Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

"LA INTEGRAL DE NEWTON Y SU RELACIÓN CON LA INTEGRAL DE LEBESGUE"

T E S I S

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Víctor Hugo Rodríguez Ávila

Director de tesis

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Puebla, Pue. Agosto de 2013

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por permitirme vivir hasta este día, haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo de felicidad.

Le doy gracias a mis padres Eustolia y Mario por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mis hermanos por ser parte importante de mi vida y representar la unidad familiar. Por apoyarme en aquellos momentos de necesidad; hago este triunfo compartido, sólo esperando que comprendan que mis ideales y esfuerzos son inspirados en cada uno de ustedes.

A mis amigos Ericka, Socorro, Mayra, Anabel, Noemi, Susana, Arturo, Nelson, Alberto por todos los momentos que pasamos juntos, por las tareas y largas tardes de estudio que juntos realizamos hombro a hombro (en algunas ocasiones soportándome). A Damián por su valiosa amistad y compañia. A todos ustedes por la confianza que en mí depositaron y su valiosa amistad que me brindaron.

A mis sinodales. M.C. Guadalupe Raggi Cárdenas, Dr. Jacobo Oliveros Oliveros y M.C. Luis Ángel Gutíerrez Méndez por haberse tomado el tiempo para revisar este proyecto. Y en particular a la M.C. Guadalupe Raggi Cárdenas por haber revisado el trabajo antes de ser terminado.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por haberme aceptado como su tesista, fue un gran placer estar bajo su tutela en el desarrollo de este trabajo.

Gracias a los Profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por todo el apoyo brindado a lo largo de la carrera, por su tiempo, amistad y por los conocimientos que me transmitieron.

Finalmente a todas las personas que, de una u otra manera, me ayudaron a llegar a este momento.

"La originalidad de las matemáticas consiste en el hecho de que en la ciencia matemática se exhiben conexiones entre cosas que, aparte de por la acción de la razón humana, son extraordinariamente poco obvias."
-A.N. Whitehead

Índice general

Introducción

La teoría clásica de integración usualmente utiliza dos maneras diferentes para definir una integral. Una es la llamada **descriptiva** y la otra **constructiva**, esta última es la más usada en los cursos básicos de la teoría de integración. Por ejemplo, la definición que dió Newton es descriptiva mientras que la de Riemann es constructiva.

La definición de la integral dada por Newton, escrita en términos modernos, es:

Sean a, b números reales, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Newton integrable en $[a, b]$, si existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$. En este caso la integral de Newton de f en $[a, b]$, denotada por $(N) \int_a^b f$, se define como

$$(N) \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Newton definió la integral en términos de lo que actualmente se conoce como una primitiva o antiderivada de la función f.

Observemos que si $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tal que $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces por el Teorema del Valor Medio, $F = G$ salvo una constante. Este hecho, nos permite concluir, que la integral de Newton de f, no depende de la primitiva de f que tomemos.

La definición de la integral dada por Riemann, escrita en términos modernos, es:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Riemann integrable en $[a, b]$, si existe un número real A, con la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ que cumple que, para toda partición $P = \{a = x_o < x_1 <$

$\cdots < x_n = b\}$ y para toda $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\text{si } \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\} < \delta, \text{ entonces } \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \epsilon.$$

Se puede probar que si f es Riemann integrable en $[a, b]$ el número A es único, y se le denota por $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)dx, \ldots$ y se le llama la integral de Riemann de la función f en $[a, b]$ (o simplemente la integral de f cuando no hay confusión).

Ambas integrales no son equivalentes, es decir, existen funciones Riemann integrables que no son Newton integrables y recíprocamente, como lo veremos más adelante. Sin embargo ambas integrales están relacionadas con lo que actualmente se le conoce como el **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable, tal que, existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a, b]$ y $F' = f$, entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Observemos que en términos de las definiciones de las integrales de Newton y de Riemann, este teorema nos dice que si f es Riemann integrable y Newton integrable, entonces ambas integrales son iguales.

Por necesidades propias de la matemática y de sus aplicaciones, Lebesgue, en 1902, definió una integral (conocida como la integral de Lebesgue), más general que la integral de Riemann. Esta integral tiene "mejores" propiedades que la integral de Riemann y es con la que actualmente se trabaja más. Con esta integral, se tiene una generalización del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable, tal que, existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a, b]$ y $F' = f$. Entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

También observemos que en términos de la definición de la integral de Newton, este teorema nos dice que, si f es Newton integrable y Lebesgue integrable, entonces ambas integrales coinciden.

La definición de la integral de Newton admite varias generalizaciones, las cuales, básicamente consisten en modificar las condiciones de la función primitiva, tales como, que sea diferenciable, salvo en un conjunto finito, en un conjunto numerable infinito, en un conjunto de medida cero, etc. O también cambiar los dominios de las funciones con las que se trabaja, por ejemplo que el dominio sea un intervalo abierto, infinito, $\ldots$.

El objetivo general de este trabajo es presentar una breve introducción a la integral de Newton y estudiar la relación que tiene con la integral de Lebesgue. Los objetivos particulares son:

I Presentar y demostrar algunas propiedades básicas de la integral de Newton para funciones reales de variable real, tales como: la linealidad, la monotonía, la fórmula de integración por partes, el método de cambio de variables, etc.

II En cuanto a la relación entre la integral de Lebesgue y la de Newton probaremos:

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue y Newton integrable, entonces las dos integrales son iguales. Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente Newton integrable, entonces también es Lebesgue integrable.

Este trabajo consta de una introducción, tres capítulos, conclusiones, perspectivas y una bibliografía.

En el Capítulo 1 presentamos una breve introducción axiomática a la Teoría de la Medida y la integración, proporcionando un panorama general de los principales resultados: definimos los conceptos básicos de medida, integral y sus principales propiedades. Los resultados se presentan sin demostración, ya que, nuestro objetivo en este capítulo, es contextualizar nuestro tema de estudio y facilitar la lectura del trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta la definición de la integral de Newton y las propiedades básicas tales como: la linealidad, positividad, monotonía de la integral de Newton, aditividad de la integral con respecto al intervalo de integración, la fórmula de integración por partes, el método de cambio de variables, etc. Veremos que la integral de Newton, a diferencia de la integral de Riemann o la de Lebesgue, no es una integral absoluta, es decir, si f es Newton integrable no necesariamente se sigue que $|f|$ lo sea. Posteriormente se darán algunas definiciones que generalizan a la integral de Newton.

En el último capítulo se aborda la relación que existe entre la integral de Newton y la integral de Lebesgue, esta relación la veremos en los Teoremas 3.7 y 3.8; por último vemos una demostración alternativa de la integración por partes para las integrales de Lebesgue utilizando la integral de Newton.

Los resultados fundamentales sobre la integral de Newton y su relación con la integral de Lebesgue están basados principalmente en [3, 4].

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar los conceptos, y teoremas que nos servirán en el desarrollo de este trabajo. Los teoremas de este capítulo no serán demostrados, las demostraciones pueden ser consultadas en [2, 4, 5].

Definición 1.1. *Dados dos conjuntos A y B, decimos que A tiene la misma cardinalidad que B si existe una función $f : A \to B$ biyectiva. También decimos que A es equipotente con B, y lo denotamos por $A \sim B$.*

Definición 1.2. *Sea A un conjunto.*

1. *Decimos que A es finito si $A = \emptyset$ ó existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \{1, ..., n\}$.*

2. *A es infinito si no es finito.*

3. *A es numerable si $A \sim \mathbb{N}$.*

4. *El conjunto A es a lo más numerable, si es finito o numerable.*

5. *A es no numerable, si es infinito pero no numerable.*

Definición 1.3. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **Absolutamente Continua** *en $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para toda familia de subintervalos disjuntos $\{(a_k, b_k)_{k=1}^n\}$ en $[a, b]$*

$$\textit{si} \ \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta, \ \textit{entonces} \ \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

1.1. σ-álgebras

Sea X un conjunto distinto del vacío. Consideremos, como es usual, a $P(X)$ como el conjunto potencia de X, es decir, el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de X. El objetivo es medir (de alguna manera) algunos elementos del conjunto potencia y definir la estructura que tienen dichos elementos.

Definición 1.4. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathscr{A} \subset P(X)$, es una σ-álgebra si cumple con las siguientes propiedades:*

a) $X \in \mathscr{A}$,

b) *Si* $A \in \mathscr{A}$, *entonces* $A^C \in \mathscr{A}$,

c) *Si* $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{A}$, *entonces* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Así, una σ-álgebra sobre X es una familia de subconjuntos de X que contiene a X, que es cerrada bajo complementos, cerrada bajo uniones numerables.

Ejemplo 1.5. Sea X un conjunto.

1. $P(X)$ es una σ-álgebra sobre X.
2. $\{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra sobre X.
3. Sea X un conjunto con un número infinito de elementos. Consideremos la colección $\mathscr{A}$ de todos los subconjuntos A de X, tales que A o A^C es numerable. Entonces $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre X.

Definición 1.6. *Llamamos espacio medible al par $(X, \mathscr{A})$, donde X es un conjunto y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre X. Llamamos conjuntos medibles (o más preciso $\mathscr{A}$-medibles) a los elementos de $\mathscr{A}$.*

Como la intersección arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 1.7. *Sean X un conjunto y C una familia de subconjuntos de X, denotaremos con $\sigma(C)$ a la mínima σ-álgebra que contiene a C, la cual existe y es la intersección de todas las σ-álgebras que la contienen. A la familia $\sigma(C)$ la llamaremos la σ-álgebra generada por C.*

Un caso particular e importante de espacio medible se tiene cuando el espacio medible sobre el cual se trabaja, (X, τ), es un espacio topológico, pues por definición se tiene que $\sigma(\tau)$ es una σ-álgebra. En base a esto, definimos los conjuntos de Borel.

Definición 1.8. *Dado un espacio topológico (X, τ), llamaremos σ-álgebra de Borel a la generada por sus abiertos, que denotaremos por $\mathbf{B}(X) = \sigma(\tau)$ y a sus elementos los llamamos borelianos.*

Definición 1.9. *Sean $(X, \mathscr{A})$un espacio medible y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X,*

1. *Diremos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una expansión, si $A_n \subset A_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces se denotará como*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \text{ ó } A_n \nearrow A.$$

2. *Diremos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una contracción, si $A_n \supset A_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces se denotará como*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \text{ ó } A_n \searrow A.$$

1.2. Medidas

A partir de ahora, con $\overline{\mathbb{R}}$ (reales extendidos) denotaremos el conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y a $\overline{\mathbb{R}}_+$ como $\mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$.

1.2.1. Medidas Positivas

Definición 1.10. *Una medida positiva o simplemente medida sobre un espacio medible $(X, \mathscr{A})$, es una función $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, que es σ-aditiva y se anula en el vacío, es decir, μ es una medida, si y sólo si,*

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una familia de conjuntos disjuntos dos a dos de* $\mathscr{A}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A la terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *le llamaremos espacio de medida.*

Diremos que X es de medida *finita* si $\mu(X) < \infty$ y es σ-*finita* si existe una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y cada $\mu(A_n) < \infty$.

Las propiedades siguientes de las medidas se deducen inmediatamente de la definición.

Teorema 1.11. [**5, Propiedades de las medidas**] *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* μ *satisface las siguientes propiedades:*

a) μ *es aditiva, es decir, si* $\{A_n\}_{n=1}^{p} \subset \mathscr{A}$ *con* $p \in \mathbb{N}$*, es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n).$$

b) μ *es monótona, es decir, si* $A \subset B$ *y* $A, B \in \mathscr{A}$*, entonces* $\mu(A) \leq \mu(B)$*. Además, si* $\mu(A) < \infty$*, entonces* $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$*.*

c) Para un número finito de conjuntos medibles cualesquiera, μ *satisface que si* $A, B \in \mathscr{A}$*, entonces* $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$*. Además, si* $\{A_n\}_{n=1}^{p} \subset \mathscr{A}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n).$$

Esta última condición se llama subaditividad.

d) μ *es* σ*-subaditiva, es decir, si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Los conjuntos de medida cero se llaman conjuntos *nulos*. Si A es un conjunto nulo y $B \subset A$ entonces B no es medible o es nulo. Sucede que siempre podemos suponer que es nulo, en el sentido de que la σ-álgebra donde está definida una medida siempre se puede extender para que incluya a todos los subconjuntos de los conjuntos nulos.

1.2.2. Generación de Medidas via Medidas Exteriores

Con frecuencia, el problema de construir σ-algebras y medidas es díficil. Un procedimiento clásico (conocido como procedimiento de Caratheodory) es a través del concepto de medida exterior. A continuación describimos dicho procedimiento y construiremos una σ-algebra y una medida (conocida como la medidad de Lebesgue), a través de este procedimiento.

Definición 1.12. *Sea X un conjunto. Una medida exterior, usualmente denotada μ^*, es una función $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, la cual se anula en el vacío, es monótona y σ-subaditiva.*

Definición 1.13. *Sea μ^* una medida exterior. Diremos que un subconjunto $E \subset X$ es μ^*-medible si para todo $A \subset X$ se cumple que*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Sea $\mathscr{M}^* = \{E \subset X \mid E \text{ es } \mu^*\text{-medible }\}$, entonces $\mathscr{M}^*$ es una σ-álgebra y la restricción de μ^* a $\mathscr{M}^*$ es una medida.

Un ejemplo de medida exterior es la medida exterior de Lebesgue en la recta, que se define de la siguiente manera:

Definición 1.14. *Sea $E \in P(\mathbb{R})$. La medida exterior de Lebesgue de E se define por el número*

$$m^*(E) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) : \ I_j \textit{ intervalo abierto y } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

donde $l(I_j)$ es la longitud del intervalo.

Sean $X = \mathbb{R}$ y E un conjunto μ^*-medible. Definimos la medida de Lebesgue denotada por $m(E)$ como la medida exterior de E, es decir, $m(E) = m^*(E)$ por lo tanto m es la función obtenida restringiendo m^* a $\mathscr{M}^*$. El espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}^*, m)$ será llamado el *espacio de medida de Lebesgue en la recta.*

1.3. Funciones Medibles

Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, a menudo tendremos que trabajar con subconjuntos de X definidos a partir de una función $f : X \to Y$ y necesitaremos garantizar que dichos conjuntos son medibles. Esto se logrará mediante el concepto de función medible.

Definición 1.15. *Sean $(X_1, \mathscr{A}_1)$ y $(X_2, \mathscr{A}_2)$ espacios medibles. Una función $f : (X_1, \mathscr{A}_1) \to (X_2, \mathscr{A}_2)$ es medible (o más preciso $\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_2$-medible) si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_1$ para todo $B \in \mathscr{A}_2$.*

Sea $f : X \to \mathbb{R}$, definimos las funciones $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$, con las cuales $f = f^+ - f^-$ y las llamamos *parte positiva* y *parte negativa* de f, respectivamente. Además, se cumple que $|f| = f^+ + f^-$.

Un resultado básico es que la composición de funciones medibles es medible. Además, las funciones continuas entre espacios topológicos son medibles cuando el codominio de la función es un espacio medible en el cual se considera a la σ-álgebra de Borel.

Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Si tenemos que $f : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$ es medible, entonces $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ es medible, esto es debido a que la inclusión $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función continua, y por lo tanto medible. Así, cuando tomamos una función real, estaremos considerando que el codominio de la función es $(\overline{\mathbb{R}}, \mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Algunas propiedades de las funciones medibles son las siguientes:

Teorema 1.16. [5, Proposición 3.18] *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función donde el dominio es medible. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) > c\}$ es medible.*
2. *Para $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es medible.*
3. *Para $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) < c\}$ es medible.*
4. *Para $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es medible.*

Teorema 1.17. [5, Proposición 3.19] *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f + c,\ cf,\ f + g,$ y fg también son medibles.*

Es importante mencionar que la medibilidad se conserva al tomar el límite puntual de una sucesión de funciones medibles. Recordemos, si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$, definimos sus límites superior e inferior como $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} a_n$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{k\geq 0} \inf_{n\geq k} a_n$, respectivamente.

Definición 1.18. *Sean X un conjunto y $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $x \in X$ las funciones* $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *y* $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *se definen puntualmente como:*

a) $(\inf f_n)(x) = \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$,

b) $(\sup f_n)(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$,

c) $(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n)(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$,

d) $(\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n)(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$.

Podemos ver en [2], que el límite superior de una sucesión es el supremo de sus puntos adherentes, y el límite inferior es el mínimo de sus puntos adherentes.

Teorema 1.19. [5, Proposición 3.20] *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, entonces:*

a) El $\sup f_n$ *y el* $\inf f_n$ *son funciones medibles.*

b) El $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *y el* $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ *son funciones medibles.*

Teorema 1.20. [4, Teorema 13.28] *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles que convergen puntualmente a la función f en X. Entonces f es medible.*

Definición 1.21. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $A \in \mathscr{A}$, llamaremos función característica de A, a la función $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ la cual se define como*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

La función característica es un ejemplo de función medible.

1.4. μ-integral

En todo espacio de medida podemos definir una integral, en la cual juegan un papel importante los conjuntos medibles. Por el hecho de que aquí se integra sobre conjuntos que son más generales que los intervalos, se obtienen más funciones integrables, lo que se traduce en que la integrabilidad se conserva no sólo por las operaciones algebraicas sino también tomando límites bajo el signo de la integral.

Será importante dar una aritmética apropiada a los números reales extendidos para que tengan sentido las siguientes definiciones. Dicha aritmética es la siguiente:

Recordemos que denotamos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Adicionalmente a las operaciones con las que cuenta $\mathbb{R}$, definimos en $\overline{\mathbb{R}}$:

- $x - \infty = -\infty$ y $x + \infty = \infty$, para $x \in \mathbb{R}$.
- $\infty - (-\infty) = \infty$ y $\infty + \infty = \infty$.
- $x(-\infty) = \infty$ y $x(\infty) = -\infty$, si $x < 0$.
- $x(-\infty) = -\infty$ y $x(\infty) = \infty$, si $x > 0$.
- $0(-\infty) = 0(\infty) = 0$.

Notemos que la ley de cancelación deja de ser válida y que $\infty - \infty$ no está definido.

De ahora en adelante llamaremos $X = (X, \mathscr{A}, \mu)$ al espacio de medida.

Definición 1.22. *Sea X un espacio de medida. Una función simple, es una función medible $s : X \to \mathbb{R}_+$ que sólo toma un número finito de valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si llamamos $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$ con $i = \overline{1, n}$, entonces los conjuntos A_i son medibles disjuntos y*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

La base de la construcción de la integral de Lebesgue, es el siguiente teorema:

Teorema 1.23. **[2, Teorema 7.10]** *Sea X un espacio de medida y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples en X tal que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ y $f = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.*

Una vez enunciado el teorema anterior, podemos definir la integral de funciones simples como sigue:

Definición 1.24. *Sea X un espacio de medida y $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple en X. Definimos la integral de s en X con respecto de μ como*

$$\int_X s \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Entonces diremos que s es integrable o más preciso μ-integrable.

Esta definición podemos restringirla a conjuntos medibles, pues si E es un conjunto medible de X, entonces $s|_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$, donde las funciones características se toman ahora sobre E, y así

$$\int_E s|_E \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Por otro lado vemos que $s\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$ con las funciones características en X, y así concluimos que

$$\int_E s \; d\mu = \int_X s\chi_E \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Es decir, que para efectos de integración se puede adoptar consistentemente el convenio explicado antes por el que identificamos la función $s|_E$ con $s\chi_E$.

Por ahora demos el siguiente resultado que después generalizaremos.

Teorema 1.25. **[2, Teorema 7.12]** *Sea X un espacio de medida.*

1. *Sea s una función simple en X. Para cada subconjunto medible E de X, definimos $\nu(E) = \int_E s \; d\mu$. Entonces ν es una medida en X.*
2. *Si s y t son funciones simples en X, se cumple*

$$\int_X (s+t) \; d\mu = \int_X s \; d\mu + \int_X t \; d\mu.$$

En particular notemos que si $s \leq t$ son funciones simples en un espacio de medida X, entonces $t - s$ también es una función simple y además

$$\int_X s \; d\mu \leq \int_X s \; d\mu + \int_X (t-s) \; d\mu = \int_X t \; d\mu.$$

En particular se cumple que

$$\int_X t \; d\mu = \sup \left\{ \int_X s \; d\mu \;\middle|\; s \text{ es una función simple, } s \leq t \right\}$$

Gracias a lo anterior tenemos que la definición que a continuación se presenta es consistente:

Definición 1.26. *Sea X un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función medible. Definimos la integral de f con respecto de μ como*

$$\int_X f \; d\mu = \sup \left\{ \int_X s \; d\mu \;\middle|\; s \textit{ es una función simple, } s \leq f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Observemos que si E es un subconjunto medible de X y si s es una función simple en E tal que, $s_{|E} \leq f_{|E}$, la extensión de f a X (haciéndola nula fuera de E) es una función simple, donde $f = f\chi_E$; y la restricción a E de una función simple f en X es una función simple en E, denotada por $f|_E$. De esto se concluye que

$$\int_E f \; d\mu = \int_X f\chi_E \; d\mu,$$

por el hecho de que ambas integrales son el supremo del mismo conjunto.

A partir de esta definición podemos enunciar algunas propiedades:

Teorema 1.27. [2, Teorema 7.14] *Sean X un espacio de medida y E un subconjunto medible de X.*

a) *Si* $0 \leq f \leq g$ *son funciones medibles en* X*, entonces*

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

b) *Si* $f \geq 0$ *es una función medible en* X *y* $A \subset B$ *son subconjuntos medibles de* X*, entonces* $\displaystyle\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

c) *Si* $f \geq 0$ *es una función medible en* X *y* $f|_E = 0$*, entonces* $\displaystyle\int_E f \, d\mu = 0$ *(aunque* $\nu(E) = \infty$*).*

d) *Si* $f \geq 0$ *es una función medible en* X *y* $\mu(E) = 0$*, entonces* $\displaystyle\int_E f \, d\mu = 0$ *(aunque* $f|_E = \infty$*).*

Uno de los resultados más importantes del cálculo integral es el siguiente, el cual nos ayuda a demostrar propiedades importantes sobre convergencia de la integral.

Teorema 1.28 (Teorema de la Convergencia Monótona). [5, Teorema 4.10] *Sean* X *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas en* X *que convergen puntualmente a* f*. Entonces* f *es medible y*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu.$$

El Teorema de la Convergencia Monótona nos permite reducir propiedades de la integral de funciones no negativas a propiedades de funciones simples. Por ejemplo, ahora es inmediato que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es medible y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

Otra aplicación importante, en donde se utiliza el teorema anterior, es que la integral conserva sumas.

Teorema 1.29. [**5, Corolario 4.11**] *Sea X un espacio medible y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no negativas medibles en X. Entonces*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Otro de los resultados clásicos y no menos importante dentro de la teoría de integración, es el Lema de Fatou:

Teorema 1.30 (**Lema de Fatou**). [**5, Teorema 4.9**] *Sean X un espacio de medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en X tal que $f_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Ya con toda esta teoría estamos en condiciones de definir la integral de funciones más generales:

Definición 1.31. *Sean X un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Diremos que f es μ-integrable (o integrable con respecto de μ) en X si tanto $\int_X f^+ d\mu$ como $\int_X f^- d\mu$ son finitas. En este caso definimos la integral de f como*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

En la definición anterior si el espacio de medida es el de Lebesgue entonces diremos que la función f es Lebesgue integrable. Llamaremos $L^1(\mu)$ al conjunto de las funciones integrables en X respecto a la medida μ. Con esta definición, si f es una función no negativa, entonces $f^- = 0$ y su integral es la que ya teníamos definida. Las siguientes propiedades se siguen inmediatamente de los resultados enunciados previamente.

Teorema 1.32. [**2, Teorema 7.20**] *Sea X un espacio de medida y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles.*

a) *f es integrable, si y sólo si, $\int_X |f| d\mu < \infty$, y en tal caso*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

b) *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* f, g *son integrables, entonces* $\alpha f + \beta g$ *es integrable y*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

c) *Si* $f \leq g$ *y ambas son integrables, entonces*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

d) *Si* E *es un subconjunto medible de* X *y* f *es integrable en* X*, entonces* f *es integrable en* E *y*

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

e) *Si* E *y* F *son subconjuntos medibles disjuntos de* X*, entonces la función* f *es integrable en* $E \cup F$*, si y sólo si, lo es en* E *y en* F*, en tal caso,*

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

f) *Si* E *es un subconjunto medible de* X *y* $f|_E = 0$*, entonces* $\displaystyle\int_E f d\mu = 0.$

g) *Si* E *es un subconjunto nulo de* X*, entonces* $\displaystyle\int_E f d\mu = 0.$

Como consecuencias inmediatas de este teorema tenemos que: por a) si $|f| \leq g$ y g es integrable, entonces f también lo es, por d) vemos que

$$\int_E 1 d\mu = \int \chi_E d\mu = \mu(E).$$

Además, podemos deducir que toda función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita es integrable.

Teorema 1.33 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). [**5, Teorema 4.16**] *Sean* X *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles de* X *en* $\mathbb{R}$*, la cual converge puntualmente a una función*

f. Si existe una función $g : X \to \mathbb{R}$ integrable tal que $| f_n | \leq g$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Observación 1.34. La integral de Lebesgue en el intervalo $I = (a, b)$ se denotará como:

$$\int_I f\ dm = \int_a^b f(t)dt.$$

Definición 1.35. *Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. $F : I \to \mathbb{R}$ es una* **Primitiva** *de f en I, si F es diferenciable en I y $F' = f$ en I.*

Observación 1.36. Las condiciones que se pueden pedir para diferenciabilidad de la función F pueden ser debilitadas: diferenciable en un conjunto finito, diferenciable en un conjunto numerable, pero en nuestro caso pedimos que sea diferenciable en todo el intervalo.

Teorema 1.37. [4, **Teorema 13.20**] *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces f es Lebesgue integrable en $[a, b]$.*

Teorema 1.38. [4, **Teorema B.25**] *Sea $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua en (a, b) tal que $F'(x) \geq 0$ para toda $x \in (a, b)\backslash D$, donde D es un conjunto a lo más numerable de (a, b). Entonces F es creciente en (a, b).*

Corolario 1.39. [4, **Corolario B.26**] *Sea $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua en (a, b) tal que $F'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)\backslash D$, donde D es un conjunto a lo más numerable de (a, b). Entonces F es constante en (a, b).*

Capítulo 2

Integral de Newton

A mediados del siglo XVII, Newton concibe un concepto de integral cuyo significado es simplemente el proceso inverso de la derivada. La definición descriptiva de la integral de Newton es muy natural: una función es Newton integrable si tiene una antiderivada. Tiempo después, Cauchy define una integral de manera constructiva restringiéndose a la clase de las funciones continuas. Esta integral coincide con la integral de Newton, sin embargo, debido a la existencia de derivadas no acotadas, la de Newton permanece más general.

La derivada de una función de una variable tiene motivaciones geométricas y físicas: construir la línea tangente a la gráfica de la función y la determinación de la velocidad instantánea de una partícula cuya posición es una función de tiempo. Uno puede pensar en otros dos problemas de la geometría y de la física: encontrar el área de la superficie y dada la velocidad de una partícula, podría desearse conocer su posición en un instante dado (este último fue el problema con el que trabajó Newton). En biología, si se conoce la razón a la que crece una población de bacterias, nos interesa deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En ingeniería, una persona que puede medir la razón variable a la cual se fuga el agua de un tanque, quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto período. En cada caso, el problema es hallar una función F cuya derivada sea una función conocida. Si tal función existe, se llama *primitiva* o *antiderivada* de f.

2.1. Definición de la Integral de Newton

Definición 2.1. *Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Una función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **Newton Integrable** *(N-integrable) en (a,b), si existe una primitiva F para f en (a,b) y los límites laterales $F(a+)$ y $F(b-)$ existen. El número real*

$$(N)\int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

es la **Integral de Newton** *en (a,b).*

Observemos que si G es otra primitiva de f en (a,b), entonces por el Teorema del Valor Medio, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G = F + C$ en (a,b). De aquí se concluye que $G(b-) - G(a+) = F(b-) - F(a+)$, es decir, la integral de Newton de f en (a,b) no depende de la primitiva de f que se tome.

Observación 2.2. En la definición anterior cuando hablamos de los límites laterales $F(a+)$ y $F(b-)$ nos referimos a:

$$F(a+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \text{ y } F(b-) = \lim_{x\to b^-} F(x)$$

La integral de Newton tiene varias ventajas sobre la integral de Riemann. Mientras que la integral de Riemann es definida solamente para funciones acotadas o intervalos acotados, la integral de Newton se aplica también a funciones no acotadas e intervalos no acotados.

A continuación daremos algunos ejemplos de como se utiliza la integral de Newton.

Ejemplo 2.3. Calculemos la integral de Newton de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2$ en el intervalo $(-2,3)$.
2. $s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $(0,1)$.
3. $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.
4. $h(x) = e^{-x}$ en el intervalo $(0,\infty)$.

1. Una primitiva para f es $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ con $F(-2+) = \dfrac{-8}{3}$ y $F(3-) = \dfrac{27}{3}$, entonces
$$(N)\int_{-2}^{3} x^3\,dx = F(3-) - F(-2+) = \frac{35}{3}.$$

2. Una primitiva para s es $S(x) = 2\sqrt{x}$ con $S(0+) = 0$ y $S(1-) = 2$ entonces
$$(N)\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = S(1-) - S(0+) = 2.$$

3. Una primitiva para g es $G(x) = \cos x$ con $G(0+) = 1$ y $G(\dfrac{\pi}{2}-) = 0$, entonces
$$(N)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = G(\pi/2-) - G(0+) = -1.$$

4. Una primitiva para h es $H(x) = -e^{-x}$ con $H(\infty-) = 0$ y $H(0+) = 1$, entonces
$$(N)\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = H(\infty-) - H(0+) = -1.$$

No todas las funciones son N-integrables, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Mostraremos que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
no es N-integrable.

Supongamos que f es N-integrable, entonces existe una función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[0,1]$ tal que $F' = f$ en $[0,1]$. Observemos que $F'(0) = f(0) < \frac{1}{4} < f(1) = F'(1)$, por el Teorema del Valor Intermedio para derivadas, existe $c \in (0,1)$ tal que $F'(c) = \frac{1}{4}$, pero esto es una contradicción pues $F' = f$ en $[0,1]$. Por lo tanto f no es N-integrable.

Existen funciones que son N-integrables pero no Lebesgue integrables, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Demostraremos que la función

$$f(t) = [t^2 \cos^2(1/t^2)]', \text{ con } 0 < t < 1.$$

es Newton integrable pero no Lebesgue integrable.

La primitiva de f es $F(t) = t^2 \cos^2(1/t^2)$ en $(0,1)$, $F(0+) = 0$ y $F(1-) = \cos^2 1$. Por lo tanto

$$(N)\int_0^1 f(t)\,dt = F(1-) - F(0+) = \cos^2 1.$$

Sin embargo, f no es Lebesgue integrable en $(0,1)$ como podemos constatar en [3].

2.2. Propiedades

Enunciaremos y demostraremos algunas de las propiedades que tiene la integral de Newton.

Teorema 2.6. *Sean f, g Newton integrables en (a,b); $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *(**Linealidad de la integral.**) La función $\alpha f + \beta g$ es N-integrable y*

$$(N)\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha (N)\int_a^b f + \beta (N)\int_a^b g.$$

2. *(**Propiedad aditiva de intervalos.**) Si $a \le c \le b$, entonces*

$$(N)\int_a^b f = (N)\int_a^c f + (N)\int_c^b f.$$

3. *(**Propiedad de comparación.**) Si $f \le g$ en (a,b), entonces*

$$(N)\int_a^b f \le (N)\int_a^b g.$$

Demostración.

1. Como f y g son N-integrables, entonces existen F y G en (a,b) tales que $F' = f$ y $G' = g$, además $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ y $G(b-)$ existen. Sea $h = \alpha F + \beta G$, entonces $h' = (\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$.

   $h(a+)$ y $h(b-)$ existen, ya que
   $$h(a+) = (\alpha F + \beta G)(a+) = \alpha F(a+) + \beta G(a+)$$
   existe, y
   $$h(b-) = (\alpha F + \beta G)(b-) = \alpha F(b-) + \beta G(b-)$$
   existe. Entonces
   $$\begin{aligned} (N)\int_a^b (\alpha f + \beta g)f(x)\,dx &= h(b-) - h(a+) \\ &= [\alpha F(b-) + \beta G(b-)] - [\alpha F(a+) + \beta G(a+)] \\ &= \alpha[F(b-) - F(a+)] + \beta[G(b-) - G(a+)] \\ &= \alpha (N)\int_a^b f(x)\,dx + \beta (N)\int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

2. Como f es N-integrable en (a,b), entonces existe F en (a,b) tal que $F' = f$ y $F(a+)$, $F(b-)$ existen. $F_1 = F|_{(a,c)}$ es una primitiva para f en (a,c) y $F_2 = F|_{(c,b)}$ es una primitiva para f en (c,b).

   Demostremos que $F_2(c+)$ y $F_1(c-)$ existen. Como F es diferenciable en (a,b) entonces F es continua en (a,b) por lo tanto $\lim\limits_{x\to c} F(x) = F(c)$ existe, eso implica que los límites laterales $F_2(c+)$ y $F_1(c-)$ existen y son iguales.

   $$\begin{aligned} (N)\int_a^c f(x)\,dx + (N)\int_c^b f(x)\,dx &= F(c-) - F(a+) + F(b-) - F(c+) \\ &= F(b-) - F(a+) \\ &= (N)\int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

3. Como f, g son N-integrables en (a,b), entonces existen F, G en (a,b) tales que $F' = f$, $G' = g$, además $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ y $G(b-)$ existen. Como $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in (a,b)$ entonces
$$0 \leq g(x) - f(x) = G'(x) - F'(x) = [G(x) - F(x)]',$$
y por el Teorema 1.38, $G(x) - F(x)$ es creciente en (a,b) y así
$$0 \leq [G(b-) - G(a+)] - [F(b-) - F(a+)],$$
por lo tanto
$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+) \leq G(b-) - G(a+) = (N)\int_a^b g(x)\,dx.$$

■

Teorema 2.7. *Sean f, $|f|$ N-integrables en (a,b), entonces*
$$\left|(N)\int_a^b f\right| \leq (N)\int_a^b |f|.$$

Demostración. Sabemos que $-|f| \leq f \leq |f|$, entonces por el Teorema 2.6 inciso 3,
$$-(N)\int_a^b |f| \leq (N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b |f|$$
y por lo tanto
$$\left|(N)\int_a^b f\right| \leq (N)\int_a^b |f|.$$

■

Definición 2.8. *Sean Δ, Ω conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ y $h : \Delta \to \Omega$ una función biyectiva, tal que h y h^{-1} tienen derivadas continuas de orden 1 (son de clase C^1), entonces diremos que h es un difeomorfismo de Δ sobre Ω.*

Teorema 2.9 (**Cambio de Variables**)**.** *Sean $g : (a,b) \to (c,d)$ un difeomorfismo y $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ una función Newton integrable, entonces*
$$(N)\int_a^b (f \circ g)g' = (N)\int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

Demostración. Como f es N-integrable, entonces existe F tal que $F' = f$ en (a, b). Observemos que, por la Regla de la Cadena, $[F(g(x))]' = f(g(x))g'(x)$.. Entonces

$$(N)\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(b)-) - F(g(a)+),$$

por otro lado tenemos que

$$(N)\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(g(b)-) - F(g(a)+).$$

■

Teorema 2.10 (Integración por Partes). *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que F, G son primitivas de f, g, respectivamente, en (a, b). Si $(FG)(a+)$ y $(FG)(b-)$ existen y fG es Newton integrable en (a, b), entonces Fg es Newton integrable y*

$$(N)\int_a^b Fg = (FG)(b-) - (FG)(a+) - (N)\int_a^b fG.$$

Demostración. Por la regla del producto para derivadas tenemos que

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

y como por hipótesis $(FG)(a+)$ y $(FG)(b-)$ existen, entonces $fG + Fg$ es N-integrable en (a, b), entonces Fg es N-integrable, ya que

$$Fg = (FG)' - fG,$$

además

$$\begin{aligned} (N)\int_a^b Fg &= (N)\int_a^b [(FG)' - fG] \\ &= (N)\int_a^b (FG)' - (N)\int_a^b fG \\ &= (FG)(b-) - (FG)(a+) - (N)\int_a^b fG. \end{aligned}$$

■

2.3. Integración Absoluta

Cuando se trabaja con una función f que es Riemann integrable, (Lebesgue integrable) se demuestra que la función $|f|$ también es Riemann integrable (Lebesgue integrable). Para la integral de Newton esto no es necesariamente verdadero. Daremos un ejemplo que no cumple con dicha afirmación.

Ejemplo 2.11. Demostraremos que la función $f(x) = [x\cos(\pi/x)]'$ es N-integrable pero $|f|$ no es N-integrable en el intervalo $(0,1)$.

Una primitiva para f es $F(x) = x\cos(\pi/x)$ y los límites laterales $F(0+) = 0$, $F(1-) = -1$ existen. Entonces

$$(N)\int_0^1 f(x)\,dx = F(1-) - F(0+) = -1.$$

Por lo tanto f es N-integrable.

Supongamos que $|f|$ es N-integrable. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos los puntos $a_k = 2/(2k+1)$ y $b_k = 1/k$, entonces tenemos que $F(a_k) = 0$ y $F(b_k) = (-1)^k/k$. Observemos que

$$0 < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < \cdots < 1$$

y que

$$(N)\int_{a_k}^{b_k} |f(x)|\,dx \geq \left|(N)\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx\right| = |F(b_k) - F(a_k)| = \frac{1}{k},$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}(N)\int_{a_k}^{b_k} |f(x)|\,dx \leq (N)\int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

pero esto es una contradicción, pues la serie armónica es divergente.

Este ejemplo justifica la siguiente definición.

Definición 2.12. *Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ se dice* **absolutamente Newton Integrable** *si f y $|f|$ son Newton integrables.*

2.4. Generalización de la Integral de Newton

Hay razones por las que se necesitan, en ocasiones, pedir excepciones en la Definición 2.1, como por ejemplo: trabajar con intervalos cerrados, un "pequeño" conjunto en el que F no sea diferenciable o en el que $F'(x) \neq f(x)$. Antes de presentar una variante de la Definición 2.1, definamos el concepto de primitiva generalizada.

Definición 2.13 **(primitiva generalizada).** *Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Diremos que una función $F : I \to \mathbb{R}$ continua, es una* **primitiva generalizada** *de f, si existe un subconjunto de $\mathbb{R}$, a lo más numerable, N, tal que F es diferenciable en $I \setminus N$ y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I \setminus N$.*

Definición 2.14. *Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **Newton Integrable** *en (a, b), si existe una primitiva generalizada F para f en (a, b) tal que $F(b-)$, $F(a+)$ existen. Al número real*

$$(N) \int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

le llamaremos la **Integral de Newton** *de f en (a, b).*

Por el Corolario 1.39, se sigue que el valor de la integral de Newton en la definición anterior, no depende de la primitiva generalizada de f que se elija.

Nota: Para otras generalizaciones de la integral de Newton, ver [7].

Es claro que si una función es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.1, entonces es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.14, pero el recíproco no siempre es verdadero, ejemplos de ésto son:

Ejemplo 2.15. Demostraremos que la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es Newton integrable en $(-1, 1)$, en el sentido de la Definición 2.1, pero si lo es en el sentido de la Definición 2.14.

Sea $r \in \mathbb{R}$. La función $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{si} \quad x > 0, \\ -2\sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0, \\ r, & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

es continua en $(-1, 1)$, diferenciable en $(-1, 1) - \{0\}$ y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in (-1, 1) - \{0\}$, por lo tanto f es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.14, $F(-1+) = -2$ y $F(1-) = 2$, entonces

$$(N) \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = F(1-) - F(-1+) = 4.$$

Supongamos que f es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.1, entonces existe $G : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in (-1, 1)$ y $G(1+)$, $G(-1+)$ existen.

Como G y F son primitivas de f en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, entonces existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{lll} G(x) = 2\sqrt{x} + C_1, & \text{si} & x > 0, \\ G(x) = 2\sqrt{x} + C_2, & \text{si} & x < 0. \end{array}$$

Además G es continua en 0, entonces $C_1 = C_2$ y $G(0) = C_1$, y como

$$\begin{aligned} f(0) &= G'(0) \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{G(h) - G(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2\sqrt{h}}{h}, \end{aligned}$$

pero este último límite no existe, por lo tanto llegamos a una contradicción. Así que f no es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.1.

Ejemplo 2.16. Demostraremos que la función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in \mathbb{I}, \\ \\ \frac{1}{q}, & \text{si} \quad x = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

es Newton integrable en $(0, 1)$, en el sentido de la Definición 2.14, pero no lo es, en el sentido de la Definición 2.1.

Sea $F:(0,1)\to\mathbb{R}$ una función definida como $F(x)=1$. Observemos que F es continua en $(0,1)$, $F(1-)$, $F(0+)$ $F'(x)=0=f(x)$ para cada $x\in\mathbb{I}$ y $F'(x)\neq f(x)$ para cada $x\in\mathbb{Q}$, este último es un conjunto numerable de puntos para los cuales falla la igualdad, entonces es Newton integrable en el sentido de la Definición 2.14, pero no lo es en el sentido de la Definición 2.1.

La integral de Newton en el sentido de la Definición 2.14 es

$$(N)\int_0^1 f(x)\,dx = F(1)-F(0)=0.$$

Los teoremas demostrados en este capítulo para la integral de Newton en el sentido de la Definición 2.1, se pueden demostrar para la integral de Newton en el sentido de la Definición 2.14. En el siguiente capítulo, para obtener resultados más generales, trabajaremos con la Definición 2.14.

Capítulo 3

La Integral de Newton y su Relación con la Integral de Lebesgue

3.1. Relación con la Integral de Lebesgue

En muchas ocasiones somos capaces de encontrar una primitiva para una función dada, por lo que es de gran valor práctico conocer la relación que guarda la integral de Lebesgue con la integral de Newton. Como se vió en el Ejemplo 2.5 no todas las funciones Newton integrables son Lebesgue integrables. En esta sección, nuestro objetivo es probar las dos propiedades siguientes de la integral de Newton.

(I) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue y Newton integrable, entonces las dos integrales son iguales.

(II) Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente Newton integrable, entonces también es Lebesgue integrable.

Antes de demostrar las afirmaciones anteriores daremos los siguientes teoremas, para facilitar la lectura del trabajo, cuyas demostraciones se encuentra en [4].

Teorema 3.1. [**4, Teorema 13.41**] *Una función es integrable, si y sólo si, f es medible y existe una función integrable $g \geq 0$ tal que $|f| \leq g$.*

Corolario 3.2. **[4, Corolario 13.42]** *Una función f es integrable, si y sólo si, f es medible y $|f|$ es integrable.*

Teorema 3.3 (**Teorema de Diferenciación de Lebesgue**)**.** **[4, Teorema de Diferenciación de Lebesgue]** *Si g es una función real valuada monótona en $[a,b]$, entonces g es diferenciable casi dondequiera en $[a,b]$.*

Teorema 3.4. **[4, Teorema 14.4]** *Si g es una función creciente en $[a,b]$, entonces g' es integrable y*

$$\int_a^b g'(t)\,dt \le g(b) - g(a).$$

Teorema 3.5. **[4, Lema 14.10]** *Sean $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f Lebesgue integrable en $[a,b]$ y F continua en $[a,b]$, tal que $F'(t) = f(t)$ en $[a,b]$ salvo un conjunto a lo más numerable. Entonces*

$$|F(b) - F(a)| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Teorema 3.6 (**Teorema Fundamental del Cálculo**)**.** **[4, Teorema 14.11]** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable en $[a,b]$ la cual tiene una primitiva (o primitiva generalizada) F en $[a,b]$. Entonces F es absolutamente continua en $[a,b]$, y*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Ahora si podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (I)**.** *Sean $-\infty \le a < b \le \infty$. Si $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es Newton y Lebesgue integrable en (a,b), entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Escogemos una sucesión $[a_n, b_n]$ de subintervalos de (a,b) tales que $[a_n, b_n] \nearrow (a,b)$, y sea $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$, donde $\chi_{[a_n,b_n]}$ es la función característica de $[a_n,b_n]$. Entonces $f_n \to f$ puntualmente en (a,b), y $|f_n| \le |f|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y el Teorema Fundamental del Cálculo, si F es una primitiva de f en (a,b), entonces

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f\chi_{[a_n,b_n]}(t)\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(F(b_n)-F(a_n)\right) \\
&= F(b)-F(a).
\end{aligned}
$$

■

Teorema 3.8 (II)**.** *Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ absolutamente Newton integrable en (a,b). Entonces f es Lebesgue integrable, y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración.

CASO I: Supongamos primero que f es Newton integrable y no negativa. Por el Teorema 1.38, F, primitiva de f, es una función creciente en (a,b) y por el Teorema 3.4, f es Lebesgue integrable en cualquier subintervalo compacto de (a,b). Escogemos una sucesión $[a_n,b_n]$ de subintervalos de (a,b) tales que $[a_n,b_n]\nearrow(a,b)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, para cualquier $n\in\mathbb{N}$

$$0 \leq \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = F(b_n)-F(a_n) \leq F(b-)-F(a+).$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sean las funciones $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$, entonces tenemos que $f_n\to f$, por el Teorema de la Convergencia Monótona f es Lebesgue integrable en (a,b). Utilizando el teorema anterior llegamos a la igualdad de las integrales.

CASO II: Ahora, sea f una función absolutamente Newton integrable y F una primitiva para f. Notemos que

$$
\begin{aligned}
f &= F' \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{\frac{1}{n}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right]
\end{aligned}
$$

Definamos

$$F_n(x) = n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

entonces $F_n \to f$ y f es Lebesgue medible, pues es el límite de funciones continuas. Por la primera parte de la prueba (por el Teorema 1.38, F es una función creciente en (a, b) y usando el Teorema 3.4), $|f|$ es Lebesgue integrable en (a, b). Por el Corolario 3.2, f también es Lebesgue integrable y usando el teorema anterior se completa la prueba.

■

A continuación veamos como se usan estos dos últimos teoremas en el contexto de la integral de Lebesgue.

Ejemplo 3.9. Calculemos la integral de Lebesgue

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Calcular la integral de Lebesque por definición es complicada, como se puede constatar en [4]. Utilizemos el teorema **??** para calcularla.

La función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ tiene una primitiva $F(t) = 2\sqrt{t}$ en $(0, 1)$, y los límites $F(1+) = 2$, $F(0-) = 0$ existen. Ya que $f > 0$, entonces f es absolutamente Newton integrable en $(0, 1)$. Por el Teorema 3.8, f es Lebesgue integrable en $(0, 1)$ y

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = (N)\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = F(1+) - F(0-) = 2.$$

Ejemplo 3.10. Calculemos la integral de Lebesgue

$$\int_0^1 \log t dt.$$

La función $h(t) = \log t$ tiene una primitiva $H(t) = t\log t - t$ y además h es Lebesgue integrable en $(0, 1)$ y

$$\int_0^1 \log t dt = (N)\int_0^1 \log t dt.$$

Utilizando integración por partes para las integrales de Newton tomando

$$\begin{array}{ll} F = \log t, & g = dt, \\ f = \frac{1}{t}, & G = t. \end{array}$$

$(FG)(t) = t\log t,\ (fG)(t) = 1$ y $(FG)(1-) = 0,\ (FG)(0+) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (N)\int_0^1 \log t dt &= (FG)(1-) - (FG)(0+) - (N)\int_0^1 1dt \\ &= 0 - 0 - (1-0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

La integral de Newton puede ser usada para demostrar una versión de la integración por partes para la integral de Lebesgue, como lo veremos a continuación.

Teorema 3.11 (Integración por partes)**.** *Sea $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ y sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en (a,b) tales que $f'g$ y fg' son Lebesgue integrables en (a,b) y los límites $(fg)(a+)$ y $(fg)(b-)$ existen. Entonces*

$$\int_a^b f'g = [(fg)(b-) - (fg)(a+)] - \int_a^b fg'.$$

Demostración. Una primitiva para la función $f'g + fg'$ es $H = fg$ en (a,b) y los límites laterales $(fg)(a+)$ y $(fg)(b-)$ existen por hipótesis, por lo tanto $f'g + fg'$ es N-integrable. Observemos que $f'g + fg'$ es Lebesgue integrable. Por el Teorema 3.7, las dos integrales son iguales, así que

$$\int_a^b (f'g + fg') = H(b-) - H(a+).$$

Aplicando la propiedad de linealidad y despejando tenemos

$$\int_a^b f'g = [(fg)(b-) - (fg)(a+)] - \int_a^b fg'.$$

■

Conclusiones

Hemos presentado y demostrado algunos de los resultados básicos de la integral de Newton, También demostramos que si una función es Lebesgue integrable y Newton integrable sobre un mismo intervalo, entonces ambas integrales coinciden; aún más, demostramos que si una función es absolutamente Newton integrable, entonces también es Lebesgue integrable. Además, mostramos como esta última propiedad puede ser usada, entre otras cosas, para calcular integrales.

Perspectivas

Algunas perspectivas son:

- Estudiar la integral de Newton con mayor detalle, como por ejemplo, teoremas de convergencia, tipo Teorema de la Convergencia Monótona, Teorema de la Convergencia Dominada, etc.

- Estudiar la relación de la integral de Newton con otras integrales, tales com la integral de Henstock-Kurzweil.

- Estudiar las propiedades del espacio de las funciones Newton absolutamente integrables, como subespacio del espacio de Banach de las funciones Lebesgue integrables.

Bibliografía

[1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics, New York, 1995.

[2] Ivorra C., Carlos, *Análisis Matemático*. Universidad de Valencia. Valencia, España. 2010.

[3] Koliha, J. J., *Lebesgue through Newton integral*, Gazette of the Australian Mathematical Society, **30** (2003), 261-264.

[4] Koliha, J. J., *Metrics, Norms and Integrals, An Introduction to Contemporary Analysis*, World Scientific, Singapure, 2008.

[5] Royden H. L., *Real Analysis (Third Edition)*, Macmillan Publishing Company, New York, 1998.

[6] Thomson, B. S., *The Calculus Integral*, ClassicalRealAnalyis.com, 2009.

[7] Thomson, B. S., *Theory of Integral*, ClassicalRealAnalyis.com, 2012.