978-607-525-613-9

Este libro contiene resultados recientes de la investigación en Educación Matemática, los cuales tienen la intención de ser útiles tanto para los docentes de matemáticas de todos los niveles como para todos los interesados en esta área. Los autores que participaron en cada uno de los capítulos nos plantean propuestas y reflexiones que buscan mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas todas ellas apoyadas en una metodología rigurosa o en ideas bien fundamentadas. El contenido de este libro muestra algunos de los aportes a la Educación Matemática basados en la investigación.

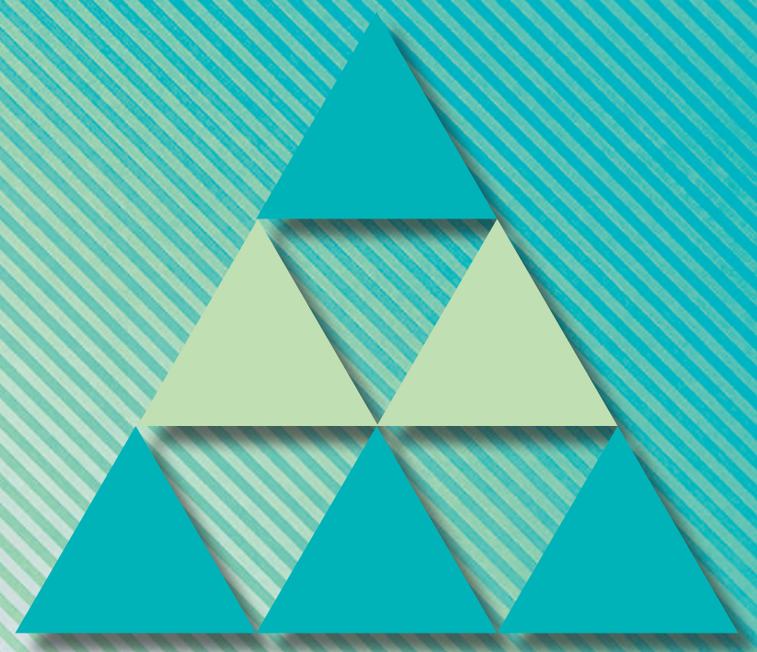
BUAP

Textos Científicos

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aportes a la educación matemática basados en la investigación

Aportes a la educación matemática basados en la investigación



Lidia Aurora Hernández Rebollar
Ileana Borja Tecuatl
Josip Slisko Ignjatov
José Antonio Juárez López
Editores

Aportes
a la educación matemática
basados en la investigación

Aportes a la educación matemática basados en la investigación

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Ileana Borja Tecuatl
Josip Slisko Ignjatov
José Antonio Juárez López

Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición: 2019

ISBN: 978-607-525-613-9

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. C.P. 72000
Teléfono: 01 (222) 229 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 1404, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. C.P. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00
ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx / dgp@correo.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Avenida San Claudio y 18 Sur, col. San Manuel,
Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. C.P. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx
dirección@fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • Rector: José Alfonso Esparza Ortiz • Secretario General: José Jaime Vázquez López • Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado: Ygnacio Martínez Laguna • Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez • Director General de Publicaciones: Hugo Vargas Comsille • Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas: Martha Alicia Palomino Ovando.

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Índice

Presentación 9

SECCIÓN 1
Propuestas reflexivas para la mejora de la educación matemática **11**

Capítulo 1
Promoviendo el diálogo y la creatividad en el aula de matemáticas 13
Javier Díez-Palomar

Capítulo 2
Hallazgos sólidos de la investigación en Educación Matemática: características, ejemplos y posible implementación 41
Mario Sánchez Aguilar

SECCIÓN 2
Propuestas para el uso de tecnología en la educación matemática **57**

Capítulo 3
Experimentación, modelación, simulación y el uso de GeoGebra en la formación matemática de profesoras de telesecundaria 59
Alberto Santana Ortega, Ana Luisa Gómez-Blancarte

Capítulo 4
Importancia de procesos cognitivos instrumentados
en la enseñanza de las matemáticas 79
François Pluvinage

SECCIÓN 3
Importancia de las emociones
de los profesores de matemáticas 97

Capítulo 5
El modelo del conocimiento especializado para
la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas 99
María del Socorro García González, María Isabel Pascual Martín
José Carrillo Yánez, Gustavo Martínez Sierra
Capítulo 6
El conocimiento emocional y el acompañamiento docente 121
Josué Ramos Silverio, María del Socorro García González

SECCIÓN 4
Propuestas y resultados de intervenciones
didácticas en el aula de matemáticas 141

Capítulo 7
Desarrollo de estrategias metacognitivas en estudiantes
universitarios y su efecto en el razonamiento lógico 143
Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, Josip Slisko Ignjatov
Capítulo 8
Diseño de actividades para iniciar el estudio
de las fracciones en educación primaria 161
Carlos Valenzuela García, María S. García González,
Alicia Nájera Leyva

Presentación

Es un gran gusto para nosotros ofrecer a usted el tercer libro emanado del IV Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación. Cada uno de los capítulos fue presentado en el Taller y sometido a un proceso de arbitraje doble ciego por parte de especialistas en la educación matemática; a todos ellos extendemos nuestra gratitud.

Este libro contiene propuestas fundamentadas en investigaciones teóricas o del aula, las cuales hemos dividido en cuatro secciones; cada sección tiene dos capítulos. La primera sección contiene reflexiones teóricas; en su capítulo uno se aborda el concepto *creatividad matemática* con ejemplos que ilustran cómo "el análisis didáctico permite detectar aspectos propios de la creatividad, que tienen potencial para la mejora de la actuación del maestro de matemáticas". En el capítulo dos las reflexiones son acerca de los hallazgos sólidos de la investigación en educación matemática. La sección 2 está dedicada al uso de la tecnología para la mejora de la educación matemática que contiene a los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 los autores reportan una experiencia con el uso de GeoGebra en profesoras de telesecundaria, y en el número 4 el autor reporta varios ejemplos del uso de las TIC en la educación matemática, así como algunas reflexiones sobre los procesos cognitivos instrumentados. La tercera sección es sobre las emociones de los profesores de matemáticas, y contiene a los capítulos 5 y 6. En el primero de ellos los autores reflexionan sobre la relación entre el conocimiento especializado del profesor y sus emociones; en el segundo, los avances de una propuesta de acompañamiento docente para regular las

emociones de profesores de matemáticas. Finalmente, la cuarta sección nos ofrece, en el capítulo 7, una experiencia didáctica en el nivel superior que buscó favorecer la metacognición en la actividad de resolución de problemas, y, en el capítulo 8, una propuesta para el diseño de actividades para el estudio de las fracciones en primaria.

Por lo que se refiere a las cuatro secciones que conforman este libro cubrimos cuatro líneas sobresalientes de la investigación en la educación matemática: la teoría, la tecnología, las emociones y el trabajo en el aula. Con estas aportaciones deseamos contribuir al conocimiento del profesor de matemáticas de los niveles básico y medio superior, principalmente, pero también podrían ser útiles para los del nivel superior.

Asimismo, como en los dos libros anteriores, en este trabajo contamos con la participación tanto de investigadores de una larga y reconocida trayectoria como de algunos que se inician en este campo. Todos ellos nos aportan valiosas e interesantes reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Esperamos que usted como lector comparta nuestra opinión sobre estos trabajos y se interese por experimentar con ellos en sus grupos. Agradeceremos nos comparta su impresión.

Los investigadores que nos acompañaron en el arbitraje de los trabajos que aquí se presentan son Gabriela Buendía Abalos, Gisela Camacho Espinoza, Erika Canché Góngora, María Teresa Dávila Araiza, Judith Alejandra Hernández Sánchez, José Marcos López Mojica, Nielka Rojas González, César Romero Félix, Patricia Rosas Colín, José Trinidad Ulloa Ibarra, Diana Vasco Mora y Santiago Ramiro Velázquez Bustamante.

A todos ellos nuestro reconocimiento y gratitud.

Atentamente

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Ileana Borja Tecuatl
Josip Slisko Ignjatov
José Antonio Juárez López

H. Puebla de Z., a 15 de octubre de 2018

SECCIÓN 1

Propuestas reflexivas para la mejora de la educación matemática

Capítulo 1
Promoviendo el diálogo y la creatividad en el aula de matemáticas

Javier Díez-Palomar
Universidad de Barcelona

Resumen

Muchas veces, a las personas que nos dedicamos a la investigación, las autoridades educativas nos demandan aportar evidencias científicas contrastadas sobre las que puedan fundamentarse las decisiones que se toman. Actualmente, el debate científico internacional está haciendo una llamada hacia la investigación responsable y con impacto social, que realmente sirva para ofrecer conocimiento contrastado válido y que contribuya a resolver las demandas sociales en ámbitos como la educación, la sanidad, el empleo, etcétera. En nuestro caso, el reto es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello, un aspecto clave señalado desde hace ya varias décadas (Shulman, 1987) es el desarrollo profesional del profesorado.

En este capítulo se exponen algunas reflexiones en torno al concepto de *creatividad matemática*, en el marco de una investigación I+D+i. Los ejemplos que se muestran ilustran cómo el análisis didáctico (que es una de las competencias profesionales clave del maestro) permite detectar aspectos propios de la creatividad, que tienen potencial para la mejora de la actuación del maestro de matemáticas.

Palabras clave (3-5): creatividad matemática, idoneidad didáctica, desarrollo profesional del docente de matemáticas.

Este capítulo es resultado de una charla en el TEMBI (Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación) al que fui invitado por el profesor Josip Slisko de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México, el cual se enmarca dentro de una investigación financiada por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad dentro del Programa Nacional de I+D+i de España, titulada *Desarrollo y Evaluación de la Competencia en el Análisis Didáctico en la Formación Docente Previa al Servicio en Educación Matemática Elemental y Secundaria* (ref. EDU2015-64646-P), dirigida por mí mismo y por el profesor Vicenç Font.

El objeto de este estudio es encontrar formas de ayudar a los maestros y a las maestras de matemáticas a fomentar el pensamiento creativo de sus estudiantes, de ayudarles a incentivar la creatividad, la curiosidad de hacer preguntas, identificar diferentes respuestas adecuadas a un problema, utilizar diferentes estrategias para resolverlo. Eso se hace a través del desarrollo de la competencia de análisis didáctico, dentro del marco del desarrollo profesional del docente de matemáticas.

A lo largo de las páginas siguientes se discute el tema de la creatividad en el contexto de diversas investigaciones desarrolladas en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. La creatividad matemática no es un constructo fácil de aprehender. Intuimos cuándo una respuesta, o un trabajo matemático, es o no creativa. Sin embargo, hay tantas y tantas definiciones diferentes de creatividad, que resulta complicado referirse a este concepto (Mallart, Font, & Díez, 2018). En este capítulo se ofrece una posible aproximación a este tema tan importante, tanto en la aplicación de las matemáticas a nuestra vida cotidiana, como en su aprendizaje. Currículos de todo el mundo destacan la noción de *conexiones*, como un aspecto central del desarrollo de una cierta idea de *comprensión matemática*. Parece que, para ser competente matemáticamente hablando, es preciso ser capaz de utilizar las matemáticas (los objetos matemáticos) en diversos contextos, situaciones, de manera ágil, pero también crítica, sin precipitarse ya que muchas veces la premura en la respuesta puede conducir a conclusiones erróneas. Buscar "caminos alternativos" no hollados puede ser una forma de expresión de esa competencia matemática, de manera que las conexiones se convierten en una especie de "indicador" que nos avisa cuando se están dando las condiciones para que la *creatividad* haga acto de presencia.

Este capítulo, además, también pretende ser una aportación a la formación del profesorado de matemáticas. Por ese motivo, el debate mencionado se va a situar dentro de la línea de la formación del profesorado. Los futuros maestros y maestras de matemáticas tienen en sus manos la responsabilidad y la oportunidad de ayudar a niños y niñas a desarrollar su capacidad matemática. Es preciso que sean capaces de identificar la creatividad y potenciarla para que los niños y las niñas puedan llegar a desarrollar todo el potencial que tienen para las matemáticas. Por eso, un capítulo como este es una tremenda ocasión para ejercer esa responsabilidad que tenemos como investigadores y como formadores de futuros maestros y de futuras maestras, de darles contribuciones validadas por la comunidad científica internacional.

Paso pues a desarrollar las diferentes secciones de este capítulo. En primer lugar, se hace una exposición de algunos antecedentes sobre el tema que aquí se toman como referente. Después, se argumenta sobre la necesidad de basar cualquier iniciativa de formación del profesorado en una educación con bases científicas, basada en actuaciones educativas de éxito (Flecha, 2014). Después se habla sobre la importancia que tienen las interacciones como herramienta fundamental para el aprendizaje, que para ilustrar este tipo de enfoque se usan algunos ejemplos en el caso de la didáctica de las matemáticas. Después se destacan contribuciones o reflexiones esenciales para la orientación del desarrollo profesional docente de matemáticas. Finalmente, se cierra el capítulo con algunas consideraciones finales.

Introducción: El desarrollo profesional del profesorado de matemáticas

El desarrollo profesional del profesorado de matemáticas hunde sus raíces en el conocido trabajo que Lee Shulman realizó a comienzos de la década de los ochenta. En *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching,* Shulman se hace preguntas fundamentales para una persona que quiere aprender a ser maestro: ¿De dónde salen las explicaciones que da el maestro o la maestra en clase? ¿Cómo deciden qué enseñar, cómo representarlo, cómo plantear ese contenido a los estudiantes, y hacerles preguntas sobre él? ¿Cómo hacer frente a las concepciones erróneas que puedan tener los

y las estudiantes? Todas éstas son preguntas esenciales que, cualquiera que quiera convertirse en maestro o en maestra de matemáticas seguramente, se hará cuando se vea en la situación de tener que impartir clases. Shulman, en su artículo, se quejaba de que la investigación se había ocupado mucho de cómo los y las estudiantes aprenden, pero poco del conocimiento profesional del docente. Por eso, su trabajo, el programa de investigación *Knowledge Growth in Teaching,* fue pionero en ese sentido.

El concepto más conocido que nos ha dejado el *pedagogical content knowledge* (conocimiento pedagógico del contendido), PCK en sus siglas en inglés, fue revolucionario en su momento, porque hizo evidente que los profesionales de la educación no solo tienen que conocer la materia que están enseñando, sino que también tienen que tener conocimiento de un cierto saber, propio de la tarea de *enseñar*, y que diferencia la profesión docente de cualquier otra profesión del mundo. ¿Qué es lo que un maestro hace específico, y que le distingue de aquello que define a un carpintero, y que podemos reconocer con solo una mirada? En palabras del propio Shulman, el PCK es aquello que es único para los maestros, es la base de su conocimiento.

Pero, ¿qué es conocimiento? Shulman (1986) distinguió de manera muy precisa entre diferentes tipos de conocimiento. Por un lado, tenemos aquello que los maestros y las maestras hacen y usan para enseñar (las ilustraciones, las analogías, las metáforas, las explicaciones, las demostraciones, etcétera). Por otro lado, también son "conocimiento" las ideas, preconcepciones, incluso a veces errores conceptuales, que tienen los y las estudiantes. Y, además, también es conocimiento el propio contenido a ser enseñado. En una mirada más detallada, el conocimiento del maestro y de la maestra de matemáticas incluye:

a) Conocimiento pedagógico general
b) Conocimiento del contenido
c) Conocimiento pedagógico del contenido

La influencia que ha tenido el trabajo de Shulman es incontestable. Después de él, cada grupo de investigación posterior ha continuado detallando más y más la idea de conocimiento del profesor, dando lugar a múltiples categorías y subcategorías del *content knowledge* (CK) y del PCK, así como de las relaciones que se establecen entre los diferentes "conocimientos" (Ball,

Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008). En 1992, Fennema y Franke, también preocupadas por clarificar cuáles son los componentes del conocimiento de los maestros y de las maestras de matemáticas, distinguieron entre:

a) Conocimiento de matemáticas
   a. Content knowledge
      i. La naturaleza de las matemáticas
      ii. La organización mental del conocimiento del maestro
b) Conocimiento de las representaciones matemáticas
c) Conocimiento de los estudiantes
   a. Conocimiento de las cogniciones de los estudiantes
d) Conocimiento de la enseñanza y de la toma de decisiones

Una de las principales ideas de las dos investigadoras fue mostrar que si un/a maestro/a de matemáticas no es capaz de "traducir" las abstracciones de la matemática *formal* a una forma que los estudiantes puedan entender, entonces no lograrán nunca que puedan aprender con comprensión. Para Fennema y Franke lo crucial es el conocimiento que puedan tener los maestros y las maestras para tomar la decisión "correcta." En cualquier caso, para tomar la decisión "correcta" hay que tener en cuenta tanto el conocimiento del contenido matemático, como el conocimiento de los estudiantes y la manera de enseñar, tal y como Shulman ya había dicho con su propuesta, unos años antes. Los trabajos posteriores no han hecho sino confirmar y consolidar ambos componentes, como aspectos fundamentales que explican el "buen hacer" de los buenos docentes de matemáticas (An, Kulm, & Wu, 2004; Grouws & Schultz, 1996; Kahan, Cooper, & Bethea, 2003; Parker & Heywood, 2000).

En 2004, el trabajo que publicaron Hill, Schilling y Ball dio por primera vez resultados empíricos sólidos que permitían afirmar claramente que es posible separar las diferentes formas de conocimiento (CK *vs* PCK) de los maestros y maestras de primaria. Algo que, en secundaria, según Matthews (2013), ocurriría en 2008 gracias al trabajo de Krauss, y sus colaboradores.

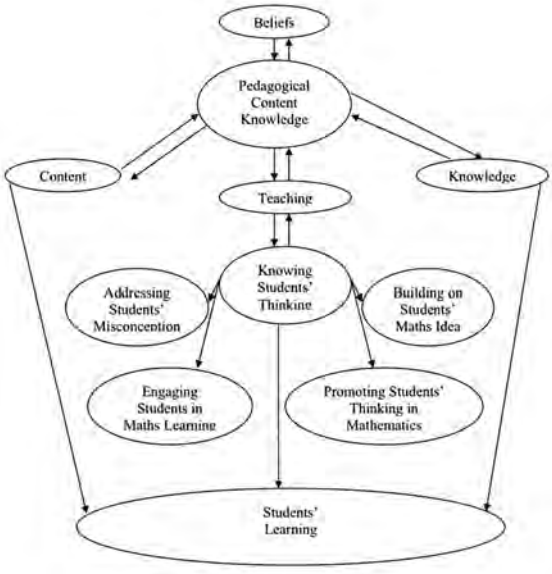


Figura 1. Componentes del PCK, de acuerdo con Turnuklu y Yesildere (2007, p. 3), adaptado por An, Kulm y Wu 2004, p. 147.

Estudios posteriores han ido añadiendo o detallando más el modelo original de Shulman (véase fig. 1), comparando el CK y el PCK a través de los currículos de diferentes países (An, Kulm & Wu, 2004).

Frente a este enfoque, en los últimos años, han surgido otras propuestas interesantes que están ganando terreno. Es el caso del llamado *noticing* (Mason, 2002). Este concepto se refiere a una manera de hacer del docente, cuando está atento/a a qué hace el estudiante, cómo responde, qué escribe en su cuaderno, qué regularidades se pueden observar en sus respuestas. Todo ello ofrece información valiosa al docente para "notar" (percatarse) de cómo está aprendiendo y comprendiendo las matemáticas el estudiante. En libros como *Researching your own practice: The discipline of noticing* (Mason, 2002) o *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011) podemos encontrar indicaciones valiosas de cómo orientar al profesorado en el ejercicio del *noticing*, puesto que para percibir detalles sobre cómo el estudiante está (o no) comprendiendo los conceptos matemáticos que se le presentan en el aula, es necesario que tenga tanto una base de conocimiento matemático, como

la capacidad de reconocer las conexiones entre los diferentes conceptos y cómo las diferentes "piezas" o "trozos" de un concepto matemático que aparecen en el trabajo o en el discurso del estudiante sugieren si es, o no, capaz de reconocer el conjunto y cómo está interrelacionado.

Otro enfoque conocido es el *Lesson Study*. Desarrollado por Yoshida (1999), se ha ido implantando en diversos lugares del mundo (Anhalt, Ward, & Vinson, 2006; Fernández & Yoshida, 2012). Se trata de un enfoque reflexivo, en el que los maestros y las maestras de matemáticas graban sus clases de matemáticas, y luego las visualizan en grupos de trabajo con otros maestros y maestras, para discutir cómo mejorar sus prácticas, a fin de mejorar el diseño y la planificación de las tareas en el aula.

En el caso que aquí voy a exponer, el camino que tomo es el desarrollado por Juan D. Godino y sus colaboradores, denominado *Enfoque Ontosemiótico* (EOS), desde mi mirada personal basada en el *Aprendizaje Dialógico* y el trabajo desarrollado por CREA (Community of Research on Excellence for All), de la Universidad de Barcelona.

Éste enfoque es integrador porque toma elementos de diferentes teorías de la didáctica de las matemáticas, así como de otras disciplinas como la sociología, la psicología del aprendizaje, etcétera. El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos, tal y como afirman sus principales creadores (Godino, Batanero, & Font, 2007). A partir de situaciones-problema, los autores definen una serie de conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con la finalidad de realizar el análisis tanto del contenido matemático, como de su conocimiento y la interdependencia que se establece entre ambos aspectos. Se trata de un enfoque amplio, que dispone de diversas herramientas que resultan de utilidad al maestro para analizar y comprender lo que sucede en el aula cuando los estudiantes trabajan en la práctica matemática (definida como toda actuación o expresión realizada por una persona para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida, validarla y/o generalizar a otros contextos o problemas), tal y como escriben Godino, Batanero y Font (2007). En este enfoque se distingue por un lado entre los significados personales que atribuyen los estudiantes a los objetos matemáticos que aparecen en la práctica de la matemática, y por otro los significados institucionales, que están impregnados en dichas prácticas. El aprendizaje se define como una especie de dialéctica entre ambos tipos de

significados (como una suerte de lucha entre lo que entiende el estudiante, y lo que la institución, la escuela, quiere transmitir y que aprendan).

Una de las propuestas centrales del EOS, y que nos resulta de especial interés, es la categorización en seis facetas de lo que los creadores del enfoque denominan *Idoneidad Didáctica*. Se trata de un constructo muy útil para ayudar a los maestros y a las maestras a desarrollar su competencia de análisis didáctico. La idoneidad didáctica se representa como un hexágono irregular, en cuyos vértices encontramos seis componentes (o facetas): interaccional, ecológica, mediacional, epistémica, cognitiva, y emocional. Todas ellas se refieren a un aspecto característico que afecta al proceso de aprendizaje (véase fig. 2). Cada componente se encuentra sobre un eje, donde pueden ubicarse tres "estados" o "medidas" (alta, media o baja), de acuerdo a si se detecta un grado bajo, medio o alto de idoneidad en la práctica matemática que se está analizando. El resultado es un hexágono irregular, que es la "huella" del fenómeno que estemos analizando en ese momento (la trayectoria de aprendizaje, la práctica matemática, la secuencia didáctica, etcétera).

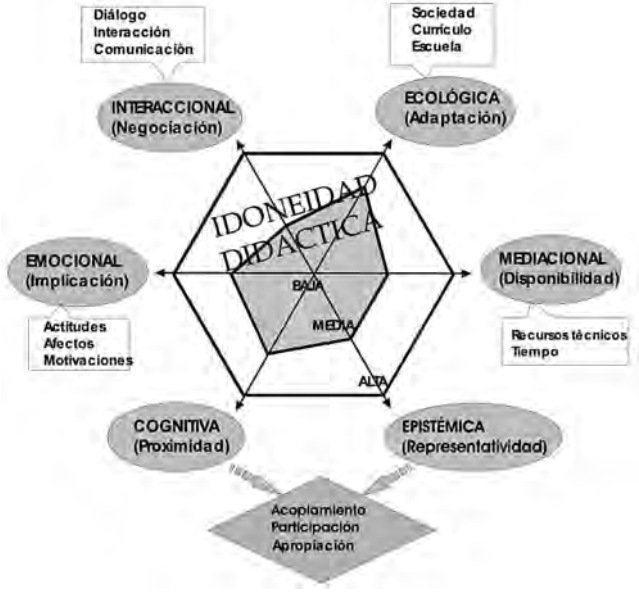


Figura 2. Componentes del constructo de idoneidad didáctica desarrollado por Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006, p. 6.

La creatividad matemática

La creatividad matemática es un concepto difícil de definir. Seguramente somos capaces de percibir cuándo un estudiante es o no es creativo en sus respuestas a un problema matemático, o a una tarea concreta. Pero lo cierto es que existen tantas definiciones sobre la idea de creatividad matemática, que es imposible encontrar una que esté aceptada como única de manera unánime (Mann, 2006; Mallart, Font, & Díez, 2018). En el estudio sobre el que baso este escrito decidimos utilizar una definición fundamentada en la idea que usaba Henry Poincaré, uno de los matemáticos clásicos aceptado como uno de los máximos representantes de esa idea de "creatividad". El matemático francés es, quizás, uno de los que mejor ha sabido hacernos comprender lo que quiere decir "ser creativo en matemáticas". No solo por la genialidad de sus trabajos, sino también por cómo los presentaba. En uno de sus libros más conocidos, *The Foundations of Science. Science and Hypothesis,* Poincaré (1921) escribió:

> In fact, what is mathematical creation? It does not consist in making new combinations with mathematical entities already known. Anyone could do that, but the combinations so made would be infinite in number and most of them absolutely without interest. To create consists precisely in not making useless combinations and in making those which are useful and which are only a small minority. Invention is discernment, choice.

De acuerdo con el matemático francés, la creatividad es algo nuevo, una nueva forma de usar objetos matemáticos que ya se conocían, pero que dan lugar a algo que antes no se había visto, o no se había hecho. Por ejemplo, la demostración "sin palabras" de Claudi Alsina ilustra esta idea de combinar elementos conocidos, pero desde un enfoque original (nuevo). En la conferencia *Imatges per entendre millor les matemàtiques. Demostracions visuals sense paraules*, Alsina explora diferentes posibilidades que ofrece la visualización para demostrar y explicar diferentes teoremas clásicos de las matemáticas, como es el caso de la suma de los *n* primeros enteros positivos:

$$(1)\ 1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

De acuerdo con una conocida anécdota, el descubrimiento de esta fórmula la debemos a Carl F. Gauss. Siendo todavía un niño, Gauss sorprendió a su maestro al resolver de manera inesperada la suma de los primeros cien números enteros. El joven Gauss razonó que si sumaba pares de números comenzando por los dos extremos de la serie (1+100, 2+99, 3+98…) siempre obtenía el mismo resultado (101). Como la serie tenía un total de cien números, eso quería decir que, si los tomaba a pares iba a realizar un total de cincuenta sumas. Por tanto, si multiplicaba 101 por 50 (que sale de 100 entre 2), obtenía de manera rápida y eficaz el resultado que estaba buscando el maestro. Existen diferentes demostraciones de este razonamiento. Pero Alsina recurre a una demostración "sin palabras" utilizando una representación visual para el caso de n=7 (véase Figura 3).

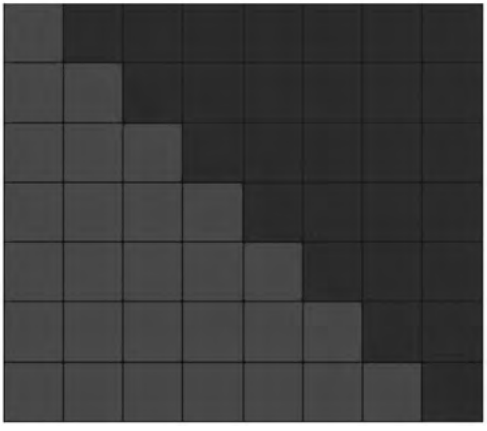
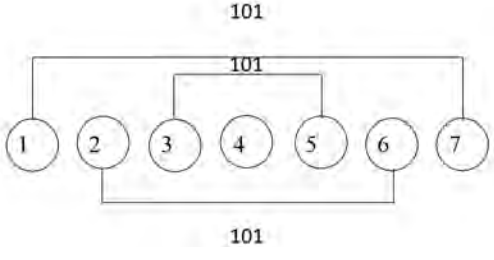


Figura 3. Demostración "sin palabras" de Claudi Alsina
de la suma de los primeros siete números naturales.

Al sumar los primeros 7 números, siguiendo el método de Gauss, obtenemos:



Es decir: (1+7)+(2+6)+(3+5)+4, que nos da como resultado 28. Si aplicamos la fórmula general (1) al caso particular de n=7, entonces:

$$(2)\ 1+2+\cdots 7=\sum_{i=1}^{n}\frac{7(7+1)}{2}=28$$

Sobre el rectángulo representado en dos colores en la Figura 3, *n* (7) corresponde con los siete cuadrados verdes del lado izquierdo del rectángulo; *n+1* (7+1) aparece representado en los siete cuadrados de color púrpura del lado superior del rectángulo, más el cuadrado verde que completa dicho lado. La división entre dos queda marcada por la diagonal que establece la frontera entre ambos colores. Al contar los cuadrados verdes, o los cuadrados púrpuras, el número total obtenido (en ambos casos) es 28. No solo demuestra la fórmula, sino que aparece el principio de simetría implícito en la misma, de manera *natural*.

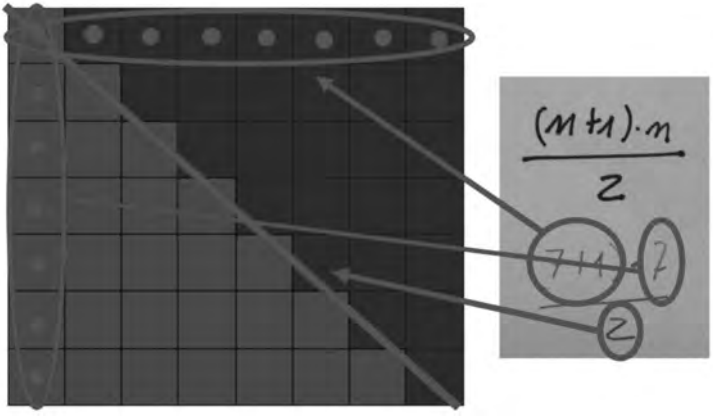


Figura 4. Explicación de la demostración "sin palabras" de Claudi Alsina.

Tal y como decía Poincaré, la creatividad a veces puede parecer que actúe de manera "inconsciente", pero siempre es resultado de un trabajo intenso marcado por el esfuerzo. Es necesario que existan los objetos matemáticos que el estudiante va a ser capaz de conectar de manera original. Pero sin dichos objetos, y sin un trabajo previo, es muy difícil que se creen las condiciones para que la creatividad "emerja."

> There is another remark to be made about the conditions of this unconscious work: it is possible, and of a certainty it is only fruitful, if it is on the one hand preceded and on the other hand followed by a period of conscious work. These sudden inspirations (and the examples already cited sufficiently prove this) never happen except after some days of voluntary effort which has appeared absolutely fruitless and whence nothing good seems to have come, where the way taken seems totally astray. These efforts then have not been as sterile as one thinks; they have set agoing the unconscious machine and without them it would not have moved and would have produced nothing (Poincaré, 1921).

Nadjafikhah, Yaftian y Bakhshalizadeh resumen varias definiciones de creatividad matemática en cuatro conceptos principales:

a) La habilidad de producir trabajo original que extiende de manera significativa el conocimiento (que también incluye síntesis significativas del conocimiento ya conocido, así como la extensión de nuevas ideas).
b) La habilidad de abrir nuevos enfoques a nuevas preguntas.
c) El proceso que da como resultado respuestas novedosas, originales, a un problema dado.
d) La formulación de nuevas preguntas y/o posibilidades que permiten que un problema ya conocido sea observado/estudiado desde ángulos nuevos.

Por otro lado, Mallart, Font y Díez (2018) distinguen diferentes definiciones según se refieran al resultado final o bien según si se enfocan sobre el proceso de resolución. Así, entre las primeras cabe destacar:

a) La capacidad para crear un procedimiento inesperado (Sternberg & Lubart, 2000)
b) La capacidad excepcional para crear soluciones útiles y originales a un problema (Chamberlin, 2005)
c) La originalidad del resultado (Sriraman, 2009)

En cambio, si el punto de mira se sitúa más sobre el proceso que conduce a la respuesta, entonces la *creatividad matemática* se puede definir como:

d) Habilidad para pensar basándose en conceptos, incluyendo: originalidad, flexibilidad, elaboración, análisis, síntesis, comunicación y redefinición (Mallart & Deulofeu, 2017).

Desde la didáctica de la matemática la *creatividad* se ha asociado con mucha frecuencia al enfoque del *problem solving*. Los estudiantes, cuando resuelven problemas, pueden ser creativos o bien en sus respuestas, o bien (y con más frecuencia) en cómo llegan a ellas. Chamberlain y Moon (2005) afirman que la creatividad surge cuando alguien soluciona un problema de una manera inesperada (no estándar). No se trata de un tema nuevo. Maier (1970) ya realizó estudios para identificar elementos de creatividad en las soluciones que varios estudiantes hacían sobre baterías de problemas. Silver (1997) apuntó que la creatividad podría ser un componente que asociáramos no solo al "genio", sino un aspecto deseable que podría llegar a ser usado por el profesorado de matemáticas para ayudar a sus estudiantes a desarrollar su competencia matemática. Usando tareas "enriquecidas" los maestros y las maestras pueden incrementar la capacidad de sus estudiantes para usar las matemáticas de manera fluida, flexible, e innovadora.

El investigador estadounidense sugiere que el *problem posing* es también un enfoque particularmente provechoso para incentivar el desarrollo de la creatividad de los y las estudiantes (Silver, 2013). Trabajos posteriores han ahondado más en esta idea (DeHaan, 2009; Yuan & Sriraman, 2011) sugiriendo que el hecho de "inventar problemas" supone un reto incluso más desafiante para los y las estudiantes, que tienen que poner en juego una comprensión más profunda de los objetos matemáticos, de sus propiedades y de cómo se conectan unos a otros. De acuerdo con Silver y Cai (1996), la presentación de problemas implica la formulación de nuevos problemas y la reformulación de situaciones dadas. Para ello es necesario una cierta dosis de originalidad (creatividad). En el caso que hemos visto antes sobre demostraciones "sin palabras", de Alsina, preguntas tales como "¿se puede aplicar el método de resolución igual si la serie contiene un número par que un número impar de miembros?" puede abrir la puerta a nuevas formulaciones, que tienen el potencial de poner en situación al estudiante a pasar al término general de la suma de una serie aritmética de n miembros.

$$(3)\ S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

O lo que es lo mismo:

$$(4)\ S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2} \cdot n$$

En cualquier caso, la *creatividad matemática* tiene que ver con el razonamiento y con cómo las personas realizamos conexiones entre diferentes objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, propiedades, etcétera) expresados a través de formas de representación (aritméticas, algebraicas, geométricas, analíticas, etcétera). Desde el punto de vista educativo, poner el énfasis en la *creatividad matemática* nos ofrece una oportunidad de animar a los estudiantes a que establezcan dichas conexiones, y que las usen de manera competente para resolver problemas y encontrar soluciones a preguntas.

Discusión de un ejemplo didáctico

Existe una extensa literatura sobre el razonamiento (Chalmers, 2000) y la necesidad de atender a las formas de argumentación que realizamos las personas como vía privilegiada para comprender cómo se producen dichos procesos de razonamiento a nivel cognitivo. Tal y como afirma Harada (2009), un razonamiento es básicamente una relación de consecuencia entre portadores de verdad (juicios, proposiciones, oraciones o enunciados) tal que unos (premisas) apoyan la verdad de otro (conclusión). Los argumentos son los conjuntos de actos lingüísticos y no lingüísticos por medio de los que se busca persuadir, convencer o resolver desacuerdos entre las personas. Los actos comunicativos (por ejemplo, el habla) son los indicadores que podemos usar para tratar de comprender los razonamientos (Díez-Palomar & Cabré, 2015; García-Carrión & Díez-Palomar, 2015), puesto que integran diferentes argumentos (ya sea de manera que se puedan verificar, o bien atendiendo a un principio de legitimidad basado en la posición de "poder" de quien emite el argumento).

El caso del problem solving: Los mensajes de WhatsApp

Este tipo de argumentaciones se pone en juego cuando resolvemos problemas, y el maestro o la maestra tendrían que ser capaces de identificar las diferentes facetas de la práctica (tal y como se explicitan en la herramienta

de la idoneidad didáctica a la que me he referido más arriba), para estar en condiciones de acompañar a los y las estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas.

Durante la ponencia presentada en la BUAP, se recurrió al estudio de casos para ilustrar diferentes tipos de argumentaciones.

En el ejemplo que voy a usar aquí para ilustrar mi discusión, la pregunta generadora de la actividad fue "¿cuántos mensajes de WhatsApp se han enviado el día de hoy en Puebla?". Los datos que se usaron para ejemplificar el tipo de argumentaciones que suelen utilizar los estudiantes corresponden a una actividad similar, realizada en una ciudad del área metropolitana de Barcelona, con estudiantes para maestros y maestras a quienes se les hizo la misma pregunta (únicamente cambiando el nombre de la ciudad, de Puebla a Barcelona, para *situar* la actividad en su contexto cotidiano). Los y las estudiantes trabajaban en grupos reducidos (4 o 5 personas). La siguiente figura muestra la respuesta de uno de los grupos:

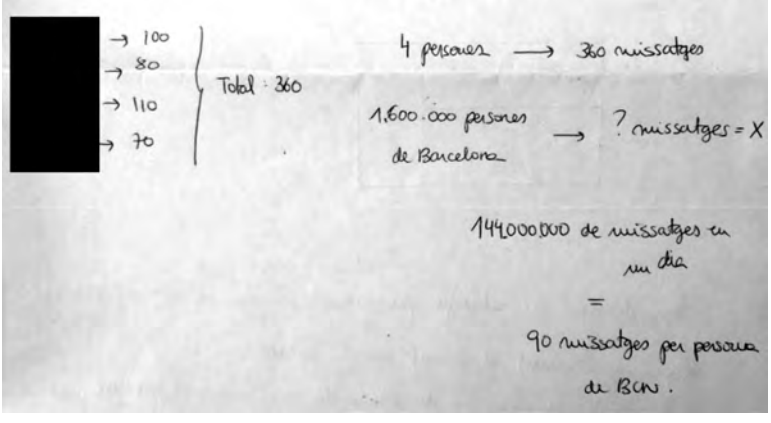


Figura 5. Respuesta de un grupo de estudiantes para maestro/a en relación a la pregunta generadora de la actividad.

En la imagen mostrada en la Figura 5 se puede apreciar, en el extremo superior izquierdo, que los y las estudiantes primero realizaron una estimación del número aproximado de mensajes por WhatsApp que creen que envían cada uno de ellos. Una vez que han establecido un número subjetivo aproximado (una estimación), lo que hacen es sumar el total de mensajes que envían entre todos/as. Con ese número deciden aplicar lo

que en España se conoce como "regla de tres", que es un algoritmo muy popular que se usa para resolver problemas de proporcionalidad entre tres valores conocidos y uno que no lo es (la incógnita). La regla de tres se basa sobre la hipótesis de linealidad de la relación entre los valores implicados. En este caso, la relación proporcional lineal se establece entre el número de mensajes de WhatsApp que envían los cuatro integrantes del grupo, y los mensajes que supuestamente enviarán las personas que viven en Barcelona. Para averiguar la población residente en Barcelona, los futuros/as maestros/as utilizaron diferentes estrategias: hubo quien directamente usó Internet para averiguar la cantidad de personas; en otros casos se hizo una estimación basada en el conocimiento personal del contexto; se realizó estimación tomando puntos de referencia (la población de otras ciudades conocidas). En cualquier caso, en el resultado que este grupo ofrece destaca por un lado que se da un número absoluto (144 millones de mensajes), pero también se da otro número, 90 mensajes por persona (resultado de la división de 144 millones entre 1.6 millones de personas). Sin decirlo, pero de manera implícita también se está usando el concepto de promedio.

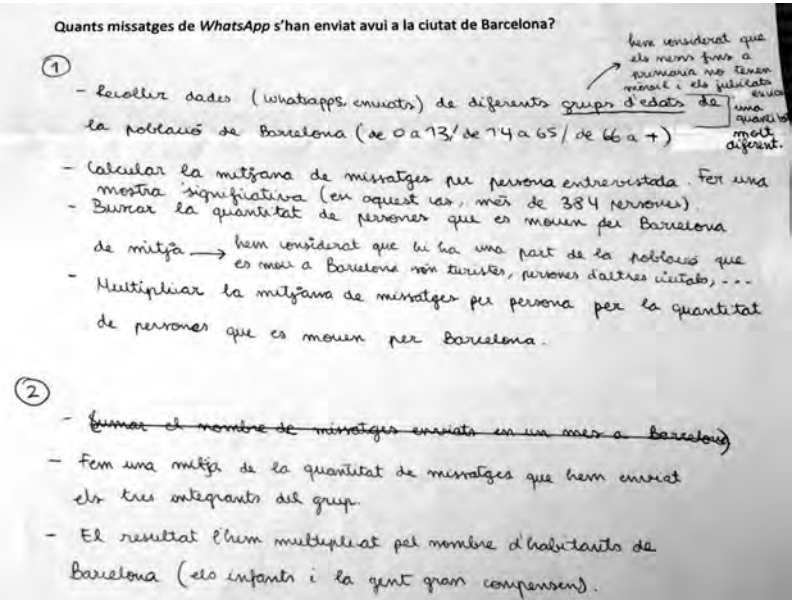


Figura 6. Respuesta de otro grupo de estudiantes para maestro/a en relación a la pregunta generadora de la actividad.

El uso del promedio (como media aritmética) aparece de manera explícita en la respuesta que elabora otro de los grupos que participaron en la actividad. En este caso, el recurso de la estadística es la vía de entrada para resolver el problema. Se propone la recopilación de datos de grupos de personas de edades diferentes, puesto que se parte de la hipótesis de que el número de mensajes de WhatsApp va a depender en cierta manera de la edad de la persona. En una anotación al margen se puede leer "hemos considerado que los niños hasta primaria no tienen móvil —celular— y que los jubilados envían una cantidad muy diferente [de mensajes]". Teniendo eso en cuenta, establecen tres intervalos de edad (de 0 a 13 años, de 14 a 65 años y de 66 años en adelante). Entonces, proponen seleccionar una muestra representativa (hay un error y usan la palabra "significativa", que estadísticamente se refiere a otro tipo de concepto, más relacionado con las pruebas estadísticas) que dicen que "en este caso tienen que ser más de 384 personas." Utilizar el número 384 indica que están familiarizados con este tipo de lenguaje y de procedimientos, puesto que 384 es el número habitual de encuestas que se hacen cuando se aplica la fórmula convencional para cálculo del tamaño de la muestra de poblaciones infinitas o desconocidas (mayores de 10.000 individuos), utilizando una z = 1.96 para una confianza del 95%.

Por otro lado, también indican que van a calcular la media [aritmética] de las personas entrevistadas. Sin embargo, ni se indica cómo se van a entrevistar, ni cómo se van a seleccionar, ni qué tipo de técnica de muestreo van a usar para garantizar el criterio de aleatoriedad. Pero introducen otro aspecto relevante: dicen que aparte de las personas que residen en Barcelona, también hay que considerar que a lo largo de un día por Barcelona pasan muchas personas que están de visita, por turismo, personas de otras ciudades que van a Barcelona (y añaden unos puntos suspensivos cosa que indica que están teniendo en cuenta cualquier tipo de motivo que implique que una persona que no reside en Barcelona —es decir, que no está empadronada en Barcelona—, puede estar presente en la ciudad (enviando mensajes por el teléfono móvil). Como se puede apreciar, el resultado es mucho más ajustado a la realidad de una ciudad como Barcelona (aunque también es más difícil de aplicar que la primera estrategia que he comentado antes). Hay un intento de modelización de la situación, teniendo en cuenta variables tales como la edad, el comportamiento en el

uso del móvil, las personas reales presentes en la ciudad en un día dado. El final de la estrategia termina con la siguiente propuesta: se usa la media de mensajes por persona (calculada según parece a partir una distribución por grupos de edad), con el número de personas que se mueven por Barcelona. Este grupo ha estimado un número medio de mensajes por persona, y entonces aplica ese referente al número de personas que creen que estarán en Barcelona en el día de hoy.

Ésta última fue la respuesta más elaborada de todas las que se recogieron. La gran mayoría (con pequeñas variaciones) fueron similares a la primera estrategia explicada más arriba. En el caso de Puebla, cuando se presentó la pregunta ante el público asistente a la ponencia, el resultado fue también similar: generalizar el comportamiento de los miembros del grupo al total de la población, y usar el número de mensajes enviados por los miembros del grupo para extrapolar la situación al total de la población de Puebla.

El caso del problem posing: El panal de miel y las abejas

El segundo de los ejemplos que se discutió en la ponencia fue el enfoque del *problem posing* (Silver, 1997). En este caso, la pregunta generadora de la actividad era un ejemplo de problema que los estudiantes para maestro tenían que enriquecer; es decir, construir un nuevo problema, más rico en términos matemáticos (desde el punto de vista del contenido epistemológico de la matemática, sobre todo). El problema era el siguiente: En un patio de la escuela encontramos un panal. Notamos que las formas geométricas dentro del panal son hexágonos. Dibuja esa forma y calcula el área, sabiendo que un lado mide 4 cm. La instrucción que acompañaba a este problema generador era: Tomando como punto de partida este problema, cread otro que lo enriquezca. La primera respuesta que se obtuvo fue la de este estudiante, que escribió el siguiente problema:

> En el patio del recreo encontré un panal. Notamos que las formas geométricas dentro del panal son hexágonos. Por favor, dibuja esta forma en tu cuaderno y descubre el área considerando que un lado mide 4 cm. ¿Cuál sería el área si cada lado midiera 5 cm? Calcula la diferencia en ambos casos, en términos del área.

El análisis del texto revela que el estudiante no es capaz de introducir más elementos de matemáticas, más allá de los que ya tiene el problema original. Simplemente añade una nueva pregunta (¿cuál sería el área si cada lado midiera 5 cm?), que se refiere al mismo objeto matemático que aparece en el problema original. La segunda pregunta que hace (el cálculo de la diferencia entre ambas áreas) no supone ningún reto adicional, como podría haber sido el preguntar por la diferente capacidad de almacenaje de miel en ambos casos, por ejemplo. Aquí, en cambio, el razonamiento implícito en la pregunta es bastante lineal.

En otra respuesta encontramos quizás el caso contrario: la dificultad de la nueva tarea no está alineada con el nivel de los estudiantes objetivo de este tipo de problema. El nuevo problema que se construye es el siguiente:

> El panal en el patio de recreo tiene la forma de un hexágono regular con 4 cm en cada lado. Inscribimos una circunferencia dentro de este hexágono, y luego otra. ¿Cuál es el área de la corona circular que hemos creado?

El problema se acompaña de la siguiente figura:

Figura 7. Imagen de apoyo a la nueva tarea enriquecida del panal de miel.

También se añade $r^2 = Apothem^2 = 4^2 – 2^2 = 12$; luego $A = \pi \cdot (4^2–12) = 4 \cdot \pi = 12{,}567$ cm.

Ahora el problema nuevo implica conocer el cálculo del área de la circunferencia, y usar ese conocimiento encontrar el área de la superficie que se encuentra entre ambas circunferencias (la corona circular). Desde un punto de vista matemático, el problema es diferente al original. Pero la

dificultad es discutible que corresponda a lo que establece el currículum (el significado institucional de esta actividad).

Esta dificultad a la hora de crear nuevos problemas aparece más veces. Pero también sucede que el nuevo problema contiene alguna incorrección en sí mismo. A continuación, adjunto otro ejemplo (diferente) que ilustra este caso. El estudiante escribe:

> Hemos encontrado un panal en el patio de recreo. Notamos que las formas geométricas dentro del panal son hexágonos. Por favor, dibuja esta figura y calcula el área considerando que un lado mide 4 cm. Sabiendo que hay 20 hexágonos dentro del panal y la distancia entre ellos es de 1cm, calcula el área total del panal.

En este problema también se usan representaciones visuales como soporte a la presentación de la actividad.

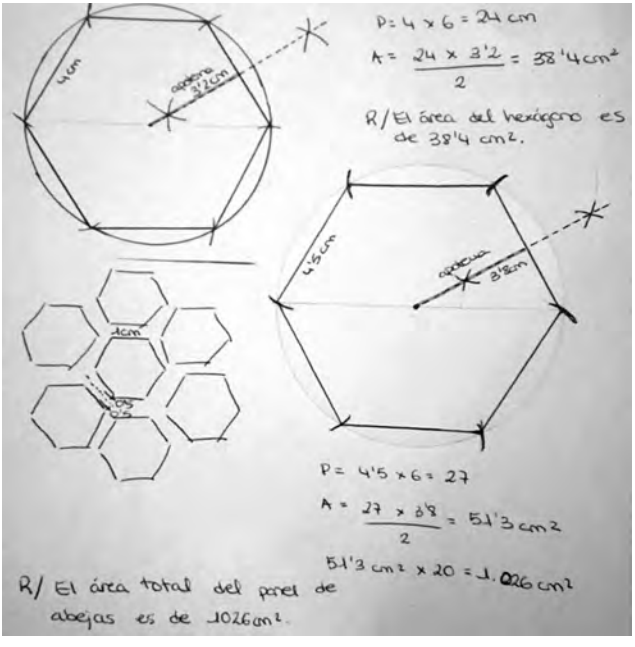


Figura 8. Imagen de apoyo a la nueva tarea enriquecida del panal de miel.

La nueva tarea es realista puesto que trata de modelizar un panal que podría ser considerado como "auténtico", puesto que en la vida cotidiana los panales suelen tener varias celdillas hexagonales (no únicamente una). Quizás sería discutible considerar que un panal está formado por solo 20 hexágonos. Sin embargo, llama la atención que también se está diciendo que entre un hexágono y otro hay que considerar la superficie que ocupa la cera, que separa en 1 cm una celdilla de la celdilla vecina. Este elemento es real. Pero introduce la dificultad de cómo considerar esa información en la estrategia de cálculo. Ahora bien, aunque sea una dificultad "inesperada", es interesante observar cómo este estudiante busca una forma creativa de resolver la situación.

En la imagen vemos que el estudiante primero opta por averiguar el área del hexágono. Para ello recurre a la fórmula, pero sin explicar de dónde la obtiene (aunque se intuye que la usa de manera mecánica o memorística, puesto que no hay indicio de que se haya desagregado el hexágono en triángulos, ni que la apotema se haya relacionado con el objeto "altura del triángulo"). Tampoco podemos afirmar con la información que aparece en esta imagen que el estudiante esté siendo capaz de conectar las áreas del triángulo y del hexágono (que indudablemente ofrecería un nuevo escenario para enriquecer aún más el problema generador).

Sin embargo, y esto es interesante, para afrontar que entre hexágono y hexágono hay 1 cm de cera, lo que hace es pensar que divide esa distancia entre 2 (0,5) y "da" el medio centímetro a cada uno de los hexágonos, entendiendo ahora que en vez de medir los lados 4 cm, miden 4,5 cm. En el dibujo de la izquierda, donde aparecen los siete hexágonos, vemos que en un lugar se escribe 1 cm, y más abajo, 0,5 y 0,5, entre una línea divisoria que representa "la mitad" entre el espacio que separa los hexágonos. Llama la atención que el estudiante asuma que, al dividir el espacio de esa manera, pueda (de manera directa) pasar el 0,5 cm a la longitud del lado del hexágono (resultando 4,5 cm). El nuevo problema creado contiene una incorrección de concepto.

Reflexiones finales

Este capítulo comenzaba con la reflexión sobre la importancia de las evidencias científicas para orientar el trabajo profesional del maestro. Hemos

discutido dos ejemplos (desde el *problem solving*, y desde el *problem posing*) sobre cómo actividades "abiertas" pueden fomentar a través de la creatividad el aprendizaje de las matemáticas. En ambos casos la herramienta de la idoneidad didáctica (ID) nos sirve para orientar nuestra mirada en el análisis didáctico de la práctica matemática, que es una de las competencias clave del profesorado.

En los casos que hemos estudiado sobresale la faceta "epistémica" del conocimiento matemático. Tanto en los ejemplos de cómo las y los futuros/as estudiantes de maestro responden a la pregunta sobre el número de mensajes de WhatsApp, como en el caso de trasformar el problema del panal de miel en otro problema más rico matemáticamente hablando, el conocimiento sobre objetos matemáticos y sus conexiones (así como sus diferentes representaciones) surge como un aspecto central relacionado con la creatividad que muestran los participantes en sus respuestas.

Para que surja esa creatividad matemática, tal y como ya decía Poincaré, es preciso que los y las estudiantes para maestro partan de una comprensión personal de las matemáticas con cierto grado de sofisticación. Es difícil que, sin conocer los objetos matemáticos, ni las conexiones entre sus diferentes componentes (así como las relaciones con otros objetos matemáticos), las personas seamos capaces tanto de diseñar tareas matemáticas ricas, como realizar análisis pormenorizados que destaquen los elementos matemáticos principales. Usar problemas de Fermi (como el del envío de mensajes de WhatsApp) o rediseñar problemas que ya existen (como el del panal de miel de las abejas) implica tanto conocer los fundamentos de la matemática (faceta epistemológica), como la capacidad de análisis didáctico (por ejemplo, usando la herramienta de la idoneidad didáctica).

De acuerdo con la investigación previa, la formación profesional del profesorado tiene un impacto muy relevante tanto sobre la actuación de esos maestros y maestras en el aula, como sobre su capacidad de notar (*noticing*) el talento matemático de sus estudiantes, para poder potenciarlo. Ejemplos como los que hemos discutido aquí ilustran este aspecto fundamental de la formación del profesorado de matemáticas.

Es importante señalar que esta formación tiene que estar basada en evidencias científicas. Para lograr buenos maestros y maestras de matemáticas, tenemos que ofrecerles las mejores prácticas y actuaciones educativas, contrastadas y refrendadas por la investigación. No podemos esperar que

nuestras y nuestros estudiantes para maestro de matemáticas de hoy, tengan que aguardar treinta años a acumular experiencia suficiente para saber con certeza qué prácticas les van a dar éxito, y qué otras no lo van a hacer. La investigación tiene que ser acumulativa, abriendo siempre nuevos horizontes, pero también estableciendo un diálogo fluido con la práctica, con las personas que o se están formando, o ya se encuentran ejerciendo en su lugar de trabajo. No podemos investigar una y otra vez lo mismo.

De la misma manera, tampoco es adecuado que aquello que ya sabemos, se olvide de manera que otros luego tengan que volver a destinar tiempo y recursos a realizar las mismas investigaciones que ya están hechas. Herramientas como los grupos interactivos (Valls & Kyriakides, 2013), la zona de desarrollo próximo (Vygotski, 1978), el andamiaje o *scaffolding* (Wood, Bruner & Ross, 1976), el habla exploratoria (Mercer, 2002), el aprendizaje dialógico (Flecha, 2000), las interacciones dialógicas (Garcia-Carrión & Díez-Palomar, 2015), las trayectorias de aprendizaje (Simon, 1995; Clements & Sarama, 2004), la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006), entre otros muchos, son constructos que ya han sido contrastados por múltiples investigaciones, y que constituyen un conjunto de herramientas que todo maestro tiene que conocer. Espacios como este congreso, el TEMBI (Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación) son inmejorables para generar espacios de discusión rigurosa sobre las últimas contribuciones que la investigación está haciendo en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, para mejorar aún más nuestro conocimiento de cómo enseñar matemáticas.

Referencias

An, S., Kulm, G. & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S., Journal of Mathematics Teacher Education 7, pp. 145-172.

Anhalt, C. O., Ward, R. A., & Vinson, K. D. (2006). Teacher candidates' growth in designing mathematical tasks as exhibited in their lesson planning. *The Teacher Educator*, *41*(3), 172-186.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Chalmers, A. F. (2000). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* Madrid: Siglo XXI.

Chamberlin, S. A. (2005). Secondary mathematics for high-ability students. In F.Dixon & S. Moon (Eds.), The handbook of secondary gifted education (145– 163). Waco, TX: Prufrock Press.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. (2005). Model-eliciting activities: An introduction to gifted education. *Journal of Secondary Gifted Education, 17,* 37-47.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

DeHaan, R. L. (2009). Teaching creativity and inventive problem solving in science. *CBE-Life Sciences Education*, *8*(3), 172-181.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact in: D. A. Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (New York: Macmillan Publishing).

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2012). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Routledge.

Flecha, R. (2014). *Successful educational actions for inclusion and social cohesion in Europe*. Springer.

García-Carrión, R., & Díez-Palomar, J. (2015). Learning communities: Pathways for educational success and social transformation through interactive groups in mathematics. *European Educational Research Journal*, *14*(2), 151-166.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Grouws, D. & Schultz, K. (1996). Mathematics teacher education in: J. Sikula (ed.) Handbook of Research On Teacher Education, 2nd edition (USA: Macmillan).

Harada, E. (2009). Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin. *Contactos*, *7*(3), 45-56.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, *105*(1), 11-30.

Kahan, J., Cooper, D. & Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers, Journal of Mathematics Teacher Education, 6, pp. 223-252.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716.

Maier, N. R. (1970). Problem Solving and Creativity; In Individuals and Groups.

Mallart, A., & Deulofeu, J. (2017). Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20(2), 4.

Mallart, A., Font, V., & Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(4), 1465-1481.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236-260.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Psychology Press.

Matthews, M. E. (2013). The influence of the pedagogical content knowledge framework on research in mathematics education: A review across grade bands. *Journal of Education*, *193*(3), 29-37.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *31*, 285-291.

Parker, J & Heywood, D. (2000). Exploring the relationship between subject knowledge and pedagogic content knowledge in primary teachers' learning about forces, International Journal of Science Education, 22 (1), pp. 89-111.

Poincaré, H. (1921). *The foundations of science: Science and hypothesis, the value of science, science and method*. GB Halstead, Trans.

Sherin, M., Jacobs, V., & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 414.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations for the new reform. Harvard Educational Review, 57 (1), 1-22

Shulman, L.S. (1995). Those who understand: knowledge growth in teaching in: B. Moon & A.S. Mayes (Eds) Teaching and Learning in the Secondary School (London: Routledge).

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75-80.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 157-162.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for research in mathematics education*, 521-539.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Sriraman, B. (2009). General Creativity. In B. Kerr (Ed.), Encyclopedia of Giftedness, Creativity and Talent, (369-372). New York: Sage Publications.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook of creativity (93–115). New York: Cambridge University Press.

Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The Pedagogical Content Knowledge in Mathematics: Pre-Service Primary Mathematics Teachers' Perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, *1*.

Valls, R., & Kyriakides, L. (2013). The power of Interactive Groups: how diversity of adults volunteering in classroom groups can promote inclusion and success for children of vulnerable minority ethnic populations. *Cambridge journal of education*, *43*(1), 17-33.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry*, *17*(2), 89-100.

Yoshida, M. (1999, April). Lesson study [Jugyokenkyu] in elementary school mathematics in Japan: A case study. In *American Educational Research Association (1999 Annual Meeting), Montreal, Canada*.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. In *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5-28). SensePublishers.

Correo-e: jdiezpalomar@ub.edu

Capítulo 2
Hallazgos sólidos de la investigación en Educación Matemática: características, ejemplos y posible implementación

Mario Sánchez Aguilar[1]
Instituto Politécnico Nacional (México)

Resumen

Este es un escrito de divulgación cuyo propósito principal es difundir la iniciativa denominada *Solid Findings in Mathematics Education*, la cual tiene la intención de identificar y comunicar hallazgos sólidos de investigación que provienen de investigaciones confiables y rigurosas, y que pueden ser aplicados a circunstancias o dominios distintos de aquellos en los que se encontraron. En el escrito se ilustran tres de esos hallazgos sólidos: (1) razonamiento matemático e imagen del concepto, (2) esquemas empíricos de demostración, y (3) el contrato didáctico en matemáticas. El escrito finaliza con una reflexión sobre la implementación de resultados de investigación en educación matemática.

Palabras clave: hallazgos sólidos de investigación; generalización de resultados de investigación; implementación de resultados de investigación.

Introducción

Hay una frase atribuida a Henry Pollak, "no existen los teoremas en educación matemática". Esa frase captura una de las características de muchos resultados de investigación producidos en el campo de la educación matemática: dependen mucho del contexto donde se obtienen, y por lo tanto

[1] Correo-e: masanchez@ipn.mx

su generalización es limitada. En el campo de la educación matemática no se tiene la certeza que se obtiene en el campo de las matemáticas cuando un resultado o una afirmación es formalmente demostrada. El "2 + 2 = 4 aquí y en China" no se cumple para la educación matemática: una aproximación didáctica que es exitosa en la capital de Japón, puede no serlo en la Sierra Norte de Puebla en México. Sin embargo, existen resultados de investigación que han sido obtenidos de manera sistemática y que se han identificado o se cumplen más allá de los contextos en los que originalmente fueron reconocidos, es decir, gozan de cierto grado de generalización.

El presente es un escrito de divulgación, y uno de sus propósitos es difundir una iniciativa educativa enfocada en identificar y dar a conocer resultados de investigación calificados como "sólidos" por ser generalizables hasta cierto punto, pero también por poseer otras características —las cuales se verán más adelante— que incrementan su validez y confiabilidad. Se comienza describiendo la iniciativa educativa antes mencionada y lo que se entiende dentro de ella como un *hallazgo sólido en educación matemática*; posteriormente se proporcionan algunos ejemplos de hallazgos sólidos, y se concluye con una reflexión sobre el futuro del campo educación matemática con respecto a la implementación de resultados de investigación sólidos.

La iniciativa "hallazgos sólidos en educación matemática"

En el año 2011 el *Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea* inició la publicación de una colección de artículos denominada *Solid Findings in Mathematics Education*. Estos artículos —once hasta el momento— han sido publicados en el Boletín de la Sociedad Matemática Europea y en la página web del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea. El propósito de esta colección de artículos es divulgar, entre matemáticos y otros académicos interesados en la investigación en educación matemática, síntesis de investigaciones sobre distintos tópicos de importancia. Cada artículo —excepto el primero— resume algún hallazgo sólido que la investigación en educación matemática ha producido sobre el tópico tratado. Hasta el momento se han publicado un documento introductorio a la colección, y diez artículos con hallazgos sólidos sobre los siguientes tópicos:

1. Demostraciones matemáticas.
2. Conocimiento y desarrollo de los profesores de matemáticas.
3. El contrato didáctico entre estudiantes y profesores de matemáticas.
4. Modelos y modelación matemática.
5. Creencias y orientaciones.
6. Normas sociomatemáticas.
7. Actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas.
8. La transición de la educación matemática secundaria a la terciaria.
9. Uso de la tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
10. Imágenes conceptuales en el razonamiento matemático de los estudiantes.

En este capítulo se ilustran algunos de los hallazgos sólidos que han sido publicados hasta el momento, sin embargo, se recomienda al lector que recurra a leer los artículos originales, los cuales son de libre acceso, y además algunos de ellos son muy interesantes e instructivos. Una manera de acceder a ellos es a través de la página web del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea:
http://www.euro-math-soc.eu/ems_education/education_homepage.html

¿Qué es un hallazgo sólido?

En el primer artículo de la colección (Education Committee of the European Mathematics Society, 2011a) se discute qué se entiende por un *hallazgo sólido*. Ahí se declara que para determinar lo que es un hallazgo sólido, se adoptaron los criterios propuestos por Schoenfeld (2007) para analizar la calidad de una investigación. Según Schoenfeld, una investigación debe ser juzgada por la confiabilidad de sus resultados, su generalidad, y la importancia de su contribución a la teoría y la práctica de la educación matemática. Con base en lo anterior, en esta colección de artículos un hallazgo sólido se refiere a resultados de investigación que:

1. Provienen de una investigación confiable y disciplinada; una investigación que es fuerte y convincente al momento de clarificar las preguntas que se plantea.

2. Son generalmente reconocidos como contribuciones importantes que han influenciado o pueden influir de manera significativa el campo de investigación.
3. Pueden ser aplicados a circunstancias o dominios distintos de aquellos en los que se desarrolló la investigación.
4. Pueden ser resumidos de una manera breve y comprensiva para las personas no especialistas, pero interesadas en el tema.

Como se menciona en este primer artículo de la colección, el mensaje general de los hallazgos sólidos no es que la investigación en educación matemática ha producido explicaciones incuestionables y soluciones directas a los fenómenos educativos. Más bien, el mensaje es que la educación matemática es compleja, y que la comunidad de educadores y educadoras matemáticas ha hecho un esfuerzo serio por identificar esta complejidad, entender su impacto, y sugerir soluciones potenciales (Education Committee of the European Mathematics Society, 2011a, p. 46).

Enseguida se ilustran algunos de los hallazgos sólidos que han sido incluidos en la colección de artículos antes mencionada.

Hallazgo sólido 1: Razonamiento matemático e imagen del concepto

El primer hallazgo sólido al que se hará referencia en este capítulo se encuentra publicado en Education Committee of the European Mathematics Society (2014), y puede ser resumido como: "El razonamiento matemático de los estudiantes frecuentemente está basado en sus imágenes del concepto más que en la definición matemática del concepto".

Lo anterior quiere decir que un estudiante puede conocer la definición formal de un concepto matemático, sin embargo, es muy probable que en situaciones en las que tenga que razonar acerca de dicho concepto no utilice la definición que conoce, sino la imagen del concepto que él tenga.

Vinner & Herschkowitz (1980) fueron de las primeras personas en notar que el pensamiento geométrico de los estudiantes está basado en prototipos o imágenes, más que en definiciones. Ellos desarrollaron un estudio con 550 niños de secundaria, en el que a través de un cuestionario se exploraba su entendimiento de distintos conceptos geométricos, entre ellos el de triángulo rectángulo. En uno de los reactivos del cuestionario

(véase Figura 1) se les muestra a los estudiantes un grupo de triángulos, y se les pide que señalen los triángulos rectángulos.

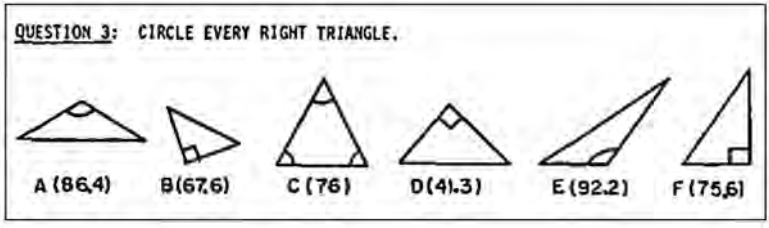


Figura 1. Uno de los reactivos incluidos en el cuestionario de Vinner & Herschkowitz (1980).

A pesar de que los estudiantes entrevistados ya conocían el concepto de triángulo rectángulo, solo 68% de ellos reconocen al triángulo B como rectángulo —en la Figura 1, el segundo de izquierda a derecha—, y 59% de ellos no identifica como rectángulo al triángulo D —el tercero de derecha a izquierda—. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes (76%) sí identifica como triángulo rectángulo a la figura F localizada en el extremo derecho de la Figura 1, la cual es una representación prototípica de triángulo rectángulo.

En un experimento relacionado, Tsamir, Tirosh & Levenson (2008) exploraron el entendimiento que niños y niñas de nivel preescolar tienen sobre el concepto de triángulo. Siguiendo un procedimiento similar al de Vinner & Herschkowitz (1980), a los infantes se les presentaron distintas representaciones de triángulos (véase Figura 2), y ellos tenían que indicar cuáles consideraban que eran triángulos, y cuáles creían que no lo eran.

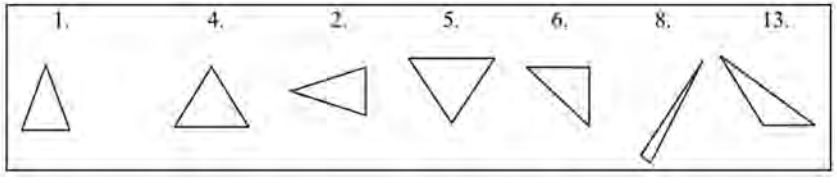


Figura 2. Representaciones de triángulos presentadas a los infantes participantes en el estudio de Tsamir, Tirosh, & Levenson (2008).

Los resultados reportados por Tsamir, Tirosh, & Levenson (2008) muestran que más de 90% de los niños identifican correctamente como triángulos a las representaciones 1 y 4 de la figura 2, mientras que no más de la mitad de los niños identifican como triángulos a las representaciones 2, 5, 6, 8 y 13.

Los resultados de Vinner & Herschkowitz (1980), así como los de Tsamir, Tirosh, & Levenson, (2008), muestran que el razonamiento de los niños sobre los triángulos se basa más en las imágenes o representaciones que ellos poseen sobre esas figuras geométricas que en su definición formal; esto sucede incluso en los casos en que los estudiantes conocen y pueden repetir la definición. Es evidente a partir de estas investigaciones, que las representaciones de triángulos que los estudiantes más fácilmente reconocen como tal, son aquellas que corresponden a ejemplos prototípicos de triángulos; es decir, representaciones de triángulos —usualmente isósceles o equiláteros— con una base horizontal.

Esta última observación cobra sentido si se considera que muchos de los ejemplos y ejercicios sobre triángulos a los que los estudiantes están regularmente expuestos utilizan representaciones prototípicas. Basta con hojear un libro de texto de matemáticas elemental, o revisar los ejemplos, ejercicios y tareas sobre triángulos que los profesores utilizamos, para constatar que una mayoría corresponde a representaciones prototípicas de triángulos. Una recomendación didáctica que se desprende de esta observación, es que los profesores de matemáticas debemos procurar proporcionar a nuestros estudiantes ejemplos, tareas y ejercicios sobre triángulos que sean variados y no únicamente prototípicos, esto para favorecer que la imagen que los estudiantes se formen sobre el concepto de triángulo sea una imagen más rica y robusta.

Hallazgo sólido 2: Esquemas empíricos de demostración

La demostración matemática es uno de los elementos más importantes en el quehacer matemático. Ésta nos sirve, entre otras cosas, para verificar y explicar resultados, así como para organizarlos dentro de un sistema axiomático. Sin embargo, es sabido que usualmente los estudiantes de matemáticas no asignan una importancia mayor a la demostración, y su entendimiento sobre ella suele ser limitado. Más particularmente, *en Edu-*

cation Committee of the European Mathematics Society (2011b) se discute el siguiente hallazgo sólido relacionado con la demostración matemática: "Muchos estudiantes proveen ejemplos particulares cuando se les pide demostrar una afirmación universal".

Para ilustrar este hallazgo sólido, consideremos el siguiente teorema:

Teorema: si n es la suma de cinco números enteros consecutivos, entonces n es divisible por 5.

Una manera de demostrar este teorema es suponer que n es la suma de cinco números enteros consecutivos. Entonces existe un número entero m tal que n es la suma de los enteros m, m +1, m + 2, m + 3, y m + 4, esto es:

$$n = m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + (m + 4) = 5m + 10 = 5(m + 2)$$

Dado que $n = 5(m + 2)$, y debido a que $m + 2$ es un número entero, se demuestra que n es divisible por 5. No obstante, es sabido que varios estudiantes pueden «demostrar» este tipo de enunciados siguiendo procedimientos que, aunque son incompletos o incorrectos, hacen mucho sentido al estudiante.

Un modo de pensamiento utilizado por estudiantes en contextos de demostración es el llamado *esquema empírico de demostración*. En este modo de pensamiento los estudiantes muestran que la afirmación o teorema se cumple en algunos casos, y a través de ese proceso se convencen ellos mismos de su validez general. Para el caso del teorema anterior, un estudiante podría tomar el caso de 3, 4, 5, 6 y 7 y comprobar que su suma, que es igual a 25, es divisible por 5; enseguida podría tomar el caso de 8, 9, 10, 11 y 12 cuya suma también es divisible por 5. Estos dos casos particulares podrían ser suficientes para que el estudiante esté convencido de la validez del teorema, sin siquiera sentir la necesidad de demostrar que la afirmación es válida para todos los casos posibles de números enteros consecutivos.

Nicolas Balacheff (1987) identificó subcategorías del esquema empírico de demostración. La primera de ellas, llamada *empirismo ingenuo*, se refiere al tipo de situación anteriormente expuesto en el que el estudiante verifica algunos casos particulares y si el teorema o afirmación se cumple para esos casos, entonces asume que el teorema o afirmación se cumple de manera

general. La segunda subcategoría se denomina *experimento crucial*, y hace referencia a situaciones en las que el estudiante utiliza un solo caso supuestamente "general" —en el caso del teorema antes enunciado, podría ser por ejemplo una quíntupla de números grandes como 9342, 9343, 9344, 9345 y 9346—, suponiendo que, si se cumple para ese caso, se cumplirá para el resto.

Pero, ¿por qué los estudiantes no sienten necesidad de la demostración y su principal aproximación a ella es a través de esquemas empíricos? Una posible respuesta a esta pregunta es que este fenómeno forma parte de un reto más general que se refiere a la distinción entre el razonamiento en matemáticas y el razonamiento en la vida diaria. El razonamiento en matemáticas puede ir en contra de la intuición y ser incluso contradictorio con nuestras experiencias diarias; por ejemplo, en la vida diaria, si caminamos hacia una pared y nos acercamos más y más a ella, aunque demos pasos muy pequeños, habrá un momento en que llegaremos a tocarla. Pero en un plano cartesiano, la gráfica de una función $f(x)$ puede acercarse más y más —de manera asintótica— a alguno de los ejes del plano y nunca tocarlo. Algo similar pasa con la demostración. Un ejemplo extremo sería que a una persona la mordiera un perro pitbull que anda libre por la calle, y que meses después reciba una nueva mordedura de otro pitbull que también andaba libre por la calle. Es improbable que la persona sienta la necesidad de probar con más perros pitbull antes de convencerse de que es importante que no deambulen solos y sin cadena por la calle. En la vida diaria no requerimos de demostraciones rigurosas: tendemos a generalizar a partir de experiencias particulares.

Se han propuesto distintas aproximaciones didácticas para cultivar la necesidad de la demostración entre los estudiantes y para favorecer su transición de los esquemas empíricos a esquemas más formales de demostración. Se ha propuesto por ejemplo promover una cultura del debate científico en el salón de clases, en la que los estudiantes expongan sus ideas y conjeturas, y los argumentos por los que creen que son correctas, para posteriormente someterlas al análisis y debate con el propósito de construir colectivamente una demostración (Legrand, 2001).

Hallazgo sólido 3: El contrato didáctico en matemáticas

Este hallazgo sólido es de una naturaleza distinta a los dos mostrados previamente. Este hallazgo ayuda a ilustrar el hecho de que no todas las dificultades de aprendizaje en matemáticas son de origen cognitivo. En este caso nos referiremos a un fenómeno didáctico que tiene su origen en las expectativas recíprocas que existen entre el profesor o profesora de matemáticas y sus estudiantes. El hallazgo sólido puede formularse de la siguiente manera: "Los estudiantes frecuentemente responden tratando de cumplir lo que creen que el profesor espera de ellos, en lugar de enfocarse en la situación matemática propuesta".

Un ejemplo clásico que ilustra este hallazgo es el de "la edad del capitán". En torno a 1980 un grupo de investigadores franceses propuso el siguiente problema a varios grupos de estudiantes de entre 7 y 10 años de edad:

Problema: en un barco hay 7 cabras y 5 ovejas. ¿Qué edad tiene el capitán?

Es evidente que los datos proporcionados no bastan para contestar la pregunta planteada. De hecho, los datos ni siquiera son pertinentes: el número de ovejas y de cabras que haya en el barco no tiene que ver con la edad de su capitán. No obstante, la mayoría de los estudiantes se esmeró en encontrar respuestas para la pregunta a como diera lugar. Así, los alumnos ofrecieron resultados como 7 x 5 = 35, entonces el capitán tiene 35 años; 7 + 5 = 12, por lo tanto, el capitán tiene doce años. ¿Por qué casi todos los niños contestan el problema si éste no se puede resolver?

Una explicación al fenómeno anterior —y que es el corazón de este tercer hallazgo sólido— es que, como en cualquier otra sociedad organizada, la clase de matemáticas está regida por un conjunto de reglas explicitas e implícitas y también por expectativas recíprocas. Este conjunto de reglas y expectativas forman una especie de contrato entre el docente y los estudiantes, un *contrato didáctico*. Así, una regla explícita de este contrato podría ser "los estudiantes no pueden utilizar calculadora durante los exámenes", sin embargo, hay otras reglas y expectativas que son tácitas, pero que influyen en el aprendizaje y en el comportamiento de los estudiantes. En el caso de la conducta manifestada por los niños que se enfrentan al problema de "la edad del capitán", ésta puede explicarse debido a la exis-

tencia de una expectativa por parte de los estudiantes respecto a su profesor, la cual es un componente del contrato didáctico que se forma entre ellos: la expectativa de los estudiantes consiste en que cuando el profesor les propone resolver un problema, éste siempre está bien planteado y tiene solución. Como los alumnos esperan que el problema tenga solución, no tratan de tomarle sentido a la situación matemática que se les plantea, y solo intentan encontrar la solución usando los datos del enunciado. Que el problema sea absurdo o insoluble simplemente no es una posibilidad que esté considerada dentro de las expectativas de los estudiantes.

Más manifestaciones del contrato didáctico han sido identificadas en otras situaciones y contextos (véase, por ejemplo, Verschaffel, Greer & de Corte, 2000). La siguiente historia (tomada de Education Committee of the European Mathematics Society, 2012) tiene el propósito de ilustrar otro tipo de situación en la que puede manifestarse el contrato didáctico en matemáticas. La historia tiene lugar en una clase de matemáticas con estudiantes de entre 9 y 10 años de edad. La profesora les enseña el siguiente algoritmo que facilita calcular la diferencia entre dos números (véase Figura 3).

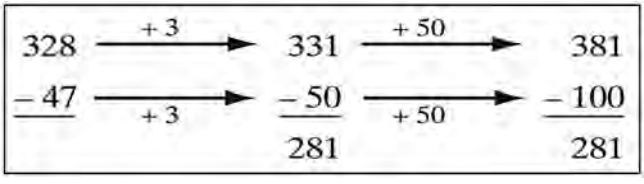


Figura 3. Algoritmo alternativo para calcular la diferencia entre dos números. Tomado de *Education Committee of the European Mathematics Society* (2012).

Como puede apreciarse en la figura anterior, el algoritmo tiene el propósito de transformar la sustracción original en una equivalente, pero donde el sustraendo tome la forma de un número más simple de sustraer del minuendo. Unas semanas después, a los estudiantes se les deja de tarea resolver las siguientes restas:

a) 875 – 378 = _____
b) 964 – 853 = _____
c) 999 – 111 = _____

La mayoría de los estudiantes efectuaron las sustracciones aplicando el algoritmo alternativo que les habían enseñado (véase Figura 3), incluyendo aquella del inciso c):

$$999 - 111 = 1008 - 120 = 1088 - 200 = 888$$

La sustracción del inciso c) se pudo haber resuelto con menos pasos y de forma más simple, si no se hubiera aplicado el algoritmo alternativo, es decir, si se hubiera resuelto de manera directa. Sin embargo, pareciera que el comportamiento de los estudiantes está gobernado por lo que creen que la profesora espera de ellos, más que por la estructura de la resta. Es como si una de las expectativas implícitas del contrato didáctico dictara: "si la profesora enseña una técnica matemática para resolver restas, se debe aplicar a todas las restas que ella proponga".

De los hallazgos sólidos a la investigación de implementación

La iniciativa *Solid Findings in Mathematics Education,* del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea, puede interpretarse como un esfuerzo por ordenar y sistematizar el conocimiento que la comunidad internacional de educadores y educadoras matemáticas ha producido. Ayuda a identificar resultados de investigación que son más o menos estables a través de contextos, lo cual permite generar conocimiento más robusto sobre la teoría y la práctica de la educación matemática. Pero, ¿qué hay más allá de los hallazgos sólidos? Además de identificar y comunicar los resultados de investigación sólidos, ¿qué más podemos hacer con las innovaciones y los resultados de investigación que producimos, con el fin de mejorar la práctica de la educación matemática?

Pienso que es el momento oportuno para el establecimiento de una *investigación de implementación* (implementation research) dentro del campo de la educación matemática. Un área de investigación enfocada en entender cómo es que las teorías, conceptos, diseños, dispositivos y otros resultados de investigación, producidos en el campo de la educación matemática —incluidos los hallazgos sólidos—, pueden ser implementados en la *práctica* de la educación matemática.

El establecimiento de la investigación de implementación en educación matemática, además de ser relevante, cuenta con antecedentes dentro y fuera de la disciplina que pueden servir como punto de partida para su institución y desarrollo inicial; además, existe un creciente interés en este tipo de investigación dentro de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática, el cual puede dar envite al desarrollo de esta área.

La relevancia de la investigación de implementación radica en que nos permitiría enfocarnos en los métodos y las condiciones que promueven o inhiben la adopción de resultados de investigación en la práctica educativa. Además, entre otras cosas, nos permitiría conocer más acerca de cómo lograr que las innovaciones y teorías que generamos produzcan un cambio efectivo y duradero.

Existen antecedentes sobre la investigación de implementación —particularmente en el campo de la medicina, donde incluso existe una revista de investigación especializada llamada *Implementation Science*— cuyos métodos y constructos teóricos podrían ser de ayuda en la gestación de un área de investigación similar en educación matemática. Por ejemplo, existen trabajos teóricos como el de Nilsen (2015) y Rapport *et al*. (2018) que podrían ayudarnos a identificar y definir conceptos clave dentro del área de investigación, así como para aprender a distinguir entre las diferentes categorías de teorías, modelos y marcos de la ciencia de la implementación. En el campo de la investigación educativa también hay antecedentes empíricos y conceptuales sobre la investigación de implementación que pueden ser de gran utilidad para conducir ese tipo de investigación en educación matemática; un ejemplo es la revisión y ordenación conceptual que Century & Cassata (2016) hacen de la investigación de implementación en el área educativa.

En el campo de la educación matemática el "problema de la implementación" no es nuevo. Éste ha sido identificado con anterioridad como un problema que se relaciona con el establecimiento del marco estructural y organizacional en el que la educación matemática tiene lugar (Niss, 1994). Además, es claro que existe conocimiento acumulado en nuestro campo acerca de la implementación de resultados e innovaciones, el cual ha sido generado por investigaciones que de una manera u otra se han enfocado en distintos aspectos de la implementación; por ejemplo, los estudios de reproducibilidad realizados desde los años ochenta, o más recientemente

los estudios realizados desde la perspectiva de la investigación de diseño (véase, por ejemplo, Artigue, 1986; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Finalmente, existe un creciente interés dentro de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática por este tipo de investigaciones, el cual puede verse reflejado en la instauración de un grupo de trabajo temático en el marco del *Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática*, mismo que está enfocado en el estudio de la implementación de resultados de investigación (véase Jankvist, Aguilar, Ärlebäck & Wæge, 2017). Otro indicador de este interés creciente es el número especial y la serie de editoriales sobre implementación que la revista *Journal for Research in Mathematics Education* ha publicado bajo la dirección de Jinfa Cai y su equipo editorial, los cuales abordan este aspecto de la relación entre la teoría y la práctica de la educación matemática (véase, por ejemplo, Cai *et al*., 2017).

La investigación de implementación de resultados de investigación es un área que sin duda nos ayudaría a avanzar en nuestro propósito de mejorar la práctica de la educación matemática. El tiempo mostrará si logra establecerse como un área de investigación propia.

Referencias

Artigue, M. (1986). Modélisation et reproductibilité en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(1), 5-62.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. DOI: 10.1007/BF00314724

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V. & Hiebert, J. (2017). Making classroom implementation an integral part of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(4), 342-347. DOI: 10.5951/jresematheduc.48.4.0342

Century, J. & Cassata, A. (2016). Implementation research: Finding common ground on what, how, why, where, and who. *Review of Research in Education*, *40*(1), DOI: 10.3102/0091732X16665332

Education Committee of the European Mathematics Society (2011a). "Solid findings" in mathematics education. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *81*, 46-48.

_____ (2011b). Do theorems admit exceptions? Solid findings in mathematics education on empirical proof schemes. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *82*, 50-53.

_____ (2012). What are the reciprocal expectations between teacher and students? Solid findings in mathematics education on didactical contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *84*, 53-55.

_____ (2014). Solid findings: concept images in students' mathematical reasoning. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *93*, 50-52.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational Research Design* (pp. 17-51). London: Routledge.

Jankvist, U. T., Aguilar, M. S., Ärlebäck, J. B. & Wæge, K. (2017). Introduction to the papers of TWG23: Implementation of research findings in mathematics education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1-5, 2017) (pp. 3769-3775). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127-136). Dordrecht: Kluwer.

Nilsen, P. (2015). Making sense of implementation theories, models and frameworks. *Implementation Science*, *10*(53), 1-13. DOI: 10.1186/s13012-015-0242-0

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 367-378. Dordrecht: Kluwer.

Rapport, F., Clay-Williams, R., Churruca, K., Shih, P., Hogden, A. & Braithwaite, J. (2018). The struggle of translating science into action: Foundational concepts of implementation science. *Journal of Evaluation in Clinical Practice*, *24*(1), 117-126. DOI: 10.1111/jep.12741

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 69-110. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95. DOI: 10.1007/s10649-008-9133-5

Verschaffel, L., Greer, B. & de Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vinner, S. & Herschkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 177-184). Berkeley, California: PME.

Correo-e: masanchez@ipn.mx

SECCIÓN 2

Propuestas para el uso de tecnología en la educación matemática

Capítulo 3
Experimentación, modelación, simulación y el uso de GeoGebra en la formación matemática de profesoras de telesecundaria

Alberto Santana Ortega
Escuela Normal Rural "Carmen Serdán" (México)
Ana Luisa Gómez-Blancarte
Instituto Politécnico Nacional (México)

Resumen

Ante el bajo nivel de dominio de contenidos matemáticos, detectado en futuras docentes de telesecundaria que durante 2017 estudiaban el segundo grado —en modalidad escolarizada—en la Escuela Normal Rural "Carmen Serdán", se consideró necesario diseñar e implementar una propuesta didáctica basada en experimentación, modelación y simulación, así como en el uso de GeoGebra para favorecer el dominio de contenidos matemáticos en las normalistas.

En este escrito se presenta el reporte de una investigación cuyo propósito fue determinar si al aplicar la propuesta se mejorará el nivel de dominio de contenidos matemáticos en las futuras profesoras. También se expone, como ejemplo, una secuencia didáctica en la que se detalla el tipo de actividad realizada en la propuesta para abordar el tema de funciones lineales.

El estudio se realiza con un enfoque cuantitativo y diseño cuasi-experimental, usando un grupo de control y un grupo experimental. Se diseñó y validó un instrumento para aplicarlo como pre-test y un pos-test en ambos grupos.

Los resultados muestran una mejora en el dominio de contenidos matemáticos por parte de las alumnas a las que se les aplicó la propuesta didáctica. Lo anterior sugiere que esta intervención fue efectiva para favorecer y mejorar el nivel de dominio de contenidos matemáticos durante la formación de profesoras de telesecundaria.

Palabras clave: Formación docente, GeoGebra, experimentación, modelación y simulación.

Introducción

La sociedad actual requiere de profesores cada vez más preparados para atender las necesidades educativas en las escuelas de nuestro país. Es fundamental que las normales rurales se fortalezcan para poder hacer frente a los nuevos retos que se presentan. Sin embargo, la formación de docentes en el contexto normalista rural sigue teniendo áreas de oportunidad que deben ser atendidas, tal es el caso de la preparación que reciben los futuros profesores de telesecundaria en matemática educativa.

Durante un curso titulado la Enseñanza de las Matemáticas I (EM-I) se observó falta de dominio de contenidos matemáticos (e. g., álgebra, geometría, trigonometría) por parte de las futuras docentes que estudiaban la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Telesecundaria (LESET) dentro de la Escuela Normal Rural "Carmen Serdán" (ENRCS). Además, se encontró que las estudiantes normalistas no tienen bases sólidas en experimentación, modelación y simulación (EMS) ni en el uso de *software* específico, como GeoGebra o Maple, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El programa vigente del curso EM-I (SEP, 2000), se encuentra desactualizado, pues no se consideran escenarios tipo EMS ni el uso de *software* matemático dentro del proceso de formación docente, como los que hoy en día se recomiendan (e. g., Williams y Goos, 2013).

Para atender este problema se diseñó y aplicó una propuesta didáctica basada en EMS y en el uso de GeoGebra. La finalidad de la propuesta fue promover el desarrollo de dos tipos de competencias: digital y matemática. La primera se refiere al uso de tecnología digital como herramienta profesional, para que el futuro docente la integre durante el estudio de las matemáticas con sus alumnos (Jasute & Dagiene, 2012). La competencia matemática es el conocimiento de los contenidos matemáticos que el futuro profesor debe enseñar. Esta competencia se reconoce como un plan estructural del docente para organizar las habilidades cognitivas y las destrezas utilizadas en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas (Kilpatrick, 2014). El objetivo del presente estudio es doble: 1) ilustrar la metodología de implementación de la propuesta didáctica y 2) evaluar

cuantitativamente la propuesta didáctica en términos del aprendizaje de contenidos matemáticos. Así, la pregunta de investigación que guía este estudio plantea: ¿es posible que las futuras docentes de telesecundaria mejoren su aprendizaje en contenidos matemáticos cuando resuelven problemas basados en el uso de EMS y GeoGebra?

Marco Teórico

La matemática experimental, apoyada en la tecnología de computadoras, es una rama que comienza a ganar atención en la matemática educativa (Acosta, Mejía y Rodríguez, 2011). Los modelos describen nuestras creencias sobre cómo funciona el mundo real. En el modelado matemático, traducimos esas creencias al lenguaje de las matemáticas (Trigueros, 2006).

La simulación es la aplicación de un modelo con el objetivo de derivar estrategias que ayudan a resolver un problema o responder a una pregunta relacionada con un fenómeno determinado (Velten, 2009). La experimentación implica la realización material del sistema experimental, los objetos de estudio, el aparato y su interacción, así como una intervención activa en el entorno de este sistema. En este sentido, el experimento se contrasta con la teoría, incluso si el trabajo teórico siempre se atiende con actos materiales como lo es escribir una fórmula matemática (Radder, 2009). Debido a la complejidad de las ideas matemáticas, y al reto que implica su enseñanza, es necesario un marco teórico para fundamentar la instrucción basada en EMS (Bu, Spector y Haciomeroglu, 2011).

La revisión de literatura especializada muestra que la cantidad y la calidad de las experiencias pedagógicas con EMS y GeoGebra, incluidas en la formación docente inicial, son factores cruciales influyentes en la adopción de estrategias didácticas similares por parte de los futuros profesores (e. g., Escareño, 2002; Kortenkamp, 2004; Máder, 2011; González, 2014; Rubio, Prieto y Ortiz, 2016).

Por ejemplo, Escareño (2002) indaga cómo influyen entre sí las formas de enseñar con o sin herramientas computacionales. El autor muestra que un manejo flexible de las matemáticas —aprovechar la flexibilidad que ofrece el *software* para mostrar y comprender los objetos matemáticos— por parte de los profesores, así como su compromiso personal, son elementos fundamentales para que un proyecto que hace uso de la tecnología

tenga buenas perspectivas de éxito. Por su parte, Máder (2011) muestra cómo funciona la matemática experimental en el aula, demostrando que las computadoras se pueden utilizar como un recurso didáctico fundamental en cada fase de todo el proceso de aprendizaje.

En particular, el uso del *software* GeoGebra para apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha influido positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes (Barahona, Barrera, Vaca e Hidalgo, 2015). Rubio, *et al.* (2016) muestran que al combinar EMS y GeoGebra se obtienen entornos de aprendizaje que promueven el desarrollo del conocimiento matemático y las habilidades de pensamiento científico necesarios para los estudiantes. Cetinkaya, *et al.* (2016) examinan el proceso de formación matemática de futuros docentes sobre la naturaleza del modelado matemático en simulaciones para la resolución de problemas experimentales de la vida real, y analizan los principios y estrategias pedagógicas necesarias para enseñar matemáticas a través del modelado. En su estudio, enfatizan la necesidad de implementar la mayor cantidad posible de experiencias con EMS en los futuros docentes.

De acuerdo con la literatura revisada, consideramos que incorporar EMS y usar GeoGebra es un área de oportunidad que podría brindar soluciones a las dificultades que se presentan en las aulas de las escuelas formadoras de docentes con mayor frecuencia. Por parte de las alumnas, dificultades asociadas al dominio de los contenidos de matemáticas, actitudes negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas, dificultades con la abstracción y contextualización y el uso correcto del lenguaje matemático formal. Por parte del profesor, dificultades asociadas al proceso de diseño de propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas.

Metodología

En esta investigación se utiliza un enfoque cuantitativo y diseño cuasi-experimental. Se considera un grupo de control y un grupo experimental. Para determinar el impacto de la propuesta didáctica, se diseña y valida un instrumento para aplicarlo como pre-test y pos-test en ambos grupos. Los datos que se analizan fueron las respuestas de ambos exámenes en los dos grupos (experimental y control).

Métodos estadísticos

Para este estudio se usan pruebas para contraste de hipótesis estadísticas, la magnitud del efecto de Cohen y el factor de ganancia normalizada de Hake.

Una prueba de hipótesis es una regla que especifica si se puede aceptar o rechazar una afirmación acerca de los grupos de estudio, dependiendo de la evidencia proporcionada por los datos (Triola, 2013). Las pruebas de hipótesis empleadas para el análisis son dos pruebas paramétricas, la primera usando la prueba-*t* para datos pareados, con el objetivo de determinar diferencias entre las medias de cada grupo; la segunda, es la prueba-*t* para muestras independientes, que se usa para determinar diferencias en las medias del grupo de control contra el grupo experimental. Además, dos pruebas no paramétricas, la primera es la U de Mann-Whitney, usada para determinar las diferencias que hay entre las medianas del grupo de control contra el grupo experimental; la segunda, es la prueba de Wilcoxon, para determinar las diferencias entre las medianas de cada grupo. En todas las pruebas se utiliza 0.05 como nivel de significancia. Dado que la significancia estadística por sí misma no implica que necesariamente los resultados tengan una consecuencia práctica importante, es necesario complementar el estudio con el cálculo del tamaño del efecto (d) y el factor de ganancia normalizada (g). En este escrito solo se reportan los resultados de d y de g para el grupo experimental.

La magnitud del efecto informa cuántas desviaciones típicas de diferencia hay entre los resultados de los dos grupos que se comparan. El tamaño del efecto también indica en qué grado la hipótesis nula es falsa (Cohen, 1988). Se define como la razón de la diferencia entre la media grupal obtenida en el pos-test y la media grupal obtenida en el pre-test respecto a la desviación estándar combinada.

El factor de ganancia normalizada se define como la razón de cambio entre una prueba preliminar (pre-test) y una prueba final (pos-test) respecto del máximo aumento posible (Hake, 1998).

Para asegurar la certeza de los resultados obtenidos en este estudio, todas las pruebas estadísticas se realizan mediante el uso de *software* estadístico (las pruebas de hipótesis con Minitab, Statgraphics y SPSS, el tamaño del efecto con Stata y la ganancia normalizada con Excel). El cálculo de los

resultados cuantitativos se verifica por parte de un investigador independiente a este estudio.

El contexto, la población y la muestra

La población de interés, para los objetivos de este proyecto de investigación, está formada por las alumnas de la ENRCS. Esta escuela es una institución pública formadora de docentes que se encuentra en el municipio de Teteles de Ávila Castillo, Puebla. La escuela opera como un internado para mujeres de escasos recursos, en la que a cada alumna se le otorga una beca que incluye estudios, alimentación, hospedaje y servicio médico. Además de la LESET, la ENRCS oferta otras dos licenciaturas (en educación primaria y en educación preescolar).

Durante 2017 había inscritas 350 alumnas en la ENRCS, de las que 140 estaban dadas de alta en la LESET. Del total de integrantes de la LESET, 38 eran las que estudiaban el segundo grado. De ellas, 20 pertenecían al grupo C y 18 al grupo D.

Puesto que, solamente en segundo grado las alumnas reciben formación para la enseñanza de las matemáticas, la muestra se conformó por todas las estudiantes de este nivel que terminaron como alumnas regulares. Por razones ajenas a este estudio y al curso EM-I, en cada grupo se dio de baja una estudiante normalista. Así, al final, las participantes del estudio fueron 19 alumnas del grupo experimental (2C) y 17 del grupo de control (2D). La edad de las alumnas oscila entre los 17 y 22 años de edad, procedentes de los estados de Puebla, Guerrero, Veracruz, Oaxaca, Tlaxcala y Morelos.

La asignatura para La Enseñanza de las Matemáticas I (EM-I)

EM-I es una de las dos asignaturas para la enseñanza de las matemáticas en telesecundaria que reciben las alumnas de segundo grado de la LESET. Esta asignatura se cursa durante el tercer semestre, y en cuarto semestre reciben una asignatura subsecuente para la enseñanza de las matemáticas.

La asignatura EM-I tiene el propósito de contribuir al desarrollo de las habilidades intelectuales específicas relacionadas con la enseñanza y el dominio de los contenidos de matemáticas que se trabajan en telesecundaria. Estos contenidos son: aritmética (operaciones básicas con enteros y con

fracciones, proporciones directas e inversas), álgebra (exponentes, polinomios, productos notables, factorización, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones y gráficas), geometría plana (construcciones geométricas, medición y cálculo geométrico del perímetro y área) y del espacio (cuerpos geométricos, medición y cálculo de volumen), trigonometría (funciones naturales, teorema de Pitágoras), fundamentos de probabilidad (frecuencial, eventos mutuamente excluyentes) y estadística (medidas de tendencia central, tablas y gráficas estadísticas).

La propuesta didáctica

La propuesta didáctica consiste en el diseño y aplicación de actividades basadas en EMS y GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos señalados en la asignatura EM-I (véase tabla 1). El diseño de las unidades didácticas se fundamenta en ideas teóricas de las corrientes constructivistas de la educación, pues con las actividades se busca que las estudiantes actúen, hablen, piensen y evolucionen intelectualmente por su propia motivación (Brousseau, 1997); en esta propuesta didáctica se busca que las futuras docentes del grupo experimental apliquen el método de los cuatro pasos para resolver problemas (Polya, 1989), a partir de sus conocimientos previos y en un ambiente escolar de trabajo colaborativo.

Durante el curso, los grupos reciben 30 sesiones de clase con una duración de dos horas cada una. Para la propuesta didáctica se dedicaron 24 sesiones. El resto de las sesiones se dedican a actividades relacionadas con el análisis de las jornadas de práctica docente que se realizan durante el semestre.

En total se implementaron seis actividades, una por cada rama de las matemáticas. Cada actividad tuvo una duración de cuatro sesiones de dos horas cada una y se llevaron a cabo en el laboratorio de matemáticas de la escuela. En cada una de las actividades se contempla una fase de inicio, una de desarrollo y otra de cierre. Para todas las actividades se organiza al grupo experimental en cuatro equipos de cuatro integrantes y uno de tres personas. Todas las actividades están basadas en EMS y uso de GeoGebra, y, en general, aportan experiencias e ideas que las futuras docentes pueden implementar posteriormente en las escuelas telesecundarias.

Implementación de la propuesta (el caso de la modelación algebraica*)*

Enseguida se describe un ejemplo que ilustra la metodología de implementación de la propuesta. Se presenta el caso de la resolución de un problema sobre ecuaciones lineales para modelizar la elasticidad de un resorte. En este problema se utiliza GeoGebra y un simulador de elasticidad de resortes, como herramientas para realizar experimentación, modelación y simulación matemática en el tema de funciones lineales.

Antes de la puesta en escena, se realizó un encuadre en el que se explica detalladamente a las alumnas la dinámica de trabajo que se pretende realizar y se les dan a conocer las actividades a resolver (hojas de trabajo), así como el esquema de evaluación que se utiliza, dando a conocer sus criterios e instrumentos.

En la fase de inicio (primera sesión) se comienza preguntando a las futuras docentes sobre los usos y aplicaciones de los resortes en la vida cotidiana. Luego se plantea una pregunta que sirve como detonante para dar inicio a la resolución del problema: ¿cuál es el modelo matemático de la elasticidad de un resorte? Antes de dar respuesta a la pregunta, se apoya a las estudiantes con el manejo del *software* GeoGebra y al uso de los simuladores. La fase termina con una actividad extra-clase, se les pide a las estudiantes que busquen información sobre los aspectos teóricos y matemáticos implicados (e. g., vocabulario asociado al nombre de los resortes según el ámbito en que se usan, ecuación de elasticidad de Hooke) en las subsecuentes actividades.

En la fase de desarrollo (segunda y tercera sesiones), a cada equipo se le facilitó una computadora con el *software* necesario y acceso a internet, hojas de trabajo, un soporte universal completo, un juego de pesas con gancho, tres resortes con distintas durezas, una regla y un flexómetro. Con base en las hojas de trabajo, tienen que utilizar el simulador de resortes (véase Figura 1), diseñado por Arrieta (2003) para poder obtener datos y guardarlos en una hoja de cálculo de GeoGebra.

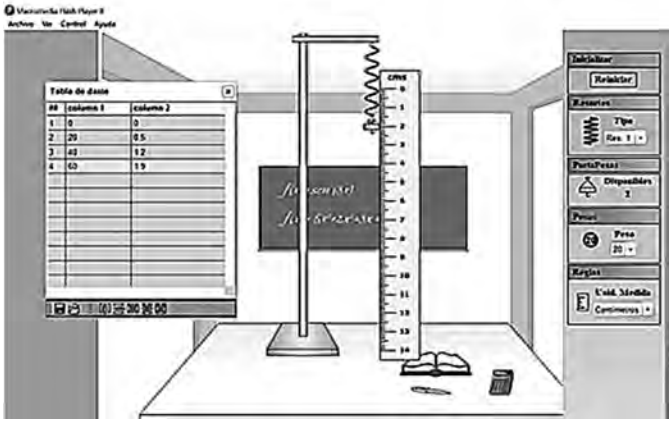


Figura 1. Simulador para la elasticidad de los resortes

Posteriormente, tienen que realizar el mismo experimento usando el soporte universal, los resortes y las pesas (véase Figura 2), para hacer mediciones, obtener los datos y registrarlos en otra hoja de cálculo de GeoGebra.

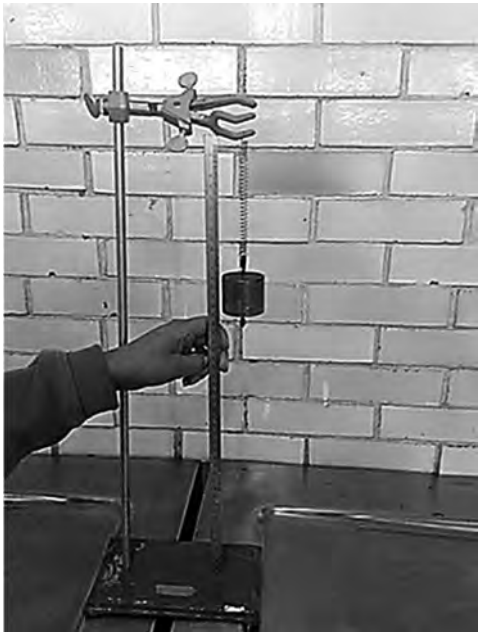


Figura 2. El experimento sobre elasticidad de los resortes

Posteriormente se les pidió que, a partir de sus datos tratasen de responder a las preguntas de las hojas de trabajo. En esta parte se supervisó el trabajo y se atendieron las dudas de las estudiantes. Se pidieron participaciones para escuchar las experiencias vividas durante la simulación y experimentación, abordando las dificultades detectadas.

En la tercera sesión se explicó a las futuras docentes cómo realizar el ajuste de la recta de mínimos cuadrados en GeoGebra, a partir de sus datos (véase Figura 3). Luego se les indicó que generaran el modelo matemático para la elasticidad de cada tipo de resorte, de acuerdo con la naturaleza de los datos (obtenidos del simulador u obtenidos del experimento). En total se esperaba que hicieran seis modelos, tres para los resortes simulados y tres para los resortes reales.

La intención de realizar el experimento físico y el simulado es que las normalistas tuvieran la oportunidad de identificar las ventajas y limitaciones de cada tipo de actividad, reflexionando sobre las dificultades que pueden presentarse durante el proceso de instrucción.

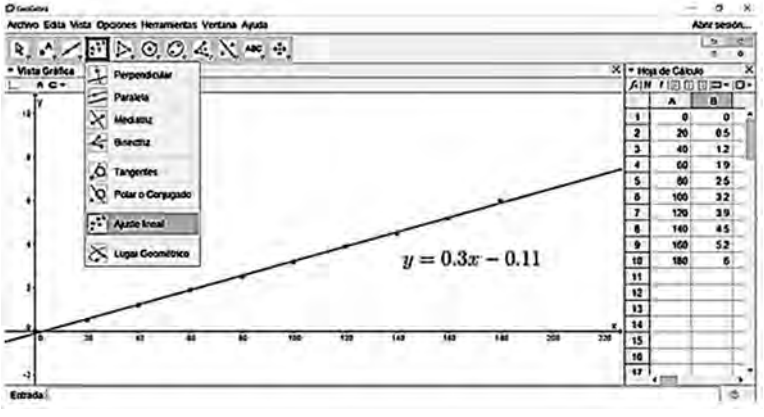


Figura 3. Uso de GeoGebra para obtener el modelo matemático de la elasticidad

Para complementar esta actividad, se les pidió indagar sobre cómo generar ese modelo con lápiz y papel, utilizando la regresión lineal. Asimismo, se les solicitó hacer manualmente la gráfica de una función lineal, con la finalidad de comparar los procedimientos no tecnológicos contra las actividades de aprendizaje basados en herramientas tecnológicas. Como actividad

extra-clase, se les pidió calcular todos los modelos a mano y comprobarlos con GeoGebra. Además, cada equipo preparó una presentación que contiene los resultados obtenidos.

En la fase de cierre (cuarta sesión), cada equipo utilizó diez minutos para hacer su presentación. Una vez terminadas las exposiciones, todos los equipos entregaron sus hojas de trabajo. Al final de la sesión se socializa la experiencia con las alumnas, y en general se esperaba notarlas más motivadas y con mejor actitud hacia las matemáticas.

Evaluación de la propuesta didáctica

Para evaluar el dominio de contenidos matemáticos estudiados en las actividades didácticas, se aplicaron dos instrumentos: un pre-test y un pos-test. Ambos exámenes fueron previamente validados por medio del cálculo del coeficiente de Cronbach (a=0.7). El alfa de Cronbach se utiliza con regularidad en la investigación educativa que explora aspectos del dominio cognitivo. La validez de esta prueba se refiere al grado en que mide aquello que pretende medir, en este caso el nivel de dominio de los contenidos matemáticos. De acuerdo con Taber (2017), aunque no hay un criterio establecido entre los académicos, sigue siendo una práctica común en la investigación educativa considerar que cuando alfa alcanza al menos el valor de 0.7, esto se considera como medida suficiente de fiabilidad o consistencia interna de un instrumento.

Cada uno de los dos exámenes contiene 12 ítems (véase tabla 1), mismos que son utilizados como pre-test y pos-test en el grupo de control y en el grupo experimental. Los exámenes son aplicados y evaluados por un investigador distinto al profesor titular del curso EM-I. El primer examen se aplicó en la segunda semana del inicio de clases. El segundo examen se aplicó una semana antes de terminar el curso y después de concluir la instrucción mediante la propuesta didáctica. Cada uno de los dos exámenes tiene una duración de dos horas y son aplicados por separado a ambos grupos —primero el de control y luego el experimental— en el laboratorio de matemáticas de la escuela. La escala que se consideró para evaluar los exámenes es de cero al diez.

Tabla 1. Resumen del contenido matemático de los problemas en los exámenes pre-test y pos-test

Rama de las matemáticas	Número de ítem	Contenido matemático	
		Pre-test	Pos-test
Aritmética	1	Operaciones básicas	Operaciones básicas
	2	Operaciones básicas	Operaciones básicas
Álgebra	3	Modelación algebraica	Sistemas lineales 2x2
	4	Sistemas lineales 2x2	Modelación algebraica
Trigonometría	5	Teorema de Pitágoras	Teorema de Pitágoras
	6	Razones trigonométricas	Razones trigonométricas
Geometría	7	Áreas sombreadas	Áreas sombreadas
	8	Fórmula de Herón	Fórmula de Herón
Probabilidad	9	Probabilidad frecuencial	Probabilidad frecuencial
	10	Ley de la suma	Ley de la suma
Estadística	11	Mediana	Media aritmética
	12	Media aritmética	Mediana

Fuente: Elaboración propia.

Resultados

Los puntajes obtenidos, tanto en el pre-test como en el pos-test, por parte del grupo de control y el grupo experimental, se muestran en la tabla 2 como resumen de los resultados estadísticos considerados para realizar el análisis cuantitativo descrito en la metodología de este estudio.

Tabla 2. Resumen de estadísticos descriptivos y porcentajes de aciertos para los dos grupos en los exámenes escritos

Estadísticos	Pre-test		Post-test	
	Control	Experimental	Control	Experimental
Media	0.347	0.789	1.229	3.463
Desviación Estándar	0.789	0.906	1.108	0.855
Mediana	0.000	0.800	1.700	3.300
Porcentaje de aciertos	3.500	7.900	12.300	34.600

Además, en la Figura 4, se presenta una gráfica de cajas que permite hacer una inspección visual de los resultados en cada grupo. El resultado individual de cada alumna también se muestra en la gráfica de cajas con un símbolo específico (o).

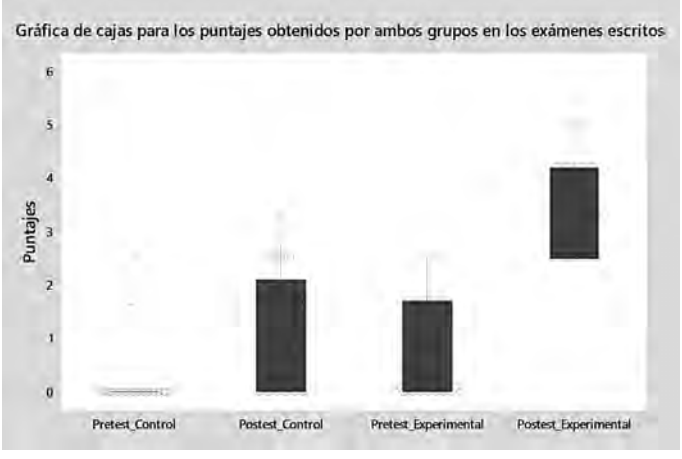


Figura 4. Gráfica de cajas de los puntajes obtenidos por ambos grupos en los exámenes

La gráfica anterior muestra que, en el pos-test, las estudiantes del grupo experimental tienen mejores puntajes y con menor variabilidad que los obtenidos por el grupo de control en esa misma prueba. También se puede observar que las alumnas del grupo experimental tuvieron mejores puntajes en el pos-test que en el pre-test.

Para el análisis de los puntajes obtenidos en los exámenes, se presentan los resultados de todas las pruebas estadísticas utilizadas en esta investigación.

Resultados de las pruebas de hipótesis estadísticas

Tabla 3. Pruebas-t para datos independientes

Pruebas escritas	Control		Experimental		p-valor	Diferencia estadística significativa
	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.		
Pre-test	0.347	0.789	0.789	0.906	0.127	No
Post-test	1.229	1.108	3.463	0.855	<0.001	Sí

La tabla 3, contiene resultados que muestran que antes de la aplicación de la propuesta didáctica, las medias obtenidas por las alumnas de ambos grupos en el pre-test son prácticamente iguales, pues no hay diferencia estadística significativa entre ellas; también se observa que luego de aplicar la propuesta didáctica, la media obtenida en el pos-test por las alumnas del grupo experimental es significativamente mayor que la media obtenida por las estudiantes del grupo de control.

Tabla 4. Pruebas-t para datos pareados

Grupo	Pre-test		Pos-test		p-valor	Diferencia estadística significativa
	Media	Desv. Est.	Media	Desv. Est.		
Experimental	0.789	0.906	3.463	0.855	<0.001	Sí

Los resultados presentados en la tabla 4 revelan que luego de implementar la propuesta didáctica, la media obtenida en el pos-test por parte de las alumnas del grupo experimental es significativamente mayor que la media obtenida por esos mismos estudiantes en el pre-test.

Tabla 5. Prueba U de Mann-Whitney

Pruebas escritas	Control		Experimental		U	p-valor	Diferencia estadística significativa
	Mediana	Rango medio	Mediana	Rango medio			
Pre-test	0.000	15.529	0.800	21.157	111	0.064	No
Pos-test	1.700	10.058	3.300	26.052	18	<0.001	Sí

Los resultados que aparecen en la tabla 5 confirman que antes de la aplicación de la propuesta didáctica, las medianas obtenidas por las alumnas de ambos grupos en el pre-test son prácticamente iguales, pues no existe diferencia estadística significativa entre ellas; además, luego de aplicar la propuesta didáctica, la mediana obtenida en el pos-test por las alumnas del grupo experimental es significativamente mayor que la mediana obtenida por las estudiantes del grupo de control.

Tabla 6. Prueba de Wilcoxon

Grupo	Pre-test	Pos-test	Rangos negativos	Rangos positivos	Z	p-valor	Diferencia estadística significativa
	Mediana	Mediana					
Experimental	0.800	3.300	0	19	190	<0.001	Sí

Los resultados mostrados en la tabla 6 reafirman que, después de aplicar la propuesta didáctica, la mediana obtenida por las estudiantes del grupo experimental en el pos-test es significativamente mayor que la mediana obtenida por esas mismas estudiantes en el pre-test.

En general, los resultados obtenidos en los dos tipos de pruebas de hipótesis estadísticas (paramétricas y no paramétricas) se complementan y refuerzan mutuamente. Con estas herramientas se demuestra que los grupos comenzaron prácticamente con el mismo nivel de dominio de los contenidos matemáticos —ya que antes de implementar la propuesta didáctica no se encontró diferencia estadística significativa entre los puntajes del pre-test de ambos grupos—, pero al terminar la propuesta didáctica los

puntajes del grupo experimental son significativamente mayores que los puntajes del grupo de control, y que en el grupo experimental los puntajes del pos-test son significativamente mayores que los puntajes del pre-test.

Resultados del cálculo de la magnitud del efecto y de la ganancia normalizada

Al calcularse el tamaño del efecto en el grupo experimental se encontró que el tamaño del efecto obtenido en este análisis ($d = 3.035$) excede la convención de Cohen (1988) para un efecto grande ($d = 0.800$), porque todas las alumnas del grupo superan en el pos-test a la media grupal obtenida por ellas mismos en el pre-test.

Finalmente, el factor de Hake indica una ganancia de alrededor de 30% para las alumnas del grupo experimental en el aprendizaje de los contenidos matemáticos estudiados. El valor para este factor ($g = 0.300$) se considera como el mínimo con el que la propuesta didáctica podría considerarse efectiva (Hake, 1998).

Reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Es necesario que en las escuelas normales rurales se pueda ofrecer una formación profesional sólida a las nuevas generaciones de profesores que impartan clases de matemáticas a alumnos de telesecundaria. Para tratar de conseguirlo, es fundamental actualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el contexto de estas instituciones formadoras de docentes. De acuerdo con las nuevas propuestas educativas, impulsadas oficialmente por la SEP (2016), las normales rurales deben rediseñar su oferta académica para poder competir a la par de otras instituciones, en el nuevo marco del servicio profesional docente.

Por una parte, en el rediseño se debe asegurar que los maestros encargados de la formación en matemática educativa de los futuros docentes de telesecundaria, egresados de las escuelas normales rurales, deben recibir la capacitación adecuada y estar preparados para ser agentes de cambio y fortalecimiento de estas instituciones. Aunque el formador de docentes tiene la libertad de implementar acciones que permitan modernizar e innovar su práctica y la de sus estudiantes, es fundamental contar con el apoyo de

la institución y del sistema de educación normalista. Por ejemplo, a través de programas de formación permanente se puede apoyar al maestro para que adquiera las habilidades y conocimientos necesarios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de la tecnología.

Por otro lado, consideramos que los nuevos planes y programas de estudio para la LESET, deben incluir metodologías y orientaciones didácticas —basadas en los avances de investigación en matemática educativa— que promuevan el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, específicamente, de programas tecnológicos de uso educativo como los simuladores y el *software* GeoGebra.

Con estas consideraciones, las nuevas docentes de telesecundaria que egresan de la escuela normal rural pueden recibir una formación profesional que les permita reconocer que una integración adecuada de la EMS y de GeoGebra dentro de las actividades del aula ayudan a fomentar la construcción del conocimiento matemático; para esto deben experimentar y reconocer por sí mismas que, estrategias similares a ésta, resultan muy útiles para crear ambientes innovadores para el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, en la formación de docentes de telesecundaria recomendamos un uso estratégico de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en donde el proceso no dependa única y exclusivamente de la tecnología. Más bien, sugerimos que se usen las herramientas tecnológicas de acuerdo con las necesidades de enseñanza del formador y de aprendizaje por parte de los futuros docentes, con lo que se logrará mantener a las matemáticas como el foco de la instrucción y otorgar a la tecnología educativa la legitimidad de ser un recurso valioso.

Conclusiones

Los resultados confirman que haber aplicado la propuesta didáctica en el curso EM-I ayudó a mejorar el nivel de dominio de contenidos matemáticos en las alumnas del grupo experimental. La principal aportación de esta investigación a la matemática educativa reside en haber experimentado con éxito —pues los resultados muestran una mejora en el dominio de los contenidos matemáticos— la implementación de una propuesta didáctica basada en EMS y en el uso de un *software* como GeoGebra, para favorecer

la adquisición de competencias matemáticas necesarias en la formación de las futuras docentes de telesecundaria. En particular, se confirma que con el uso de GeoGebra se pueden enfatizar diferentes conceptos y se pueden estudiar de manera más profunda (Heid, Thomas y Zbiek, 2013).

Queda claro que implementar EMS y GeoGebra en la formación de docentes de telesecundaria genera nuevas oportunidades para el aprendizaje y el trabajo en colaboración. Por lo tanto, los formadores de docentes de matemáticas deben promover el uso de herramientas tecnológicas y actividades didácticas que ayuden al crecimiento intelectual de los futuros profesores (Trouche, Drijvers, Gueudet y Sacristán, 2013).

Referencias

Acosta, M. E., Mejía, C., y Rodríguez, C. W. (2011). Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido. *Revista Integración*, *29*(2), 163-174.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis de doctorado no publicada). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN.

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., e Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para enseñanza de matemáticas y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica-ESPOL*, *28*(5), 1-12.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Bu, L., Spector, J. M., y Haciomeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics Learning and instruction using GeoGebra. En L. Bu & R. Schoen (eds.), *Model-Centered Learning* (pp. 13-40). The Netherlands: Sense Publishers.

Cetinkaya, B., Kertil, M., Erbas, A., Korkmaz, H., Alacaci, C., y Cakiroglu, E. (2016). Pre-service teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 287-314.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Hillsdale: Erlbaum.

Escareño, F. (2002). La tecnología en clase de matemáticas: su influencia en la práctica de enseñanza. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16*, 456-470. La Habana: Iberoamérica.

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación*, *65*, 161-172

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American journal of Physics*, *66*(1), 64-74.

Heid, M., Thomas, M., y Zbiek, R. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum? En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, 597-641. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Jasute, E., y Dagiene, V. (2012). Towards Digital competencies in mathematics education: a model of interactive geometry. *International Journal of Digital Literacy and Digital Competence*, *3*(2), 1-19.

Kilpatrick, J. (2014). Competency frameworks in mathematics education. En S. Lerman, *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 85-87). Heidelberg: Springer.

Kortenkamp, U. (2004). Experimental mathematics and proofs in the classroom. *ZDM, 36*(2), 61-66.

Máder, A. (2011). The use of experimental mathematics in the classroom. En R. Vajda, & J. Karsai (Eds.), *Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life –2011,* 1-20. Recuperado de http://www.model.u-szeged.hu/etc/edoc/imp/AMader/AMader.pdf

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Radder, H. (2009). The philosophy of scientific experimentation: a review. *Automated experimentation*, *1*(1), 1-8.

Rubio, L., Prieto, J., y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *5*, 90-111.

Secretaría de Educación Pública (2000). *La enseñanza de las matemáticas en telesecundaria I. Contenidos y enfoque. Tercer Semestre*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. México: Autor.

Taber, K. S. (2017). The use of Cronbach's alpha when developing and reporting research instruments in science education. *Research in Science Education*. DOI: 10.1007/s11165-016-9602-2

Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(31), 1207-1240. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14003106.pdf

Triola, M. (2013). *Estadística*. México: Pearson.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., y Sacristán, A. (2013). Technology-driven developments and policy implications for mathematics education. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, 753-789. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*. Weinheim: John Wiley & Sons.

Williams, J., y Goos, M. (2013). Modelling with Mathematics and Technologies. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, 549-569. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Correos-e: jgsraso@gmail.com / algomezb@ipn.mx /
1995perezdora@gmail.com

Capítulo 4
Importancia de procesos cognitivos instrumentados en la enseñanza de las matemáticas

François Pluvinage
Cinvestav-IPN (México)
e IREM de Strasbourg (France)

Resumen

En este texto reportamos los aspectos teóricos y prácticos subyacentes a la presentación que hicimos durante dos sesiones de taller en el marco del encuentro TEMBI 4. El objetivo era ofrecer a los participantes una oportunidad de descubrir por la práctica algunos métodos que se usaron primero en la investigación en matemática educativa y que tienen validez para la enseñanza en el aula. Citamos entre otras la TSD (teoría de las situaciones didácticas), la ingeniería didáctica, la PBL (Project based learning, cuyo origen se puede ver en la propuesta de Exemplarischer Unterricht). En el marco del modelo de los Espacios de Trabajo Matemáticos, introdujimos actividades de exploración guiada, que propiciaran la aproximación documental y la aproximación instrumental. Luego consideramos en el taller actividades que proporcionaran a los participantes una oportunidad de introducirse en la ingeniería didáctica. Además de la condición obvia de tener interés en la enseñanza de las matemáticas, se esperaba de los participantes en el TEMBI 4 un nivel matemático que corresponda a una maestría adecuada a los contenidos de la preparatoria. Se recomienda que los lectores del presente texto tengan este nivel para aprovechar al máximo su lectura.

Palabras clave: Espacios de trabajo matemático, génesis semiótica, aproximación instrumental, micro y macro-espacio, ingeniería didáctica.

Puntos de vista sobre la enseñanza de las matemáticas que tienen aplicaciones en el aula

Hasta la época de la llamada *matemática moderna* (los años 1970), se usaba, por lo menos en Francia, el principio de enseñanza "*yo* (profesor) *explico y tu* (estudiante) *aplicas*", junto con el famoso dicho de Nicolas Boileau: "*Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément*" (Lo que bien se concibe, claramente se enuncia, y las palabras para decirlo llegan fácilmente). Lo que importaba entonces era que el profesor, además de ciertas cualidades de comunicación y su interés hacia los resultados de sus alumnos, tuviera un buen conocimiento del contenido matemático. En términos de puro contenido matemático, se puede aseverar que un profesor que enseña matemáticas en un nivel n se sentirá cómodo con la disciplina, si puede resolver problemas del nivel $(n + 1)$. Por ejemplo, el saber formar ecuaciones con variables y resolverlas en el caso de un maestro de primaria. La exigencia de esta habilidad todavía tiene validez en la formación docente de profesores que enseñan matemáticas, pero sólo constituye un componente del saber profesional, como lo enfocaron Ball, Thames y Phelps (2008) cuando propusieron su modelo del MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge), conocimiento especializado del profesor de matemáticas, hoy muy citado en investigaciones de matemática educativa. Entonces, sin ser el único, un saber matemático siempre seguirá siendo un elemento imprescindible en la formación de docentes cuya actividad profesional va a ser orientada hacia la enseñanza de las matemáticas, en todo o en partes (caso de los maestros de escuela).

Uno de los primeros investigadores en afirmar que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas merece una mirada científica específica ha sido Guy Brousseau, quien llevó a cabo diversos estudios de clase, en una escuela experimental situada en las inmediaciones de Burdeos (Francia). La postura de Brousseau se apoyaba sobre profundas consideraciones cognitivas y asimismo sociales, previamente desarrolladas por filósofos epistemólogos, como Gaston Bachelard, o psicólogos, como Jean Piaget y Lev Vygotski. La práctica que se gestiona en el aula de matemáticas juega también un papel central en la teoría socioepistemológica, desarrollada por Ricardo Cantoral (Cantoral, 2013, p. 98). Por estar principalmente orientado hacia procesos de instrumentalización e instrumentación (Trouche,

2004), el propósito de este documento es limitado respecto de los aspectos sociales, sin olvidarse de su importancia.

Respecto de los instrumentos, una tesis expresada por Brousseau (2001) es que la geometría da lugar a tratamientos diferentes según el tipo de espacio considerado: micro-espacio al alcance del individuo sin necesidad de desplazarse, meso-espacio presente en la visión del individuo, pero necesitando desplazamientos, y macro-espacio que abarca zonas fuera de la percepción del individuo. Un ejemplo ilustrativo de la validez de esta tesis es el hecho de que las medidas de longitudes son la referencia natural del micro-espacio, mientras las medidas de ángulos son de uso natural para las prácticas geométricas en el macro-espacio. Al igual que esta toma consideración del medio ambiente del estudiante, el modelo cK¢ de Balacheff (2013) presenta al estudiante inmerso en su entorno en los periodos de formación de sus concepciones. Aún más, en el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak y Richard, 2014) se consideran de manera separada varios componentes de la actividad matemática, según un principio: separar antes de reunir, lo que puede ser muy útil en la enseñanza.

El esquema general de los ETM representa dos triángulos, uno en un plano calificado como cognitivo y otro en un plano llamado epistemológico (Kuzniak y Richard, 2014, fig. 2, p. 9). En el plano superior aparecen actividades propias de un individuo (visualizar, construir, demostrar), que sea docente o estudiante. En el plano de base aparecen los elementos construidos y comúnmente admitidos por la comunidad científica. El objetivo de la enseñanza va a ser propiciar génesis que hagan coherente el plano cognitivo del estudiante con el plano epistemológico. Durante determinados experimentos que reportamos (Carrión, Pluvinage y Adjiage, 2016), observamos en estas génesis la posible presencia de elementos intermediarios facilitadores: *observación*, *trazo* y *justificación*, que nos condujeron a enriquecer el modelo de los ETM. Abajo (Figura 1), reproducimos el esquema que se localiza en Carrión, Pluvinage y Adjiage (2016, p. 820).

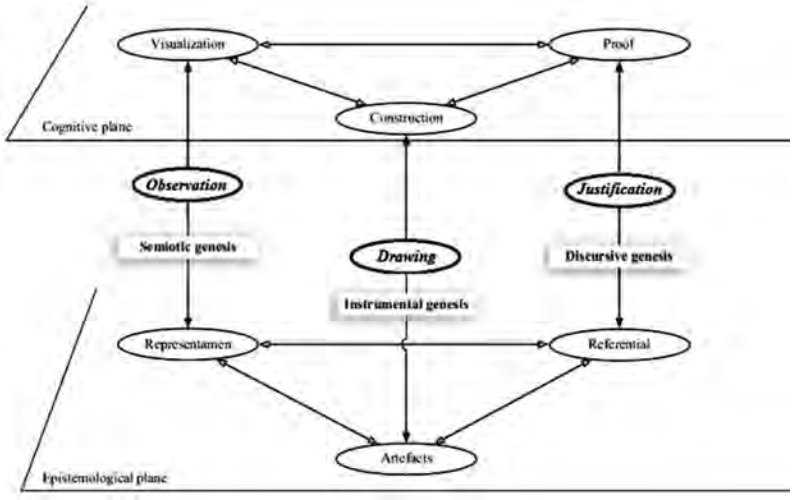


Figura 1. Modelo de ETM con complementos de génesis

Este modelo conduce a aplicar en el aula de matemáticas actividades diferentes de los ejercicios tradicionales, específicamente dirigidas al cumplimiento de las génesis ilustradas en el esquema.

Aplicaciones de ingeniería didáctica

La idea general, siendo el desarrollo separado de las génesis presentadas, antes de aplicar actividades que las combinen, se usan para el control de las actividades diseñadas los principios y las técnicas de la ingeniería didáctica (Artigue, Douady y Moreno, 1995) en tres etapas: *análisis preliminar*, *análisis a priori*, *análisis a posteriori*. El análisis preliminar se hace al momento de escoger y diseñar actividades por proponer a los estudiantes. Luego, en el análisis *a priori* se considera el producto diseñado, para determinar los procesos que posiblemente provoque en los estudiantes y los conocimientos que las resoluciones suponen. Y finalmente se analizan los resultados de la aplicación al público del estudio.

Test de complementación

Para aplicar una actividad que ponga en juego la génesis semiótica, y ella sola, una tarea de tipo problema no es adecuada. Incluso un ejercicio sencillo de matemáticas ya puede ser demasiado complejo para revelar posibles dificultades de entendimiento o de expresión que tienen los estudiantes. Recientemente tuvimos la oportunidad de encontrar un ejemplo de este tipo, relacionado con las prioridades de las operaciones aritméticas. La profesora en una clase de sexto año de primaria presentaba en el pizarrón escrituras de la forma:

$$7 + 3\times5$$

Cada estudiante tenía que escribir su respuesta sobre su pizarra, y la profesora pasaba a otra expresión. Pero ahora surge el *problema didáctico*: ¿Qué instrucción dar a los estudiantes que, en el caso presentado, contestan 50 en vez de la respuesta correcta, que es 22? La consideración de la génesis semiótica en el modelo de los ETM nos permite una propuesta: En vez de solicitar el resultado numérico, se puede pedir que copien la expresión y escriban con los mismos dígitos otra expresión, de la que resulta el mismo valor. Hay varias respuestas correctas (¿cuántas?), como

$$7 + 3\times5 = 3\times5 + 7, \text{ o bien } 7 + 3\times5 = 7 + 5\times3$$

Todas usan la propiedad de conmutatividad, que precisamente justifica las reglas de prioridades entre operaciones aritméticas. Así, se ve esta actividad más rica que el cálculo.

A continuación, presentamos un auto-test de *complementación* (en inglés: closure test*)*. Invitamos al lector cumplir primero la tarea propuesta. Las explicaciones siguen.

Tarea propuesta: *Fotocopiar esta página, donde el primer párrafo es un texto con huecos, y poner en cada rectángulo la palabra (lengua usual o simbólica) que parece conveniente.*

Para obtener la aproximación [ ] de una función polinomial [ ] por lo tanto la de su recta tangente, [ ] desarrolla nuevamente la diferencia [ ] *(x + h) –* [ ] *(x)*, se [ ] simplifica y se [ ] en términos de potencias [ ] *h.* Se encontrará que coeficiente de *h* es [ ] *(x)* como se había [ ] establecido y se tiene [ ] *(x + h) –* [ ] *(x) = f'(x)* [ ] h + *TOS*, donde [ ] abrevia "Términos de Orden [ ]" en *h* (aparecerán la [ ], la tercera, etc. potencias [ ] *h*, según la función [ ] se esté trabajando) y [ ] *f(x + h)* [ ] *f(x) + f'(*[ ]*).h + TOS.*

Si se toma $x = a$ se tendrá

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + TOS_1$$

Ahora se toma $h = x - a$ y se substituye

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + TOS_2$$

que es una nueva expresión para la función original como su aproximación lineal en el punto $(a, f(a))$ más su residuo expresado por TOS_2. El residuo agrupa a los términos donde las potencias de $x - a$ son mayores que uno y para valores muy pequeños de $x - a$ se vuelven numéricamente despreciables y de hecho se comportan como cero para el medio computarizado. Por eso vemos como una recta un pequeño fragmento de la gráfica de una función alrededor del punto de tangencia $(a, f(a))$.

Después de cumplir esta tarea, es interesante consultar el texto original en el Anexo 1.

El documento que usamos es una presentación usual en los libros de texto que refieren a desarrollos de tipo Taylor para la derivada. Y la última frase del segundo párrafo evoca el micro-espacio que ya presentamos. El principio del test es de quitar una de cada 5 palabras (lengua usual o simbólica), sin consideración de la naturaleza de las palabras. La razón es que esta tasa de supresión queda inferior al nivel de redundancia de cualquier texto. Sin embargo, el lector que habrá cumplido la tarea se habrá dado cuenta de que, en unos casos, una palabra faltante sólo se descubre a la lectura de lo que sigue en el texto. Vale la pena subrayar a propósito de esta conducta

no lineal de lectura, que ella es recomendable para la comprensión de textos matemáticos cuyo contenido no es totalmente conocido del lector. En eso, hay cierta semejanza con el cálculo de expresiones numéricas como 7 + 3×5, que vimos previamente: considerar lo que sigue. En el texto propuesto, esta *mirada hacia lo que sigue* ya es necesaria para hallar la primera palabra faltante, que es el calificativo *lineal*.

Cambios sorprendentes de formas por *zooms* hacia adelante y hacia atrás

En un sistema de geometría dinámica, como es GeoGebra, existe un comando (*zoom*), que permite al usuario aproximar o alejar una figura trazada. La transformación geométrica correspondiente es una homotecia, de centro la posición del cursor al momento de ejecutar el comando. En principio, una homotecia no cambia la forma de las figuras. Pero nuestro espacio de trabajo (la pantalla) es acotado. Entonces, el campo de visión se modifica (se reduce o se amplía), y cuando se repite el zoom, hasta visualizar partes del micro o del macro-espacio, las apariencias de las figuras pueden cambiar.

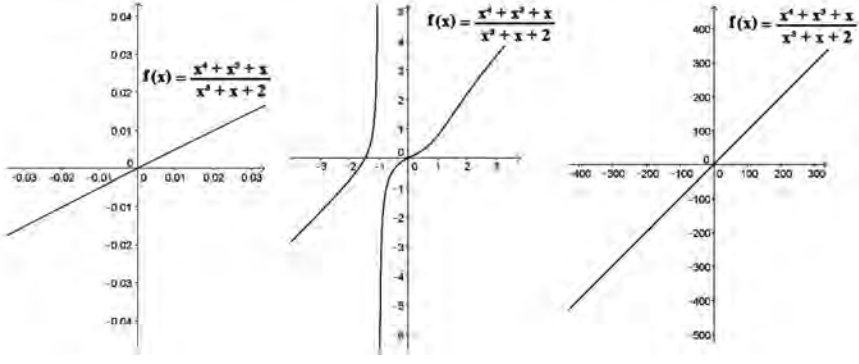


Figura 2. Tres vistas de la misma función,
en el micro, meso y macro-espacio

En la Figura 2 se representa la gráfica de la función real definida por $f(x)=\frac{x^4+x^3+x}{x^3+x+2}$. Del punto de vista de un observador, la gráfica de la izquierda se sitúa en un micro-espacio: las graduaciones de los ejes corresponden

a centésimos. La gráfica del centro se sitúa en el meso-espacio, porque tenemos costumbre de ver este espacio representado en páginas de libro o en pantallas; es la figura que encontraríamos en un libro de texto de nivel medio-superior. La gráfica de la derecha se sitúa en el macro-espacio: las graduaciones aparecen en centenas. El fenómeno espectacular es que dos de estas gráficas se ven como rectas.

El interés específico de la obtención de rectas, aun cuando son solamente aproximadas, es que son los objetos por excelencia de cálculos de tipo proporcionalidad. Y eso ayuda mucho a la formulación de predicciones. Son situaciones en las que disponemos de observaciones locales, que queremos extender a fines de previsiones o predicciones. Este aspecto se expone en forma explícita en (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005), donde los autores concluyen:

> Consideramos importante la predicción porque ha mostrado ser una idea motriz en el desarrollo de conceptos matemáticos, especialmente en el área del cálculo, además de que la predicción está íntimamente relacionada con la variación.

En la Figura 2, el aspecto propiamente local se ve en la gráfica de la izquierda, en la que se confunden visualmente las representaciones de la función y de su tangente en el origen. El caso de la vista en el macro-espacio (gráfica de la derecha en la Figura 2) también se puede considerar como un estudio local, pero no a distancia finita, sino en una vecindad del infinito. La situación de funciones que tienen asíntotas es evidentemente interesante por la precisión de las previsiones que esta situación autoriza. Por eso, consideramos en el apartado que sigue una actividad de exploración guiada.

El estudio de ramas infinitas con el recurso de las TIC

Aquí consideramos que una función real de variable real es una aplicación cuyo dominio es una parte del conjunto de los números reales y cuyo rango (o: contradominio) es también una parte del mismo conjunto. Y las funciones reales de variable real que nos interesarán aquí son aquellas cuyo dominio es el conjunto o la reunión de un número finito de intervalos. Un ejemplo de funciones que no vamos a considerar es el de las sucesiones,

que son aplicaciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Ejemplos de funciones que nos interesan son las funciones definidas sobre todo , como los polinomios o la función valor absoluto, las funciones cuya expresión contiene un radical, como $y = x - \sqrt{x}$ de dominio $[0, \infty[$, o $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ de dominio el conjunto $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$.

En el plano cartesiano × la gráfica de una función real de variable real es el conjunto de los puntos (x, y) tales que x pertenece al dominio de la función y tiene y como imagen.

Nos interesa el acercamiento didáctico de las ramas infinitas de funciones. Se dice que una gráfica de función en el plano cartesiano × tiene una rama infinita cuando, cualquiera que sea el subconjunto finito $[a, b]\times[c, d]$, la gráfica tiene puntos en su exterior. En particular, la gráfica de toda función de dominio infinito tiene cuando menos una rama infinita. Hay también gráficas de funciones de dominio finito que tienen ramas infinitas, por ejemplo, la función de dominio $]-1,1[$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

El uso metódico del "macroscopio"

Con software de cálculo formal como Derive o Maple, o *software* generalista como GeoGebra, se representan gráficamente funciones en un sistema de ejes, y el usuario puede hacer ajustes de escalas y de la ventana de representación, como lo vimos en el apartado anterior. Tales herramientas pueden ser a la matemática lo que son el microscopio a la biología o el telescopio a la astronomía. Sin embargo, la visión necesita de ser educada y acompañada de procesos de estudio numérico o algebraico.

Estudiamos ramas infinitas con software de geometría dinámica en el caso particular de $y = \sqrt{x(x+1)}$. El método que se usó es semejante al tipo de estudio propuesto por (Vivier, 2010) para el estudio de tangentes, pero en nuestro caso en orden contrario: primero *alejar*, segundo *construir*, tercero *aproximar*. En Carrión, Pluvinage y Adjiage (2016) se presenta la extensión del método en un estudio exploratorio de diversas funciones. Nos interesa aquí un estudio de su generalización, con la perspectiva de su aplicación didáctica.

Presentación del método de estudio de ramas infinitas de una función real de variable real.

Dato: Una función $f: x \to y$ de dominio D $\subset$.

Etapa preliminar: Examen de la gráfica de *f* en el plano cartesiano, para
- detectar sus ramas infinitas paralelas al eje O*y*, que corresponden a singularidades de la función y necesitan un estudio específico, porque desaparecen con el uso del *macroscopio* presentado a continuación;
- aislar cada una de sus demás ramas infinitas si hay, lo que evita posibles confusiones en el caso de asíntotas distintas pero paralelas.

Primera etapa de uso del macroscopio: Alejar. El objetivo es detectar la apariencia de recta(s) o semirrecta(s) que la gráfica pueda tomar en este proceso.

Segunda etapa de uso del macroscopio: Construir. Se trazan las rectas candidatas a ser asíntotas, si hubieran aparecido.

Tercera etapa de uso del macroscopio: Aproximar, para regresar a las escalas usuales de los ejes.

Etapa justificativa: Examinar si las rectas detectadas son o no son asíntotas. Para ello se pueden usar técnicas numéricas (desigualdades) o algebraicas.

Ejemplo de aplicación del método

Sea $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ definida sobre R–{–1}

Etapa preliminar. En la gráfica de la función (Figura 3, gráfica de la izquierda) se puede observar la presencia de una asíntota vertical de ecuación $x = -1$. En efecto $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -1$.

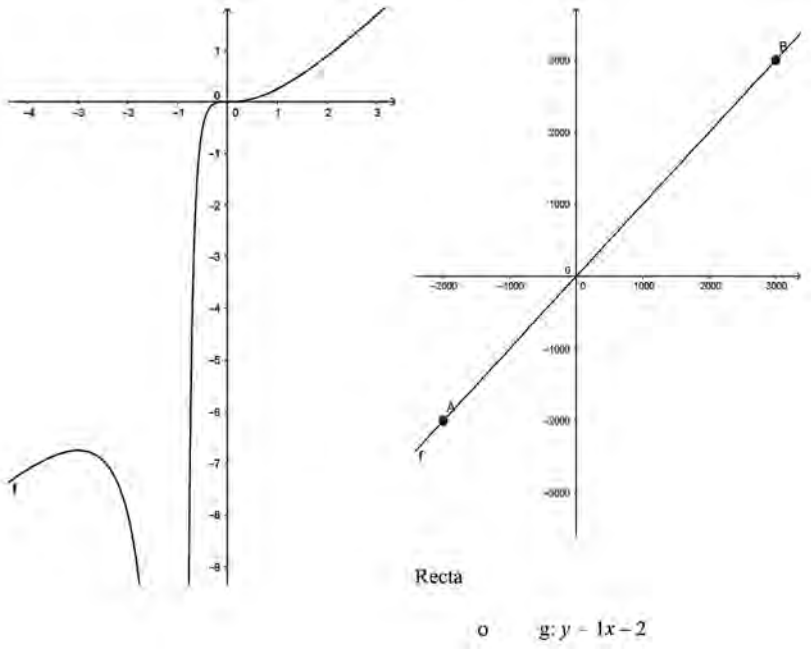


Figura 3. Gráfica de $f(x) = x^3/(1+x)^2$ vista con dos escalas diferentes (meso y micro espacio)

Etapas 1 y 2: En la parte derecha de la Figura 3 se han llevado a cabo las etapas 2 y 3. Con el comando *aleja* repetido se han obtenidos ejes graduados en miles, y la gráfica de *f* tiene la apariencia de una recta, mientras su asíntota vertical desapareció. Luego se marcaron sobre la gráfica los puntos A y B de abscisas respectivas –2000 y 3000 y se trazó la recta AB. Debajo de la gráfica se copió la ecuación de la recta AB dada por GeoGebra en la vista algebraica.

Etapa 3 y justificación. No reproducimos la vista gráfica que resulta del retorno a las escalas usuales (ejes graduados en unidades), porque el único cambio con respecto a la figura de la izquierda es que la curva se acompaña por la recta g, que es muy vecina de la recta de ecuación (exacta) $y = x - 2$. Para justificar con GeoGebra que la recta $y = x - 2$ es asíntota de la curva, se puede abrir la vista CAS e introducir la expresión $f(x) - x + 2$ seguida del comando *desarrolla* (icono de doble paréntesis). El resultado proporcionado par GeoGebra es $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$. Dado que el grado del denominador

es superior al grado del numerador, esta fracción tiende hacia 0 cuando x tiende hacia el infinito.

Invitamos al lector a usar con la misma función el método tradicional de búsqueda de asíntota oblicua, tal como lo presenta en internet la *Sociedad* Andaluza de Educación *Matemáticas Thales (véase la dirección internet en las referencias).*

Para aplicar lo anterior usando GeoGebra, el lector encontrará en el anexo 2 una hoja de exploración guiada, preparado para un taller sobre el estudio de ramas infinitas, en particular asíntotas. Señalamos la presencia en esta hoja de una "tabla de variaciones" de una función. En ciertos sistemas escolares, como es el caso en Francia, es muy utilizada esta herramienta de estudio de funciones, que prepara el trazo de la gráfica.

Algo de postre para concluir: el ciclo RID

Hasta el momento, este texto presentó más bien actividades de introducción de conceptos y métodos matemáticos que actividades de resolución de problemas. Las búsquedas de asíntotas se situaron, sin embargo, en la categoría de resolución de problemas. Para enriquecer en esta dirección los estudios que desarrollamos, nos parece interesante concluir con la presentación de un ciclo (el ciclo RID*)* de consideración didáctica de un problema matemático. Este ciclo RID lo proponemos a docentes interesados en entrar en estudios didácticos sin necesidad de especializarse de inmediato en la matemática educativa:

1. Resolución personal (ponerse en la situación del estudiante, pero con su propia experiencia): de un enunciado de problema hacia una solución. Esta resolución corresponde a una introducción en el análisis *a priori* de la ingeniería didáctica (Artigue, Douady y Moreno, 1995).
2. Inversión del análisis: de una solución hacia enunciados. En este análisis se introduce la idea de variaciones: cambios posibles de los datos, modificaciones en las hipótesis o en las conclusiones, variaciones en los métodos y tratamientos (ej. introducir el uso de un software de construcciones para resolver un problema de geometría)
3. Documentación sobre lo anterior: Búsqueda de referencias en la bibliografía o en la red Internet.

Enunciado del problema. Se considera (Figura 4) un rectángulo ABCD, de longitud doble de su altura. Sobre los lados sucesivos del rectángulo se reporta la misma longitud x inferior a la altura: AP = BQ = CR = DS = x. ¿Qué forma tiene el cuadrilátero PQRS? ¿Con qué valor de x tiene este cuadrilátero la mínima área? ¿el mínimo perímetro?

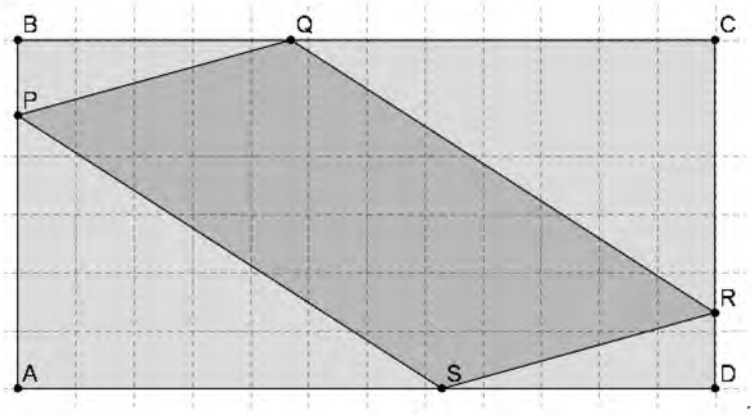


Figura 4. Cuadrilátero en un rectángulo

Dejamos al lector, con la posible ayuda de GeoGebra, el placer de descubrir él mismo la solución (R del ciclo RID).

Inversión del problema (I del ciclo RID): Se pueden elaborar enunciados en los que no se da la razón entre la longitud y la altura del rectángulo. Se podrá observar que, si esta razón sobrepasa cierto valor límite, un mínimo no va a corresponder a una derivada nula de la función, sino a un extremo del dominio [0, AB]. Este es un fenómeno que pasa desapercibido para muchos estudiantes de preparatoria, por la tendencia en fijar su atención en la pura fórmula algebraica.

Documentación (D del ciclo RID): Vale la pena consultar en Internet lo que se publica sobre los extremos de funciones cuyo dominio es un intervalo acotado cerrado.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Gómez, P. (eds.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balacheff, N. (2013) cK¢, a Model to Reason on Learners' Conceptions, *Conference Paper retrieved on 2018/05/04 from* https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1308/1308.5300.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389-407.

Brousseau, G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie, in *Actes du Séminaire de Rethymnon, Apr. 2000, Université de Crète*, 67-83 <hal-00515110>.

Cantoral, R., Molina, J. G., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18,* 463-468. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Mario/cantoral_molina_sanchez_2005.pdf

Cantoral, R. (2013) *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona: Gedisa.

Carrión, V., Pluvinage, F., y Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM Mathematics Education*, 48, 809–826.

Cuevas, A., y Pluvinage, F. (2015). Una propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de las matemáticas. *El Cálculo y su Enseñanza.* Cinvestav- IPN, México, D. F. 6, 167-195. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/6afc72df3fc257480dbb7a-19d18db56d.pdf

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 55-69. Hiroshima, Japan: PME.

Kuzniak, A., y Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 17(4), 5-39. *Sociedad* Andaluza de Educación *Matemáticas Thales.* Recuperado de http://thales.cica.es/

rd/Recursos/rd99/ed99-0295-01/punto8/punto8.html (Consultada el 11/05/2017).

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages. *Educational Studies in Mathematics*, *55,* 181-197.

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza, v*ol. II, año 2010-2011. México, Cinvestav-IPN. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Wagenschein, M. (1977). *Verstehen lernen, genetisch-sokratisch-exemplarisch.* Beltz Verlag; Basel, Weinheim.

Correo-e: fpluvinage@cinvestav.mx

Anexo 1. Texto original del auto-test de complementación

Para obtener la aproximación lineal de una función polinomial y por lo tanto la ecuación de su recta tangente, se desarrolla nuevamente la diferencia $f(x+h)-f(x)$, se simplifica y se expresa en términos de potencias de *h*. Se encontrará que el coeficiente de *h* es $f'(x)$ como se había ya establecido y se tiene $f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h+TOS$, donde *TOS* abrevia "Términos de Orden Superior" en *h* (aparecerán la segunda, la tercera, etc. potencias de *h*, según la función que se esté trabajando) y entonces

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+TOS$$

Si se toma $x=a$ se tendrá

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h+TOS_1$$

Ahora se toma $h=x-a$ y se substituye

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+TOS_2$$

que es una nueva expresión para la función original como su aproximación lineal en el punto $(a,f(a))$ más su residuo expresado por TOS_2. El residuo agrupa a los términos donde las potencias de $x-a$ son mayores que uno y para valores muy pequeños de $x-a$ se vuelven numéricamente despreciables y de hecho se comportan como cero para el medio computarizado. Por eso vemos como una recta un pequeño fragmento de la gráfica de una función alrededor del punto de tangencia $(a,f(a))$.

Anexo 2. Guía de actividad y hoja de trabajo
Tema: funciones reales y sus representaciones

Instrucciones

El grupo se divide en equipos de trabajo de dos o tres participantes para realizar las siguientes actividades utilizando el *software* GeoGebra. Los resultados de las observaciones se escriben individualmente sobre esta hoja en los espacios en blanco.

Equipo N°_____

Integrantes del grupo (subrayar el nombre del individuo que llena esta hoja)

1. _____
2. _____
3. _____

Abrir el archivo *Grafica1.ggb* de *GeoGebra*, que representa la función real **f(*x*)** definida por la fórmula

$$y = f(x) = \frac{x^5 - 32}{2x^4 - x^3 - 24},$$

y realizar las actividades presentadas a continuación.

1. Describir brevemente la gráfica de la función trazada por GeoGebra.

_____
_____

2. Búsqueda de un mínimo. Se propone indagar el mínimo de {y = f(x), x ≥ -1.5). Indicación 1: En la vista CAS de GeoGebra, teclear f'(x), luego activar el comando "Factoriza". Expresión obtenida:

_____
_____

Indicación 2 (consideración del micro-espacio): Comparar $f(\mathbf{0})$ y $f(\mathbf{0.5})$.

---

3. Complementar la siguiente tabla de variaciones: Escribir los valores de x y $f(x)$ que faltan, obtenerlos de la gráfica 1 en forma aproximada con dos dígitos decimales; indicar los ceros y los signos de $f'(x)$; trazar flechas ascendentes o descendentes según las variaciones de la función en su dominio.

x	$-\infty$		$a \approx$		$s \approx$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a) \approx$	↘	$-\infty$ ‖ ∞	

Tabla (incompleta) de variaciones de $f(x)$

4. ***Paseo*** **en el macro-espacio**: Búsqueda con GeoGebra de una asíntota oblicua de $y = f(x)$.

Seguir con GeoGebra el proceso definido por los siguientes pasos.

a) Alejarse usando de manera repetida el icono Alejar de GeoGebra.
b) Cuando la gráfica tome la apariencia de una recta, situar dos puntos A y B sobre ella y trazar la recta AB.
   Coordenadas de los puntos: A(,) B(,)
c) Para la ecuación de la recta obtenida, escoger la forma $y = ax + b$. En la ventana Entrada, reintroducir esta ecuación eventualmente redondeada. Se obtendrá una recta vecina pero distinta de la anterior.
   Ecuación obtenida: _____
d) En la vista CAS, introducir $f(x) - (ax + b)$, donde $ax + b$ es el segundo miembro de la ecuación de la recta introducida en c).
   Expresión obtenida y su límite cuando $x \to \infty$**:** _____

5. Aplicar a la función considerada el algoritmo tradicional de obtención de una asíntota oblicua y compararlo a la luz de los ETM con el proceso llevado a cabo con el uso de GeoGebra.

SECCIÓN 3

Importancia de las emociones de los profesores de matemáticas

Capítulo 5
El modelo del conocimiento especializado para la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas

María del Socorro García González
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
María Isabel Pascual Martín
Universidad de Huelva (España)
José Carrillo Yánez
Universidad de Huelva (España)
Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen

El presente escrito tiene como objetivo estudiar la relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su conocimiento especializado. Para ello identificamos cuáles son las relaciones que se pueden establecer entre el conocimiento especializado del profesor (MTSK) y las emociones que expresa. Valiéndonos de un estudio de caso, con un profesor novel de educación secundaria mexicana, respondemos que la relación entre el conocimiento especializado y las emociones es recíproca: cuando el MTSK desencadena las emociones del profesor, esta experiencia emocional después influye en su MTSK.

Palabras Clave: MTSK, conocimiento emocional, profesores de matemáticas, educación secundaria.

Introducción

Ante la pregunta "¿qué conocimiento necesita un profesor para enseñar matemáticas?" nadie duda de que la respuesta sea: un conocimiento especializado que se distingue del que se necesita para enseñar en otra asignatura, como química, o ciencias sociales.

Este conocimiento especializado se compone a su vez de dos tipos de conocimientos muy diferentes, el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

El conocimiento del profesor ha sido uno de los focos de interés de la investigación en educación desde hace décadas; el ejemplo más significativo es Shulman (1987), quien teoriza sobre el conocimiento didáctico del contenido (PCK) como una forma específica de conocimiento del maestro.

Particularmente, desde la educación matemática el modelo The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK (Carrillo *et al.*, 2014) reconoce dos tipos de conocimiento necesarios para que el profesor enseñe matemáticas: el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK). En este modelo se reconoce que las creencias del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza permean todo su conocimiento especializado, por lo que se incluyen como tercer dominio del modelo.

Respecto a la relación entre las emociones y la enseñanza, algunos investigadores educativos han reclamado que las emociones del profesor, incluidas en el dominio afectivo, deberían ser consideradas como parte del PCK (Zembylas, 2007; Melo, Cañada y Mellado, 2017), pues los actores principales del proceso educativo, profesor y estudiantes, poseen una gran carga emocional que media sus interacciones e incide en el proceso del aprendizaje.

Zembylas (2007) encuentra que los profesores de primaria usan el conocimiento que tienen de sus emociones para establecer o fortalecer el tema que enseñan, la relación con sus estudiantes, y para realizar la planificación curricular y tomar decisiones. Por su parte, Melo, Cañada y Mellado (2017), señalan que las causas de las emociones positivas y negativas de profesores de secundaria, específicamente de la asignatura de física, se relacionan principalmente con el conocimiento curricular y el contenido que se enseña.

Tomando como referencia el modelo MTSK como aquel que describe el conocimiento que el profesor de matemáticas moviliza cuando enseña, consideramos que las emociones que experimenta durante la enseñanza pueden estar relacionadas con su MTSK, de ahí que nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las relaciones que se pueden establecer entre las emociones del profesor de matemáticas y su MTSK?

Obsérvese que nos interesan las relaciones. No estamos asumiendo que el conocimiento emocional (o, más ampliamente, el dominio afectivo) sea especializado, como el MTSK. En futuras investigaciones habrá que estudiar qué elementos del conocimiento emocional pueden considerarse especializados. No obstante, la influencia recíproca entre conocimiento emocional y MTSK merece ser estudiada, independientemente de la naturaleza (especializada o no) de aquel.

Las emociones en la enseñanza

El notable aumento del interés en la investigación educativa sobre las emociones, de acuerdo con Schutz y Pekrun (2007), se remonta a la importancia de la naturaleza emocional de los contextos educativos. Estos autores señalan que en países de todo el mundo hay altas tasas de deserción y jubilación anticipada de los docentes. Los estudios de Wilhelm, Dewhurst-Savellis y Parker (2000) y Wisniewski y Gargiulo (1997) identificaron la ira, la ansiedad, el estrés subjetivo y el agotamiento como factores centrales que influyen en las decisiones de deserción de los docentes (citados en Schutz y Pekrun, 2007), lo que evidencia la relación entre las emociones y la labor docente.

Entre los resultados de la investigación sobre emociones en educación, encontramos que los docentes no se conocen emocionalmente (Gaxiola, 2005; Zepeda, 2006; López y Valls, 2013) y que no todos poseen un genuino conocimiento de sus emociones. De esta forma, es común, por ejemplo, que no puedan poner un nombre a lo que sienten. Gaxiola (2005) apuesta por una *alfabetización emocional* del profesorado, lo que implica una serie de habilidades que se enuncian a continuación:

- Reconocer que sentimos, pues las emociones son parte de nuestra naturaleza humana.
- Reconocer qué sentimos; ser capaces de reconocer qué emoción experimentamos ante determinada situación.
- Poner nombre a la emoción, conocer la palabra emocional que representa claramente lo que sentimos. Las palabras emocionales guardan relación con la intensidad de la emoción; por ejemplo, no es lo mismo sentir miedo que pavor, el pavor da cuenta de una intensidad mayor que el miedo.

- Reconocer qué situación desencadena eso que sentimos.
- Distinguir las emociones negativas de las positivas.
- Regular las emociones que experimentamos; esto es, ser capaces de actuar en consecuencia de las emociones. Esto puede ser decisivo para la conducción de las clases de matemáticas.
- Poder ayudar a otros a conocerse emocionalmente, por ejemplo, a nuestros alumnos.

Conocerse emocionalmente es ventajoso, por ejemplo, porque facilita la toma de decisiones para actuar o detectar el camino correcto que se desea seguir; además resulta útil para evaluar de forma correcta lo que nos pasa, y nos prepara para comprender lo que les pasa a otros (Gaxiola, 2005). Si somos profesores conscientes de nuestras emociones, entonces podremos comprender las de nuestros estudiantes, y educar en ellos su propio conocimiento emocional; podremos enseñarles a desarrollar la sensibilización emocional que les permita aprovechar su potencial en la vida adulta (López y Valls, 2013).

Bisquerra (2005) propone el desarrollo de competencias emocionales como competencias básicas no solo para la educación sino para la vida, y define la conciencia emocional como:

> conocer las propias emociones y las emociones de los demás. Esto se consigue a través de la autoobservación y de la observación del comportamiento de las personas que nos rodean. Esto supone la comprensión de la diferencia entre pensamientos, acciones y emociones; la comprensión de las causas y consecuencias de las emociones; evaluar la intensidad de las emociones; reconocer y utilizar el lenguaje de las emociones, tanto en comunicación verbal como no verbal (p. 98).

Esta definición concuerda con lo que Zembylas (2007) denomina *conocimiento emocional*, referido al "conocimiento del profesor acerca de sus experiencias emocionales con respecto a sí mismo, hacia otros (por ejemplo, estudiantes, colegas) y hacia el contexto social y político más amplio en el que tiene lugar la enseñanza y el aprendizaje" (p. 356). Este autor propone la inclusión del conocimiento emocional en el PCK; asimismo resalta la necesidad de realizar más investigaciones sobre áreas y contextos específicos

de la educación para describir los aspectos relevantes del conocimiento del docente en temas variados. Debido a la escasa información sobre el tipo de circunstancias que motivan el cambio en el conocimiento del profesor, nuestra investigación pretende contribuir a este llamado, prestando atención a las emociones del profesor de matemáticas.

En matemáticas, el estudio de las emociones de los profesores se inició a manera de exploración, con la finalidad de conocer cuáles eran las emociones de los profesores en términos de valencia positiva y negativa, así se encontró que las emociones negativas eran las de mayor frecuencia, entre ellas: la ansiedad, el miedo o el estrés, que se desencadenan debido a que algunos docentes no son especialistas en los contenidos que marca el currículo escolar (Philipp, 2007), y a las malas experiencias vividas como estudiantes de matemáticas (Coppola, Di Martino, Pacelli y Sabena, 2012; Di Martino y Sabena, 2011).

Particularmente, el trabajo de García-González y Martínez-Sierra (2016) realiza una exploración de las situaciones que desencadenan las emociones de profesores de matemáticas del nivel preuniversitario. Entre sus resultados encuentran que tanto las emociones positivas como las negativas se desencadenan en función de que los alumnos alcancen algunas metas del salón de clases; como por ejemplo que aprendan o que se interesen por la clase. Estos resultados nos parecen coherentes, porque la labor docente gira en torno al aprendizaje del estudiante, y las emociones de los profesores son la consecuencia de la percepción de este logro. La tabla 1 muestra las emociones que los profesores manifiestan en la clase de matemáticas.

Tabla 1. Emociones de profesores y estudiantes en matemáticas.

Profesores	
Emociones	**Metas**
Reproche	Que los estudiantes aprendan
Congoja	Que los estudiantes se interesen en la clase
Júbilo	Que los estudiantes participen en la clase
Agrado	Que los estudiantes se gradúen
Ira	Que los estudiantes cursen una carrera profesional
Orgullo	
Gratitud	
Decepción	
Remordimiento	
Gratificación	
Autoreproche	

Fuente: García-González y Martínez-Sierra, 2016.

A simple vista, las situaciones detonantes de las emociones de los profesores que se muestran en la tabla 1, no parecen tener relación con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sino con el contrato didáctico (Brousseau, 1998). De esta forma, es el cumplimiento o no de las reglas implícitas del aula, lo que detona la emoción del profesor. No obstante, en la construcción de estas reglas, tienen gran peso las expectativas del profesor respecto a los estudiantes y el cómo considera que deben desarrollarse las clases. Por este motivo, consideramos que las emociones del profesor pueden estar relacionadas con las creencias del profesor acerca de cómo se enseñan y aprenden las matemáticas, por ejemplo, con su creencia de que enseñar matemáticas implica que los estudiantes participen en la clase y aprendan. Desde el modelo MTSK, las creencias se conciben como un dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, por esta razón consideramos que los resultados de García-González y Martínez Sierra (2016), apuntan ya a una relación entre el MTSK y las emociones del profesor de matemáticas.

Referentes Teóricos

Para responder la pregunta de investigación planteada, recurrimos a dos referentes teóricos, el modelo *The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (Carrillo, *et al*., 2014), para poder analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas; y, la conceptualización de emoción de la Teoría de la Estructura Cognitiva de las emociones, propuesta por Ortony, Clore y Collins (1996), para analizar las emociones.

El modelo MTSK

El modelo MTSK (Figura 1) es una herramienta teórica y analítica que permite identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza del mismo, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis (Escudero-Ávila, 2015).

Debido a nuestro interés de profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas y sus emociones, usamos el MTSK para explorar los conocimientos del profesor de matemáticas que pudieran ser detonantes de las emociones que experimenta el profesor de matemáticas.

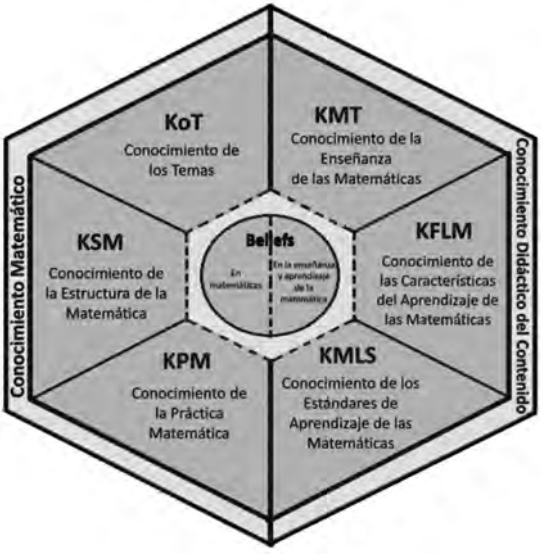


Figura 1. El modelo MTSK (Carrillo, *et al*., 2014).

Como lo muestra la Figura 1, el Conocimiento especializado del profesor de matemáticas contempla dos grandes dominios, el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. El primero de ellos se divide en tres subdominios, referentes al conocimiento de los temas matemáticos (KoT), al conocimiento de la estructura matemática (KSM) y al conocimiento de la práctica matemática (KPM). De un lado, el KoT, se define como el conocimiento fundamentado que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares, tanto a nivel conceptual como procedimental. Por otra parte, el KSM incluye el conocimiento de conexiones inter-conceptuales y conocimientos tanto avanzados, como elementales, que permiten al profesor trabajar la matemática desde un punto de vista integral y estructurado. Finalmente, en lo que respecta al conocimiento matemático, se delimitan como KPM aquellos conocimientos sobre las formas de proceder propias de la matemática y en especial las relacionadas con la matemática escolar, como tipos de razonamiento según los distintos contextos matemáticos, el proceso de definir o conjeturar.

En lo que se refiere al conocimiento didáctico del contenido, encontramos el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que tiene el profesor (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje de sus alumnos (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). El KMT involucra el conocimiento sobre qué aspectos matemáticos son clave en la comprensión de un tema a enseñar, que permiten al profesor proponer tareas, seleccionar ejemplos o escoger recursos o formas de presentación determinadas.

De otro lado, el KFLM incluye el conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los alumnos, derivadas de su interacción con el contenido matemático y las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje; y, finalmente, el KMLS se define como el conocimiento sobre los aprendizajes atribuibles a los estudiantes en un determinado momento escolar, que puede tener origen en los documentos curriculares, en la propia experiencia del profesor o en el estudio de trayectorias de aprendizaje de un contenido en particular. Además, en este modelo se ha considerado que las creencias que tiene el profesor, acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje son elementos que permean al conocimiento del profesor en los diferentes subdominios contemplados.

En esta investigación, hemos encontrado evidencias de la relación entre el Conocimiento de los Temas (KoT), el Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) del profesor y las emociones que experimenta, motivo por el cual nos detendremos a desarrollar de forma más detallada estos subdominios.

El modelo MTSK, se articula en relación a distintas categorías de análisis que permiten al investigador organizar las evidencias de conocimiento que encuentra en la práctica docente. En el caso del KoT, dichas categorías permiten establecer concreciones en las particularidades del conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares. En este sentido, en la línea planteada por Carrillo *et al.* (2014), podemos distinguir entre el conocimiento del profesor acerca de: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación y fenomenología y aplicaciones. El conocimiento de los procedimientos matemáticos que manifiesta el profesor nos informa no solo sobre cómo realiza el procedimiento, sino también sobre por qué se hace así e incluso sobre su conocimiento de cuándo debe utilizarse dicho procedimiento y el control que mantiene durante todo el proceso, incluyendo la interpretación de los resultados. El conocimiento sobre definiciones, propiedades y sus fundamentos permite al docente justificar un concepto matemático, en cualquiera de sus posibles definiciones, dándole la destreza para reinterpretarlas. Asimismo, el conocimiento sobre registros de representación se relaciona con la flexibilidad para entender un mismo concepto expresado a nivel gráfico o simbólico, entre otros, permitiendo al profesor adoptar una u otra representación según sus necesidades. Por último, el conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones, es el que posee sobre la variedad de contextos en los que situar un contenido dentro y fuera de las matemáticas, así como determinados aspectos epistemológicos ligados a la matemática.

En el caso del KMT, se distinguen teorías personales o institucionalizadas de enseñanza; recursos materiales y virtuales; y actividades, tareas, ejemplos y ayudas (Carrillo *et al.*, 2014*)*. De estas categorías, nos centramos en las actividades, tareas, ejemplos y ayudas como el conocimiento que tiene el profesor acerca de cómo transformar el conocimiento matemático para ser aprendido, y, en esta investigación en concreto, se relaciona con el conocimiento docente del profesor sobre cómo estructurar la enseñanza del tema.

La teoría de la estructura cognitiva de las emociones

Las emociones son objetos de estudio de la Psicología, esta disciplina reconoce tres fuentes que pueden evidenciar las emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996). En primer lugar, se encuentra el lenguaje, una limitación de esta fuente es que con frecuencia resulta difícil expresar con palabras aquello que sentimos. La segunda fuente es la observación de la conducta, el problema de concentrarse en la conducta es que la misma conducta puede ser resultado de emociones muy diferentes o bien conductas diferentes pueden ser indicios de la misma emoción. La tercera fuente es la fisiológica, que adquiere sus complicaciones debido a que tiene que ver con las propiedades y funciones de nuestros órganos y tejidos.

La observación de la conducta y la fuente fisiológica informa de las consecuencias de haber experimentado una emoción, pero no informa sobre sus orígenes, en el caso del lenguaje es factible poder examinar ese origen mediante la interpretación cognitiva de los acontecimientos que quienes experimentan las emociones puedan realizar, de ahí que nos apoyamos en la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones llamada comúnmente teoría OCC.

La teoría OCC se basa en la idea de que las emociones son desencadenadas por las valoraciones cognitivas que la gente hace de una situación, de manera consciente o no y las define como "reacciones de valencia a eventos, agentes u objetos, y su naturaleza particular está determinada por la forma en que se interpretan las situaciones desencadenantes" (Ortony, Clore y Collins, 1996, p.13).

La OCC está estructurada como una tipología de tres ramas, que se corresponden con tres tipos de estímulos: (1) Un juicio individual sobre la deseabilidad de un evento: un evento es agradable si ayuda al individuo a alcanzar su meta, y es desagradable si lo impide; (2) la aprobación de una acción respecto a normas y estándares sociales; y (3) la atracción de un objeto; es decir, la correspondencia de sus aspectos con los gustos del individuo, la persona se siente atraída por un objeto, o le resulta repulsivo. Esta teoría especifica 4 clases, 5 grupos y 22 tipos de emociones que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Tipos de emociones concebidas por la OCC.

Clase	**Grupo**	**Tipos *(ejemplo de nombre)***
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)
	Basadas en previsiones	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*) Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*) Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*) Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*temores confirmados*)
	Bienestar	Contento por un acontecimiento deseable (*jubilo*) Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*)
Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*) Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*autoreproche*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*)

Clase	Grupo	Tipos *(ejemplo de nombre)*
Reacciones ante los objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	Bienestar/ Atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*gratitud*) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*ira*) Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*complacencia*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (*remordimiento*)

Fuente: Ortony, Clore, & Collins, 1996.

Para terminar esta sección, nos gustaría aclarar al lector que la teoría OCC no se guía por las palabras emocionales que usa el sujeto para describir la emoción que experimenta, más bien se centra en el acontecimiento que origina la emoción y a esa descripción le da como nombre una palabra emocional neutra (ver columna "tipos" de la tabla anterior). Citemos un ejemplo, si en una situación se percibe un "descontento por un acontecimiento indeseable", la OCC denomina a la emoción que se experimenta como *congoja*, uno puede pensar en diferentes palabras que pueden expresar ese "descontento", por ejemplo, añoranza, pesadumbre, sentirse mal, solitario, tristeza; todas ellas denotan intensidades diferentes, más o menos altas, sin embargo, la OCC usa la palabra congoja por considerarla una palabra emocional neutra.

La elección de la OCC obedece a dos razones. En primer lugar, nos permite posicionarnos en una definición precisa de las emociones, a partir de la valoración cognitiva que realiza la persona que experimenta la emoción, identificando la emoción y la situación que la desencadena. En segundo lugar, la tipología de emociones OCC nos señala la forma de analizar los datos recolectados con base en las definiciones de las emociones.

Diseño Metodológico

Para desarrollar la investigación nos valemos de un estudio de caso (Stake, 1995). Se trata de Diego (pseudónimo que le hemos asignado), un profesor novel de 39 años de edad. Este caso ha sido elegido ya que, de acuerdo a la literatura, los profesores noveles, al principio, son propensos a experimentar emociones negativas (Mevarech y Maskit, 2014). Consideramos que el caso de Diego podría darnos evidencia sólida para analizar la relación entre las emociones y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Diego es arquitecto con 16 años de experiencia. En el momento en que se realizó la toma de datos era la segunda vez que impartía el curso de matemáticas en segundo grado de educación secundaria (13-14 años) en la capital del estado de Guerrero, México. Además, cursaba el primer año de la Maestría en Docencia de la Matemática que oferta la Universidad Autónoma de Guerrero, México. La participación de Diego en el estudio fue voluntaria.

Recolección de datos y análisis

Para la recogida de datos usamos las siguientes fuentes:

(1) Una entrevista biográfica, para la historia de Diego como profesor de matemáticas.

(2) Autoinformes de experiencias de clase, para percatarnos de sus experiencias emocionales.

(3) Entrevistas a cuatro estudiantes para conocer la percepción que tenían de Diego.

(4) Observaciones de clase, para confrontar la evidencia de 1, 2 y 3 y para percatarnos de su MTSK. Las clases observadas correspondieron al tema de resolución de ecuaciones lineales.

(5) Entrevistas semiestructuradas al profesor para llenar huecos de información que no arrojaran las fuentes consideradas.

Las entrevistas y las observaciones de clase fueron videograbadas para su posterior análisis.

El análisis de datos se dividió en dos momentos, primero identificamos en la evidencia el MTSK de Diego, para ello nos valimos de los subdominios

de este modelo; una vez identificado el tipo de conocimiento de Diego, identificamos los casos en los que los subdominios eran desencadenantes de las emociones.

En la Tabla 3 ejemplificamos una codificación del primer momento.

Tabla 3. Identificación de MTSK en observaciones de clase.

Subdominio	**Categoría**	**Fuente 4: Observaciones de clase**
KoT	*Procedimientos* Conoce el método de reducción	Solución de ecuaciones por el método de reducción

Evidencia

[Escribe en el pizarrón el sistema]:

$$10x+9y=8 \ (1)$$

$$8x-15y=-1 \ (2)$$

{1}**Diego:** Lo primero que vamos a hacer, como primer paso, va a ser igualar los coeficientes [Escribe en la pizarra (1)]… ¿Los coeficientes de qué vamos a igualar?, ¿podemos igualar los de x y los de y?, ¿qué sería más fácil?, ¿cómo puedo igualar los coeficientes?

{2}**Diego:** Ya quedó la primera ecuación [Anota (3)]. Va la segunda ecuación [Guía la multiplicación de toda la ecuación por 5, haciendo hincapié en que se multiplican todos los términos]… y ya tenemos una igualación [en el pizarrón aparece]:

$$40x + 36y = 32 \ (3)$$

$$40x + 75y = -5 \ (4)$$

A partir de este momento continúa la solución pidiendo ayuda a sus estudiantes para resolver operaciones aritméticas, pues es la primera vez que explica el método.

En la Tabla 4, damos evidencia del segundo momento, después de habernos percatado de que el KoT podría ser desencadenante de emociones.

Tabla 4. Identificación de MTSK en entrevistas.

Subdominio	Fuentes 1 y 5	Relación observada
KoT	Entrevista biográfica y entrevista para llenar huecos	Congoja-conocimiento de los temas (fracción)

Evidencia

En la evidencia del momento **1** identificamos que Diego evitaba el uso de fracciones en la resolución de las ecuaciones (fuente 4), además cuando contó su historia como profesor de matemáticas reconoció no haber podido trabajar con las fracciones.

Fuente 1: Entrevista Biográfica.

Diego: El año pasado veíamos fracciones y no podían y yo les decía: —¡eso lo tuvieron que haber visto en primero!— se los decía para que no me preguntaran [se ríe]. Pero ahora las vamos resolviendo.

Con base en esta evidencia procedimos a averiguar más sobre su relación con las fracciones, como se muestra en el siguiente fragmento.

Fuente 5: Entrevista

María: ¿Por qué no quería que lo cuestionara respecto de las fracciones?

Diego: Por qué les tengo miedo.

María: ¿Por qué les tiene miedo a las fracciones?

Diego: Yo le tengo miedo a las fracciones, por qué no estoy familiarizado con ellas, porque no las uso mucho, solo las que son fáciles de manipular, medios, cuartos, octavos, si son séptimos, onceavos, ahí empiezan los problemas…

Como producto de estos dos momentos, pudimos identificar los subdominios que eran desencadenantes de las emociones, así que procedimos a utilizar la tipología OCC para poder decir de qué tipo de emoción se trataba en cada caso.

Resultados: El caso de Diego

Al analizar el caso de Diego, hemos identificado dos tipos de emociones relacionadas con su MTSK, se trata de la congoja y la satisfacción, enseguida detallamos cada una de ellas.

El conocimiento de los temas (KoT) desencadena la Congoja

Notamos en Diego que, en sus inicios como profesor de matemáticas su escaso conocimiento de los temas matemáticos desencadenaba en él la emoción de congoja ("descontento por un acontecimiento indeseable", según la OCC). Con ello encontramos la primera relación MTSK-emoción. La evidencia siguiente da muestra de ello.

> **Diego**: Cuando inicié en segundo año **como mi conocimiento de la matemática era muy poco** *me sentía frustrado* **por no poder enseñar más**…En mi caso **el desconocimiento de algo** me da *temor*, y ese temor *me agobiaba*, ese *agobio* creo que se notaba en la clase con mis alumnos porque estaba molesto, irritable, no me concentraba.

En particular, la propia percepción de Diego sobre su conocimiento fundamentado del tema de las fracciones, y de los procedimientos aritméticos que las envuelven, fue el tema que Diego menciona como desencadenante de su congoja.

> **Diego**: *Yo le tengo miedo a las fracciones*, **por qué no estoy familiarizado con ellas, porque no las uso mucho**, solo las que son fáciles de manipular, medios, cuartos, octavos, si son séptimos, onceavos, ahí empiezan los problemas… El **año pasado** [2015-2016] **veíamos fracciones y no podían hacer operaciones** y yo les decía: —¡eso lo tuvieron que haber visto en primero! — y se los decía para que no me preguntaran [se ríe].

En el extracto anterior, aunque aparece la palabra emocional *miedo*, en realidad se trata de la emoción tipo congoja, debido a que para Diego el que sus estudiantes lo cuestionaran era indeseable.

Estas evidencias dan también muestra de las implicaciones que la emoción de congoja y su conocimiento matemático tienen para la enseñanza de Diego, debido a que ambas la limitaban a los temas conocidos.

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) desencadena la Congoja

Como consecuencia del escaso conocimiento matemático de Diego, encontramos que el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas era también desencadenante de la emoción congoja, como lo muestra la siguiente evidencia.

> **Diego**: *Me dio miedo* **empezar a dar clases**, **no sabía qué les iba a decir a los alumnos**, qué me iban a preguntar.

Las relaciones entre los conocimientos de distintos subdominios del MTSK han sido estudiadas en trabajos anteriores (Aguilar, 2016). En el marco de estos estudios, tiene sentido que la percepción de Diego sobre su conocimiento para la enseñanza se viera influida por su conocimiento matemático, de forma que sintiera que no podría organizar una secuencia de aprendizaje que estructurase determinadas fases en la adquisición de distintos contenidos matemáticos.

El conocimiento de los temas (KoT) desencadena la Satisfacción

La emoción positiva que encontramos en el caso de Diego es la satisfacción, que al igual que la congoja se desencadena por el conocimiento de los temas (KoT), cuando Diego posee conocimiento de los temas, se siente satisfecho, la evidencia siguiente da muestra de la satisfacción de Diego.

La congoja se define desde la OCC como "contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable", interpretamos que cuando Diego entiende un tema, prevé que podrá explicarlo a sus estudiantes, y si esto de verdad ocurre entonces él siente satisfacción, el siguiente fragmento producto de una entrevista, nos da evidencia de la situación que desencadena en Diego la satisfacción.

> **Diego**: Yo les enseño lo que pasa en realidad cuando se dice pasa sumando o restando…a mí nunca me lo enseñaron, yo me preguntaba cómo era que la variable se despejaba, **ahora que lo aprendí** en el curso de la maestría *me gusta* compartirlo con mis estudiantes …**yo quiero que ellos sepan bien** … Hace

> un año me acuerdo que yo decía: -brincó al otro lado de la igualdad- [se ríe], es que yo no conocía las propiedades que se estaban cumpliendo, pero ahora lo sé y m*e gusta conocerlo y compartirlo* **para que conozcan como yo he conocido**.

Este cambio entre poseer o no conocimiento matemático es producto de la maestría que Diego cursaba, específicamente en el caso de la resolución de ecuaciones; Diego nos comentó que en los seminarios de esta maestría se trataron aspectos relacionados con los distintos métodos de resolución de ecuaciones lineales. En estos seminarios, se fundamentaron además los distintos pasos de los procedimientos, lo que unido a la colaboración de los profesores resolviendo las dudas que surgieron, hizo que Diego mejorase su conocimiento sobre el tema. Con esta ayuda Diego ganaba seguridad, y se mostraba en sus clases.

> **Diego**: **Cuando un problema no me sale**, vengo [a asesorías con una profesora de la maestría] y lo discutimos, y me voy y resuelvo otro, y **si ese no me sale**, *me agobio*, y pienso en para qué quiero que me salga el problema y estudiar tanto, pero **cuando ya me está saliendo** me empieza *a gustar* y me olvido de esos pensamientos, *me animo*.

Conclusiones

A la pregunta planteada por esta investigación, ¿cuáles son las relaciones que se pueden establecer entre las emociones del profesor de matemáticas y su MTSK?, respondemos de manera general que el MTSK desencadena las emociones de Diego. Particularmente encontramos evidencia de que el conocimiento de los temas matemáticos y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas desencadenan en Diego dos tipos de emociones: la congoja y la satisfacción. Si Diego no posee conocimiento matemático, experimenta una emoción negativa, la congoja; cuando adquiere conocimiento matemático la valencia de la emoción cambia, se vuelve positiva, experimentando la satisfacción. Este resultado es consistente con la literatura que señala que las fuentes de emociones negativas en profesores y futuros profesores de nivel elemental es consecuencia de que estos no son especialistas en matemáticas (Phillip, 2007). En particular nuestros resul-

tados señalan los aspectos específicos del MTSK del profesor participante que desencadena sus emociones.

Además, hemos encontrado relaciones entre los distintos conocimientos de Diego, lo que también supone una concurrencia con estudios anteriores (Aguilar, 2016). En lo que a esta investigación se refiere, nos preguntamos entonces si las relaciones entre los subdominios de conocimiento también se establecen en forma de las emociones que desencadenan. Este hecho puede dar lugar a futuras líneas de investigación en las que se analicen, desde la complejidad del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, las formas determinadas en las que las creencias permean el conocimiento. Asimismo, reconocemos la importancia de la autopercepción de la competencia docente, quien en su propia observación de aula emite juicios sobre su conocimiento que adquieren incluso más relevancia que los análisis de conocimiento externos, a la hora de relacionarse con las emociones.

Finalmente, queremos reflexionar sobre la necesidad de abordar en futuras investigaciones la naturaleza especializada o no del conocimiento emocional, lo que daría consistencia a estos primeros avances de investigación. El foco del modelo MTSK se encuentra en aquellos conocimientos docentes que se consideran especializados e inherentes al conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático, lo que implica la necesidad de encontrar conexiones entre el contenido matemático y las emociones, como hemos adelantado en este informe. Las evidencias de este tipo, complementarían el dominio de las creencias en el modelo, con parte del dominio afectivo del profesor, donde se encuentran las emociones.

Consideramos que futuras investigaciones, pueden abordar la naturaleza (especializada o no) del conocimiento emocional del profesor de matemáticas, desde el MTSK esto significaría completar el dominio de las creencias como parte del dominio afectivo.

Referencias

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: un estudio de caso*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Bisquerra, R. (2005). La educación emocional en la formación del profesorado. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, *19*(3), 95-114.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17* (3-4), 101-118.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

García-González, M. & Martínez-Sierra, G. (2016). "Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio". En Eds. J. A Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). España: SEIEM.

Gaxiola, P. (2005). *La inteligencia emocional en el aula*. Segunda edición. Aula nueva. México: SM.

López, C. & Valls, C. (2013). *Coaching educativo, las emociones al servicio del aprendizaje*. México: SM.

Melo, L., Cañada, F. & Mellado, V. (2017): Exploring the emotions in Pedagogical Content Knowledge about the electric field, *International Journal of Science Education*, DOI: 10.1080/09500693.2017.1313467

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schutz, P., & Pekrun, R. (Eds.). (2007). *Emotion in education*. Boston, MA: 1100 Academic Press.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard *Educational Review*, 57, 1-22.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, *23*(4), 355-367.

Zepeda, M. (2006). *Profesión: Maestro*. Segunda edición. Aula nueva. México: SM, 2006.

Correos-e: mgargonza@gmail.com / isabel.pascual@ddcc.uhu.es / carrillo@uhu.es, gmartinezsierra@gmail.com

Capítulo 6
El conocimiento emocional y el acompañamiento docente

Josué Ramos Silverio
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
María del Socorro García González
Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen

El presente escrito presenta avances de una investigación que tiene como objetivo elaborar una propuesta de acompañamiento docente para regular las emociones de profesores de matemáticas. El acompañamiento docente toma como fundamento conceptual lo que se ha denominado "*conocimiento emocional*", entendido como el conocimiento que el docente tiene de las emociones que experimenta en la clase y lo que las desencadena. Metodológicamente se rige por un modelo de coaching educativo.

Palabras clave: Conocimiento emocional, acompañamiento, docentes, matemáticas.

Las emociones del profesorado de matemáticas

En la Matemática Educativa, disciplina que estudia el fenómeno de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, existe una línea de investigación llamada Dominio Afectivo, que estudia las emociones, creencias, actitudes, valores y motivación de profesores y estudiantes de matemáticas. Los resultados de investigaciones hechas desde esta línea han mostrado que éste tiene una alta influencia en el aprendizaje escolar, de ahí su importancia de estudio (Lewis, 2013; Di Martino & Sabena, 2011; Bekdemir, 2010; Gómez Chacón, 2000).

Dentro del Dominio Afectivo, las emociones son las que tienen menor tradición de investigación, por mucho tiempo estuvieron subordinadas a los estudios sobre actitudes o creencias. Sin embargo, con el paso del tiempo, el interés en su estudio individual ha incrementado, esto debido a la importancia de la naturaleza emocional de los contextos educativos (Schutz y Pekrun, 2007). Los contextos en los que han sido estudiadas son diversos, y sus sujetos de estudios han sido profesores y estudiantes.

Las emociones del profesorado se clasifican en dos grupos, emociones negativas y emociones positivas. Las emociones negativas implican experiencias desagradables durante el momento de la enseñanza, por ejemplo, el estrés, la desmotivación y el síndrome de Burnout (Schutz & Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara & Viramontes, 2017). Cuando este grupo de emociones se presenta en grados intensos pueden conducir al abandono de la profesión (Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007). Las emociones positivas, por el contrario, implican experiencias de placer al momento de conducir una clase, entre ellas se encuentran el entusiasmo, la alegría, el orgullo, la satisfacción y el interés (Di Martino & Sabena, 2011; Anttila, Pyhältö, Soini, & Pietarinen, 2016).

De acuerdo con los resultados de investigación, existen dos razones por las que las emociones negativas se desencadenan en los profesores de matemáticas. La primera de ellas son las emociones que los profesores experimentaron cuando fueron estudiantes, por ejemplo, quienes de estudiantes experimentaron emociones negativas con las matemáticas es muy probable que las sigan experimentando al desempeñarse como profesores (Coppola, Di Martino, Pacelli & Sabena, 2012; Di Martino & Sabena, 2011). La segunda razón es la falta del conocimiento matemático, por ejemplo, en primaria la mayoría de los profesores no son especialistas en matemáticas y muchas veces desconocen los contenidos que deben de enseñar (Philipp, 2007).

En México, la investigación de García-González y Martínez-Sierra (2016), reporta 14 tipos de emociones experimentadas por profesores de matemáticas, así como las situaciones desencadenantes (véase Tabla 1).

Tabla 1. Emociones de profesores mexicanos

Emociones	Situaciones desencadenantes
Quejoso por	Percepción de que los estudiantes no aprenden Poco interés de los estudiantes
Feliz por	Percepción de que los estudiantes aprenden
Resentido por	Los estudiantes no aprenden
	Deserción escolar por falta de recursos
	Reprobación
Reproche	El estudiante culpa al profesor por no aprender
Congoja	El estudiante no se esfuerza por aprender
Júbilo	El estudiante disfruta la clase
Agrado	Uso de recursos novedosos en la clase Tecnología, dinámicas nuevas
Ira	Falta de interés de los estudiantes por aprender en la clase
Orgullo	Contribuir a la formación de los estudiantes
	Reconocimiento a su labor docente por parte de otros
Gratitud	Los alumnos se ayudan entre ellos
Decepción	Los estudiantes no aprenden al mismo ritmo
Remordimiento	El mismo maestro no entiende lo que va a enseñar
Gratificación	Los alumnos están interesados por aprender
Autoreproche	Los estudiantes entienden la explicación de la clase pero no son capaces de hacer la tarea por no entenderla

Fuente: García-González y Martínez-Sierra (2016).

Los resultados expuestos en la tabla anterior muestran que la mayoría de las emociones de los profesores están en función de lo que sus estudiantes pueden lograr en la clase de matemáticas. Consideramos que este resultado tiene su explicación en la dinámica de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pues el alumno es una de las figuras con la que el profesor interactúa, y a diferencia de otras, el saber, el currículo, entre otras, entre el alumno y el profesor se establece una relación interpersonal.

La revisión de antecedentes nos ha permitido identificar que, en el campo de la matemática educativa, hasta el momento, la mayoría de la investigación solamente ha evidenciado las emociones de los profesores y las causas que las desencadenan, pocas han hecho alguna propuesta con el fin de gestionarlas. Por ejemplo, Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken (2007) mencionan cuatro métodos para reducir la ansiedad matemática de profesores de primaria en servicio y en formación, mediante el manejo de las experiencias de sus años previos en la escuela primaria o secundaria, y de sus años durante su formación como profesores. Dichos métodos son, la rehabilitación narrativa; la biblioterapia; la escritura reflexiva; y el dibujo.

Por nuestra parte, en el marco de un trabajo de tesis de maestría, nos hemos planteado realizar una investigación en dónde no solo se conozcan las emociones que experimentan los profesores de matemáticas, sino una vez conocidas, poder hacer algo para regularlas. Por ello nos planteamos la siguiente pregunta de investigación, ¿de qué manera regular las emociones negativas del profesor de matemáticas?

Desde el contexto educativo en general, autores como Zembylas (2007) y Bisquerra (2005), abogan por el conocimiento emocional del profesorado para regular sus emociones, de ahí que consideramos que el conocimiento emocional puede ser el eje rector de la regulación de emociones, por tanto como objetivo de investigación nos planteamos elaborar una propuesta de *acompañamiento docente* a partir del conocimiento emocional del profesorado de matemáticas, la finalidad del acompañamiento es brindar apoyo a los docentes para que gestionen las emociones negativas que afectan su práctica docente y potencien las emociones positivas.

En este escrito, se presentan los avances del trabajo de investigación pretendido, estos se refieren al esbozo de una propuesta de acompañamiento docente.

Referentes conceptuales y metodológicos

Para alcanzar el objetivo de investigación planteado, como referentes conceptuales adoptamos el conocimiento emocional y la regulación emocional, como referente metodológico el coaching educativo. Enseguida definimos cada uno de ellos.

El conocimiento emocional

Encontramos antecedentes del conocimiento emocional en el contexto educativo desde dos autores, Bisquerra (2005) y Zembylas (2007). El primero de estos autores habla de *conciencia emocional* para referirse al "conocimiento de las emociones y emociones de los demás" (Bisquerra, 2005, p. 98), en esta misma línea Zembylas (2007) define el *conocimiento emocional* como "el conocimiento del maestro sobre sus experiencias emocionales con respecto a uno mismo, a los demás (por ejemplo, estudiantes, colegas), y al contexto social y político más amplio en el que tiene lugar la enseñanza y el aprendizaje" (p. 356). Dentro del campo específico de la Matemática Educativa, García-González y Pascual-Martín (2017), utilizan el término conocimiento emocional, para hablar del conocimiento que el profesorado tiene de sus emociones y la de sus estudiantes durante la enseñanza de las matemáticas.

De estas tres referencias, se deduce que el conocimiento emocional tiene que ver con el conocimiento propio de las emociones por parte del profesor, de ser conscientes de que las emociones son experimentadas y de reconocer las situaciones que las desencadenan. Particularmente, en este escrito entendemos el conocimiento emocional en el sentido de García-González y Pascual-Martín (2017), cuando hablamos del conocimiento emocional del profesor de matemáticas, nos referimos al conocimiento que él tiene de sus emociones y de las situaciones que las desencadenan.

Regulación emocional

La gestión de las emociones es un término que va de la mano con lo que hemos llamado aquí conocimiento emocional. Entendemos este constructo desde la postura de Bisquerra (2005), quien la define como la capacidad para manejar las emociones de forma apropiada. Esta capacidad, supone tomar conciencia de la relación entre emoción, cognición y comportamiento; tener buenas estrategias de afrontamiento; capacidad para autogenerarse emociones positivas. De acuerdo con este autor:

Conviene no confundir la regulación (y otros términos afines: control, manejo de las emociones) con la represión. La tolerancia a la frustración, el manejo de la ira, la capacidad para retrasar gratificaciones, las habilidades

de afrontamiento en situaciones de riesgo… son componentes importantes de la habilidad de autorregulación. Algunas técnicas concretas son: diálogo interno, control del estrés (relajación, meditación, respiración), autoafirmaciones positivas; asertividad; reestructuración cognitiva, imaginación emotiva, atribución causal, etcétera (Bisquerra, 2005, p. 98).

Con base en lo anterior, cuando hablamos de regulación de las emociones hacemos referencia específicamente a la superación de las emociones negativas con la finalidad de lograr un estado de bienestar en el docente de matemáticas.

Coaching educativo

El término coaching tiene una procedencia directa desde el ámbito deportivo, pero es en el entorno empresarial y personal donde adquiere el estatus de un proceso dialógico en el cual se generan condiciones óptimas para que una persona o grupo alcance los objetivos trazados.

Todos en algún momento hemos escuchado el término *coaching*, así como también tenemos una concepción de lo que significa, debido a esta razón en cada sector en el que esta palabra es usada, se le da su propio significado, pero al final las opiniones suelen coincidir en que el propósito del *coaching* es lograr el desarrollo y crecimiento de las personas en cualquier aspecto de su vida a través de un acompañamiento personalizado brindado por alguien con pericia del tema en cuestión.

En el contexto educativo, Coral López y Carmen Valls, son fundadoras de la Escuela de Coaching Educativo, compañía desde la que se está introduciendo y desarrollando esta modalidad de coaching en numerosos centros educativos españoles, por tal razón hemos adoptado su postura respecto al coaching educativo. Ellas definen *coaching educativo* como una relación uno a uno, donde existen dos roles diferentes: el *coach* (acompañante) y el *coachee* (acompañado) en el que la confianza y la confidencialidad generan el ambiente de trabajo necesario para poder iniciar un proceso de crecimiento y aprendizaje (López & Valls, 2013). Se trata, por lo tanto, de un proceso no conversacional orientado al aprendizaje.

Al escuchar el término aprendizaje no debemos entender que el *coachee* es un receptor de conocimiento o que el *coach* el maestro que enseña, sino más bien el *coach* ayuda a que su alumno descubra su propio camino, a

pensar y a hacerlo responsable de su realidad, en otras palabras, el *coach* es un facilitador del aprendizaje.

En nuestro caso entendemos los roles del acompañante como la persona que sugestionará, motivará y proporcionará estrategias para la regulación de las emociones negativas que un docente de matemáticas pueda presentar durante la conducción de sus clases, con base en la promoción del autoanálisis y apoyando e incentivando al acompañado a mejorar sus áreas de oportunidad emocional en el contexto de su desempeño docente. En tanto que, el acompañado será la persona que en todo momento realizará el análisis de su actuar dentro del aula y no solo eso, también su relación con los alumnos para que vaya descubriendo sus debilidades y fortalezas. Así, en forma conjunta con el acompañante, diseñar estrategias que le permitan mejorar esas debilidades, entendidas como áreas de oportunidad.

De acuerdo con López & Valls (2013), el coaching se basa en cuatro pilares fundamentales, los cuales se describen en la tabla siguiente.

Tabla 2. Los pilares del coaching.

Pilares del coaching	Significado
Elevar el nivel de conciencia	Significa contactar con aspectos de la realidad de uno mismo o del entorno, de los que estábamos desconectados.
Responsabilidad	El coach no da respuestas ni soluciones si no que ayuda a que el que aprende desarrolle sus propias opciones, lo que lo hace que se responsabilice y se comprometa con ellas
Creatividad	El coach ayuda a observar y a pensar desde perspectivas nuevas, por lo que surgen nuevos pensamientos, nuevos descubrimientos, que llevarán al que aprende a desarrollar nuevas formas de actuar, sentir, y pensar.
Transformación	El coaching está enfocado directamente a lograr un cambio, podríamos decir que sin transformación no hay coaching.

Fuente: López & Valls, 2013.

Con base en lo descrito en la Tabla 2, nuestra propuesta de acompañamiento docente pretende cumplir con cada uno de los pilares del coaching. Respecto al primer pilar consideramos que el acompañado deberá ser consciente de la realidad en la que se encuentra, esto se traduce en identificar las emociones negativas que obstaculizan de alguna manera su enseñanza, además de ser consciente que esa situación puede cambiar. Respecto al segundo pilar, la regulación emocional será responsabilidad del acompañado, no del acompañante, pues él solo es responsable de ofrecerle los recursos adecuados para la regulación de las emociones, lo que va de la mano con la creatividad del acompañante, tercer pilar anunciado en la tabla anterior.

La transformación que indica el cuarto pilar, lo entendemos como el logro de la regulación emocional en el caso de las emociones negativas.

Antecedentes de acompañamiento docente en México

En México el *coaching* ha sido utilizado como proceso de intervención docente, y por cuestiones de lenguaje, se le da el nombre de *acompañamiento*.

El órgano institucional que rige la educación mexicana, la Secretaría de Educación Pública (SEP) define al acompañamiento como se enuncia enseguida:

> [El acompañamiento es] sinónimo de asesoría y se plantea que su principal finalidad consiste en informar, sensibilizar, promover el diagnóstico de la práctica y hacer un seguimiento del trabajo que se realiza, propiciando la comprensión de sus planteamientos por parte del personal docente, técnico y directivo al que se atiende (SEP, 2006, p. 43).

De acuerdo con esta definición entendemos el acompañamiento como un tipo de asistencia unidireccional para quien requiere el apoyo. En el presente trabajo entendemos el acompañamiento como un proceso bidireccional en el que se trabaja al lado del acompañado, creando condiciones favorables para que se alcancen las metas trazadas de manera conjunta, en lugar de que alguien más determine esas condiciones favorables sin tomar el punto de vista del directamente afectado.

El acompañamiento docente en México se ha puesto en práctica con el profesorado de nivel preescolar, siendo éstos los acompañados, mien-

tras que los acompañantes han sido los asesores técnicos pedagógicos de preescolar (Villareal, 2016). Cabe resaltar que este acompañamiento está centrado en las necesidades de los docentes, en los elementos teóricos del programa educativo y en el desarrollo de la intervención docente. En este tipo de acompañamiento, el conocimiento de la asignatura a enseñar suele no tener relevancia. En cambio, en la presente investigación el conocimiento matemático con el que cuenta el docente jugará un papel relevante.

Villareal (2016) reporta el proceso de acompañamiento docente del profesorado de preescolar, y señala que de acuerdo con los docentes que experimentaron el acompañamiento, éste mejora la labor educativa, el aprendizaje de los niños y la valoración de la función que desempeñan. Pero también mencionan que el acompañamiento tiene sus puntos débiles entre ellos, la poca asesoría para fortalecer la relación con los padres de familia, la poca información en cuanto a lo que es el acompañamiento y que las asesorías las realizan en forma grupal y con poca frecuencia. Al parecer los docentes no se sienten lo suficientemente asesorados y acompañados, y no sienten ser mejores educadores como resultado del acompañamiento, esto lo atribuyen a que la mayoría de los asesores pedagógicos no realizaron un acompañamiento constante, continuo o permanente.

Como podemos observar en el párrafo anterior, en el contexto mexicano, el acompañamiento docente se ha realizado de manera superficial, pues su fin no ha sido el cambio en la práctica docente del acompañado, de ahí que nuestro proyecto de investigación proponga incidir en la práctica del profesorado de matemáticas a través del acompañamiento señalado.

Con base en la definición de López & Valls (2013), y tomando en cuenta los conceptos de conocimiento emocional y regulación emocional, entenderemos en este trabajo el *acompañamiento docente* como un proceso centrado en el conocimiento emocional de un profesor de matemáticas (acompañado) que tiene como fin la regulación de sus emociones negativas con la ayuda de un experto (acompañante).

Una propuesta de acompañamiento centrada en el conocimiento emocional

Metodológicamente, el acompañamiento docente se centra en el proceso de coaching educativo de López & Valls (2013) que se muestra en la Figura 1.

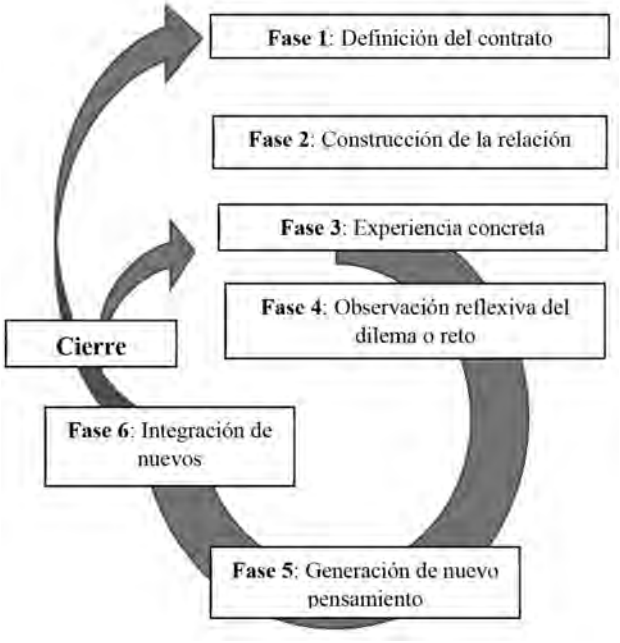


Figura 1. Fases del proceso de coaching educativo, López & Valls, 2013.

Basados en el proceso de coaching educativo esbozamos la siguiente propuesta de acompañamiento docente (véase Tabla 3).

Tabla 3. Propuesta de acompañamiento docente.

Propuesta de acompañamiento docente		
Fases	**Descripción**	**Actividades**
1: Definición del contrato	Consiste en el establecimiento de límites, roles y reglas del espacio del acompañamiento.	Seleccionar el acompañante mediante un perfil emocional. Seleccionar al acompañado. Definir el periodo del acompañamiento. Definir el espacio físico del acompañamiento.
2: Construcción de la relación	Establecer la relación del acompañante y el acompañado mediante la empatía, confidencialidad y escucha.	Diálogos entre acompañante y acompañado.
3: Experiencia concreta	Desarrollar en el acompañado su conocimiento emocional	Observación y acompañamiento en las clases de matemáticas. Entrevistas para profundizar en el conocimiento emocional
4: Observación y trabajo con el reto	Identificar las emociones negativas que obstaculizan la práctica docente y trabajar en su superación.	Diseño de estrategias para la regulación de emociones negativas.
5: Generación de nuevo pensamiento	Modificar las situaciones que desencadenan las emociones negativas mediante las estrategias diseñadas.	Implementación de las estrategias para regular las emociones negativas.
6: Integración de nuevos conocimientos	Reflexión del acompañante y acompañado sobre la superación o no, de las emociones negativas por medios de las estrategias planteadas.	Entrevistas con el acompañante sobre las vivencias de la fase 6
7: Cierre	Fin del espacio de interacción con el acompañante. Revisión de los aprendizajes del acompañamiento.	Retroalimentación del proceso vivido por ambas partes. Observaciones de clase y entrevistas, después de un mes de haber terminado la interacción entre acompañante y acompañado.

Fuente: Elaboración propia.

Hasta el momento se ha realizado la fase 1, misma que exponemos enseguida.

1: Definición del contrato

En la Fase de "Definición del contrato", se desarrollaron las siguientes actividades.

a) Seleccionar el acompañante mediante un perfil emocional.
b) Seleccionar al acompañado.
c) Definir el periodo del acompañamiento.
d) Definir el espacio físico del acompañamiento.

a) Selección del acompañante

El acompañante es el primer autor de este escrito, en el marco de su tesis de maestría. Hemos señalado que la característica principal del acompañante es su pericia del tema que propicia el acompañamiento, en nuestro caso la regulación de emociones negativas. Han sido dos las razones por las que se consideró que este autor desempeñara el rol de acompañante, en primer lugar, porque posee conocimientos de la matemática escolar desde nivel básico hasta preuniversitario, pues cursó la licenciatura en matemáticas con especialidad en computación, además de tener experiencia como docente frente a grupo en el nivel básico (secundaria) y nivel medio superior (bachillerato general). La segunda razón obedece a su dominio sobre el tema de conocimiento emocional, gestión emocional y coaching educativo, producto del trabajo de su tesis de maestría, además de que para ello cuenta con el apoyo de su asesora de tesis, quien trabaja la línea del dominio afectivo en Matemática Educativa.

b) Selección del acompañado

Para seleccionar al acompañado, usamos como criterio un perfil emocional. Basados en Davidson & Begley (2012), definimos el perfil emocional del profesor de matemáticas como la información sobre las emociones que experimenta durante la clase, con la intención de comprender su comportamiento y las decisiones que toma.

Para elaborar el perfil emocional se realizó una entrevista semiestructurada que consistía en una serie de preguntas que tenían la intención de que el entrevistado proporcionara información sobre su conocimiento emocional. Las preguntas utilizadas han sido validadas por García-González y Martínez-Sierra (2016) y se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 4. Protocolo de entrevistas.

Preguntas para conocer las emociones de profesores de matemáticas
¿Qué emociones o sentimientos experimentas en la clase de matemáticas?
¿Cuáles son las principales experiencias positivas que has tenido como maestra de matemáticas?
¿Cuáles son las principales experiencias positivas que has tenido como maestra de matemáticas?
¿En qué circunstancias y situaciones has experimentado felicidad o alegría como profesora de matemáticas?
¿En qué circunstancias o situaciones has experimentado tristeza o pesar como maestra de matemáticas?

Fuente: García-González y Martínez-Sierra, 2016.

Para realizar el perfil emocional, el primer autor de este escrito hizo la invitación a algunos de sus colegas, de ellos, acudió al llamado solamente una profesora, a quien se le contó el objetivo de la investigación, además de dejarle claro que los datos serían difundidos, ella aceptó ser entrevistada y estuvo de acuerdo en que sus datos fueran usados con fines investigativos. La entrevista se realizó en octubre de 2017 en una interacción cara a cara con el acompañante y fue videograbada para su posterior análisis.

El análisis de la entrevista se basó en la identificación de emociones y situaciones desencadenantes, recurriendo para ello a la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (llamada teoría OCC) (Ortony, Clore & Collins, 1996), tal y como lo hacen García-González y Martínez-Sierra (2016) en su investigación.

Perfil emocional de Karla

Karla (seudónimo que le hemos asignado) es una profesora de 30 años de edad, es licenciada en matemáticas y computación. Se ha desempeñado como docente en bachillerato durante 4 años. Su perfil emocional (ver Figura 2) se encuentra formado por emociones positivas y negativas.

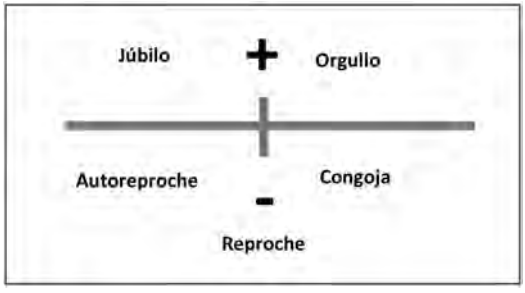


Figura 2. Perfil emocional de Karla

A continuación, centrados en las definiciones de la OCC y ejemplificadas con extractos de la entrevista, describimos cada una de las emociones que componen el perfil emocional de Karla. En la evidencia resaltamos en cursivas las palabras emocionales y en negritas las situaciones desencadenantes.

Júbilo
Esta emoción se define por la SEP como "contento por un acontecimiento deseable". En el caso de la profesora, estar frente a grupo y enseñar son acontecimientos deseables que cuando los realiza desencadenan en ella sentirse contenta.

> **Karla***: Me siento feliz* al **poder compartir los conocimientos que tengo con los alumnos**, por qué sé **que se llevan algo de mí**, *me siento bien*, *me siento satisfecha*.
> **Karla**: *Me gusta mucho* **estar frente a grupo**, *me gusta mucho* **enseñar lo que sé**, **compartirlo**, *me siento feliz*, *satisfecha* al hacerlo.

Orgullo

Esta emoción se encuentra relacionada con la relación ante los agentes, esto es, las personas que se vuelven desencadenantes de las emociones que podemos experimentar. El orgullo, es una emoción particularmente desencadenada por nuestras propias acciones, y se define como "aprobación plausible de uno mismo". Karla encuentra plausible el hecho de que pueda ayudar a los estudiantes a resolver sus dudas dentro o fuera del salón de clases, ella se considera un ejemplo para los estudiantes cuando lo hace, de ahí que esta acción la haga sentirse orgullosa.

> **Karla**: También *es bonito* como docente **ver que tus alumnos se te acercan para preguntarte dentro y fuera del salón de clases**, cuando se acercan para que **los saques de una duda de tu materia o de otra materia**, *para ellos eres un ejemplo*, alguien en quien confían para llegar a ese grado de acercarse y preguntarte de alguna materia que no entienden, eso para mí *es agradable*.

Autoreproche

Esta emoción se encuentra relacionada también con los agentes, y se define como "desaprobación de una acción censurable de uno mismo", lo que significa que las acciones de la misma persona son las que desencadenan la emoción. En este caso, Karla se considera responsable de que sus estudiantes no entiendan lo que les explica, se asume culpable de la situación y se siente triste por ello.

> **Karla:** *Me siento triste* **cuando veo que no le entienden a lo que explico durante la clase**, *siento un poquito de culpabilidad hacia a mí. Por mi culpa* **no entienden**, **por no entender bien el tema, no lo explico bien** y eso *me hace sentir triste***.**

Reproche

El reproche es un tipo de emoción cuya situación desencadenante son las personas que nos rodean, y se define como "desaprobación de una acción censurable de otro". Karla experimenta reproche por sus alumnos que no prestan atención en clase, desaprueba su comportamiento y les recrimina que no les interese que ella está esforzándose por explicarles.

> **Karla**: **Cuando veo que en la clase no ponen interés**, no ponen atención, *me siento molesta, me da coraje*, porque yo estoy explicando, estoy dando lo mejor que puedo y a ellos no les importa, tampoco les importan sus compañeros que están poniendo atención. Es **una distracción para los que ponen atención y para mi estar tratando de meterlos**, de incluirlos en la clase, en verdad *es molesto*.

Congoja

A este tipo de emoción la desencadena los eventos, y se define como "descontento por acontecimiento indeseado", en el caso de Karla son dos eventos los que desencadenan su congoja, la evaluación y que los estudiantes no entiendan cuando ella explica en clase.

> **Karla**: **Al momento de evaluar** *me siento un poquito triste* porque **muchos de los estudiantes no reúnen la cantidad de puntos aprobatorios**, me *siento triste* porque no me gustaría estar en su lugar, no me gustaría mandarlos a extra [examen], y es que como alumnos se siente feo saber que estás en la cuerda floja, saber que vas a reprobar… y eso es lo que me gustaría evitar, para que no se vayan a un examen extraordinario.

> **Karla: Cuando los estudiantes no me entienden**, siento *impotencia, incapacidad*, impotencia por no saber qué hacer, qué aplicar, alguna estrategia quizá para que ellos puedan comprender lo que yo les estoy explicando y se las haga un poquito más fácil la clase.

Estos resultados del perfil emocional de Karla nos llevaron a reafirmar que ella es idónea para el acompañamiento docente que pretendemos. Y es que las emociones que Karla experimenta en su aula tienen consecuencia directa en su práctica docente. Ella comentó que cuando los alumnos no entienden los temas, emoción de auto-reproche, no le dan ganas de ir a trabajar al otro día que experimenta esa emoción, o simplemente busca algún pretexto para no tener esa clase, incluso busca cualquier pretexto para evitar el grupo. Cuando experimenta emociones positivas, el caso del orgullo y el júbilo comenta que se siente motivada y se refleja en que prepara mejor su clase.

c) Definición del periodo del acompañamiento

El periodo del acompañamiento será de un año, de febrero-2018 a febrero-2019. Consideramos este periodo suficiente para poder desarrollar las actividades que hemos esbozado para el acompañamiento docente.

d) Definición del espacio físico del acompañamiento

El espacio físico del acompañamiento consta de dos sedes, la primera es la escuela donde Karla imparte clases. Se trata de la preparatoria número nueve de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Ésta se ubica en la ciudad de Chilpancingo, Guerrero, y corresponde a un bachillerato de tipo general, particularmente trabajaremos con dos de sus grupos de cuarto semestre en la materia de estadística, los grupos están conformados por 25 alumnos. La elección de los grupos obedece a que queremos conocer si la docente presenta las mismas emociones con diferentes alumnos en una misma asignatura, mientras que la elección de la asignatura obedece a que durante la entrevista Karla comentó que la materia de estadística es la que más se le dificulta enseñar.

La unidad de aprendizaje de estadística se encuentra ubicada en el cuarto semestre dentro del plan de estudios 2010 de la Universidad Autónoma de Guerrero, se encuentra divida en tres unidades de aprendizaje:

I. El azar y su medida
II. Estudio de una variable
III. Estudio de dos variables

El curso es único y se imparte en tres horas semanales, un total de 48 horas en el semestre.

La segunda sede de acompañamiento son las instalaciones de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Autónoma de Guerrero, en ella se pretende hacer las entrevistas y encuentros con la acompañada cuando sea necesario.

Conclusiones

La motivación del estudio pretendido está basada en la influencia de las emociones en la práctica docente, debido a que se ha reportado que las emociones negativas de los profesores de matemáticas como el estrés, la congoja, o la ansiedad matemática, por no dominar los contenidos del currículum de matemáticas, afectan sobremanera su labor docente. Centrados en el conocimiento emocional del profesor de matemáticas, pretendimos realizar un acompañamiento docente, mismo que concebimos como un proceso centrado en el conocimiento emocional de un profesor de matemáticas (acompañado) que tiene como fin la regulación de sus emociones negativas con la ayuda de un experto (acompañante).

El acompañamiento docente que proponemos está formado de seis etapas, que van desde la planeación del acompañamiento, lo que implica la selección de los participantes y las actividades a realizar, hasta el logro de la regulación emocional pretendida.

Hasta el momento hemos avanzado con la primera fase, tenemos ya seleccionada a la acompañada, se trata de Karla, una profesora de bachillerato. Ella experimenta emociones negativas como el reproche, el autorreproche y la congoja durante la enseñanza de las matemáticas, estas emociones influyen en su motivación para asistir a clases, pues cuando las experimenta no tiene ganas de asistir a ellas. Creemos que el caso de Karla puede ser valioso para trabajar la regulación emocional en el acompañamiento docente.

Con el acompañamiento docente pretendemos contribuir a la investigación del Dominio Afectivo, con una propuesta concreta de regulación emocional, que es necesaria pero aun inexistente en este campo.

Referencias

Anttila, H., Pyhältö, K., Soini, T. & Pietarinen, J. (2016). "How Does It Feel to Become a Teacher? Emotions in Teacher Education." *Social Psychology of Education*, *19*(3), 451-473.

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328. DOI: http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Bisquerra, R. (2005). La educación emocional en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *19*(3), 95-114.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 101-118.

Davidson, J. & Begley, S. (2012). *El perfil emocional de tu cerebro*. Madrid: Destino.

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI, Tallinn University*, 89-105.

García-González, M. & Pascual-Martín, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *8*(15), 133-148.

García-González, M. & Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, 247-252. Málaga: SEIEM.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: Narcea.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.). *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 153-156). Seoul, Korea.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 70-86. DOI:10.1080/14794802.2012.756636

López, C. & Valls, C. (2013). *Coaching educativo, las emociones al servicio del aprendizaje*. México: SM.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 257-315. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Rodríguez, J., Guevara, A. & Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech, 7*(14), 45-67.

SEP (2006). *La implementación de la reforma curricular en la educación preescolar: orientaciones para fortalecer el proceso en las entidades federativas*. México: Programa de Renovación Curricular y Pedagógica de la Educación Preescolar.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

Schutz, P., & Pekrun, R. (Eds.). (2007). *Emotion in education*. Boston, MA: Academic Press.

Villarreal, A. L. (2016), *Acompañamiento e identidad profesional: asesores de preescolar en Durango*. Mexico: IISUE educación.

Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, *23*(4), 355-367.

Correo-e: josueramos8224@gmail.com, mgargonza@gmail.com

SECCIÓN 4

Propuestas y resultados de intervenciones didácticas en el aula de matemáticas

Capítulo 7
Desarrollo de estrategias metacognitivas en estudiantes universitarios y su efecto en el razonamiento lógico

Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez
Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Resumen

En el presente trabajo se considera la resolución de problemas en el marco de un curso universitario bajo una dinámica de 4 fases. En la cuarta fase se pide a los alumnos un análisis reflexivo sobre el proceso de solución, de esta manera se fomentan las habilidades metacognitivas. Se reporta el efecto de dicha dinámica sobre el desarrollo de habilidades metacognitivas de los alumnos evaluado de manera cualitativa. El trabajo reflexivo de los alumnos tuvo un efecto positivo en el rendimiento en la prueba TOLT; se logró un incremento de pensadores formales al pasar de un 35.13% a un 75.67% al final del curso. Se trabajaron problemas relacionados con álgebra superior: inducción matemática, sistemas de ecuaciones lineales, raíces de polinomios. Se insistió en la flexibilidad de pensamiento, debemos considerar otras opciones no sólo la primera que nos viene a la mente, al escuchar la solución de otro compañero. Al presentar la solución experta se resaltó que puede haber más de una forma de resolver un problema, si por alguna razón no avanzamos debemos hacer alto y preguntar ¿qué es lo esencial del problema? ¿Puedo idear otro plan? Se comentaron algunas heurísticas propuestas por Polya para guiar a los alumnos.

Palabras clave: Resolución de problemas, estrategias metacognitivas, razonamiento lógico.

Introducción

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas plantea retos difíciles, no hay recetas fáciles para lograr aprendizaje en los alumnos. En particular, enseñar a resolver problemas es una labor complicada, hay muchos factores a considerar e inercias que combatir. La resolución de problemas de manera exitosa implica el uso eficiente de varias habilidades, en nuestro caso trataremos las metacognitivas, que pueden permanecer implícitas y por ello es necesario ponerlas dentro de la fase de revisión según el modelo de Polya para resolver problemas. El uso de las estrategias metacognitivas diferencia los estudiantes con alto y bajo desempeño en la resolución de problemas. Özsoy y Ayşegül (2009) comentan que, mientras los estudiantes con alto desempeño usan las estrategias metacognitivas, los estudiantes con bajo desempeño casi no las usan. Varios autores sostienen que una manera de mejorar el desempeño de los estudiantes es diseñar actividades que promuevan el desarrollo de estrategias metacognitivas, de preferencia, en relación a un curso curricular para que los alumnos puedan usarlas en clase.

Yimer y Ellerton (2006) comentan que centrar la atención en la cognición sin un correspondiente énfasis en el pensamiento metacognitivo rinde como un esfuerzo incompleto. Un rico almacén de conocimientos es un requisito necesario, pero no suficiente, para el éxito al resolver problemas matemáticos. Aunque los estudiantes pueden tener los conocimientos para interpretar el enunciado de un problema, los mecanismos de control ineficientes impiden salir de la confusión inicial y obstaculizan el avance hacia la solución porque no se consideran diferentes estrategias y no se detectan errores oportunamente.

Por otro lado, también consideramos el razonamiento formal según los planteamientos de Piaget. Los alumnos con razonamiento formal tienen una mayor comprensión y habilidades de generalización.Formal reasoners have greater comprehension and generalizing skills. Deaño en la introducción al libro *Lógica y psicología* de Piaget (1977), comenta que:

En la conducta del sujeto se pueden observar regularidades, es decir, que el sujeto, aunque él mismo no se percate de ello actúa de acuerdo con unas reglas. Ello supone, a su vez, que la inteligencia del sujeto no es un puro haz de conductas en respuesta a unos estímulos, sino que posee una estructura desde la cual aquél se enfrenta con los problemas.

Un predictor del éxito académico es el pensamiento formal de alumnos universitarios de primer año. McKinnon y Renner (1971) comentan que al menos 75% de los estudiantes universitarios de primer año (USA) son parcial o totalmente pensadores operacionales concretos. Encuentran que 50% de los estudiantes son concretos, 25% posconcretos (en transición) y 25% formales. Un buen porcentaje de los alumnos que ingresan a la universidad no alcanzan el nivel de pensamiento formal, por ello es necesario fomentar habilidades de pensamiento, la simple memorización no basta. La enseñanza universitaria no se caracteriza por preocuparse de los procesos mentales de los alumnos, sino de dar cátedra; dando énfasis en la transmisión de conocimientos, es decir, exponer los resultados en forma acabada tal y como se presentan en los libros de texto. Pero esto no produce mejora en las habilidades de pensamiento, es necesario tomar como eje la solución de problemas y la reflexión sobre el proceso ¿Qué se hizo bien? ¿Qué se hizo mal? y ¿cómo mejoramos? La enseñanza debe mejorar para que los alumnos desarrollen habilidades de acuerdo a las exigencias del siglo XXI.

Planteamiento del problema:

¿Cómo puede un docente de matemáticas ayudar al desarrollo de las habilidades metacognitivas de sus alumnos durante un curso? ¿Cómo impactar positivamente en el desarrollo del pensamiento formal, necesario en la universidad?

El principal objetivo de este trabajo fue el diseño, la implementación y la evaluación de una secuencia de problemas, que realizaron los estudiantes en el aula y en casa, durante un curso universitario de18 semanas, con la intención de mejorar el pensamiento formal a través del desarrollo de habilidades metacognitivas al resolver problemas.

En el curso se ilustraron algunas de las heurísticas sugeridas por Polya (2016) para la resolución de problemas, pero no de forma mecánica, pues se propone el problema y los alumnos intentan resolver primero de manera individual y luego por parejas, sin ninguna indicación adicional, únicamente en caso necesario se aclara el enunciado. De tal suerte que los alumnos activan sus conocimientos previos y sus estrategias. Posteriormente, se mostró solución experta, en la que se insistió usar estrategias

metacognitivas como parte importante del proceso, fungiendo el autor como modelo al "pensar en voz alta" cuando resolvía un problema. El trabajo se realizó en cuatro fases o momentos:

I. Trabajo individual para resolver un problema que se propone en clase, uno por semana.
II. Trabajo en parejas, cada uno comenta su estrategia para resolver el problema y tratan de ponerse de acuerdo.
III. Solución del docente o solución experta, se presenta en una clase posterior.
IV. Elaboración de un reporte de los pasos anteriores, con reflexión final libre, el cual fue enviado por correo electrónico en fin de semana.

Fases propuestas por Slisko (2016), pero que fueron modificadas para este estudio; las tres primeras se realizaron en clase, con el objeto de que los alumnos pudieran comparar su solución con la solución experta, en la que el docente ilustraba la forma en que usa sus estrategias de monitoreo y control metacognitivo: ¿Qué es lo esencial del problema? ¿Estoy avanzando? ¿Cuál es el obstáculo? ¿Qué tal si cambio de enfoque? ¿Puedo elaborar otro plan? Por lo tanto, podemos formular el siguiente:

El *objetivo específico* fue implementar el curso bajo una dinámica de 4 fases, donde se pretende resaltar algunas estrategias de solución de problemas y estrategias metacognitivas en relación a la solución de un problema semanal.

El curso se impartió a estudiantes de las cinco carreras de licenciatura en la FCFM, se propone sólo un problema para evitar en lo posible el rechazo y que los alumnos acepten el reto; a su vez esto permite controlar el grado de dificultad y además buscar que la secuencia de problemas tienda puentes con los temas propios del curso.

En la fase 1 y 2 los alumnos resuelven el problema en clase, para que haya intercambio de ideas. Whimbey y Lochhead (2013) proponen que la resolución de problemas sea en parejas, uno explica su solución, el otro escucha y le formula preguntas, y se invierten los roles, método conocido como TAPPS (Thinking Aloud Pair Problem Solving). La reflexión y la conciencia metacognitiva constituyen dos aspectos importantes para la solución efectiva de problemas. Cuando el estudiante está tratando de resolver

el problema en sí, le resulta difícil manejar, al mismo tiempo, la capacidad metacognitiva. Cuando se trabaja en pareja, la conciencia cognitiva se divide y pasa a desempeñar dos papeles diferentes. El diálogo tiende a mejorar las habilidades metacognitivas, contrastar soluciones detona el proceso de crítica y autocrítica: ¿La idea de mi compañero es buena? ¿La puedo usar? ¿Quién tiene razón? Después de intercambiar ideas proponemos la siguiente solución…

Por otro lado, Adey (1999) encuentra que únicamente 30% de alumnos de 16 años alcanzan la etapa de razonamiento formal, actualmente se reconoce que este tipo de razonamiento no se alcanza según los planteamientos originales de Piaget. Indican cinco pilares para su proyecto (CASE). El primero es la suposición de que la capacidad de procesamiento de la mente crece paulatinamente en respuesta a las demandas que se le hagan al enfrentarse a algún problema (conflicto cognitivo); otro punto importante es el tender puentes (bridging), donde los patrones de razonamiento desarrollados deben conectarse a otros contextos, además de resaltar la relación entre los conceptos. Un pilar importante es la metacognición, pues consideran que la reflexión sobre el proceso de resolver un problema es esencial; sin embargo, el docente de matemáticas no apoya el desarrollo de las habilidades metacognitivas de sus alumnos, principalmente porque no conoce su naturaleza, y aunque sea bueno resolviendo problemas y aplique habilidades metacognitivas este conocimiento es implícito y difícilmente lo puede transmitir a sus discípulos. Lo anterior muestra la importancia de la metacognición, pero es necesario dar una propuesta concreta que pueda llevarse al salón de clases.

Coca Méndez y Slisko (2013) trabajaron con 29 futuros profesores, aplicaron TOLT como pre prueba, encontraron que no tenían desarrollado su pensamiento formal. Posteriormente aplicaron la metodología "Entorno de aprendizaje investigativo de ciencias" ILSE (por sus siglas en inglés), en el que trabajaron once experimentos de física. Al aplicar TOLT como posprueba encontraron que hubo un efecto positivo en el razonamiento lógico. De tal suerte que cambiar la dinámica tradicional de enseñanza tuvo un efecto positivo. Con estos antecedentes se plantea la siguiente:

Hipótesis

La aplicación de los pasos de Polya de manera reflexiva, mediante el trabajo en 4 fases, influye positivamente en el desarrollo de estrategias metacognitivas de los estudiantes y se refleja en la mejora del razonamiento lógico evaluado con TOLT.

El avance de los alumnos en la aplicación de estrategias metacognitivas al resolver problemas se evaluó de manera cualitativa durante el curso, mediante quince reportes semanales (fase cuatro). Utilizando los cuatro niveles de metacognición propuestos por Perkins y Swartz (1990):

- Tácito
- Consciente
- Estratégico
- Reflexivo

Los estudiantes que pertenecen al nivel tácito no tienen consciencia de su conocimiento metacognitivo. Los que pertenecen al nivel consciente conocen algunas estrategias básicas, pero no utilizan el pensamiento estratégico. Los que pertenecen al nivel estratégico organizan su pensamiento al resolver problemas, al tomar decisiones, en la búsqueda de pruebas, etcétera. Por último, los estudiantes que han alcanzado el nivel reflexivo, además de ser estratégicos respecto del pensar, revisan y evalúan sus estrategias, lo cual les lleva a tener más éxito en la solución de problemas.

Cognición y Metacognición

Wong (2015) explica la diferencia entre metacognición y cognición durante la solución de problemas con el siguiente diagrama (Figura 1).

Es decir, leer el problema, calcular, recordar una fórmula o algún teorema, regla, algoritmo, hacer una tabla, hacer un dibujo, etcétera, son procesos cognitivos. A la izquierda aparecen los procesos metacognitivos, mismos que se aplican en general y con la práctica de ambos se llega a ser un “mejor solucionador de problemas”.

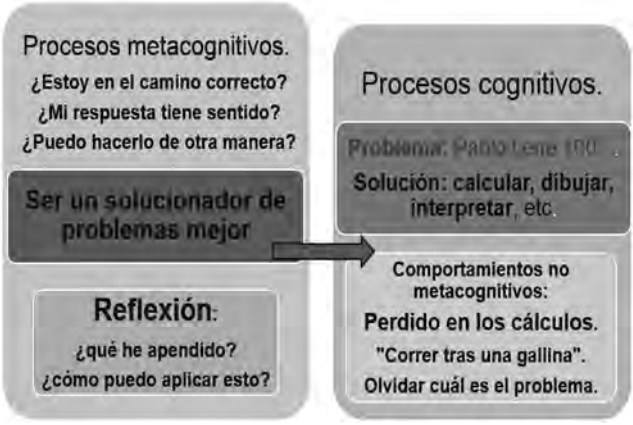


Figura 1. Cognición y metacognición, Wong, 2015.

¿Cómo medir el avance de las habilidades metacognitivas? Este es un punto importante en el presente trabajo, por desgracia no existe un "termómetro para medir habilidades", por ello es importante comentar al respecto. Jacobse y Harskamp (2012) indican que las técnicas más utilizadas para estudiar las habilidades metacognitivas son a través de cuestionarios de auto informe (self-report); pero están "fuera de línea", es decir, no directamente durante o después de la solución a un problema. En ellos se pide a los estudiantes que informen sobre la propia metacognición. Algunos ejemplos de cuestionarios utilizados son: las estrategias de motivación de aprendizaje (MSLQ) por sus siglas en inglés, el aprendizaje y el inventario de estrategias de estudio (LASSI) y el inventario de conciencia metacognitiva (MAI). Estos cuestionarios contienen declaraciones muy generales sobre monitoreo metacognitivo. Las declaraciones que se utilizan son del estilo: "antes de empezar a estudiar pienso en las cosas que necesito hacer para aprender" o "me cuestiono a mí mismo, para asegurarme de que he comprendido el material que he estado estudiando". Aplicados fuera del proceso de resolver un problema no miden el curso del comportamiento metacognitivo de los alumnos durante la tarea porque se recogen antes o después. Esto causa algunos problemas graves. En primer lugar, el hecho de que uno mismo informe respondiendo un cuestionario que se recoge aparte, significa que los estudiantes tienen que recuperar los procesos anteriores y el rendimiento de su memoria a largo plazo no es óptimo. Por lo tanto, estos cuestionarios

de auto informe son susceptibles de sufrir problemas de distorsión, debido a las limitaciones de la memoria a corto plazo de los alumnos.

En segundo, la forma en que los estudiantes responden a cuestionarios de auto informe puede estar sesgada por factores desencadenantes en las preguntas, que los induce a un "sello" incorrecto de su propio comportamiento o por deseabilidad social (quieren quedar bien). Por lo tanto, los estudiantes suelen ser bastante inexactos en el informe de su propio comportamiento metacognitivo, las respuestas no son representativas de lo que los estudiantes realmente hacen durante su proceso de resolución de un problema.

Por estas razones no aplicamos un "inventario de habilidades metacognitivas". Aunque es más laborioso, preferimos analizar los reportes reflexivos, porque tienen la ventaja de ser en "línea". Es decir, el alumno todavía está involucrado de alguna manera en la solución del problema cuando redacta su informe y explica con sus propias palabras, como experimentado su proceso, estas vivencias son muy personales, pero a través de un ejercicio de reflexión se pueden detectar algunos momentos clave del proceso de resolución, esto puede ser útil en el futuro.

Metodología del estudio

Se aplicó el instrumento TOLT al inicio y al final del curso. Esto con dos finalidades:

- Los resultados de TOLT muestran su nivel de razonamiento lógico, esto explicaría las diferencias que podrían obtenerse en el rendimiento de los alumnos, es decir de dos grupos, de uno con mayor promedio en TOLT podría esperarse mayor rendimiento, que de otro con puntaje menor. Como se comentó, un buen porcentaje de los estudiantes universitarios no alcanzan el nivel de pensamiento formal y esto se tomó en cuenta al evaluar las soluciones a los problemas, donde se esperaba el uso de estrategias elementales (aritméticas).
- Al comparar los resultados de TOLT final e inicial se pretendió medir si los alumnos tuvieron un avance con el trabajo realizado durante el curso.

La prueba TOLT de Tobin y Capie (1981), ha sido aplicada en múltiples estudios en diferentes niveles educativos. Incluye diez preguntas, ocho de

opción múltiple, pero con la característica de que da cinco opciones de respuesta y además da cinco opciones para que el alumno de la razón, y el ítem se considera correcto si la respuesta y la razón lo son. Las personas con nivel de razonamiento formal (7-10 aciertos) tienen una mayor comprensión de temas. Acevedo y Oliva (1995) validaron este test con estudiantes españoles.

Desarrollo

El curso se diseñó para trabajar un problema semanal en cuatro momentos o fases, relacionados con el contenido que marca el programa de Teoría de Ecuaciones de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Se diseñaron quince tareas, una por semana, y se propuso a los alumnos que las resolvieran. En total, los alumnos resolvieron 25 problemas, incluyendo exámenes parciales. Trabajamos problemas de álgebra superior: patrones numéricos e inducción matemática, problemas con enunciado que conducen a ecuaciones de segundo grado o ecuaciones simultáneas. Se hizo una tabla con los 25 problemas donde se indica la estrategia que se quiere resaltar en cada uno de ellos con la finalidad de que se vea claramente qué estrategias se aplican en varios problemas. Algunas estrategias se activan al reconocer el problema dentro de un tipo ya resuelto o visto con anterioridad. Se indica a los alumnos, que la aplicación de estrategias a futuro depende de saber escoger entre diferentes alternativas, pero primero debemos conocer algunas, de otra manera tenemos pocas opciones para elegir. Se explicaron algunas estrategias al presentar la solución experta, mismas que se aplicaron en diferentes problemas durante el curso. A continuación, se dan algunos ejemplos de problemas con enunciado propuestos:

Problema 1: Ayuda a Homero. El Sr. Burns le dice a Homero que le va a dar dinero por veinte días, pero tiene que escoger una de las dos opciones:

A. $1,000 dólares diarios por 20 días
B. Primer día $1, segundo día $2, tercer día $4, quinto día $8 y así sucesivamente hasta los 20 días

¿Qué opción debería escoger?

Problema 6. Fichas de dominó. Se sabe que el dominó común y corriente tiene 28 fichas, siguiendo el patrón, ¿cuántas fichas tiene un dominó doble 12? ¿cuántas fichas tiene un dominó doble 15? Generaliza y demuestra tu afirmación.

Problema 9. El comandante y su tropa. Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuentan que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

Problema13. Dos viajeros salen juntos, uno de ellos decide caminar 20 kilómetros diarios, pero el segundo decide que el primer día solo caminará 1 km, el segundo día 2 km, el tercer día 3 km, y así sucesivamente, cada día aumenta un kilómetro con respecto al día anterior. ¿Cuántos días tarda en alcanzar al primer viajero?

Resultados de la pre-prueba y de la post-prueba.
Se implementó el curso con la dinámica de cuatro fases durante 18 semanas. Se trabajó con 51 alumnos registrados en lista, pero algunos no se presentaron a los exámenes, 37 alumnos terminaron el curso.

Tabla 1. Puntaje inicial y final en la prueba TOLT.

Número de aciertos	**TOLT inicial agosto 2015**	**TOLT final diciembre 2015**
2	2	0
3	2	1
4	5	5
5	9	1
6	6	2
7	4	6
8	5	9

Número de aciertos	**TOLT inicial agosto 2015**	**TOLT final diciembre 2015**
9	2	7
10	2	6
37 alumnos	P = 5.8648	P=7.4864

Tabla 2. Clasificación de los niveles de razonamiento según la prueba TOLT.

Clasificación	**Aciertos**	**Inicial**	**%**	**Final**	**%**
Concreto	0-3	4	10.81	1	2.70
Transición	4-6	20	54.05	8	21.62
Formal	7-10	13	35.13	28	75.67
Total		37 alumnos		37 alumnos	

Al comparar los resultados de las pruebas se tiene que 29 alumnos subieron un punto o más, lo que equivale a 78.37 %. Hay dos alumnos que obtuvieron diez puntos al inicio y al final, que equivale a 5.4%; cinco alumnos mantuvieron igual su TOLT, pero menor que diez, equivale a 13.51 %. Solo un alumno bajó su puntaje, y eso representa 2.70%.

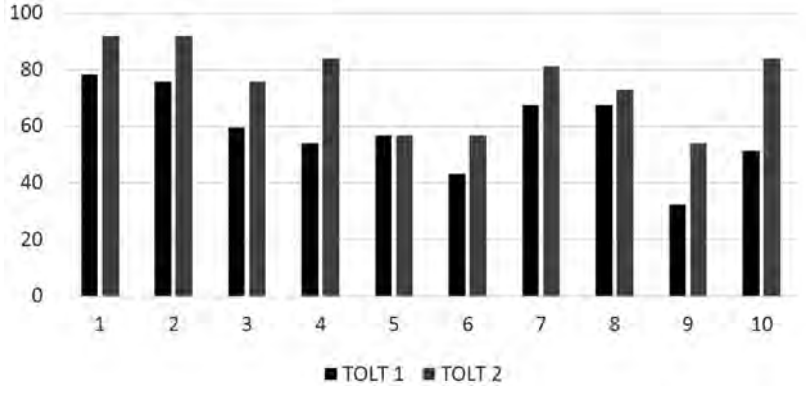


Figura 2. Comparación de los porcentajes de aciertos por pregunta de la pre-prueba y la post-prueba.

Como se puede ver en el gráfico hay un avance claro en la post prueba, sólo la pregunta cinco no tuvo un cambio.

TOLT incluye diez preguntas de cinco tipos, agrupadas de dos en dos, se muestran los porcentajes de aciertos en la siguiente tabla.

Tabla 3. Porcentaje de aciertos en TOTL por tipo de pregunta.

Tipo de pregunta en TOLT	**Pre**	**Post**	**Diferencia**
Proporcionalidad	77.03%	91.89%	14.86
Control de variables	56.76%	79.73%	22.97
Probabilidades	50.00%	56.76%	6.76
Correlaciones	67.56%	77.03%	9.47
Combinaciones	41.89%	68.92%	27.03

Donde hay un mayor incremento es en el tema de combinatoria (conteo) que corresponde a las preguntas 9 y 10, seguido de control de variables.

Tabla 4. Comparación entre cantidad de tareas y puntuación en TOLT.

Número de tareas	**Número de alumnos**	**Aumento de TOLT en un punto o más**	**Igual**	**Bajan**
15	8	4	4	0
14	5	5	0	0
13	4	2	1	1
12	2	2	0	0
11	3	3	0	0
10	5	4	1	0
Menos de 10	10	9	1	0

De la Tabla 4 se obtiene que 27 alumnos tienen diez o más tareas (72.97%); de ellos veinte aumentaron en TOLT; seis alumnos se mantuvieron igual, no olvidar que dos alumnos tuvieron diez aciertos en ambas aplicaciones. Sólo un alumno bajó en la post-prueba.

Discusión de resultados

Con el trabajo de las cuatro fases se logró un incremento de pensadores formales, al pasar de 35.13% a un 75.67% al final del curso.

El trabajo reflexivo fomentado en el curso, posibilitó que los alumnos resolvieran con más cuidado y seguridad la segunda aplicación de TOLT. Durante el curso se consideraron problemas relacionados con combinatoria (permutaciones y combinaciones), con motivo de la demostración del teorema del binomio, y esto se relaciona con probabilidad en un espacio muestral finito, y esto tiene relación con las preguntas 9 y 10 de TOLT. Las preguntas de la 1 a la 4 de TOLT no se consideraron en ningún problema o actividad.

Hubo una clara mejora en los resultados de TOLT en la mayoría de los estudiantes que terminaron el curso. Con las quince tareas se logró que la mayoría de los alumnos mejoraran la comprensión y el uso de las estrategias explicadas durante el curso. También se logró que realizaran de manera aceptable la fase cuatro del trabajo propuesto: la autorreflexión, donde deberían hacer una introspección y comentar sobre el proceso de solución del problema tomando en consideración las fases anteriores.

Con base en sus reportes reflexivos, consideramos que, hubo un avance en las habilidades metacognitivas, tomando en cuenta los niveles propuestos por Perkins y Swartz (1991), concretamente, al final del curso los alumnos eran conscientes de las estrategias usadas, es decir se encuentran, en el nivel dos (consciente). En un principio se encontraban en el nivel uno (tácito), en los primeros problemas no indicaban claramente qué estrategias usaban. Únicamente los alumnos con mayor puntaje en TOLT tuvieron un desempeño que podemos ubicar en el nivel tres (estratégico). El nivel reflexivo debe venir acompañado de la mejora de las habilidades para resolver problemas de manera individual, y esto no se puede evaluar en el corto plazo.

Al hacer el reporte los alumnos se van haciendo conscientes de sus errores, se corrigen a la luz de la solución vista en clase y este es un buen inicio para mejorar en los niveles metacognitivos.

Cuando se propone un problema y se permite solución libre, los alumnos activan sus conocimientos previos y aplican sus estrategias. Cuando el maestro explica la solución pone en juego los nuevos conocimientos, pero

también debe hacer énfasis en nuevas estrategias: recordar un problema parecido, lograr primero alguna sub meta, analizar un número finito de casos, buscar un patrón, introducir una variable auxiliar; con esto se da apoyo a los alumnos para que poco a poco desarrollen sus habilidades metacognitivas. La instrucción universitaria es un factor positivo para desarrollar el pensamiento formal, pero es necesario poner énfasis, mediante sugerencias sencillas en problemas concretos. El avance se nota en clase, los alumnos participan con más confianza y son capaces de argumentar y defender sus ideas, aceptan el reto que representa resolver un problema con enunciado.

Hubo un claro avance en la asegunda aplicación de TOLT. Pudieron influir diversos factores externos difíciles de controlar, pero no debemos olvidar que con las tareas elaboradas en 4 fases se insistió en la reflexión; es decir que, aunque los alumnos tengan una respuesta, al considerar la solución de otros, reflexionan detenidamente el problema y no se dejan llevar por la primera impresión; esto para ellos fue una "experiencia metacognitiva", según Flavell (Díaz-Barriga, 1997). Así, al resolver por segunda vez TOLT ellos pensaron con más calma.

La idea de pensar con más detenimiento fue desarrollada por Kanhneman (2013). El pensar lento es un proceso de trabajo mental deliberado, esforzado y ordenado. Se logró, con base en lo explicado en clase, que los alumnos aprendieran a considerar la solución de problemas con calma y a no actuar de manera precipitada, al compartir ideas de manera crítica.

El reporte escrito, fase 4, obligó a los estudiantes a tener claridad de ideas al redactar la experiencia vivida en las tres fases previas. Lo anterior nos recuerda las ideas de Vigotsky (1999) sobre la escritura y constituye un acierto del método empleado. El reporte reflexivo, brinda la oportunidad de "redactar en limpio". Al resolver un problema por primera vez el proceso está lleno de vivencias personales difíciles de reproducir y compartir: avances, retrocesos, dudas, la sensación de estar atorado, el desaliento ante caminos falsos, etcétera, y la alegría de acertar. Pero al explicar a alguien más renace como segunda solución, ya viene mejor ordenada, más corta, más breve, más clara y esto poco a poco mejora el desempeño al enfrentar otros problemas.

Conclusiones

Se cumplieron con los objetivos propuestos en el diseño del curso. Se animó a los alumnos a ir más allá de la primera alternativa cuando enfrentan un problema. Y como los alumnos aceptaron de buena gana, creemos que es el inicio para mejorar sus habilidades metacognitivas, es un primer paso significativo. Con el trabajo hecho en clase se logró incidir positivamente en el razonamiento lógico de los alumnos que terminaron el curso, según los resultados TOLT en la post-prueba.

Comunicar por escrito la estrategia usada para solucionar problemas mejora el desempeño de los novatos, como señala Pugalee (2004). Por lo tanto, creemos que es un acierto pedir un reporte reflexivo en formato libre elaborado con más tiempo. El alumno debe redactar su experiencia, y esto le ayuda a aclarar sus ideas, debe hacer un esfuerzo deliberado. Pedir que los alumnos reflexionen sobre el proceso de resolver un problema en fases es positivo porque se hacen conscientes de la necesidad de ver en dónde están y a dónde quieren llegar, para ello deben trabajar con otros compañeros compartiendo ideas de manera crítica. Escuchar otras ideas es positivo, ya sea que se rechacen o se adopten, pues de alguna manera debemos procesarlas, y esto pone en movimiento nuestro pensamiento.

El balance del curso, aplicando el diseño basado en la solución de problemas de manera reflexiva, es bueno, el desempeño de los estudiantes que cumplieron con las tareas fue aceptable. Los resultados de TOLT en la post prueba sugieren que el trabajo realizado tiene impacto en la mejora del razonamiento lógico, según los cinco componentes propuestos por Piaget y que TOLT evalúa con sus cinco tipos de preguntas. En este estudio se incrementó el número de alumnos con pensamiento formal en 40%.

Se cumplió con el objetivo de "ayudar al alumno" apoyándolo a monitorear y controlar mejor su proceso de solución de los problemas. En general, los alumnos mejoraron sus habilidades metacognitivas, la mayoría pasó del nivel tácito al nivel consciente y pocos lograron llegar al nivel estratégico, según la propuesta de Perkins y Swartz (1990).

Un avance firme sólo se logra si los alumnos consolidan sus habilidades en varios frentes, adquieren nuevos conocimientos, nuevas estrategias, actitudes positivas, control de sus emociones ante un problema, y esto, a su vez, depende de que el docente proponga actividades enriquecedoras, que

desafíen a los alumnos para que activen y mejoren sus estrategias metacognitivas día a día.

La metodología usada implica, sin duda, sacrificar tiempo de exposición tradicional, donde el alumno es escucha pasivo. Con la metodología empleada en esta intervención, el alumno participa más en un curso basado en la solución de problemas y, como se ve, tuvo un impacto positivo en el desarrollo de habilidades superiores de pensamiento.

Una actividad o problema rara vez lleva al aprendizaje esperado, pero, si activa conocimientos previos, si prepara nuevos conocimientos, si anticipa usos futuros de las estrategias, si usa diferentes representaciones entonces cumplirá con el propósito de hacer vivir la matemática como una experiencia positiva, desafiante y estimulante para los alumnos.

Bibliografía

Adey, P. (1999). La ciencia del pensamiento y las ciencias para el pensamiento: La aceleración cognitiva mediante la educación científica (CASE). *Editora de la oficina internacional de la Unesco. Ginebra. Suiza.*

Acevedo, J. y Oliva, J. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 48(3), 339-351.

Coca Méndez, D., Slisko, J. (2013). The influence of active physics learning on reasoning skills of prospective elementary teachers: A short initial study with ISLE methodology. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* (7)1, 3-9.

Díaz-Barriga, F., Hernández, G. (1997). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill.

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Towards efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition and Learning*, 7(2), 133-149.

Kahneman, D. (2013). *Pensar rápido, pensar despacio*, México: Random House Mondadori. Debate.

McKinnon, J. W., & Renner, J. W. (1971). Are colleges concerned with intellectual development? *American Journal of Physics*, *39*(9), 1047-1052.

Özsoy, G., & Ataman, A. (2017). The effect of metacognitive strategy training onmathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *1*(2), 67-82.

Perkins D., Swartz R. (1990). *Teaching Thinking: issues and approaches*. USA: Midwest publications.

Piaget, J. (1977). *Lógica y psicología*. Argentina: Solpir.

Polya, G. (2016). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student´s problem- solving process. *Educational Studies in mathematics*, 55, 27-47.

Sliško, J. (2016). Improving teaching design of active physics learning by using potentially helpful knowledge from other science fields. *Inovacije u nastavi – časopis za savremenu nastavu, 29*(2), 1-14.

Tobin, K. G., & Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and Psychological Measurement*, *41*(2), 413-423.

Vigotsky, L. (1999). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

Whimbey A., Lochhead J., Norode, R. (2013). *Problem solving and comprehension*. USA: Routledge.

Wong, K. (2015). *Effective mathematics lessons through an eclectic Singapore approach*. Singapore: World Scientific

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. *Identities, cultures, and learning spaces*, 575-582.

Correos-e: pzeleny61@hotmail.com / josipslisko47@gmail.com

Capítulo 8
Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria

Carlos Valenzuela García
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, IPN y Universidad de Londres (México).
María S. García González
Universidad Autónoma de Guerrero (México).
Alicia Nájera Leyva
Escuela Primaria "Pedro Ascencio Alquisiras", Chilpancingo, Guerrero, Universidad autónoma de Guerrero (México).

Resumen

En este escrito se proponen actividades diseñadas para la enseñanza de las fracciones en tercer grado de primaria. Para su diseño, en primer lugar, se realizó una caracterización de los usos y aspectos de la fracción que se encuentran presentes en los libros de texto mexicanos desde preescolar hasta tercer año de educación primaria; tomando como marco interpretativo el resultado de una investigación que proporciona un espécimen de fenomenología didáctica para ese concepto y su enseñanza. Como resultado de la caracterización se obtuvo que el uso más priorizado es la fracción como fracturador, en sus aspectos operador fracturante y relación de fractura. Esto condujo, en un segundo momento, al diseño de actividades que promueven otros usos, tales como, comparador, medida, operador y número.

Palabras clave: fracciones, fenomenología didáctica, primaria.

Motivación para el Diseño de las Actividades

Desde un punto de vista matemático, hacemos la precisión de que las fracciones pueden ser vistas como elementos de las clases de equivalencia del conjunto cociente que define a los números racionales. Pero en la didáctica, compartimos la idea de que las fracciones son el recurso fenomenológico para introducir los números racionales (Freudenthal, 1983), y que éstas pueden ser usadas en diversas situaciones y con diferentes significados.

Siendo esta una de las razones por la que centramos la atención en el estudio de las fracciones en la educación básica.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y más precisamente los números racionales, como problemática en el ámbito de la Matemática Educativa han sido estudiados desde diferentes enfoques por muchos investigadores. Algunas contribuciones en diferentes países, son por ejemplo los trabajos de Kieren (1976; 1988; 1992; 1993), Usiskin (1979), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Figueras (1988; 1996), Streefland (1991), Llinares (2012), Steffe y Olive (2010), Fandiño (2009), Quispe, Gallardo y González (2010) y otros.

Los resultados de las investigaciones antes referenciadas y otras han permitido identificar principalmente: (1) modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y números racionales; (2) marcos explicativos sobre la estructura que tienen las fracciones y los números racionales y su relación con otros objetos matemáticos; así como (3) algunas tendencias cognitivas que los alumnos tienen respecto a los mencionados conceptos.

Como producto de esos resultados se ha favorecido la reestructuración de la enseñanza de las fracciones en la educación obligatoria en muchos países. En el currículum mexicano, y más precisamente en los libros de texto se han identificado diferentes modelos para su enseñanza (por ejemplo, modelo de áreas, modelo discreto, modelo de la recta numérica) que buscan promover un conocimiento más amplio sobre este tema. Sin embargo, en investigaciones recientes se muestra evidencia de que las fracciones siguen siendo uno de los conceptos más complejos para tratar en clase, cuyo aprendizaje enfrenta grandes dificultades para la mayoría de los alumnos (véase ejemplos en Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013, y Petit, Laird y Marsden, 2010).

En México, las pruebas nacionales e internacionales que evalúan el rendimiento de los estudiantes en cuanto a matemáticas ponen de manifiesto la afirmación anterior. Como ejemplo se pueden consultar los resultados de las pruebas Excale (2009) y Planea (2015) que se aplicaron a través del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación a los alumnos de sexto grado de primaria. En el primer caso, se encontró que a nivel nacional el porcentaje de aciertos correctos correspondientes a la mayoría de los contenidos evaluados sobre las fracciones están por debajo de 50%.

Estos resultados son evidencia de que la problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las fracciones desde edades tempranas aún persiste. Al respecto, se tiene la hipótesis de que una de las razones podría estar vinculada con el hecho de que la enseñanza de las fracciones se sigue haciendo desde un mismo enfoque, empleando principalmente el modelo de áreas, dejando de lado las potencialidades que tienen otros modelos que sirven para enseñar otros usos de las fracciones.

Por otra parte, en un gran número de investigaciones se destaca la importancia del estudio del conocimiento que tienen los alumnos sobre las fracciones desde la educación básica. Autores como Siegler *et al*. (2012) señalan que un buen conocimiento de las fracciones es predictor de un buen desempeño de la matemática desde primaria hasta niveles más altos. Así mismo, Usiskin (1997) y Kieren (1992) afirman que el conocimiento de las fracciones y los números racionales se relaciona con muchos otros conceptos de la matemática y sus aplicaciones, su conocimiento se extiende más allá de la aritmética, como por ejemplo al álgebra, cálculo y geometría.

Lo señalado en este apartado nos ha motivado a diseñar actividades que se pueden emplear para el estudio de las fracciones en educación básica. El diseño se basa en el resultado de una fenomenología didáctica para las fracciones, el cual se concreta como un marco interpretativo que sirve para estructurar una enseñanza (Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto, 2017). Este resultado está fundamentado en las ideas de Freudenthal (1983) y se detalla a continuación como parte de los fundamentos teóricos.

Fundamentos Teóricos

Como ya se ha mencionado, el prototipo de fenomenología didáctica de las fracciones reinterpretado por Valenzuela *et al*. (2017) se constituye como un marco interpretativo, y de acuerdo con los autores, sirve para caracterizar los modelos de enseñanza existentes, los que se diseñen y los objetos mentales fracción que tienen los alumnos en un determinado nivel educativo.

En palabras de Freudenthal la fenomenología de un concepto matemático, una estructura matemática o una idea matemática se define como:

> La descripción de un noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos (1983, p. 27).

En otros términos, de la cita anterior se entiende que al hacer una fenomenología didáctica se pretende describir aquellos fenómenos que son organizados por medio de unos determinados conceptos, que de acuerdo con Puig (1997) pueden ser llamados medios de organización (véase Figura 1). Tales fenómenos se pueden encontrar ya sea dentro o fuera del ámbito matemático y, además, como menciona el autor antes citado, están presentes en el mundo de los alumnos y se proponen en la enseñanza. La relación "fenómenos - medios de organización" marca el uso que posteriormente se empleará cuando el análisis fenomenológico se lleve a la enseñanza: se plantearán los fenómenos que deben ser organizados con la intención de que los estudiantes vayan elaborando objetos mentales lo más rico posible de estos medios de organización (conceptos).

Desde un punto de vista didáctico, Freudenthal (1983) menciona que el objetivo en el sistema escolar es básicamente la constitución de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. La constitución de objetos mentales de los alumnos se entiende como el conjunto de ideas que ellos han elaborado sobre un concepto matemático (el objeto pensado) y su relación con los fenómenos que este organiza. El objeto mental de un alumno sobre un concepto matemático mejora cuando él logra resolver una gama amplia de problemas que se relacionan con los distintos fenómenos que organiza el concepto en un determinado nivel, y así, se dice que su objeto mental está más próximo a la adquisición del concepto.

Con respecto al análisis fenomenológico, vale la pena aclarar que, en un determinado nivel, de acuerdo con las interpretaciones de Puig (1997), el medio de organización que organiza ciertos fenómenos puede llegar a ser un fenómeno que es organizado por otro medio de organización, formando así una cadena de fenómenos-medios de organización (véase Figura 2). Por ejemplo, el concepto número organiza el fenómeno de la cantidad, pero, en otro nivel, el número es un fenómeno organizado por el sistema decimal de numeración. Así mismo, los números naturales, los enteros y los racionales, son

medios de organización de determinados fenómenos, pero también, en un nivel más avanzado, serán fenómenos organizados por el concepto número.

Figura 1. Esquematización sobre el proceso de elaborar una fenomenología didáctica.

Figura 2. Cadena de fenómenos-medios de organización.

Teniendo en cuenta este marco, y en términos generales se entiende que, para la constitución y mejoramiento de objetos mentales, los alumnos deben experimentar fenómenos que se relacionan con un concepto o estructura matemática, de manera que este sea su medio de organización. En este caso, se proponen situaciones que promuevan una experimentación donde se usen las fracciones, pero para ello, es necesario realizar una fenomenología didáctica del concepto fracción.

El ejemplo de fenomenología didáctica de las fracciones hecha por Valenzuela *et al*. (2017) a partir de las ideas de Freudenthal (1983) y otros investigadores como Kieren (1988), parte desde los usos de las fracciones en el lenguaje cotidiano, hasta la descripción de los usos y aspectos de las fracciones que se emplean en la enseñanza, así como su construcción formal desde la matemática. Además de este marco interpretativo, para el diseño e implementación de las actividades, recurrimos también al enfoque didáctico conocido como desafíos matemáticos, que se sugiere para el estudio de las matemáticas en el Programa de Estudios de la Secretaría de

Educación Pública en México, (SEP, 2011c). En seguida detallamos cada uno de estos fundamentos teóricos.

Usos y aspectos de las fracciones

De la fenomenología didáctica para las fracciones hecha por Valenzuela *et al*. (2017), distinguimos principalmente siete usos de ese concepto, dos que se emplean particularmente en el lenguaje cotidiano: descriptor y comparador, y cinco usos en un nivel más abstracto: fracturador, comparador, operador, medida y número, tal como se muestra en la Figura 3.

Distinguimos el uso de las fracciones en el lenguaje cotidiano, porque se asume el hecho de que este no necesariamente resulta de un conocimiento escolarizado. Es decir, algunas expresiones se usan consciente o inconscientemente, y no precisamente se conoce su origen epistemológico como parte de una intención didáctica. Tampoco se puede generalizar el conocimiento de las fracciones a partir del uso que se les da en ciertas expresiones. Aunque cabe resaltar que las ideas que se puedan tener sobre las fracciones que se emplean en el lenguaje cotidiano pueden ser un punto de partida para estructurar una enseñanza.

Para tratar de esclarecer la idea del párrafo anterior se proponen dos ejemplos, el primero enfatiza sobre la falta de significado de la fracción en cierta expresión y el segundo deja ver que se puede conocer el significado de la fracción en una expresión empleada en el lenguaje cotidiano, pero no necesariamente se puede generalizar el conocimiento.

1. En ocasiones, los niños usan expresiones como: "la mitad de pan", "la mitad de una naranja" o "la otra mitad". En algunas comunidades zacatecanas la venta de leche se hace aún con garrafas de diferentes medidas (cuartos, medios, tres cuartos y litros), por lo que es común escuchar las expresiones: "me da media…/me da una media…", "me da cuarta…/me da una cuarta…", y completan con la oración "jarra de leche". En estos ejemplos hay niños o adultos que no conocen la relación entre la capacidad de la jarra y la parte que se les da, o la relación entre el tamaño de la naranja o pan y la parte que se les da. Las fracciones solo las usan para describir la cantidad de leche que contiene un recipiente, o la cantidad de naranja o pan que quiere un niño.

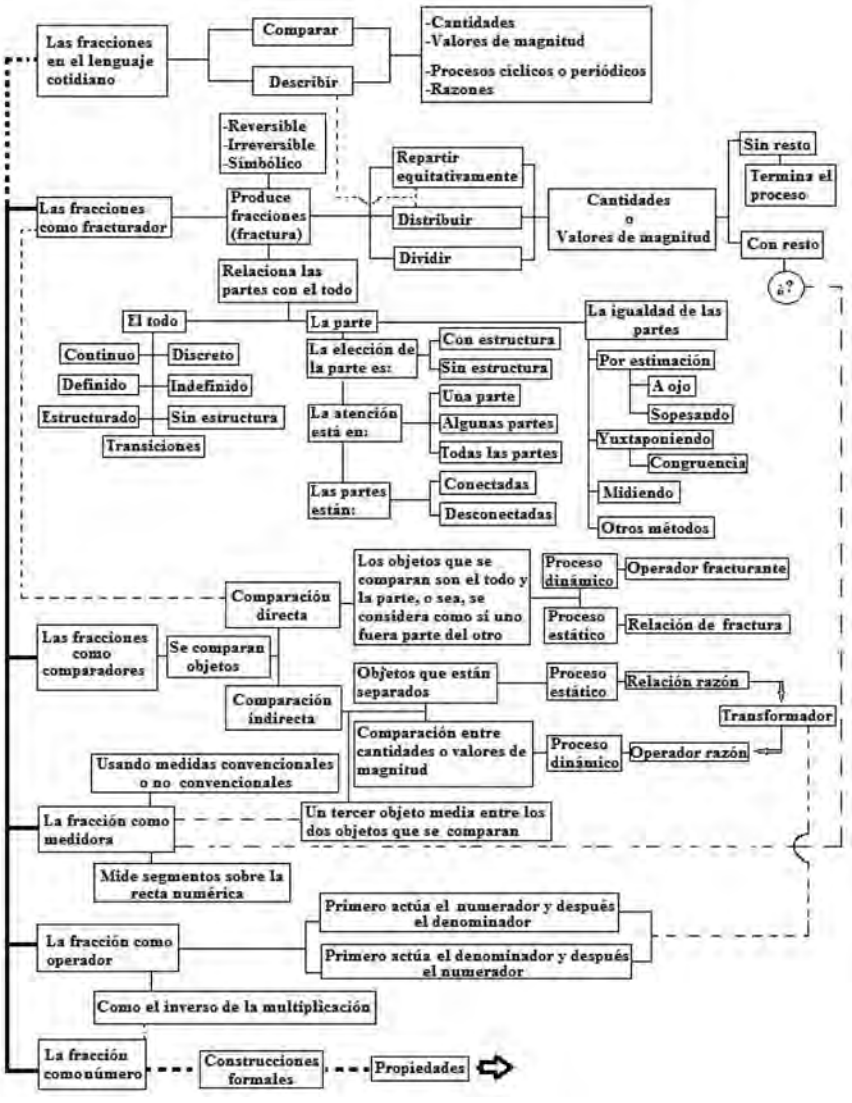


Figura 3. Usos y aspectos de las fracciones (tomado de Valenzuela, Figueras, Arnau, & Gutiérrez-Soto, 2017, p. 229).

2. En España es usual llegar a un bar y pedir "un quinto o un tercio de cerveza", al igual que en el ejemplo anterior hay quienes sólo usan las fracciones como una etiqueta que describe al recipiente que

> contiene el líquido. Ahora supóngase que en este caso las personas conocen la relación donde subyace la fracción, es decir, que 1/3 son 33 centilitros (cl) de un litro de cerveza, y 1/5 son 20 cl de un litro, supongamos además que pueden comparar y saben que un tercio es mayor que un quinto, ya que lo asocian al tamaño del recipiente y a su capacidad de volumen, y por supuesto, a la cantidad de cerveza que se pueden tomar. Sin embargo, cuando se comparan otras fracciones, como un séptimo y un octavo, no necesariamente las personas logran comparar y distinguir con éxito cuál es mayor o menor.

Una actividad con fines educativos puede considerar estos y otros ejemplos de situaciones que se viven a diario para propiciar un conocimiento más general y significativo de las fracciones. En el ejemplo de las cervezas se pueden estudiar las características de las fracciones 1/3 y 1/5, ambas fracciones unitarias, donde se puede establecer la relación general (mientras mayor el denominador, menor es la fracción). Otras expresiones empleadas en el lenguaje cotidiano son:

- Quiero solo la mitad de tu sándwich: aquí la fracción se está usando para describir una magnitud; mientras que si se dice quiero un pedacito de sándwich, pero que sea la mitad de lo que tú te comiste, entonces la fracción se está usando para comparar una magnitud.
- Quiero la mitad de la naranja, hasta aquí hemos recorrido la mitad de la pista, falta media hora, me da un cuarto de tortillas: estas son otras oraciones comunes en donde la fracción se usa para describir una magnitud.
- Me toca un tercio de la herencia, más de la mitad del grupo son niños: aquí la fracción se usa para describir una cantidad.
- Tú tienes la mitad de dinero del que tengo yo, te dieron un cuarto de chocolate más que a mí: en estos ejemplos la fracción se usa para comparar magnitudes.
- Hay más de la mitad de hombres que mujeres, tu mamá es la mitad de grande que la mía: estas son oraciones donde la fracción se usa para comparar cantidades.

Otros usos más elaborados de las fracciones en el lenguaje aparecen en las expresiones: rodar 3½ veces una llanta, girar 2½ veces más la llave en

la cerradura. En este caso se están describiendo o comparando procesos cíclicos o periódicos cuya última fase se ha realizado parcialmente. O por medio de las expresiones siguientes se están describiendo fracciones como razón: ocho de cada diez gatos prefieren whiskas, tres de cinco partes están dañadas, dos tazas de harina por una taza de leche, por cada niño habrá dos galletas.

En el lenguaje cotidiano se usan las fracciones principalmente para describir o comparar cantidades, valores de magnitud, procesos cíclicos o periódicos y razones.

Los otros usos de las fracciones son: fracturador, comparador, medida, operador y número (ver Figura 3), éstos ya han sido informados en Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto (2016), pero para precisar en este documento se retoman a continuación de manera general esas ideas, las cuales se precisan en el diseño de las actividades, propuesta que interesa en este documento y que se exponen más adelante.

La fracción como fracturador se usa para producir fracciones (fracturar), por medio de las cuales se relacionan las partes con un todo continuo o discreto. Esto podría surgir a partir de dejar expresada una división, realizar un reparto equitativo o una distribución. La fracción que surge de los procesos anteriores describe la cantidad o magnitud que toca a cada objeto o individuo entre los que se hace la distribución o reparto. Los procesos de causar fracciones pueden ser dinámicos o estáticos. En los procesos dinámicos se dice que la fracción se usa como fracturador en su aspecto operador fracturante, mientras que, en los procesos estáticos, se usa la fracción en su aspecto relación de fractura.

Para comparar cantidades, magnitudes u objetos que se separan unos de otros, ya sea por experimentación o de forma imaginaria, también se usan las fracciones. Dicha comparación se puede hacer de manera directa o indirecta. Cuando se hace una comparación directa, la fracción se usa como fracturador. Para hacer una comparación indirecta se emplea un tercer objeto que media entre los objetos que se comparan. En los procesos de comparación dinámicos se usa la fracción como comparador en su aspecto operador razón, mientras que, en los procesos estáticos, en su aspecto relación razón.

El uso de la fracción como medidora se emplea para medir segmentos sobre la recta numérica, o cuando la fracción precede a una magnitud, por

ejemplo, ½ kg. La fracción como operador se acerca cada vez más al campo de los números, puede ser vista como el inverso de la multiplicación, o como un transformador, que transforma una cantidad en otra. Finalmente, la fracción como número es cuando se le da un tratamiento meramente numérico y se reconocen algunas de sus propiedades como, por ejemplo, la equivalencia, el orden y la densidad de las fracciones.

Los desafíos matemáticos

Un desafío matemático consiste en secuencias de situaciones matemáticas que tienen como objetivo despertar el interés de los alumnos e invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados que emiten (SEP, 2011a).

El planteamiento teórico-metodológico de los desafíos matemáticos es acorde a las nuevas exigencias que el Sistema Educativo Mexicano plantea para el docente como profesional de la enseñanza de las matemáticas, pues reclama un conocimiento profundo del contenido matemático y didáctico de esta asignatura en aras de transformar a la clase en un espacio social de construcción de conocimientos donde los alumnos aprenden a enfrentar diferentes tipos de problemas, de formular argumentos, de emplear distintas técnicas en la resolución de problemas, y de usar el lenguaje matemático para comunicar o interpretar sus ideas. Por esta razón, hemos decidido adoptar a los desafíos matemáticos como referente conceptual y metodológico para el diseño de las actividades propuestas.

Las actividades que presentamos, basadas en los desafíos matemáticos exhiben las siguientes características para ser resueltas:

- Involucran diversas estrategias de solución.
- El alumno debe usar sus conocimientos previos, el desafío consiste en reestructurar lo que ya sabe, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo.
- El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y lo puedan reconstruir en caso de olvido.
- La actividad intelectual fundamental en estos procesos de estudio se apoya más en el razonamiento que en la memorización.

Con el diseño de las actividades se espera que tanto alumnos como docentes se enfrenten a retos matemáticos, en donde apliquen técnicas eficaces y argumenten sus razonamientos.

Caracterización del Modelo de Enseñanza de las Fracciones en Preescolar y Primeros Tres Años de Primaria

Para llevar a cabo la caracterización del modelo de enseñanza de las fracciones se realizó un análisis de los tres libros de texto de preescolar y los libros de primero, segundo y tercero de primaria, así como del plan de estudios de este nivel escolar (SEP, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2016e). Este análisis consistió en identificar en estas fuentes los usos de la fracción y sus diferentes aspectos. Como resultado se encontró que, en preescolar, primero y segundo de primaria, las fracciones se presentan de manera implícita al fraccionar un entero, a la mitad o en diversas partes iguales, siendo tercer año de primaria donde ya se hacen explícitas.

Enseguida se muestra, a modo de ejemplo, el caso del análisis de una lección del libro de texto desafíos matemáticos de tercer año de primaria, en donde se identificaron 3 usos de la fracción: fracturador, medida y número.

Fracturador: La fracción en el uso fracturador se presenta en los ejercicios 1 y 2 de la lección 32. Este aspecto se caracteriza porque la unidad o el todo se fractura, esto es, se obtienen tantas partes iguales como se deseen. En ambos ejercicios el todo es continuo, por tratarse de un solo elemento. En el ejercicio 1 los alumnos son quienes deben hacer la partición, por eso se habla de la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante. En el ejercicio 2 ya está hecha la partición, los alumnos deben establecer la relación de fractura, aunque en el caso del círculo deben reconocer que hay dos unidades fraccionarias y que una es la mitad de la otra (véase Figura 4).

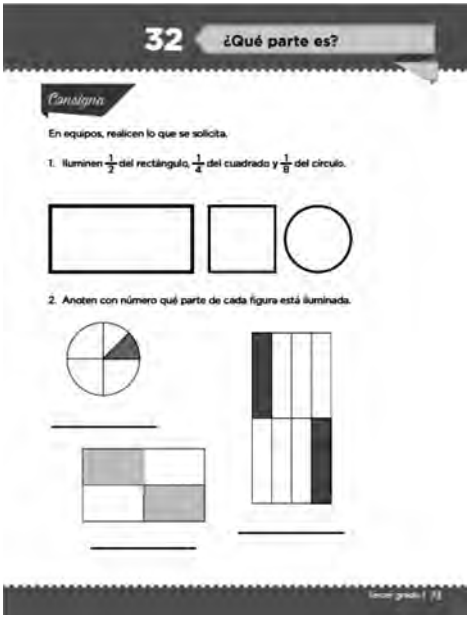


Figura 4. Ejercicios donde aparece la fracción como fracturador en el libro de texto (SEP, 2016d).

Medida: Este se refiere a la asignación de un número a una región o a una magnitud de una, dos o tres dimensiones, producto de la partición equitativa de la unidad. En el ejercicio 3 de la lección 32 (Figura 5), el segmento de recta mide dos unidades, los alumnos representarán fracciones a partir de identificar en cuantas partes será fraccionada la unidad. Las unidades de medida serán , y , las cuales servirán para establecer la medida de los otros segmentos que van de 0 a los puntos E, C, A, D y B.

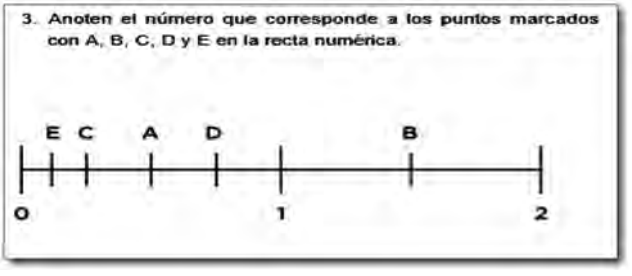


Figura 5. Ejercicio donde aparece el uso medida.

Número: La fracción es vista como un número. En el ejercicio 4, de la lección 32 (Figura 6) al observar cada par de fracciones los alumnos anotarán los símbolos > (mayor que), < (menor que) o = (igual) según corresponda, es decir, establecerán un orden entre ellos.

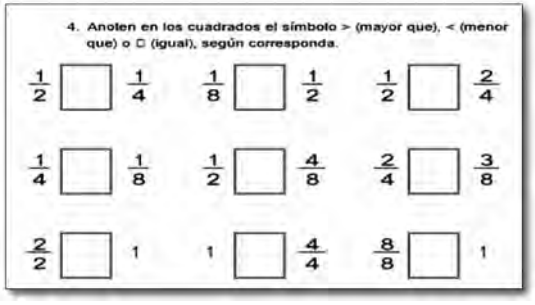


Figura 6. Ejercicio donde aparece la fracción como número.

Como resultado del análisis se encontró que los usos que más se priorizan en la Educación Básica Preescolar son el de descriptor y fracturador (Tabla 1). La fracción como fracturador se empieza a usar de manera implícita en segundo y tercer año de Educación Preescolar. Específicamente en una actividad de cada libro, y en ambos casos se usa la fracción en el lenguaje cotidiano, y describe el resultado de un reparto equitativo.

Tabla 1. Usos de la fracción en los libros de texto para preescolar.

	PREESCOLAR		
Usos	1°	2°	3°
Fracturador		1	1
Comparador			
Medida			
Operador			
Número racional			
En el lenguaje cotidiano			Descriptor (Reparto equitativo)

En primaria el uso más priorizado es fracturador (Tabla 2). Este aparece con más frecuencia en tercer año de educación primaria. En el primer año de primaria la fracción se presenta en dos actividades como comparador y como operador, en segundo año no se presenta la fracción, y en tercer año de primaria es cuando aparecen las fracciones en los cinco usos, pero tiene más frecuencia el uso fracturador, ya que aparece en 14 actividades.

En la educación primaria las lecciones que se proponen expresan, de manera explícita, relación con las actividades de la vida diaria del alumno.

Tabla 2. Usos de la fracción en el libro de texto de primaria (1-3 grado).

	PRIMARIA		
Usos	1°	2°	3°
Fracturador			14
Comparador	1		1
Medida			7
Operador	1		1
Número racional			2
En el lenguaje cotidiano	Descriptor (Reparto equitativo)		Descriptor (Reparto equitativo)

Con base en esta revisión nos percatamos de que los usos de la fracción (fracturador, comparador, medida, operador y número) caracterizan la enseñanza de este concepto en tercer año de primaria, poniendo mayor énfasis en el uso de la fracción como fracturador. Este resultado influyó en nuestro diseño de las actividades de intervención para la enseñanza de las fracciones en tercer año de primaria, pues los problemas que lo forman consideran cada uno de estos usos.

Actividades de Intervención

Se han diseñado 5 actividades donde se emplean las fracciones, cada una de ellas implica una situación con un contexto cercano al estudiante, como las fiestas de cumpleaños, el recreo, los paseos en bicicleta y las carreras,

éstas implican el trabajo con algún uso particular de las fracciones, aunque eventualmente se pueden emplear más de un uso. En cada actividad se plantean preguntas desafiantes que pretenden que los estudiantes razonen y argumenten sus respuestas, de acuerdo con los planteamientos teóricos y metodológicos de los desafíos matemáticos. Las actividades están redactadas en enunciados que los estudiantes tienen que leer y analizar para poder dar respuesta.

Actividad 1

Esta actividad demanda los usos de la fracción como fracturador y comparador para un todo continuo y definido (ver Figura 7). En el inciso a, el estudiante debe establecer una relación de fractura a partir de fracturar el pastel (esto lo puede hacer de manera simbólica, dejando expresada una partición en la imagen que se propone o recurrir a otras representaciones y usar la fracción en su aspecto operador fracturante), esto para identificar la parte que le toca a cada uno de los invitados, o sea, .

En las preguntas de los incisos (b) y (c), se requiere que el estudiante establezca una relación de fractura. En (b), es necesario establecer la relación , que corresponde a la fracción del pastel que Raúl repartió a sus amigos. En (a), se debe establecer la relación , que corresponde a la cantidad de pastel que Raúl le dio a sus hermanos. En ambos casos, la relación que resulta describe la cantidad de pastel que le toca a cada grupo (amigos y hermanos).

Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.
¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?
¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus amigos?
¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?
¿A quién le repartió más pastel Raúl, al grupo de sus amigos o al de sus hermanos?, ¿Por qué?

Figura 7. Actividad 1 para el estudio de las fracciones en primaria.

Los resultados de los incisos (b) y (c) deben ser comparados, para que se pueda dar respuesta al inciso (d) satisfactoriamente, identificando que el grupo de los amigos de Raúl es quien ha recibido mayor cantidad de pastel. En este último inciso se usa la fracción como comparador, e incluso se pueden comparar esas cantidades y establecer una relación razón, ya que la cantidad de pastel que se les repartió a los hermanos, es la mitad de la que se les repartió a los amigos.

Actividad 2

Esta actividad (ver Figura 8), también demanda el uso de la fracción como fracturador, aquí, la exigencia recae en el aspecto operador fracturante para establecer una relación de fractura como resultado de una distribución del total de profesores (un todo discreto y definido) que estará en cada uno de los tres grupos que se formarán.

En la explanada de la escuela se reunieron 12 profesores porque van a formar 3 equipos con la misma cantidad de integrantes, para vigilar a los niños durante el recreo, ¿cuántos profesores estarán en cada equipo?

Escribe tu respuesta:_____

Figura 8. Actividad 2 para el estudio de las fracciones en primaria.

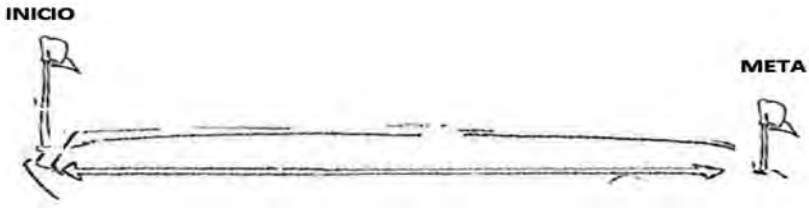
En este caso, el resultado de la distribución describe la cantidad de profesores que habrá por cada uno de los grupos para cuidar a los niños durante el recreo.

Actividad 3

Esta actividad (véase Figura 9) exige principalmente el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica. Para dar respuesta en (a), el estudiante puede fracturar la distancia del inicio a la meta, o bien, solo comparar las partes que cada competidor ha recorrido,

por lo que aparece la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante.

En una carrera compiten tres personas, en el momento que Jaime observa la carrera los competidores se encuentran a diferente distancia de la meta: El competidor uno se encuentra a $\frac{1}{2}$ de la meta, el segundo competidor a $\frac{1}{4}$, y el tercero se encuentra a $\frac{1}{8}$. Representa en la imagen las posiciones de los competidores.



a) ¿Cuál de los competidores ha recorrido más? ¿Por qué?
b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros ha recorrido cada competidor?

Figura 9. Actividad 3 para el estudio de las fracciones en primaria.

Para responder el inciso (b), es necesario que el estudiante opere utilizando la fracción para transformar la cantidad 6 km, según la fracción de la carrera que ha recorrido cada uno de los competidores. Esto es $\frac{1}{2}(6)=3$, $\frac{1}{4}(6)=1.5$, $\frac{1}{8}(6)=0.75$. En este caso la fracción se usa como operador, que transforma una cantidad en otra.

Actividad 4

Esta actividad (véase Figura 10), al igual que en la actividad 3, pone énfasis en el uso de la fracción como medida, pero a diferencia de la anterior, no se presenta un gráfico que ayude al estudiante a modelar el planteamiento del problema. Para dar respuesta en el inciso (a), se presentan al estudiante dos estrategias, la comparación de los recorridos de Ana y Paty, y la fractura del kilómetro recorrido.

Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana solo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?
b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

Figura 10. Actividad 4 para el estudio de las fracciones en primaria.

Para dar respuesta al inciso (b), el estudiante puede hacer una comparación entre las fracciones que Ana y Paty recorrieron y establecer un orden, esto es $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ en este caso se usa la fracción como número, pero también puede recurrir al aspecto fracturador en el caso que dejen expresadas las particiones e indicadas las fracciones del camino que recorrieron Ana y Paty. El uso de la fracción como operador también se usa para calcular la distancia que cada niña ha recorrido. En este caso, Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de un kilómetro, o sea, 0.75 km, mientras que Ana recorrió $\frac{5}{8}$ de un kilómetro, o sea, 0.625 km. Es verdad que las operaciones que aquí se sugieren no son habituales para los alumnos, pero esto puede ser una oportunidad para introducir los números decimales a partir de algo tan familiar para ellos, como es el metro.

Actividad 5

Esta actividad (ver Figura 11), se centra en el uso medida, pero a diferencia de las anteriores, la intención es completar el entero, con el conocimiento de la parte; así, se sabe que 2 km representan $\frac{1}{4}$ del recorrido de Pedro, lo que lleva a identificar que las $\frac{3}{4}$ partes que faltan corresponden a 6 km, por lo que el recorrido total es de 8 km.

Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer.

¿Cuántos kilómetros debe recorrer Pedro en total?

R:_____

Figura 11. Actividad 5 para el estudio de las fracciones en primaria.

Discusión

Es altamente probable que los lectores identifiquen algunas de las actividades propuestas como de muy alta dificultad para el nivel que las estamos proponiendo, y quizá abandonen la idea de emplearlas para sus lecciones. Sin embargo, antes de detenerse y rehusarse a trabajar con los alumnos, les invitamos a reflexionar sobre la pregunta: ¿Qué pueden hacer mis alumnos? Seguramente cuando trabajen con los niños se sorprenderán de las actuaciones que pueden llegar a realizar.

Como experiencia, durante la validación de las situaciones con profesores, tuvimos un comentario del tipo: "los niños no podrán realizar la actividad 5 porque le falta información". Este hecho nos dejó ver que el profesor no tenía las competencias necesarias para responder este tipo de problemas, pero eso no significa que los niños tampoco las tengan. Al momento de aplicar estas situaciones con niños de 8 años, a manera de cuestionario, pudimos ver respuestas como la que se muestra en la Figura 12, que deja ver las actuaciones de una alumna competente.

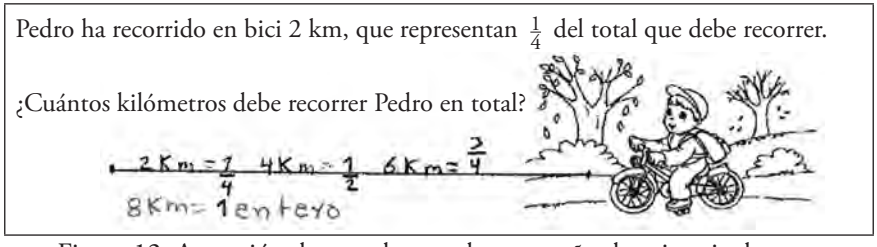


Figura 12. Actuación de una alumna de tercer año de primaria durante el proceso de validación de la actividad 5.

Con lo anterior no pretendemos evidenciar o demeritar el conocimiento o práctica del profesor, solo hacer la reflexión de que, a veces, somos nosotros mismos quienes limitamos la enseñanza por diversas razones. Una de ellas puede ser porque no se tienen actividades que nos guíen para llevar a cabo nuestras clases. En este sentido, se proponen las actividades presentadas como un recurso que ayude a los profesores a enseñar fracciones. Traemos esto a colación porque como lo mencionamos antes, persiste la idea de que las fracciones se siguen enseñando a través de un solo enfoque, particularmente el modelo del pastel, que si bien, con ese enfoque se desarrollan ciertas habilidades, también se dejan de lado otras que se potencian con el empleo de otros modelos.

La enseñanza con el modelo del pastel limita al conocimiento de fracciones propias (Freudenthal, 1983), y también potencia el uso de la fracción como fracturador y más específicamente para establecer una relación de fractura, pero recordemos que hay muchos otros fenómenos que son organizados por las fracciones, así que mientras más se empleen en situaciones de enseñanza, se tendrá un mejor objeto mental sobre ese concepto. Invitamos al lector a que ponga a prueba las actividades aquí presentadas, guiando a sus alumnos tal como se propone en los desafíos matemáticos para poder constituir un mejor objeto mental sobre las fracciones.

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* 91-125. New York: Academic Press.

Fandiño, M.I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*: Bogotá: Magisterio.

Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.

Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En F. Hitt (Ed.), *Didactica, invstigaciones en Matemática Educativa*, 173-196. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reide Publishing Company.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2009). Explorador Excale. Resultados de la evaluación de matemáticas de alumnos de sexto año de primaria en México [consultado 20 de julio de 2015].

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop, 101-144. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

_____ (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* 162-181. Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

_____ (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* 49-84. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

_____ (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En R. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teachin,* 323-371. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.

Planea (2015). *Plan de Estudios Nacional de Educación Básica*. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/ba/

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs.61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.

SEP (2011a). *Guía para la Educadora. Educación Básica*. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2011b). *Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado.* Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección

General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2011c). *Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado.* Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y de la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016a). *Mi álbum. Preescolar. Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016b). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016c). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016d). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016e). *Mi álbum. Preescolar. Segundo*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

_____ (2016e). *Mi álbum. Preescolar. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

Siegler, R., Fazio, L., Bailey. D. y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. Trends in Cognitive Sciences, *17*(1), 151–152.

Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., *et al.* (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. Journal of the Association for Psychological Science, *23*(7), 691-697.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). Children's Fractional Knowledge. Dordrecht Heidelberg London: Springer New York. DOI: 10.1007/978-1-4419-0591-8.

Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(2), 1-20.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Mental object for fractions of middle school students with truancy problems. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Correo-e: carvaga86@hotmail.com / mgargonza@gmail.com / anlnala33kd6@hotmail.com

Aportes a la educación matemática
basados en la investigación
su composición, diseño y cuidado estuvo a cargo de
Lidia Aurora Hernández Rebollar, Ileana Borja Tecuatl
Josip Slisko Ignjatov y José Antonio Juárez López
se terminó de imprimir en julio de 2019, en los talleres
de El Errante Editor, S.A. de C.V.,
ubicados en Privada Emiliano Zapata 5947,
col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue. México.

El tiraje es de 180 ejemplares.