmación recíproca es falsa. Por ejemplo, consideremos la función $g : (\mathbb{R}, D) \to (\mathbb{R}, ||)$ definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por $g(x) = x$, donde D es la métrica discreta. Sabemos que g es uniformemente continua. Supongamos que satisface la condición de Lipschitz, es decir, que existe $k > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que $|g(x) - g(y)| < kD(x, y)$. En particular, para $x > k$ y $y = 0$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x| \\ &\leq kD(x, 0) \\ &= k \\ &< x, \end{aligned}$$

lo cual significa que $x < x$, lo cual es una contradicción.

Es claro que si una función f es uniformemente continua, entonces f es continua; sin embargo, el recíproco no es cierto, dar un ejemplo.

Teorema 5.39. Sean (X, d_X) un espacio métrico, A un subconjunto de X y $a \in A$. La función $g : A \subset X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in X$, por $g(x) = d_X(x, a)$ es uniformemente continua.

Demostración. Para mostrar que g es uniformemente continua, veremos que g satisface la condición de Lipschitz. Sean $x, y \in A$. Notemos que

$$|g(x) - g(y)| = |d_X(x, a) - d_X(y, a)| \leq d_X(x, y).$$

Luego, g satisface la condición de Lipschitz para $k = 1$, por lo que g es uniformemente continua. □

Teorema 5.40. Sean X, Y y Z espacios métricos y $f : A \subset X \to Y$ y $g : B \subset Y \to Z$ funciones, con $f(A) \subset B$. Si f es uniformemente continua en A y g es uniformemente continua en B, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

Corolario 5.41. Sean X, Y y Z espacios métricos. Si $f : A \subset X \to Y$ es una función uniformemente continua en A y B es un subconjunto no vacío de A, entonces $f|_B$ es uniformemente continua en B.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

Teorema 5.42. Sean X y Y espacios métricos y $A \subset X$. Si $f : A \to Y$ es uniformemente continua y A es precompacto, entonces $f(A)$ es precompacto.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, si $d_X(x,y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como A es precompacto, existen $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$.

Sea $y \in f(A)$. Luego, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Además, existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in B(x_j, \delta)$. Luego, $d_X(x, x_j) < \delta$ y así $d_Y(f(x), f(x_j)) < \varepsilon$, por lo que $f(x) = y \in B(f(x_j), \varepsilon)$, de donde $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f(x_j), \varepsilon)$. Así, $f(A)$ es precompacto. $\square$

Teorema 5.43. Sean X y Y espacios métricos y $A \subset X$. Si $f : A \to Y$ es uniformemente continua en A y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $f(A)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x,y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Además, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $d_X(x_n, x_m) < \delta$. Luego, $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, por lo que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. $\square$

Teorema 5.44 (Heine)**.** Sean X y Y espacios métricos. Si A es un subconjunto compacto de X y $f : A \to Y$ es una función continua en A, entonces f es uniformemente continua en A.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Para $\frac{\varepsilon}{2}$, existe $r_a > 0$ tal que si $x \in (B(a, r_a) \setminus \{a\}) \cap A$, entonces $d_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ (I). Luego, $A \subset \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{r_a}{2}\right)$. Como A es compacto, existen $a_1, \dots, a_n$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{r_i}{2}\right).$$

Sea $\delta = \text{mín}\left\{\frac{r_1}{2}, \dots, \frac{r_n}{2}\right\}$. Sean $x, y \in A$ tales que $d_X(x,y) < \delta$. Existe $j \in \{1, \dots, n\}$ para el cual $x \in B\left(a_j, \frac{r_j}{2}\right)$ Así,

$$\begin{aligned} d_X(y, a_j) &\leq d_X(y, x) + d_X(x, a_j) \\ &< \delta + \frac{r_j}{2} \\ &\leq \frac{r_j}{2} + \frac{r_j}{2} \\ &= r_j, \end{aligned}$$

implicándose que $y \in B(a_j, r_j)$.

Por (I) ya sabemos que $d_Y(f(x), f(a_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, $d_Y(f(y), f(a_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(a_j)) + d_Y(f(y), f(a_j)) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

concluyéndose lo que se quería. □

Corolario 5.45. Sean X y Y espacios métricos y A un conjunto relativamente compacto contenido en X. Si $f : A \to Y$ es una función continua en A y para cada $x_0 \in A'$ el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Por el teorema 5.23, existe una función continua $g : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ tal que $g(x) = f(x)$ para cada $x \in A$. Como A es relativamente compacto, $\mathrm{cl}_X(A)$ es compacto y por el teorema de Heine g es uniformemente continua en $\mathrm{cl}_X(A)$. Así, $g \circ \mathrm{Id} = f$ es uniformemente continua en A. Luego, por el corolario 5.41, tenemos que $g|_A = f$ es uniformemente continua. □

Teorema 5.46. Sean X y Y espacios métricos tales que Y es completo, $f : A \subset X \to Y$ una función y $a \in A'$. Si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un conjunto abierto S de A con $a \in S$ tal que para todo $x, y \in (S \setminus \{a\}) \cap A$:

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

entonces existe el límite de f en el punto a.

Demostración. La demostración queda como ejercicio para el lector. □

Lema 5.47. Sean X y Y espacios métricos tales que Y es completo y A un subconjunto de X. Si $f : A \to Y$ es una función uniformemente continua en A, entonces para cada $a \in A'$ el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Demostración. Como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sean

$z \in A$ y $S = B\left(z, \frac{\delta}{2}\right)$. Para cualesquiera $x, y \in A \cap (S \setminus \{a\})$, se tiene que $d_X(x,a) < \frac{\delta}{2}$ y $d_Y(y,a) < \frac{\delta}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} d_X(x,y) &\leq d_X(x,a) + d_X(a,y) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Así, $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por el teorema 5.46, el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. □

Teorema 5.48. Sean X y Y espacios métricos tales que Y es completo y A un subconjunto de X. Si $f : A \to Y$ es uniformemente continua en A, entonces existe una única función uniformemente continua $g : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ tal que $g|_A = f$.

Demostración. Aplicar Lema 5.47 y el Teorema 5.23. □

5.6 Ejercicios

1. Demostrar el recíproco del inciso 2 del teorema 5.3.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Demostrar que $[0,1] \simeq [a,b]$.

3. Sean X y Y espacios métricos, $f \colon X \to Y$ una función y $a \in X$. Probar que f es continua en a si y sólo si para cada vecindad V de $f(a)$ se tiene que $a \in \mathrm{int}_X(f^{-1}(V))$.

4. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto de X y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Demostrar que si $a \in A$ y $c \in \mathbb{R}$ con $f(a) < c$, entonces existe una vecindad V de a tal que para cada $x \in A \cap V$ se cumpla que $f(x) < c$.

5. Sean X un espacio métrico, $a \in A \subset X$ y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Suponga que para toda vecindad V de a existen $x, y \in V \cap A$ tales que $f(x), f(y)$ son de signos contrarios. Demuestre que $f(a) = 0$.

6. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto de X y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función cuyo rango es acotado. Para $a \in A$, la **oscilación** de f en a es

   $$\omega_f(a) = \text{ínf}\,\{f(V \cap A) \colon V \text{ es una vecindad de } a\}.$$

   Demuestre las propiedades siguientes

(a) f es continua en $a \in A$ si y sólo si $\omega_f(a) = 0$.

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_\alpha = \{x \in A \colon \omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto del subespacio A.

(c) El conjunto $D = \{x \in A \colon f \text{ no es continua en } x\}$ puede expresarse como

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

donde cada D_n es cerrado de A.

7. Sean X y Y espacios métricos, A un subconjunto de X y $f \colon A \to Y$ una función continua en A. Probar que para cualquier $b \in Y$, el conjunto $B = \{x \in A \colon f(x) = b\}$ es cerrado de A.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ es cerrado de $\mathbb{R}$.

9. Sean X y Y espacios métricos. Probar que, si X es un espacio métrico completo, $f : X \to Y$ es una función continua en X y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

10. Sean X un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f es continua en X si y sólo si, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos

$$A_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

$$B_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

son abiertos de X.

11. Sea X un espacio métrico. Probar que si A y B son conjuntos no vacíos, ajenos y cerrados de X, entonces existen conjuntos U y V ajenos y abiertos de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

12. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos siendo (X, d_X) completo y $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función continua en (X, d_X). Para todo $x, y \in X$ sea

$$D(x, y) = d_X(x, y) + d_Y(f(x), f(y)).$$

Demostrar que D es una métrica en X y que el espacio métrico (X, D) es completo. Deducir además que los espacios métricos (X, d_X) y (X, D) son homeomorfos. Demuestre que $f\colon (X, D) \to (Y, d_Y)$ es uniformemente continua en (X, D).

13. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva en X. Demostrar que, si S es un conjunto denso en X, entonces $f(S)$ es denso en Y.

14. Sean X y Y espacios métricos. Demostrar que una función $f : X \to Y$ es continua en X si y sólo si para todo subconjunto B de Y, se tiene que
$$f^{-1}(\mathrm{int}_Y(B)) \subset \mathrm{int}_X(f^{-1}(B)).$$

15. Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto de X. Demostrar que una función $f : A \to Y$ es continua en A si y sólo si para todo subconjunto S de Y se tiene que
$$f^{-1}(\mathrm{int}_X(S)) \subset [X \setminus \mathrm{cl}_X\,(A \setminus f^{-1}(S))] \cap A.$$

16. Sean X y Y espacios métricos, A y B subconjuntos de X y $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ funciones continuas en A y B, respectivamente. Supongamos que para todo $x \in A \cap B$ se cumple que $f(x) = g(x)$. Sea $h : A \cup B \to Y$ una función definida, para todo $x \in A \cup B$, por
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$
Discútase la continuidad de h en $A \cup B$ y proporcione un ejemplo que indique que h puede no ser continua. ¿Qué hipótesis conviene añadir para asegurar la continuidad de h en $A \cup B$?

17. Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto de X. Probar que $f : A \to Y$ es una función continua en A si y sólo si para todo $y \in f(A)$ y para todo $r > 0$, el conjunto $f^{-1}[B(y, r)]$ es abierto del subespacio métrico A.

18. Demostrar que, si un espacio métrico X es compacto y todos sus puntos son aislados, entonces X es finito y X es homeomorfo con un espacio métrico discreto.

19. Sean X y Y espacios métricos, A un subconjunto conexo de X y $f : A \to Y$ una función continua en A. Supongamos que para cada $x \in A$ existe una vecindad V de x tal que f es constante en $V \cap A$. Probar que f es constante en A.

20. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Demostrar que f es un homeomorfismo si y sólo si para todo subconjunto A de X se verifica que
$$f(\mathrm{cl}_X(A)) = \mathrm{cl}_Y(f(A)).$$

21. Consideremos una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde A es compacto, y el conjunto $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$. Probar que f es continua en A si y sólo si G es compacto en el espacio métrico $\mathbb{R}^2$.

22. Sean X un espacio métrico, A un subconjunto de X y $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en A. Demostrar que la función $h : A \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ es continua en A.

23. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\mathbb{R}$. Probar que la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, por $h(x, y) = (f(x), g(y))$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

24. Sean X un espacio métrico y A, B conjuntos ajenos y cerrados de X. Demostrar que existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que para todo $x \in A : f(x) = 0$ y para todo $x \in B : f(x) = 1$.

25. Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto de X. Probar que, si $f : \mathrm{cl}_X(A) \to Y$ es una función continua en $\mathrm{cl}_X(A)$ y constante en A, entonces f es constante en $\mathrm{cl}_X(A)$.

26. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $p \in \mathbb{R}$. La función f es una **función periódica** si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x + p) = f(x)$. En tal caso se dice que f tiene **periodo** p. Demostrar que, toda función periódica y continua en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

27. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto compacto de X. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A y para todo $x \in A$ se cumple que $f(x) > 0$, entonces existe un $k > 0$ tal que para todo $x \in A$ se tiene que $f(x) \geq k$.

28. Sea X un espacio métrico. Probar que un subconjunto no vacío A de X es compacto si y sólo si toda función $f : A \subset X \to \mathbb{R}$, continua en A, alcanza un máximo absoluto en A.

29. Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida, para todo $x \in [a, b]$, por $g(x) = y$, donde Y es el máximo absoluto de f en $[a, x]$. Demostrar que g es continua en $[a, b]$.

30. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que si A es un subconjunto compacto de X, entonces siempre existen puntos $x, y \in A$ tal que $d(x, y) = \text{diám}(A)$.

31. A cada subconjunto A de un espacio métrico X asociamos una función $\psi_A \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A, \end{cases}$

    conocida como la función característica de A.

    (a) Determinar el conjunto donde ψ_A es continua y el conjunto donde no lo es.

    (b) Probar que X es conexo si y sólo si las únicas funciones características continuas en X son $\psi_\emptyset$ y ψ_X.

32. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \to [c, d]$ es una función continua y biyectiva, entonces $f((a, b)) = (c, d)$.

33. Sean X y Y espacios métricos. Probar que, si $f : A \subset X \to Y$ es continua y no constante en el conjunto conexo A, entonces su rango $f(A)$ no es infinito numerable.

34. Probar que si $f \colon A \subset \mathbb{R} \to f(A)$ es estrictamente creciente, entonces es biyectiva y $f^{-1} \colon f(A) \to A$ es también estrictamente creciente.

35. Probar que, si $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f y f^{-1} son estrictamente crecientes o decrecientes y además, f^{-1} es continua en su dominio.

36. Consideremos el conjuto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = sen(\frac{1}{x})\}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}^2$. Compruébese que A es conexo y arco-conexo, pero que $\text{cl}_X(A)$ es conexo y no arco-conexo.

37. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X y $f\colon A \to \mathbb{R}^n$. Pruebe que f es (uniformemente) continua en $a \in A$ si y sólo si f_i es (uniformemente) continua en $a \in A$, para $i = 1, \ldots, n$, donde f_i es la i-ésima coordenada de f.

38. Probar que, si $f : A \subset X \to Y$ es uniformemente continua en el conjunto precompacto A y (Y, d_Y) es completo, entonces $f(A)$ es relativamente compacto.

39. Probar que, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to Y$ es uniformemente continua en el conjunto acotado A, entonces $f(A)$ es precompacto.

40. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Demostrar que una función $f : X \to Y$ es uniformemente continua en X si y sólo si para todo par de subconjuntos no vacíos A, B de X, se tiene que
$$d_X(A, B) = 0$$
implica
$$d_Y(f(A), f(B)) = 0.$$

41. Sea $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada, para todo $x \in (0,1)$, por $f(x) = \frac{1}{x}$. Demostrar que f es continua, pero no uniformemente continua en $(0,1)$ y que su rango no es precompacto.

42. Sea A un subcojunto de $\mathbb{R}$ que es acotado. Probar que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces $f(A)$ es acotado. Dé un ejemplo donde se vea que la imagen continua de un conjunto acotado no es un conjunto acotado.

43. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. Una **norma** sobre V es una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ tal que

    (a) Para todo $v \in V : ||v|| \geq 0$,

    (b) $||v|| = 0$ si y sólo si $v = \mathbf{0}$,

    (c) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V : ||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$,

    (d) Para todo $v, w \in V : ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

Cuando un espacio vectorial tiene definida una norma se llama espacio **vectorial normado**. Sean X un espacio métrico y $f\colon A\subset X\to H$ una función, donde H es un espacio vectorial normado. Definamos la función $g\colon A\subset X\to\mathbb{R}$ como $g(x)=||f(x)||$. Demostrar que

(a) Si f es continua en $x\in A$, entonces g es continua en x.

(b) Construya un ejemplo que indique que el recíproco de (a) es falso.

(c) Si f es uniformemente continua en A, entonces g es uniformemente continua en A.

44. Sean X un espacio métrico y $f,g\colon A\subset X\to\mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas en A. Demostrar que las funciones $f+g$ y fg son uniformemente continuas en A.

45. Probar que, si $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua en (a,b), entonces existen los límites de f en a y en b.

46. Sean X y Y espacios métricos y A un subconjunto precompacto de X. Demostrar que si $f:A\subset X\to Y$ es continua en A, el espacio métrico X es completo y para todo $a\in A'$ el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces f es uniformemente continua en A.

47. Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) espacios métricos. Sean $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$. Consideremos

$$d(z_1,z_2)=\max\{d_X(x_1,x_2),d_Y(y_1,y_2)\},$$

$$d'(z_1,z_2)=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2),$$

$$d''(z_1,z_2)=\sqrt{d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2}.$$

Probar que d,d',d'' son métricas sobre $X\times Y$ y que los espacios métricos resultantes son homeomorfos.

48. Probar que si A_1,A_2 son abiertos en (X,d_X) y (Y,d_Y), respectivamente, entonces $A_1\times A_2$ es abierto de $X\times Y$ con cualquiera de las métricas del ejercicio anterior.

49. Demostrar que el espacio métrico $X\times Y$ con cualquiera de las métricas d,d',d'' es completo si y sólo si son completos (X,d_X) y (Y,d_Y).

50. Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que la métrica d es uniformemente continua.

51. Sean A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y (Y, d_Y) un espacio métrico completo. Suponga que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to Y$ es una función continua en A. Demostrar que f es uniformemente continua en A si y sólo si para todo $a \in A'$ el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

52. Un espacio métrico X tiene la **propiedad del punto fijo** si para cualquier función continua $f \colon X \to X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Al punto p se le llama **punto fijo** de f. Probar que, si $f : X \to X$ es una función continua en X, entonces el conjunto de los puntos fijos de f es un conjunto cerrado de X.

53. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua en $[a, b]$. Demostrar que f admite un punto fijo (no necesariamente único).

54. Sea (X, d) un espacio métrico. Una **función contráctil** es una función $f \colon X \to X$ para la cual existe un número real k con $0 < k < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

    Una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **derivable** en a si el
    $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
    existe. En tal caso, este límite se denota por $f'(a)$ y se llama la **derivada** de f en a. Una función es derivable si es derivable en cada punto de su dominio.

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|f'(x)| \leq k$, donde $0 < k < 1$. Probar que f es una función contráctil en $\mathbb{R}$.

55. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$. Supongamos que su función derivada f' es continua en $\mathbb{R}$ y que f admite un punto fijo $z \in \mathbb{R}$, donde $f'(z) = 0$. Demostrar que existe un intervalo $[a, b]$ tal que toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in [a, b]$ y tal que para todo $n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = f(x_n)$ converge a z.

Referencias

[1] Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Linares Gracia, Armando Martínez García, *Matemáticas Elementales*, Colección Manuales y Textos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.

[2] Fidel Casarrubias Segura, ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.

[3] Ryszard Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlín, 1989.

[4] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre (Fundamentos de la Teoría de Conjuntos)*, Veit & Comp., 1914.

[5] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (Una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, segunda edición, 2019.

[6] Ignacio L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, México, 2008.

[7] José Mateos Cortés, *Propiedades del conjunto de Cantor*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1997.

[8] James Raymond Munkres, *Topology*, second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[9] María Guadalupe Raggi Cárdenas, Juan Alberto Escamilla Reyna, Francisco Javier Mendoza Torres, *Introducción a la teoría de los espacios mé-*

tricos, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[10] Mícheál Ó. Sercóid, *Metric Spaces*, Springer-Verlag London Limited, 2007.

[11] Juan Tarrés Freixenet, *Cien años de los "Grundzüge der Mengelehre" de Hausdorff*, https://www.researchgate.net/publication/284181979_Los_Grundzuge_der_Mengenlehre_de_Hausdorff.

Índice alfabético

La magia de los espacios métricos

Autores: David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Luis Alberto Guerrero Méndez

10 de enero de 2025

Formato: pdf

Peso: 3.051 MB

El cuidado de la edición es de los autores y está a disposición en pdf en la página de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros

La magia de los espacios métricos

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Luis Alberto Guerrero Mendez

La magia de los espacios métricos es un libro diseñado para aquellos que se inician en el estudio de la Topología, con un enfoque particular en los espacios métricos. Esta categoría de espacios es única en comparación con otras clases de espacios topológicos, ya que permite calcular la distancia entre cualquier par de puntos. Los espacios métricos son ricos en propiedades matemáticas y son ideales para la exploración y desarrollo de nuevos teoremas, que son relevantes tanto para la Topología como para otras ramas de las Matemáticas, como el Análisis Matemático, las Ecuaciones Diferenciales, la Probabilidad y la Estadística. ¡Ahí radica su magia!

El contenido está dividido en cinco capítulos. El Capítulo 1 ofrece un repaso de funciones y conjuntos, que resulta fundamental como base para los capítulos siguientes. El Capítulo 2 se centra en los espacios métricos, presentando su definición y los conceptos básicos asociados. El Capítulo 3 explora las valiosas propiedades de compacidad y conexidad. En el Capítulo 4, se abordan sucesiones, límites y espacios métricos completos. Finalmente, el Capítulo 5 se dedica a las funciones continuas, un concepto esencial en todas las ramas de las Matemáticas.

Es importante destacar que cada capítulo incluye una lista de ejercicios, lo que permite al lector poner en práctica lo aprendido y consolidar su comprensión.

BUAP ediciones

ISBN 978-607-2637-10-8

9 786072 637108