Este libro contiene resultados recientes de la investigación en Educación Matemática, los cuales tienen la intención de ser útiles tanto para los docentes de matemáticas de todos los niveles como para todos los interesados en esta área. Los autores que participaron en cada uno de los capítulos nos plantean propuestas y reflexiones que buscan mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas todas ellas apoyadas en una metodología rigurosa o en ideas bien fundamentadas. El contenido de este libro muestra algunas de las tendencias en la Educación Matemática basada en la investigación.

BUAP

textos Científicos

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Avances en la educación matemática basada en la investigación

Avances en la educación matemática basada en la investigación

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Josip Slisko Ignjatov
Editores

Avances en la educación matemática basada en la investigación

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Josip Slisko Ignjatov
Editores

BUAP

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El Errante editor / Érika Maza Hernández
Diseño de interiores

Primera edición, 2017
ISBN: 978-607-525-481-4

Impreso y hecho en México / *Printed and made in Mexico*

Índice

Presentación

La competencia matemática, junto con las competencias lectora y científica, forma parte del "conocimiento y las habilidades para la vida" ("knowledge and skills for life") de los jóvenes de 15 años. Estas competencias son evaluadas cada tres años en el proyecto PISA de la Organización para Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Para la evaluación del año 2012, esta organización definió a la competencia matemática como "la capacidad del individuo para formular, usar e interpretar la Matemática en una variedad de contextos, incluyendo razonar matemáticamente y usar conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos". Esta definición se complementa cuando aseguran que esta capacidad ayuda a los individuos a reconocer el papel que tiene la Matemática en el mundo, a emitir juicios bien fundados y a tomar decisiones que son necesarias en su vida como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

Estas expectativas proponen nuevos retos a la educación matemática. No sobra destacar que el proyecto PISA define y evalúa las competencias que necesitan las sociedades democráticas y la economía globalizada basada en el conocimiento, pero no indica de qué manera, con qué recursos y en qué entornos escolares se pueden lograr eficazmente tales competencias en los sistemas educativos. Ese hecho implica que los grupos, que se dedican profesional y responsablemente a la educación matemática, deben repensar críticamente sus objetivos, recursos y prácticas para ponerlos en resonancia con las exigentes expectativas sociales y con las necesidades económicas.

La mejor manera de lograr lo que se espera de la educación matemática, social y económicamente hablando, es a través de la investigación científica de los procesos que ocurren en el aula y en otros lugares donde se aprenden los contenidos de las matemáticas escolares. Esos complejos procesos de aprendizaje requieren diferentes enfoques investigativos que deben complementarse mutuamente para formar una base confiable para el diseño y la implementación de las reformas educativas.

Este libro contiene 11 capítulos cuyo origen son algunas de las contribuciones presentadas en el III Taller Internacional "Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación" (TEMBI 3), llevado a cabo en el mes de noviembre de 2016 en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Sus formas actuales son el resultado de un proceso de arbitraje estricto por parte de un Comité Científico Revisor conformado para este fin. En gran parte de tal proceso largo y complicado hemos contado con la valiosa colaboración de Eric Flores Medrano y de Dinazar Isabel Escudero Ávila. Aprovechamos esta oportunidad para expresarles nuestro más sincero agradecimiento.

Según su temática fundamental, hemos dividido los capítulos en dos partes. La primera parte reúne consideraciones sobre prácticas de docentes de matemáticas que incluyen tanto exploraciones experimentales como teóricas. Los capítulos en la segunda parte reportan varios resultados de exploraciones experimentales sobre habilidades matemáticas de los estudiantes.

Esperamos que los resultados de las investigaciones presentadas en este libro sean útiles a todos los docentes interesados en la mejora del aprendizaje matemático de sus estudiantes y en su propio desarrollo profesional.

La fuente de nuestra esperanza es el hecho de que entre los autores de los capítulos hay varios estudiantes de maestría en educación matemática que demostraron éxitosamente su interés de explorar científicamente algunos problemas concretos del aprendizaje matemático con estudiantes mexicanos. Estamos seguros que ellos, en un futuro muy próximo, serán los protagonistas del cambio educativo que México necesita para su desarrollo social y económico en el siglo XXI.

H. Puebla de Z., octubre de 2017
Lidia Aurora Hernández Rebollar y Josip Slisko Ignjatov,
Editores

Expresamos nuestra gratitud y reconocimiento por su valiosa contribución al Comité Científico Revisor que estuvo conformado por los siguientes investigadores: Gabriela Buendía Abalos, Erika Canché Góngora, Erika García Torres, Magdalena Rivera Abrajan, Ruth Rodríguez Gallegos, Nielka Rojas González, Mario Sánchez Aguilar, José Gabriel Sánchez Ruíz, Diana Vasco Mora y Santiago Ramiro Velázquez Bustamante.

PARTE I

Consideraciones sobre las prácticas de docentes de matemáticas: Exploraciones experimentales y teóricas

Reflexión sobre el conocimiento geométrico del profesor de matemáticas: la construcción de cajas

Arelis Vargas Luciano y Magdalena Rivera Abrajan[1]

Palabras clave: Conocimiento geométrico, profesor de matemáticas.

Resumen

En la formación continua de profesores de matemáticas el formador juega un papel primordial como aquel que apoya al estudiante-profesor en el desarrollo y la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Considerando el contexto del profesor en servicio, en un programa de actualización continua de profesorado en matemáticas, se llevó a cabo un taller cuyo objetivo era que el profesor reflexionara sobre el conocimiento geométrico y didáctico presente en la construcción de cajas de regalo. El taller se conformó por cuatro fases que entrelazan actividades dirigidas a mostrar el conocimiento didáctico y matemático del profesor. Como resultado, los profesores no lograron identificar todos los conceptos geométricos y aquellos identificados no presentaban la formalidad necesaria dentro de las matemáticas escolares. Asimismo, los profesores reflexionaron sobre las características de sus grupos y el conocimiento previo necesario para la actividad, lo que muestra una reflexión didáctica del mismo.

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas (México). Correo-e: arelisvargasl@gmail.com, mrivera@uagro.mx

Introducción

Las reformas educativas de los últimos años exigen que los profesores tengan las competencias docentes necesarias para llevar a cabo con éxito su labor, solicitando competencias relacionadas al conocimiento de la materia a impartir, así como aquellas que le permitan realizar el proceso enseñanza-aprendizaje de forma adecuada.

La matemática educativa se ha interesado durante décadas por la formación, el conocimiento, el desarrollo y la identidad profesional del profesor de matemáticas. Ponte y Chapman (2006) discuten si el profesor deberá poseer un conocimiento en determinado dominio matemático semejante al necesario en otras profesiones en las que ese conocimiento/saber se utiliza exclusivamente como herramienta y como objetivo único/final.

Ball y Bass (2000) mencionan que un profesor de matemáticas debe realizar cuatro actividades centrales: 1) desglosar ideas y procedimientos matemáticos; 2) escoger representaciones para mostrar ideas matemáticas; 3) analizar métodos y soluciones diferentes de las propias, y 4) deducir lo que entienden sus alumnos.

Mientras que Barnett y Hodson (2001) afirman que los profesores no sólo deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades de ellos.

Marco conceptual

Con la llegada de las últimas reformas educativas donde se han renovado los planes y programas de estudio, generado nuevos libros de texto y materiales de apoyo para la enseñanza e introducido nuevas tecnologías en las aulas, parece evidente apoyar la tendencia profesionalizadora de las tareas docentes del profesor de matemáticas, proponiendo, entre otras cosas, que el profesor disponga de un conocimiento y una competencia profesional específica del área que desarrolla. En este sentido el primer paso sería establecer ¿qué deberíamos entender por conocimiento profesional del profesor de matemáticas?

Shulman (1986) hace una gran contribución en el campo de la comprensión de las componentes del conocimiento de un profesor, partiendo del hecho de que no basta con que el profesor domine el conocimiento de la materia, y propone los siguientes componentes:

-Conocimiento de la materia
-Conocimiento pedagógico general
-Conocimientos curriculares
-Conocimiento sobre los alumnos
-Conocimiento de los contextos educativos
-Conocimiento de los fines y valores educativos
-Conocimiento didáctico del contenido

Ball y colaboradores (2008) presentan una concreción del modelo de Shulman, el cual se enfoca en dos componentes: el dominio del conocimiento de la materia y el dominio del conocimiento didáctico del contenido, ambos dominios cuentan con tres subdominios.

Conocimiento matemático:
- Común
- Especializado
- En el horizonte

Conocimiento didáctico del contenido:
- De contenido y la enseñanza
- De contenido y los estudiantes
- Del currículum

Como producto del modelo de Ball y colaboradores (2008), Carrillo y colaboradores (2013) presentan el modelo que denominan El conocimiento especializado del profesor de matemáticas, Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK, por sus siglas en inglés) del cual tomamos algunas de sus dimensiones para nuestra propuesta del taller.

El modelo de MTSK se divide en dos dominios: de un lado se muestra el conocimiento matemático del profesor (Mathematical Knowledge, MK) y del otro, el conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Knowledge of Content, PCK), en el centro del modelo se encuentran las concepciones y creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje (figura 1).

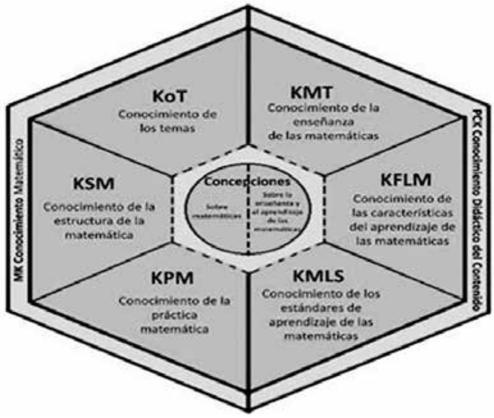


Figura 1: Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

Dentro de los subdominios del MK encontramos el conocimiento de los temas (Knowledge of Themes, KoT) que se refiere a aquellos aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, etcétera, que caracterizan aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que se encuentra en manuales y textos matemáticos.

El conocimiento de la estructura matemática (Knowledge of Mathematical Structure, KSM) es el sistema integrado de conexiones que le permite al profesor comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales a través de una visión avanzada. El conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of Mathematical Practice, KPM) se refiere a las formas de conocer, crear o producir en matemáticas; aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba.

Dentro del PCK consideramos los subdominios siguientes: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of the Teaching of Mathematics, KMT), referente a conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, y la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido determinado.

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of the Features of Learning of the Mathematics, KFLM) toma en cuenta las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, el lenguaje asociado a cada concepto, así como los errores, dificultades u obstáculos posibles.

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS) es aquel conocimiento acerca de lo que el estudiante debe o puede alcanzar en un curso escolar determinado; de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Considerando, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

A partir de ahí, distintos estudios han encontrado la potencialidad del modelo MTSK como herramienta de análisis para profundizar en la comprensión y la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas (Pinto & González, 2008; Aguilar et al., 2013; Escudero et al., 2015).

Metodología

El taller está dirigido a profesores en servicio que están cursando la licenciatura en Matemática Educativa, dicho taller consta de cinco actividades agrupadas en cuatro fases que nos permitirá llegar al objetivo de que los profesores reflexionen sobre el conocimiento matemático y didáctico, particularmente geométrico, presente en la construcción de cajas de regalo.

Las cuatro fases se encuentran fundamentadas en algunos de los subdominios del modelo MTSK, las primeras dos fases las ubicamos en el dominio de conocimiento matemático, específicamente en dos de los tres subdominios; el conocimiento de los temas y la práctica matemática.

En la tercera fase hicimos uso de los tres subdominios del conocimiento didáctico: de la enseñanza de las matemáticas, de las características del aprendizaje de las matemáticas y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

En la última fase se espera que el profesor reflexione sobre su papel en el aula al convertirse en gestor y evaluador de la actividad.

Compartiendo las ideas de Carrillo (2013) se consideró que la dimensión de las creencias permeaba el diseño en su totalidad, por lo que no se consideraron actividades específicas de esta dimensión.

A continuación, describiremos en qué consisten cada una de las actividades.

Fase 1: Construcción de cajas (4 horas)
Objetivo: que el profesor identifique y represente los elementos geométricos presentes en la construcción de una plantilla de una caja de regalo al seguir instrucciones verbales dadas.

Los materiales que se utilizaron fueron:

- Un pliego de cartoncillo
- Lápiz
- Juego geométrico
- Tijera
- Silicón

Primera actividad
Se hace una introducción acerca del taller donde se les muestre la caja a realizar. De forma verbal se les irán dando las instrucciones para la elaboración de la misma.

Fase 2: Reflexión de los conocimientos matemáticos (50 minutos)
Objetivo: que el profesor identifique, defina y comunique los conceptos matemáticos, herramientas y técnicas de construcción utilizados. Reflexione acerca de los mismos y sus relaciones con otros conceptos.

Segunda actividad
Se les presenta una tabla que consta de dos columnas; en la primera deben especificar elementos geométricos implícitos en la construcción de la caja y en la segunda definir cada uno de los elementos.

Tercera actividad
En plenaria comunicarán las definiciones elaboradas en la primera actividad.

Fase 3: Rediseño, ejecución y evaluación de la actividad didáctica de la construcción de la caja de base hexagonal (considerado en las planeaciones de los profesores)
Objetivo: mediante el análisis de una caja de base hexagonal que el profesor construya su instructivo y con el mismo planee una actividad didáctica para sus alumnos.

El material utilizado fue:

- Hojas de papel
- Un pliego de cartoncillo
- Lápiz
- Juego geométrico
- Tijera
- Silicón

Cuarta actividad (3 horas)
Se les presentó una caja de base hexagonal cerrada (figura 2) para que la observaran e identificaran los elementos geométricos utilizados en su construcción.

Figura 2: caja de base hexagonal

Se les pidió que construyeran un instructivo para la elaboración de la caja, para la verificación del mismo y se les proporcionó un pliego de cartoncillo con el que tendrán que construir la caja. Por último, se les pidió que por equipos elaboraran la planeación de una actividad didáctica, que ejecutarían con sus estudiantes, la cual sería videograbada para su análisis.

Fase 4: Confrontación (4 horas)
Objetivo: que el profesor reflexione sobre su práctica docente al analizar el desempeño en el desarrollo de la actividad didáctica planteada.

El material utilizado fue:

- Computadora
- Proyector

Quinta actividad
Se les pidió que comuniquen su experiencia al aplicar la actividad, seleccionando de su videograbación los episodios más relevantes desde su punto de vista, sobre el desarrollo de la misma, desempeño de los estudiantes,

y su papel como gestor de la actividad, presentando al final una evaluación de los elementos mencionados.

Resultados

Los resultados presentados son preliminares hasta este momento, debido a que aún no se termina el análisis, por lo que presentamos solo una descripción de la realización del taller que se llevó a cabo del 27 de octubre al 11 de noviembre del 2016 durante seis sesiones.

Fase 1:
La primera fase se realizó de manera individual (figura 3*)*, se les explicó en qué consistía la primera parte del taller, mostrándoles la caja que deberían construir y se les entregó el material necesario y se siguió el formato de la actividad 1.

Durante la actividad hubo profesores que siguieron las instrucciones de forma precisa, construyendo cada uno de los elementos solicitados. Sin embargo, otros mostraron dificultades al identificar elementos como punto medio, segmento, perpendicular y paralela.

Figura 3: Profesores ejecutando la primera fase

Fase 2:
Al terminar la actividad 1, para la segunda fase, se les pidió llenar la tabla con definiciones. Los profesores presentaron definiciones precisas en conceptos como paralela, perpendicular, punto y vértice. Sin embargo, se presentaron algunas definiciones ambiguas o poco aceptables dentro de

la matemática, por ejemplo, en el caso del rectángulo, donde Francisco lo definió como “polígono de cuatro lados”, y el caso de Miguel con la definición de punto medio como “la división de un segmento” (figura 4).

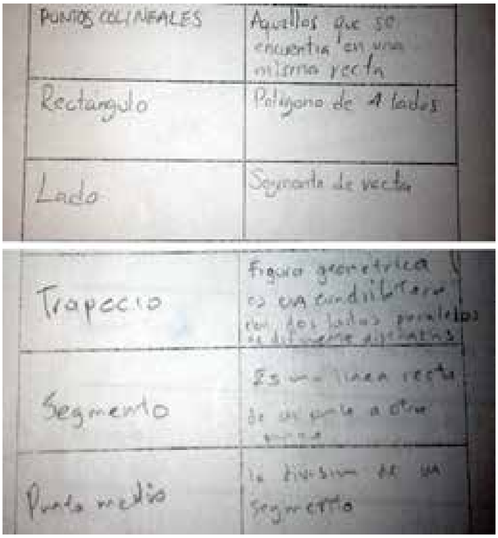


Figura 4: Definiciones planteadas por los profesores

Fase 3:

La cuarta actividad fue realizada por equipos de tres integrantes (figura 5), distribuidos de la siguiente manera:

Equipo 1: Tomás, Óscar y Manuel

Equipo 2: Sugey, Osvaldo y Miguel,

Equipo 3: Raúl, Carlos, Alberto y Francisco.

Figura 5: Equipos

Se les dieron las instrucciones de la actividad, proporcionándoles de forma física la caja para su observación.

El equipo 1 no logró trabajar en equipo (figura 6), por lo que optaron en hacer dos instructivos. El problema fundamental en la construcción de la caja estuvo al realizar la base de la misma por lo que el equipo realizó cortes al azar asegurándose que no faltara ni sobrara cartoncillo. Al escribir una instrucción la realizaban en la plantilla. En caso de que no funcionara su instrucción era modificada.

El equipo 2 (figura 7) observó la caja y tomó medidas para hacer el instructivo, al mismo tiempo que construían la caja, lo que no lograron debido a que no consideraron las medidas correctas en la tapa de la misma.

Por último, el equipo 3 realizó primero la plantilla a escala en una hoja tamaño carta y a partir de comprobar que se armaba correctamente, realizaron el instructivo y la caja en el tamaño solicitado (figura 8).

Figura 6: Equipo 1 trabajando en el instructivo y en la construcción de la caja.

Figura 7: Equipo 2 tomando medidas para construir su caja.

Figura 8: Equipo 3 construyendo la plantilla a escala

A partir de la cuarta actividad, por cuestiones laborales, se modificaron dos de los tres equipos, organizándose de la siguiente manera:

Equipo 2: Sugey, Osvaldo y Carlos

Equipo 3: Raúl, Francisco, Alberto y Miguel

En esta actividad se trabajó el conocimiento didáctico del profesor (PCK) al realizar la planeación por equipos, para el grupo de alumnos de alguno de los integrantes del equipo.

El equipo 1 realizó su planeación para un grupo mixto, compuesto por estudiantes de 1er, 2do y 3er grado de secundaria.

El equipo 2 tomó en cuenta un grupo del 1er grado de bachillerato autónomo para la planeación de su actividad.

Por último, el equipo 3 la realizó para ser aplicada con alumnos del taller de dibujo técnico de un bachillerato general.

Para la planeación de la actividad, dos de los equipos tomaron en cuenta los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), al tomar en cuenta el plan de estudios del sistema educativo donde laboran (figura 9).

Equipo 1

Escuela: Secundaria General no. 82 David Alfaro Siqueiros. La venta, Acapulco, Gro.	**Laboratorio de Matemáticas:** 1°, 2° y 3°.
Eje Temático: Espacio y medida	
Contenido: Desarrollara en cuerpo geométrico, de base hexagonal; resolviendo el trazo en planos y construyendo el modelo	
Consigna: Organizados por grado, formaran equipos de trabajo de 4 alumnos, resolver el proyecto siguiendo solo instrucciones por escrito.	
Objetivo didáctico: El alumno desarrollara sus competencias en geometría y trazo. Lenguaje matemático adecuado, trazo de paralelas, perpendiculares, puntos medios, ángulos, triángulos, rectángulos y modelación.	

Equipo 2

Conocimientos previos	**Conceptos básicos de geometría** **Habilidades de construcción mediante el uso de juego geométrico.** **Comprensión lectora.**

Figura 9: Fragmento de la planeación de los equipos 1 y 2

Cada uno de los equipos utilizó diferentes estrategias para llevar a cabo la actividad con sus alumnos (KMT), por ejemplo:

El equipo 1 planeó proyectar un video sobre un tutorial en el cual se construía una caja similar a la de base hexagonal, pero por cuestiones ajenas al equipo no pudieron proyectarlo, por lo que tuvieron que redefinir la actividad. Formaron equipos según el grado escolar de los estudiantes, otorgándoles la caja y la hoja con las instrucciones para su realización (figura 10), al finalizar su actividad realizaron las siguientes preguntas para evaluar los conocimientos construidos por los estudiantes:

1. ¿Qué figuras geométricas observaste en todo el trazo?
2. ¿Qué tipos de rectas observaste en el desarrollo de tus trazos?
3. ¿Qué figuras geométricas se formaron al armar la caja?
4. ¿Qué tipos de ángulos reconociste en el desarrollo de tus trazos?
5. ¿Qué uso le darás a la caja?

Figura 10: Actividad aplicada por el equipo 1

El equipo 2 realizó su actividad con un grupo de primer grado de la preparatoria de la Universidad Autónoma de Guerrero, formando seis equipos de nueve integrantes cada uno y otorgando a cada equipo el instructivo, pero debido al número excesivo de alumnos y al reducido espacio del aula, la actividad no siguió la planeación propuesta al no seguir los estudiantes las instrucciones, no trabajar en equipo, no conocer los conceptos, no llevar el material requerido para la actividad, etcétera.

Los profesores no lograron redefinir en ese momento su actividad no concluyendo con la misma.

Cabe mencionar que este equipo fue el único que en la planeación tomó en cuenta las dificultades que podrían enfrentar sus estudiantes en relación con el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), sin embargo, no tomó en cuenta las características de su grupo (figura 11).

Problema significativo del contexto:
Los alumnos presentan dificultades en la concepción y aplicación de conceptos geométricos como paralelismo, segmento, vértice, diagonales, etc.

Figura 11. Fragmento de la planeación del equipo 2, mostrando las dificultades que podrían surgir al aplicar su actividad.

El equipo 3 realizó su actividad con un grupo del Colegio de Bachilleres de Acapulco, y formaron tres equipos (figura 12) conforme iban llegando al aula, a cada uno de los equipos se les proporcionó el instructivo de la caja, y al final de la actividad esperaban que el alumno realizara un glosario de todos los conceptos geométricos aplicados en la misma, pero debido a la falta de tiempo no se pudo realizar.

Figura 12: Actividad aplicada por el equipo 3, a alumnos de bachillerato general.

Fase 4:
Para poder llegar a la reflexión de su práctica docente, cada uno de los equipos analizó los videos que grabaron durante la clase, seleccionó fragmentos que consideraron relevantes en los cuales se observaba el rol como maestro, el rol del alumno, el desarrollo de la actividad, etcétera, y el desempeño a partir de los videos que tomaron al realizar la actividad con sus alumnos.

En una plenaria cada equipo comunicó sus resultados por medio de una presentación, en donde compartieron sus resultados y fragmentos de videos seleccionados, como conclusión de sus trabajos reflexionaron sobre los resultados haciendo una crítica de aquellos aspectos que consideraron que podían cambiarse, o que no tomaron en cuenta para su planeación y que se volvieron fundamentales al momento de su aplicación.

El equipo 1 concluyó que les faltó prever algunas situaciones o al menos tener alternativas para cualquier complicación que se presentase, además de que a los alumnos de primer grado de secundaria se les dificultó hacer algunos trazos, lo que atribuyeron a que no consideraron los conocimientos previos de los alumnos al momento de realizar la planeación. Sin embargo, mencionaron que fue una actividad atractiva, en donde observaron que los alumnos salieron interesados por seguir haciendo más tareas de este tipo, e incluso uno de los integrantes de equipo mencionó que, en su carrera de profesor de hace ya más de 28 años, no había realizado una clase similar, en donde los alumnos salieran tan motivados de una clase de matemáticas.

El equipo 2 mencionó que definitivamente tenían que realizar una nueva planeación, ya que no se percataron de inconvenientes que al momento de ejecutar la actividad fueron muy evidentes, tal es el caso de los equipos numerosos que para leer instrucciones y hacer los trazos no se necesitan más de dos o tres personas, y al tener muchos integrantes lo único que se provocó fue descontrol en el aula y que la mayoría en cada equipo no trabajara.

Aunque su experiencia no fue como ellos lo hubiesen deseado, los profesores comentaron, que ahora les gustaría volver a aplicar la actividad en un grupo con esas características, haciendo una nueva planeación en donde tomarían en cuenta cada una de las observaciones referente al conocimiento didáctico (PCK) para cumplir cada uno de los objetivos, tanto los específicos como el general.

Finalmente el equipo 3 señaló que al igual que los otros equipos les faltó tomar en cuenta algunas aspectos, en particular, lo que no les permitió llevar con satisfacción la actividad es que el tiempo no fue suficiente, ya que estimaron en la planeación de su actividad únicamente un tiempo de 80 minutos, pero sus alumnos llegaron después de quince minutos, lo que trajo como consecuencia que no todos terminaran la actividad y que el equipo no pudiera concluir como lo habían establecido, no logrando el objetivo de la misma.

Un factor importante en ese grupo, y para el buen término de la tarea de construir la caja, al tratarse del taller de dibujo técnico, fue que los trazos y las medidas se les facilitaron de la mejor manera al utilizar las herramientas físicas.

Como conclusión del taller, después de la exposición de sus experiencias, se hizo una presentación en la que se les mostró la relación del taller con el modelo que estamos trabajando, el MTSK. Los profesores mencionaron que a pesar de sus años de servicio como profesores y de que se siguen preparando, dentro de la matemática educativa, no se habían percatado de la importancia de entrelazar el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico (PCK).

Conclusiones

Con las situaciones presentadas durante el desarrollo del taller, pretendemos ilustrar algunos de los componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

En el desarrollo del taller podemos notar que, a pesar de que los profesores tienen ya cierta experiencia dando los cursos de matemáticas y trabajan durante casi seis meses con los alumnos donde presentaron el rediseño de su actividad, ninguna de las actividades llegó a su conclusión de forma exitosa (es decir, llegar al objetivo planteado), debido a distintas situaciones (nivel de partida, conocimiento de los participantes, mal planeación de los tiempos, etc.), ya que los profesores no las tenían planificadas; lo cual tiene que ver en todos sus aspectos, con el conocimiento didáctico del contenido.

Durante la primera fase del taller, otro punto importante de señalar es que, donde los participantes debían otorgar definiciones a aquellos elementos geométricos utilizados en la realización de la plantilla de la caja, se observa que el profesor no tiene problemas con las actividades y que sólo necesita saber hacer, quedando de un lado los conceptos empleados, es decir tiene dificultades con el conocimiento de la estructura matemática.

Al presentar el profesor estas dificultades, los objetivos de la actividad de la elaboración de cajas con los alumnos no pudo ser alcanzada, lo que muestra la importancia del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el aprendizaje de los estudiantes.

Durante la presentación de los resultados de sus actividades, por parte de los profesores, estos mostraron un análisis de las debilidades de los estudiantes, sin embargo, no identificaron las debilidades de ellos mismos en los distintos subdominios.

Aún tenemos que realizar un análisis minucioso por subdominio para poder mostrar evidencia precisa de cuáles son las dificultades de los profesores durante el desarrollo de la actividad.

En conclusión, se pretende que el desarrollo de estudios, donde se manifieste el conocimiento profesional de los profesores durante la práctica, de alguna forma permita mejorar esa misma práctica y no sólo identificar sus posibles carencias.

Bibliografía y fuentes de internet

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M., Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. CIBEM, VII, Montevideo, Uruguay, 5063-5068.

Ball, D. L. y H. Bass (2000), “Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics”, in J. Boaler (ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, CT. Ablex, Westport, 83-104.

Ball, D. L., (...) y Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Barnett, J. y Hodson, D. (2001). Pedagogical context knowledge: toward a fuller understanding of what good science teachers know. Science Education, *85*(4), 426-453.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA, 10(1), 53-77.

Mochón, S., y Morales, M. (2010) En qué consiste el conocimiento matemático para la enseñanza de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática*, vol. 22, 87-113.

Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*, 83-100.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 461-494. Roterdham: Sense.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Las explicaciones matemáticas de un profesor al enseñar los conceptos básicos de función

Miguel Picado Alfaro y Jonathan Espinoza González[2]

Palabras clave: calidad matemática de la instrucción, conceptos básicos de función, enseñanza, explicación matemática, profesor de matemáticas

Resumen

La prueba de diagnóstico para profesores de matemáticas en ejercicio de su profesión, aplicada en 2010, y las pruebas de bachillerato para estudiantes de educación secundaria son indicadores que muestran la existencia de limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones en Costa Rica (Ministerio de Educación Pública, 2010, 2012). Esta realidad ha motivado el estudio del desempeño del profesor al enseñar matemáticas, desde aspectos propios del contenido matemático y de la pedagogía.

Este capítulo presenta los resultados de un estudio de caso. Enfoca la evaluación de la calidad matemática de la instrucción de un profesor de matemáticas al enseñar los conceptos básicos de función. Específicamente, desde los planteamientos sobre la Calidad Matemática de la Instrucción (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008) para caracterizar el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, se acentúan las explicaciones matemáticas mostradas por este profesor, su vínculo con la diversidad de procedimientos y métodos de solución y la validación de las soluciones a las tareas propuestas. Como parte de los resultados se

[2] Universidad Nacional de Costa Rica. Correo-e: miguepicado@hotmail.com / espinozaj25@gmail.com

destaca que el desempeño del profesor participante enfoca la generalización, la explicación fundamentada y constante de conceptos matemáticos, la funcionalidad de procedimientos y métodos y una riqueza de lenguaje matemático que incentivan la comprensión de términos matemáticos. No obstante, se han identificado algunas falencias particulares.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas en Costa Rica ha tenido que enfrentar diversas dificultades que ralentizan su evolución y la mejora en su calidad. Entre éstas, los bajos índices de aprobación de los estudiantes en las evaluaciones estandarizadas de matemática, realizadas por el Ministerio de Educación Pública (MEP), para aprobar el bachillerato y los resultados del examen de diagnóstico realizado a profesores de matemática en ejercicio (MEP, 2010), que señalan a un 56,7% de los profesores por encima de la media de aprobación. Estos son algunos indicadores que muestran que la educación matemática costarricense debe mejorar.

Partiendo de la formación y el desempeño en el aula del profesor de matemáticas, nos hemos interesado en estudiar el conocimiento matemático para la enseñanza que tiene un profesor (en adelante, el profesor). Específicamente, delimitamos el estudio a conceptos matemáticos particulares: los conceptos básicos de función, en detalle los conceptos de relación, función, variable dependiente e independiente, preimagen, imagen, dominio, codominio, ámbito o rango, gráfico y gráfica de una función.

La escogencia del tópico de funciones se debe principalmente a que los resultados de las pruebas de bachillerato, que se aplican en el último año de la educación secundaria, indican que este tema presenta los índices más bajos de promoción entre los estudiantes costarricenses (MEP, 2012). Esto revela que existen posibles dificultades y errores en el aprendizaje de este contenido, que podrían ser consecuencia de algunas debilidades en el conocimiento matemático, las estrategias y metodologías de enseñanza que utilizan los profesores durante la enseñanza.

Con especificidad, el problema de investigación se ha planteado a partir de una cuestión: ¿qué características muestran las explicaciones matemáticas de un profesor al enseñar los conceptos básicos de función en la educación secundaria en Costa Rica?

El objetivo general del estudio ha sido evaluar la calidad matemática de la instrucción de un profesor de matemáticas durante el proceso de enseñanza de los conceptos básicos de función a estudiantes de cuarto año de educación secundaria en un colegio académico diurno (colegio público subvencionado por el Estado). Con particularidad, como un componente de propósito general, este estudio buscó caracterizar las explicaciones matemáticas de un profesor cuando enseñaba los conceptos básicos de función descritos.

Marco teórico

Como fundamento teórico se ha considerado la propuesta de Ball, Thames y Phelps (2008) sobre un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT por sus siglas en inglés) (figura 1). Este modelo describe el conocimiento matemático para la enseñanza a partir de dos dominios: el conocimiento del contenido matemático (CCM) y el conocimiento pedagógico del contenido (CPC).

El CCM se compone de tres subdominios: el conocimiento común del contenido matemático, el conocimiento especializado del contenido matemático y el conocimiento en el horizonte matemático. El CPC se organiza a partir del conocimiento del contenido y la enseñanza, el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del currículo.

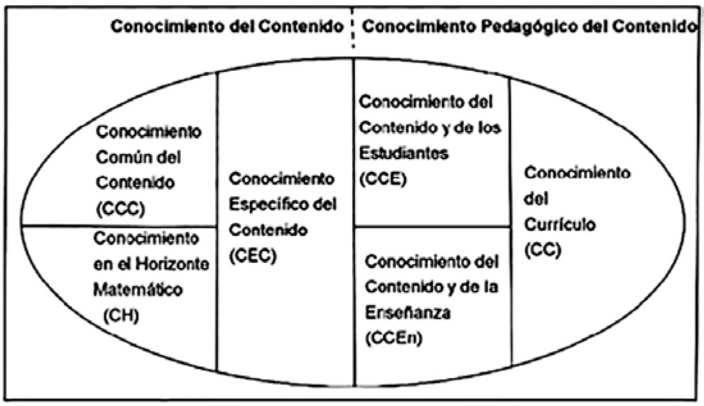


Figura 1. Modelo sobre dominios de conocimiento matemático para la enseñanza
Fuente: Ball, Thames y Phelps, 2008.

Una vez estudiados diversos aspectos del CCM (Rodríguez, Picado y Espinoza, 2015; Rodríguez, Picado, Espinoza y Rojas, en prensa; Rodríguez, Picado, Espinoza, Rojas y Flores, 2016) y del CPC (Picado y Espinoza, 2016; Román, Espinoza y Picado, 2014), la atención se centró en la calidad de la instrucción matemática.

Hill et al. (2008) establecen que la calidad de la enseñanza de las matemáticas depende del conocimiento del contenido para la enseñanza. Por esta razón se considera indispensable abordar de manera preliminar una caracterización del conocimiento matemático y pedagógico para sustentar el estudio de la calidad matemática de la instrucción.

Conceptualmente se entiende la calidad matemática de la instrucción como

> un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas, y observaciones relacionadas (Hill et al., 2008, p. 431, nuestra traducción).

Otros aspectos identificables en el salón de clase, vinculados con la calidad matemática de la instrucción, son el lenguaje matemático utilizado por el profesor, las respuestas que el profesor ofrece a sus estudiantes, los aportes de los estudiantes durante la clase, entre otros.

La propuesta teórica adoptada se compone de un sistema de categorías generales y específicas. Estas últimas están conformadas por subcategorías y permiten una apreciación puntual de cada segmento de la sesión. Por su parte, las categorías generales permiten valorar de manera global la calidad matemática de la instrucción. La tabla 1 destaca las categorías generales y específicas, respectivamente.

Tabla 1. Sistema de categorías considerado para evaluar la calidad matemática de la instrucción

Categorías generales					
Formato del segmento (episodio)	Trabajo en clase está conectado a las matemáticas	Riqueza de las matemáticas	Trabajo con los estudiantes y las matemáticas	Errores e imprecisiones	Participación de los estudiantes al dar significados y razonar
Categorías específicas					
Categoría descriptiva del episodio para distinguir el tipo de actuación del profesor. Se codifica 0 si el trabajo lo realizan los alumnos; se codifica 1 si es el profesor el que lleva el peso de la actuación.	Se codifica 0 si el trabajo no está relacionado con las matemáticas y 1 si lo está	Conexiones Explicaciones matemáticas Múltiples procedimientos o métodos de solución Desarrollar generalizaciones matemáticas Lenguaje matemático	Atención a los errores y dificultades de los estudiantes Respuestas a las producciones matemáticas de los estudiantes durante la instrucción Trabajo con estudiantes y las matemáticas en general.	Principales errores matemáticos o descuidos matemáticos considerables Imprecisiones en el lenguaje o la notación matemática Falta de claridad Errores e imprecisiones en general.	Esta categoría no se ha considerado porque focaliza la participación de los estudiantes mediante sus explicaciones
Nota. La información mostrada corresponde a la traducción hecha por los autores de este capítulo a partir de la propuesta de Hill et al. (2008).					

En cuanto a las categorías específicas cabe destacar que la riqueza de las matemáticas se establece a partir del estudio de las explicaciones matemáticas, la multiplicidad de procedimientos o métodos de resolución, el desarrollo de generalizaciones y el lenguaje matemático empleado. Así, el trabajo con los estudiantes y las matemáticas se basa en sus respuestas a las producciones matemáticas: los errores en el lenguaje se reconocen a partir de las imprecisiones en el lenguaje o en la notación, y la falta de claridad en el discurso; y la participación de los estudiantes en dar sentido y razonar; enfocar el cuestionamiento y razonamiento matemático del estudiante y la activación cognitiva de las tareas promulgadas.

Las explicaciones matemáticas

El papel de las explicaciones del profesor (en formación inicial o en ejercicio de su profesión) ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones.

Charalambous, Hill y Ball (2011) destacan las explicaciones de enseñanza (instructional explanations) enfocando el aprendizaje del futuro profesor de matemáticas. Desde un marco específico, los autores ponen en relieve que estas explicaciones acentúan comportamientos "metacognitivos" que se consideran apropiados para pensar y trabajar en una disciplina, contribuyendo a la formación de conocimiento sustantivo y sintáctico del sujeto. Aunado a esto, resaltan que las explicaciones de enseñanza aportan al establecimiento de normativas en el aula, al fomento de hábitos productivos de la mente y a la formación de identidades disciplinarias.

Con especificidad, las explicaciones de enseñanza se entienden como las articulaciones, demostraciones o arreglos de experiencias que hacen los profesores para comunicar parte de los contenidos a los estudiantes y que están explícitamente orientadas a apoyar su comprensión —del contenido— por parte del estudiante. Éstas deben caracterizarse por ser significativas para los estudiantes y mostrarse sin ambigüedades (Leinhardt, 2001, nuestra traducción).

En matemáticas, estudios como Leinhardt (1987, 1989) han caracterizado las "buenas" explicaciones de enseñanza en esta asignatura. Éstas deben indicar la pregunta u objetivo de la explicación, y abordarse desde el conocimiento conceptual y las habilidades que poseen los estudiantes, para que estos logren pasar de lo que saben a lo que tienen que aprender. Esto implica tomar en consideración las dificultades y errores de los estudiantes y señalar constantemente el logro de aprendizaje esperado.

Aunado a los aspectos cognitivos descritos, las explicaciones de enseñanza en matemáticas deben considerar una selección cuidadosa y oportuna de representaciones y relaciones conceptuales y de tareas. También, deben destacar la aplicabilidad del contenido (los conceptos en estudio) en diversos contextos.

“En matemáticas, las buenas explicaciones de enseñanza son más que simples descripciones de los pasos involucrados en un procedimiento; dan sentido a estos pasos” (Charalambous et al., 2011, p. 443. Traducción nuestra).

Complementariamente, se resaltan las ideas de Hill et al. (2008) en cuanto a las explicaciones matemáticas. Éstas incluyen dar significado matemático a las ideas o procedimientos, y sentido a los métodos de solución y a cada uno de los pasos que se realizan como parte de un procedimiento. Por ejemplo, las explicaciones matemáticas deben destacar por qué un procedimiento es efectivo, por qué un método de solución tiene sentido, o por qué una solución es válida para una tarea determinada.

Metodología

El estudio corresponde a una investigación cualitativa basada en los estudios de caso. Tuvo el propósito de reconocer en la práctica docente (acción de aula) particularidades sobre la calidad matemática de la instrucción de un profesor desde la categoría de las explicaciones matemáticas expresadas, propuesta por Hill et al. (2008), al enseñar los conceptos básicos de función.

La selección del profesor incluyó criterios técnicos como: interés y disponibilidad para participar en la investigación, trabajar en una institución pública de educación secundaria, disponibilidad para que sus clases sean observadas y grabadas en video, disponibilidad para contestar algún instrumento de ser necesario y ser profesor con una plaza fija (propietario), esto por si es necesario durante el proceso de investigación volver a recolectar algún dato.

Además, para la selección final del participante, se consideraron y adaptaron algunas de las características propuestas por Rojas, Carrillo y Flores (2012) que identifican profesores expertos, éstas son:

- Tener al menos cinco años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas.
- Ser un profesor destacado según las evaluaciones institucionales.
- Ser un docente recomendado por sus pares y directivos del centro.
- Particularmente, para este estudio, haber enseñado el contenido de funciones al que alude el tema de investigación.
- Ser consciente del cambio curricular.

La información se recolectó mediante la observación no participante. Se observaron seis sesiones de clase (denominadas episodios). Un episodio corresponde a una o dos lecciones (la lección consta de 40 minutos); esto es, hay episodios de 40 minutos y otros de 80 minutos, según la distribución horaria del grupo seleccionado.

Las sesiones de clase fueron grabadas en audio y video. En total se grabaron más de 220 minutos, de estos la mayoría corresponde a tiempo efectivo de clase. Las grabaciones fueron transcritas y constituyen las fuentes de información con la que se ha realizado el análisis.

Análisis y resultados

Como se ha indicado, el análisis consideró las categorías propuestas para evaluar la calidad matemática de la instrucción. Siguiendo el objetivo específico planteado para este estudio, se hace énfasis en la categoría "explicaciones matemáticas", considerada como componente para evaluar la riqueza de las matemáticas.

Para realizar el análisis del desempeño del profesor sobre las explicaciones matemáticas se consideraron tres indicadores (unidades de análisis) que se describen a continuación. Cabe destacar los términos "procedimiento y método" para efectos del estudio; se entiende el procedimiento como una serie de acciones (pasos) para determinar la solución de una tarea; el método se considera como una manera o un modo ordenado de resolver una tarea. Se considera que un método de solución puede considerar uno o más procedimientos y que una tarea puede resolverse empleando distintos métodos. Las unidades de análisis consideradas realizan lo siguiente:

- *Destacar la funcionalidad de un procedimiento*. El profesor enfatiza en la efectividad de determinados procedimientos para resolver una tarea o parte de la resolución de ésta.
- *Otorgar sentido a un método de solución*. El docente destaca un método para la resolución de tareas y justifica su utilización.
- *Validar las respuestas de las tareas*. Aquí se enfatiza en la comprobación que hace el profesor de las soluciones a las tareas propuestas durante la clase.

La valoración de estos indicadores se llevó a cabo desde tres niveles de evidencia, que forman parte de la propuesta teórica de Hill et al. (2008) (tabla 2).

- *Nivel bajo.* No hay evidencia del indicador o solo se describen procedimientos.
- *Nivel medio.* Se incluyen explicaciones sin detalles y no hay generalizaciones.
- *Nivel alto.* Las generalizaciones son evidentes. Se otorga significado a los pasos y procedimientos. Hay explicaciones detalladas.

Tabla 2. Descripción de indicadores y niveles de evidencia

Indicadores	Bajo	Medio	Alto
Destaca la funcionalidad de un procedimiento			
Otorga sentido a un método de solución			
Valida las respuestas de las tareas			

La información se organizó para cada episodio indicando en cada casilla con *Sí* cuando había evidencia del indicador en el episodio, con *No* en caso contrario. En el primer caso —el afirmativo— se describía la situación (la evidencia) cuando se consideraba oportuno.

Destaca la funcionalidad de un procedimiento

A lo largo de los seis episodios, se ha observado la presentación de generalizaciones para aspectos específicos de los conceptos básicos de función. Por ejemplo, al concluir las “condiciones” o “características” requeridas para identificar una relación como función. También cuando el profesor establece la sustitución de variables como la estrategia para calcular imágenes correspondientes a los elementos del dominio de una función, a partir de un criterio de asociación dado; y al concluir que el cálculo de preimágenes conlleva a la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita (la preimagen).

Aunado a lo anterior, durante las explicaciones, el profesor otorga significado a los pasos realizados y los procedimientos utilizados. Esto es, explica detenidamente cada paso de la resolución de una tarea acentuando su utilidad y el "aporte" al proceso de determinar la solución. Con estas evidencias, se otorga un nivel de valoración alto a este indicador del análisis.

Como otros ejemplos, se destacan los momentos cuando el profesor refiere al modo de determinar la fórmula para establecer el costo o la cantidad de kilómetros en una tarea vinculada a la tarifa de taxi; cuando explica con detalle el procedimiento para calcular imágenes y preimágenes de funciones con criterios de asociación particulares, y cuando insiste en la forma para determinar el gráfico y trazar la gráfica de una función.

A continuación, se presenta la transcripción de un segmento de episodio donde el profesor retoma el concepto de gráfico para insistir en su significado, cuando a los estudiantes se proponen tareas para reconocer relaciones que sean una función.

Profesor:	Ok, recordemos que un gráfico es una forma diferente de representar una relación, puede ser por medio de un diagrama o puede ser por un gráfico, que es el conjunto de pares ordenados. ¿Será esta relación una función?, ¿sí o no?
Estudiante:	Yo digo que sí

En la figura 2 se muestra el inicio de la solución de una tarea para calcular la preimagen de 5 en una función con un criterio de asociación radical. Cabe destacar que previamente el profesor había establecido la igualdad $f(x)=y$.

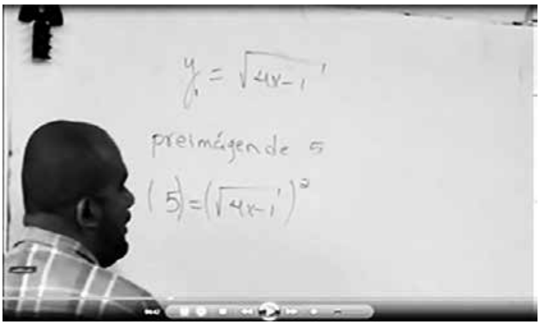


Figura 2. Cálculo de preimagen para una función radical
(tomada de la grabación en video)

Durante esta resolución, el profesor explica el procedimiento para despejar la incógnita *x* de la expresión planteada. Para esto subraya la necesidad de aplicar la segunda potencia en cada uno de los miembros de la igualdad con la finalidad de obtener una expresión equivalente sin radicales.

Otorga sentido a un método de solución

El uso de métodos para la resolución de tareas es notorio en los seis episodios. Junto a esto destaca la manera de explicar el sentido que tienen estos en cada tarea (o tipo de tarea).

El profesor plantea el "método de sustitución" de variable para calcular la imagen de los elementos del dominio, es decir, sustituir la "letra" en el criterio de asociación por el valor de cada preimagen y realizar las operaciones correspondientes. Asimismo, destaca el "método de igualación", entre el criterio de asociación y el valor de una imagen, para calcular la preimagen correspondiente en la función.

El uso de estos métodos se respalda por la presentación de tareas particulares y las explicaciones que dan a entender la utilidad de estos. Por ejemplo, en el episodio 1 el profesor planteó un problema sobre la tarifa del servicio de taxi. Literalmente indicó lo siguiente (el texto entre corchetes corresponde a aclaraciones de los autores, no del profesor):

> En Costa Rica, la identidad que regula los servicios públicos, como lo es la tarifa de taxis, se llama ARESEP (Autoridad Reguladora de Servicios Públicos). La tarifa de un recorrido del primer kilómetro de un taxi es de 605 colones [el colón es la moneda oficial en el país], y por cada kilómetro adicional se debe pagar 600 colones; o sea, después del primer kilómetro cada kilómetro vale un adicional de 600 colones (el profesor aclara que no sabe el costo actual, al momento, de la tarifa de taxi.
>
> 1. ¿Determine el costo de viajar en taxi 2 kilómetros, 3 kilómetros, 4 kilómetros?
> 2. Elabore una fórmula que permita calcular el costo comercial del viaje del taxi de acuerdo al número de kilómetros recorridos
> 3. ¿Cuál es el costo aproximado de 4,6 kilómetros?
> 4. Si una persona dispone de 8000 colones, ¿Cuántos kilómetros aproximadamente puede recorrer en el taxi?

El problema presentado pretende que los estudiantes realicen cálculos aritméticos para cada uno de los escenarios propuestos en las indicaciones 1 y 3. Con la segunda indicación manifiesta tener como propósito conducir a los estudiantes a la generalización de la resolución; esto es, a determinar una forma general para calcular el costo de la tarifa de taxi para un kilometraje específico. Esto le permite destacar el método de sustitución a partir de la fórmula planteada y también acentuar el sentido que tiene el método para resolver este tipo de tareas. Con la indicación 4 se incentiva el razonamiento para justificar el planteamiento de una expresión algebraica (una ecuación) que permitan determinar (calcular) la o las preimágenes de un elemento del ámbito. Esto fomenta el método de igualación, del que deriva el despeje de incógnitas para determinar el valor que hace cumplir la igualdad en las situaciones planteadas.

Un aspecto relevante es la forma en que el profesor destaca los procedimientos (o pasos) realizados por los estudiantes al resolver una tarea, acentuando su aporte en la solución de una tarea. En la figura 3 se puede identificar cómo los estudiantes proponen el cálculo de una preimagen por medio del planteo y resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita.

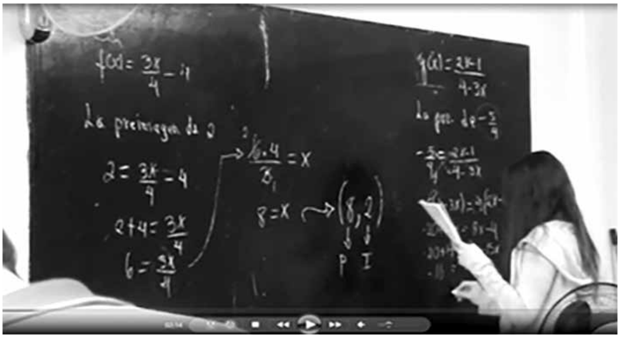


Figura 3. Procedimientos realizados por los estudiantes
(tomada de la grabación en video)

Aquí, el profesor saca provecho de las resoluciones para reiterar el sentido del método de igualación en el cálculo de preimágenes.

Profesor:	…calcule la preimagen de menos cinco cuartos para la función G de equis igual dos equis menos uno, sobre cuatro menos tres equis [véase figura 3]… nos están pidiendo aquí que busquemos la preimagen de menos cinco cuartos, entonces también tenemos que hacer una ¿qué?
Estudiante:	Ecuación
Profesor:	¿Y por qué no una sustitución, jóvenes?
Estudiante:	Porque la imagen ya la tenemos
Profesor:	O sea este [señala en la pizarra el número menos cinco cuartos] es el valor ¿de? De Y. Vamos a hacer la ecuación, menos cinco cuartos ¿es igual a quién? A dos equis menos uno… ¿entre?
Estudiante:	Cuatro menos tres equis
Profesor:	Y esa es la ecuación que tenemos que resolver... Recuerden, que no hay conjunto solución, lo que tenemos que hacer es encontrar la preimagen, la ecuación es para buscar la preimagen, cuidado con eso.

Por último, sobresale en los episodios la forma en que se enlazan conceptos matemáticos (sobre funciones, previamente presentados) y procedimientos que culminan con el trazo de la gráfica de una función.

Este indicador ha sido valorado con un nivel de evidencia alto, debido a las explicaciones detalladas del profesor, el significado que proporciona en cada paso de la resolución de una tarea y la forma en que se derivan algunas de las generalizaciones observadas.

Valida las respuestas de las tareas

Este indicador resalta la comprobación que hace el profesor de las soluciones obtenidas en las tareas propuestas durante la clase. En este sentido, se ha observado en la mayoría de los episodios la comprobación de las soluciones (o respuestas) de las tareas. Es destacable que en uno de los episodios (el episodio 5) no se ha observado la comprobación requerida, es decir, no se mostraron comprobaciones de las soluciones obtenidas.

Durante los episodios 1, 2, 3, 4 y 6 el profesor aprovecha las soluciones dadas por los estudiantes para revisar, explicar y comparar entre éstas. Además, corrobora en la pizarra, o verbalmente, que estas respuestas correspondan a los conceptos estudiados sobre función y las utiliza para reafirmar conceptos. A continuación, se muestra un fragmento de la clase que destaca las soluciones que los grupos de estudiantes propusieron para resolver la tarea del costo de la tarifa de taxi.

Profesor:	Ok, vean que tenemos una fórmula diferente a la del Grupo 1, y la del Grupo 2 es la misma fórmula, ¿verdad? [Se refiere a la forma de calcular la solución a la tarea]. La (c) [refiriendo a la tercera tarea], ahí pusieron la respuesta (…) 2760; por lo tanto, supongo que también hicieron la (d) ¿verdad? Pongan el resultado de la (d) nada más. De la pregunta (d) solo el resultado. Dice que con los 2000 podría viajar aproximadamente 3,6 Kilómetros. Grupo 4 (…), ahí les está coincidiendo con alguno de los resultados anteriores, igual, igual les quedó. En la (d), con los 8000 colones ¿cuántos pudo recorrer entonces Camilo?
Estudiantes:	Dos [kilómetros]
Profesor:	¿Y ustedes lo sacaron así, probando?
Estudiantes:	Sí
Profesor:	¿O hicieron alguna operación? Chicos, es que ellos tienen idéntica la (b), (…) vean que es tanta la diversidad de respuestas que ustedes tienen. Se recuerdan la vez pasada con los problemas de ecuaciones cuadráticas, que ustedes tenían preguntas diversas, respuestas diversas, ahorita lo que tenemos que hacer es llegar a una conclusión general para que todos tengamos exactamente lo mismo. En el Grupo 3 hubo una diferencia, allí entre el mismo grupo, tres personas opinaron una cosa y dos opinaron otra, no llegaron a una conclusión, 7895. Ok, chicos vean, todo lo que hicieron tiene validez, sin embargo, vamos a generalizar ya la situación. Dice que hay una tarifa fija ¿de cuánto?

En el fragmento anterior se aprecia cómo, además de destacar los procedimientos presentados por los estudiantes, el profesor verifica que las respuestas coincidan.

También, es oportuno acentuar que cuando los estudiantes realizaban alguna tarea en clase, el profesor estaba pendiente del progreso en la resolución del ejercicio o problema. Esto se ha evidenciado cuando se acercaba a los pupitres de los estudiantes para observar su producción y corregir aquellos errores que eran detectados, o para dirigir (mediante sugerencias) el trabajo de los estudiantes cuando se reconocían dificultades en su avance o éstas eran manifestadas por ellos. En la figura 4 se destaca un momento en que el profesor se dirigía hacia la parte trasera del aula para verificar el trabajo individual que realizaban los estudiantes.

Figura 4. El profesor revisa el trabajo de los estudiantes
(tomada de la grabación en video)

A pesar de que uno de los episodios se ha valorado con un nivel de evidencia bajo, debido a la ausencia de comprobación de las soluciones en las tareas, a nivel general este indicador corresponde a un nivel alto de evidencia.

Conclusiones

El estudio ha permitido la consolidación de una iniciativa para poner atención al desempeño del profesor de matemáticas en Costa Rica durante la enseñanza de conceptos matemáticos. Esta iniciativa adopta el modelo de categorías propuesto por Hill et al. (2008) para evaluar la calidad matemática de la instrucción. Se incentiva que se atienda con especial atención el tema de las funciones y la capacitación de los profesores en estrategias didácticas que fomenten y fortalezcan aspectos conceptuales y procedimentales que incidan positivamente en el aprendizaje de los estudiantes.

También, desde los resultados obtenidos se promueve la toma de decisiones fundamentada para fortalecer la formación inicial y continua de profesores de matemáticas, abordando, desde distintos enfoques, aquellas temáticas (como el estudio de las funciones) que sobresalen por su dificultad de comprensión y aplicación en la educación matemática costarricense.

Particularmente, la actuación del profesor participante destaca por el reconocimiento de un número considerable de los aspectos que se proponían observar, como insumos para la evaluación de esta calidad de la instrucción.

Las conclusiones del estudio se enmarcan en la categoría riqueza de las matemáticas; éstas destacan aspectos claves sobre las explicaciones matemáticas y tienen como fundamento el análisis realizado por los investigadores a partir de los datos mostrados por el profesor cuando enseñaba los conceptos básicos de función a un grupo de estudiantes de cuarto año de la Educación Diversificada en Costa Rica.

El énfasis que hace el profesor para mostrar y explicar la funcionalidad de cada uno de los pasos de un procedimiento, que se realizan para resolver tareas vinculadas a los conceptos básicos de función, es constante en el desarrollo de las lecciones.

La iniciativa que tiene el profesor para dar sentido a los distintos métodos utilizados para la resolución de las tareas propuestas merece una mención particular. La presentación de modos de resolución de una tarea se acompaña de amplias explicaciones sobre la conveniencia y propósitos de un método de resolución específico.

La resolución de las tareas se complementa (en su gran mayoría) con la validación de las respuestas obtenidas para estas tareas. Esto muestra un interés por que se asegure que el procedimiento realizado es válido y que la respuesta para el ejemplo, ejercicio o problema propuesto sea la correcta. Esta situación acentúa que se explique de manera reiterada cada uno de los pasos ejecutados. Cabe destacar que esta validación de respuestas (o soluciones) obtenidas la lleva a cabo el profesor al final de las tareas que resuelve, pero también se asegura que los estudiantes verifiquen las soluciones durante su participación en la pizarra o cuando resuelven tareas de manera independiente, como trabajo individual.

A pesar de este panorama alentador y positivo, debe destacarse que las explicaciones se destinan a la resolución de tareas en niveles de reproducción, conexión y reflexión. Sin embargo, las asignaciones propuestas a los estudiantes (tareas) no sobrepasan el nivel de reproducción.

La calidad matemática de la instrucción observada a partir del desempeño del profesor participante es alta. Se resalta el amplio dominio de conocimiento matemático y pedagógico, mostrados por el profesor al enseñar los conceptos básicos de función, aspectos que han sido objeto de análisis en otros estudios.

Bibliografía y fuentes de internet

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5); 389-407.

Charalambous, C. Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(441). doi:10.1007/s10857-011-9182-z

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Leinhardt, G. (1987). Development of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons. *Cognition and Instruction, 4*, 225-282.

_____. (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 52-75.

_____. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook for research on teaching* 4a. ed. Washington, DC: American Educational Research Association, 333-357.

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2010). *Primer informe sobre los resultados de la prueba para docentes de matemática Educación Secundaria*. San José, Costa Rica: Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad.

_____. (2012). Programa de Estudios de Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Recuperado de http://www.reformamatematica.net/comunidaded/sites/default/files/programas.pdf

Picado, M. y Espinoza, J. (2016). *Informe sobre el análisis del conocimiento pedagógico para la enseñanza*. Documento sin publicar.

Rodríguez, A., Picado, M. y Espinoza, J. (2015). Conocimiento en el Horizonte Matemático de un profesor para enseñar funciones en cuarto año de secundaria en Costa Rica. En P. Scott y A. Ruiz (eds.). *Actas de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Vol. 2, Tuxtla Gutiérrez, México: Comité Interamericano de Educación Matemática, 125-136.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J. y Rojas, N. (en prensa). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia*.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J., Rojas, N. y Flores, P. (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. *Uniciencia, 30*(1), 1-16.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén, España: SEIEM, 479-485.

Román, C., Espinoza, J y Picado, M. (2015). Conocimiento pedagógico del contenido que utiliza un profesor de matemática para enseñar los conceptos básicos de función en cuarto año de la educación secundaria costarricense. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *28*, 1430-1437. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme28.pdf.

Experiencias positivas y negativas de profesores de secundaria del estado de Guerrero en la clase de matemáticas

Magdalena Rivera Abrajan, Maribel Vicario Mejía y Gustavo Martínez Sierra[3]

Palabras clave: Experiencias emocionales, análisis tematizado, profesor de matemáticas.

Resumen

Este estudio muestra la tematización, siguiendo las etapas de Braun & Clarke (2006, 2012), de experiencias positivas y negativas expresadas por un grupo de ocho profesores de matemáticas de secundaria. La toma de datos se realizó al inicio de los cursos de la Maestría en Docencia de las Matemáticas que ofrece la Universidad Autónoma de Guerrero, con el objetivo de contribuir en las investigaciones referentes al estudio del afecto en la matemática educativa y conocer las relaciones entre las actuaciones de los docentes y su afecto. Los temas con mayor frecuencia localizados en este estudio, agruparon experiencias positivas como autonomía de los estudiantes, ser reconocido por su trabajo como profesor de matemáticas e ingresar a la maestría. Y experiencias negativas como la actitud negativa de los estudiantes cuando una clase no logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva y falta de conocimiento matemático y didáctico.

[3] Universidad Autónoma de Guerrero. Correos: mrivera@uagro.mx / mvicario_maribel@hotmail.com / gmartinezsierra@gmail.com

Introducción

Palmer (1997) argumenta que una buena enseñanza no puede reducirse a las técnicas de enseñanza, ya que proviene de la identidad y la integridad del profesor. El autor considera que la complejidad de la enseñanza tiene tres fuentes importantes: contenido, estudiantes y profesor. El profesor es la fuente que se considera más importante y poco estudiada, sobre todo aquella que habla acerca de la parte subjetiva de la persona en que *el cómo soy se vuelve elemento primordial del cómo enseño.*

En el salón de clases los profesores experimentan distintas experiencias afectivas, las cuales pueden ser antecedentes de predisposiciones algo estables hacia ciertas maneras de actuar, cómo los maestros se sienten en un momento determinado, y los juicios que los maestros realizan ante alguna circunstancia determinada (Schutz, 2009).

Las emociones de los profesores se vuelven parte esencial en los entornos educativos al estar relacionadas con una variedad de resultados, como los concernidos con la importancia de las emociones en los procesos de enseñanza (Frenzel et al, 2009; Schutz, 2014), aquellos relacionados con el bienestar y la salud de los profesores (Frenzel, 2014; Keller et al, 2014; Beilock et al, 2010), o los que muestran la relación con el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes (Becker et al, 2014; Becker et al, 2015).

Así se muestra que las emociones de los profesores son relevantes para los procesos de enseñanza debido a que afectan de manera directa el comportamiento del profesor y dan apoyo a la relación profesor-estudiante, lo que al final puede afectar los resultados de los últimos (Keller et al, 2014). Así mismo, el comportamiento de los estudiantes en el salón de clases tiene repercusiones en las experiencias emocionales de los profesores, las cuales impactan directamente en su estabilidad emocional.

Es importante tener en cuenta que los procesos involucrados en las experiencias afectivas están limitados y se producen dentro de contextos históricos sociales, que pueden influir en el tipo, tendencia y duración de las experiencias emocionales particulares.

En nuestro estudio nos interesa conocer las experiencias positivas y negativas que profesores de secundaria declaran en su labor diaria. Así, la pregunta que guía la investigación es ¿cuáles son las experiencias positivas y negativas que experimenta, en sus clases, un grupo de siete profesores de matemáticas de secundaria del estado de Guerrero?

Nuestro objetivo es realizar un análisis tematizado de las experiencias declaradas en una entrevista que se les realizó a siete profesores de matemáticas que iniciaban un programa de maestría en Docencia de las Matemáticas.

Marco teórico metodológico

Las características generales de los profesores de matemáticas en el estado de Guerrero son muy específicas debido a que la mayoría son profesionistas con una carrera "afín" a las matemáticas. Es decir, no tienen una formación para ser profesor y quienes estudiaron la normal superior, con especialidad en matemáticas, declaran una falta de conocimiento de la materia. En este sentido, la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero ejecuta un programa de profesionalización docente, la Licenciatura en Matemática Educativa, y un posgrado profesionalizante, la Maestría en Docencia de las Matemáticas.

Ambos programas tienen por objetivo

> preparar profesores especializados que se dediquen a promover la constante superación de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles, especialmente el medio-superior; y así mismo, contribuyan a la difusión e investigación de los problemas de enseñanza de esta área (UAGro 1979, pp. 8-10).

En la investigación participaron siete profesores que estaban ingresando al programa de la Maestría en Docencia de las Matemáticas en Acapulco, Guerrero, cinco mujeres y dos hombres, las edades oscilaban entre 24 a 49 años y los años de servicio que tienen los profesores va desde uno hasta 28 años, los nombres presentados son seudónimos de los participantes (tabla 1).

Tabla 1. Datos generales de los participantes

Profesor	Género	Edad	Años en servicio
Dominga	F	24	1 año
Darina	F	29	2 años
Daniela	F	25	3 años

Profesor	Género	Edad	Años en servicio
Rosa	F	48	4 años
Mariana	F	37	5 años
Luis	M	44	8 años
Cesar	M	49	28 años

A todos los participantes se les pidió su autorización para participar en el estudio, estando de acuerdo se les hizo una entrevista videograbada sobre su experiencia como docentes y su práctica cotidiana.

Para la entrevista se siguió un protocolo de 20 ítems, en la tabla 2 presentamos los ítems que se aplicaron para encontrar las experiencias positivas y negativas de los participantes.

Tabla 2. Preguntas realizadas en la entrevista

1. y 2. ¿Cuáles son las principales experiencias (positivas) (negativas) que has tenido a lo largo de tu *vida matemática*? ¿Por qué fueron experiencias (positivas) (negativas)? 3. Cuéntame la historia de tu vida como maestro (a) de matemáticas. 4. y 5. ¿Qué emociones o sentimientos experimentas (por las matemáticas) (en la clase de matemáticas)? ¿Por qué experimentas todo esto? 6. ¿En qué circunstancias y situaciones has experimentado felicidad o alegría como profesor de matemáticas? ¿A qué atribuyes esa felicidad o alegría? 7. ¿En qué circunstancias y situaciones has experimentado tristeza o pesar como profesor de matemáticas? ¿A qué atribuyes esa tristeza o pesar? 8. 11 y 12. ¿Cuáles consideras son las principales metas u objetivos de (una clase de matemáticas) (un curso de matemáticas) (enseñar matemáticas en secundaria)? 13. y 14. ¿Cuáles consideras son tus principales obligaciones o deberes (como profesor de matemáticas) (en la clase de matemáticas)? 15. ¿Cuáles consideras son las principales obligaciones o deberes de tus estudiantes en la clase de matemáticas? Las preguntas de la 8 a 15 además se les daba la siguiente instrucción: En primer lugar, dime la de mayor importancia; en segundo, la que le sigue en importancia y así sucesivamente.

Análisis temático

Para conocer las experiencias positivas y negativas de los profesores tomamos como base el análisis temático (*TA* por sus siglas en inglés) desarrollado por Braun y Clarke (2006).

El análisis temático se diferencia de otros métodos de análisis, como el análisis de descomposición temática o la teoría fundamentada, debido a que es un método para identificar sistemáticamente, organizar y ofrecer un criterio sobre los modelos de significado (tema) de un conjunto de datos.

Al centrarse en el significado de un conjunto de datos, el *TA* nos permite dar sentido a los significados y experiencias de los profesores compartidas, por lo que resultó ideal como base en nuestra investigación.

Aprovechando que el TA tiene la ventaja de poder ser utilizado bajo tres de los enfoques de la investigación cualitativas: inductiva v/s deductiva (codificación v/s análisis de datos basados en la teoría), una orientación crítica v/s experimental hacia los datos, y una perspectiva esencialista v/s una teórica construccionista (Braun y Clarke, 2006), situamos nuestra investigación en el primer enfoque.

Adoptamos un enfoque inductivo para la codificación y análisis de datos, el cual es un enfoque de lo particular a lo general y se guía por lo que se encuentra en los datos. Esto significa que los códigos y los temas se derivan del contenido de los datos, de modo que, lo que el investigador describe durante el análisis coincide estrechamente con los datos.

Al contrario de un enfoque deductivo, donde el investigador aporta a los datos una serie de conceptos, ideas o temas que utiliza para codificar e interpretar los mismos.

Para conocer las experiencias positivas y negativas de los profesores participantes en este estudio seguimos las etapas mencionadas por Braun y Clarke (2006, 2012) para el TA: (1) familiarizándose con los datos, (2) generando códigos iniciales, (3) buscando los temas, (4) revisando temas, (5) definiendo y nombrando los temas, y (6) produciendo el reporte. A continuación, explicaremos cada uno de las etapas en nuestra investigación.

Fases para el análisis temático de las situaciones desencadenantes

Fase 1: Familiarizándose con los datos
Las entrevistas fueron transcritas en su totalidad por personas ajenas a la investigación. Se leyeron repetidamente las transcripciones de las entrevistas para familiarizarnos con los datos. Para identificar aquellos extractos de las entrevistas donde los profesores narraban sus experiencias positivas y negativas, vividas como profesores de matemáticas, se tomaron las siguientes dos definiciones de la literatura:

Experiencia positiva: Circunstancia o acontecimiento vivido por una persona considerado como útil, práctico o beneficioso; y

Experiencia negativa: Circunstancia o acontecimiento vivido por una persona que considera mala, perjudicial o infructuosa.

Fase 2: Generando códigos iniciales
Cada una de las entrevistas fue analizada separando los extractos de las entrevistas, donde los profesores narraban sus experiencias positivas y experiencias negativas. Se localizaron un total de 93 experiencias; 47 positivas y 46 negativas, se propuso una primera codificación de 60 códigos (tabla 3).

Tabla 3. Ejemplo de codificación

Extracto del dato	Código propuesto
Ha sido todo un reto el dar clases de matemáticas, porque no tengo la formación, desconozco muchas cosas de los contenidos, y además de que veo que la actitud de los niños hacía las matemáticas no es buena, y a eso le sumamos que yo no sé enseñar. (Darina)	1. Enseñar es un reto 2. No tengo la formación 3. Desconozco contenidos 4. Actitud mala de los niños 5. No sé enseñar

Posteriormente se redujeron a 53 códigos por considerar 7 dentro del mismo patrón de significado, por ejemplo, los códigos: No cumplir con los objetivos (P2) y actividades que se llevan más tiempo (P3) se redujeron al código de no cumplir con los objetivos de la clase.

Fase 3: Buscando los temas

Analizando los patrones de significados de los códigos se propusieron posibles temas; doce para el caso de experiencias positivas y diez para experiencias negativas, en una segunda revisión se redujeron a siete temas para las experiencias positivas y seis para experiencias negativas.

La reducción se debió a los patrones de significado de las experiencias narradas, por ejemplo, en los temas de experiencias positivas los temas T3P: Cuando mis estudiantes cumplen con sus deberes y T4P: Que los estudiantes logren autonomía como aprendices, se unieron en un solo tema (T4P).

Para las experiencias negativas se redujeron temas como T5P: Malos resultados con los estudiantes y T6N: No comprensión de los temas por los estudiantes a T5N: Cuando una clase no logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva.

Fase 4: Revisando los temas potenciales

Con el primer tercer autor se revisó la evidencia que soportaba los temas sugeridos para verificar la validez de la agrupación de códigos, llegando al acuerdo de que algunos de los temas de experiencias negativas debían ser separados en temas más específicos y característicos, por ejemplo en el caso del tema T1N: Falta de conocimiento para dar clases separarlo a T1N: Falta de conocimiento matemático y T2N: Falta de conocimiento didáctico, llegando a una propuesta final de diez temas para experiencias positivas y diez para negativas.

Fase 5: Definiendo y nombrando los temas

Para nombrar los temas se revisó la selección de extractos de cada tema propuesto, identificando la esencia del conjunto para proponer el nombre del tema final, así como, definir la evidencia que sería presentada en cada uno de los temas.

Resultados

Experiencias positivas

En la tabla 4 se pueden observar los temas de las experiencias positivas que se identificaron en las entrevistas y frecuencia de los mismos.

Tabla 4. Experiencias positivas de profesores

Tema *Mi experiencia positiva como profesor de matemática es…*	Frecuencia *Veces que se menciona*
Que los estudiantes sean autónomos	12
Ser reconocido por su trabajo como profesor de matemáticas	10
Ingresar a la maestría	6
Cuando una clase logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva	5
Lograr cambios en la actitud de los alumnos ante las matemáticas	5
Preparar a sus estudiantes para participar y ganar en concursos de matemáticas	4
Aprender un tema matemático	3
Aprender a enseñar un tema	1
Dar clases	2
Trabajar un proyecto para la enseñanza de las matemáticas.	2

En las siguientes secciones se presentan las evidencias de las experiencias positivas identificadas. Al principio de cada una presentamos una descripción de la experiencia, para después ilustrarlas con extractos de las transcripciones de las entrevistas a los profesores. En los extractos de los participantes hemos resaltado en cursivas las partes que se relacionan directamente con la descripción del tema.

Que los estudiantes sean autónomos

Para algunos de los participantes una experiencia positiva es que los estudiantes trabajen por cuenta propia (sean autónomos) y no sólo por instrucciones del profesor. Esta autonomía es percibida cuando sus estudiantes resuelven problemas “difíciles” o que los resuelven con estrategias diferentes a la que los participantes enseñan.

> Mariana: Cuando veo que mis alumnos resuelven un problema que a veces yo he catalogado como difícil, y me he llevado la sorpresa de que lo resuelven en diez minutos.
> Luis: Es muy bonito cuando veo que los alumnos empiezan a hacer las cosas solos.

Ser reconocido por su trabajo como profesor de matemáticas

Una experiencia positiva es ser reconocido por su trabajo como profesores, este reconocimiento puede provenir de sus superiores, de las felicitaciones de los padres de familia, de los resultados con los estudiantes o porque sus alumnos los busquen después de egresar de la escuela.

> Luis*:* Fue la mamá de uno de los estudiantes a agradecerme por haber motivado a su hijo. Ahí me di cuenta que tal vez uno como maestro piensa que los papás no reconocen nuestro trabajo, pero no es así.
> Daniela*:* En el colegio donde estoy, me solicitaron para trabajar este ciclo escolar. Me llena de satisfacción porque es un colegio de prestigio, y que me hayan dicho que regresara significa que les gusta mi trabajo.

Ingresar a la maestría

Ingresar a la maestría en Docencia de las Matemáticas es considerada por casi todos los participantes como una experiencia positiva y es visto como un logro profesional relevante.

> Dominga*:* A la maestría queríamos entrar nueve niñas, pero solo ingresé yo, tuve la suerte de colarme, fue bueno.
> Daniela: El hecho de haber quedado en esta maestría me hace sentir importante.

Cuando una clase logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva

El percibir que una clase logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva (que muestren interés, que pongan atención, que participen o que les guste la clase) es considerada por algunos de los participantes como una experiencia positiva.

> Luis: Alegrías, cuando yo veo que la clase funcionó, e inclusive un alumno me decía en este ciclo escolar que mi modulo se le hacía bien cortito, porque el sentía que apenas le iba tomando un buen sabor a la clase, y se acababa.
> César: Me siento bien cuando el niño te dice que le gustó la clase, porque hay veces que el niño no está nada motivado

Lograr cambios en la actitud de los alumnos

Lograr cambios "actitud" de los estudiantes es considerada por algunos de los participantes como una experiencia positiva. La actitud es conceptualizada por los participantes en relación al comportamiento de los estudiantes (que pongan más empeño en pasar un examen, que comiencen a entregar trabajos y tareas, que terminen con las actividades en clase) y en relación al agrado o desagrado que los estudiantes muestran hacia las matemáticas y hacia las clases (ver que disfrutan las actividades matemáticas o que mencionan que les agrada la clase).

> Darina: Me di cuenta de niños que no pasaban el examen y empecé a dedicarme más a ellos, al aplicarles un examen, te das cuenta que le están echando más ganas o que pasaron el examen, eso es significativo, porque me hace ver que no estoy tan mal.
> Rosa: Algunos jóvenes que tengo como alumnos de matemáticas no les agradaban, porque decían que en la primaria se la pasaron con puras sumas y restas, y porque no les entendían, cuando les pregunto si ahora les agradan me dicen que sí entienden.

Preparar a sus estudiantes para participar y ganar en concursos de matemáticas

Preparar a sus estudiantes para participar y ganar en concursos de matemáticas son señaladas como experiencias positivas por algunos de los participantes.

> Rosa: Se dio la oportunidad de llevar a nuestros alumnos a concursar en la olimpiada, y comenzamos a preparar a los muchachos en las tardes, como yo daba segundo y tercer grado, me llevé a mis dos niños de matemáticas y nos trajimos el primer y segundo lugar.

> Daniela: El año pasado con uno de mis alumnos empezamos a concursar a nivel zona en matemáticas, en el concurso de nivel zona el ganó el primer lugar, después en zona general también ganó el primer lugar.

Aprender un tema matemático

El aprender un tema de matemáticas le permite al profesor sentirse más seguro con su práctica, por lo que alcanzar ese conocimiento les provoca una experiencia positiva al sentirse como profesionistas.

> Rosa: El aprender ha sido lo mejor, porque tienes conocimientos, pero no tan bien, porque en mi caso cuando yo entré tenía conocimientos de lo que es un porcentaje, un reparto, una ecuación, pero no bien fundamentada, es una experiencia positiva.
> Me alegra haber dado el paso de estudiar matemáticas (licenciatura), me hizo aprender matemáticas y me siento bien, me siento completa como profesionista.

Aprender a enseñar un tema

Paro los profesores que apenas van iniciando su práctica el miedo de enseñar algún tema que no manejan está presente, por lo que aprender a enseñarlo es una experiencia que ellos valoran como positiva.

> Dominga: Apenas aprendí, por ejemplo, a enseñar fracciones que es mi mayor miedo.

Dar clases

La experiencia de dar clases, para una de las profesoras, refleja su compromiso con los alumnos al buscar estrategias para enseñar, así como disfrutar al observar los avances de los alumnos en la misma.

> Mariana: El hecho de dar las clases (ser profesora), de ver la manera en que trabajan los alumnos.
> Mi trabajo, disfruto lo que hago, me apasiona, a veces quizá me preocupo de más porque estoy buscando una estrategia y no me funciona y tengo que ir a

buscar quizá, con compañeros que saben más, entonces me gusta mucho mi trabajo.

Trabajar un proyecto para la enseñanza de las matemáticas

El trabajar un proyecto para la enseñanza de las matemáticas tiene que ver con aquellos proyectos en colaboración, ya sea con profesores o estudiantes, donde se involucran los profesores buscando un beneficio para sus alumnos. Así, el preparar estos proyectos y tener buenos resultados se vuelve una experiencia positiva al lograr sus objetivos.

> Luis: En las reuniones de academia yo promocionaba un proyecto, pero no encontraba eco en mis compañeros, hasta que un día lo pudimos concretar, nos juntamos un grupo de seis para iniciar; de los seis solo quedamos tres.
> Daniela: Organicé una feria de las Matemáticas en el colegio, los muchachos y yo hicimos juegos, la sección de primaria estuvo ahí, y fue bonito porque lo que yo les expliqué, eso fue lo que ellos le explicaban a los de primaria

Experiencias negativas

En la tabla 5 presentamos los temas de las experiencias negativas que fueron identificadas en las entrevistas y la frecuencia de los mismos.

Tabla 5. Experiencias negativas de profesores

Tema Mi experiencia negativa como profesor de matemática está relacionada …	Frecuencia Veces que se menciona
Actitud negativa de los estudiantes	12
Cuando una clase no logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva	11
Falta de conocimiento matemático	7
Falta de conocimiento didáctico	7
No ingresar a la maestría	3
Falta de recursos materiales para dar clase	3

Tema Mi experiencia negativa como profesor de matemática está relacionada …	Frecuencia Veces que se menciona
Falta de tiempo para prepararse por cuestiones burocráticas	4
Falta de compromiso de otros profesores	1
Ser víctima de autoritarismo	1
Problemas sociales de los alumnos	3

Al igual que en el caso de las experiencias positivas, los títulos de las siguientes secciones corresponden al nombre de los temas propuestos para las experiencias negativas. Al principio de cada sección presentamos una descripción de la experiencia, para después ilustrarlos con extractos de las transcripciones de las entrevistas a los profesores, resaltando en cursivas las partes que se relacionan directamente con la descripción.

Actitud negativa de los estudiantes

La “actitud negativa” de los estudiantes (percibida como falta de participación, falta de atención, falta de interés por aprender matemáticas o desagrado hacia las matemáticas) es considerada por algunos de los participantes como una experiencia negativa.

> Darina: Otra sería la actitud de los niños hacía las matemáticas o hacia mi clase, hacen que me desespere, y no sé qué hacer para que me pongan atención.
> Luis: Cuando veo alumnos a los que uno les busca una forma, y luego otra y otra, y veo que no me responden
> Daniela: Que tú quieres una experiencia buena y no se logra, por la apatía, por la falta de disposición.

Falta de conocimiento matemático

La falta de conocimiento matemático, ya sea en términos generales del contenido o particulares, como las fracciones provoca en los profesores dificultades a la hora de impartir su clase, teniendo como resultados experiencias negativas

> Darina: Algo negativo es que no tengo la formación. Desconozco muchas cosas de los contenidos.
> Dominga: Una cosa que se me dificultó mucho fueron las fracciones, en el primer interinato las omitía, porque se me dificultaban.
> Rosa: Cuando empecé el primer año, y eso que tenía pocos niños, sentí que tenía deficiencias, analizando mis libretas anteriores me doy cuenta que tenía errores.

Falta de conocimiento didáctico

La falta de conocimiento didáctico es percibida en los profesores en aquellas experiencias donde el profesor se siente sin las herramientas necesarias para enseñar un tema o dar la clase de matemáticas lo que resulta en sentimientos de frustración o culpa como lo muestran los siguientes extractos:

> Darina: La frustración que me produce el no saber cómo enseñar las cosas, y que los niños no me entiendan.
> Dominga: Enseñar mal un contenido en la clase es muy feo.
> Cesar: Cuando te dice uno de los compañeros que no enseñas bien es muy vergonzoso

Cuando una clase no logra que los estudiantes reaccionen de manera positiva

Este tema engloba aquellas experiencias donde no logran que los estudiantes se interesen, pongan atención o comprendan el tema. Los extractos que se presentan a continuación dan muestra de eso.

> Daniela: No hay acercamiento, tratas de llamar su atención de una forma o de otra, les pones el juego que lo manipulen, todo queda ahí, porque no se llega a una comprensión del tema.
> Mariana: A veces planeo una actividad que pienso que en una o dos sesiones va a quedar clara y los estudiantes no reaccionan de manera positiva, entonces, resulta que se lleva más tiempo, que era más compleja de lo que uno pensaba.

No ingresar a la maestría

Los intentos fallidos por ingresar a la maestría en docencia de las matemáticas son considerados como experiencias negativas, debido a que una de las normas que mencionan es que el profesor debe estar actualizado para impartir clases.

> Darina: Cuando hice el examen aquí [para la maestría], no tenía mucho conocimiento, y me frustré, pensaba que no iba a pasar, y si lo hacía quizá no la iba a hacer.
> Luis: Una experiencia negativa que tuve, fue la primera vez que intenté entrar a la maestría y me quedé fuera, solo pensé que no podría prepararme más como profesor.

Falta de recursos materiales para dar clase

La falta de recursos para llevar a cabo su clase, ya sean tecnológicos o didácticos, es una experiencia negativa debido a que les impide un buen desarrollo de su clase.

> Daniela: Cuando no cuento con el material didáctico que necesito en mi trabajo… eso me desmotiva, no me siento libre.
> Darina: No contar con las herramientas suficientes, por ejemplo, si quiero bajar a mis alumnos al aula de medios para ponerles un ejercicio, pero en el aula solo están cinco computadoras, son insuficientes porque están amontonados y termino frustrada,

Exceso de trabajo burocrático

El trabajo burocrático al que se enfrenta un profesor tiene que ver con las reuniones, formatos que elaborar, reportes, etcétera, trabajo que consideran innecesario y que les quita tiempo que podrían utilizar para preparar o mejorar su práctica.

> Mariana: El tiempo como maestro ya no lo aprovechas al cien, las cuestiones administrativas nos quitan tiempo, tanto en el salón como fuera de la escuela,

> el tiempo que podemos utilizar para planear mejores estrategias o elaborar materiales no podemos dedicarlo a eso.

Problemas sociales de los alumnos

Solo una de las profesoras menciona experiencias negativas relacionadas con el uso de drogas por parte de los alumnos, lo que impide un buen desempeño o la deserción del sistema. La incapacidad de no poder hacer algo por rescatarlos la vuelve una experiencia negativa.

> Mariana: Hay alumnos que no puedo rescatar, por cuestiones personales de ellos, problemáticas que tienen en sus familias. Ha habido alumnos muy talentosos que se perdieron en el mundo de las drogas.
> He tenido alumnos muy buenos que resaltan, porque tienen una gran capacidad para razonar, para pensar, para solucionar problemas, y desgraciadamente no tienen la oportunidad de culminar la escuela, porque son atrapados en el mundo de las drogas

Los dos últimos temas no se muestran por solo tener una experiencia expresada por los profesores y no es un factor que altere las conclusiones generales.

Conclusiones

El análisis de entrevistas a siete profesores de matemáticas de secundaria nos permitió identificar un total de 49 situaciones desencadenantes de experiencias emocionales positivas y 52 desencadenantes de experiencias emocionales negativas. Aproximadamente, 40% de las experiencias positivas se concentran en dos situaciones: "que los estudiantes sean autónomos" y "el ser reconocido por su trabajo como profesor de Matemática". El 50% de las experiencias negativas son desencadenadas por "la mala actitud de los estudiantes" y la "falta de conocimiento matemático o didáctico del profesor" participante.

Las experiencias positivas que declaran los profesores se basan en expectativas que tienen respecto a diversos agentes: los estudiantes, directivos, padres de familia y ellos mismos al lograr metas establecidas, llevándolos a tener emociones como ser felices por aprecio, orgullo, etcétera. Mientras que, en el caso de las experiencias negativas se desarrollan al no cumplir con una meta establecida, por lo que, son el único agente responsable.

Los profesores se sienten mal equipados para ser profesores de matemáticas, expresan que no tiene las herramientas didácticas y matemáticas adecuadas para lograr el aprendizaje de los alumnos presentando diversas emociones como reproche, frustración, congoja, etcétera.

Estas experiencias afectivas en la literatura las podemos encontrar como episodios emocionales, los cuales pueden ser caracterizados como un proceso que implica juicios sobre “algo” dentro de un contexto histórico-social (Schutz et al., 2009).

Con las entrevistas realizadas a los profesores se observa que el aula puede ser un lugar intensamente emotivo donde los maestros y los estudiantes son los actores principales y las influencias dominantes en la construcción de las relaciones afectivas, sin embargo, los directivos y los padres pueden también tener entrada en el clima emocional. Por lo tanto, la clase de matemáticas es un lugar donde la mezcla de influencias emocionales de profesores y estudiantes tiene el potencial, basado en valoraciones y atribuciones individuales.

Los programas de formación de profesores descuidan o describen superficialmente los aspectos emocionales que coexisten en las interacciones que se llevan a cabo en la clase y que pueden preparar a los maestros para manejar situaciones emocionales durante las mismas. Por lo tanto, podríamos sugerir que la naturaleza emocional del aula ofrece varias implicaciones para la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Bibliografía y fuentes de internet

Becker, E., Goetz, T., Morger, V., & Ranellucci, J. (2014). The importance of teachers’ emotions and instructional behavior for their students’ emotions – An experience sampling analysis. *Teaching and Teacher Education, 43*, 15-26. http://doi.org/10.1016/j.tate.2014.05.002.

Becker, E., Keller, M., Goetz, T., Frenzel, A. C., & Taxer, J. L. (2015). Antecedents of teachers’ emotions in the classroom: an intraindividual approach. Frontiers in Psychology, 6(May), 1-12. http://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00635.

Beilock, S. L., Gunderson, E. A, Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *107*(5), 1860-1863. http://doi.org/10.1073/pnas.0910967107.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). *Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology*, 3, 77-101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa.

_____. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology*, Vol. 2, Washington, DC: American Psychological Association, 57-71. http://doi.org/10.1037/13620-004.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Stephens, E. J., & Jacob, B. (2009). Antecedents and effects of teachers' emotional experiences: An integrated perspective and empirical test. In *Advances in teacher emotion research: the impact on teachers' lives*, 129-151. http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0564-2_7.

Frenzel, A. (2014). Teacher emotions. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education*. New York, NY: Routledge, 494-519.

Keller, M., Frenzel, A., Goetz, T., Pekrun, R., & Hensley, L. (2014). Exploring teacher emotions: a literature review and an experience sampling study. In P. W. Richardson, S. A. Karabenick, & H. M. G. Watt (Eds.), *Teacher motivation: Theory and practice*, New York, NY: Routledge, 69-82.

Palmer, P. (1997). The courage to teach: Exploring the inner landscape of a teacher's life. San Francisco, CAl Iossey-Bass.

Schutz, P., Aultman, L. & Williams-Johnson M. (2009). In Schutz, P. and Zembylas, M. (eds.), Advances in Teacher Emotion Research: The Impact on Teachers' Lives, http://doi.org/10.1007/978-1-4419-0564-2_10.

Schutz, P. A. (2014). Inquiry on Teachers' Emotion. *Educational Psychologist*, *49*(1), 1-12. http://doi.org/10.1080/00461520.2013.864955.

Universidad Autónoma de Guerrero. (1979). Planes y programas de estudios. México: UAGro, 8-10.

Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del profesor, tecnologías digitales y prácticas socioculturales

Hugo Moreno Reyes[4]

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, matemáticas, tecnologías digitales.

Resumen

El presente trabajo se plantea desde la perspectiva de la Investigación en la Educación Matemática como campo disciplinario de conocimiento en el que se promueve el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta tesitura, se abordan los aspectos que un profesor de matemáticas debería reunir para llevar a cabo prácticas educativas que promuevan el logro eficaz de aprendizajes en los estudiantes. Para ello se consideran en primer lugar los trabajos de Shulman (1986, 1987), Mishra y Koehler (2006) y Ball (2008) que, apoyándose en las nociones del conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento tecnológico pedagógico del contenido proponen la noción de conocimiento matemático para la enseñanza. Se plantea la importancia de considerar a las tecnologías digitales y las nuevas prácticas socioculturales como elementos indispensables en la encrucijada del diseño e implementación de procesos formativos idóneos que posibiliten a los estudiantes aprendizajes con sentido, profundos, duraderos y transferibles a nuevas situaciones, dentro un currículo acorde al momento histórico de la sociedad

[4] Datos de Autor: Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica (México). Correo-e: hmoreno@ciidet.edu.mx

informatizada, tecnologizada y conectada; en donde la circunstancia propia del contexto actual con sus dinámicas cotidianas dan origen a que los sujetos se constituyan de manera diferente en esta era digital.

Introducción

En la educación de nuestros días, particularmente en el aprendizaje de las matemáticas ya no puede concebirse que se dé con el uso de estrategias, técnicas, métodos y medios tradicionales, que no han dado el resultado esperado (González, 2001). Por un lado, el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como un recurso para el proceso de enseñanza y aprendizaje puede constituirse como un elemento potenciador con base en fundamentos psicopedagógicos, así como de los fundamentos de la naturaleza del campo disciplinar en particular, como el caso de las matemáticas. Por otro lado, el dominio disciplinar, pedagógico y tecnológico; articulado y orientado hacia el planteamiento de trayectorias de aprendizaje de los alumnos, es un aspecto de suma importancia como competencia profesional para el docente. Lo anterior plantea y posibilita, como señala Díaz Barriga (2003), una transformación en el proceso de aprendizaje del estudiante, la innovación en los métodos de enseñanza, los materiales de apoyo educativo, la evaluación y los ambientes de aprendizaje.

En este sentido, el propósito al usar las TIC es crear entornos de aprendizaje que pongan a disposición del estudiante una diversidad de herramientas interactivas para su aprendizaje y realimentación por parte del profesor (García Fallás, 2003). De esta manera, el conocimiento didáctico matemático y las herramientas digitales permiten una interactividad dinámica entre el estudiante y el profesor, motivándolos a explorar y aprender juntos. Por ejemplo, el uso de material multimedia, video conferencias, materiales amigables de apoyo para las asignaturas que requieren el conocimiento teórico y práctico, el uso de laboratorios virtuales y la oportunidad de interactuar con profesores y estudiantes de otras partes del mundo, establecen el reto para que la educación superior se actualice y esté a la vanguardia para hacer competitivos a sus egresados en un ambiente de integración global.

En esta tesitura, el punto de concurrencia del estudio del presente trabajo se enfocó en el discurso matemático escolar como situación contemporánea de gran importancia para promover el aprendizaje de conocimientos matemáticos en los estudiantes, desde las dimensiones de los conocimientos profesionales del profesor, las tecnologías digitales y prácticas socioculturales.

La forma en que se articulan las partes de esta investigación, desarrollada en el campo de la matemática educativa, presenta primero, a manera de cuestiones iniciales, la situación de estudio y su importancia del por qué estudiarla. Como segundo apartado, el diseño de la investigación; y se presentan, a modo de resultados o hallazgos encontrados, una discursiva de apartados descriptivo-explicativos con sentido crítico, fruto de la actividad interpretativa de la exégesis de las circunstancias observadas. Por último, se presenta un apartado de conclusiones.

Algunas cuestiones iniciales

El trabajo se desprende de una investigación más amplia acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje contemporáneos en la matemática desde una perspectiva investigativa de corte transdisciplinario que involucra aspectos de la filosofía de la tecnología, pedagógicos, socioculturales y, por supuesto, educativos de la matemática. Su importancia trasciende en la articulación más global de las diferentes ópticas de las diversas disciplinas. Se pretende dar una visión a manera de estructura explicativa del contexto, situado en un marco histórico socio-tecnológico-cultural que proporcione elementos al profesor de matemáticas para resignificar su práctica educativa orientada hacia una idoneidad del proceso de estudio que tenga mayor impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Históricamente han predominado los posicionamientos más psicológicos y cognitivos donde el conocimiento matemático es visto, sobre todo, como un producto mental e individual. Sin embargo, surgen de manera reciente posturas en donde se hace énfasis en una concepción del conocimiento matemático como proceso social y cultural. En esta tesitura, es importante hacer énfasis en que los dos enfoques son complementarios, ya que no tendría sentido el análisis del proceso de estudio matemático de un sujeto en un contexto aislado de influencias socioculturales, que en parte determinan sus formas de razonamiento y acciones. Por lo que, tomar en cuenta las variables contextuales que intervienen en el proceso de estudio de la matemática enriquecerá la óptica para una intervención mejor sustentada.

Diseño metodológico

El proceder metodológico del estudio se llevó a cabo desde una óptica más global que incorpora las visiones de la filosofía de la tecnología, lo sociocultural y la educación matemática, para tener una visión articulada del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática en la actualidad desde una nueva perspectiva emergente que presenta otra mirada. Se recurrió al método de la transdisciplinariedad descriptiva-explicativa a partir del análisis crítico de documentos, la observación y análisis de contextos y circunstancias, y actividades dialógicas con los sujetos actores.

Es importante destacar, que a diferencia de los estudios que se respaldan en métodos cuantitativos, en lo que a investigación se refiere, los estudios que asumen un método con carácter interpretativo buscan ante todo una lectura que permita la comprensión e interpretación del sentido y prácticas humanas en la circunstancia estudiada, más que su mera medición o presentación en términos cuantitativos.

Tecnologías digitales, sociedad y educación

En las últimas décadas, se han observado acelerados cambios tecnológicos en todos los campos, incluyendo el de las TIC. En este campo, los cambios cuantitativos representados por mayor digitalización, más informatización y más medios originan cambios de orden cualitativo en lo social asociados al cambio tecnológico. De esta manera, en la sociedad contemporánea, los medios tecnológicos hacen posible que la información pueda transportarse e integrarse a una red global de intercomunicación transformada en un espacio para la inteligencia colectiva bajo el principio de colaboración solidaria, originada por un proceso sinérgico del saber colectivo para la producción de conocimientos a partir de la inteligencia distribuida y enlazada por la conectividad global. En este sentido, el contexto educativo no es ajeno a estas prácticas que los estudiantes han apropiado y traído al aula desde afuera, desde la sociedad global en la que viven y en donde se originan nuevas y cambiantes prácticas socio-culturales resultado de la tecnologización e informatización del mundo actual.

La cultura digital está compuesta por modos de comunicación y de intercambio de informaciones que desplazan, redefinen y remodelan el saber en formas y formatos nuevos, y por medios y métodos para adquirir y transmitir dichos saberes, formas nuevas y cambiantes de alfabetización, en este caso digital. Dicha alfabetización digital es un proceso esencialmente educativo y pedagógico que transcurre no necesariamente dentro de las aulas escolares pero que, desde el espacio escolar pueden plantearse estrategias de intervención, es en este proceso de alfabetización digital donde surgen formas y estilos de aprendizaje digitales determinados en gran medida por los usos que hacemos de las herramientas digitales como las de internet.

En esta tesitura, una perspectiva pedagógica nos posibilita la reflexión sistematizada sobre el uso de las tecnologías digitales dentro del proceso de enseñanza aprendizaje. Las tecnologías digitales como fenómeno complejo cultural requieren ser consideradas dentro de su contexto actual y de manera especial las características de sus objetos tecnológicos, siendo estos las herramientas determinantes en la comprensión y transformación del contexto, los objetos tecnológicos generan dinámicas socio-culturales-cognitivas propias de cada época histórica.

El sentido pedagógico de los instrumentos didácticos está acotado por el sentido de la acción educativa que se ejerce sobre el alumno, "lo pedagógico" no está dado por el mero uso de los instrumentos, lo cual nos llevaría a una visión instrumental de "lo pedagógico" este aspecto está referido al sentido de la intervención que hacemos sobre el alumno, lo cual implica intervenir de manera consciente, decidida, planeada y razonada para la formación humana del alumno. La acción y el sentido pedagógico no están remitidos solo al aprendizaje del alumno, también a la intervención para procurar mejores aprendizajes dándole sentido a lo que se aprende y para qué se aprende de manera particular en nuestra sociedad actual.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente, la competencia es puesta en juego para representar situaciones tomadas de la realidad. Sin embargo, aún falta mucho por hacer para lograr que los estudiantes desarrollen el sentido de realidad y puedan hacer una lectura de ésta para trasladarla a una representación matemática que les permita resolver, predecir y optimizar, entre otras cosas. Es en esta tesitura que la labor del profesor asume un papel determinante en el desarrollo, por parte de los estudiantes, de la competencia matemática, ya que el propone las trayectorias didácticas por donde transitarán hacia el logro del aprendizaje. De tal forma, que el estudio de las nociones de conocimiento disciplinar, pedagógico y tecnológico del profesor son aspectos de relevancia que pueden develar situaciones a mejorar, que se orienten hacia la efectividad del aprendizaje logrado por los estudiantes.

Históricamente las matemáticas han sido una disciplina que para muchos de los estudiantes ha sido difícil de aprender, siendo la pregunta principal del profesor ¿por qué no aprenden mis alumnos? (Véase figura 1).

Figura 1. Cuestionamiento principal del profesor

Con respecto a esta pregunta hay también algunas otras cuestiones que se encuentran en la encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo, por mencionar algunas:

- Saber matemáticas para demostrar, ya sea explicando o para pasar un examen, no es igual a, conocer las matemáticas en las formas necesarias para enseñarla.
- Ser bueno en matemáticas como ingeniero, profesionista, físico o matemático no es suficiente para lograr con eficacia que nuestro alumno aprenda.
- El conocimiento del contenido es necesario, pero no suficiente.
- ¿Qué necesitamos saber los profesores para enseñar matemáticas en una variedad de formas que permita al grupo aprender?

- ¿Cómo conocemos realmente lo que necesitamos saber para trabajar con los estudiantes?
- ¿Qué necesitamos conocer los profesores acerca de las matemáticas?
- ¿Cómo aprendería y cuánto lograría mi alumno sin/con mi ayuda?
- ¿Cómo debo considerar a las tecnologías digitales y las nuevas prácticas socioculturales en este nuevo contexto de la sociedad informatizada, tecnologizada y conectada?

Las cuestiones anteriores nos llevan hacia una encrucijada (véase figura 2) en donde tenemos varias opciones, siendo el mejor camino, para lograr que nuestros alumnos aprendan, el que nos indica hacia donde debemos movilizarnos, hacia los ajustes y cambios en nuestra práctica docente para mejorar. Es un camino que no es fácil, pero que para comenzar nos acerca hacia el conocimiento profesional del profesor, con el propósito de identificar nuestras fortalezas y áreas de oportunidad, como lo señalan los modelos de Shulman (1986, 1987), Mishra y Koehler (2006) y Ball (2008), que se describen a continuación.

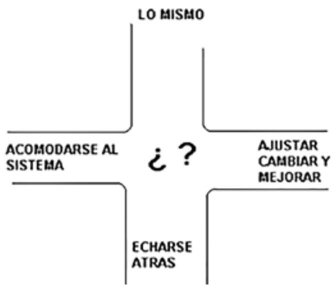


Figura 2. La encrucijada del profesor

Conocimiento profesional del profesor

Brevemente abordaremos los modelos con el fin de mostrar los planteamientos acerca de los conocimientos profesionales que un profesor debe tener. Shulman (1986, 1987) propuso inicialmente tres categorías (véase figura 3) el conocimiento disciplinar del contenido, el conocimiento pedagógico y el conocimiento didáctico/pedagógico del contenido; con ellas mostraba que más allá del conocimiento de la materia en sí misma era más importante el conocimiento de la materia para la enseñanza.

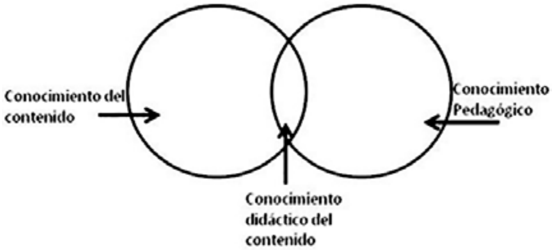


Figura 3. Modelo de Shulman (1986)

En 1987, Shulman amplía su modelo y propone siete categorías para el conocimiento del profesor:

1) conocimiento del contenido
2) conocimiento pedagógico general
3) conocimiento curricular
4) conocimiento pedagógico del contenido
5) conocimiento de los estudiantes y sus características
6) conocimiento de los contextos educativos
7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Mishra y Koehler (2006) con base en el modelo de Shulman (1986, 1987) plantean una versión ampliada (véase figura 4) denominada Conocimiento Tecnológico Didáctico del Contenido, que añade el conocimiento sobre cómo usar las herramientas tecnológicas en la enseñanza y el aprendizaje.

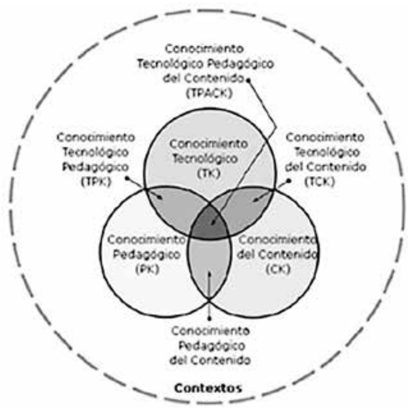


Figura 4. Modelo de Mishra y Koehler (2006)

Ball (2008) plantea un modelo que define el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno, conformado por dos categorías que a su vez están conformadas por varias subcategorías (véase figura 5):

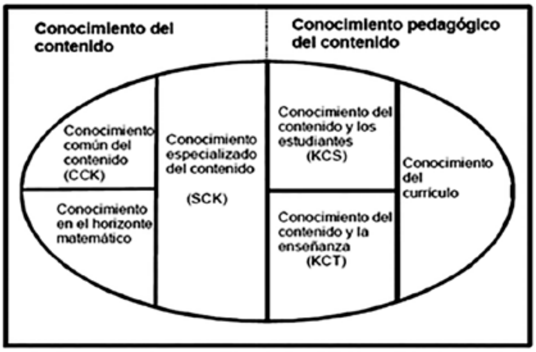


Figura 5. Conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, 2008)

Este modelo representa un avance significativo en la caracterización de los conocimientos que debe tener un profesor para la enseñanza de las matemáticas.

Aspectos contemporáneos en el proceso enseñanza-aprendizaje

El acercamiento que tienen los estudiantes de educación superior a las tecnologías se ve mediado y significado por diversas formas de socialización tecnológica en distintos entornos, como el del hogar, el educativo, el de la vida, así como por la experiencia previa con otras herramientas cotidianas. Estos aspectos resultan relevantes en la apropiación social de las tecnologías y, en consecuencia, en las dinámicas de aplicación escolar, y por ende en el diseño de los procesos de aprendizaje.

De esta manera, las TIC no pueden considerarse de manera separada de la cultura, sino una forma de expresión de la misma, ya que se crea y se recrea la cultura en situaciones y prácticas que no se limitan a contextos geográficos y grupos sociales, sino que tienen como característica fundamental la de vincular prácticas sociales entre individuos que se encuentran en contextos espacio-temporales y entornos socio-culturales distintos, de manera que plantea un esquema de funcionamiento en el que se establecen relaciones sociales en un medio de interacción virtual, que da origen a nuevas formas de construcción cultural.

Desde esta perspectiva, es importante dar su peso a la vida cotidiana en la socialización de las TIC, y reconocer que, aún en el caso del mismo grupo de individuos, existen distintos capitales culturales, experiencias vitales y circuitos diferenciados de socialización de las TIC, como es el caso de los estudiantes de educación superior, en donde el uso que le dan al Internet y al teléfono celular no es igual en casa, en el trabajo o en la propia Institución de Educación Superior (IES). Cada espacio le da un sentido distinto al proceso socio-cultural de apropiación de TIC, que no está determinado por las posibilidades de la tecnología sino por el universo de prácticas compartidas, a través de las cuales la tecnología se emplea; cómo se entiende en contextos cotidianos y cuál es el significado de esa experiencia para quienes la utilizan (Hine, 2004).

Por lo anterior, los cambios tecnológicos no se limitan al ámbito de la utilización *per se* de las tecnologías, también conllevan notables alteraciones de las prácticas cotidianas, las formas de pensamiento y las creencias, hasta el punto de redefinir el orden social, del trabajo, el ámbito doméstico, el ocio y por supuesto el escolar.

Es de esta manera, que los cambios en una dimensión de la vida se expanden y afectan a todas las demás. La apropiación y uso de las tecnologías producen cambios que se hacen patentes en las cosas que hacemos y en cómo las hacemos. De tal forma que paulatinamente las herramientas, servicios y recursos se desarrollan a medida que van dando respuesta a ciertas necesidades, unas previas y otras nuevas, estas últimas originadas por el uso de las nuevas tecnologías.

El uso de nuevas tecnologías, irremediablemente origina "nuevas alfabetizaciones", en donde el conjunto de las nuevas prácticas dejara de ser "novedoso" cuando las prácticas sociales que caracterizan este paradigma emergente se hayan incorporado al quehacer cotidiano, hasta el punto de que se den por sabidas o se consideren "normales", y de este modo pasen a formar parte de las alfabetizaciones convencionales. Es en este sentido que las "nuevas alfabetizaciones" como parte de un periodo de cambios sociales, culturales, económicos e intelectuales tienen influencia en el ámbito escolar. Por lo tanto, buscar lo que es nuevo en el caso concreto de las "nuevas alfabetizaciones" le permite al profesor ampliar su comprensión acerca de las tendencias y prioridades actuales en la enseñanza y el aprendizaje, emplazando sus esfuerzos en el empleo de estrategias didácticas efectivas apoyadas con tecnologías orientadas a promover e impulsar el aprendizaje.

Por otro lado, puede decirse que conocer los procesos por los que los jóvenes estudiantes transitan en su ámbito social, permite al docente tomarlos en cuenta como un elemento que empodere el proceso de aprendizaje y en consecuencia propicie la apropiación de conocimientos con mayor significado, pero sobre todo aprovechando los saberes que la era de la información posibilita (véase figura 6). Lo anterior, es un punto inaplazable en la agenda educativa del docente.

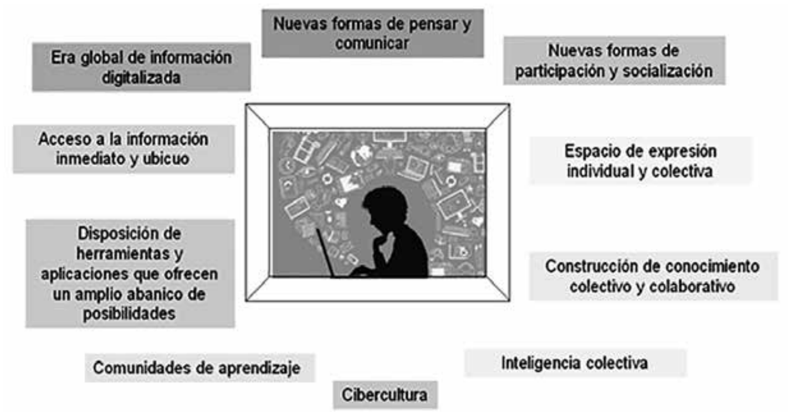


Figura 6. Internet y los recursos tecnológicos: espacio posibilitador y empoderador de los procesos de enseñanza y de aprendizaje

El discurso matemático escolar

Como sujetos principales del discurso matemático escolar, en una práctica educativa tradicional, los docentes conciben su rol como transmisores de información; recíprocamente, los alumnos se ven a ellos mismos como receptores de esos conocimientos. Desde este tipo de práctica educativa se evidencia el bajo aprovechamiento, el escaso aprendizaje logrado, la falta de atención, el aburrimiento y la polarización de expectativas, por un lado, y las frustraciones por el otro (Piscitelli, 2009).

¿Por qué ocurre todo lo anterior? ¿Hemos pensado quién trabaja cuando preparamos un tema? Y por lo tanto ¿quién se forma cuando el profesor expone la clase? Sin duda, dentro de esta configuración de la enseñanza, el que más aprende y refuerza los conocimientos de la materia es el docente, ya que gran parte de las trayectorias y procesos cognitivos quedan de su parte.

En este esquema, la organización de las clases no asegura que los estudiantes transiten por las mismas trayectorias de construcción de conocimiento que el profesor. Sólo los alumnos que tienen la capacidad y motivación suficiente para emprender una serie de acciones similares son los que aprenden. Entonces, ¿cuál debería ser el papel del profesor? ¿Cómo y con qué fundamentos debe configurar la enseñanza? ¿Cómo diseña los procesos por los que atravesará el estudiante para lograr aprender? ¿Cómo lograr que todos los estudiantes aprendan? ¿Qué debe hacer? Es en este sentido, que el emplazamiento de la visión del docente hacia unas nuevas coordenadas didácticas en donde se tenga presente que lo que el alumno hace es realmente lo más importante para el logro de su aprendizaje, y que lo que el profesor hace le posibilitará rediseñar el discurso matemático escolar orientado hacia la efectividad del aprendizaje en el proceso de estudio de los alumnos.

Enseñanza y aprendizaje de la competencia matemática

Las cuestiones principales que se plantea la competencia matemática son ¿cómo puede adquirirse la competencia para leer la realidad y transferirla al lenguaje matemático? ¿Cómo desarrollar la competencia interpretativa de la realidad? ¿Cómo representar la realidad en un campo particular del lenguaje matemático que permita simular esa realidad con el propósito de observar y analizar su comportamiento en determinadas condiciones? ¿Cómo encontrar soluciones, predecir y optimizar? A pesar del consenso sobre su importancia y relevancia, la competencia matemática sigue siendo una actividad compleja y por ende difícil tanto para los profesores como para los alumnos (véase figura 7).

En esta tesitura, las tecnologías y las nuevas alfabetizaciones forman parte integrante del proceso de generación, comunicación y negociación de significados al proporcionar una gama de nuevos recursos y posibilidades para generarlos (Lankshear, 2012). Con respecto a la dimensión técnica de las tecnologías digitales, esta amplía considerablemente los modos de producción de significados, posibilita diversas formas de participación, colaboración, intercambio y distribución de conocimiento y autoría, en un nuevo marco de cultura participativa, desde la adopción de una postura basada en el aprendizaje social, que como modelo desafía al contexto cultural que rodea a la educación formal contemporánea, dado que conlleva practicas más inclusivas, más igualitarias y más responsables con las necesidades, los intereses y las satisfacciones humanas (Jenkins, 2010).

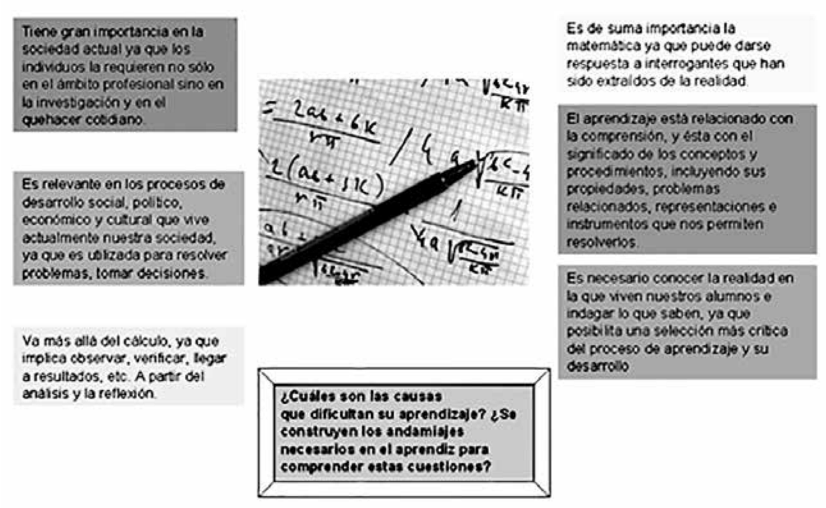


Figura 7. Aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje de la competencia matemática.

De esta manera, el aprendizaje de la realidad puede desempeñar un papel fundamental en la provisión del apoyo esencial para hacer de la competencia matemática una actividad más accesible entre los estudiantes a través de una serie de ejercicios extraídos de diferentes campos y temas. Esto, tomando en cuenta el uso de herramientas tecnológicas que pueden ser utilizadas de manera exitosa y eficiente en las tareas, sin perder de vista la necesidad de un uso óptimo y equilibrado de las tecnologías, tanto para el logro de los objetivos de las actividades o tareas, como para el logro de los aprendizajes matemáticos.

Conclusiones

La tecnología está tan inmersa en la vida cotidiana que cada vez resulta más difícil desarrollar una vida social y productiva activa, sin un mínimo manejo de los recursos tecnológicos digitales. En este sentido, la educación, entendida como la enseñanza y el aprendizaje, está ligada de manera indisoluble a las diferentes etapas de la historia de la humanidad. Y en ese sentido, la educación de nuestros días está fuertemente influenciada, por la era digital, por el gran avance de las tecnologías de la información y comunicación, por la aldea global y el modelo económico neoliberal.

Por lo tanto, debemos asumir el desafío que nos impone la incorporación de la tecnología en los procesos formativos en el aula, así como aprovechar la experiencia adquirida por los estudiantes con los medios digitales de manera informal y cotidiana.

Por otra parte, para que los profesores desarrollen las competencias docentes necesarias para incorporar con éxito el uso de la tecnología en su práctica, contribuyendo a la apropiación de contenidos por los estudiantes (véase figura 8), se requieren también cambios en las instituciones, en las autoridades, que fomenten y permitan las adaptaciones institucionales necesarias.

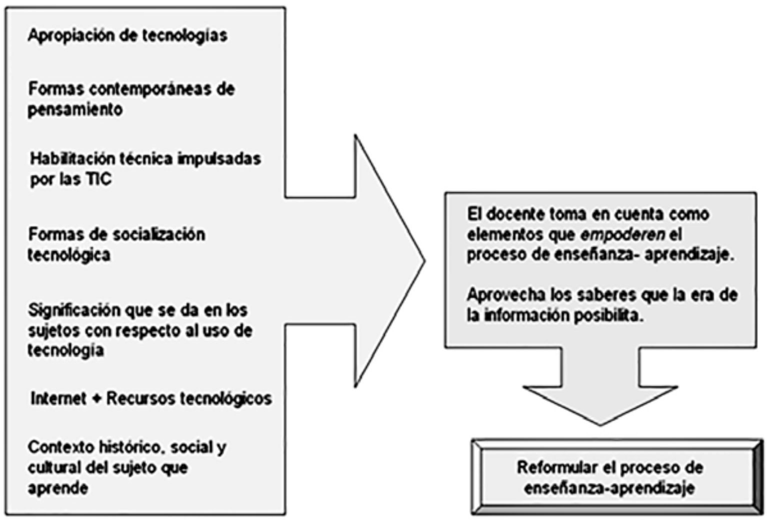


Figura 8. Aspectos para una práctica docente resignificada.

Además, es necesario promover en los alumnos la oportunidad de vivenciar los procesos implicados en su aprendizaje de forma constructiva y significativa, integrada y reflexionada, a la vez que ubicada en el contexto socio-histórico y cultural en el que se encuentran.

De manera que, considerar los aspectos tecnológicos y socioculturales, además de utilizar diferentes estrategias de aprendizaje permitiría:

- Ampliar la gama de opciones formativas del proceso enseñanza y aprendizaje.
- Crear entornos más flexibles para el aprendizaje.
- Eliminar las barreras espacio-temporales entre el profesor y los estudiantes.
- Potenciar los escenarios y entornos interactivos.
- Favorecer tanto el aprendizaje independiente y el autoaprendizaje como el colaborativo y en grupo.
- Romper los clásicos escenarios formativos, limitados a las instituciones escolares.
- Ofrecer nuevas posibilidades para la orientación y la tutorización de los estudiantes.
- Facilitar una formación permanente.

En este mismo orden de ideas, se plantea un rol del estudiante que se caracteriza por una mayor autonomía y trabajo independiente en la construcción de su conocimiento, y como lo señala Herrera (2006) poseer las habilidades necesarias para el manejo de las diferentes herramientas que nos proporcionan las TIC y, en definitiva, ser el principal promotor de su formación, aunque siempre con la orientación y ayuda de su profesor y la participación del resto de sus compañeros.

Para finalizar, puede mencionarse que este tipo de trabajos busca aportar desde la propia perspectiva del estudio, una mirada a través de sus diferentes dimensiones, sobre los procesos y prácticas actuales en la educación matemática, así como las posibles relaciones o conexiones entre las dimensiones del estudio, y entre éstas y los sujetos actores, en la búsqueda por encontrar de qué manera las conexiones entre las dimensiones y sujetos son parte del problema y de la solución.

Bibliografía y fuentes de internet

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Díaz, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(2). Consultado el 18 de septiembre de 2016 en: http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html

García Fallás, J. (2003). El potencial tecnológico y el ambiente de aprendizaje con recursos tecnológicos: informáticos, comunicativos y de multimedia. Una reflexión epistemológica y pedagógica. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *3*(1).

González, V. (2001) Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje. México: Editorial Pax, 1-21.

Herrera, M. A. (2006). Consideraciones para el diseño didáctico de ambientes virtuales de aprendizaje: una propuesta basada en las funciones cognitivas del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, *5*(38), 1-19.

Hine, C. (2004). Etnografía virtual. Barcelona: Editorial UOC.

Jenkins, H. (2010). Afterword, in M. Knobel and C. Lankshear eds. DIY Media: *Creating, Sharing and Learning with New Technologies*, New York: Peter Lang, 231-253.

Lankshear, C. y Knobel, M. (2012). Nuevas alfabetizaciones: tecnologías y valores, *Revista Teknokultura*, *9*(2), 307-336.

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record,* 108 (6), 1017-1054.

Piscitelli, A. (2009). Nativos digitales: dieta cognitiva, inteligencia colectiva y arquitecturas de la participación, Buenos Aires: Santillana.

_____. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Actividades matemáticas con un enfoque socioemocional para el programa de bachillerato virtual de la Universidad Autónoma de Guerrero

Julissa Rodríguez García y Magdalena Rivera Abrajan[5]

Palabras clave: Fichas socioemocionales, bachillerato virtual, graficación.

Resumen

Construye T es un programa del Gobierno mexicano, dirigido y financiado por la Secretaría de Educación Pública, a través de la Subsecretaría de Educación Media Superior, e implementado con el apoyo del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. Su objetivo es fortalecer las capacidades de la escuela para desarrollar habilidades socioemocionales en las y los jóvenes, y así mejorar el ambiente escolar. En esta investigación presentamos el diseño de fichas socioemocionales para el curso de cálculo diferencial del bachillerato virtual de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). El objetivo final de la investigación es estudiar su inserción en dicho bachillerato.

Introducción

La deserción escolar es uno de los problemas que se encuentran en el centro de atención de las políticas y las acciones realizadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP), principalmente de la Subsecretaría

[5] Universidad Autónoma de Guerrero (México). Correos-e: julissa.rg17@gmail.com / mrivera@uagro.mx.

de Educación Media Superior (SEMS), debido a los altos índices que se presentan en ese nivel.

Según el modelo que sigue el sistema educativo mexicano, el primer requisito para lograr una educación de calidad, radica en garantizar el acceso y la permanencia en un programa educativo, en cualquiera de sus vertientes: presencial, intensivo, virtual, auto planeado, mixto o certificado en exámenes (DOF, 2008, 2008b, 2008c; SEP-SEMS RIEMS). Y según las estadísticas del sistema educativo en México del ciclo escolar 2013-2014, realizada por la SEP, la Educación Media Superior (EMS) muestra un aumento en el índice de abandono escolar, siendo el subsistema con el mayor índice con un 15.5% (imagen 1).

Otro aspecto importante, referente a este subsistema, es que la mayoría de las y los estudiantes se encuentran en el periodo de tránsito de la minoría de edad al momento en el que pueden ejercer plenamente sus derechos y deberes ciudadanos, por lo que una tarea importante de autoridades, directores, docentes y padres de familia, consiste en lograr que este tránsito corra en paralelo con una creciente capacidad de asumirse como auténticos ciudadanos, comprometidos, críticos y solidarios. En esta idea la deserción significa mucho más que la interrupción de un proceso de construcción de conocimientos, por demás valioso, pues con ella se debilita la función educativa de coadyuvar a la cimentación de una ciudadanía responsable (SEP, 2012).

Por su parte el Gobierno Federal, en el Programa Sectorial de Educación 2013-2018 (Prosedu) asienta la necesidad de impulsar la calidad e inclusión educativa en el NMS a partir de acciones que permitan fomentar una educación integral que promueva la salud física y mental; prevenir conductas de riesgo que eventualmente desemboquen en el truncamiento de la trayectoria educativa de las y los estudiantes y, así, crear ambientes escolares libres de violencia y acoso. Así mismo, el Convenio de Coordinación suscrito por la SEP y las autoridades estatales en educación en mayo del 2014 establece acciones conjuntas con objeto de facilitar el combate a la violencia en las escuelas, acciones que se encuentran contempladas en el programa Construye T.

Construye T es un programa dirigido y financiado por la SEP, a través de la SEMS, e implementado con el apoyo del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. Su objetivo es fortalecer las capacidades de la escuela para desarrollar habilidades socioemocionales en las y los jóvenes, y así mejorar el ambiente escolar. Este programa se enfoca en tres dimensiones que a su vez se dividen en seis habilidades generales y 18 habilidades específicas, actualmente ha sido implementado en los 32 estados de la república.

MODALIDAD ESCOLARIZADA (Cifras preliminares 2013-2014)
INDICADORES EDUCATIVOS
MÉXICO

Nivel Educativo / Indicador	2012-2013	2013-2014 [e/]	
	%	%	Posición
Educación Básica			
Cobertura (3 a 14 años de edad) [1/]	92.1	92.8	24
Tasa Neta de Escolarización (3 a 14 años de edad) [1/]	91.0	91.7	24
Educación Preescolar			
Atención de 3 años [1/]	23.6	25.6	22
Atención de 4 años [1/]	80.3	81.5	25
Atención de 5 años [1/]	83.7	83.3	18
Atención de 3, 4 y 5 años (Tasa Neta de Escolarización) [1/]	62.6	63.5	27
Cobertura (3 a 5 años de edad) [1/]	62.8	63.6	27
Educación Primaria			
Abandono escolar	0.5	0.3	11
Reprobación	0.3	0.1	03
Eficiencia Terminal	98.2	99.1	09
Tasa de Terminación	105.1	105.3	20
Cobertura (6 a 11 años de edad) [1/]	106.2	105.6	23
Tasa Neta de Escolarización (6 a 11 años de edad) [1/]	99.3	98.9	15
Educación Secundaria			
Absorción	96.0	96.2	23
Abandono escolar	3.2	3.1	05
Reprobación	4.4	3.7	06
Eficiencia Terminal	89.5	90.9	05
Tasa de Terminación	84.0	86.8	08
Cobertura (12 a 14 años de edad) [1/]	93.4	96.2	16
Tasa Neta de Escolarización (12 a 14 años de edad) [1/]	81.0	83.7	20
Educación Media Superior			
Absorción	92.6	93.7	29
Abandono escolar	15.0	15.5	23
Reprobación	9.8	9.0	02
Eficiencia Terminal	63.1	61.6	23
Tasa de Terminación	45.7	44.7	29
Cobertura (15 a 17 años de edad) [1/]	60.1	62.4	29
Tasa Neta de Escolarización (15 a 17 años de edad) [1/]	47.9	50.1	27
Educación Superior			
Absorción	86.5	77.0	17
Abandono escolar	8.0	7.9	14
Cobertura (Incluye Posgrado) (18 a 23 años de edad) [1/]	20.8	21.9	24
Cobertura (No Incluye Posgrado) (18 a 22 años de edad) [1/]	23.4	24.6	24
Cobertura (No Incluye Posgrado) (18 a 22 años de edad) [1/ 4/]	25.1	26.6	25
Otros Indicadores			
Grado Promedio de Escolaridad [2/]	9.3	9.3	11
Analfabetismo [3/]	3.9	3.8	13

El bachillerato autónomo de la UAGro es uno de los beneficiarios del programa construye T y nuestro objetivo es implementar, en la versión virtual, fichas de actividades matemáticas que fortalezcan las habilidades socioemocionales de las y los jóvenes inscritos en dicho programa.

Particularmente, nuestra investigación tiene el objetivo de diseñar fichas de trabajo para el profesor, con base en las dimensiones del programa Construye T sobre graficación de funciones para el curso de cálculo diferencial, y mostrar su inserción en un sistema de bachilleratos virtuales. En este reporte solo se presentan las actividades desarrolladas, debido a que aún no se lleva a cabo el curso en el sistema virtual.

Antecedentes

En 2007, la SEP diseñó un Programa de Prevención de Riesgos en la Educación Media Superior (PPREMS) para hacer frente a la problemática del abandono escolar y las situaciones de riesgo a las que se enfrentaban las y los estudiantes de este nivel. El PPREMS buscaba fundamentalmente influir en el clima de convivencia escolar a través de un enfoque holístico que incluía las distintas dimensiones que se podían relacionar con el abandono escolar. Para la primera etapa de implementación de este programa, se conformó una red de 22 organizaciones de la sociedad civil (OSC), expertas en temas de juventud, las cuales trabajaban directamente en los planteles con el personal escolar a través de un facilitador contratado por ellas mismas.

En 2008, la SEP se acercó al Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) y al Fondo para la Infancia de las Naciones Unidas (Unicef), posteriormente, a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Tecnología (Unesco), para dar soporte técnico y operativo al PPREMS, es aquí donde nace el programa Construye T, conocido formalmente como apoyo a los y las jóvenes del nivel medio superior para el desarrollo de su proyecto de vida y la prevención de riesgos.

Hasta 2013, el Programa se basó en la realización de actividades en seis dimensiones de trabajo que estaban relacionadas con el abandono escolar: conocimiento de sí mismo, vida saludable, escuela y familia, cultura de paz y no violencia, participación juvenil, y construcción de proyecto de vida. Algunas de estas dimensiones cambiaron de nombre durante la primera etapa, pero básicamente abarcaban las mismas temáticas.

En 2014, se fortalece el diseño del programa con el fin de impulsar la educación integral de las y los estudiantes, contribuir a su desarrollo socioemocional, mejorar el ambiente escolar, y prevenir conductas de riesgo. Estos elementos contribuyen a promover que las y los estudiantes desarrollen su proyecto de vida, disminuya el abandono y la violencia escolar, y a empoderar a las y los jóvenes.

El programa Construye T

El objetivo de Construye T es fortalecer las capacidades de la escuela para desarrollar habilidades socioemocionales en las y los jóvenes, y así mejorar el ambiente escolar.

Las habilidades socioemocionales son aquellas herramientas que nos permiten conocernos mejor, manejar nuestras emociones, comunicarnos efectivamente, resolver conflictos, plantearnos y alcanzar metas, levantarnos de los tropiezos, manejar el estrés y tomar decisiones reflexivas (Construye T, s. f.).

Las dimensiones del programa son tres y se dividen en habilidades generales las cuales a su vez se dividen en habilidades específicas (tabla 1).

Tabla 1. Descripción de las dimensiones del programa Construye T

Dimensión	Habilidades Generales	Habilidades Especificas
Conoce T	Autoconciencia	Autopercepción Autoeficacia Reconocimiento de emociones
	Autorregulación	Manejo de emociones Postergación de la gratificación Tolerancia a la frustración
	Determinación	Motivación de logro Perseverancia Manejo del estrés

Dimensión	Habilidades Generales	Habilidades Especificas
Relaciona T	Conciencia social	Empatía Escucha activa Toma de perspectiva
	Relación con los demás	Asertividad Manejo de conflictos interpersonales Comportamiento prosocial
Elige T	Toma responsable de decisiones	Generación de opciones y consideración de consecuencias Pensamiento crítico Análisis de consecuencias

El objetivo de cada una de las dimensiones es presentado en la tabla 2:

Tabla 2. Objetivos de las dimensiones de Construye T.

Dimensiones / Objetivo	Conoce T	Relaciona T	Elige T
Objetivo	Fortalece la capacidad para identificar y manejar las emociones propias, y entender las de los demás. Ayuda a definir y fortalecer nuestra identidad. Enfoca nuestros esfuerzos para lograr las metas que nos planteemos.	Desarrolla la capacidad para apreciar y fortalecer las relaciones interpersonales de forma empática y positiva.	Fortalece la toma de decisiones de manera responsable y asertiva para hacer frente a los retos que se nos presentan.

Escuelas que implementan el programa

El programa está dirigido a la comunidad de los planteles públicos federales y estatales del NMS, tanto rural como urbana, en las 32 entidades federativas del país, que cursan la modalidad escolarizada.

En Guerrero participan 70 de los 81 municipios que conforman el estado, uno de ellos es Acapulco, en el cual tres de las cuatro preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero están incorporadas en el programa.

La UAGro Virtual

Desde el año 2000, la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (Anuies), plantea la posibilidad de establecer la Universidad Virtual, como parte integral de los programas del Sistema de Educación Superior para el mejoramiento del mismo.

El programa de Universidad Virtual se concibe, entonces, como una red de carácter nacional sustentado en el Sistema de Instituciones de Educación Superior, con el propósito de preparar profesionales en el nivel de posgrado y de licenciatura en áreas de alta prioridad para el desarrollo económico y social del país; contribuir a la actualización de conocimientos de los profesionales; así como ampliar la cobertura de educación superior para cumplir las metas de crecimiento deseadas.

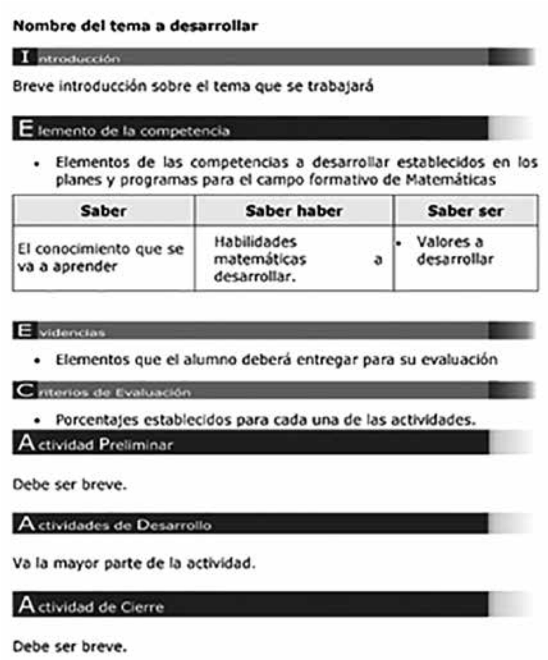
En los últimos años, distintas universidades privadas y públicas en México han instituido sus propios programas de Universidad Virtual, este es el caso de la Universidad Autónoma de Guerrero, quien considerando el contexto socioeconómico y educativo del estado de Guerrero propone el campus virtual con programas de licenciatura y el bachillerato virtual.

El modelo educativo del bachillerato virtual está basado en las y los estudiantes y organizado bajo un enfoque de competencias, pretende formar integralmente personas con conocimientos, habilidades y capacidades que trasciendan en el aprendizaje para la vida social, laboral y profesional (UAGro, 2014).

Los campos formativos en los que se divide la SUVUAGro virtual son cinco, matemáticas, ciencias experimentales, ciencias sociales, humanidades y comunicación, con un total de 32 unidades de aprendizaje de las cuales cuatro son de matemáticas (algebra, estadística, trigonometría y geometría analítica, y cálculo diferencial e integral).

Plataforma del bachillerato virtual de la UAGro

En la plataforma son colocadas las actividades a desarrollarse, las cuales siguen un formato general que contiene: una pequeña introducción, elementos de la competencia, evidencias que se deben presentar, los criterios de evaluación y las actividades a realizar en tres fases, inicio, desarrollo y cierre (imagen 2).



Nombre del tema a desarrollar

Introducción

Breve introducción sobre el tema que se trabajará

Elemento de la competencia

- Elementos de las competencias a desarrollar establecidos en los planes y programas para el campo formativo de Matemáticas

Saber	Saber haber	Saber ser
El conocimiento que se va a aprender	Habilidades matemáticas a desarrollar.	• Valores a desarrollar

Evidencias

- Elementos que el alumno deberá entregar para su evaluación

Criterios de Evaluación

- Porcentajes establecidos para cada una de las actividades.

Actividad Preliminar

Debe ser breve.

Actividades de Desarrollo

Va la mayor parte de la actividad.

Actividad de Cierre

Debe ser breve.

Imagen 2. Formato para las actividades de la UAGro

Metodología

El programa Construye T maneja fichas de actividades para ser desarrolladas por los profesores, directivos o en trabajo individual de las y los estudiantes, las cuales son materiales prácticos y fáciles de usar, donde se proponen ejercicios para que las y los estudiantes desarrollen sus habilidades socioemocionales.

Existen tres tipos de momentos donde se sugiere utilizar las fichas; durante una clase, se sugiere realizar *un momento Construye T* con una actividad corta de máximo 15 minutos al inicio o cierre de la sesión (el objetivo es el trabajo con las y los estudiantes). En tutorías o sesiones de orientación se sugiere realizar las actividades de una duración de más de

15 minutos, algunas de ellas están diseñadas para sesiones completas de 50 minutos. Además, en reuniones con otros integrantes de la comunidad: docentes, directivos, padres de familia o, incluso, de forma masiva con todas las y los estudiantes del plantel.

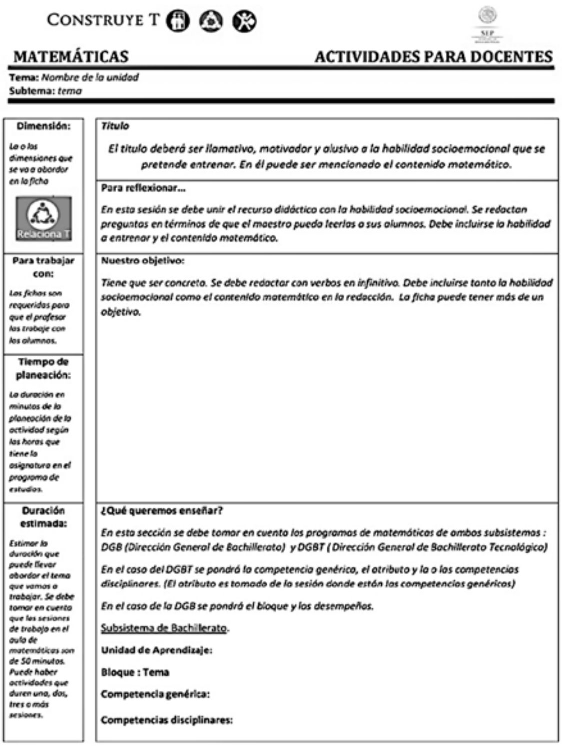
Sobre las fichas socioemocionales

Las fichas son descargables y se encuentran en la página de Construye T, hasta este momento solamente se trabaja la parte socioemocional separada del contenido curricular del bachillerato, en el 2016 el grupo de investigación de afectividad en matemática educativa en Guerrero gana la convocatoria expedida por la Unicef para el desarrollo de quince fichas Matemáticas socioemocionales para ser implementadas en el programa Construye T, siendo las primeras que unen el contenido curricular de matemáticas con el desarrollo socioemocional propuesto por dicho programa.

Las fichas siguen un formato ya establecido por el programa, sin embargo, debido a las características específicas de los contenidos matemáticos, así como lo novedoso de utilizar sugerencias socioemocionales en el desarrollo de las mismas se propusieron ciertas adecuaciones (imagen 3). Se agregaron algunos elementos importantes respecto al tema, competencias, el desarrollo de la actividad de forma descriptiva y algunos apoyos didácticos sugeridos, lo que ayudará al profesor en la realización de las actividades propuestas.

Como una extensión a estas fichas se proponen también para la modalidad virtual, particularmente nos centramos en el bachillerato virtual de la UAGro, y como primera propuesta se realizan actividades para la unidad de aprendizaje de Cálculo para el tema de funciones.

En este avance se presentan dichas fichas como propuesta, debido a que aún no se han piloteado en el bachillerato virtual, siendo la continuación de este estudio observar su inserción en el mismo y sus posibles implicaciones.



CONSTRUYE T

MATEMÁTICAS — ACTIVIDADES PARA DOCENTES

Tema: Nombre de la unidad
Subtema: tema

Dimensión: *Lo o los dimensiones que se va a abordar en la ficha* Relaciona T	**Titulo** *El titulo deberá ser llamativo, motivador y alusivo a la habilidad socioemocional que se pretende entrenar. En él puede ser mencionado el contenido matemático.* **Para reflexionar...** *En esta sesión se debe unir el recurso didáctico con la habilidad socioemocional. Se redactan preguntas en términos de que el maestro pueda leerlas a sus alumnos. Debe incluirse la habilidad a entrenar y el contenido matemático.*
Para trabajar con: *Las fichas son requeridas para que el profesor las trabaje con los alumnos.* **Tiempo de planeación:** *La duración en minutos de la planeación de la actividad según las horas que tiene la asignatura en el programa de estudios.*	**Nuestro objetivo:** *Tiene que ser concreto. Se debe redactar con verbos en infinitivo. Debe incluirse tanto la habilidad socioemocional como el contenido matemático en la redacción. La ficha puede tener más de un objetivo.*
Duración estimada: *Estimar la duración que puede llevar abordar el tema que vamos a trabajar. Se debe tomar en cuenta que las sesiones de trabajo en el aula de matemáticas son de 50 minutos. Puede haber actividades que duren una, dos, tres o más sesiones.*	**¿Qué queremos enseñar?** *En esta sección se debe tomar en cuenta los programas de matemáticos de ambos subsistemas : DGB (Dirección General de Bachillerato) y DGBT (Dirección General de Bachillerato Tecnológico)* *En el caso del DGBT se pondrá la competencia genérica, el atributo y la o los competencias disciplinares. (El atributo es tomado de la sesión donde están los competencias genéricos)* *En el caso de la DGB se pondrá el bloque y los desempeños.* Subsistema de Bachillerato. **Unidad de Aprendizaje:** **Bloque : Tema** **Competencia genérica:** **Competencias disciplinares:**

Imagen 3. Ficha con los requerimientos propuestos
por el grupo de investigación de afectividad

Resultados

Las actividades

La dimensión elegida para trabajar en las fichas fue la de Conoce T, la cual fortalece la capacidad para identificar y manejar las emociones propias, ayuda a definir y fortalecer nuestra identidad y enfoca nuestros esfuerzos para lograr las metas que nos planteemos.

La habilidad general a trabajar es la autoconciencia y las específicas; la autopercepción, la autoeficacia y el reconocimiento de emociones. Por lo cual las actividades fueron propuestas para ser resueltas por distintos métodos (gráfico, analítico, algebraico, etc.), de manera que cada estudiante identifique y potencialice sus habilidades.

Por las características del formato de la plataforma al inicio de la actividad se les proporciona a las y los estudiantes los criterios de evaluación, así como las evidencias que se deberán entregar.

Actividad Preliminar

La actividad preliminar tiene como objetivo que las y los estudiantes, por medio de operaciones de expresiones algebraicas que ya conocen, puedan identificar qué sucede con el grado de la expresión resultante, se tiene previsto que se realice en una sesión de 50 minutos (imagen 4), esta actividad tendrá un foro permanente donde se pondrán preguntas de reflexión para que el estudiante vaya identificando sus debilidades y fortalezas matemáticas.

UAGro VIRTUAL

SUMA DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Instrucciones: Argumenta ampliamente tus respuestas.

Actividad Preliminar

Realiza las siguientes sumas de expresiones algebraicas y contesta lo que se te pide.

1. $3 + 5 =$

2. $x + x =$

3. $x + x^2 =$

4. $x^2 + x^2 =$

5. $\left(\frac{1}{2}x + 2\right) + (2x^2 - 1) =$

***Nota...** Cada expresión algebraica puede ser una función si cumple con la definición y puede expresarse como tal, por ejemplo $f(x) = x^2$ ó $g(x) = x + 2$.*

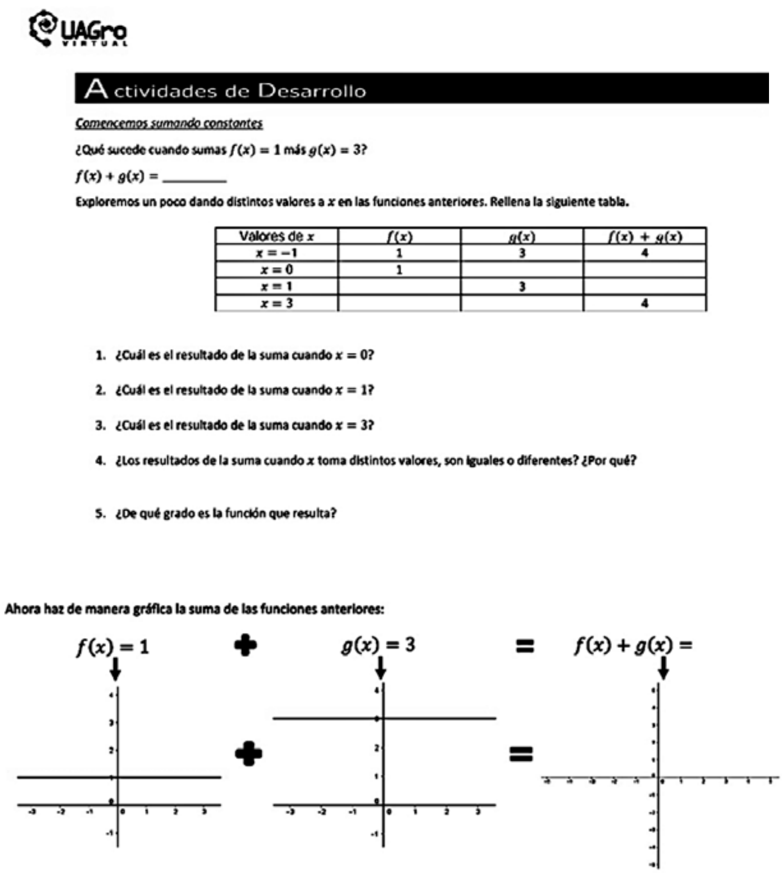
Tomando la expresión algebraica del lado izquierdo como $f(x)$ y la del lado derecho como $g(x)$. ¿De qué grado es la función que resulta de cada suma? Completa la siguiente tabla.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$
Constante	*Constante*	*constante*
Lineal	*Lineal*	
Cuadrática	*Cuadrática*	
Constante	*Lineal*	
Lineal	*Cuadrática*	

Imagen 4. Actividad preliminar

Actividad de desarrollo

La actividad de desarrollo consta de ejercicios que articulan la expresión, la tabla de datos y la gráfica de funciones polinómicas para potencializar las habilidades de las y los estudiantes, a la vez que se reflexiona sobre su autoeficacia en la resolución de las tareas dadas. Se espera que al final de esta actividad las y los estudiantes puedan realizar un bosquejo de la función resultante, la actividad está planeada para ser realizada en un módulo de 50 minutos. En la imagen 5 se muestra una parte de la actividad.



Actividades de Desarrollo

Comencemos sumando constantes

¿Qué sucede cuando sumas $f(x) = 1$ más $g(x) = 3$?

$f(x) + g(x) =$ ________

Exploremos un poco dando distintos valores a x en las funciones anteriores. Rellena la siguiente tabla.

Valores de x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$
$x = -1$	1	3	4
$x = 0$	1		
$x = 1$		3	
$x = 3$			4

1. **¿Cuál es el resultado de la suma cuando $x = 0$?**
2. **¿Cuál es el resultado de la suma cuando $x = 1$?**
3. **¿Cuál es el resultado de la suma cuando $x = 3$?**
4. **¿Los resultados de la suma cuando x toma distintos valores, son iguales o diferentes? ¿Por qué?**
5. **¿De qué grado es la función que resulta?**

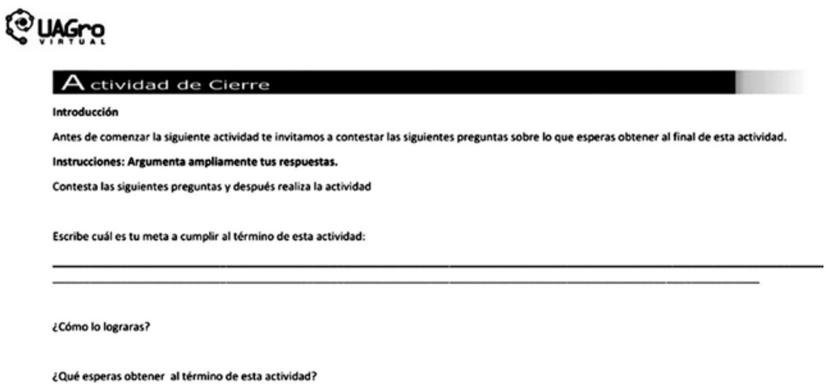
Ahora haz de manera gráfica la suma de las funciones anteriores:

Imagen 5. Actividad de desarrollo

Las preguntas del foro están relacionadas con la percepción de sus habilidades, se les pregunta acerca de qué fue lo que les costó más trabajo realizar en las actividades, qué tipo de representación se le dificulta y qué hacer para fortalecer esta debilidad.

Actividad de cierre

En la actividad de cierre se les pide que escriban una meta, con relación a sus habilidades matemáticas que les gustaría alcanzar al término de la actividad, así mismo, se les pide que registren las emociones que vayan surgiendo durante la realización de la misma, para posteriormente identificar sus habilidades durante la resolución de todas las actividades (imagen 6 y 7).


UAGro VIRTUAL

Actividad de Cierre

Introducción

Antes de comenzar la siguiente actividad te invitamos a contestar las siguientes preguntas sobre lo que esperas obtener al final de esta actividad.

Instrucciones: Argumenta ampliamente tus respuestas.

Contesta las siguientes preguntas y después realiza la actividad

Escribe cuál es tu meta a cumplir al término de esta actividad:

¿Cómo lo lograras?

¿Qué esperas obtener al término de esta actividad?

Imagen 6. Actividad de cierre

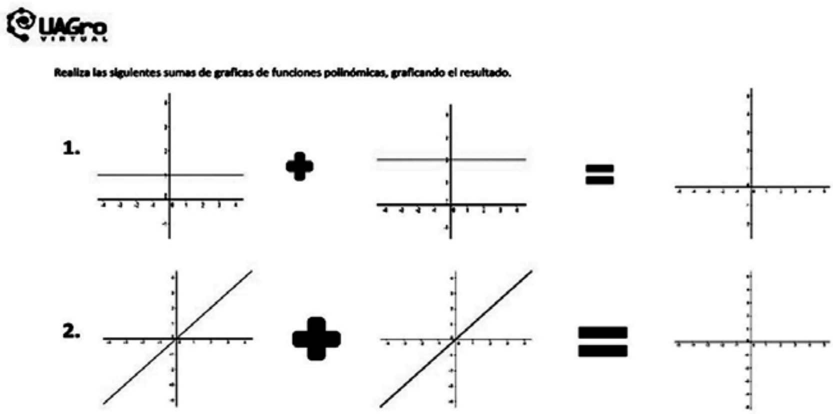


Imagen 7. Continuación de la actividad de cierre

Es importante que en la actividad de cierre se realice primero la actividad de la imagen 6 y posteriormente la actividad de la imagen 7 ya que no queremos que se predispongan al contestar las primeras preguntas.

Para terminar se proponen actividades de reforzamiento, las cuales están propuestas como un juego, lotería de operaciones (este es un juego electrónico) que consiste en que las y los estudiantes tendrán una carta que contendrá nueve imágenes de gráficas, resultado de la operación entre dos gráficas. En la pantalla aparecen las fichas que contienen imágenes de gráficas de funciones y una operación, ellos tendrán que ir marcando en su carta la gráfica con el resultado que corresponde a la operación que se muestre en la pantalla. Al término de este juego aparecen las estadísticas del tiempo y aciertos que obtuvo el estudiante al jugar, lo que permitirá la autoconciencia de las habilidades, así como observar si la meta es alcanzada, y termina con una reflexión acerca de qué puede mejorar para alcanzar la meta planteada.

Conclusión

La ficha propuesta pretende contribuir en la inserción de los estudios del afecto en el aula, al diseñar actividades que involucran al profesor de matemáticas en el apoyo del desarrollo de habilidades socioemocionales en las y los estudiantes. Así, al ayudar a reflexionar sobre sus aspectos socioafectivos, el profesor también reflexiona sobre su papel en el aula no sólo como un guía en la construcción de conocimiento matemático, sino como un apoyo para las y los estudiantes para reconocer sus habilidades y reforzarlas, y con el tiempo incorporar a su práctica aquellos aspectos afectivos que están en juego o se pueden desarrollar durante la clase de matemáticas.

El desarrollo de las competencias matemáticas que se piden en los planes y programas de estudio del bachillerato pueden ser embonadas al desarrollo de las habilidades socioemocionales, ya que no se pretende que sólo algunos de los aspectos sean atendidos en estas actividades. Incluimos tres representaciones de las funciones polinómicas (gráfica, numérica y algebraica) que ayudarán al desarrollo de las competencias matemáticas requeridas, además que en el análisis de la suma de funciones se analizan desde las tres representaciones, lo que ayuda a que las y los estudiantes tomen conciencia de sus habilidades y que pueda potenciar aquellas que están en desarrollo.

Las actividades están en proceso de ser insertadas en la plataforma del bachillerato virtual, esto debido a los tiempos del mismo. Sin embargo, se pretende continuar con el estudio para tener datos de la pertinencia y la reestructuración de las mismas y para alcanzar los objetivos y contribuir a largo plazo con la problemática que atiende el programa.

Bibliografía y fuentes de internet

Construye T (s.f.). *Ejemplo de ficha Construye T*. Recuperado el 18 de abril de 2016 de: http://www.construye-t.org.mx/inicio/fichas/comoUsar/

_____. (s.f.). *Habilidades Socioemocionales*. Recuperado el 20 de abril de 2016 de: http://www.construye-t.org.mx/inicio/aprendizaje_socioemocional).

Secretaría de Educación Pública, SEP (2012). *Reporte de la encuesta nacional de deserción en la Educación Media Superior*. Recuperado el 28 de febrero de 2017 de: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10787/1/images/Anexo_6Reporte_de_la_ENDEMS.pdf)

_____. (2015). Indicadores educativos 2013-2014 (gráfico). Recuperado el 2 de marzo de 2017 de: http://www.snie.sep.gob.mx/descargas/estadistica_e_indicadores/estadistica_e_indicadores_educativos_15MEX.pdf

_____. (s.f.). *Construye T*. Recuperado el 23 de febrero de 2016 de: www.sems.gob.mx/construyet

SUVUAGro (2015). *Bachillerato virtual*. Recuperado el 3 de mayo de 2016 de: www.virtual.uagro.mx

UAGro virtual (2015). *Modelo Educativo*. Recuperado el 3 de mayo de 2016 de: http://virtual.uagro.mx/conocenos.php#modelo

PARTE II

Exploraciones experimentales sobre habilidades matemáticas de los estudiantes

The role of drawings and tables in representing non-routine word problems

Timo Reuter[6]

Non-routine word problems, external representations, mental model, elementary school, mathematical problem solving.

Summary

External representations play a central role in the process of word problem solving-especially with non-routine word problems. Non-routine word problems are characterized by the fact that they cannot be solved by simply applying familiar routine calculations due to their demanding mathematical structure or complex situations described in the problem text. Since primary students often do not generate external representations, the study of Reuter, Schnotz and Rasch (2015), summarized in this article, examined the questions if providing students with a representation facilitates problem solving in general, and what type of representation (table or drawing) with what level of support provided in the representation was most helpful. The study comprised three types of non-routine word problems: Combinatorics, comparison and motion problems. Students in an experimental group received the problems accompanied by tables and drawings with different levels of support. A control group received no representations. Results were mixed: On the one hand, providing drawings or tables did not facilitate problem solving in general. Obviously, students had difficulties

[6] Author: Graduate School "Teaching & Learning Processes" (UpGrade), University of Koblenz-Landau, Campus Landau (Germany). Email: reutertimo@uni-landau.de

in using the provided representational forms appropriately. On the other hand, if a representation was provided, drawings made problem solving processes more efficient (faster) for all types of problems than tables and more effective for combinatorics problems.

Introduction

"A snail in a 24 m deep well wants to crawl up to the field. Each day it crawls 6 m up the side of the well and slides down half the distance it crawled in the daytime during the night when sleeping. The snail starts on Monday morning. On which day will the snail reach the top of the well?" To solve this famous riddle – which can be considered as non-routine word problem for primary school students – representation plays a central role. In a theoretical part, the article first defines non-routine word problems. Second, it refers a model of the cognitive processes involved in word problem solving. Third, a theoretical framework of representations embedded in an integrated model of text and picture comprehension is introduced and reflected in the context of (non-) routine word problem solving. In an empirical part, the article summarizes a study of Reuter, Schnotz and Rasch (2015) examining non-routine word problem solving with different types of provided external representations in primary school.

Non-routine word problems

In mathematics literature a distinction is made between routine and non-routine word problems (Mayer & Hegarty, 1996; Rasch, 2001). Contrary to routine word problems, non-routine problems are characterized by the facts that a problem solver does not immediately see how to solve the task (Mayer & Hegarty, 1996), and he cannot simply use well-trained algorithmic calculating procedures (Rasch, 2001). When working on a non-routine word problem, the student encounters a barrier: The given state cannot be transferred into the goal state by simply doing (which would be an exercise), but requires thinking (Duncker, 1974). Instead of applying algorithmic procedures, the problem solver has to re-structure existing knowledge (Winter, 1992), and make use of heuristic strategies (Rasch, 2001) to develop and execute a solution. Among a variety of heuristic strategies (Garofalo & Lester, 1985; Pólya, 1949; Rasch, 2001; Verschaffel et al., 1999), both using a drawing or a table can be considered as heuristic tools highly relevant for classroom practice (Bruder & Collet, 2011).

Cognitive Processes and the Role of External Representation for Solving Non-routine Word Problems

The research literature on cognitive processes involved in word problem solving mainly emphasize that the difficulty of solving mathematical word problems is not primarily executing the necessary operations, but correctly understanding the problem situation described in the text (Kintsch & Greeno, 1985; Mayer & Hegarty, 1996; Verschaffel, Greer & Corte, 2000). According to Verschaffel's et al. (2000) model, in the first step the problem solver has to construct an adequate mental model of the situation (situational model) described in the word problem text. In a second step, he has to transfer the mental model into an appropriate mathematical model and execute the mathematical operations derived from the model in a third step. In a fourth step, the problem solver should evaluate and interpret the result of his operations with his mental model of the situation before he reports his answer in the final step.

With regard to the snail problem presented above, the difficulty of the task does not primarily stem from executing multi-step addition and subtraction without mistakes, but from the need to correctly understand the whole situation described in the text. Even when the distance and the direction of the upwards and downwards movements are correctly understood, appropriately transferred into a mathematical model and correctly executed, a complete mental model of the situation must take into consideration that on the last day the snail reaches the top of the well and does not slide back anymore. Hence, deriving and executing a mathematical model of 24 m divided by 3m a day equals 8 days would be based on an incomplete mental model and consequently lead to the wrong solution.

External Representations

External representations can act as cognitive tools in the whole process of solving mathematical (non-)routine word problems (Ainsworth, 2006; Heinze, Star & Verschaffel, 2009; Verschaffel, 2010). When using external representations, the problem solver starts an internal communication by producing and receiving signs alternately (Schnotz, Baadte, Müller & Rasch, 2011). Moreover, he compares his mental model of the situation in a dynamic and iterative process with the information externalized in the representation (Cox, 1999), captures unstable mental representations and relieves working memory with its limited capacity (Schnotz et al., 2011).

But how do students construct a mental model from word problem text, and in addition, with provided or self-constructed external representations like drawings and tables? The integrated text and picture comprehension (ITPC) model of Schnotz and Bannert (2003) provides a theoretical framework on how a mental model is build when both text and pictures are processed. It integrates van Dijk and Kintsch's (1983) model on text comprehension with models of picture comprehension within a cognitive architecture of a multiple memory system with multiple sensory channels (Schnotz, 2014). Schnotz and Bannert (2003) generally distinguish between descriptive and depictive representations which can be internal (mental) or external (physically present). Descriptive representations always consist of symbols with an arbitrary structure that share no resemblance with the object they are representing. They are powerful in expressing abstract knowledge (Schnotz, 2014).

Examples for external descriptive representations are e.g. natural language, text, numbers, or formulas. A proposition – which is considered as a kind of mental language – is the internal equivalent (Schnotz & Bannert, 2003; van Dijk & Kintsch, 1983). Contrary, depictive representations consist of icons (Schnotz & Bannert, 2003). These icons are signs that always have a spatial configuration and share resemblance or other structural commonalities with the object they are referring to. They are informationally complete (Schnotz, 2014) which gives depictions a high computational and inferential efficiency (Larkin & Simon, 1987). Examples for external depictive representations are e.g. drawings, pictures, visual images, or maps. According to Johnson-Laird (1983) and Schnotz (1994), a mental model is the internal equivalent of a depictive representation.

According to the ITPC model, the construction process of a mental model is fed by external and internal (long-term memory) sources. In line with the dual-coding approach of Paivio (1986) the ITPC model distinguishes between a verbal and a pictorial channel to process external information. Descriptions are processed by a verbal channel, depictions by a pictorial channel. When reading a text of a word problem or gathering information from a table, the problem-solver first selects relevant information, second transfers it into a text-surface representation, third organizes it in propositional representations and fourth constructs a mental model by including prior knowledge (internal source) from long-term memory (Schnotz & Bannert, 2003). When using a picture as external source of information, first relevant pictorial information is selected, second transferred into a pictorial surface representation, and third directly organized and combined with prior knowledge in a mental model (Schnotz & Bannert, 2003). Inferences are made within the mental model by operations running on its structure. In turn, the problem solver can directly externalize the results of these inference processes in form of a depictive representation like a drawing using the pictorial channel. Contrary, by further processing the results of the inference making in form of descriptive representations, the cognitive entities have to be coded in propositions first (Schnotz, 2014). Subsequently, the problem solver can externalize the propositions via the verbal channel in e.g. a mathematical model (formula) and execute it.

Many students seem to have difficulties constructing a mental model of a word problem on basis of the problem text alone (Bernardo, 1999; Corte, Verschaffel & Win, 1985; Davis-Dorsey, Ross & Morrison, 1991; Vilenius-Tuohimaa, Aunola & Nurmi, 2008). Adding a depictive representation to the problem text, which constitutes another source of information processed via a second channel (pictorial channel), should enhance and facilitate mental model construction and use (Schnotz, 2014). With respect to the snail problem, a drawing with an appropriate structure would depict the complete distance the snail has to crawl, and the upwards and downwards movements. When working on the drawing, the situation of the last day would be obvious to the problem solver. Although the information is in the text, the student is more likely to discover it in a picture. Whereas several studies examined the role of drawings for word problem solving, no study compared the effectivity and efficiency for both descriptive and depictive representations in non-routine word problem solving so far.

Aside from representation format (description or depiction), the question of the appropriate level of pre-structuring contained in a provided representation is important and not answered satisfactorily yet. On a scale, one extreme would be to provide a ready-made representation to the problem solver, allowing him to read-off the answer (highest level of pre-structuring). Therefore, he has to invest interpretational effort (Greeno

& Hall, 1997) by adequately interpreting the structure of the representation and understanding the processes which run on its structure (Palmer, 1978). However, students often do not spontaneously invest this effort, as empirical results of e.g. De Bock, Verschaffel and Janssens (1998) or Dewolf (2014) demonstrate. Additionally, providing an external representation can impair problem solving performance if the information contained in the provided representation is redundant (which is especially true for simple routine word problems) or in conflict with student's mental representations of the problem (Beitzel, Staley & DuBois, 2011; Berends & van Lieshout, 2009; Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007; Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009). However, studies involving trainings on how to use specific types of drawings to solve specific types of word problems found positive effects (Bovenmeyr Lewis, 1989; Fong Ng & Lee, 2009). Additionally, Fagnant and Vlassis (2013) reported a positive effect of simply exposing students to possible external representations without an explicit training.

The other extreme of the scale would be asking the problem solver to self-construct an external representation (lowest level of pre-structuring). Therefore, he has to invest constructional effort (Cox, 1999). According to the generative theory of drawing construction (van Meter & Garner, 2005), actively drawing a picture while reading a text fosters cognitive in-depth and meta-cognitive processing. But students often do not spontaneously construct external representations (Bell, Swan & Taylor, 1981; Bock, Verschaffel, Janssens, van Dooren & Claes, 2003; Elia, Bell & Kolovou, 2009; Fagnant & Vlassis, 2013), even if explicitly asked (Bock et al., 1998). Moreover, self-generated drawings often do not map the structure of the problem, but fulfill decorative purposes only (Diezmann & English, 2001; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; van Garderen & Montague, 2003). Among others, Diezmann and English (2001) conclude that students need to be trained in generating adequate external representations. Recent studies yielded positive effects for representational trainings (Csíkos, Szitányi & Kelemen, 2012; van Dijk, I. M. A. W., van Oers, Terwel & van den Eeden, P., 2003), whereas a meta-study of Hembree (1992) found no or only small effects.

Between those two extreme positions of ready-made representations, on the one side, and self-generated forms, on the other side, one can provide external representations with different levels of pre-structuring. For the snail problem the teacher could provide her students a drawing depicting the basic problem-structure: The position of the snail in the well at the beginning of day one and the complete distance and direction the snail has to crawl. A more elaborated version could depict a single up- and downwards movements of the snail for the first day and night. Depending on the level of pre-structuring, the problem solver has to edit the external representation to a greater or lesser extent.

Research Questions

Against this background, the study by Reuter et al. (2015) reported in the following addressed three research questions (RQ):

RQ 1: Which format of external representations – descriptions or depictions-enhances and facilitates the construction and use of an adequate mental model more?

RQ 2: Which level of pre-structuring is appropriate for fourth-grade students?

RQ 3: Does providing an external representation facilitate and enhance the construction and use of an adequate mental model?

To answer RQ 1 and RQ 2, fourth-grade students in an experimental group (EG) were provided two different types of representations for solving non-routine word problems: drawings (depictions) and tables (descriptions). Furthermore, the drawings and the tables differed in their level of pre-structuring. To answer RQ 3, students in a control group (CG) did not receive any external representations.

Following the ITPC model, the authors assumed that a drawing should enhance and facilitate the construction and use of an adequate mental model more than a table (hypothesis 1). Given the non-routine character of the problems, the authors assumed with respect to RQ 2 that the higher the level of pre-structuring, the better and more effective the construction and use of an adequate mental model should be (hypothesis 2).

With respect to RQ 3, the authors assumed that providing an external representation along with the non-routine word problems should facilitate and enhance fourth-grader's mental model construction and use in this treatment-situation (hypothesis 3).

Additionally, the authors assumed that students who were exposed to the treatment should also show a better performance in a transfer-situation (hypothesis 4). The enhancement should translate into higher solution rates (effectivity of problem solving). The facilitation should translate into less perceived difficulty, less perceived effort and shorter processing time (efficiency of problem solving).

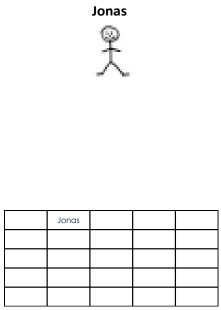
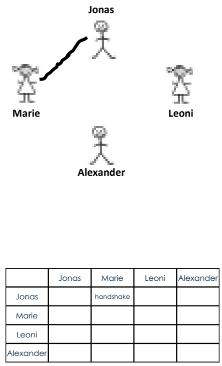
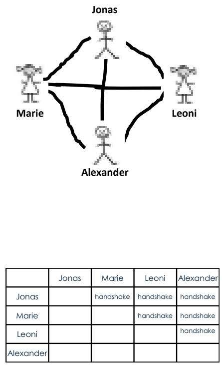
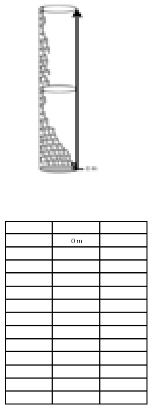
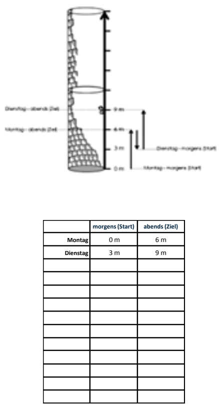
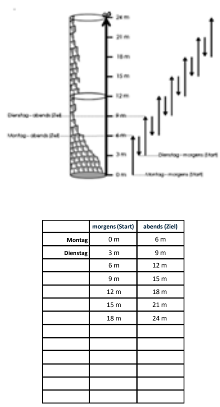
Method

Materials

Non-routine Word Problems

The study comprised three different types of non-routine word problems adapted from Rasch (2001): combinatorics, comparison and motion problems. Figure 1 gives an example for each type of word problem. For both the combinatorics and the comparison problem the difficulty stemmed from the mathematical structure of the problems. Primary students in Germany are not familiar with combinatorics problems and therefore cannot simply calculate the answer using a routine procedure. In the comparison problem the difficulty was due to the fact that there were two conditions (sum and difference) the students had to handle simultaneously. Usually, primary students are not familiar with algebraic solution procedures, making this type of task a non-routine word problem. An example of a motion problem is the snail riddle given in the introduction section. The difficulty with motion problems was to model the forward-and-backward movement correctly and to realize that on the last day e.g. the snail reaches the top of the well and does not slide back again that night.

The study involved twelve problems altogether: Four combinatorics, four comparison and four motion problems. The scenarios and the numbers used varied between the four corresponding tasks, but the mathematical structures as well as the number ranges were identical. The tasks were compiled in four problem-sets each consisting of a randomly assigned combinatorics-, comparison- and motion problem. Each set built a booklet resulting in four booklets.

<table>
<tr><th>Problem-type</th><th>Low</th><th>Level of
Pre-structuring
medium</th><th>high</th></tr>
<tr><td>Combinatorics problem: “Jonas, Marie, Leoni und Alexander are going on vacation. Each child says goodbye to each of the others with a handshake. How many handshakes is that?”</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>Motion problem
“A snail in a 24m-deep well wants to crawl up to the field. Each day it crawls 6m up on the side of the well and slides down half the distance it crawled in the daytime during the night when sleeping. The snail starts crawling on Monday morning. On which day will the snail reach the top of the well?”</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

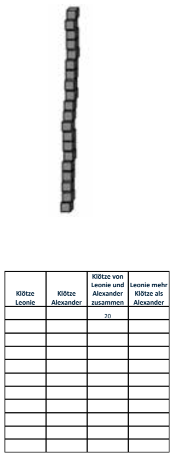
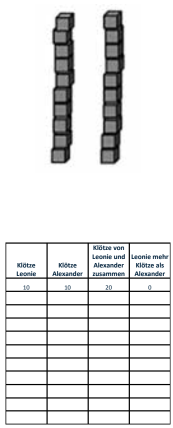
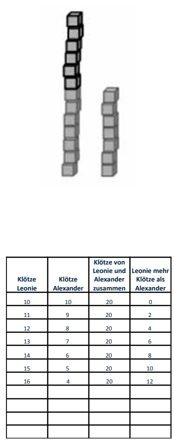
Problem-type	Low	Level of Pre-structuring medium	high
Comparison problem “Together Leonie and Alexander have 20 building blocks. Leonie has 6 building blocks more than Alexander. How many building blocks does Leonie have? How many building blocks does Alexander have?”			

Figure 1. Examples for each type of word problem and the provided drawings and tables with different levels of pre-structuring

Experimental Design

The experimental design consisted of a between-subjects manipulation (EG vs. CG) and an additional within-subjects manipulation in the EG. The design comprised three tests: In a pre-test, participants of both EG (n = 159) and CG (n = 40) were administered booklet 1 consisting of problem-set 1 without provided representations to measure participant’s prior performance. In a treatment-test, participants received booklets 2 and 3 consisting of problem-sets 2 and 3. Participants in the EG were provided external representations (treatment) to the problems, whereas participants in the CG (n = 40) did not receive any external representations to solve the tasks (between-subjects manipulation). In a transfer-test, participants worked on booklet 4 which contained problem-set 4 without provided representations to measure participant's performance after the intervention.

The within-subjects manipulation varied the provided representations in the treatment-situation in a multi-matrix design. Each EG's participant received a problem-set consisting of a combinatorics, a comparison, and a motion problem accompanied by task-specific drawings and a problem-set with corresponding tables (factor "representation form"). The drawing respectively the table provided with the first problem in the set had a high level of pre-structuring, the drawing respectively table of the second problem had a medium level of pre-structuring, and the third a low level. The order of the problems in a booklet was completely counterbalanced across subjects to control for order effects of the problems, and to combine each problem with each level of pre-structuring. For a detailed description of the experimental design and the multi-matrix implementation see the method section of Reuter et al. (2015).

As dependent variables the authors measured for each of the twelve problems the solution rate (dichotomous), perceived difficulty (participant's self-rating on a 4-point Likert scale), invested effort (participant's self-rating on a 4-point Likert scale), and processing time in seconds. To measure processing time, participants used an electronic pen which recorded the writing process with an exact time-code.

Participants and Procedure

Participants were 199 fourth-grade students from five primary schools in Germany. 103 students were female and 96 were male. Their average age was 9.21 years (SD = 0.435). Data were collected in the classroom at four sessions. Teachers provided approximately 90 minutes of lesson time each session. There were three weeks between the sessions. Figure 2 gives an overview of the experimental design and the procedure.

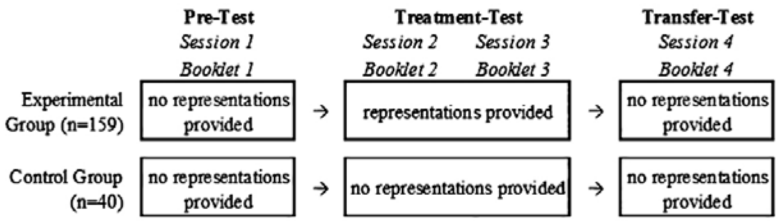


Figure 2. Experimental design and procedure

Results

Drawing or table and what level of pre-structuring?

To answer RQ 1 and RQ 2, generalized estimating equations models (GEE) (Liang & Zeger, 1986) were conducted for each of the dependent variables with the factors "representation form" (table, drawing), "level of pre-structuring" (low, medium, and high), and "problem type" (combinatorics, comparison, and motion). For a more detailed description of the statistical analyses see Reuter et al. (2015).

Solution rates (effectivity)

The GEE model revealed a significant main effect for "representation form" for solution rates (Wald-χ^2 (1) = 7.662, p = .006). In line with hypothesis 1, providing a drawing led to higher solution rates (40%) than providing a table (3%). Furthermore, the GEE model showed a significant main effect for "level of pre-structuring": Wald-χ^2 (2) = 10.830, p = .004. In line with hypothesis 2, providing representations with a high level of pre-structuring resulted in higher solution rates (44%) than providing a medium (31%) or low (34%) level of pre-structuring. Contrary to the author's assumptions, solution rates for low and medium level of pre-structuring did not differ significantly.

However, the model revealed several significant interaction effects. First, the effect of the representation form was dependent of the level of pre-structuring (Wald-χ^2 (2) = 7.878, p = .019): Providing a drawing led to higher solution rates than providing a table only when the level of pre-structuring was high or medium. If the level of pre-structuring was low, providing a drawing did not result in different solution rates than providing a table. With respect to the level of pre-structuring, the effect was dependent on the representation form: Providing a higher level of pre-structuring led to higher solution rates only for drawings but not for tables. Figure 3 depicts this interaction effect.

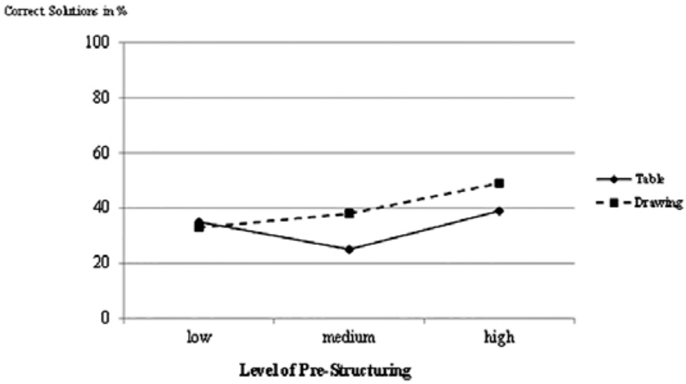


Figure 3. Interaction of "representation form" and level of pre-structuring for solution rates

Second, the effect of representation form was dependent of the problem type (Wald-χ^2 (2) = 15.471, p < .001): Providing a drawing led to higher solution rates than providing a table only for the combinatorics problem (42% vs. 22%). With the comparison (39% vs. 40%) and the motion problem (38% vs. 36%), providing a drawing resulted in similar solution rates as providing a table.

Third, the effect of the level of pre-structuring was dependent of the problem type (Wald-χ^2 (4) = 11.218, p = .024): Providing more pre-structuring did result in higher solution rates with the comparison and motion problems, but not with the combinatorics problems. Figure 4 visualizes this interaction effect.

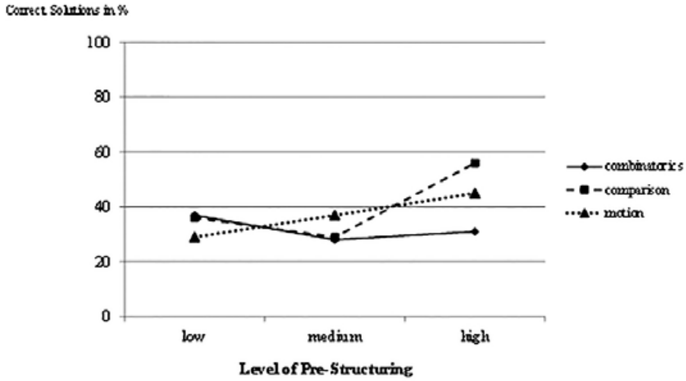


Figure 4. Interaction of "level of pre-structuring" and "word problem type" for solution rates

Perceived difficulty, invested effort, and processing time (efficiency)

To be able to evaluate the efficiency of drawings vs. tables and the efficiency of the different levels of pre-structuring for problem solving, perceived difficulty, invested effort and processing time was analyzed for those problems only which the participants solved correctly (n = 337). Contrary to the assumptions, the GEE model revealed no significant main effect of the representation form for perceived difficulty and invested effort. Only for processing time a significant effect was found (Wald-χ^2 (1) = 7.242, p = .007): When a drawing was provided, participants worked M = 162 seconds (SD = 97) on the problems compared to M = 203 seconds (SD = 113) when a table was provided. This was in line with hypothesis 1. With respect to the level of pre-structuring, the GEE model revealed a significant main effect only for perceived difficulty (Wald-χ^2 (2) = 7.645, p = .022): When a low level of pre-structuring was provided, participants reported on the scale from 1 = "very easy" to 4 = "very difficult" a higher difficulty with M = 2.02 (SD = 0.81) compared to M = 1.80 (SD = 0.78) when a high level was provided (p = .027).

Comparison of EG and CG

To answer RQ 3, the authors conducted a GEE model for the dichotomous variable solution rate with two within-subjects factors and one between-subjects factor. Within-subjects factors were "measurement time" (pre-, treatment-, and transfer-test), and "problem type" (combinatorics, comparison, and motion). Between-subjects factor was "group" (EG, CG). For perceived difficulty, invested effort, and processing time the authors conducted mixed-ANOVA models with the same factors. To test hypothesis 3, the authors compared the performance of EG's participants with CG's participants in the treatment-test taking the pre-test performance into account (contrast 1). To test hypothesis 4, EG's vs. CG's performance in the transfer-test taking the pre-test performance into account was compared (contrast 2). For both contrasts, a significant interaction effect of "group" and "measurement time" was expected. In the following, only the results of this interaction are reported. For an overview and description of all model effects, see Reuter et al. (2015).

Solution rates (effectivity)

The GEE model revealed no significant interaction of "measurement time" and "group", suggesting that contrary to the assumptions providing external representations had no effect on the solution rates in both the treatment- (hypothesis 3) and transfer-situation (hypothesis 4).

Perceived difficulty, invested effort, and processing time (efficiency)

The mixed-ANOVA models for perceived difficulty, invested effort, and processing time revealed no significant interaction effects of "measurement time" and "group". Contrary to hypotheses 3 and 4, providing an external representation did not decrease perceived difficulty, nor did it decrease invested effort and processing time.

Discussion

The results of Reuter et al. (2015) can be summarized in three main findings: First, if an external representation was provided, a drawing enhanced student's cognitive processes for the combinatorics problem only. Second, more pre-structuring enhanced solution processes only with drawings, but not with tables. Third, as the comparison of EG and CG revealed, the provided tables and drawings did not enhance and facilitate the construction and use of an adequate mental model.

Reuter et al. (2015) state that the participants obviously had difficulties in externalizing their cognitive processes to the provided external representations. The authors underline this statement with results of qualitative analyses of the solution processes: Participants recognizably edited the provided representations in 54 % of the cases only. Furthermore, only in 11 % of the cases the tables and drawings were edited as intended by the authors of the study. Reuter et al. (2015) conclude that even providing representations which are – at least from a teacher's perspective – quite straightforward and inviting to be edited by the problem solver do not guarantee that students use them at all respectively are able to use them appropriately. This is in line with the results of Beitzel et al. (2011), Berends and van Lieshout (2009), Elia et al. (2007), and Pantziara et al. (2009), but in contrast to the results of Fagnant and Vlassis (2013).

However, when a representation was provided, the drawings led to higher solution rates than the tables for the combinatorics problem and for a medium and a high level of pre-structuring. Reuter et al. (2015) conclude that for the combinatorics tasks the drawing enhanced mental model construction and use, whereas the table with its matrix structure obviously distracted participant's cognitive processes or conflicted with their own strategies. The authors report as a result of their qualitative analyses of the solution processes that CG participants very frequently and successfully used a strategy of pairwise listing the combinations which led them to the correct solution for the combinatorics problem. For the comparison and motion problem as well as for the low level of pre-structuring, both types of representations were equally (in)effective, as Reuter et al. (2015) state. The authors assume that the drawings could not develop their full potential, because students often did not (appropriately) use the provided representations – especially when a low level of pre-structuring was given (Reuter et al., 2015). However, if a drawing was provided, solution processes were more efficient: Participants arrived more quickly at the correct answer. According to Reuter et al. (2015), this was in line with the ITPC model of Schnotz and Bannert (2003).

As a conclusion, Reuter et al. (2015) agree with other author's propositions of an (early) teaching program fostering diagram literacy (Greeno & Hall, 1997; van Garderen & Montague, 2003). According to Reuter et al. (2015), primary students need to be taught how to appropriately use drawings and tables as tools to externalize cognitive load and to reason with them. As an outlook, Reuter et al. (2015) suggest that subsequent studies should not only consequently integrate (short) training session on how to use prefabricated tables and drawings for non-routine problem solving in elementary school, but also use procedures like eye-tracking to analyze primary student's processes of text-picture-integration while solving non-routine word problems more thoroughly.

References

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16* (3), 183-198.

Beitzel, B. D., Staley, R. K. & DuBois, N. F. (2011). The (in)effectiveness of visual representations as an aid to solving probability word problems. *Effective Education, 3* (1), 11-22.

Bell, A., Swan, M. & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12* (4), 399-420.

Berends, I. E. & van Lieshout, E. C. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19* (4), 345-353.

Bernardo, A. B. (1999). Overcoming Obstacles to Understanding and Solving Word Problems in Mathematics. *Educational Psychology, 19* (2), 149-163.

Bock, D. de, Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35* (1), 65-83.

Bock, D. de, Verschaffel, L., Janssens, D., van Dooren, W. & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13* (4), 441-463.

Bovenmeyr Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81* (4), 521-531.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* (Scriptor Praxis - Mathematik). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Corte, E. de, Verschaffel, L. & Win, L. de. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77* (4), 460-470.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9* (4), 343-363.

Csíkos, C., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81* (1), 47-65.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. & Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology, 83* (1), 61-68.

Dewolf, T. (2014). *Do students attend to and profit from representational illustrations of non-standard mathematical word problems?*

Diezmann, C. & English, L. D. (2001). Promoting the Use of Diagrams as Tools for Thinking. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Hrsg.), *The roles of representation in school mathematics* (S. 77-89). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Duncker, K. (1974). *Zur Psychologie des produktiven Denkens* (3. Aufl.). Berlin: Springer.

Elia, I., Bell, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41* (5), 605-618.

Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17* (6), 658-672.

Fagnant, A. & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics, 84* (1), 149-168.

Fong Ng, S. & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (3), 282-313.

Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (3), 163-176.

Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). Practicing Representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78* (5), 361-367.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91* (4), 684-689.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM, 41* (5), 535-540.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (3), 242-273.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models. Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness* (Cognitive science series, Bd. 6). Cambridge: Harvard University Press.

Kintsch, W. & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92* (1), 109-129.

Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a Diagram is (Sometimes) Worth Ten Thousand Words. *Cognitive Science, 11* (1), 65-100.

Liang, K.-Y. & Zeger, S. L. (1986). Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models. *Biometrika, 73* (1), 13-22.

Mayer, R. E. & Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Hrsg.), *The nature of mathematical thinking* (S. 29-53). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Paivio, A. (1986). *Mental representations. A dual coding approach* (Bd. 9). New York: Oxford University Press; Clarendon Press.

Palmer, S. E. (1978). Fundamental Aspects of Cognitive Representation. In E. Rosch (Hrsg.), *Cognition and categorization* (S. 259-303). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pantziara, M., Gagatsis, A. & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72* (1), 39-60.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: A. Francke AG.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zu Herangehensweisen* *von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert*. Hildesheim: Franzbecker.

Reuter, T., Schnotz, W. & Rasch, R. (2015). Drawings and Tables as Cognitive Tools for Solving Non-Routine Word Problems in Primary School. *American Journal of Educational Research, 3* (11), 1187-1197.

Schnotz, W. (1994). *Aufbau von Wissensstrukturen. Untersuchungen zur Kohärenzbildung beim Wissenserwerb mit Texten*. Weinheim: Beltz.

Schnotz, W. (2014). Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Hrsg.), *Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2nd edition, S. 72-103). Cambridge: Cambridge University Press.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2011). Kreatives Problemlösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In K. Sachs-Hombach & R. Totzke (Hrsg.), *Bilder - Sehen - Denken. Zum Verhältnis von begrifflichen-philosophischen und empirisch-psychologischen Ansätzen in der bildwissenschaftlichen Forschung* (S. 204-252). Köln: Herbert von Halem Verlag.

Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction, 13* (2), 141-156.

Van Dijk, T. A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Van Dijk, I. M. A. W., van Oers, B., Terwel, J. & van den Eeden, P. (2003). Strategic Learning in Primary Mathematics Education: Effects of an Experimental Program in Modelling. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice, 9* (2), 161-187.

Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83* (6), 301-312.

Van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 18* (4), 246-254.

Van Meter, P. & Garner, J. (2005). The Promise and Practice of Learner-Generated Drawing: Literature Review and Synthesis. *Educational Psychology Review, 17* (4), 285-325.

Verschaffel, L. (Hrsg.). (2010). *Use of external representations in reasoning and problem solving. Analysis and improvement*. Abingdon: Routledge.

Verschaffel, L., Corte, E. de, Lasure, S., van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment With Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning, 1* (3), 195-229.

Verschaffel, L., Greer, B. & Corte, E. de. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse [Netherlands]: Swets & Zeitlinger Publishers.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. & Nurmi, J. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology, 28* (4), 409-426.

Winter, H. (1992). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens*; *Funktionen des Sachrechnens; Unterrichtsprojekte* (2. Aufl.). Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

La actitud proactiva y la proporcionalidad

María S. García González[7] *y Rosa María Farfán Márquez*[8]

Palabras clave: Actitud, socioepistemología, proporcionalidad.

Resumen

El presente escrito tiene la intención de discutir el papel del saber matemático en las actitudes hacia las matemáticas, el motivo obedece a que, en la larga tradición de investigación sobre actitud en matemática educativa, el saber matemático ha quedado opacado, aludiéndose siempre a la dicotomía gusto o disgusto hacia las matemáticas. En una intervención realizada con estudiantes de educación secundaria en México, centrada en la proporcionalidad como saber matemático, encontramos evidencia de una actitud proactiva relacionada con la forma en que la actividad matemática se presentó, las características personales de los estudiantes y los significados asociados a la proporcionalidad.

Introducción

La matemática educativa es la disciplina que tiene como objeto de estudio los fenómenos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Dicho aprendizaje se refiere al proceso de construcción de conocimientos del

[7] Universidad Autónoma de Guerrero. Correo-e: mgargonza@gmail.com.
[8] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Correo-e: rfarfan@cinvestav.mx

individuo basados en la instrucción, la experiencia, el razonamiento y la observación. En este proceso, indudablemente humano, intervienen factores de diferente naturaleza: cognitivos, contextuales, culturales y afectivos. Estos últimos son la motivación del presente escrito. Nuestro interés principal es el estudio de la actitud, constructo que se estudia desde el llamado dominio afectivo.

La teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013) al reconocer la componente social del saber matemático permite estudiar fenómenos sociales, es decir, aquellos que son producto de las relaciones entre las personas, relacionados con dicho saber. En este sentido, el presente trabajo se realizó bajo esta perspectiva y tuvo como objetivo el estudio de un fenómeno social, *las actitudes*, centrado en un saber matemático, *la proporcionalidad*.

Considerando la actitud como la disposición del estudiante hacia el trabajo con lo proporcional, y retomando el modelo TMA (Tridimensional Model of Attitude, Di Martino & Zan, 2010), en García-González (2016), encontramos que cuando el saber matemático se vuelve objeto de actitud, el TMA se define como muestra la figura 1.

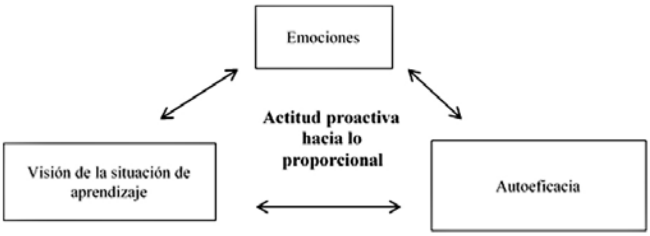


Figura 1. Modelo de Actitud proactiva hacia la proporcionalidad (García-González, 2016).

Las dimensiones del modelo de actitud proactiva se definen como sigue:

1) Las *emociones* son las reacciones que se desencadenan en el trabajo con las situaciones de aprendizaje y con el saber puesto en juego.
2) La *visión de la situación de aprendizaje* es la valoración que el estudiante hace del diseño de la situación de aprendizaje y de su interacción con ésta.
3) La *autoeficacia* la definimos como la creencia en las habilidades personales para hacer frente a una situación planteada, dicha creencia está permeada por las concepciones que de la matemática

escolar se tengan, producto de las vivencias en las clases de matemáticas, así como de la confianza que se tenga de trabajar con el saber matemático en cuestión.

En el modelo TMA cada una de sus dimensiones: emoción, visión de la matemática y competencia del estudiante se definen de manera dicotómica, las emociones son vistas como el gusto o disgusto hacia las matemáticas, la visión de la matemática como instrumental o relacional, y se considera al estudiante competente cuando puede resolver un problema planteado y en el caso contrario se considera no competente. A diferencia de las dimensiones del TMA, las dimensiones de la actitud proactiva que encontramos no son siempre dicotómicas, sino multifactoriales.

Actitud proactiva hacia lo proporcional

El Modelo de Actitud proactiva hacia la proporcionalidad (García-González, 2016), que presentamos, es el resultado de una intervención desarrollada con veinte estudiantes (diez mujeres y diez hombres; de 14-15 años de edad) de una secundaria pública de la ciudad de México. Estos estudiantes asistieron por invitación de su profesor de matemáticas a un taller con sede en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional sede Zacatenco (Cinvestav-IPN), por tres meses, de septiembre a diciembre de 2014, en sesiones de una hora semanal.

El taller llamado "Resolviendo Situaciones de Aprendizaje" fue conducido por la primera autora, y tuvo como objetivo caracterizar las actitudes de los estudiantes hacia la proporcionalidad. En él se resolvieron diez Situaciones de Aprendizaje (SAn, n denota del 1 al 10 el número de SA) centradas en dos tipos de tareas sobre proporcionalidad, mezclas, y escalas. Para dar cuenta de las actitudes se utilizó como modelo previo el TMA.

Como fuentes de evidencia en este estudio se usaron: i) videograbaciones de los estudiantes resolviendo las diferentes situaciones de aprendizaje; ii) entrevistas individuales, posterior a la resolución de las situaciones; iii) entrevistas en grupos focales para conocer la relación de los estudiantes con las matemáticas; iv) las producciones de los estudiantes de las hojas de actividades de las situaciones de aprendizaje.

Toda esta evidencia se analizó tomando como referencia el modelo TMA, haciendo uso de la codificación por Teoría Fundamentada (Glaser & Strauss, 1967), las dimensiones de este modelo fueron las categorías previas que fueron redefiniéndose con la evidencia recolectada.

Como resultado del análisis, encontramos un solo tipo de actitud que llamamos, proactiva debido a que todos los participantes mostraron disponibilidad para resolver las situaciones de aprendizaje propuestas, además de que mostraron iniciativa en el desarrollo de éstas con el fin de resolverlas. Empero, la proactividad se manifestó de forma diversa, la razón fue la personalidad de cada uno de los participantes y el tipo de tarea proporcional enfrentado. La actitud proactiva aparece en un aula extendida, es decir cuando hay alguien que aprende y un medio por el cual lo hace. Pudiera ser que en otro entorno las propiedades de las categorías cambien, por ejemplo, en el aula de clases, por las características concretas de éste.

La pretensión de este escrito se centra en las dimensiones de este modelo, en aras de discutir el papel de la proporcionalidad en la actitud manifestada por estudiantes cuando trabajan situaciones de aprendizaje centradas en dicho saber, para ello procederemos en las siguientes secciones a explicar cada una de las componentes y su relación con la proporcionalidad, como evidencia se presenta lo que ocurrió en el taller desarrollado.

Las emociones

La componente emociones las entendemos de acuerdo con la teoría OCC (Denominada OCC, por las iniciales de sus autores Ortony, Clore & Collins, 1988) como *las reacciones de valencia* a eventos, agentes u objetos. Basados en los fundamentos de esta teoría encontramos cuatro tipos de emociones desencadenadas por el trabajo con las Situaciones de Aprendizaje (SA), y por su diseño (tabla 1), éstas fueron: la congoja, el júbilo, el agrado y el desagrado. Ellas se presentan de manera dicotómica, congoja y júbilo, agrado y desagrado. Cada par aparece cuando las situaciones desencadenantes ocurren de manera opuesta, por ejemplo, cuando se tiene la respuesta a la SA aparece el júbilo, de lo contrario aparece la congoja; agrado y desagrado se desencadenan por características específicas del tipo de tarea proporcional y el diseño de la SA.

Las tareas de mezcla priorizaban la comparación entre dos variables que podían fusionarse, particularmente el caso de líquidos mezclados, por ejemplo, agua y jugo, pintura de color verde y pintura de color azul. En estas tareas la toma de decisiones desencadenó en algunos participantes agrado y en otros, desagrado. En las tareas de escala se priorizó el uso de la constante de proporcionalidad *k*, a veces entera y a veces decimal, en estas tareas el desagrado se desencadenó por trabajar con una constante de proporcionalidad no entera y el agrado por trabajar con una constante de proporcionalidad entera.

En lo señalado en el párrafo anterior, se resalta que las características de la proporcionalidad en diferentes situaciones generan rechazo o aceptación por parte de los estudiantes. En el caso de las tareas de mezcla el agrado fue consecuencia de tener recursos para validar el sabor de la mezcla (agua-jugo de naranja) al probarla, para otros esta misma situación fue de desagrado por no lograr establecer desde su perspectiva un "buen sabor a naranja", mayor sabor a naranja. En el caso de las tareas de escala, para algunos alumnos trabajar con un k=0.75 representó dificultades y por consecuencia rechazo, por ser una cantidad compleja de manipular, al representar tres cuartas partes, en comparación con la mitad, o el doble, cantidades que para ellos son fácilmente manipulables.

Acerca de las emociones durante la resolución de problemas, la literatura ha reportado que los estudiantes experimentan diferentes emociones mientras resuelven un problema, pueden sentirse aburridos, enfadados, ansiosos, relajados, felices o nerviosos (Goldin, 2014; Op 't Eynde, De Corte & Verschaffel, 2006, Martínez-Sierra & García-González, 2014; 2016; 2017). Nuestros resultados aportan más evidencia que la desencadenada por la resolución de problemas, se evidencia cómo las emociones son desencadenadas por la naturaleza de los problemas de proporcionalidad, como el uso de la constante de proporcionalidad con números no enteros. Este resultado coincide con lo señalado por Lamon (1993) en su investigación, ella encontró que los estudiantes llegan a frustrarse fácilmente con este tipo de problemas, pero el afecto no era el objetivo de su investigación.

Otro de nuestros aportes es que se ha encontrado que el diseño de la SA influye en las valoraciones de los estudiantes, por ejemplo, en las tareas de mezcla se notó una inclinación de agrado, donde tuvieron que preparar las mezclas. Este resultado concuerda con lo que Pepin (2011) señala, ella dice que la manera en que la matemática sea presentada es un factor que influye las actitudes hacia las matemáticas.

Tabla 1. Tipos de emociones de la actitud proactiva

Fuente	Situación desencadenante	Emociones
Trabajo con las SA (Dar o no respuesta a la SA)	Al dar una respuesta o argumentarla (acontecimiento deseable)	júbilo
	No saber la respuesta (acontecimiento indeseable)	congoja
Diseño de la situación de aprendizaje	Agrado por un objeto atractivo	agrado
	Desagrado por objeto repulsivo	desagrado

Desde la OCC la congoja se define como *descontento por un acontecimiento indeseable*, en la evidencia identificamos la congoja cuando no se podía o no se tenía respuesta a una pregunta. Interpretamos que el no estar seguros de la respuesta es un acontecimiento indeseable que genera descontento, y por tanto congoja.

El siguiente episodio fue parte de la SA7, donde los estudiantes trabajaron junto a sus madres en equipos para preparar mezclas diferentes: H (hombre) y M (mujer) denotan el sexo del participante, el número obedece al número de lista asignado. En negritas se resalta la emoción.

> H1 Toma dos jarras de diferente tamaño para preparar el agua, H1 y H3 en una jarra agregan 3 litros de agua y en la otra 4 con ayuda de sus mamás.
> [1] Mamá de M2: ¿Cuánto debes de poner [concentrado] a cada jarra?
> [2] M2: Toma [le da el concentrado a H1 y les pregunta a H1 y H3].
> [3] H1 **se muestra dudoso al tener que dar la respuesta**, se toma un rato para pensar, pero no da respuesta debido a que H3 es el que contesta.
> [4] H3: Mmm, como que la mitad.

El caso contrario, cuando el aprendiz sí puede dar una respuesta (acontecimiento deseable) se genera alegría, desde la OCC esto coincide con la definición de la emoción; "Júbilo, contento por un acontecimiento deseable". En el siguiente episodio M2 explica su elección entre dos recetas para preparar agua de naranja (se trata de la situación de aprendizaje 2, SA2), el júbilo aparece cuando puede argumentar la elección de la receta, es decir cuando tiene la respuesta a la SA a la que se enfrenta.

El siguiente fragmento es una entrevista de la primera autora de este escrito (M) a M2 después de su trabajo con la SA2. En negritas se destacan evidencias de emoción, y en cursiva los argumentos que usa M2 en sus respuestas. Se trataba de la toma de decisión entre las siguientes propuestas:

Propuesta de Tere	
Jarabe de jamaica	2 litros
Agua natural	3 litros

Propuesta de César	
Jarabe de jamaica	3 litros
Agua natural	5 litros

M: En la clase anterior dijiste que *hay que echar más sabor*.

M2: *Pero era naranja*, la naranja de Bonafina *está menos fuerte comparada con el sabor del concentrado*.

M: Entonces, ¿depende del sabor del agua?

M2: Sí, yo creo que sí [**sonríe**], *la mejor propuesta es la que sepa mejor*, a Jamaica, pero no muy fuerte. Por eso la de César es la mejor.

M: Considera que le van a echar hielo al agua.

M2: Sí es cierto, bueno eso cambia las cosas [**se queda callada** un rato]… porque así se va *a diluir más el concentrado*, no vi eso, bueno si fuera así está mejor la de Tere, así el hielo le bajará más el sabor. ¿Puedo cambiar mi respuesta?

M: ¿Por qué la cambiarías?

M2: Porque no consideré lo del hielo, ahora que usted dijo me acordé, creo que la mejor es la de Tere en este caso.

M: ¿Y si no le ponemos hielo?

M2: [**Se queda callada**]... Bueno entonces la de César estaría bien, mejor que usen agua fría y así ya no muevo mi respuesta [**expresión en su cara de felicidad**].

M: ¿Cómo?

M2: Sí [**sonríe]**, yo digo que la receta de César está bien, el sabor será bueno, pero si le agregan hielo se va a hacer agua, entonces yo diría que se use agua fría y se pongan en cantidades de la receta de César, así quedaría bien.

M: Tú dices entonces que la cantidad de agua influye.

M2: Sí, comparada con la de jarabe, por eso yo elegí la de César y no la de Tere.
M: Entiendo, pero si tuvieras que elegir sólo una propuesta, ¿cuál sería?
M2: La de César, y si le echan hielo eso es ya cuando está preparada entonces ***me arriesgo*** a decir que sea esa.

De acuerdo con los fundamentos de la OCC, la valoración que el estudiante hace de las emociones de bienestar, grupo al que pertenecen la congoja y el júbilo, se desencadenan por una valoración basada en metas, identificamos que la meta de persecución activa (meta planteada a largo plazo, *A-meta*) que estaba implícita fue *ingresar al bachillerato*, ya que a decir de ellos, asistían al taller para aprender matemáticas debido a que se encontraban en el último grado de secundaria y se querían preparar para el examen de ingreso al bachillerato. La meta de interés (meta planteada a corto plazo, *I-meta*), sería entonces *aprender matemáticas*.

Encontramos también evidencia de las emociones relacionadas al diseño de la situación de aprendizaje, en este caso aparecen emociones de agrado y desagrado. La emoción de agrado (o gusto, en la versión original *liking*) se define desde la OCC como agrado por un objeto atractivo, es decir si el objeto resulta atractivo al sujeto, entonces la emoción de agrado aparece. En el caso de los participantes, encontramos que el objeto de atracción fue la SA en sí misma. Por ejemplo, la SA2 fue valorada como fácil, esta facilidad desencadenó la emoción de agrado, el señalamiento de H17 da cuenta de ello.

La evidencia siguiente es el comentario de H17 una vez resuelta la SA2, las negritas referencian la palabra emocional y la cursiva la situación que desencadena la emoción.

H17: La actividad estuvo muy fácil, **me gustó**, fue entretenido el *elegir las propuestas*, debería de resumirse el motivo del problema.

El desagrado (o disgusto por el original *disliking*) es la emoción contraria al agrado, es decir si el objeto resulta repulsivo al sujeto, entonces no le atrae y se desencadena el desagrado. Ejemplos de desagrado los identificamos en los comentarios de H20 y M9; para H20 tener que decidir entre las dos propuestas para preparar el agua no fue atractivo, comenta que le molestó, creemos que esto se debió a que la SA2 demandaba argumentar la elección de las respuestas. Aunque comenta haberse sentido bien, creemos que la emoción que experimentó fue el desagrado. M9 también dijo sentirse bien, sin embargo en su comentario identificamos que la elección de las propuestas la valoró como difícil por ello creemos que la situación no fue atractiva para ella.

Los siguientes fragmentos son las opiniones de dos estudiantes después de resolver la SA2, el subrayado indica las situaciones que desencadenaron las emociones y las negritas las palabras emocionales.

> H20: La actividad fue un **poco molesta** por <u>tener que decidir en las propuestas</u>, pero **me sentí bien**.
> M9: **No me pareció fácil**, se veía pero no lo fue. <u>Tener que decidir</u> no fue fácil. **Me sentí bien**.

Las emociones de agrado, de acuerdo a la OCC se encuentran regidas por las actitudes, es decir, por disposición a que las cosas agraden o desagraden, disposiciones que, con frecuencia, aunque no necesariamente, siempre están incorporadas en las representaciones conceptuales de las cosas mismas. Aclaramos que esta definición de actitud se entiende de manera diferente a las consideradas en este trabajo de investigación, nos referimos a ellas en un sentido de atracción o rechazo. En las emociones de desagrado, encontramos evidencia de rechazo, como se ha mencionado en el caso de H20, tener que decidir entre dos propuestas para preparar el agua no fue atractivo y se desencadenó el rechazo. Por el contrario, cuando el objeto de actitud resultó atractivo, por ejemplo, el diseño de la SA, se desencadenó el agrado.

En García & Farfán (2013) investigamos las emociones en la clase de matemáticas de estudiantes de secundaria usando narrativas como herramientas para la toma de datos. Para el análisis de la evidencia usamos la teoría OCC y encontramos cuatro tipos de emociones desencadenadas por factores diversos como el profesor y la matemática *per se*, un tema en particular, los familiares de los estudiantes, el estudiante mismo y resolver problemas. De acuerdo a los datos de la tabla 2, las emociones de agrado y desagrado son desencadenadas por resolver y por no poder resolver un problema, respectivamente. En la presente investigación esta misma situación desencadenante ha sido la detonadora del agrado y el desagrado.

De las situaciones desencadenantes mostradas en la tabla 2, sólo la situación *resolver problemas* la encontramos en nuestros resultados, el resto no aparece. La explicación que damos a este hecho es que dichas situaciones son propias del aula de matemáticas, en el aula extendida que nosotros consideramos, donde aprendiz y saber interactúan y estas situaciones desencadenantes no tienen cabida.

Tabla 2. Emociones de estudiantes mexicanos de secundaria

Grupo OCC	Situación desencadenante	Tipo de emociones
Bienestar/ Atracción	Profesores	Júbilo/Congoja Agrado/Desagrado
	Tema específico	Desagrado/Agrado
	Matemática	Desagrado/Agrado
	Familiares	Agrado
Atracción	Resolver/no problemas	Agrado/Desagrado

Fuente: García & Farfán, 2013

La visión de la situación de aprendizaje

Los participantes percibieron las Situaciones de Aprendizaje de dos formas, funcional y utilitaria.

Visión funcional

En esta categoría agrupamos aquellas respuestas en donde los estudiantes resolvieron las SA mediante argumentos funcionales de lo proporcional, por ejemplo, al tener que elegir entre dos mezclas tomando en consideración el sabor de ésta o su color, muchas veces haciendo referencia a su racionalidad contextualizada, esto es, las experiencias previas del estudiante y su relativismo epistemológico, la validación que hace del conocimiento basado en esas experiencias.

La siguiente evidencia es un fragmento de la actividad realizada en SA1 en donde H1 evidencia su visión funcional al llevar la respuesta a una comparación con una práctica de referencia, preparar agua de sabor.

> [63] Se discute la pregunta ¿de qué depende la elección de la receta para hacer una buena agua de naranja?
> [64] H1: De cómo se prepare. Yo hago agua de limón y me queda bien. [**Visión funcional**]
> [68] H1: Lleno una jarra de 2 litros de agua natural, después le echo dos cucharadas de cocinar de azúcar, la revuelvo para que se disuelva, después le echo el jugo de 8 limones. Pero no sé en mililitros cuánto jugo es. Pero sabe bien, me dicen que el agua está buena.

En su comentario, H1 señala que la elección de una mezcla es la manera en cómo se prepare ésta, pero el cómo se prepare en realidad es la relación adecuada (*razón*) entre el agua natural y la naranja, dicha relación se valida con el sabor de la mezcla. El sabor de la mezcla fue el argumento más utilizado para validar las elecciones de la mezcla, sobre todo en SA1 y SA7, en donde los participantes pudieron probarlas. Estos argumentos tienen una característica subjetiva, debido a que el sabor de la mezcla es personal, depende de las preferencias de las personas, por tanto, las validaciones de las respuestas fueron distintas para cada estudiante.

Creemos que las actividades realizadas con materiales manipulables en el caso de las tareas de mezcla, favorecieron la visión funcional de la situación de aprendizaje y su aceptación por la familiaridad con el contexto de referencia y por la forma en que ésta fue presentada, el hecho de preparar físicamente la mezcla, permitió en la realidad determinar un mayor sabor a naranja en SA1, y la preparación de aguas de jamaica, horchata y café en SA7. Esta familiaridad que los estudiantes refieren en las tareas de mezcla ha sido señalada como una de las variables que influyen en las tareas de mezcla (Noelting, 1980; Lamon, 1993).

H1 comentó en SA1 que la situación en donde usó sus conocimientos matemáticos, le pareció un juego.

> H1: Fue un juego en el que puse a prueba mis conocimientos matemáticos no creía que estuviera haciendo matemáticas [**asistía al taller con la creencia de que iba a reforzar sus conocimientos de matemáticas**]… en la escuela

sólo resuelvo el libro o cuaderno no hago experimentos como este, debería hacerlos la maestra.

En el caso de las situaciones en lápiz y papel (por ejemplo, en SA2 y SA7) el sabor y el color de la mezcla fueron también argumentos para validar las respuestas, por ejemplo, H3 usó el siguiente argumento para dar respuesta a una pregunta sobre elección de mezclas.

Fragmento de la actividad y entrevista a H3 después de realizar la SA2, en donde se trataba de tomar postura ante el comentario de Tere, la hermana de César que proponía preparar 20 litros de agua de jamaica, mezclando 10 litros de agua natural y 10 de concentrado de jamaica.

Problema 1 en la SA2. El subrayado indica que es una respuesta escrita en la hoja de actividades de la SA2.

1.- ¿Están de acuerdo con que agregar 10 litros de agua como lo propone Tere es suficiente?, ¿por qué creen que César no estuvo de acuerdo?
H1: <u>No, porque el sabor no estaría compensado</u>.
Entrevista. Se resaltan las emociones advertidas en negritas.
[1] M: ¿A qué te refieres con compensado?
[2] H3: Que tendría la misma cantidad de jarabe que agua, entonces no sabría bien, porque el jarabe es muy concentrado si pone la misma cantidad de jarabe que de agua el jarabe no se diluye lo suficiente para tener un buen sabor.
[3] M: ¿Suficiente?
[4] H3: Sí, debemos buscar un equilibrio en el sabor que compense, poner más agua y menos jarabe. [**Sonríe**].
[5] M: Entiendo, ¿recuerdas que la vez pasada cuando hicimos lo de la mezcla ganadora dijiste que la clave era poner más jugo que agua natural?
[6] H3: Mmm… [**Sonríe**] ¡Ah!, pero es que ahí era la que supiera más a naranja, por eso deberíamos poner más jugo que agua, o sea diluir poquito el sabor de naranja, acá es diferente porque es concentrado, como es concentrado viene muy fuerte y hay que poner más agua para compensar el sabor de la jamaica, por eso no debemos poner más concentrado que agua ni tampoco la misma cantidad cómo dice César [sonríe].

H3 busca la relación adecuada en una razón, para él es más agua y menos concentrado, la argumentación que expone es el sabor de la mezcla, arguye que el concentrado deberá ser diluido con el agua (más agua/menos concentrado), porque su sabor es fuerte, sin embargo, cuando refiere a la mezcla de jugo de naranja y agua (SA1) la relación es diferente, más jugo/ menos agua, porque en ese caso se pretendía un sabor más fuerte del jugo de naranja.

Visión utilitaria

Encontramos evidencia de una visión utilitaria cuando se respondió de manera arbitraria sin argumentar la respuesta. El caso de M2 da evidencia de esto.

Fragmento de la actividad en SA1, donde se trataba de elegir "el mejor sabor" al mezclar agua y jugo de naranja. Resaltamos en cursiva los argumentos que da M2 al ser cuestionada por la primera autora de este escrito.

> [119] M: ¿Qué haríamos si queremos preparar agua de naranja para nosotros, 22 contando a Brenda y a mí?
> [120] M2: Echarle más agua
> [123] M2: Depende de la cantidad que quieras hacer, por ejemplo, un litro de agua y 4 naranjas.
> [124] M: ¿Para los 22?
> [125] M2: No, entonces serían 2 litros de agua y 4 naranjas.
> [126] M: Esa jarra es más o menos de dos litros [señalo la jarra que está en el salón].
> [127] M2: ¡Ah!, entonces no nos va a alcanzar, entonces serían [**grita**] ¡10 litros de agua!, y 4 kilos de naranja. Así ya. [No razona su respuesta, visión utilitaria]

Respecto a la preparación de agua, M2 estableció las razones litros de agua/ naranja, luego cuando propuso una mayor cantidad de agua la relación que estableció fue 10 litros de agua/ 4 kilos de naranjas, debido a que incrementó la cantidad de agua, también lo hizo con las naranjas, pero por el tipo de respuesta que dio creemos que lo hizo sin centrarse en la relación 2/4 que estableció primero. Esta falta de comprensión al resolver problemas de proporcionalidad ha sido reportada en la literatura como una variable que influye en la resolución de problemas sobre proporcionalidad (Lamon, 1993; Godino & Batanero, 2002; Hilton et al., 2016).

Autoeficacia

Dentro de la componente autoeficacia adoptamos los modelos de proporcionalidad propuestos por Reyes (2011) como referencia para el análisis de las SA. Definimos la autoeficacia basados en Bandura (1986, 1989, citado en Maddux, 1995) como la creencia en las habilidades propias para hacer frente a una situación planteada, dicha creencia ayuda a movilizar la motivación, recursos cognitivos y cursos de acción necesarios para ejercer el control sobre la tarea demandada. Y consideramos de acuerdo con Usher & Pajares (2009), las siguientes fuentes de autoeficacia:

- La *experiencia de rendimiento*, se refiere a las evidencias derivadas de alcanzar el éxito en evaluaciones de matemáticas anteriores.
- La *experiencia vicaria*, se refiere a las evidencias obtenidas de las comparaciones de uno mismo con los compañeros de clase.
- La *persuasión social*, se refiere a las evidencias de los comentarios hechos por otros, por lo general en una posición de autoridad, como un maestro o un padre de familia.
- Los *estados fisiológicos y afectivos*, se refieren a la evidencia a partir de los sentimientos internos de ansiedad, preocupación, tensión, etc., que podrían ser provocados por tener que realizar tareas matemáticas.

Las propiedades que nosotros identificamos de la componente autoeficacia tienen como fuente de evidencia las experiencias de rendimiento, la experiencia vicaria y la percepción verbal. Los estados fisiológicos y afectivos se encuentran en la componente emoción. Enseguida daremos algunos ejemplos de dos estudiantes con autoeficacia alta y baja, respectivamente, en cada caso caracterizamos ésta con base en las componentes antes descritas.

La autoeficacia de H1 podemos describirla como alta, él creía en sus habilidades para resolver las situaciones (experiencias de rendimiento) esta creencia se mantuvo durante todas las sesiones, para él era importante mejorar su desempeño en matemáticas (*objetivo*, la autoeficacia se forma en referencia a un tipo de objetivo), este motivo lo impulsaba a mantener su autoeficacia. En la entrevista inicial que se les hizo acerca de su relación con las matemáticas, él comentó (hemos resaltado en los datos las fuentes de evidencia de la autoeficacia, usando negritas):

El siguiente fragmento corresponde a la intervención de H1 en una entrevista inicial en grupo focal. Entre llaves resaltamos las componentes de la autoeficacia.

> H1: No me gustan las matemáticas {**emoción**}, bueno ahora, en primaria era muy bueno {**experiencias de rendimiento**}, ahora se me dificultan {**cambio de la autoeficacia**}, la verdad es que desde primero casi no entiendo, ahora si le echo más ganas porque ya voy de salida {**objetivo**}, pero es que la maestra {**factor que influye en sus juicios de autoeficacia**} casi no nos hace caso, sólo nos deja el libro y eso aburre {**emoción**}y a veces no entiendo-{**autoeficacia**}.
> M: ¿Qué has hecho ante esa situación?
> H1: A veces estudio por mi cuenta {**autoeficacia**}… casi no me gusta pedir ayuda, bueno a veces mi mamá le pide a H3 que me explique y si le entiendo, también consulto al profe, por eso estoy aquí, mi mamá le pidió a él que me incluyera con los demás {**persuasión social**}, yo no soy del grupo, pero sí me interesó venir, yo quiero ir mejor {**motivo**}, yo sé que puedo {**juicio de autoeficacia**}, es sólo que me aplique.

En la valoración de la SA1, H1 comentó:

> H1 [acerca de SA1]: Fue un juego en el que puse a prueba mis conocimientos matemáticos {**juicio de autoeficacia**} no creía que estuviera haciendo matemáticas… en la escuela sólo resuelvo el libro o cuaderno no hago experimentos como éste {**experiencias de rendimiento**}, debería hacerlos la maestra.

Durante la solución de SA1, H1 señaló un error en las recetas del que nadie se había percatado, lo cual lo hizo experimentar júbilo.

> [13] H1: ¡No!, revise su hoja, que están mal {**autoeficacia**} [se refiere a las cantidades de vasos usados, **voz fuerte y eufórica**].

Notamos que en SA, cuando no fue capaz de argumentar una pregunta, se quedaba callado.

> [45] H1: ¿Por qué sabe más a naranja? Porque le echaron más Bonafina. [Se le sigue cuestionando, pero sigue diciendo que es porque hay más naranja].

[46] M: Sí, pero cuál es la causa de que sepa más [se sigue cuestionando, pero deja de responder]. {**Cambio de la autoeficacia**}

En SA9, cuando logró convencer a H4 de la respuesta correcta, encontramos evidencia de su autoeficacia.

H1 y H4 resuelven la SA9, en ella se trataba de elegir la mejor opción entre 3 propuestas para obtener pintura verde claro (mezcla de pintura verde y amarilla).
[12] H1 [a H4]: La uno es la mejor, porque hay más amarillo, si le pones poco amarillo será un verde limón y no queremos eso.
[13] H4: Es casi igual la cantidad de amarillo.
[14] H1: ¡Claro que no! {**Juicio de autoeficacia**} [**Sube tono de voz enfadado**] ¡Mira!, en la uno por cada 100 de azul hay 233 de amarilla y en la 4 por cada 100 de azul hay 400 de amarillo.
[15] H4 [**Sube tono de voz, emociones**]: ¡No!, espera… hay más amarillo en la 4 comparado con la azul que en la 1, tienes razón {**persuasión social**} si ponemos más amarilla que azul se verá muy bajito el color, sería un verde limón [**hace una mueca de risa**].
[16] H1: Es lo que dije [sonríe, **emoción**].
[17] H4: No lo había visto, pero sí, es por eso {**persuasión verbal**}.

El tener la razón en sus argumentos lo hizo sentirse bien, esto lo comentó al entrevistarlo posteriormente a la solución de la SA9.

H1: Fue muy emocionante porque yo tenía la razón y tuve que convencer a H4 de la respuesta correcta {**experiencia vicaria**}. El ejercicio es parecido a los de la escuela, pero al ser pintura me pareció muy fácil {**juicio de autoeficacia**} porque yo mezclo muchos colores, porque me gusta dibujar y pintar.

M5 es un ejemplo de autoeficacia baja en las primeras situaciones de aprendizaje, en la entrevista al inicio del taller nos comentó sobre su relación con las matemáticas:

M: ¿Cómo ha sido tu relación con las matemáticas a lo largo de tu vida escolar?
M5: Ha sido mala siempre {**experiencias de rendimiento**}, desde primaria, yo no entiendo, creo que por eso no me gustan {**emoción**}, casi no le entiendo

{**juicio de autoeficacia**}, ahorita no voy bien en matemáticas {**baja autoeficacia**}, aparte he faltado mucho y se me dificulta, me cuesta mucho trabajo {**juicio de autoeficacia**}.
M: ¿Qué has hecho al respecto?
M5: Pido ayuda al maestro {**persuasión social}** y si me explica, hay veces que le entiendo, me explica y sí le entiendo, pero luego ya no, me pierdo y ya no sigo {**baja autoeficacia**}.
M: ¿Cómo te sientes al respecto?
M5. Desmotivada porque quiero, pero no puedo entender {**baja autoeficacia**}, cuando no entiendo me siento desmotivada {**emoción**}.
M: ¿Por qué asistes al taller?
M5: Porque quiero aprender las cosas que no sé {**motivo**, la autoeficacia se forma en referencia a un tipo de objetivo}.

En la SA1, no participó salvo cuando pasó a preparar la receta con H3, cuando comentó sobre la valoración de SA1 señaló:

M: ¿Qué te pareció la actividad?
M5: Bien, sólo que me sentí rara {**autoestima**}, casi no le hablo a los demás, por eso no hablé, con H3 nunca había hablado antes, sí hablamos, pero poco. Pero sí me gustó {**emoción**}. Creo que no era fácil {**juicio de autoeficacia**}, habría que pensar un poco.
M: ¿Por qué rara?
M5: No soy buena en mate {**auto-concepto**} y casi no le entiendo, al principio no entendía qué había que hacer, y luego cuando vi que todos estaban haciéndolo pues ya {**persuasión social}**, pero casi no me gusta hablar o decir, me da cosa.
M: ¿Te pareció complicada la actividad?
M5: Cuando no entendía qué íbamos a hacer sí {**baja autoeficacia**}, pero pues ya cuando propusimos la receta, eso no me pareció difícil, sí entendí, y preparar la receta, eso fue fácil {**autoeficacia alta**}, pero si hubiera sido de muchas operaciones sí me hubiera costado {**baja autoeficacia**}, bueno es que me enredo mucho, las ecuaciones, por ejemplo, ahí no doy una {**auto-concepto**}.

Creemos que la autoeficacia de M5, ocasionó su poca confianza para participar en la discusión de SA1. En SA2 como la interacción fue sólo con la actividad, sin compañeros, notamos que su autoeficacia fue distinta que en

SA1. Creemos también que el tratarse de una toma de decisión, y que usó recursos personales para enfrentarla favoreció su resolución. Esto lo hizo explícito cuando se le cuestionó sobre su valoración de la situación.

M: ¿Qué te pareció la actividad?
M5: Estuvo fácil no hubo mucha matemática {**juicio de autoeficacia**}, pero había que pensar las respuestas…
M: ¿Mucha matemática?
M5: Quiero decir que no hicimos cuentas, bueno sí, pero eran fáciles, de lo que se trataba era de encontrar la mejor receta y era la de Tere.
M: ¿Cómo te sentiste al realizarla?
M5: Al principio me confundió porque no entendía qué debíamos hacer {**baja autoeficacia**}, luego leí bien y me di cuenta que se trataba de ver las propuestas, las dos de Tere y la de César y ver cuál era la mejor, creo que ahí me llevé más tiempo, al elegir la mejor, yo pensé que era la de César, pero luego viéndolas bien me di cuenta que Tere rebajaba menos el concentrado y por eso la elegí {**alta autoeficacia**}.
M: ¿Rebajar, que quieres decir?
M5: Bueno, que tenía menos agua que César, así el agua tendrá un mejor sabor, es que yo pensé, si fuera yo, usaría la de Tere porque así el agua estará más rica, {ríe, **emoción**} bueno esa es mi opinión.
M: ¿Te ayudó ponerte en la situación? Pensar que eras tú
M5: Sí, sí me ayudó para decidir, por ejemplo, aquí {señala la pregunta 3} también la pensé cómo si yo fuera la de la fiesta, cada persona podía beber medio litro, como dos vasos, eso es suficiente y así se ocuparían sólo 10 litros {**alta autoeficacia**}.
M: ¿Sobrará agua?
M5: Ah… {**Se queda callada**} pues… quizá no, quizá se acabe, si alguien toma más de dos vasos no alcanzará. Pero por lo menos se tomarán uno {**alta autoeficacia**}.
M: ¿Uno?
M5: Sí, primero les das un vaso ya después si van pidiendo más pues das hasta donde te alcance.
M: ¿Eso harías tú si fueras la de la fiesta?
M5: Sí, así pasa en casa cuando hay agua o refrescos, se bebe hasta donde alcanza, yo casi bebo poco pero mi papá siempre bebe de más {se ríe, **emoción/ racionalidad contextualizada**}.

En SA7, se notó más confiada, creemos que fue por lo práctico de la SA y el recurso de poder probar la mezcla.

> Entrevista posterior a la resolución de SA7.
> [45] M5: A mí me gustó mucho, porque fue muy práctico, como dicen ellas hay matemáticas, pero no las escribimos, ir probando nos ayudó. Yo creo que fue bueno, y que ellas estuvieran ahí fue raro, pero, aunque no nos dijeron fueron como los jueces que probaron lo que hicimos {**persuasión social**}.

En estos casos expuestos se hace explícito que la autoeficacia está asociada a las creencias del saber particular, pero también a las experiencias que se han tenido en las clases de matemáticas. Respecto al saber, podemos decir que su funcionalidad desde el punto de vista del aprendiz favorece la autoeficacia, es decir, si él o ella consideran la situación de aprendizaje cercana a su contexto y además reconoce no sólo el concepto sino su uso, estará más predispuesto a darle solución.

A manera de conclusión

Una consideración que hicimos como punto de partida fue reconocer que la *proporcionalidad* incluye aspectos culturales, históricos, institucionales y afectivos. Los resultados antes expuestos sustentan este hecho. Ha quedado evidenciado que la actitud de los estudiantes hacia el trabajo con situaciones de aprendizaje depende de su racionalidad contextualizada, es decir, de un contexto particular en un momento y lugar determinado, el taller diseñado, así como de la familiaridad, de la situación de aprendizaje reconocida por ellos.

Si consideramos los aspectos culturales, como los modos de vida, costumbres y conocimientos en una época de un grupo social en un cierto lugar, podríamos decir que los estudiantes, en el sentido justo de la palabra, poseen ciertos modos de vida escolar que influyen su forma de actuar, que siguen costumbres propias del aula de matemáticas que norman sus conocimientos y actuación. En estos aspectos culturales tiene cabida la dimensión socio-matemática (Domínguez, LópezLeiva, & Khisty, 2014) referida a las acciones de interacción del saber matemático con los estudiantes, el sentido de comunidad, y el trabajo compartido. Estos aspectos culturales permean cualquier actividad que el estudiante realice para aprender matemáticas, dentro y fuera del aula de matemáticas.

Los aspectos históricos, por su parte, se refieren a las experiencias y saberes personales del aprendiz para hacer frente a lo proporcional. Los factores afectivos, en particular las actitudes, hacen referencia a la valoración de las situaciones de aprendizaje compuestas de tres factores, las emociones desencadenadas por el trabajo con éstas, la visión que de ellas posean los estudiantes y su autoeficacia para responderlas.

La actitud proactiva hacia lo proporcional que hemos identificado es cercana al concepto de *engagement* (compromiso) reportado por Domínguez, LópezLeiva, & Khisty (2014), referido al compromiso con la solución de una tarea matemática. Estos autores indagaron acerca del desarrollo del *engagement* con el paso del tiempo en un grupo de estudiantes (3º-5º grado) latinos en EE. UU. durante una unidad de razonamiento proporcional, con especial atención en los aspectos de la actividad social y cultural. Las tareas que los estudiantes resolvieron fueron la toma de decisión (qué ingredientes comprar), desarrolladores de estrategia (cómo medir cantidades), gestión de recursos (cómo aprovechar al máximo un presupuesto limitado) y capacidad de resolver problemas (cómo aumentar recetas).

A decir de los autores, el *engagement* de los estudiantes fue esencialmente relacional y se desarrolló con el paso del tiempo, en un principio las interacciones de los estudiantes con las tareas propuestas fueron de tipo social y cultural con sus compañeros y con los instructores de la unidad, sin embargo, con el paso del tiempo estas relaciones se intensificaron e incluyeron a la proporcionalidad. Por nuestra parte, el tiempo también fue una variable que influyó en el grado de la actitud proactiva, verificamos que al aumentar el tiempo el grado de la actitud proactiva tendió a estabilizarse, el caso de H3, H4 y M5 son evidencia de ello. En otros casos como H1 y M2, el grado de actitud proactiva se conservó a lo largo del tiempo.

A diferencia de los resultados de Domínguez, LópezLeiva, & Khisty (2014), la relación al saber matemático por parte de los participantes estuvo siempre presente en las interacciones con la situación de aprendizaje y con sus compañeros, con quienes las resolvieron en algunos casos.

Bibliografía y fuentes de internet

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). "Me and maths": towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27-48. doi: 10.1007/s10857-009-9134-z

Domínguez, H., LópezLeiva, C. A., & Khisty, L. L. (2014). Relational engagement: Proportional reasoning with bilingual Latino/a students. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 143-160. doi: 10.1007/s10649-013-9501-7

García, M. S. & Farfán, R. (2013). *Emociones de estudiantes de secundaria: análisis de relatos*. Seminario del grupo de investigación de construcción social del conocimiento, 11 de noviembre de 2013. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, CICATA.

García-González, M. S. (2016). *Una caracterización de actitudes hacia lo proporcional*. Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of Grounded Theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine De Gruyter.

Godino, J. & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros, manual para el estudiante*. España: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Goldin, G. A. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem solving. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (eds.), *International Handbook of Emotions in Education*. New York: Routledge, 391-414.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S. & Goos, M. (2016). Promoting middle school students' proportional reasoning skills through an ongoing professional development programme for teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 193-219. doi: 10.1007/s10649-016-9694-7

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61. doi: 10.2307/749385

Maddux, J. (1995). *Self-Efficacy, Adaptation, and Adjustment: Theory, Research, and Application*. New York: Plenum.

Martínez-Sierra, G. & García-González, M. del S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234-250. doi: 10.1080/14794802.2014.895676

_____. (2017). Students' emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(2), 349-369. doi: 10.1007/s10763-015-9698-2.

_____. (2016). Undergraduate mathematics students' emotional experiences in Linear Algebra courses. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 87–106. doi: 10.1007/s10649-015-9634-y

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: part I – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253. doi: 10.1007/BF00304357

Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 193-207.

Ortony, A., Clore, G. L. & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Pepin, B. (2011). Pupils' attitude towards mathematics: A comparative study of Norwegian and English secondary students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education 43*(4), 535-546. doi: 10.1007/s11858-011-0314-9

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemólogica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav.

Usher, E. L. & Pajares, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(1), 89-101. doi: 10.1016/j.cedpsych.2008.09.002

La autenticidad de los problemas de matemáticas en contextos de física en la prueba enlace: expertos versus estudiantes

Beatriz Adriana Jiménez Andrade, Josip Slisko Ignjatov, Honorina Ruíz Estrada [9]

Palabras clave: Problemas auténticos, situaciones reales, detecciones de errores.

Resumen

Pruebas nacionales e internacionales hacen explícito el uso de contextos reales en los reactivos que componen dichas pruebas. El presente trabajo es el reporte de una investigación documental cuyo objetivo era el análisis de los ejercicios de matemáticas que tienen un contexto de física de la prueba ENLACE en secundaria y bachillerato, para verificar si estos ejercicios contienen efectivamente situaciones reales.

Una teoría que describe los criterios de la autenticidad de los problemas escolares que simulan situaciones del mundo real fue elaborada por Palm (2002). Se considera esta teoría como un buen referente para evaluar las situaciones de los problemas revisados en esta investigación.

Por otro lado, Ceneval y la DGEP, instituciones encargadas de la coordinación y elaboración de la prueba ENLACE, tienen ciertas políticas para garantizar la calidad de la prueba. Sin embargo, a lo largo de nuestra investigación, hemos encontrado problemas de la prueba que no cumplen con los lineamientos que estas instituciones exigen. Esto significa que personal

[9] Datos de Autor (México): Docentes e Investigadores de la Maestría de Educación Matemática, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP. Correos-e: amorbety_a02@hotmail.com / josipslisko47@gmail.com / hruizestrada@gmail.com

capacitado no detectó adecuadamente estos errores. Nuestro interés fue ver si algunos de los estudiantes que responden a estas pruebas detectan adecuadamente esos errores.

Introducción

Diversos autores (Blum & Niss, 1991; Burton, 1993; Niss, 1992) comparten la idea de que el uso de los problemas verbales reales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es importante para garantizar que los estudiantes den solución a situaciones de trabajo significativas en la vida fuera de la escuela, y para que perciban que las matemáticas puedan contribuir a la resolución de problemas en la vida real.

Actualmente, la tendencia de las evaluaciones tanto nacionales como internacionales es que los estudiantes resuelvan problemas que involucren contextos relacionados con sus entornos cotidianos.

El primer objetivo del presente trabajo reporta los resultados de una investigación documental basada en el análisis de los problemas de matemáticas de la prueba de Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) en Secundaria y Nivel Medio Superior. Específicamente, consideramos aquellos problemas cuyo contexto está relacionado con la física y con situaciones que no son reales, según la teoría local de las situaciones de tareas auténticas o “problemas del mundo real” elaborada por Palm en el 2002.

En esta teoría se da una taxonomía para identificar la correspondencia entre problemas verbales de las matemáticas escolares y las situaciones del mundo real. La base fundamental del análisis de problemas en esta investigación es la teoría de Palm.

Al mismo tiempo, se pretendió explorar lo que hacen los estudiantes de estos niveles cuando se les pide que examinen, sin resolver, un problema con una situación no autentica.

El segundo objetivo de esta investigación es analizar lo que dicen o argumentan en relación a estos problemas basándose en los conocimientos que poseen. Nuestro interés se centró en estudiar cómo hacen esta averiguación; qué opinan acerca de la situación que se les plantea, si ésta concuerda o no con una situación del mundo real de su entorno o que ellos conozcan. En este escrito solo se presentan resultados de un problema analizado por estudiantes de nivel Medio Superior.

En la literatura son escasas las investigaciones que se han efectuado en torno al tema de detectar errores, ya sea en libros de texto o en problemas, mediante el uso de la teoría de Palm.

Marco teórico

El uso de los contextos reales difiere de una a otra evaluación estandarizada. En seguida, veremos cómo se plantean los usos de estos contextos en dos evaluaciones internacionales.

La prueba TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study en inglés; Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias en español) hace hincapié en que existen diversas razones que nos llevan a comprender que las matemáticas constituyen una parte fundamental en la escolarización. Entre estas razones está el conocimiento, cada vez más demandante y extendido, de que la eficacia en la vida cotidiana y el éxito en el puesto de trabajo aumentan mucho gracias al conocimiento y, lo que es más importante, al uso de las matemáticas. Por ejemplo, el número de vocaciones que exigen un elevado nivel en el uso de las matemáticas, o los modos matemáticos de pensamiento, han florecido con el avance de la tecnología y con los métodos modernos de gestión (Mullis *et al*., 2012).

La prueba PISA (Programme for International Student Assessment; Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) es una evaluación que mide en qué grado los estudiantes son capaces de recurrir a lo aprendido cuando se enfrentan a situaciones novedosas, tanto en el ámbito escolar como fuera de él; es decir, busca estimar el nivel de habilidades y competencias esenciales para su participación plena en la sociedad y para resolver problemas y situaciones de la vida real (INEE, 2010).

Con respecto al uso de los contextos existen diferencias notables, PISA describe detalladamente los contextos y fenómenos en que es importante poseer la competencia matemática, mientras TIMSS define precisamente aspectos matemáticos importantes desde la perspectiva disciplinaria. Adicionalmente, PISA enfatiza el uso de la información numérica extraída de los contextos reales (en forma de tablas y gráficas) y TIMSS presta más atención a la "pura" matemática que incluye aspectos formales de álgebra y geometría (Gronmo & Olsen, 2007).

En este trabajo se ha usado como referente la teoría propuesta por Palm (2006). Ésta se considera como una teoría local de las "situaciones de tareas auténticas" y representa un marco para ver la concordancia entre problemas verbales de las matemáticas escolares y las situaciones del mundo real (situaciones auténticas). Este marco se ha usado como la base de la investigación realizada en este trabajo. Esta teoría abarca un conjunto de aspectos de las situaciones de la vida real que son importantes para considerar en la simulación de situaciones en los problemas matemáticos con contextos de física de la prueba ENLACE, ya que estos determinan la autenticidad de los contextos que se mencionan en los problemas. Los aspectos contemplados en la teoría de Palm son los siguientes:

Evento. Este aspecto se refiere al evento o situación que describe el problema y se debe verificar que haya ocurrido o tenga una buena oportunidad de ocurrir en la realidad.

Pregunta. Este aspecto se refiere a la concordancia entre la asignación dada en el problema y en la correspondiente situación que se está simulando. Es decir, la pregunta en el problema debe ser una que en realidad podría ser planteada en el caso del mundo real descrito.

Información. Este aspecto se refiere a la información y los datos en el problema e incluye valores, modelos y condiciones dadas y se refiere a los tres subaspectos siguientes.

Existencia. Este subaspecto se refiere a la coincidencia que existe entre la información disponible en el problema y la información disponible en la situación que se está simulando.

Realismo. El realismo de los valores dados en el problema (en el sentido de idéntico o de muy cercano a los valores en la situación que se simula) es un subaspecto importante en simulaciones de situaciones de la vida real.

Especificidad. Este subaspecto se refiere a la especificidad de la información disponible en la situación del problema y la situación que se está simulando.

Presentación. El aspecto de la presentación del problema se refiere a la forma en que el problema se transmite a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos subaspectos.

Modo. El modo de la conducción de problemas se refiere, por ejemplo, a si el problema verbal es comunicado oralmente o por escrito a los estudiantes, y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas, ya que este subaspecto puede influir en las matemáticas necesarias o posibles de usar en la solución del problema.

Lenguaje. Análisis lingüísticos muestran que en muchos problemas verbales los aspectos semánticos, referenciales y estilísticos de estos textos son diferentes de los textos que describen situaciones de la vida real. Por lo tanto, en las simulaciones, es importante que el lenguaje utilizado en el problema no sea tan diferente de la correspondiente situación del mundo real, tarea que afecta negativamente a las posibilidades de los estudiantes a utilizar las mismas matemáticas como habrían utilizado en la situación que se simula.

Todos los aspectos y subaspectos anteriores son considerados en la teoría de Palm, para verificar si la situación descrita en el problema concuerda con una situación real. Sin embargo, para obtener los resultados reportados en esta investigación solo hemos contemplado los siguientes aspectos: evento, pregunta, información (existencia, realismo y especificidad) y presentación (modo y lenguaje). La razón de esta reducción es porque los problemas analizados son de opción múltiple y con un tiempo específico para ser resueltos.

Metodología

La metodología de esta investigación consta de dos técnicas. La primera corresponde a una investigación documental, en la cual el objeto de estudio son los cuadernillos de la prueba ENLACE y PLANEA. Para ser más precisos, en el nivel Medio Superior se han analizado los cuadernillos ENLACE (2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 y 2014) y ENLACE (2015 y 2016), mientras que en el nivel secundaria solo se han analizado los cuadernillos ENLACE de tercero de secundaria (2006, 2007 y 2008) y ENLACE los tres grados de secundaria (2009, 2010, 2011, 2012 y 2013). En esta primera etapa, los problemas que se han analizado son aquellos problemas de matemáticas que contienen un contexto de física, y este análisis se ha basado en identificar si cada uno de estos problemas satisface los aspectos de evento, pregunta, información (existencia, realismo y especificidad) y presentación (modo y lenguaje) de la teoría de Palm. En cada problema que se analiza se dice qué aspectos de la teoría no se satisfacen y se da una justificación de los motivos por los cuales tales aspectos no se satisfacen.

La segunda técnica corresponde a un estudio exploratorio. El objeto de estudio son encuestas basadas en problemas seleccionados de los exámenes ENLACE que contestaron estudiantes de nivel secundaria y nivel medio superior (ver Anexo 1). Los problemas seleccionados para la encuesta son tales *que no satisfacen algunos de los aspectos de la teoría de Palm* o *no cumplen con alguno de los lineamientos de elaboración*, establecidos por las instituciones encargadas de la elaboración de los exámenes ENLACE (Reyes y Zúñiga, 2014; SEP-IEIA, 2010).

Resultados

(Con base en la teoría de Palm)
Para facilitar el proceso de análisis, en cada uno de los problemas se consideró lo siguiente: título, descripción (contexto, tareas matemáticas), texto original del problema, fuente bibliográfica, aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm y justificación.

Un ejemplo de análisis viene en seguida.

Título asignado al problema **La raspadura del automóvil**
Descripción breve del contexto del problema Contexto: un automóvil que sufre una raspadura de 70 pies. Tareas matemáticas: calcular la velocidad estimada de un automóvil haciendo uso de la fórmula $v = \sqrt{20L}$.
Texto original del problema Problema 37. La velocidad a la que se mueve un automóvil se puede estimar midiendo la longitud de sus raspaderas, a través de $v\sqrt{20L}$, v es la velocidad en millas por hora, L la longitud de la raspadura en pies. Si L=70 pies, la velocidad estimada es: $4\sqrt{35}$ $2\sqrt{35}$ $10\sqrt{14}$ $10\sqrt{7}$
Fuente Bibliográfica Examen ENLACE, Educación Media Superior, 2008

Título asignado al problema **La raspadura del automóvil**
Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Presentación – Modo Presentación – Lenguaje
Justificación El lenguaje usado en la presentación del problema no es apropiado, pues el estudiante puede confundirse, si el auto es el que sufre la raspadura, o si se refiere a la raspadura que sufre la superficie por la cual se desliza el auto. En lugar de decir la longitud de sus raspaduras debería decir la longitud de las raspaduras de frenado, o huella que deja en la superficie al frenar. El modo de presentar las posibles respuestas no es adecuado, pues en cada una de ellas se deben especificar las unidades de medida, para este caso mi/h. En cuanto a la fórmula que proporciona, ésta debería de escribirse como $v = \sqrt{20L}$, para que el problema tenga sentido. De lo contrario no se puede estimar la velocidad.

En el anexo se presenta una muestra de los problemas que fueron analizados.

Se han revisado un total de 110 problemas de matemáticas que contienen un contexto físico en los exámenes ENLACE y PLANEA de los niveles de secundaria y medio superior. De acuerdo al análisis que se ha realizado de estos problemas (con base en los aspectos de evento, pregunta, información-existencia, información-realismo, información-especificidad, presentación-modo o presentación-lenguaje de la teoría de Palm), 90 de ellos no satisfacen uno o más de estos aspectos. La justificación del porqué no satisfacen tales aspectos que se describen en el anexo.

Resultados de la postura de los estudiantes ante los errores en un problema

La revisión que los estudiantes hacen acerca de algunos problemas (en este caso solo se presentan resultados de uno de los tres problemas asignados) que aparecen en las pruebas ENLACE no es tan rigurosa como la que supuestamente hacen los expertos. Pero no por eso deja de ser importante.

El primer problema que los estudiantes analizaron fue “La raspadura del automóvil” que aparece en el examen ENLACE MS 2008 (ver su formulación arriba). De acuerdo a las políticas de elaboración, pasó por las revisiones estipuladas por Ceneval (Reyes y Zúñiga 2014). Sin embargo, este problema no cumple con el lineamiento base del reactivo ya que no contiene la información necesaria para ser contestado, hecho que los expertos que revisan las pruebas no pudieron detectar en el momento de la revisión (Reyes y Zúñiga, 2014).

Los estudiantes de nivel Medio Superior hicieron la revisión del problema, contestando las preguntas de guía (que vienen abajo) y dando sus justificaciones.

Pregunta 1: ¿Qué entiendes por la frase "longitud de una raspadura", mencionada en el problema?

La intención de la pregunta 1 es evidenciar que no se satisface el aspecto de presentación-lenguaje de la teoría de Palm, porque el texto usado no es del dominio común de los estudiantes y esto se puede observar en las respuestas que dieron.

Respuestas de los estudiantes	Número de estudiantes
Dicen que es el largo del automóvil, distancia recorrida por el auto, distancia de los segmentos donde el automóvil toca la superficie, distancia a la que se movió el objeto.	20
Dicen que el término es la medida de la llanta, diámetro de la misma, longitud o perímetro.	17
El término no es concreto, no lo entienden, o no saben que significa.	15
No contestaron.	15
Dicen que es el daño en el automóvil, la fricción, longitud del auto, una herida en la piel.	9
Repiten de forma diferente el término, es decir, dicen que es la medida de la raspadura o marca.	6
Dicen que es la velocidad del auto, velocidad promedio de la longitud de raspadura.	6
Interpretan adecuadamente el término longitud de una raspadura (que se refiere a la marca que deja la llanta cuando frena el auto).	6
Dicen que es la marca de la llanta en el asfalto, pero no mencionan la palabra frenar.	5
Dice que es una parte del automóvil.	1

Pregunta 2: ¿Se puede calcular la velocidad estimada usando la expresión "$v\sqrt{20L}$" que proporciona el problema?

Sí	No	No sé qué decir

Justifica tu respuesta

Con respecto a la pregunta 2, la intención es evidenciar que no se satisfacen ni los lineamientos de elaboración que Ceneval exige para los reactivos de la prueba, ni tampoco se satisface el aspecto de presentación-modo de la teoría de Palm, ya que la expresión que presentan para calcular la velocidad no es apropiada.

En la tabla se muestra que los estudiantes pudieron detectar adecuadamente que la expresión que se propone para resolver el problema no funciona. En cambio, personal experto de Ceneval no detectó tal error en el reactivo.

Respuesta	Justificación	Número de estudiantes
Si	Porque solo se sustituye L, o solo se sustituye L y se simplifica, o se multiplica 20 por el valor de L=70, o se sustituyen los datos que da el problema y se factoriza a lo que es equivalente, o todos los datos que se deben sustituir te los da el problema, o solo se sustituye el valor de L y se saca la raíz.	30
No	Corrigieron la fórmula poniendo el signo de igual.	11
Si	Solo se sustituye el valor de L y se despeja a v.	8
No	Porque falta un signo de igual en la expresión, o faltaba la igualación, falta igualar a algo para poder hacer el despeje de v.	7
No	Porque la expresión está mal planteada.	6
No	Porque v está multiplicando a L, o no porque está multiplicando y no se puede despejar v.	6
No	Porque hacen falta datos o no hay datos suficientes.	5

Respuesta	Justificación	Número de estudiantes
No	Porque no explica, o porque no tiene coherencia, o no se puede contestar, o las unidades finales no coinciden o no sabemos que es la longitud de una raspadura.	5
No sé qué decir	Porque el problema es confuso o no le entendí y no sé cómo resolver.	4
No	Porque la fórmula no es correcta, o la fórmula que debe usarse para encontrar la velocidad es v=d/t.	3
No contestaron		3
No sé qué decir	No justificaron.	3
Si	Con la fórmula de v=d/t, solo se sustituye.	2
Si	La velocidad se mide teniendo datos como la longitud, distancia y tiempo.	1
No	Porque la raíz no es exacta.	1
No	No justificaron.	1
No sé qué decir	Porque solo conozco la fórmula v=d/t.	1
No sé qué decir	Porque te pide calcular la velocidad, sin embargo la expresión solo es presentada como $v=\sqrt{20L}$ y ésta ya está considerando la velocidad, entonces te confunde.	1
No sé qué decir	Porque al sustituir en la expresión que nos da no sale el despeje.	1
Si	No justificaron.	1

Discusión de resultados

Con base en las respuestas de los estudiantes, en la primera pregunta se puede observar que el uso no apropiado del lenguaje puede ocasionar un obstáculo para la comprensión adecuada del problema, como se menciona en el subaspecto de lenguaje de la teoría de Palm. Solo 6 de 100 estudiantes interpretaron adecuadamente la frase “longitud de una raspadura”, mencionada en el problema, el resto de los estudiantes no comprendieron a que se refería el autor del problema con esa frase.

El objetivo de la segunda pregunta era observar si los estudiantes detectaban que la expresión del problema no servía para calcular la velocidad, puesto que falta un signo de igualdad. De acuerdo a la teoría de Palm, este problema no satisface el subaspecto de realismo, ya que ni siquiera es una fórmula, es una expresión algebraica. De acuerdo a los criterios de elaboración del Ceneval (ver, Reyes y Zúñiga, 2014), este problema no satisface el lineamiento de base del reactivo, debido a que no proporciona la información necesaria para ser contestado.

De los 100 encuestados 24 pudieron detectar adecuadamente que la expresión no era idónea para resolver el problema, once de ellos corrigieron la fórmula, siete dijeron que faltaba el signo de igualdad y seis dijeron que la expresión está mal planteada. Algunos otros estudiantes notaron que algo no estaba bien, sin embargo, no pudieron argumentar adecuadamente sus observaciones. En cambio, los revisores expertos de Ceneval no identificaron este tipo de error cuando hicieron su revisión.

Conclusiones

Se ha revisado un total de 110 problemas de matemáticas que contienen un contexto físico en los exámenes ENLACE y PLANEA de los niveles de secundaria y nivel medio superior.

De acuerdo al análisis que se ha realizado de estos problemas (con base en los aspectos de evento, pregunta, información-existencia información-realismo, información-especificidad, presentación-modo o presentación-lenguaje de la teoría de Palm), 90 de estos problemas no satisfacen uno a más de estos aspectos.

Esto podría traer consecuencias negativas para los estudiantes. Una de éstas sería que ellos crean que las matemáticas carecen de aplicación en la vida real como lo menciona Burton (1993). Otra es que, si algunos aspectos no se satisfacen, los estudiantes pueden tener menor oportunidad de contestar de manera exitosa. Ese importante aspecto lo menciona Palm (2006).

Por otro lado, de acuerdo a las políticas de elaboración de Ceneval y DGEP, los problemas deben pasar por una serie de etapas que supervisan la calidad y validez de los reactivos (Reyes y Zúñiga, 2014; SEP-IEIA, 2010). A lo largo de esta investigación, hemos encontrado problemas que no cumplen los requerimientos que estas instituciones exigen para los problemas que se presentan en las pruebas finales para los estudiantes. Sin embargo, tales problemas aparecen en las pruebas. Este hecho afecta negativamente la efectividad de la prueba. Además, puede crear confusión en los estudiantes acerca de la realidad de ciertas cosas falsas que ellos tomarían como verdaderas.

Los resultados de esta investigación nos indican dos hechos. El primer hecho es que algunos de los eventos que se están considerando como reales en los problemas, de acuerdo a la teoría de Palm, no lo son. En otras palabras, estos problemas no satisfacen las condiciones de ser problemas contextualizados adecuadamente. Pero, también, de acuerdo a las políticas de elaboración de la DGEP, en los problemas se comete un error grave si se manejan situaciones inverosímiles en los problemas (SEP-IEIA, 2010). El segundo hecho es que se han detectado errores graves en algunos problemas, los cuales presentan o dan como ciertas cuestiones que matemáticamente no pueden ser verdaderas.

Lo anterior nos hace pensar críticamente sobre la calidad e idoneidad de las pruebas que evalúan la educación en México. De cierta manera, los resultados de estas pruebas marcan el nivel de educación del país. Esto trae consecuencias negativas para los estándares de educación, pues si las pruebas contienen fallas no deberían tomarse como referente confiable para medir el nivel de educación. La otra consecuencia es para la mayoría de los estudiantes, pues ellos creen fuertemente en la idea de que lo que está escrito, ya sea en libros o en exámenes, debe ser verdadero.

Bibliografía y fuentes de internet

American Psychological Association (APA), American Educational Research Association (AERA) y National Council on Measurement in Education (NCME) (1999). *The Standards for Educational and Psychological Testing*. Washington, DC: AERA Publications.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Burton, L. (1993). *Implications of constructivism for achievement in mathematics. En J. A. Malone & P. C. S. Taylor* (eds.), Constructivist interpretations of teaching and learning mathematics. Perth, Western Australia: National Key Centre for School Science and Mathematics, 7-14.

Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (Ceneval) (2008). *Metodología Ceneval*. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Media Superior.

Dirección General de Evaluación de Políticas, DGEP (2010). *Normas operativas. Enlace 2010, Educación Media Superior*. Unidad de Planeación y Evaluación de Políticas Educativas, sep. Disponible en http://enlace.sep.gob.mx/ms/docs/EMS2010_Normas_Operativas.pdf

Grønmo, L. S., & Olsen, R. V. (2007). TIMSS versus PISA: The case of pure and applied mathematics. en *2nd IEA International Research Conference*. Volume 1. Amsterdam: IEA Secretariat, 201-214.

INEE (2010). *México en* PISA *2009.* Disponible en http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA_2009/Completo/pisa2009.pdf

Mullis I., Martin M., Ruddock G., O'Sullivan C. y Preuschoff C. (2012). *Marcos de la evaluación de TIMSS 2011.* Madrid. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

Niss, M. (1992). Applications and modeling in school mathematics – Directions for future development. En I. Wirzup & R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world* (Vol. 3). Chicago: National Council of Teachers of Mathematics.

Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks – Features and consequences.* Umeå, Sweden: Umeå University.

_____. (2006). *Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework.* For the Learning of Mathematics, *26*(1), 42-47.

Reyes L., S. y Zúñiga B., A. (2008, 2010). *Manual para docentes y directivos. Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares de Educación Media Superior*. Disponible en http://enlace.sep.gob.mx/content/ms/docs/EMS_2010_Manual_Docente.pdf

_____. (2011, 2012). Manual para docentes y directivos. Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares de Educación Media Superior. Disponible en http://enlace.sep.gob.mx/content/ms/docs/EMS_2012_Manual_Docente.pdf

_____. (2014). Manual para docentes y directivos. Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares de Educación Media Superior.

Disponible en http://enlace.sep.gob.mx/content/ms/docs/2014/Manual_Docente_ENLACEMS_2014.pdf

_____. (2015). Manual para usuarios. Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes en Centros Escolares de Educación Media Superior. Disponible en http://planea.sep.gob.mx/content/ms/docs/2015/manuales/Manual_para_usuarios_2015_Ago.pdf

Secretaria de Educación Pública (SEP) (2014). *ENLACE* 2014. En Educación Media Superior. Consultado el 30 de marzo de 2015. Disponible en http://www.wnlace.sep.gob.mx/ms/.

Secretaria de Educación Pública (SEP) (2007). Instituto de Evaluación e Ingeniería Avanzada (IEIA). Manual Técnico de ENLACE, Educación Básica, 2007. México.

_____. (2008). Manual Técnico de ENLACE, Educación Básica, 2008. México.

_____. (2010). Manual Técnico de ENLACE, Educación Básica, 2010. México.

Anexo

En este anexo se presenta una muestra ilustrativa de siete problemas analizados con base en la teoría de Palm.

Título asignado al problema
La bacteria

Descripción breve del contexto del problema
Contexto: velocidad de crecimiento de una bacteria, respecto al tiempo.
Tareas matemáticas: encontrar la expresión algebraica que representa la relación del tiempo con la velocidad.

Texto original del problema
Problema 85. El maestro de Biología presentó a sus alumnos la siguiente tabla de crecimiento de una bacteria, en donde t representa el tiempo de crecimiento y V la velocidad.

t	4	6	8	10	12
V	2	9	20	35	54

¿Cuál es la ecuación algebraica que representa la relación entre el tiempo y la velocidad de crecimiento de la bacteria?

$$V = \frac{t(t-3)}{2}$$

$$V = t^2 - 3t$$

$$V = \frac{t(t-2)}{2}$$

$$V = t\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

Fuente Bibliográfica
Examen ENLACE , Educación Media Superior, 2008

Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm
Pregunta
Presentación - Modo
Presentación - Lenguaje

Título asignado al problema
La bacteria

Justificación
La pregunta no es algo que una persona se preguntaría en el mundo real cuando observa el comportamiento en la velocidad de una colonia de bacterias.

El modo de presentar los datos de la tabla no es el adecuado, pues se debe especificar cuáles son las unidades de medida para el tiempo y la velocidad. Además, en la vida real el crecimiento de una población de bacterias es de forma exponencial, y no de forma cuadrática como se presenta en cada una de las opciones de respuesta.

El lenguaje usado para decir crecimiento de la bacteria no es apropiado, puesto que la bacteria no cambia de tamaño. Este problema tal vez se refiere al crecimiento de la población de bacterias, y éste es el término que debería usarse.

Título asignado al problema
El corredor más veloz

Descripción breve del contexto del problema
Contexto: un corredor de larga distancia que mide su rendimiento de acuerdo a su cronómetro.
Tareas matemáticas: con la información representada en la tabla calcular el tiempo cuando el corredor recorre 30 kilómetros.

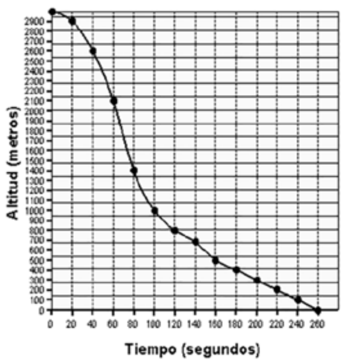
Texto original del problema
Problema 32. Un corredor de larga distancia mide su rendimiento de acuerdo con los tiempos cronometrados en sus entrenamientos. Sus tiempos y distancias se presentan en la siguiente tabla:

Kilómetros	**Tiempo en minutos**	
	Mínimo	**Máximo**
5 a 10	7	9
11 a 20	10	12
21 a 30	3	5

Si corre los 30 kilómetros, ¿cuántos minutos se llevará en hacerlo?
3 a 5
3 a 12
12 a 20
20 a 26

Fuente Bibliográfica
Examen ENLACE , Educación Media Superior, 2012

Título asignado al problema **El corredor más veloz**
Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Evento Información - Realismo Presentación - Modo
Justificación El evento no es posible en la vida real, pues ni los corredores que tienen los mejores récords mundiales hacen esos tiempos. Los datos no son reales. Los mejores corredores hacen en promedio 22 minutos en 5 kilómetros. No es posible que éste corredor haga de 21 a 30 kilómetros en un tiempo de entre 3 y 5 minutos. El modo de presentar la información en la tabla no es específico. Puesto que no dice cuánto tiempo se hace de 0 a 5 kilómetros, no se podría dar una respuesta sin esa información.

Título asignado al problema **El paracaidista**
Descripción breve del contexto del problema Contexto: un paracaidista que se lanza desde un avión. Tareas matemáticas: comparar segmentos de la gráfica para encontrar el intervalo de tiempo en el cual se da la mayor velocidad de descenso.
Texto original del problema Problema 96. Observa la siguiente gráfica que representa la altitud y el tiempo en que desciende un paracaidista que se lanza desde un avión ubicado a una altura de 3000 metros. 

Título asignado al problema **El paracaidista**
¿En cuál de los siguientes intervalos de tiempo el paracaidista descendió a mayor velocidad desde su lanzamiento del avión? 0 a 40 segundos 60 a 100 segundos 120 a 160 segundos 180 a 260 segundos
Fuente Bibliográfica Examen ENLACE , segundo de secundaria, 2010
Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Información - Realismo
Justificación La información que se presenta en la gráfica no es real. En caída libre (sin la resistencia del aire), durante 40 segundos, el cuerpo recorría una distancia de 8,000 metros y lograría una velocidad de aproximadamente 400 m/s (velocidad promedio de 200 m/s). Con la resistencia de aire, el movimiento el paracaidista es muy diferente. En aproximadamente 15 segundos, logra la velocidad terminal de 50 m/s y la mantiene constante hasta abrir su paracaídas. Si el paracaidista hubiera abierto su paracaídas después de 100 segundos, entonces en 85 segundos debía haber recorrido (a velocidad terminal) más que 4,000 metros. Según la gráfica, el paracaidista, durante 100 segundos, bajó solamente 2,000 metros (velocidad promedio 20 m/s es muy diferente de la velocidad terminal).

Título asignado al problema **La partícula de polvo**
Descripción breve del contexto del problema Contexto: una partícula de polvo que tiene que recorrer cierta distancia a una velocidad dada. Tareas matemáticas: calcular el orden de magnitud del tiempo, mediante la fórmula dada en el problema.
Texto original del problema Problema 22. Una partícula de polvo se mueve a una velocidad del orden de magnitud de 10^{-6} m/s recorriendo una distancia del orden de magnitud de 10^{-4} m. Mediante la relación $\frac{10^{-6}}{10^{-4}}$ se puede obtener el orden de magnitud del tiempo que tarda el recorrido. ¿Cuál es el resultado del cociente que proporciona el orden de magnitud del tiempo en la situación anterior? 10^{-10} 10^{-2} 10^{2} 10^{10}
Fuente Bibliográfica Examen ENLACE , segundo de secundaria, 2013

Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Presentación – Modo Información – Realismo
Justificación El modo de presentar las posibles respuestas no es adecuado, pues en cada una de ellas se debe especificar las unidades de medida, para este caso el tiempo es en segundos. Además, la relación que presenta no es adecuada si v=d/t, el tiempo debe ser d/v, y en el problema está como v/d, las unidades de medida no concuerdan el tiempo no se mide en 1/s. La relación que presenta para calcular el tiempo no es verídica, pues no existe un tiempo que se pueda medir en las unidades de medida que se obtienen al usar esa relación.

Título asignado al problema **El auto más veloz**
Descripción breve del contexto del problema Contexto: un auto que viaja a velocidad constante de 10 km por minuto. Tareas matemáticas: identificar la tabla que establece la relación entre la distancia y el tiempo transcurrido.
Texto original del problema Problema 138. Un auto viaja a velocidad constante, y se desplaza 10 km por minuto. ¿Cuál de las siguientes tablas representa correctamente la relación entre la distancia y el tiempo transcurrido?

Distancia (km)	Tiempo (min.)
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5

Distancia (km)	Tiempo (min.)
10	1
20	2
40	3
60	4
80	5

Distancia (km)	Tiempo (min.)
10	1
15	2
20	3
25	4
30	5

Distancia (km)	Tiempo (min.)
10	1
15	2
30	3
45	4
60	5

Título asignado al problema **El auto más veloz**
Fuente Bibliográfica Examen ENLACE , tercero de secundaria, 2010
Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Evento Información – Realismo
Justificación La ocurrencia del evento es dudosa, pues es difícil mantener una velocidad constante por largos periodos de tiempo. Sin embargo, solo habla de velocidad de un minuto, tal vez sí pueda ocurrir. La información proporcionada en el problema, no es real, puesto que no existe un automóvil que pueda alcanzar una velocidad de 10 km/minuto o lo que es lo mismo 600 km/h.

Título asignado al problema **Calentamiento de un cubo**
Descripción breve del contexto del problema Contexto: pérdida del registro en tres momentos, del volumen de un cubo, conforme éste se calentaba. Tareas matemáticas: hallar los valores faltantes, tomando como supuesto que el volumen aumenta de forma lineal.
Texto original del problema Problema 80. Miguel registró el volumen de un cubo conforme se iba calentando. Al ausentarse en tres momentos, perdió el continuo de la relación entre los datos.

Volumen (cm^3)		7		13	
Temperatura (º C)	2	8	14	20	24

Si el volumen aumenta en forma lineal, al incrementar la temperatura, ¿cuáles son los valores faltantes?
2, 9, 18
2, 12, 14
4, 10, 15
5, 11, 15

Fuente Bibliográfica Examen ENLACE , Educación Media Superior, 2010
Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm Evento Información - Especificidad

Título asignado al problema
Calentamiento de un cubo

Justificación
En la vida real es imposible que un cubo aumente casi cinco veces su volumen, a una temperatura de 24 º C. Normalmente el incremento en el volumen depende del material que se caliente, y este incremento es muy pequeño.

La información no es específica, no aclara sobre el material con el cual está elaborado el cubo. De ello depende el realismo de la información presentada en la tabla.

Título asignado al problema
Temperatura en Temósachic

Descripción breve del contexto del problema
Contexto: en Temósachic la temperatura desciende $\frac{5}{7}$ de grado cada hora desde las 10 p.m. hasta las 5 a.m. a partir de las 5:01 asciende $\frac{4}{7}$ de grado cada hora.
Tareas matemáticas: calcular la temperatura cuando son las 10 de la mañana.

Texto original del problema
Problema 21. En Temósachic hace tanto frío que desciende la temperatura en el termómetro $\frac{5}{7}$ de grado cada hora desde las 10 p.m. hasta las 5 a.m. Si sabemos que justo a las 12 de la noche se registra una temperatura de -5º C y que la temperatura asciende $\frac{4}{7}$ de grado cada hora a partir de las 5:01 a.m. entonces ¿Qué temperatura se registrará en el termómetro a las 10 a.m.?

$\frac{15^{o}}{7}$ C

$\frac{40^{o}}{7}$ C

$\frac{60^{o}}{7}$ C

$\frac{80^{o}}{7}$ C

Fuente Bibliográfica
Examen ENLACE, segundo de secundaria, 2009

Aspecto o aspectos que no se satisfacen de la teoría de Palm
Evento

Justificación
La ocurrencia del evento en la vida real es nula, pues es imposible que se dé esa linealidad en al ascenso y descenso de la temperatura en ese lugar. Además, la temperatura debe ser bajo cero (- 40/7 ^{0}C). Esa opción que es la respuesta correcta no aparece en las opciones ofrecidas.

La ilusión de la linealidad en estudiantes de bachillerato: tendencias al resolver problemas de área

Roberto Sánchez Sánchez y José Antonio Juárez López[10]

Palabras clave: ilusión de la linealidad, área, resolución de problemas, bachillerato.

Resumen

En la presente investigación se muestra una visión general de las tendencias de los alumnos de bachillerato al resolver problemas de área, en la cual se hace presente la ilusión de la linealidad. Cabe señalar que dicha investigación es parte de un estudio mayor que, además de este tipo de problemas, aborda otros más. En la literatura se ha mostrado que uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido al momento de resolver problemas matemáticos es la fuerte tendencia a aplicar métodos proporcionales, incluso en problemas en los que es cuestionable o claramente inadecuado. Se aplicó un instrumento con el cual se pudo observar que la mayoría de los alumnos son "seducidos" por la linealidad pues tienden a generalizar en este tipo de problemas debido a que suponen que si en una figura su arista crece k-veces entonces el área crece k-veces. Los alumnos también realizaron representaciones externas. Sin embargo, fueron de poca ayuda pues no lograron concretar de forma correcta los problemas propuestos.

[10] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Automa de Puebla. Correos-e: rtgr1904@gmail.com / jajulafcfm.buap.mx

Introducción

Existen diversas cuestiones que interconectan a las matemáticas con los programas escolares para construir los fundamentos en el aprendizaje de las matemáticas y desarrollar el razonamiento lógico-matemático.

En las reformas y programas de estudio de diversos países se considera que uno de los principales objetivos de la educación matemática es propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria, y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas, NCTM, 1989, 2000, citado en Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L., 2005, p. 58).

La linealidad (o proporcionalidad) es uno de los modelos que podemos utilizar en diversas situaciones de la vida diaria. Es uno de los conceptos clave en la matemática escolar, debido a que aparece en diferentes formas: la "regla de tres" en educación primaria, modelos lineales en secundaria, aproximaciones de cálculo y probabilidad en bachillerato, y abstracciones de un vector en el espacio en la universidad (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002).

Los estudiantes de diferentes niveles educativos también tienden fuertemente a generalizar los cambios en las dimensiones lineales a partir de los cambios en el área. Al preguntar sobre el efecto de la reducción a la mitad o de duplicar los lados de una figura para generar una figura similar, la mayoría de los estudiantes —e incluso los futuros profesores— afirman que el área se reduce a la mitad o se duplica. Un ejemplo muy famoso de lo anterior y de los más antiguos de la literatura es la duplicación de un cuadrado en el diálogo Menón de Platón, en el que se pide a un esclavo que duplique el área de un cuadrado dado. El esclavo aplica de manera inmediata la idea de proporcionalidad (entre la longitud y el área), es decir, el esclavo piensa que si duplica la longitud del cuadrado entonces el área se duplicará y cambia de opinión sólo cuando Sócrates le ayuda a diagnosticar y corregir el error en su razonamiento al confrontarlo con un dibujo (De Bock et al., 2002).

Antecedentes

Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas es la tendencia de los alumnos a generalizar en exceso la aplicabilidad del modelo proporcional (De Bock, et al., 2002; Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2009).

Freudenthal (1983, p. 267, citado en Van Dooren, 2005, p. 59) advirtió que: "La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal".

A partir del contexto de esta cita, Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia a las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen.

El mal uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la "ilusión de la linealidad o proporcionalidad", la "trampa de la linealidad", el "obstáculo lineal", etc.) es un error "clásico", posiblemente uno de los más antiguos de la literatura del pensamiento matemático. El refuerzo de la linealidad en numerosas ocasiones en la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para ver y aplicar el modelo lineal "en todas partes" (De Bock et al., 2002). Debido a su simplicidad, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano porque, sin duda, no hay funciones más simples que las lineales (Rouche, 1989, p. 17, citado en De Bock et al., 2002, p. 311).

Un estudio, realizado por Van Dooren et al. (2005), demostró que los estudiantes de secundaria distinguieron con mayor frecuencia las situaciones en las que la proporcionalidad es aplicable y cuando no lo era, pero incluso en el último grado se realizaron un número considerable de errores proporcionales.

Problemas geométricos

De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel (2007) sugieren que probablemente los casos más conocidos de la excesiva dependencia de los estudiantes en el modelo lineal se encuentran en el dominio de la geometría. Este estudio informa que los razonamientos lineales incorrectos ocurren con frecuencia en problemas acerca de las relaciones entre los ángulos y lados de figuras geométricas (Rouche, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 17).

Los estudiantes tienden fuertemente a relacionar la longitud y el área como si fuese lineal en lugar de relacionar de forma cuadrática, en consecuencia se aplica el factor lineal en lugar de su cuadrado para determinar el área de una figura ampliada o reducida (De Bock, et al., 2007).

Freudenthal (1983, citado en De Bock et al., 2007, p. 18), sostiene que el principio que rige la ampliación (o reducción) de las figuras geométricas es más fundamental en las matemáticas y la ciencia y, por lo tanto, merece nuestra mayor atención, tanto fenomenológico como desde un punto de vista didáctico.

Un estudio, realizado por De Bock, et al. (2007) en estudiantes de 12-13 años de edad, comprobó el uso excesivo de la linealidad en la solución de los problemas planteados por el efecto de un aumento lineal o reducción de una figura geométrica en el perímetro o área.

Problemas de área

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) (1989, p. 114-115, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 59) sugieren que:

> La mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que, si los lados de una figura se duplican para producir una similar, el área también se duplicará.

Una investigación realizada por De Bock et al., (2007), demostró lo anterior con el problema siguiente:

> Bart es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de navidad en varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de un Santa Claus en la puerta de una panadería. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de supermercado. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Bart para hacer esto?

La mayoría de los alumnos solo aplicó regla de tres, obteniendo como resultado que se necesitan 18 ml de pintura. Incluso, al responder a las preguntas sobre el efecto de la reducción a la mitad o duplicar los lados de una figura para producir una figura similar, futuros profesores o profesores en formación, afirman que el área se reduce a la mitad o se duplica también (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 1989; Outhred y Mitchelmore, 2000; Simon y Blume, 1994; Tierney et al, 1990 citados en De Bock et al., 2002, p. 313).

En general, existe una tendencia casi irresistible en los estudiantes de diferentes niveles educativos por creer que, si una figura se agranda k veces, el área es ampliada k veces también (De Bock et al., 2002).

Por ejemplo, al aplicarles el problema siguiente:

"El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?" La mayoría de los estudiantes en estos estudios fracasó en los problemas a causa de su fuerte tendencia para aplicar el razonamiento proporcional "en todas partes".

A partir de una investigación realizada por De Bock et al., (2007) con respecto al tipo de figura encontraron que hubo puntuaciones más altas en los problemas con figuras regulares (cuadrados, círculos) y puntuaciones más bajas para los problemas con figuras irregulares.

El tipo de figura desempeñó un papel importante debido a que los estudiantes se desempeñaron significativamente mejor en los problemas no proporcionales cuando la figura implicada era regular (De Bock et al., 2007).

Incluso sólo muy pocos estudiantes hicieron el cambio al razonamiento correcto no proporcional cuando se les proporcionaban considerables apoyos tales como estímulos metacognitivos o dibujos (De Bock, et al., 2002).

Esquemas en la resolución de problemas no proporcionales

Existen investigaciones teóricas y empíricas sobre cómo y por qué los dibujos y diagramas son una herramienta útil en la mejora de la capacidad de las personas para representar y resolver matemáticos problemas (De Corte, Greer, y Verschaffel, 1996; Schoenfeld, 1992, citado en De Bock et al., 2007, p. 27).

De Bock et al. (2007) sugieren que en los problemas no proporcionales esta actividad representacional debería ayudar a los estudiantes para detectar la inadecuación de un razonamiento lineal, y para determinar la naturaleza de la relación no lineal que conecta los elementos conocidos y desconocidos en esta representación del problema. Sin embargo, realizar un dibujo o diagrama no garantiza que se va a encontrar la solución de un problema dado. Cuando los estudiantes no tienen éxito al realizar un esquema "correcto", podría ser más eficaz y de gran ayuda presentar un diagrama "correcto" ya hecho. Es importante señalar que en los últimos 10-15 años, se han realizado esfuerzos considerables de investigación para llenar el vacío en nuestro conocimiento sobre el uso excesivo de la linealidad de los estudiantes.

Metodología

La presente investigación tiene una naturaleza cualitativa. Dicho estudio se realizó con 75 alumnos de cuarto semestre de bachillerato del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECYTE) del Plantel 15 ubicado en San Juan Huactzinco, Tlaxcala. Los 75 alumnos están distribuidos en tres grupos a los cuales denotaremos por A, B y C. El grupo A consta de 28 alumnos, el grupo B de 22 alumnos y el grupo C de 25 alumnos.

Se aplicó un cuestionario que debía ser resuelto con lápiz y papel. Éste consistió en problemas no lineales de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad. No obstante, en este documento solo se abordarán los concernientes al concepto de área.

Los problemas de área que se propusieron en el instrumento son los que utilizaron De Bock et al., (2007) y De Bock et al., (2002), con algunas modificaciones superficiales.

Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?

Un agricultor se tarda ocho horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma, pero con el triple de longitud?

Posteriormente a la aplicación, se analizaron los instrumentos para observar las tendencias de los alumnos al resolver problemas de área y las representaciones externas en donde se hace presente la ilusión de la linealidad.

Resultados

Para facilitar la lectura, se asociará cada problema con un ícono para que sea más práctico relacionarlos, además de no repetir constantemente el enunciado del problema.

Problema	Texto	Ícono
"El pintor"	Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?	
"El agricultor"	Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?	

Figura 1. Asociación del problema con ícono.

Con base en el análisis realizado con los datos obtenidos mediante el instrumento de diagnóstico, se calculó el porcentaje de los alumnos que aplicaron el modelo lineal.

Problema	Respuestas lineales	Porcentaje
	66	88
	62	82.7

Figura 2. Frecuencia y porcentaje de los alumnos que aplican el modelo lineal.

Con base en la figura 2, observamos que en el problema del "pintor" se presentó una mayor dependencia del modelo lineal pues 66 de los 75 alumnos que respondieron el instrumento "cayeron" en la ilusión de la linealidad, es decir, su respuesta fue que Luis el pintor necesita 18 ml para la figura más grande, lo que equivale al 88%, mientras que, en el problema del "agricultor" 62 alumnos utilizaron el modelo lineal y respondieron que Carlos necesitará 24 horas para arar el terreno, es decir, el 82.7% utilizó este modelo.

En los problemas de área ("el pintor" y "el agricultor") ocurre algo semejante a las investigaciones realizadas por De Bock et al. (2002) pues, como mencionan en sus resultados obtenidos, existe una tendencia en los estudiantes por creer que si la longitud de una figura se agranda k veces entonces el área también es ampliada k veces. Los alumnos a los que se les aplicó el instrumento echaron mano de este recurso y ello conllevó a que la mayoría resolviera estos problemas de forma lineal.

Los resultados mostrados en la figura 2 permiten deducir que no todos los alumnos cayeron en la ilusión de la linealidad, sin embargo, lo anterior no es del todo correcto pues hasta el momento solo se han tomado en cuenta a los alumnos que han aplicado el modelo, es necesario realizar un análisis más profundo, por ello es conveniente realizar un análisis por cada grupo para observar qué sucede con la forma en que los alumnos resolvieron los problemas.

Como ya se mencionó, los problemas fueron aplicados a tres diferentes grupos de alumnos. Por ello es necesario observar la frecuencia con la que los alumnos de cada grupo aplicaron el modelo lineal en cada uno de los problemas propuestos.

En la siguiente figura se muestra la frecuencia y el porcentaje de respuestas para cada grupo:

Problema	Grupo A (28)		Grupo B (22)		Grupo C (25)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
	22	75.6	21	95.5	23	92
	24	85.7	18	81.9	20	80

Figura 3. Frecuencia y porcentaje por grupo que aplican el modelo lineal.

En la figura 3 se puede observar que el grupo A aplicó el modelo lineal con mayor frecuencia en el problema del "agricultor" que en el problema del "pintor", debido a que en el problema del "agricultor" 24 alumnos de un total de 28 aplicaron el modelo lineal mientras que en el problema del "pintor" fueron solo 22. Ambas cantidades están por arriba del 75%, lo cual representa una cantidad considerable.

El grupo B, al parecer, aplicó con mayor frecuencia el modelo lineal en el problema del "pintor" pues casi en su totalidad respondieron que necesitaba 18 ml de pintura para la nueva figura. De los 22 alumnos del grupo, 21 utilizaron el modelo lineal, mientras que en el problema del "agricultor" más del 80% de los alumnos fue "seducido" por la ilusión de la linealidad.

En el grupo C sucedió algo semejante que en el grupo B pues los estudiantes cayeron en la ilusión de la linealidad con mayor frecuencia en el problema del "pintor" que en el del "agricultor". También hay que señalar que para la resolución de ambos problemas se utilizó el modelo lineal en 80% o más del total de los alumnos.

Haciendo un comparativo entre los grupos, podemos observar que en el problema del "pintor" el grupo B es el que utilizó la proporcionalidad con mayor frecuencia para resolver este problema y por consiguiente es el que presentó un mayor porcentaje. Cabe señalar que los grupos B y C obtuvieron porcentajes con más del 90% y que solo el grupo A estuvo por debajo del 80%.

Para el caso del problema del "agricultor" el grupo A es el que más utilizó el modelo lineal para resolver este problema. Este planteamiento presenta cierta "estabilidad" pues los tres grupos presentaron cierta similitud en los porcentajes obtenidos debido a que todos están al menos en el 80%.

Es necesario mencionar, que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema, se obtuvieron cuatro categorías (lineal, no lineal, otro y sin respuesta) y subcategorías

Lineal

-Aplica proporcionalidad. Utiliza proporcionalidad o "regla de tres".

-Aplica proporcionalidad con error o al aplicar algoritmo. Intenta aplicar proporcionalidad o "regla de tres", pero tiene algún error al realizar sus cálculos.

No lineal

-Razonamiento no lineal, aunque de forma inadecuada. Sabe que no es apropiado utilizar proporcionalidad. Sin embargo, su razonamiento no es del todo apropiado.

-Razonamiento no lineal adecuado. Comprende que para resolver el problema no es apropiado utilizar proporcionalidad y argumenta de manera adecuada por qué no es conveniente.

Otro

-Realiza diversas operaciones. Se centra en realizar múltiples operaciones aritméticas y no argumenta por qué utiliza dichas operaciones.

-Procedimiento confuso. No es muy claro el método o técnica utilizada o sólo coloca la respuesta sin argumentar por qué o cómo lo hizo.

Sin respuesta

La siguiente figura muestra de manera general las tendencias de los alumnos al resolver los problemas que se les aplicaron en el instrumento, las cuales están desglosadas en sus diferentes subcategorías para un mejor análisis.

Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro		Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	
	61	5	1	0	5	1	2
	60	2	0	1	2	8	2

Figura 4. Frecuencia general de los alumnos al resolver los problemas de área.

Como ya se había mencionado, para el problema del “pintor”, 66 alumnos fueron “atrapados” en la ilusión de la linealidad lo cual no indicaba que el resto (9 alumnos) lo hubieran hecho de forma correcta como se puede apreciar en la figura 4. Incluso, se puede observar que ningún alumno logró obtener la respuesta correcta a este problema. Podemos indagar un poco más a fondo cómo resolvieron el problema, pues de los 66 alumnos que aplicaron el modelo lineal, 61 aplicaron “la regla de tres” de forma correcta y 5 alumnos tuvieron algún error al aplicar el algoritmo de “la regla de tres”. Un alumno logró romper con el razonamiento lineal. Sin embargo, no logró resolver de manera correcta el problema. Algunos alumnos realizaron procedimientos alternativos para resolver el problema del “pintor” por lo cual los clasificamos dentro de la categoría “otro” (5 alumnos). Ellos llevaron a cabo múltiples operaciones para obtener una solución numérica del problema. Un alumno más resolvió el problema, pero el procedimiento utilizado resultó ser confuso. De los 75 alumnos a los que se les aplicó el instrumento, 2 de ellos no resolvieron el problema del pintor.

En al caso del problema del “agricultor” sucedió algo semejante que en el problema del “pintor”, pues 62 alumnos fueron “seducidos” por el modelo lineal y utilizaron “la regla de tres”. Es importante señalar que, para este problema, un alumno logró romper con el razonamiento lineal y pudo obtener la respuesta correcta. Podemos observar que de los 62 alumnos que aplicaron el modelo lineal, 60 aplicaron “la regla de tres” de forma correcta y 2 alumnos tuvieron algún error al aplicar el algoritmo de “la regla de tres”. El número de alumnos que realizaron procedimientos alternativos para resolver este problema aumentó, pues dentro de la categoría “otro” hubo un total de 10 alumnos, 2 alumnos realizaron múltiples operaciones para obtener una solución numérica del problema, mientras que 8 alumnos resolvieron el problema utilizando procedimientos confusos o solo colocaron la respuesta del problema. La cantidad de alumnos que no respondieron este planteamiento fue de 2 alumnos.

Razonamiento lineal

Dentro de la categoría denominada como “lineal” y “aplica proporcionalidad”, los alumnos tendieron a aplicar el algoritmo de la “regla de tres” o argumentan que aplicaron dicho algoritmo. A continuación, en la figura 5, se muestran algunos ejemplos de dicho caso.

Para los alumnos que utilizaron el modelo lineal y que fueron clasificados en la categoría “aplica proporcionalidad o regla de tres”, realizaron alguna de las tres cosas siguientes:

Solo argumentaron que utilizaron “la regla de tres”. Para este caso, se muestra como ejemplo al alumno con folio diez del grupo “C” (C10), el cual únicamente escribe que utilizó regla de tres y anota la respuesta o el caso del alumno con folio cinco del grupo “A” (A5) quien dice que 300 m es el triple de 100 m, entonces, será el triple de tiempo, es decir, 24 horas, ambos para el problema del “agricultor”.

Solo realizaron el algoritmo de la “regla de tres”. En la figura 5 se muestra como ejemplo la manera en que respondió un alumno, como fue el caso de un alumno del grupo “A” con folio uno (A1). Los alumnos que respondieron de esta manera se centraron en realizar el algoritmo de la “regla de tres”, es decir, realizaron las operaciones correspondientes para obtener la respuesta sin argumentar absolutamente nada.

Realizaron ambas cosas. Estos alumnos argumentaron brevemente lo que realizaron para resolver el problema y anotaron las operaciones que utilizaron, como es el caso del alumno del grupo “A” con folio dos (A2).

Figura 5. Ejemplos de respuestas donde se usó la proporcionalidad o “regla de tres”.

Dentro de la categoría denominada como lineal y aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo, los alumnos tendieron a aplicar el algoritmo de la “regla de tres”. Sin embargo, al realizar los cálculos correspondientes tienen ciertas complicaciones o en su defecto realizan algunas operaciones incorrectas y aplican “la regla de tres” como se muestra en la siguiente figura.

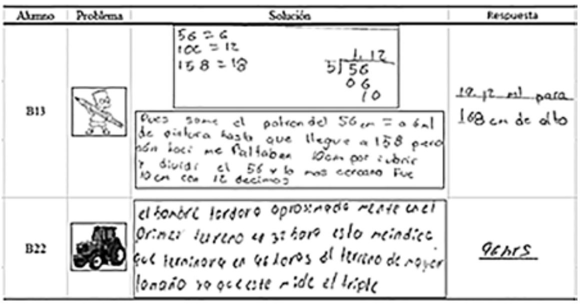


Figura 6. Ejemplo de alumnos que aplicaron proporcionalidad con error al aplicar algoritmo.

Los ejemplos que se muestran en la figura 6 fueron tomados del grupo “B” y se puede observar que:

El alumno “B13” respondió el problema del “pintor” asociando los 6 mililitros de pintura que necesita por cada 56 cm de la figura. Sumó tres veces cincuenta y seis y de igual manera los 6 mililitros de pintura (18 mililitros en total) pero, en la segunda vez que sumó cincuenta y seis, en lugar de obtener como resultado ciento doce, obtuvo ciento dos lo cual representa un déficit de diez unidades y aunque la tercera suma la realizó correctamente, se sigue presentando déficit, incluso el alumno argumentó que ante esta situación procedería a realizar una división. Con respecto a la división, en la figura 6 se muestra que el alumno dividió 56/5, lo cual es interesante pues dicho alumno argumentó que le faltaba cubrir 10 cm y no está tomando en cuenta dicha cantidad al momento de realizar la operación, posteriormente, de dividir 56/5 obtiene como resultado 1.12 (lo cual es incorrecto pues el resultado es 56/5=11.2), dicho resultado lo suma a los 18 ml que había obtenido de sumar tres veces 6 mililitros y por ello obtiene como resultado 19.2 ml.

El alumno “B22” realizó una operación antes de utilizar “la regla de tres”, al parecer el alumno no tiene bien definido el concepto de área y perímetro por lo cual al leer que… “un agricultor se tardará 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado” pareciera que el alumno está tomando en cuenta el perímetro, por ello primero intentó saber cuánto tiempo tardará en arar el terreno de 100 m de lado. El alumno dice que tardará 32 horas en arar el terreno de 100 m y, posteriormente, procedió a aplicar “la regla de tres”, pues dice que el otro terreno es mayor y mide el triple, entonces será el triple de tiempo, de ahí que obtiene como resultado 96 horas.

Razonamiento no lineal

Hubo algunos alumnos que se pudieron percatar de que la aplicación del modelo lineal no era adecuada, para la resolución de estos problemas. Un ejemplo de este tipo de razonamiento, aunque no del todo adecuado, se presenta en la figura 7.

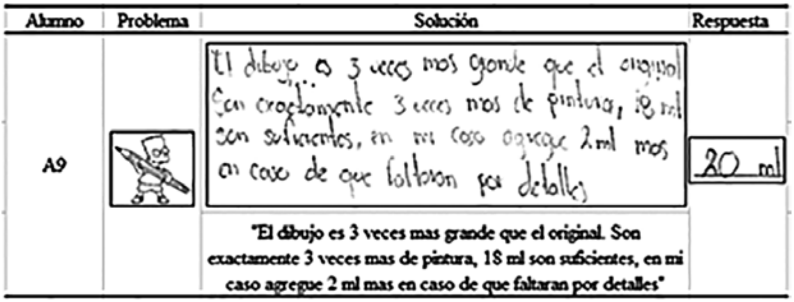


Figura 7. Ejemplo de alumno con razonamiento no lineal, aunque no adecuado.

Parece ser que el alumno intuye que el dibujo es tres veces más grande que el original por lo que necesitará tres veces más de pintura, es decir, 18 mililitros, pero gracias a ciertas percepciones, conocimientos o experiencias personales consideró apropiado agregar 2 mililitros más de pintura "en caso de que faltara por detalles". Con lo anterior, el alumno de alguna manera está "rompiendo" con el modelo lineal, pues no está dando una respuesta exacta al problema y está tomando en cuenta ciertas consideraciones realistas como puede ser el hecho de que pueda necesitar más pintura. Desafortunadamente, no logró resolver el problema de manera exitosa, pues aplicó la "regla de tres".

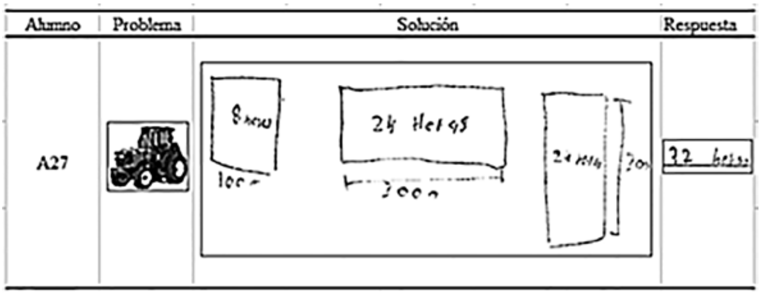


Figura 8. Ejemplo de alumno con razonamiento no lineal adecuado.

El alumno que resolvió de manera adecuada el problema lo logró mediante el apoyo de diagramas realizados por él mismo. Este estudiante separó el diagrama en dos partes para observar en qué cantidad crecía la figura. Se observa en los diagramas realizados por el alumno que, al hacer crecer el cuadrado al triple (300 m) en una dimensión (largo), "el agricultor" tardará 24 horas en arar esa extensión de terreno. Posteriormente, hace algo semejante, pero con la otra dimensión (ancho) en la que también tardará 24 horas en arar esa extensión de terreno. El alumno no plasmó operaciones aritméticas en el instrumento. Sin embargo, cabe la posibilidad de que pudo haber realizado cálculos mentales para poder llegar a la resolución del problema de manera correcta y concluir que "el agricultor" necesitará 72 horas para arar el terreno ampliado.

La categoría "otro"

Además de las categorías ya analizadas, existe una más denominada "otro" en la cual los alumnos ofrecen respuestas espurias. Algunos alumnos simplemente utilizaron los datos que se proporcionaban en cada uno de los problemas para realizar operaciones aritméticas. Otros más dieron resultados en los cuales su procedimiento fue un tanto confuso.

En la figura 9 se muestran ejemplos de respuestas de algunos de los alumnos que realizaron operaciones aritméticas con los datos proporcionados o que solo escribieron el resultado sin realizar ninguna representación externa.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A10		Multipliqo	1008
C11			800 horas

Figura 9. Ejemplo de alumnos que realizan operaciones aritméticas con los datos.

El alumno que resolvió el problema del "pintor" sólo indicó que multiplicó, pero desafortunadamente no plasmó la operación que realizó y únicamente colocó el resultado. Con base en los datos que se proponen en el problema pareciera que multiplicó 168 por 6 para obtener 1008 y no toma en cuenta las unidades de medida, es decir, no toma la unidad centímetros con la cantidad de 168 y tampoco lo hace con los mililitros, con la otra cantidad.

El alumno, que resolvió el problema del "agricultor", sólo escribió el resultado (800 horas), al parecer multiplicó la longitud del terreno (100 metros) por lo que se tarda “el agricultor” en arar (8 horas), pero sin tomar en cuenta la unidad de medida de longitud (metros), es decir, sólo multiplicó 100 por 8 horas y obtuvo como resultado 100 horas.

Algunos alumnos presentaron cierto razonamiento que no fue muy claro para los autores. Un ejemplo de dicho razonamiento se muestra en la siguiente figura, así como la interpretación personal de los mismos.

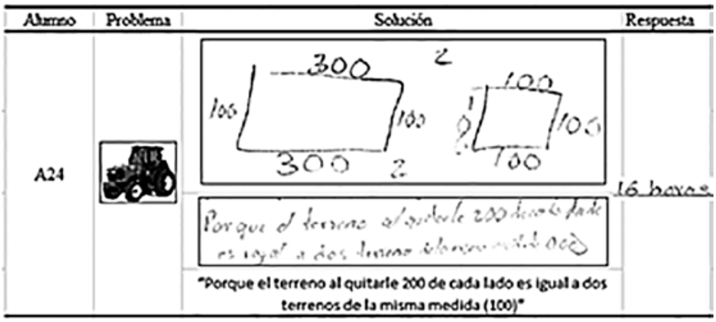


Figura 10. Ejemplo de respuesta de un alumno que realiza un procedimiento confuso.

Con base en el diagrama realizado por el alumno, se observa que hace crecer el cuadrado en una dimensión por lo cual obtiene un rectángulo como nueva figura. Sin embargo, al argumentar “porque el terreno al quitarle 200 de cada lado es igual a dos terrenos de la misma medida (100)”, no es muy claro para la percepción de los autores a qué se refiere el alumno. Por ello se tienen dos interpretaciones:

Con base en el rectángulo realizado por el alumno, no es posible quitarle 200 m de cada lado a la figura debido a que en total serían 400 m lo que se le deberían de quitar y la figura solo mide 300 m, por lo tanto, no se puede realizar esto y, por consiguiente, no puede ser igual a dos terrenos de 100 m.

Posiblemente al señalar que se le tienen que quitar 200 metros, se refiere a dos terrenos cuadrados de 100 m de lado, si tomamos en cuenta dichos terrenos sabemos que “el agricultor” se tarda 8 horas en arar, por lo que al ser dos terrenos de este tamaño se tardaría 16 horas, que es la respuesta de este alumno.

Como podemos observar, hay diversidad de respuesta por parte de los alumnos al momento de resolver problemas en donde se hace presenta la ilusión de la linealidad. Incluso, los alumnos se pudieron apoyar en representaciones externas tales como operaciones, tablas, gráficas, rectas o diagramas como lo muestra la siguiente figura.

Problema	Operaciones (Suma)	Tabla	Gráfica	Recta	Diagrama
	2	4	1	0	9
	2	0	0	1	19

Figura 11. Frecuencia de representaciones externas utilizadas por los alumnos.

En la figura 11 podemos observar que, para resolver el problema del "pintor", 16 alumnos utilizaron representaciones externas, mientras que para el problema del "agricultor" aumentó la cantidad de alumnos pues 22 alumnos recurrieron a ellas. Se puede apreciar, también, que las representaciones externas más utilizadas por parte de los alumnos fueron los diagramas en ambos problemas. En la siguiente figura se muestran algunos ejemplos.

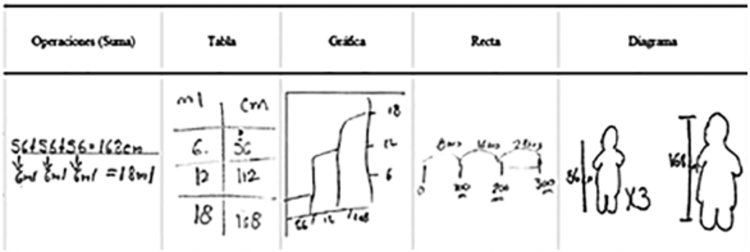


Figura12. Ejemplos de representaciones externas utilizadas por los alumnos.

La figura 12 muestra cómo algunos alumnos utilizaron representaciones externas, tales como la suma para resolver los problemas propuestos. Posiblemente utilizaron este recurso (la suma) debido a la incapacidad de utilizar el algoritmo de la multiplicación o simplemente por la comodidad que ésta les representa. Algunos otros alumnos utilizaron tablas, gráficas o rectas para representar lo que ellos creían que era una relación lineal.

La mayoría de los alumnos, que utilizaron representaciones externas, emplearon diagramas como los que se muestran en la figura. Sin embargo, fueron de poca ayuda, pues, a pesar de que en sus diagramas hacían crecer el largo y ancho de la imagen, en sus operaciones aritméticas solo tomaban en cuenta el crecimiento de una dimensión y "caían" en la ilusión de la linealidad. A pesar de las múltiples representaciones externas de los alumnos, casi ninguna fue de gran ayuda, pues solo una fue la apropiada debido a que solo un alumno pudo resolver correctamente un problema como ya se había mencionado.

Conclusiones

La mayoría de los alumnos de bachillerato a los que se les aplicó el instrumento fueron "atrapados" por la ilusión de la linealidad, pues la mayoría intentó resolver los problemas de área propuestos aplicando el modelo lineal o "regla de tres". Con base en la aplicación de dicho modelo, los alumnos tendieron a generalizar que si el lado de una figura crece k veces entonces su área crece k veces, como había sucedido es las investigaciones de De Bock et al., 2002. Algunos de los alumnos, que intentaron resolver el problema por medio del modelo lineal, presentaron ciertas complicaciones al aplicar el algoritmo de "la regla de tres".

Hubo algunos alumnos que no aplicaron el modelo lineal. Sin embargo, la mayoría de los que no aplicó el modelo lineal tampoco logró resolver el problema de forma correcta, pues sólo realizaron operaciones aritméticas con los datos propuestos en el problema o en su defecto unicamente escribieron el resultado. Un par de alumnos lograron "romper" con el razonamiento lineal, un alumno pudo hacerlo gracias a sus conocimientos o experiencias de la vida. Sin embargo, sólo lo hizo parcialmente y el otro alumno lo hizo por medio de diagramas, lo cual indica que, en este caso particular, las representaciones externas y las vivencias pueden contrarrestar la ilusión de la linealidad.

El uso de representaciones externas no fue de mucha ayuda para la mayoría de los alumnos, debido a que ellos hicieron uso del modelo lineal, por lo cual sumas, tablas, gráficas y rectas no fueron de mucha ayuda, pues el crecimiento era lineal. En el caso de los diagramas, se considera que son importantes para la resolución de los problemas, pero los alumnos que los utilizaron se enfocaron en que la nueva figura solo iba crecer en una sola dimensión (largo o ancho) lo cual no garantiza que ayude a solucionar el problema como lo dicen De Bock, et al., (2007).

Bibliografía y fuentes de internet

Blum, W., et al. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, 149-171.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

_____. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Student´s overuse of proportionality on mising-value problems: how numbers may change solution. *National Council of Teachers of Mathematics*, *40*(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 311-342.

La pregunta extra-matemática en el problema "*los dos hombres que tienen pan*" de Fibonacci: los efectos en las respuestas de estudiantes de bachillerato

Claudia Éthel Figueroa Suárez y Josip Slisko Ignjatov[11]

Palabras clave: problemas verbales, sentido matemático, argumentación.

Resumen

Los *problemas verbales* de matemática son utilizados para *aplicar* lo que se ha aprendido en clases dentro de un contexto, con el fin de desarrollar en el estudiante habilidades de razonamiento lógico, reflexión y argumentación. En este trabajo se presentan los resultados del análisis de las respuestas, numéricas y argumentativas (ya que se requería que justificaran su respuesta), de 106 estudiantes de primer año de educación media superior a la pregunta en el problema "Los dos hombres que tienen pan" planteado y resuelto por Fibonacci hace más de 800 años. Los resultados indican que el contexto y la pregunta del problema ¿esto fue justo o no?, desencadenan en los estudiantes reflexiones más allá de las *matemáticamente correctas y requeridas*. Los profesores deben conocer y analizar de qué forma los estudiantes hacen uso de sus conocimientos del mundo real para dar respuesta a un problema matemático y potencializar esas habilidades argumentativas sin que ellos pierdan ese sentido de la realidad y le impriman, además, un *sentido matemático*.

[11] Facultad de Físico Matemáticas (FCFM), de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México). Correos-e: claukatu@gmail.com / josipslisko47@gmail.com

Introducción

En la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), realizada en el marco de las reformas estructurales hechas en materia de educación, se establecen los desempeños terminales del egresado de EMS, comprendidas como competencias. Una competencia se define de la siguiente forma: "la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico" (Acuerdo 442, 2008, p. 2).

En matemáticas se establecen los siguientes lineamientos:

Las competencias reconocen que a la solución de cada problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases (Acuerdo 444, 2008, p. 5). Lo anterior encamina a la enseñanza de las matemáticas, ya no hacia un conjunto aislado de conceptos que hay que aprender y dominar, sino hacia la construcción de aprendices que den sentido al aprendizaje (De Corte, 2004). Además, se agrega:

> Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamiento (Acuerdo 444, 2008, p. 5).

Por lo tanto, basando la educación en la resolución de problemas, se puede hacer uso de ellos para el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y argumentativo.

El objetivo de esta investigación es mostrar la forma en la que la pregunta a un problema verbal puede desencadenar en los estudiantes respuestas que nada tienen que ver con la respuesta matemática; pero sí dan muestra de la creatividad, argumentación y pensamiento crítico que tienen los estudiantes y el uso que hacen de sus conocimientos del mundo real.

Marco Teórico

Los problemas verbales

Greer, Verschaffel & De Corte (2002) realizaron una investigación sobre las creencias acerca de problemas verbales, los cuales definen de la siguiente forma:

> un texto (que contiene típicamente información cuantitativa) que describe una situación ficticia familiar al lector y que plantea una pregunta cuantitativa, una respuesta a la que se puede llegar por medio de operaciones matemáticas realizadas con los datos que provee el texto, o inferido de otro modo (p. 271).

Dentro de la Educación Matemática, los problemas verbales cumplen dos propósitos principales. El primero es el aplicar las matemáticas a la física o fenómenos sociales, para enfatizar que las matemáticas sirven para describir o hacer deducciones de aspectos reales. El segundo propósito consta de usar historias imaginables, pero a menudo no realistas, para usar nociones abstractas de las matemáticas (Greer, et al., 2002).

Se piensa que plantear problemas en contextos artificiales puede generar falsas ideas en los estudiantes, que provocan actitudes negativas hacia el estudio de las matemáticas y repercuten en el aprendizaje esperado (Velázquez & Slisko, 2014). No por el mero hecho de utilizar un conocimiento matemático, se provoque que los estudiantes pierdan el *sentido de las matemáticas*, al generar en ellos *creencias* que obstaculicen su aprendizaje (Schoenfeld, 1992; Gómez 2003, 2010; Callejo & Vila, 2003; Op´t Eyende, De Corte & Verschaffel, 2002) y que aparten el quehacer matemático de la vida real y su entorno.

Se busca que el contexto del problema no sea un mero adorno y baste con extraer los datos y resolver el problema, sino que sea parte importante y ayude a darle sentido al aprendizaje de las matemáticas. Es decir, si utilizamos los problemas en la enseñanza, debemos tomar en cuenta el contexto sobre el cual están planteados que, si bien se toman para el uso de las matemáticas en *historias imaginables*, no sean artificiales y sean sobre situaciones auténticas (Palm, 2009; Kilpatrick, Gómez & Rico, 1998).

Por ello, al plantear un problema, no solo debemos cuidar su autenticidad, sino tener en cuenta el tipo de respuestas que puede generar en los estudiantes una *simple* pregunta, y considerar, entonces, la manera en la que se puede intervenir para que, lejos de considerarse un error, ayude a promover el sentido matemático a través de la justificación y argumentación de su respuesta.

El problema de Fibonacci

Fibonacci, en su libro *Liber Abaci*, publicado por primera vez en el año 1202, presenta una serie de situaciones problemáticas, las cuales ilustran el uso de las matemáticas y la introducción de los números arábigos y su uso en el mundo occidental. Estas situaciones problemáticas (problemas), no son de ninguna manera triviales y representan un reto al poner a prueba habilidades y conocimientos. En ese libro se presenta el uso de las fracciones y dentro de este tema está el problema de reparto que da pie a esta investigación. En el 2003 Sigler, hace la primera traducción del libro de Fibonacci en latín a un lenguaje moderno (el inglés). El enunciado del problema que a continuación se presenta es traducción literal del inglés al español del primer autor.

> Los dos hombres que tienen pan
>
> Había dos hombres, el primero de los cuales tiene 3 panes y el otro tiene 2, y ellos caminan hacia cierta fuente donde se sientan a comer juntos, y un soldado pasaba por ahí; ellos lo invitaron a unírseles, y él se sentó y comió con ellos, y cuando han comido todo el pan el soldado partió dejándoles 5 bezantes por su parte. De estos el primero tomó 3 bezantes porque él tenía 3 panes; el otro tomó los otros dos bezantes por sus dos panes. Se busca si la división fue justa o no. Una cierta persona afirmó que la división era correcta ya que cada uno tenía un bezante, por cada pan, pero eso es falso porque los tres comieron los cinco panes. Como cada uno tomó 1 2/3 de pan; el soldado comió 1 1/3 de pan, que es 4/3, de los panes del que tenía tres. De los otros panes no comió más que 1/3 de un pan. Por lo tanto, el primer hombre tomó 4 bezantes y el otro 1 bezante (Sigler, 2003, pp. 403-404).

En sus notas sobre el problema Sigler (2003) resalta el hecho de que Fibonacci no deja claro por qué el soldado come 1/3 de un pan del segundo hombre. El autor considera que es necesario dejar claro cómo se llega al reparto de 4 y 1 bezante y da más explicaciones sobre la solución (Sigler, 2003, p. 627).

Este problema también es presentado, con una formulación diferente, en el libro *"El hombre que calculaba"*, escrito por Julio César Mello e Souza, conocido como Malba Tahan (y así se hace llamar en este libro). El autor presenta el libro como un cuento, distribuido en varias historias que implican el uso de las matemáticas. Una de ellas tiene el siguiente título largo:

> De nuestro encuentro con un rico jeque, malherido y hambriento. La propuesta que nos hizo sobre los ocho panes que llevábamos, y cómo se resolvió, de manera imprevista, el reparto equitativo de las ocho monedas que recibimos en pago. Las tres divisiones de Beremiz: la división simple, la división correcta y la división perfecta. Elogio que un ilustre visir dirigió al Hombre que Calculaba (Tahan, 2017, p. 23).

La historia cuenta que dos hombres que pasaban por unas ruinas, camino de Bagdad, ven a un hombre mal herido que resulta ser un rico mercader, el hombre les pide de comer, uno de los hombres llevaba cinco panes y el otro tres. El jeque propone compartir equitativamente los panes y promete *pagar con 8 monedas de oro el pan que coma*.

Al llegar a la ciudad cumple su palabra y da cinco monedas al hombre que llevaba cinco panes y tres al que llevaba tres panes. Esa es la *división simple*, según lo explica el hombre que llevaba los cinco panes; pero no la matemáticamente cierta, que es la *división correcta*, y explica:

> Cuando durante el viaje, teníamos hambre, yo sacaba un pan de la caja en que estaban guardados, lo dividía en tres pedazos, y cada uno de nosotros comía uno. Si yo aporté 5 panes, aporté, por consiguiente, 15 pedazos ¿no es verdad? Si mi compañero aportó 3 panes, contribuyó con 9 pedazos. Hubo así un total de 24 pedazos, correspondiendo 8 pedazos cada uno. De los 15 pedazos que aporté, comí 8; luego di en realidad 7. Mi compañero aportó, como dijo, 9 pedazos, y comió también 8; luego solo dio 1. Los 7 que yo di y el restante con que contribuyó al bagdalí formaron los 8 que corresponden al jeque Salem Nassir. Luego es justo que yo reciba siete monedas y mi compañero solo una (Tahan, 2017, pp. 24).

A pesar de ello, el mismo hombre, cree esa división cierta matemáticamente, *pero no perfecta a los ojos de Dios*, por lo que toma las 8 monedas y las divide en partes iguales, cuatro monedas para cada hombre. Y esa es la *división perfecta*.

En el 2011 se edita un libro que contiene traducciones al español de ciertos problemas que aparecen en el *Liber Abaci*. El libro se llama: *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci* (Ugarte, 2011). El problema antes mencionado viene redactado de la siguiente forma:

> Dos hombres que tienen 5 panes.
>
> Dos hombres van de paseo hasta una fuente. Allí se disponen a almorzar. Uno de los hombres tiene 3 panes y el otro 2. Ven a un soldado y le invitan a unirse a ellos. Todos comen la misma cantidad de pan y el soldado, al marchar, les entrega 5 besantes por el pan recibido. ¿Cómo deben repartirse los besantes los dos hombres? (Ugarte, 2011, p. 31).

El problema se modifica, con respecto al original, ya que no se da una solución, ni se pregunta si el reparto es justo o no. Solamente se pide cómo deben repartirse los besantes los dos hombres. Esta última versión del problema se planteó a estudiantes de educación mediada superior, en un estudio realizado como parte de un trabajo de tesis del primer autor, dirigido al cambio de creencias. El análisis se centró en el uso que hacían los estudiantes de las fracciones para resolver un problema de reparto. Al no existir una respuesta numérica previa ni la tarea de contestar *si la división fue justa o no*, las respuestas de los estudiantes fueron enfocadas en la resolución del problema de forma numérica.

Metodología

Población

En el estudio actual participaron 106 estudiantes, distribuidos en tres grupos de primer año de educación media superior, de la Preparatoria "Gral. Lázaro Cárdenas del Río", perteneciente al bachillerato universitario de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en la Heroica Puebla de Zaragoza, Puebla.

El problema

El problema se planteó de la siguiente manera:

> Dos hombres van de paseo a una fuente. Allí se disponen a almorzar. Uno de los hombres tiene 3 panes y el otro 2. Ven a un soldado y le invitan a unirse a ellos. Todos comen la misma cantidad de pan y el soldado, al marchar, les entrega 5 monedas por el pan recibido (todas de la misma denominación). De estas monedas el primer hombre toma 3 y el segundo 2, ¿crees que esto fue justo o no? Justifica tu respuesta.

Se toma parte del problema propuesto por Ugarte (2011), se utiliza la palabra *moneda* en lugar de *besantes*; se precisa entre paréntesis *todas de la misma denominación*, para no distraer a los estudiantes en este detalle. Además, se pone el reparto en el original de Fibonacci (Sigler, 2003) con la pregunta explícita ¿crees que esto fue justo o no? y se pide la justificación de la respuesta, para entender y analizar los motivos de ella.

Al ajustarnos más al problema original propuesto por Fibonacci, poner en la pregunta la implicación de *justicia* y pedirles justificar la respuesta, no solamente la respuesta numérica, se obtuvieron resultados más allá de lo matemático.

Resultados y observaciones

Las respuestas a la pregunta "¿Crees que esto fue justo o no?" se clasificaron como se muestra en la tabla 1. Las observaciones se hacen con base en las justificaciones de su respuesta, tomando en cuenta el uso o no que hacen de las matemáticas, los cálculos realizados son para obtener cuánto come de pan cada uno y, en dado caso, cuánto le da cada hombre de pan al soldado; y la interpretación que le dan al enunciado del problema debido a que no lo leen bien.

Tabla 1. Resultados globales

Respuesta	Número de estudiantes
Sí fue justo	65
Sí fue justo y no fue justo	18
No fue justo	22
No da una respuesta	1
Total	106

Se agregan, además, comentarios de algunos estudiantes, considerados representativos, con una letra de acuerdo a su respuesta: justo (J), injusto (I), justo e injusto (E), además de un número de acuerdo al número de comentario dentro de la sección.

Reparto justo

Ésta es considerada una respuesta incorrecta, 65 estudiantes respondieron Sí a la pregunta (Tabla 2).

Tabla 2. Reparto justo

	No leen bien el problema	Sí leen bien el problema	Total
No realizan cálculos	26	1	27
Sí realizan cálculos	33	5	38
Total	59	6	65

La mayor parte de los estudiantes dan esta respuesta porque no leen bien el problema, 59 en total. Se observa que no toman en cuenta la última parte de la frase:

“el soldado, al machar, les entrega 5 monedas por el pan recibido…”

Ellos consideran, como lo pone de manifiesto Fibonacci en su respuesta, que el soldado da las cinco monedas por los cinco panes que llevaban los dos hombres, una moneda por cada pan.

Según se muestra en la tabla 2, 26 estudiantes no realizan cálculos, para ellos el problema resulta sencillo, y no ven la necesidad de hacer ningún cálculo. Algunas explicaciones no son verbales, simplemente expresan la correspondencia numérica entre número de panes y número de monedas para cada hombre. Otros estudiantes además agregan un comentario verbal (figura 1).

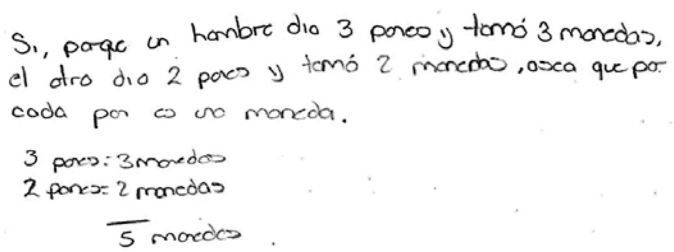


Figura 1

Este estudiante, además de expresar la correspondencia numérica entre panes y monedas, agrega una explicación de esa correspondencia en un párrafo.

El comentario inicial de este estudiante implica tomar en cuenta la invitación:

> J1: Si es justo.
> A pesar de que al soldado lo invitaron a comer, él pagó por lo que comió, y el señor que dio tres panes recibió 3 tres monedas y el que puso 2 panes recibió 2 monedas y además los 3 comieron lo mismo.

Las explicaciones de otros estudiantes son mucho más sencillas, no relacionan de manera explícita que a cada pan le corresponde una moneda, ven que un hombre llevaba más pan que el otro, por lo tanto, merecía más dinero. Algunos agregan que los tres comieron los mismo, así que esto refuerza lo justo del reparto: "J2: El segundo no tendría por qué reclamar ya que comió la misma cantidad de pan".

Un estudiante además agrega un argumento "práctico":

> J3: Además habían 5 monedas y sólo habían 2 hombres así que por lógica uno tendría que recibir más que el otro porque no pueden dividir una moneda.

Los otros 33 estudiantes, a pesar de que sí obtienen el resultado de cuánto pan comió cada hombre, al final llegan a la misma conclusión que los 26 estudiantes anteriores. Algunos estudiantes consideran que en efecto pagó por lo que comió, y lo demás lo dejó como *agradecimiento*. Un estudiante también hace las siguientes consideraciones:

> J4: Creo que fue justo ya que cada hombre tomó las monedas por cada pan que llevó y el problema no dice que el soldado pagó el precio de los panes, por lo cual se considera que su pago fue una especie de agradecimiento y los dos hombres se lo repartieron de forma equitativa.

Un estudiante, sin hacer cálculos, supone cuánto pan le dio cada hombre al soldado. Pero considera igual que fue justo *según la cantidad de pan que tenían inicialmente*.

Según lo observado, 49% de los estudiantes dan la respuesta rápida porque no consideran que las monedas fueron dadas solamente por el pan recibido. De tal manera, que relacionan el número de monedas con el pan que cada hombre llevaba. Algunos estudiantes, al hacer cálculos, intentan dar otras explicaciones; pero al no leer bien el problema no logran dar con la respuesta correcta.

En la tabla 2 también se observa que seis estudiantes sí consideran que las monedas las deja el soldado por el pan recibido, ya que leen bien el problema. Aunque cinco estudiantes hacen cálculos, tres sólo hacen el reparto y suponen que uno de los hombres le da un pan entero y el otro la fracción; pero no explican el porqué. Un estudiante (figura 2) propone primero un reparto igualitario; pero al final supone igual que dieron tres monedas por un pan y las otras dos por la fracción. Eso conduce a la respuesta rápida, pero viendo sus operaciones queda claro por qué considera así el reparto de los panes.

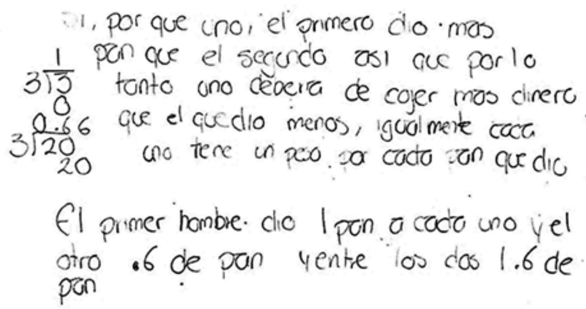


Figura 2

Otro estudiante (figura 3) calcula la cantidad de pan que comió cada uno y también la cantidad de pan que le toca a cada quien "por cada pieza de pan inicial"; pero sólo para comprobar que un hombre le dio un pan y el otro solamente una fracción.

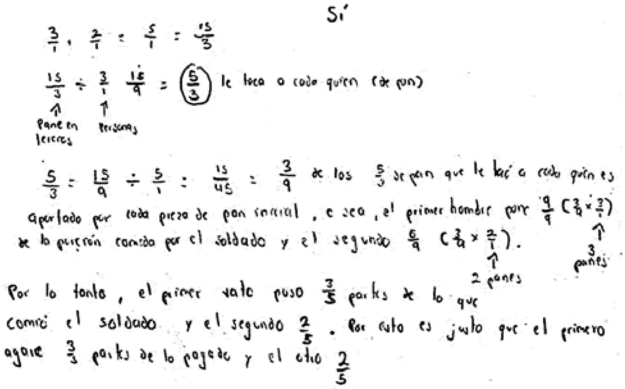


Figura 3

Al hacer uso de cálculos matemáticos, la idea, que persiguen los estudiantes al decir que el reparto fue justo, se va aclarando. La respuesta matemáticamente correcta sólo acepta una forma de reparto, es decir, juntamos los cinco panes y los repartimos. La idea de los dos últimos estudiantes propone otro reparto, y lo ilustran, uno de una forma más complicada que el otro, debido al uso de las fracciones. Sin embargo, la idea de un *reparto alternativo* es la misma: el primer hombre reparte sus panes entre los tres y luego el segundo hombre reparte sus dos panes entre los tres. En ese escenario, el reparto es justo con respecto a los panes que recibe el soldado, pero es injusto porque el primer hombre le da un pan entero al segundo y el recibe del segundo solamente 2/3 de pan.

Se observan, además, que algunas justificaciones toman en otro sentido la pregunta y, al considerar si *esto fue justo o n*o, no hablan del reparto de las monedas. En primer lugar, se enfocan en una cuestión: ¿fue justo que el soldado pagara, cuando los hombres lo habían invitado? Esto influye de manera más notoria en la respuesta de otros estudiantes, quienes consideran que la pregunta se refiere únicamente a eso, por lo que *también* lo consideran injusto. Eso se observa en las respuestas que siguen.

Reparto justo e injusto

En total, 18 estudiantes dan las dos respuestas: Sí y No, ya que hacen diversas consideraciones según leen y entienden el problema (tabla 3).

Tabla 3. Reparto justo e injusto

	No leen bien el problema	Sí leen bien el problema	Total
No realizan cálculos	12	0	12
Sí realizan cálculos	3	3	6
Total	15	3	18

Dos estudiantes están indecisos sobre su respuesta, debido a que no tienen claro varios aspectos del problema, tampoco realizan cálculos.

Uno de ellos no sabe quién es el primer hombre y quién el segundo, dentro del problema. El no entender eso, lo obliga a suponer otra posible respuesta:

> E1: Yo creo que si el primer hombre que toma 3 monedas es el mismo que tiene 3 panes y el da 3/5 partes de sus panes quiere decir que dio más panes que el otro que tenía 2, por lo tanto, este sería el segundo y sería justo que tomara 2 monedas, pero si el primero fuera el de los 2 panes esto no sería justo, a menos que él hubiera compartido más panes que el que tenía 3.

Para el segundo estudiante no es claro el problema ya que no especifica si fueron comidos todos los panes. Eso, en efecto, no se aclara en el problema, la traducción de Ugarte (2011) no menciona, como la de Fibonacci, que el soldado deja los bezantes después de que se terminaron los panes, por ello se confunde. Estos dos últimos estudiantes dan muestra de que, si el problema no se lee detenidamente y no se entiende, es difícil que puedan llegar a una respuesta y argumentarla coherentemente. Ya que pueden suponer varias posibles respuestas y no saber cuál es la correcta, si es que la hay. Por otro lado, al haber estudiantes que no suponen algo que los demás dan por hecho, se debe tener más cuidado al presentar un problema.

Trece estudiantes consideran que sí fue justo, ya que las cinco monedas son por el pan que cada hombre llevaba, no por el que recibió el soldado, entonces *sí* fue justo el *reparto de las monedas,* pero *no el pago*.

Algunos no lo consideran justo porque el soldado no se comió todos los panes; pero sí pagó por todos. Hay tres estudiantes de este grupo que calculan cuánto come cada uno, y uno de ellos hasta calcula cuánto le da cada hombre al soldado. Sin embargo, aún así su conclusión es la misma.

Otros toman en cuenta el valor de las monedas y que, al no saberse el valor, tal vez el soldado pagó de más cada pan.

> E2: Puede que sea injusto para el soldado pues tal vez el dinero que les dio era más al que gastaron los dos hombres originalmente, eso no podemos saberlo.

Otros coinciden en que no es justo porque al ser una invitación el soldado no tenía porque haber pagado.

Al considerar que la pregunta se refiere a dos cosas dentro del problema planteado, por un lado si es justo que el soldado pagara y porqué pagó, y por otro si se refiere al reparto de las monedas, orilla a los estudiantes a plantear dos respuestas diferentes. Se observa que, al no leer bien el problema, aún haciendo los cálculos necesarios para llegar a la respuesta *correcta*, no los pueden interpretar. Sus justificaciones, al decir que fue injusto, toman otra dirección, que no es la esperada por el autor del problema y nada tiene que ver con las matemáticas.

Los últimos tres estudiantes de esta sección solo calculan cuánto come cada uno de los tres hombres, pero dudan de su respuesta debido a que no tienen claro (tampoco lo calculan) cuánto de pan le dio cada hombre al soldado. Uno de ellos cree que es *obligación* del soldado pagar “con lo que tuviera, por lo cantidad de pan que ellos tenían", no por lo que le dieron. Pero si se considera que la pregunta es por el reparto de monedas, esto debería ser con base en la cantidad que cada hombre le dio al soldado, y eso no lo sabe. Otro estudiante considera la respuesta rápida "fue justo", porque cada hombre recibió una moneda (1 peso) por cada pan. Considera, también, que las monedas deberían ser por el pan que comió de cada hombre, pero eso no lo puede saber. El último estudiante (figura 4) encuentra dos escenarios, al pensar quién le dio de su pan al soldado y, también, dos respuestas. Al parecer, sí tiene claro que el soldado dio las cinco monedas por lo que recibió de pan.

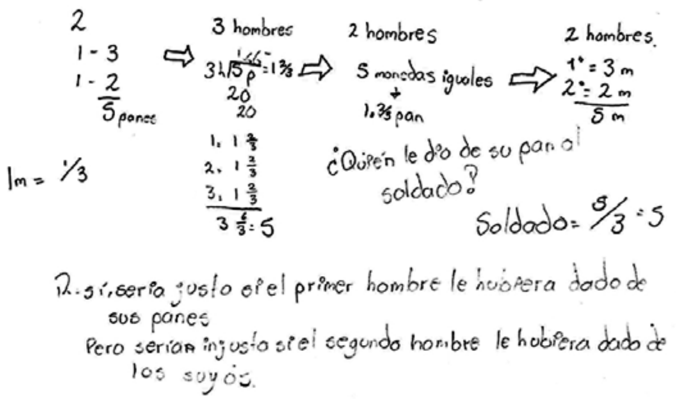


Figura 4

Aunque estos tres últimos estudiantes pueden ver que la pregunta se refiere al reparto de monedas y que ello depende de la cantidad de pan que le dio cada hombre al soldado, no lo calculan, y por eso no están seguros si fue justo o no. Aunque el problema se lea bien y se entienda a que se refiere la pregunta, al no poder realizar los cálculos necesarios no pueden llegar a la respuesta *correcta*.

Reparto injusto

Son 22 los estudiantes que creen que el reparto de las monedas fue injusto (tabla 4).

Tabla 4. Reparto injusto

	No leen bien el problema	Sí leen bien el problema	Total
No realizan cálculos	0	3	3
Sí realizan cálculos	6	13	19
Total	6	16	22

A pesar de considerarse ésta como la respuesta correcta, al leer los argumentos dados por los estudiantes se observa que en realidad no leen bien el problema, ya que sus justificaciones no son las correctas. Una de esas justificaciones es la siguiente:

> I1: Fue injusto porque todos comieron la misma cantidad de pan y la primera persona llevaba más que la segunda persona, y a pesar de que les paga el soldado justamente a cada uno de ellos, no contaban con que les pagaría, y quitando el hecho de que les pagó, la primera persona daría más que la segunda.

Puede entenderse que piensan que el soldado paga por lo que los dos hombres llevaban de pan en un principio, pero no aclaran por qué creen que es injusto el reparto de las monedas, si porque el soldado fue el que pagó o bien por la cantidad que pagó.

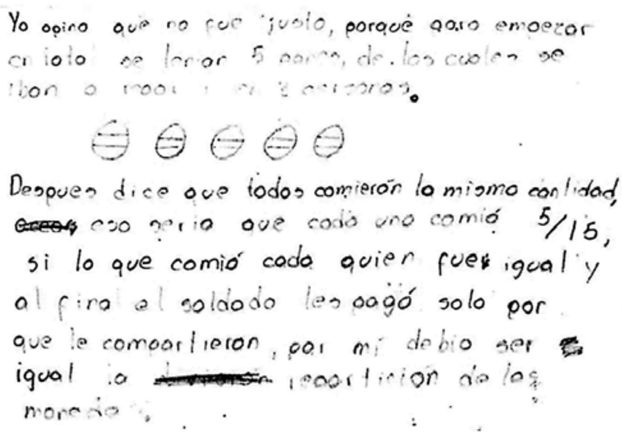
En otras justificaciones se puede observar que consideran injusto que el soldado pagara por todos los panes, cuando el solo comió una parte, y no cómo se repartieron las monedas.

> I2: No, porque el soldado pagó como si se comiera los 5 panes y solo comió 1.66 = un pan con un poco más de la mitad.

Estos estudiantes, siguen pensando que las monedas son por el pan que cada uno llevaba.

Por otro lado, diez estudiantes sí entienden que las monedas fueron por el pan recibido; pero consideran que las monedas se debieron repartir en partes iguales, ya que todos comieron lo mismo:

> I3: No, porque si hubiera sido justo, les hubieran tocado 2.5 monedas, aunque uno tuviera 3 y otro 2.



Yo opino que no fue justo, porqué para empezar

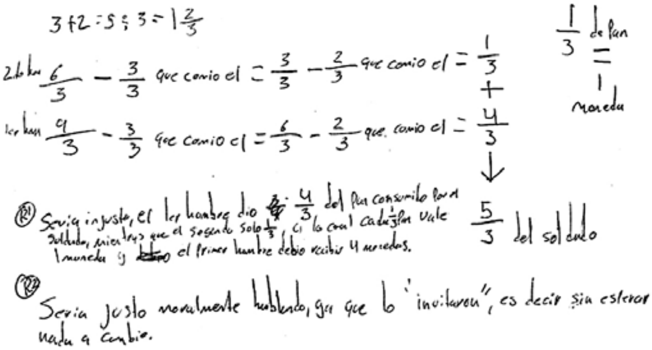
Despues dice que todos comierón lo mismo cantidad, eso seria que cadá uno comió 5/15, si lo que comió cada quien fue igual y al final el soldado les pagó solo por que le compartieron, por mí debio ser igual la repartición de las monedas.

Figura 5

Este último estudiante (figura 5) representa lo que comen cada uno de forma errónea, considerando que el reparto debía ser 5/3. Este tipo de errores se ha reportado en estudiantes de Educación Básica, influenciados por la idea de que *la parte siempre es menor que el todo* (SEP, 2011, p. 43). Es claro que sí son cinco pedazos de un total de quince, pero en este caso la fracción está mal expresada, si lo que se quiere es representar la parte del todo. Aunque, únicamente tres de estos diez estudiantes no calculan la cantidad de monedas que tocarían a cada hombre, ninguno se da cuenta que es imposible partir una moneda a la mitad, ni que las monedas fueron por el pan recibido (5/3 de pan). Y el último estudiante lo reafirma (figura 5), si lo que comieron fueron las mismas partes, y "el soldado pagó sólo porque le compartieron", es decir, por gratitud, las monedas se debieron haber repartido igual.

Los seis estudiantes restantes creen que el reparto fue injusto y lo justifican de manera correcta, siguiendo el razonamiento matemático.

Además, cinco estudiantes hacen el procedimiento utilizando fracciones para llegar al resultado. Únicamente un estudiante (figura 6) tiene dos respuestas, aparte de la correcta, él considera que si lo *invitaron* y no esperaban nada a cambio *sería justo*.



$3+2 = 5 \div 3 = 1\frac{2}{3}$

2do hom $\frac{6}{3} - \frac{3}{3}$ que comio el $= \frac{3}{3} - \frac{2}{3}$ que comio el $= \frac{1}{3}$ +

1er hom $\frac{9}{3} - \frac{3}{3}$ que comio el $= \frac{6}{3} - \frac{2}{3}$ que comio el $= \frac{4}{3}$ ↓ $\frac{5}{3}$ del soldado

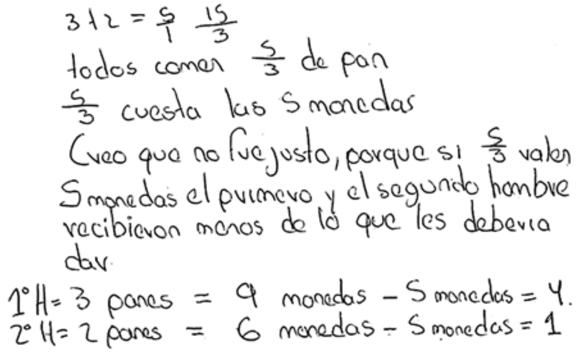
$\frac{1}{3}$ de pan = 1 moneda

R1 Seria injusto, el 1er hombre dio $\frac{4}{3}$ del pan consumido por el soldado, mientras que el segundo solo $\frac{1}{3}$, ci lo cual cada $\frac{1}{3}$ pan vale 1 moneda y el primer hombre debio recibir 4 monedas.

R2 Seria justo moralmente hablando, ya que lo "invitaron", es decir sin esperar nada a cambio.

Figura 6

Un estudiante (figura 7) no hace uso de fracciones para resolver el problema. Y transforma la cantidad de pan en monedas, resta lo que cada uno comió en monedas a lo que tenía y llega a la respuesta correcta.



$3+2 = \frac{5}{1}$ $\frac{15}{3}$

todos comen $\frac{5}{3}$ de pan

$\frac{5}{3}$ cuesta las 5 monedas

Creo que no fue justo, porque si $\frac{5}{3}$ valen 5 monedas el primero y el segundo hombre recibieron menos de lo que les deberia dar.

1° H = 3 panes = 9 monedas − 5 monedas = 4.

2° H = 2 panes = 6 monedas − 5 monedas = 1

Figura 7

No dan una respuesta

Un estudiante (figura 8) no da una respuesta, simplemente se enfoca en hacer los cálculos y expresar la correspondencia entre monedas y número de panes. No explica verbalmente muchas cosas, por ello al parecer comete un error, aunque al final llega a la correspondencia correcta.

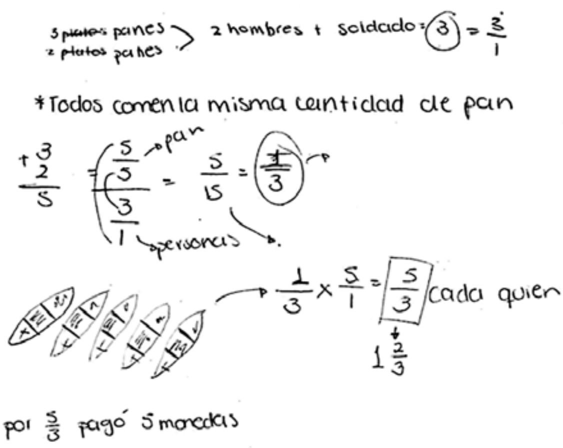


Figura 8

Análisis y discusión de resultados

Al preparar la resolución de un problema verbal, los estudiantes pueden omitir información importante que los llevaría a la solución correcta. Estas omisiones se deben a que no leen con cuidado el texto del problema ni identifican la información relevante que los ayude a resolverlo (Kilpatrick, et al., 1998). Eso puede deberse a lo poco habituados que están a resolver problemas verbales, que implica, no solo seguir técnicas de solución, sino, además, habilidades de comprensión de la información explícita o contextual (Schoenfeld, 1992; Polya, 1989).

En este caso, lo demuestran estudiantes que no entienden textualmente que las monedas las deja el soldado *por el pan recibido*, cayendo en el engaño de la correspondencia entre número de panes iniciales y número de monedas, lo cual representa la dificultad de resolver este problema, al ver una solución demasiado simple, debido a la interpretación del problema. También, es importante considerar los casos en que no se toma en cuenta el sentido de la pregunta: dan dos respuestas y se confunden al pensar que, al contestar "¿crees que esto fue justo o no?", hay que referirse al pago y no al reparto de monedas.

Al haber estudiantes que no comprenden el sentido del problema y la pregunta, ya sea que contestaron sí o no, nos hace pensar que hay que atender esos problemas de comprensión que pueden dificultar la evaluación de los conocimientos matemáticos. Los profesores no debemos dar por hecho que los estudiantes van a entender un problema y que no llegan a la solución porque no han aprendido ciertos contenidos matemáticos, hay que tomar en cuenta el contexto del problema y las dificultades que entraña presentar un problema verbal en comparación con un simple ejercicio.

Es muy importante pedir en las respuestas una justificación, ya que con ello se puede comprender de una mejor manera la forma en la que nuestros estudiantes resuelven un problema, y no solo de forma numérica. No sobra destacar que algunos estudiantes dieron la respuesta correcta, pero con las argumentaciones equivocadas, sin hacer uso de las matemáticas, lo cual es muy importante si lo que se va a evaluar al presentar un problema son conocimientos matemáticos específicos, ya que, también, se diferencian los estudiantes que entienden el problema, pero que claramente no pueden llegar a la solución por no dominar ciertos contenidos matemáticos, en este caso específico, las operaciones con fracciones.

Por otro lado, esos dos estudiantes que, aunque dieron la respuesta incorrecta, al argumentar y explicar su respuesta, nos informan de manera clara que recurren a un reparto de panes tal vez más *real* que el supuesto por el autor, y que su respuesta en realidad no es completamente incorrecta.

Nos damos cuenta cómo y por qué los estudiantes recurren a sus conocimientos del *mundo real* para dar una respuesta, aunque se aparten de las matemáticas, lo cual responde, según lo que se observó, a no entender el sentido de la pregunta. Eso refleja la forma en la que ellos interpretan la mera situación de invitar a alguien a comer.

Una *simple* pregunta puede desencadenar una serie de reflexiones que permite no solo evaluar los conocimientos matemáticos, sino, también, sus habilidades de argumentación y crítica. Eso, lejos de ser un obstáculo para el aprendizaje, puede resultar enriquecedor para los profesores, al tomar en cuenta estas situaciones al momento de plantear un problema matemático.

Conclusiones

Al hacer uso de problemas en clase debemos de tomar en cuenta las dificultades, no solo de índole matemático que pueden tener los estudiantes, sino de comprensión de textos, las cuales les impide hacer uso de las matemáticas de forma adecuada. Todas estas dificultades se notan más en la argumentación situacional que en la respuesta matemática.

Los profesores deben conocer y analizar de qué forma los estudiantes hacen uso de sus conocimientos del mundo real para dar respuesta a un problema matemático y potencializar esas habilidades argumentativas sin que ellos pierdan ese sentido de la realidad y le impriman, además, un *sentido matemático*.

Bibliografía y fuentes de internet

Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (2008). *Publicado en el Diario Oficial de la Federación*, vol. 26. Recuperado de: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11435/1/images/5_1_acuerdo_numero_442_establece_snb.pdf

Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato (2008). *México. Secretaría de Educación Pública*, vol. 447. Recuperado de: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11435/1/images/5_2_acuerdo_444_competencias_mcc_snb.pdf

Callejo, M. L., & Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación matemática venezolana*, *10*(2), 173-194.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology*, *53*(2), 279-310.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 225-247.

_____. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En Moreno, M.; Carrillo, J.; Estrada, A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV.* Lleida, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, 121-140.

Greer, B., Verschaffel, L. & De Corte, E. (2002). “The Answer is Really 4.5”: Beliefs About Word Problems. In *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Springer Netherlands, 271-292.

Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (Eds.). (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Bogotá: Una empresa docente.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situation. Verschaffel L., Greer B., Van Dooren W. and Mukhopadhyay S. (Eds.). *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. Rotterdam: Sense Publisher, 3-20.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. D. Gruows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: McMillan, 334-370.

Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. New York: Springer Science & Business Media.

Tahan, M. (2017). *El hombre que calculaba*. México: Limusa.

Ugarte F., A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci*. Editorial Lulu.com. España.

Velázquez, S. & Slisko, J. (2014). *Desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas en educación secundaria. Su relevancia en el logro de aprendizajes esperados.* En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 299-307.

Los usos del conteo en la escuela primaria: una perspectiva sociocultural

Francisco Emmanuel González Ángeles[12]

Palabras clave: usos, conteo, primaria, socioepistemología, cotidiano.

Resumen

El presente reporte de investigación tiene la intención de comunicar algunos aspectos implicados en el aprendizaje y la enseñanza de la aritmética en el aula de primaria. La discusión que se deriva tiene como objetivo caracterizar los usos del conteo como elemento del cotidiano que permea en los niños de una escuela primaria particular. El aparato crítico se basa en los elementos fundamentales de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), enfoque sociocultural de indagación que tiende a identificar la forma en que los alumnos de este nivel escolar en específico viven los contenidos, habilidades, destrezas y actitudes respectivas a la construcción del número natural en un contexto de conflictos cognitivos que se perciben como familiares. La metodología que se siguió para la indagación es de naturaleza cualitativa con carácter exploratorio, dado que se busca reconocer, con base en la incursión en una muestra de doce estudiantes y cuatro profesores, cuál es el sentido que otorgan al conteo y si lo relacionan con una actividad cotidiana como la compraventa de cosas.

La aplicación de entrevistas estructuradas a niños y a docentes permitió recoger información pertinente, facilitando la sistematización de categorías de análisis, como fueron aquéllas con carácter cognitivo, didáctico,

[12] Centro Universitario Japonés de Morelos (México). Correo-e: fga_1994@hotmail.com

social y epistemológico. Del estudio se destacó inicialmente una visión reduccionista en el 66.66%, tanto de estudiantes como de profesores, pues manifestaron que los contenidos matemáticos que se abordan en el aula de clase sólo adquieren sentido desde la escuela y para la escuela. A partir de ello, se pretende impactar en la construcción del saber matemático del aula que proviene al considerar un aula extendida por parte de los actores educativos, que tienen una participación socioeducativa en el nivel meso y micro didáctico hacia la gestión de los aprendizajes.

Introducción

Pensar en el conteo implica dimensionarlo desde diversas aristas conceptuales y de aplicación. Por ello, interesa dar a conocer la forma en que se vive este concepto y las significaciones que se le otorgan como "actividad cultural que se encuentra presente desde el nacimiento hasta la muerte del sujeto" en situaciones de aprendizaje escolares y cotidianas, en el marco referencial de la institución educativa en la que los sujetos permanecen la mayor parte de su vida escolar, por al menos seis años en el Sistema Educativo Nacional Mexicano; la escuela primaria regular. Vale recordar que en este espacio académico se tienen propósitos educativos con el fin de favorecer las competencias matemáticas a través de los aprendizajes esperados establecidos en el Plan de Estudios de Educación Básica y los Programas de Estudios correspondientes a cada grado (SEP, 2011).

Dentro de la reciente Propuesta curricular para la Educación Obligatoria (SEP, 2016) uno de los principios pedagógicos que la rigen (expresado en el cuarto punto) enfatiza el reconocimiento de la naturaleza social del conocimiento, resaltando lo siguiente:

> Como muestra la investigación, la interacción social es insustituible en la construcción del conocimiento. Es primordial fomentar la colaboración y propiciar ambientes en los que el trabajo en grupos sea central. El trabajo cooperativo permite que los aprendices debatan e intercambien ideas, que los alumnos más aventajados contribuyan a la formación de sus compañeros y ofrece las condiciones para el desarrollo emocional necesario para aprender a cooperar y a vivir en comunidad. El aprendiz ha de saber que comparte la responsabilidad de aprender con el profesor y con los otros aprendices de la clase (p. 44).

En relación, el octavo punto del documento mencionado, establece reconocer la existencia y el valor del aprendizaje informal, recuperando que:

> Hoy no solo se aprende en la escuela; los niños y jóvenes cuentan con diversas fuentes de información para satisfacer sus necesidades e intereses. La enseñanza escolar debe considerar la existencia y la importancia de estos aprendizajes informales. Los maestros han de investigar y fomentar en los alumnos el interés por aprender en diferentes medios. Una forma de mostrar al aprendiz el valor de ese aprendizaje es buscar estrategias de enseñanza para incorporarlo adecuadamente al aula. Los aprendizajes formales e informales deben convivir e incorporarse a una misma estructura cognitiva (p. 47).

Al respecto, la presente investigación tiene como foco la perspectiva sociocultural, pues ha tomado en cuenta los fenómenos didácticos que se producen a través de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática con énfasis en el conteo, desde el aula, teniendo conciencia de que "*el conocimiento procede de la acción* sobre el mundo que incide en el sujeto que aprende, porque es mediante la acción como el sujeto pone a prueba sus conocimientos con el fin de modelarlos" (SEP, 2016). Desde este enfoque didáctico, se espera que el alumno aplique de manera ampliada sus conocimientos, habilidades y destrezas fuera del espacio escolar, por lo cual interesa el hecho de reconocer la perspectiva, el panorama, la mirada que tienen los niños de primaria sobre las aplicaciones heterogéneas que tiene el conteo en su vida cotidiana.

En la revisión documental sobre la historia de las matemáticas, se encontró que, desde la perspectiva de Bell (1985),

> Todos los pueblos en el transcurso de su historia han dirigido sus esfuerzos hacia el estudio de las matemáticas y estas han llegado hasta nuestros días por dos corrientes: el número y la forma. La primera comprendida por la aritmética y el álgebra, y la segunda por la geometría. Incluso muchos de los animales han demostrado un sentido rudimentario del número, ya que cuando un miembro de la manada desaparece no objetan, pero cuando han desaparecido dos o más, entonces se enfurecen haciendo uso instintivo del conteo (p. 13).

Cabe señalar que, desde el año 2500 antes de nuestra era, con los sumerios, se sabía que estaban familiarizados con la moneda y el peso en el comercio, lo que los orientaba a ofrecer un amplio horizonte de aplicación del conteo en sus intercambios comerciales. Cuanto más es imprescindible en los niños de primaria para la educación matemática del siglo XXI en la educación básica. Como parte fundamental, entonces, se vuelve ineludible la misión del docente, a quien se le ha encomendado la instrumentación del currículo general, de una disciplina cuyo génesis no se orientó hacia su enseñanza, pero que se enseña y quizás se seguirá enseñando tradicionalmente en las escuelas del país hasta que no se advierta el sentido cognitivo, didáctico, epistemológico y social para el logro de aprendizajes matemáticos a lo largo de la existencia humana.

Al respecto, se han identificado algunas acciones intuitivas relativas al uso del conteo, preponderantemente en la primera infancia, con base en las actividades que realiza el niño sin mediación del adulto, como identificar el lapso que ha pasado desde que tomó su primer biberón hasta que le vuelve a dar hambre, comunicando sus necesidades a través del llanto para llamar la atención de quien lo alimenta o, más adelante, reconociendo los días que faltan para su primer día de clases cuando está por ingresar a primero de primaria, la estimación del tiempo que dura su jornada escolar, de los minutos que dura su receso, de las horas que faltan para lleguen por él o ella, la verificación del cambio que recibe en la tienda de abarrotes u otros escenarios de compra-venta, la comparación que establece entre el dinero que lleva ahorrado y la diferencia que hay con el ahorro de su hermano, los meses que faltan para su próximo cumpleaños, el año en que egresará de la primaria, el cálculo del propio peso, hallar la página de algún libro de texto, la distancia que recorre su transporte para llegar de la casa a la escuela y viceversa, los puntos que le faltan para obtener una mejor calificación el próximo bimestre, deducir los pasos para jugar stop, los años de diferencia entre sus padres, las semanas que dura el periodo vacacional.

En circunstancias de la vida adulta, algunas actividades relacionadas con el conteo pueden ser aquéllas que son realizadas también sin mediación de otra persona, como: presupuestos, registro de las deudas, la comparación del sueldo que se ofrece en un empleo respecto a otro, la inversión necesaria para remodelar una construcción, los días que faltan para que llegue el nuevo integrante de la familia, los ingresos y egresos de una empresa familiar, la cuenta de los años de matrimonio o soltería, el tiempo de vida que le queda a una persona que ha sido diagnosticada con una enfermedad terminal, etcétera.

Las causales arriba mencionadas, en las que se resaltan algunos de los usos sociales que tiene el conteo en la vida cotidiana de toda persona, permitieron plantear las siguientes preguntas que rigen la indagación realizada: ¿qué concepto fue construido en el sujeto sobre el conteo en la escuela primaria?, ¿cómo interviene la escuela primaria en el uso extendido del conteo?, ¿qué relaciones se logran en el aula para establecer vínculos entre la escuela y la vida?, ¿qué acciones de mediación del docente son necesarias para incorporar al conteo en la cultura matemática del niño?, ¿qué usos dan los estudiantes y los profesores al conteo en su cotidiano?

En el proceso de investigación se ha podido reconocer el papel que juega la influencia cultural en la codificación, decodificación de la información y, en el mejor de los casos, la comprensión del conteo como elemento que modifica y configura conductas biopsicosociales, siendo que una manifestación del sistema escolar es el "habitus" (Bourdieu, 1986), el cual funge como reproductor de constructos como es el caso de la idea que se confecciona sobre el conteo a través de los entes educativos, quienes inconscientemente ponen en juego sus saberes a través del lenguaje para movilizar y confirmar sus ideas.

Marco teórico

Socioepistemología, conteo y realidad

El aparato crítico construido se enmarca en las cuatro dimensiones del saber: la *didáctica* referida a procesos de enseñanza en el ámbito escolar y no escolar, la *cognitiva*, relativa a las formas de apropiación del conocimiento; la *epistemológica*, centrada en el análisis de las circunstancias que hacen posible el origen y desarrollo del conocimiento matemático, cuando éste se hace público; y la *social,* al ser la encargada de normar la práctica que motiva las acciones humanas. Estos componentes, en conjunto con los saberes popular, técnico y culto, conforman los principios de la TSME (Montiel, 2005). Cabe señalar la consideración del triángulo didáctico extendido como aspecto esencial de la concepción epistemológica con carácter social que propone Cantoral (2013), incorporando al cuerpo de conocimientos, los contextos y diversas perspectivas culturales para la significación de los hallazgos y resultados. Fueron considerados el aprendiz, el saber como conocimiento en uso y los entornos socioculturales en los que se desarrolla dicho conocimiento.

La apreciación extendida de los objetos de conocimiento matemático como lo es el conteo, permite una mirada horizontal respecto a la multiplicidad de sapiencias que se ponen en evidencia cuando se efectúan niveles de acción, actividad y práctica situada en los diferentes contextos didácticos donde se desarrollan los niños y profesores de una escuela determinada. No perder de vista la práctica docente en la que se ejecutan acciones mediadoras sobre el conteo, como una de las habilidades que el autor del presente capítulo considera necesarias para funcionar en sociedad, implica abandonar la idea de capacitación magisterial. Se ha reconocido en estudios actuales que el desarrollo profesional docente y empoderamiento didáctico resulta ser alternativa para la transformación educativa, buscando recuperar la postura de Reyes-Gasperini y Cantoral (2013) sobre la necesidad de atender a la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático, permitiéndole al profesor hacerse dueño de su propia práctica y, de esta forma, transformar su realidad desde las prácticas sociales, en situaciones que se vivencian dentro del ejercicio de su docencia.

Cambiar la apreciación del rol docente y el papel que éste juega en la construcción del conocimiento matemático sugiere la adopción de nuevas concepciones respecto a lo que se entiende como “buen profesor”, ya que esta postura de empoderamiento reconoce que los profesionales de la educación cuentan con lo suficiente para desarrollar situaciones de aprendizaje y que será el mismo docente el que se encargue de problematizar sus áreas de oportunidad en la praxis, la cual se encuentra dotada de complejidades. Ya que la enseñanza se desarrolla en contextos sociales variables, se reconoce que el reto es mayúsculo para un profesor de preescolar, primaria y secundaria, pues en estos niveles educativos no es la voluntad y necesidad cognitiva de los niños la que rige las acciones didácticas del aula, según lo señala Mercado y Luna, (2013). Al caso, los aportes de Sañudo (2013), subrayan la estresante preocupación de los docentes por desarrollar los contenidos del programa en su totalidad, señalando las anomalías didácticas de que son objeto, además de la excesiva carga administrativa, como elemento constitutivo de la práctica docente desemboca en la escasa posibilidad que tienen los profesores para proponer actividades situadas que surjan del entorno donde se desarrolla el sujeto que aprende y que, además, respondan a sus intereses y necesidades sean conceptuales, procedimentales, factuales o actitudinales.

También, desde la arista de este sujeto olvidado que se enfrenta a lo matemático, se toma en cuenta la idea de cotidiano que aporta Cordero (2015). Parafraseando sus estudios, se define cotidiano como aquel conjunto de formas de vivir, de conocer y de llevar a cabo costumbres, evolucionando y replanteando el conteo como actividad cultural ya descrita con antelación. Fenómenos que se reconocen como fundamentales en el rediseño del discurso matemático escolar son la adherencia, la exclusión y la opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci, Soto, 2015), aceptando que los contenidos son validados al someterlos a un sistemático proceso de introducción del saber matemático en el sistema educativo formal y que legitiman conjuntamente un nuevo sistema de razón, de entendimiento. Si bien estos discursos son vistos como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito didáctico, dicho consenso se logra acompañado de una particular forma de hegemonía, haciéndose explícitos en Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de aula, pero también en las creencias, concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

En síntesis, el fenómeno de adherencia se refiere a los aspectos sociales que se vinculan a la constitución del conocimiento bajo necesidades y situaciones inscritas en un marco de referencia, haciendo hincapié en que, al realizar una investigación sobre los usos que tiene el conteo en la escuela primaria mexicana estudiada, los resultados de investigación muy posiblemente diferirán del mismo objeto de estudio situado en una escuela primaria de otra localidad, por las especificidades de ambos escenarios socioculturales que merecen ser vistos por separado. La identidad, como parte de la adherencia cultural, alude por sí misma a la necesidad de construcción en tanto que se identifica como un proceso, pese a que se reconocen acepciones en su dimensión colectiva e individual.

Es un hecho que la cultura escolar a la que pertenece determina las semejanzas y diferencias respecto a los diversos grupos, que en este caso son escolares, ya que no será la misma usanza del conteo que evidencian los actores educativos de la institución propiamente estudiada, respecto a otra como pudiera ser el caso de la influencia que ha dejado la cultura maya en Guatemala respecto a su manera de contar, aun en condiciones conceptuales análogas, ya que matemáticamente se le conoce universalmente como la acción de contar también en México. Alternadamente este fenómeno incide en la formación y consolidación de matemáticos educativos ocupados en el aprendizaje y enseñanza de esta disciplina en Latinoamérica. Sin embargo, son objeto de exclusión aquellas situaciones que se ocupan de imponer significados legitimados socialmente, quedando fuera el conjunto de argumentaciones que son usadas por los sujetos, en este caso niños, al momento de construir conocimiento en un contexto y situación específica, según lo señala Cantoral (2003).

Gómez y Cordero (2003) ejemplifican la opacidad argumentativa como si lo que pasara en la escuela con la matemática educativa fuera independiente de lo cotidiano, del ciudadano que se encuentra en el aula de clase, pareciendo exigirle que sea olvidado para no ser tomado en consideración al instante en que construye el propio conocimiento matemático. Al respecto la relevancia que cobra mencionar estos fenómenos se hace visible en los intentos que hacen los niños por validar sus propios procedimientos y resultados al efectuar acciones directas de conteo, intentos que pudieran potencializarse o simplemente ignorarse dentro del acto educativo.

Con respecto a las actitudes vinculadas al saber matemático, García y Farfán (2014) sostienen elementos que definen el concepto de actitud y mencionan que éste ha evolucionado de su acepción meramente como medida de gusto o disgusto, hasta una definición tripartita por reconocer tres componentes: la respuesta emocional hacia las matemáticas, las creencias sobre las matemáticas y el comportamiento relacionado con las matemáticas.

Con respecto al variable género, ha sido notorio que tanto hombres como mujeres manifiestan actitudes hacia las matemáticas, algunas veces positivas, otras tantas negativas. Sin embargo, han sido las mujeres quienes han manifestado una fuerte aversión por la materia, sintiéndose más ansiosas y con menos confianza hacia su estudio que los hombres, debido a la creencia de que es un dominio exclusivamente masculino (Fennema y Sherman, 1978). Esta revisión en investigaciones sobre la perspectiva de género llevo a la posibilidad de identificar las representaciones que hacen sobre sí mismos los niños y sobre el sexo opuesto en una clase de matemáticas, específicamente contextualizando actividades de conteo, con la intención de aportar información al respecto de este aspecto coyuntural en el apartado de reflexiones del presente texto.

Hablar de una idea conlleva a pensar en el *concepto* como estadio final y cíclico en la construcción de conocimiento, en este caso el de número, cuyo principio epistemogenético es la conservación de la cantidad numérica, como condición necesaria de toda actividad racional para contar (Piaget y Szeminska 1967). Entiéndase al número natural como el resultado de la síntesis entre las operaciones de *clasificación* y *seriación*, ya que permite el acceso a otros niveles de alfabetización matemática como lenguaje ordenado.

Acertadamente, se da razón al postulado de que en cualquier espacio donde suceda o tenga lugar el conteo, en tanto saber popular, técnico o culto (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) conforma la sabiduría humana al verse involucrada una serie de acciones intelectivas que lo hacen replicable a nuevas situaciones desconocidas y conocidas por los usuarios del conocimiento matemático, tras haberlo formalizado en espacios académicos o en las aulas como lugares de encuentro (Duarte, 2003), advirtiendo que lo esencial para la enseñanza de la matemática sería el proceso por el cual se crea el conocimiento (Steinbring, 2005), acciones donde el docente u otro mediador no son los únicos que enseñan, devolviendo así la libertad de uso al niño o joven que lo pone en operación, según sus condiciones inmediatas de aplicación personal, familiar, social, académica, profesional o de oficio.

Finalmente, se considera la propuesta pedagógica y el trabajo de campo realizado por González (2016), con respecto a la importancia de los escenarios matemáticos entendidos como situaciones didácticas ideales que posibilitan el desarrollo de un pensamiento matemático operable (González y Gaytán, 2015). En este sentido, tomar en cuenta el aporte del niño en el proceso de aprendizaje implica considerar cómo es que interpretan el cuerpo de conocimientos, ubicando los dos tipos de conocimiento en este contexto determinado, sea el informal y el formal, que son diferenciados por Resnick y Klopfer (1989).

Metodología

Instrumentos, participantes y escenario del trabajo de campo

El método empleado para la investigación responde al carácter etnográfico, de naturaleza cualitativa con objetivo exploratorio (Miles y Hubermann, 1994), pues se advirtió la necesidad de apoyarse fuertemente en el método cualitativo para la construcción del significado que aquí ocupa. Además, se orienta hacia la integración del método hermenéutico-dialéctico, el de investigación acción, fenomenológico y el de historias de vida, con la responsabilidad ética de una investigación orientada y fundada en la vida humana, al asumir un rol responsable de las consecuencias positivas y negativas, que de su acción pudieran derivarse.

Los instrumentos utilizados se centraron en la entrevista estructurada y la guía de observación como técnica para la recogida de datos, respectivamente la aplicación de un cuestionario y las representaciones gráficas de los niños, ya que aportan una gran gama de estrategias gráficas, matrices, diagramas y flujogramas (1994).

El ambiente en el que se realizó el estudio didáctico fue exclusivamente escolar, permitiendo la apreciación de realidades pedagógicas sobre la elaboración de estos constructos matemáticos. Se considera este proceso como una actividad inherentemente integral, pues todos los interesados participan, al poder emitir juicios de valor explícitamente, desde sus aportaciones cognitivas y puntos de vista y sus opiniones, a través de un proceso hermenéutico y dialéctico (Gimeno y Pérez, 1989). El método, las técnicas, el rigor y la validez son de tipo pragmático, por lo que no hay criterios únicos de valor, sino criterios locales, contextuales y temporales (Patton, 1990), lo cual quiere decir que se adaptan al contexto de indagación.

Los referentes que sustentan el procedimiento metodológico hacen referencia al análisis etnográfico sistematizado por Rockwell (2009), el cual debe conducir a la construcción de nuevas relaciones conceptuales, no previstas antes del estudio, aclarando que los datos son construidos por el investigador desde su mirada, la cual se fundamenta en categorías teóricas, a fin de interpretar su sentido específico en un contexto exprofeso, además de que ofrece fuentes de evidencia para establecer la credibilidad de un criticismo educacional, como son la corroboración estructural, similar a la triangulación de diferentes fuentes de datos; la validación consensual (consenso con otros evaluadores competentes) como el juicio de experto; así como la adecuación referencial a nivel funcional (Eisner, 1991).

Resultados

Los descubrimientos confirmaron la visión amplia hacia el conteo como una actividad que tiene sentido social para los profesores. Se detectó que

50% de los docentes tiene la concepción de actividad situada (Díaz Barriga, 2006); en 100% la significación cotidiana; 25% el reconocimiento del dominio del mismo a través de conflictos cognitivos (Rodríguez, 1999); y 75% de aportaciones didácticas en la situación de referencia y la interacción social en el aula para la construcción del significado del conocimiento matemático en juego (Carballo, 2016). Lo anterior se deduce de las evidencias empíricas observadas en las aplicaciones significativas del conteo en sus estudiantes como producciones escritas y portafolios de evidencias, que cobran sentido a través de la implementación de estrategias docentes constructivas, las cuales favorecen la apropiación de una forma matemática de vivir, concepciones generales que se aprecian en la figura 1.

INDICADORES			
Concepto de conteo	Usos fuera de la escuela	Formas de reconocer en sus estudiantes el dominio del conteo	Propuestas didácticas para un uso extendido del conteo
CATEGORÍAS			
Como secuencia numérica	**Actividades cotidianas :de compra-venta, domésticas y deportivas**	**Cuando se realiza de forma mental sin material concreto**	**Incorporación de escenarios de aprendizaje (tiendita, banco, etc.)**
2 de 4	**4 de 4**	**2 de 4**	**3 de 4**
Como técnica de agrupamiento que funciona según el contexto de aplicación		**Cuando se enfrentan a la necesidad de aplicarlo**	**Clases públicas con participación de padres**
2 de 4		**1 de 4**	**1 de 4**
		Al lograr una sumatoria de elementos	
		1 de 4	

Figura 1. Resultados de los profesores respecto a conceptos, usos, formas y propuestas sobre el conteo.

Los hallazgos confirmaron la visión reduccionista por parte de los niños, manifestando un concepto de conteo limitado por 50%, de acuerdo a la aplicación en general, en la escuela; 33.33% reconocieron el uso social extendido; un 8.3% reconocieron tener habilidad para contar, mediante la interacción social al intercambiar significados matemáticos, y el 75% expresó la utilidad de una parte de su cuerpo para realizar el conteo, tal como puede observarse en la figura 2.

INDICADORES			
Concepto de conteo	Usos fuera de la escuela	Formas en que reconocen que dominan el conteo	Recursos que ocupan para contar
CATEGORÍAS			
Como algoritmo.	Cuando realizan tareas de Matemáticas.	A través de la autocomprobación.	Los dedos
6 de 12	8 de 12	9 de 12	9 de 12
Como secuencia numérica.	Cuando realizan actividades de compra-venta de artículos y en el registro de ahorros personales.	A través de la memoria: aprendizaje de resultados correctos.	La mente
5 de 12	4 de 12	2 de 12	1 de 12
Como agrupamiento y des agrupamiento de una cantidad de dinero.		A través del intercambio de estrategias de conteo entre pares: construcción social del conocimiento.	La calculadora
1 de 12		1 de 12	1 de 12
			La tabla pitagórica
			1 de 12

Figura 2. Resultados de los estudiantes respecto a conceptos, usos, formas y recursos para contar.

Reflexiones y prospectiva

Los hallazgos de investigación expresados en este reporte, muestran los aspectos cruciales que fundamentan un programa educativo basado en la formalización de competencias matemáticas. Estos son resultado de observaciones recurrentes y sistematizadas en un protocolo de investigación, las cuales han arrojado aspectos relevantes que inciden, alteran o moldean los aspectos sociocognitivos que se modelan en un aula escolar de primaria. De esta forma, los juicios de valor que se jerarquizan y ponderan en estas líneas, se fundan en procesos de análisis formal y reflexión recurrente para orientar, reorientar y retroalimentar perspectivas investigativas. Tal proceso implicó haber analizado, comprendido y valorado el objeto estudiado con detenimiento para su comprensión, seleccionando necesariamente los aspectos teóricos y metodológicos para obtener las evidencias empíricas que dan muestra de los logros obtenidos y abren otros objetos de investigación posibilitando nuevas interrogantes que pudieran definir de manera más certera y amplia los elementos que puedan dar explicación a nuevos fenómenos de la matemática educativa orientados a las representaciones sociales. (Véase figura 3 y figura 4).

Figura 3. Representación gráfica propia de una niña de primaria.

Figura 4. Representación que hace la misma estudiante hacia el sexo opuesto.

La figura 5 muestra las ideas que tiene un niño sobre la acción de contar, expresando la necesidad de interactuar con el otro a través de la negociación de significados matemáticos contextualizados en escenarios de compraventa.

Figura 5. Representación del propio uso social del conteo.

Conclusiones

En la escuela primaria examinada, escenario de investigación donde se reconoció de forma parcial el uso social del conteo, fueron los profesores quienes apreciaron esta actividad como parte fundamental en el desarrollo de las operaciones intelectuales implicadas en el desarrollo progresivo del número natural como el caso de la seriación, la clasificación y la correspondencia tal como se esperaba por parte de estos actores. La TSME sienta bases didácticas para pensar en una transformación de la práctica docente en esta institución, por lo que, a través de charlas informales, se atenderá la profesionalización, desde el enfoque sociocultural y humanista guardando congruencia con el nuevo modelo educativo que entrará en vigor para el ciclo escolar 2018-2019. Esto ofrecerá la oportunidad de posicionarse como docente reflexivo que argumenta los principios que inspiran sus acciones de enseñanza y que adecua sus estrategias cuando lo reconoce pertinente.

Con respecto a la perspectiva de género y su relación con el conteo, es una línea de aplicación y generación del conocimiento a desarrollar con mayor profundidad, a fin de dar cuenta de las condiciones de inequidad o equidad en que se lleva a cabo esta actividad matemática acompañada de factores de exclusión-inclusión educativa.

La intención de la promoción de una cultura matemática escolar para democratizar su enseñanza, a través de la incorporación de escenarios numéricos contextualizados y variados, es incitar la conformación de una comunidad educativa cuyo eje rector sea la problematización del conocimiento para su construcción.

En los estudiantes de primaria se reconoce la necesidad de construir un concepto amplio del conteo y su utilidad fuera del contexto escolar, desde su cotidiano y con los actores sociales que les rodean, quienes establecen interacciones significativas con ellos, destacando el importante papel que juegan los ambientes de aprendizaje centrados en quien aprende, sean de tipo lúdico o virtual, pero siempre y cuando respondan a los fines de la educación en cuanto al logro de los aprendizajes esperados.

La institución educativa estudiada reconoció la necesidad de implementar en su centro de trabajo estímulos docentes a aquellos que demuestren hacer un uso extendido del conocimiento matemático, con base en evidencias de aprendizaje basadas en los resultados obtenidos de evaluaciones internas, encuestas de satisfacción por parte de los niños y padres de familia, las estrategias diversificadas que ejecuten en su trabajo docente, con la intención de dar seguimiento puntual a su desarrollo profesional, tomando en cuenta las propuestas e iniciativas pedagógicas que surjan en colegiados del Consejo Técnico Escolar o las reuniones extraordinarias convocadas por la institución escolar, como seminarios permanentes. El desafío, por parte de la escuela primaria mexicana, consiste pues en la elaboración de instrumentos pertinentes que permitan a las autoridades de cada plantel establecer criterios de pertinencia, equidad, eficacia, eficiencia y relevancia respecto del trabajo docente con contenidos matemáticos. Así como la transposición didáctica que se logre al respecto para la construcción de directrices claras que guíen el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los hallazgos enfrentados en este proceso de investigación permiten cavilar la configuración de un espacio escolar que admita la resignificación del conteo por parte de los involucrados que tienen participación social en el espacio educativo como lo son profesores, directores, subdirectores, estudiantes, exalumnos, padres de familia y habitantes de la comunidad que impactan directa e indirectamente en la formación de los niños, a través del planteamiento de prácticas innovadoras. De esta manera, se amplían los horizontes del pensamiento lógico matemático con la única intención de acoger una perspectiva pedagógica de aula extendida, como una alternativa posible para la población estudiantil que se enfrentará a la necesidad de dar solución a problemas cada vez más complejos en los grados y niveles educativos subsecuentes. Se reconoce, en este tenor, la relevancia de trabajar en pro de la conformación de comunidades de aprendizaje en las que prive la inclusión y la equidad, custodiando la construcción social del conocimiento aritmético, de manera que, como se evidencia en este reporte han sido considerados los aportes de los actores involucrados en la formación de los alumnos, iniciando con los de dichos alumnos y profesores en servicio, lo que ha permitido extraer un fragmento de la realidad escolar en que existe la matemática educativa.

Bibliografía y fuentes de internet

Bell, E. (1985). *Historia de las matemáticas* (2ª ed.). México: Fondo de cultura Económica.

Bourdieu, P. (1986). Code et codification. *Actes de la Recherche en Sciences Sociales, 64*(1), 40-44.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. (1ª ed.) España: Gedisa.

_____. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Tema: Educación Matemático & Desafíos y Perspectivas. Blumenau.

Cantoral, R. A, Montiel, G. y Reyes, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8* (8), 9-28.

_____. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 5-17.

Carballo, M.T. y Valdemoros, M. E. (2015). La formación inicial de la normal para la enseñanza del número natural. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28* (1), 1352-1359.

Cordero, F. (2015). *La ciencia desde el niño. Porque el conocimiento también se siente*. (1ª ed.). España: Gedisa.

Díaz Barriga, F. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. (3ª ed.) México: McGraw-Hill.

Duarte, J. (2003). Ambientes de aprendizaje: una aproximación conceptual. *Estudios Pedagógicos, 29*, 97-113.

Eisner, E. W. (1991). *The enlightened eye: qualitative inquiry and the enhancement of educational practice* (1ª ed.). New York: Macmillan.

Fennema, E. y Sherman, J. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: A further study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(3), pp. 189-203.

García, M. y Farfán, R.M. (2014). Actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27* (1), 163-170.

Gimeno, J y Pérez, A. (1989). *La enseñanza: su teoría y su práctica*. (3ª ed.). España: Akal.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26* (1), 1323-1330.

González, F. E. (2016). *La construcción del número natural: relaciones y operaciones intelectuales en situaciones didácticas*. Tesis de licenciatura. México: Escuela Normal La Salle/ Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales.

González, F. E. y Gaytán, F. (2015). La práctica docente en la aritmética: una mirada etnográfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28*(1), 1125-1132.

Gurdián, A. (2007). *El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa*. (1ª ed.) Costa Rica: Print Center.

Martínez, M. (2007). *Evaluación cualitativa de programas*. México: Trillas.

Mercado, R. y Luna, M. E. (2013). "Conocer a los niños es importante para enseñar", en *Saber enseñar: un trabajo de maestros. Análisis de la docencia en el aula y una propuesta para mejorarla*, México: SM/ Cinvestav, 22-27.

Miles, M. y Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis*. (2a ed.) USA: Sage Publication.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado. México: Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Patton Quinn, M. (1990). *Qualitative Research and Evaluation Methods*. (3a ed.) USA: Sage.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1967). *Génesis del número en el niño.* (3ª ed.) Argentina: Guadalupe.

Resnick, B. L. y Klopfer, E. L. (1989). La enseñanza de conceptos matemáticos. En *Currículum y cognición*. Argentina: Aique, 105-113.

Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. Boletim de Educação Matemática [en línea] [Fecha de consulta: 8 de febrero de 2017] Disponible en:<http://www.www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123019> ISSN 0103-636X

Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica: historia y cultura en los procesos educativos*. (1ª ed.) Argentina: Paidós.

Rodríguez-Arocho, W.C. (1999). El legado de Vygotski y de Piaget a la educación. *Revista Latinoamericana de Psicología, 31*(3), 477-489.

Ruíz, J. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. (5ª ed.) España: Universidad de Deusto Bilbao.

Sañudo, L. (2013). Una experiencia sobre la transformación de la práctica docente. En Entorno a la intervención de la práctica educativa. México: Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación, 94.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de Estudios Educación Básica*. (1ª ed.). México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2016). *Propuesta para la Educación Obligatoria* (1ª ed.). México: Secretaría de Educación Pública.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective* (1ª ed.). USA: Springer.

Avances
en la educación matemática
basada en la investigación

Se terminó de imprimir en diciembre de 2017
en los talleres de El Errante editor, S.A. de C.V.
ubicado en Privada Emiliano Zapata 5947,
col. San Baltazar, Puebla, Pue.

El tiraje consta de 200 ejemplares.