BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos

Tesis para obtener el título de:
Licenciada en Matemáticas

presenta

Vianey Córdova Salazar

Directores de tesis

Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

Puebla Pue.

26 de agosto de 2011

Con todo mi corazón para:

Rogelio, Hilda y Doroteo

Muchas gracias por los consejos y las palabras de aliento que siempre me brindaron.

Vianey

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por darme la oportunidad de estar en este momento tan importante en mi vida, así, como de haber puesto en mi camino a las personas que me orientaron y alentaron a estudiar esta carrera.

Les agradezco a mis padres por el apoyo incomparable que siempre he recibido de su parte, quienes a pesar de mis decisiones siempre han estado junto a mí, apoyándome y brindándome lo mejor de ellos, mil gracias por no cuestionar mi decisión de estudiar Matemáticas. También agradezco a mis hermanos quienes me han aguantado las locuras que acarrea esta carrera, así, como las noches de desvelo que les hice pasar por estar estudiando o por hablar dormida sobre temas de matemáticas.

Gracias a todos mis amigos por su compañía, ayuda y palabras de aliento que siempre me brindaron.

Agradezco a todos los profesores de la facultad que han contribuido a mi formación como matemática. En especial, le agradezco a mis directores de tesis David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero por el apoyo, enseñanzas y atenciones que me han brindado, por enseñarme este hermoso camino y ayudarme a dar mis primeros pasos. Gracias por la no numerable cantidad de consejos que siempre me brindan, los cuales me hacen retomar las riendas de mi vida; principalmente gracias por su amistad. Sin su apoyo no hubiese podido realizar este trabajo.

Les agradezco a mis sinodales: Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde y María de Jesús Lopez Toriz por el gran y no numerable apoyo que me han y me siguen brindando. Gracias por ayudarme a mejorar esta tesis, por las atenciones y consejos que me dan, más allá del entorno matemático. Más aún les agradezco las palabras que siempre me brindan y que me hacen volar en el amplio mundo topológico.

Particularmente, quiero agradecer a quienes aunque ya fallecieron, siempre estarán en mi corazón, Hilda Pérez Islas, Doroteo Salazar Nicanor y Rogelio Cruz Chávez quienes me han apoyado en todo momento de la vida, a ellos en especial les dedico este trabajo, les agradezco todos los consejos que hasta ahora sigo tomando en cuenta, ellos me mostraron que no existe lo imposible. Es verdad que a unos nos cuesta mas trabajo que a otros, aprender ciertas cosas de la vida, así como las matemáticas, más siempre habrá un amigo que nos ayude y apoye en esos momentos complicados en los que las dudas no dejan brillar a las ideas.

Siempre tendrán un lugar muy especial en mi corazón.

Vianey

Introducción

El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como Teoría de los Continuos. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos. De hecho a un espacio topológico con estas propiedades se le llama *continuo*. Los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de un continuo, X, con alguna característica particular. En esta tesis trabajamos con los hiperespacios $2^X = \{A \subset X : A$ es cerrado en X y no vacío$\}$ y $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$ considerados con la métrica de Hausdorff. En esta tesis analizamos propiedades relacionadas con los hiperespacios 2^X y $C(X)$, mencionadas en el Capítulo 3, dichas propiedades son resultados, conocidos, que han sido retomadas de las referencias [3], [4] y [6], señaladas en la bibliografía de esta investigación. Este trabajo se desarrolla de la manera que sigue.

En el Capítulo 1 se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

En el Capítulo 2 analizamos, por ejemplo, los conceptos que siguen.
(a) Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada A, $B \in 2^X$, por $H(A, B) = \text{\textit{ínf}}\, E(A, B)$ es una métrica para 2^X (conocida como la *métrica de Hausdorff*).
(b) Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X (la topología generada por $\mathcal{B}$), denotada por τ_V y conocida como la *Topología de Vietoris*.

Además demostramos, por ejemplo.

Teorema 2.22 Si X es un continuo, entonces la topología de Vietoris, y la topología inducida por la métrica de Hausdorff son iguales, en 2^X.

En el Capítulo 3 revisamos algunas propiedades de los hiperespacios 2^X y $C(X)$, como las siguientes.

Teorema 3.19 Si X es un continuo, entonces 2^X es arco conexo.

Teorema 3.21 Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es arco conexo.

Teorema 3.30 Sea X un continuo no degenerado. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es localmente conexo,

2. 2^X es localmente conexo,

3. $C(X)$ es localmente conexo.

Vianey Córdova Salazar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
26 de agosto de 2011

Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos

Vianey Córdova Salazar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Con la dirección de: David Herrera Carrasco y
Fernando Macías Romero

26 de agosto de 2011

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\overline{A}$, $Fr(A)$ e $int(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\overline{A}_Y$, $Fr_Y(A)$ e $int_Y(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, los números naturales, los números racionales, los números reales, los números reales positivos y el plano euclidiano, respectivamente. Un espacio topológico es *no degenerado* si tiene más de un punto.

Sean X un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto V de X es una *vecindad* de p si existe un abierto U en X tal que $p \in U \subset V$. Una *base local* de p es una colección de vecindades $\mathcal{B}_p$ en X tal que cumple las siguientes condiciones

1. Si V es un abierto en X con $p \in V$, entonces existe $U \in \mathcal{B}_p$ tal que $p \in U \subset V$.

2. $p \in \bigcap_{U \in \mathcal{B}_p} U$.

Sean X un espacio métrico con métrica d, $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, la *bola abierta* en X con centro en p y radio ε, denotada por $B_\varepsilon(p)$, es el conjunto $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}$.

1.1. Conceptos Básicos

En esta sección presentamos conceptos y resultados que son de gran utilidad para la exposición de este trabajo (las nociones de Topología General, que en este trabajo revisamos, se encuentran en alguna de las referencias [1], [2], [6] o [9]).

A continuación definimos el límite inferior, el límite superior y el límite de una sucesión de conjuntos.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X, el* ***límite inferior*** *de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ es*

$$\text{lím ínf } K_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap K_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\}.$$

El ***límite superior*** *de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ es*

$$\text{lím sup } K_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ existe } F \subset \mathbb{N} \text{ infinito tal que } U \cap K_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \in F\}.$$

Un ejemplo de los conceptos anteriores es el siguiente.

Ejemplo 1.2. *Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = [0, \frac{2}{3}] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es par y $K_n = [\frac{1}{3}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es impar. Entonces lím ínf $K_n = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{0\}$ y lím sup $K_n = [0,1] \times \{0\}$.*

Observemos que a partir de la Definición 1.1, tenemos que *lím ínf* $K_n \subset$ *lím sup* K_n, para cualquier sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.3. *Sean X un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X, el **límite** de la sucesión, que denotamos por lím $K_n = K$, existe cuando*

$$\text{lím sup } K_n \subset \text{lím ínf } K_n.$$

Es decir, $K =$ *lím ínf* $K_n =$ *lím sup* K_n.

Un ejemplo de las definición anterior es lo siguiente.

Ejemplo 1.4. *Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ si n es par y $K_n = [0,1] \times \{0\}$ si n es impar. Como el lím sup $K_n \subset$ lím ínf K_n, entonces lím $K_n = [0,1] \times \{0\}$.*

Recordemas a continuación las definiciones de componente y casicomponente.

Definición 1.5. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. La **componente** $C(p)$ de p en X es el conjunto*

$$C(p) = \bigcup \{D \subset X : D \text{ es conexo y } p \in D\}.$$

*La **casicomponente** $Q(p)$ de p en X, es el conjunto*

$$Q(p) = \bigcap \{E \subset X : E \textit{ es abierto y cerrado en } X \textit{ y } p \in E\}.$$

Además, si B es un subconjunto conexo de X que contiene a $C(p)$, entonces $B = C(p)$. Es decir, una componente es un subconjunto conexo maximal.

Observación 1.6. *Si X es conexo y $p \in X$, entonces $C(p) = Q(p) = X$.*

Teorema 1.7. *Si X es un espacio topológico con $p \in X$, entonces $C(p) \subset Q(p)$.*

Demostración. Veamos que $C(p) \subset Q(p)$. Sea $q \in C(p)$, luego, existe $D \subset X$ conexo tal que p, $q \in D$. Sea T un abierto y cerrado en X tal que $p \in T$. Como T y $X \setminus T$ forman una separación de X, tenemos que $D \subset T$ o $D \subset X \setminus T$, además $p \in D \cap T$, así, $D \subset T$. Luego, $q \in T$, ya que $q \in D$. Por tanto, $q \in Q(p)$. Con esto concluimos que $C(p) \subset Q(p)$. □

Notemos que la otra contención $Q(p) \subset C(p)$ no siempre es cierta, como se ve a continuación.

Ejemplo 1.8. *Sea X el subespacio del plano formado por la unión de los segmentos L_n, donde L_n es el segmento que une a los puntos $x_n = (0, \frac{1}{n})$ y $y_n = (1, \frac{1}{n})$. A esta unión le añadimos los puntos $p = (0, 0)$ $q = (1, 0)$. Veamos que $C(p) = \{p\}$ y $Q(p) = \{p, q\}$. Supongamos que $C(p) \neq \{p\}$, es decir, supongamos que existe $t \in C(p)$ tal que $t \neq p$, así, existe un subconjunto conexo D de X tal que $p, t \in D$. Luego, para algún $N \in \mathbb{N}$, tenemos que $t \in L_N$. Sea $A = \bigcup_{n>N} L_n \cup \{p, q\}$, notemos que A y $X \setminus A$ son abiertos y cerrados en X, además, $p \in D \cap A$, y $t \in D \cap X \setminus A$. Así, $D \cap A \neq \emptyset$ y $D \cap X \setminus A \neq \emptyset$, luego, $D = (D \cap A) \cup (D \cap X \setminus A)$, lo cual es una contradicción, ya que D es conexo. Por lo tanto, $C(p) = \{p\}$.*

Veamos que $Q(p) = \{p, q\}$. Sea F un subconjunto abierto y cerrado de X tal que $p \in F$. Supongamos que $q \notin F$. Así, $q \in X \setminus F$. Sea $\varepsilon > 0$, luego, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $d(x_n, p) < \varepsilon$, de manera análoga, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $d(y_n, q) < \varepsilon$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. De manera que para $n \geq N$ se tiene que $x_n \in F$ y $y_n \in X \setminus F$. Así, $L_n \cap F \neq \emptyset$ y $L_n \cap X \setminus F \neq \emptyset$. Como $L_n = (L_n \cap F) \cup (L_n \cap X \setminus F)$, *tenemos que* L_n *no es conexo. Por lo tanto* $q \in F$*. De manera que* $\{p, q\} \subset Q(p)$*.*

Supongamos ahora que $Q(p) \subsetneq \{p, q\}$*. Sea* $t \in Q(p)$ *tal que* $t \neq p$ *y* $t \neq q$*, así, existe* L_N *en* X *tal que* $t \in L_N$ *para algún* $N \in \mathbb{N}$*. Sea* $A = \bigcup_{n>N} L_n \cup \{p, q\}$*. Notemos que* A *es un conjunto abierto y cerrado en* X*, tal que* $p \in A$ *y* $t \notin A$ *pero, por hipótesis,* $t \in A$*, esto es una contradicción. Así,* $Q(p) = \{p, q\}$*.*

Teorema 1.9. *Si* X *es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces para cada punto* $p \in X$*, tenemos que* $C(p) = Q(p)$*.*

Demostración. Hemos visto, en el Teorema 1.7, que $C(p) \subset Q(p)$. Resta mostrar que $Q(p) \subset C(p)$. Para probar esto basta mostrar que $Q(p)$ es conexo, ya que $C(p)$ contiene a todos los conexos que tienen al punto p.

Supongamos, por el contrario, que $Q(p)$ no es conexo. Notemos que $Q(p)$ es cerrado en X ya que $Q(p)$ es una intersección de cerrados en X. Existen K, $L \subset X$ cerrados en X, no vacíos, con $K \cap L = \emptyset$ tal que $Q(p) = K \cup L$. Como X es normal (ya que X es compacto y Hausdorff), tenemos que existen U, V abiertos en X con $U \cap V = \emptyset$ tales que $K \subset U$ y $L \subset V$.

Como $p \in Q(p)$, podemos suponer que $p \in K$, sin pérdida de generalidad. Luego, sea $Z = X \setminus (U \cup V)$. Como $U \cup V$ es abierto en X, tenemos que Z es cerrado en X. Además X es compacto y así, Z es compacto. Como $K \cup L \subset U \cup V$, tenemos que $X \setminus (U \cup V) \subset X \setminus (K \cup L)$, es decir,

$$Z \subset X \setminus (K \cup L) = X \setminus Q(p).$$

Como

$$X \setminus Q(p) =$$

$$X \setminus (\bigcap\{E \subset X : E \text{ es cerrado y abierto en } X \text{ y } p \in E\})$$
$$= \bigcup\{X \setminus E : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in E\}.$$

La familia

$$\{X \setminus E : E \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in E\}$$

es una cubierta abierta del compacto Z. Por lo que existen $m \in \mathbb{N}$ y $E_1, \ldots, E_m$ abiertos y cerrados en X tales que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, con $p \in E_i$ y $X \setminus (U \cup V) \subset (X \setminus E_1) \cup \cdots \cup (X \setminus E_m) = X \setminus (E_1 \cap \cdots \cap E_m)$.

De manera que $E_1 \cap \cdots \cap E_m \subset U \cup V$. Luego, sea $M = E_1 \cap \cdots \cap E_m$. Así, M es abierto y cerrado en X y $p \in M \subset U \cup V$. Notemos que

$$M \cap U = M \cap (X \setminus V)$$

de esto, obtenemos que $M \cap U$ es abierto y cerrado en X, ya que $(X \setminus V)$ es cerrado en X y U es abierto en X.

Como $p \in M \cap K \subset M \cap U$, luego, $Q(p) \subset M \cap U$. Como $L \subset Q(p)$, tenemos que $L \subset (M \cap U) \cap V$, lo cual es una contradicción porque $(M \cap U) \cap V = \emptyset$. Así, $Q(p)$ es conexo, y $p \in Q(p)$. Por tanto, $Q(p) \subset C(p)$. Con esto concluimos que $Q(p) = C(p)$. □

Teorema 1.10. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Si K es una componente de X y F un cerrado en X tales que $F \cap K = \emptyset$, entonces existe L abierto y cerrado en X tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Sea $p \in K$, por el Teorema 1.9, tenemos que $K = C(p) = Q(p)$. Para cada $y \in F$, tenemos que $y \notin K$, de manera que existe un abierto y cerrado V_y en X tal que $p \in V_y$ y $y \notin V_y$.

Sea $X_y = X \setminus V_y$. Luego, X_y es abierto y cerrado en X tal que $y \in X_y$ y $p \notin X_y$. Como K es un conexo y V_y, X_y forman una separación de X, se sigue que $K \subset V_y$ o $K \subset X_y$. Como $p \in V_y \cap K$, tenemos que $K \subset V_y$, así, $K \cap X_y = \emptyset$. Como la familia $\{X_y : y \in F\}$ es una cubierta abierta del compacto F, existen $m \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_m \in F$ tales que $F \subset X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$.

Sea

$$\begin{aligned} L &= X \setminus (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}) \\ &= X \setminus X_{y_1} \cap \cdots \cap X \setminus X_{y_m} \\ &= X \setminus (X \setminus V_{y_1}) \cap \cdots \cap X \setminus (X \setminus V_{y_m}) \\ &= V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_m}. \end{aligned}$$

Luego, L es abierto y cerrado en X, ya que para cada $i = \{1, \ldots, m\}$, tenemos que V_{y_i} son abiertos y cerrados en X.

Luego, $X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$ y $X \setminus (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m})$ forman una separación de X. Como K es conexo, tenemos que $K \subset L$ o $K \subset X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$.

Además, sabemos que $K \cap L \neq \emptyset$, así, $K \subset L$, luego, $L \cap (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}) = \emptyset$, como $F \subset (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m})$ tenemos que $L \cap F = \emptyset$. $\square$

Los dos resultados que siguen son conocidos como el "teorema del cable cortado" y "teorema de golpes en la frontera", respectivamente.

Teorema 1.11. *Sean A y B cerrados en un espacio métrico compacto X. Si ningún conexo de X intersecta tanto a A como a B, entonces existen X_1 y X_2 cerrados en X, ajenos tales que $X = X_1 \cup X_2$, con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Demostración. Sean A y B cerrados en X. Para cada $a \in A$ sea $C(a)$ la componente de a en X, por hipótesis $B \cap C(a) = \emptyset$, por el Teorema 1.10, existe un abierto y cerrado L_a en X tal que $C(a) \subset L_a$ y $L_a \cap B = \emptyset$. Por otro lado, como A es un conjunto compacto, tenemos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} L_{a_i}$. Además, $\bigcup_{i=1}^{n} L_{a_i}$ es un conjunto abierto y cerrado en X. Sean $X_1 = \bigcup_{i=1}^{n} L_{a_i}$ y $X_2 = X \setminus X_1$. Concluimos que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ que X_1 y X_2 son conjuntos cerrados en X tales que $X = X_1 \cup X_2$ con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$. $\square$

Teorema 1.12. *Sean X un espacio conexo, compacto y Hausdorff y U un subconjunto no vacío, propio y abierto en X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Notemos que $\overline{U} \subset X$ con X compacto y Hausdorff, así, $\overline{U}$ es compacto y Hausdorff. Ahora, por el Teorema 1.10, existe $L \subset \overline{U}$ abierto y cerrado en $\overline{U}$ tal que $K \subset L$ y $L \cap Fr(U) = \emptyset$. De manera que L es cerrado en X, ya que L es cerrado en $\overline{U}$, además $L \neq \emptyset$ y $L \subset \overline{U} \setminus Fr(U) = U$.

Como L es abierto en $\overline{U}$, existe un abierto W de X tal que $W \cap \overline{U} = L$. Pero $L \subset U$, así que $W \cap U = L$, esto muestra que L también es abierto en X. Ya que X es conexo, se debe tener que $L = X$. Pero $L \subset U$, así que $U = X$, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto, $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 1.13. *Sean X un espacio no vacío, conexo, compacto y de Hausdorff y A y B conexos, cerrados en X y no vacíos tales que $A \subsetneq B$. Existe un conexo y cerrado C en X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración. Sea $p \in B \setminus A$. Como B es un espacio normal, existe un abierto U de B tal que $A \subset U \subset \overline{U}_B \subset B \setminus \{p\}$. Sea C la componente de $\overline{U}_B$ que contiene a A. Notemos que C es conexo y cerrado en X. Como $p \notin C$, tenemos que $C \subsetneq B$. Sólo nos falta ver que $A \neq C$. Como U es abierto en B, tenemos que $U \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Ya que $A \subset U$, tenemos que $A \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Por el Teorema 1.12, tenemos que $C \cap Fr_B(U) \neq \emptyset$. Por tanto, $A \neq C$. $\square$

1.2. Continuos

En esta sección revisamos las nociones de continuo, conexidad local, conexidad en pequeño y arco conexidad, estas nociones se usan a lo largo de este trabajo; también presentamos algunos resultados relacionados con estas nociones.

Definición 1.14. *Un espacio métrico X es un* ***continuo*** *si X es compacto, conexo y no vacío. Dado $Y \subset X$, Y es un* ***subcontinuo*** *de X si Y es un continuo.*

A continuación estudiamos los conceptos de conexidad en pequeño, conexidad local y arco conexo, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 1.15. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es* ***localmente conexo*** *en x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.16. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es* ***conexo en pequeño*** *en x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un conexo V en X tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$. Diremos que X es conexo en pequeño, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.17. *Un continuo X es localmente conexo si, y sólo si, toda componente de cada abierto en X es un abierto en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un abierto en X y C una componente de U. Veamos que C es abierto en X. Sea $x \in C$. Como $x \in U$ y X es localmente conexo, existe un abierto y conexo V tal que $x \in V \subset U$. Notemos que $C \cup V \subset U$ y $C \cup V$ es conexo. Como C es un conexo maximal de U, $V \subset C$. Así, $x \in int(C)$. Concluimos que C es abierto en X.

Recíprocamente, sean $x \in X$ y W un conjunto abierto tal que $x \in W$. Sea C una componente de W tal que $x \in C$. Por hipótesis, C es abierto en X. Así, $x \in C \subset W$. Por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

Si un espacio es localmente conexo en un punto, entonces el espacio es conexo en pequeño en ese punto, pero la recíproca en general no es cierta. Por ejemplo, consideremos el continuo X de la Figura 1.1, notemos que X es conexo en pequeño en p y X no es localmente conexo en p.

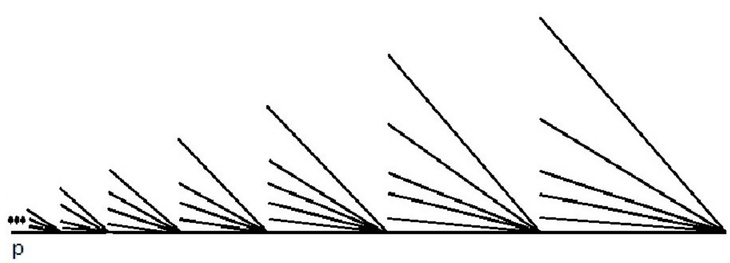

Figura 1.1

Sin embargo, globalmente estas nociones son equivalentes.

Teorema 1.18. *Sea X un continuo. Entonces X es conexo en pequeño si, y sólo si, X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sea U un conjunto abierto en X talque $x \in U$. Por hipótesis, existe V abierto en X y conexo tal que $x \in V \subset U$. Además, $int(V) \subset V$. Por tanto, $x \in int(V) \subset V \subset U$. Por lo que X es conexo en pequeño en x. Dado que x es arbitrario, tenemos que X es conexo en pequeño.

Recíprocamente, sean U un abierto en X y C una componente de U. Veamos que C es abierto en X. Sea $x \in C \subset U$. Por hipótesis, existe un conjunto conexo W de X tal que $x \in int(W) \subset W \subset U$. Notemos que $x \in C \cap W$, así, $C \cap W \neq \emptyset$. De manera que $W \subset C$. Luego, $int(W) \subset int(C)$, es decir, $x \in int(C)$. Por tanto $C \subset int(C)$. Así, C es un abierto y conexo en X. En concluición, X es localmente conexo. $\square$

Definición 1.19. *Un* ***arco*** *es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Si $f : [0,1] \to A$ es un homeomorfismo y denotamos $p = f(0)$ y $q = f(1)$, entonces los puntos p y q son llamados los* ***puntos extremos del arco*** *A. Un* ***arco de** p **a** q significa un arco con puntos extremos p y q.*

Definición 1.20. *Un espacio topológico X es* ***arco conexo****, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco en X de x a y.*

Ejemplo 1.21. *[7, 4.3, pág. 160] Sean $A = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ y $B = \{0\} \times [-1,1]$. El conjunto $\overline{A} = A \cup B$ es un continuo y es conocido como el* ***continuo** $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$. Este es un ejemplo de un continuo que no es arco conexo.*

Existen dos resultados muy importantes para los continuos localmente conexos, en general estos teoremas son de suma importancia en la teoría de continuos, uno dice que todos los continuos localmente conexos son arco conexos, Teoremas 1.22, este teorema fue dado por J. L. Kelley.

Teorema 1.22. *[6, Teorema 8.23] Cada continuo, no degenerado, localmente conexo es arco conexo.*

El recíproco del Teorema 1.22 no es válido, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.23. *Sea* $A = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$*. El conjunto* A *es un continuo y es conocido como el* espacio peine*, este continuo es arco conexo pero no es localmente conexo.*

Los abiertos y conexos en un espacio localmente conexo son arco conexos como se cita a continuación.

Teorema 1.24. *[6, Teorema 8.26] Todo subconjunto conexo y abierto de un continuo localmente conexo es arco conexo.*

Capítulo 2

Topología para 2^X

El contenido de este capítulo fue inspirado de los ejercicios 2.2, 2.3, 2.6 – 2.8 del Capítulo 2 de la referencia [4]; de los cuales destacan los ejercicios 2.6, 2.7 y 2.8. El Ejercicio 2.6 da una métrica que coincide con la métrica de Hausdorff. El Ejercicio 2.7 se ocupa en la prueba del Ejercicio 2.8 que asegura que la topología de Vietoris coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff.

2.1. Métrica de Hausdorff

Dado un continuo X, los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular. Consideraremos los siguientes hiperespacios de X.

$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\}$,

$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$.

Definición 2.1. *Sean X un continuo con métrica d, $A, B \subset X$, denotamos por $d(A, B)$ la distancia de A a B como $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y la distancia de un punto p a un conjunto C es $d(p, C) = d(\{p\}, C)$.*

*Si A es cerrado en X, la **nube** en X con centro en A y de radio $\varepsilon > 0$, es $N(\varepsilon, A) = \{x \in X :$ existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon\}$.*

Teorema 2.2. *Si X es un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces*

1. *$A \subset N(\varepsilon, A)$,*
2. *$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. Así, $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X,*
3. *$N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ para cada $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$, y*
4. *$N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \varepsilon\}$.*

Demostración. 1. Es claro que se cumple.

2. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, luego, $x \in B(\varepsilon, a)$. Así, $x \in \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A) \subset \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a). \tag{2.1.1}$$

Sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. Existe $a \in A$ tal que $x \in B(\varepsilon, a)$. Así, $d(a, x) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a) \subset N(\varepsilon, A). \tag{2.1.2}$$

De (2.1.1) y (2.1.2), se tiene la igualdad deseada.

3. Sean $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Como $\delta < \varepsilon$, tenemos que $d(a, x) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

4. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta < \varepsilon$. Así, $d(a, x) < \delta$, de manera que $x \in N(\delta, A)$.

Luego, $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \varepsilon\}$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \varepsilon\}. \tag{2.1.3}$$

Por *3*, tenemos que

$$\bigcup_{\delta<\varepsilon} N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A). \tag{2.1.4}$$

De (2.1.3) y (2.1.4), concluimos *4*. $\square$

Teorema 2.3. *Si $A \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Sea $A \subset U$. Luego, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Notemos que A y $X \setminus U$ son cerrados en X y así compactos en X. De manera que $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A, X\setminus U)}{2}$. Veamos que $N(\varepsilon, A) \subset U$. En efecto, si $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Así, $x \in B(\varepsilon, a)$. Afirmamos que $x \in U$. Porque en caso contrario, es decir, si $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(a, x)$. Así, $d(A, X \setminus U) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$. Con esto concluimos la prueba de este teorema. $\square$

Teorema 2.4. *Sean A, $B \in 2^X$. Si $0 < \delta \leq \varepsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$.*

Demostración. Sea $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Como $\delta \leq \varepsilon$, se sigue que $d(a, x) < \varepsilon$. Puesto que $A \subset B$, implicamos que $a \in B$, de donde $x \in N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$. $\square$

Teorema 2.5. *Si $\varepsilon > 0$ y A, $B \in 2^X$, entonces*

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B).$$

Demostración. Por el Teorema 2.4, inferimos que $N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y $N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Así,

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B). \tag{2.1.5}$$

Ahora, sea $z \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. Tenemos dos casos $b \in A$ o $b \in B$.

(i) Si $b \in A$, entonces $z \in N(\varepsilon, A)$.

(ii) Si $b \in B$, entonces $z \in N(\varepsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A \cup B) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B). \tag{2.1.6}$$

De (2.1.5) y (2.1.6), concluimos que $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$. □

Teorema 2.6. *Si A, $B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos por el contrario, que para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X, tenemos que $d(A, B) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A,B)}{2}$, notemos que $\varepsilon > 0$. Por lo supuesto, deducimos que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Existe $z \in N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B)$. Así, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \varepsilon$ y $d(b, z) < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b)$. Luego, $d(a, b) < 2\varepsilon = d(A, B)$, de manera que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual es una contradicción. □

Definición 2.7. *Sea A un subconjunto no vacío de un continuo X. El* ***diámetro*** *de A, denotado por diám(A), es*

$$diám(A) = sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Notación 2.8. *Para cada A, $B \in 2^X$ sean*

$$E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ } y \text{ } B \subset N(\varepsilon, A)\} \text{ } y$$

$$E(A,B) \uplus E(B,C) = \{\varepsilon + \delta > 0 : \varepsilon \in E(A,B) \text{ } y \text{ } \delta \in E(B,C)\}.$$

Teorema 2.9. *Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada A, $B \in 2^X$, por*

$$H(A,B) = \text{ínf } E(A,B)$$

es una métrica para 2^X.

Demostración. Sean A, B, $C \in 2^X$.

(a) Veamos que H está bien definida. Para esto, tenemos que probar que el conjunto $E(A,B)$ es no vacío y está acotado inferiormente. Observemos que $d(x,y) < diám(X) + 1$, para cada x, $y \in X$. Así, $A \subset N(diám(X)+1, B)$ y $B \subset N(diám(X)+1, A)$. De manera que $diám(X)+1 \in E(A,B)$. Por tanto, $E(A,B) \neq \emptyset$. Es claro que $E(A,B)$ está acotado inferiormente por el cero.

(b) Para cada A, $B \in 2^X$, notemos que $H(A,B) \geq 0$.

(c) Por definición de $E(A,B)$, deducimos que $E(A,B) = E(B,A)$, de esto, para cada A, $B \in 2^X$, tenemos que $H(A,B) = H(B,A)$.

(d) Para cada A, $B \in 2^X$, veamos que $H(A,B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$. Sean A, $B \in 2^X$. Supongamos que $H(A,B) = 0$. Mostraremos que $A = B$. Para esto, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Como $H(A,B) = 0$, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$. Luego, $A \subset N(\delta, B)$ y como $x \in A$, se sigue que $x \in N(\delta, B)$. Entonces existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta < \varepsilon$. Así, $y \in B(x,\varepsilon) \cap B$, de donde $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ y como ε fue arbitrario, tenemos que $x \in \overline{B}$. Puesto que B es cerrado en X, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$. Análogamente, se prueba que $B \subset A$. Así, $A = B$.

Ahora supongamos que $A = B$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $\varepsilon \in E(A, B)$. Así, $H(A, B) = 0$.

(e) Finalmente veamos que para cada A, B, $C \in 2^X$, tenemos que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Para esto, demostremos que $E(A, B) \uplus E(B, C) \subset E(A, C)$. Sea $\beta \in E(A, B) \uplus E(B, C)$, así, existen $\varepsilon \in E(A, B)$ y $\delta \in E(B, C)$ tales que $\beta = \varepsilon + \delta$. Luego, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, C)$. Veamos que $A \subset N(\beta, C)$, si $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Luego, existe $z \in C$ tal que $d(y, z) < \delta$. Así, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon + \delta = \beta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. Análogamente, se puede probar que $C \subset N(\beta, A)$. De esto, deducimos que $\beta \in E(A, C)$. Por lo tanto, $E(A, B) \uplus E(B, C) \subset E(A, C)$. De lo anterior, es inmediato que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$. $\square$

De acuerdo al Teorema 2.9, para cada continuo X, tenemos que $(2^X, H)$ es un espacio métrico, H se conoce como la *métrica de Hausdorff*. Como $C(X)$ está contenido en 2^X, observemos que H también es una métrica para $C(X)$. La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno en el otro. Esta idea geométrica es buena pero tenemos que notar que, por ejemplo, si A es un disco en el plano, se pueden dar conjuntos finitos tan cercanos a A como se quiera, simplemente se toma una cuadrícula muy fina dentro del disco y se toma como conjunto finito al conjunto de los cruces de la cuadrícula.

Teorema 2.10. *Si X es un continuo, A, $B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si, y sólo si, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$.

Existe $\delta' \in E(A, B)$ tal que $\delta' < \varepsilon$, $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset$

$N(\delta', A)$. Además, por el Teorema 2.2.3, tenemos que $N(\delta', B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $N(\delta', A) \subset N(\varepsilon, A)$. Por tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Recíprocamente, supongamos que

$$A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A).$$

Así, por el Teorema 2.2.4, tenemos que $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$. Dado que A es compacto, existen números positivos, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $\delta_i < \varepsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así, $\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \varepsilon$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = \text{máx}\{\alpha, \gamma\}$. Tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así, $\beta \in E(A, B)$. En consecuencia $H(A, B) \leq \beta < \varepsilon$. Por tanto, $H(A, B) < \varepsilon$. □

Teorema 2.11. *Sea X un continuo. La función diám : $2^X \to [0, \infty)$ es una función continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, A, $B \in 2^X$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Si $H(A, B) < \delta$, por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Como A es compacto, existen a_1, $a_2 \in A$ tales que $\text{diám}(A) = d(a_1, a_2)$. Luego, existen b_1, $b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \delta$ y $d(a_2, b_2) < \delta$. Notemos que

$$\text{diám}(A) = d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) + d(b_1, b_2)$$

$$< 2\delta + d(b_1, b_2) = \varepsilon + d(b_1, b_2) \leq \varepsilon + \text{diám}(B).$$

Por lo tanto,

$$\text{diám}(A) - \text{diám}(B) < \varepsilon. \qquad (2.1.7)$$

De manera análoga a como se le hizo cuando A es compacto, como B es compacto,

$$di\acute{a}m(B) - di\acute{a}m(A) < \varepsilon.$$

Así,

$$-\varepsilon < di\acute{a}m(A) - di\acute{a}m(B). \tag{2.1.8}$$

Por (2.1.7) y (2.1.8), concluimos que

$$\mid di\acute{a}m(A) - di\acute{a}m(B) \mid < \varepsilon.$$

Por tanto, la función *diám* es uniformemente continua, y así, continua. □

Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, por $\mathbf{B}(\varepsilon, A)$ entendemos *la bola abierta en* 2^X con centro en A y de radio ε, es decir,

$$\mathbf{B}(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(A, B) < \varepsilon\}.$$

Definición 2.12. *Dado un continuo X, sea $D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, la función definida, para cada A, $B \in 2^X$, por $D(A, B) =$* $\text{máx}\{sup\{d(a, B) : a \in A\}, sup\{d(A, b) : b \in B\}\}$.

Teorema 2.13. *Sea X un continuo. Si A,$B \in 2^X$, entonces $D(A, B) = H(A, B)$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $r = H(A, B) + \varepsilon$, se sigue que $H(A, B) < r$. Luego, por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Así, para cada $a \in A$, existe un $b \in B$ tal que $d(a, b) < r$. De esta forma, para cada $a \in A$, deducimos que $d(a, B) < r$. De modo que $sup\{d(a, B) : a \in A\} < r$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, se sigue que $sup\{d(b, A) : b \in B\} < r$. Por lo tanto, $D(A, B) \leq r$, es decir, $D(A, B) \leq H(A, B) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, inferimos que $D(A, B) \leq H(A, B)$.

Veamos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $r = D(A,B) + \varepsilon$. Probemos que $A \subset N(r,B)$. Tomemos $a_1 \in A$, así, $d(a_1,B) \leq sup\{d(a,B) : a \in A\}$. Como $sup\{d(a,B) : a \in A\} \leq D(A,B)$, se sigue que $d(a_1,B) \leq D(A,B)$. Así, $d(a_1,B) < r$. De manera que $a_1 \in N(r,B)$. Por lo tanto, $A \subset N(r,B)$, análogamente, se prueba que $B \subset N(r,A)$. Luego, por el Teorema 2.10, tenemos que $H(A,B) < r$, es decir, $H(A,B) < D(A,B) + \varepsilon$. Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, inferimos que $H(A,B) \leq D(A,B)$. Por lo tanto, $H(A,B) = D(A,B)$. $\square$

Por el Teorema 2.9, conluimos que D es una métrica para el hiperespacio 2^X, que coincide con la métrica de Hausdorff. De manera que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ pueden ser considerados con cualquiera de estas dos métricas, según nos convenga.

Definición 2.14. *Dado un subconjunto A de un continuo X. Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X.*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Teorema 2.15. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se tiene lo siguiente.*

1. *Si A es un abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.*

2. *Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración. 1. Sea A un abierto en X. Veamos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Para esto, sea $B \in \Gamma(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \subset A$.

Como A es abierto en X, por el Teorema 2.3, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, B) \subset A$. Veamos que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\varepsilon, B)$, se sigue que $H(B, C) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.10, tenemos que $C \subset N(\varepsilon, B)$ y como $N(\varepsilon, B) \subset A$, se sigue que $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$. Luego, $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Con todo esto, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora, demostremos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Lambda(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$. Como A es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, x) \subset A$. Probemos que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in \mathbf{B}(\varepsilon, B)$, luego, $H(B, C) < \varepsilon$, por el Teorema 2.10, inferimos que $B \subset N(\varepsilon, C)$. Como $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B(\varepsilon, x)$. Así, $y \in A$, luego, $y \in C \cap A$, de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Así, $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Esto prueba que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X.

2. Sea A un cerrado en X, así, $X \setminus A$ es un abierto en X. Además notemos que $\Gamma(A) = 2^X \setminus \Lambda(X \setminus A)$ y $\Lambda(X \setminus A)$ es un abierto en 2^X, por *1* de éste teorema, así, tenemos que $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.

Por otro lado, si A es cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es abierto en X. Por *1* de este teorema, se sigue que $\Gamma(X \setminus A)$ es abierto en 2^X, así, $2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$ es cerrado en 2^X. Notemos que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X \setminus A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.

Ahora, veamos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$. Así, $A \not\subset B$. Sea $a \in A \setminus B$. Notemos que $d(B, a) > 0$. Sea $\varepsilon = d(B, a)$. Como $B \in \overline{\Phi(A)}$, tenemos que $\Phi(A) \cap \mathbf{B}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \Phi(A)$ tal que $H(B, E) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.10, se sigue que $E \subset N(\varepsilon, B)$.

Como $a \in A$ y $E \in \Phi(A)$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Como $d(a,B) \leq d(a,b)$, tenemos que $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in \Phi(A)$. Así, $\overline{\Phi(A)} \subset \Phi(A)$. En consecuencia, hemos demostrado que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. $\square$

2.2. Topología de Vietoris

En esta sección vemos que todos los hiperespacios de un continuo los podemos considerar ya sea con la topología de Vietoris o con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, indistintamente.

Definición 2.16. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X, no vacíos. El* ***vietórico*** *de U_1, $U_2, \ldots, U_n$, denotado por $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, es el conjunto*

$$\left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1,2,\ldots,n\}\right\}.$$

Teorema 2.17. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X, no vacíos. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)]$,
2. *para cada $A \subset X$, tenemos que $\Gamma(A) = \langle A \rangle$,*
3. *para cada $A \subset X$, tenemos que $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.*

Demostración. Para ver que se cumple *1*, notemos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle =$$

$$\{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^{n} U_i\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$$

$$= \Gamma(\cup_{i=1}^n U_i) \cap [\cap_{i=1}^n \Lambda(U_i)].$$

Por lo tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$.

El resto de la demostración de este teorema se hace usando la definición. $\square$

Teorema 2.18. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ subconjuntos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, entonces*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle =$$

$$\langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$

$$= \Gamma(U) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)\Big] \cap \Gamma(V) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^m \Lambda(V_i)\Big].$$

Así, $A \subset U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U)$

$$= \Big[U \cap (\bigcup_{i=1}^m V_i)\Big] \cup \Big[V \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)\Big]$$

$$= \Big[\bigcup_{i=1}^m (U \cap V_i)\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^n (V \cap U_i)\Big].$$

Por otro lado, como $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, tenemos que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. También para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se puede probar de manera análoga a lo anterior $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$. De manera que

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Por lo tanto, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \subset \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle$.

Para probar la otra contención, sea

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Entonces, $A \subset U \cap V$. Es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$. Así, $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_i) = A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que $A \in \Lambda(V_i)$. Así, de manera análoga se puede ver que $A \in \Lambda(U_i)$. Por tanto, $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle$. □

Teorema 2.19. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que*

$$A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $a \in U_i$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Luego, como X es regular, existe un abierto V_a en X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_i$.

Así, $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $b_i \in A \cap U_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea W_i abierto en X tal que $b_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean

$$J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, m\} : \overline{V_{a_k}} \subset U_i\} \text{ y } V_i = W_i \cup \big(\textstyle\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k}\big).$$

Tenemos que para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, V_i es abierto en X, con $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$.

Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así, $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$, además $\langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$.

Por tanto, existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

El siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X de un continuo X dado.

Teorema 2.20. *Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle :$ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Demostración. Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Notemos que $\langle X\rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así, $2^X \in \mathcal{B}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$, luego, $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

La demostración de la segunda condición, es decir, que para cada $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, se tiene del Teorema 2.18. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para una topología de 2^X. □

La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la *Topología de Vietoris.*

Teorema 2.21. *Sea X un continuo. El conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U$ es abierto en $X\} \cup \{\Lambda(U) : U$ es abierto en $X\}$ es una subbase para la Topología de Vietoris.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{S}' = \Big\{ \bigcap \mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{S}\Big\}.$$

Para ver que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris, basta probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Luego, sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X tales que $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ y sea $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Notemos que por el Teorema 2.17, tenemos que $\mathcal{U} = \Gamma(U) \cap \Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_n)$. Es decir, $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Así, $\mathcal{U} \in \mathcal{S}'$. De manera que $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}'$.

Por otra parte, veamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Para esto, sea $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$, luego, $\mathcal{V} = \Gamma(U)$ o $\mathcal{V} = \Lambda(U)$, para algún U abierto en X, es decir, $\mathcal{V} = \langle U \rangle$ o $\mathcal{V} = \langle X, U \rangle$, de cualquier forma $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$. Esto prueba que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Además, por el Teorema 2.18, sabemos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, de manera que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. Lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris. □

Teorema 2.22. *Sea X un continuo. La Topología de Vietoris, τ_V, y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H, en 2^X son iguales.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \tau_V$ y $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 2.20, tenemos que $\mathcal{B}$ es una base de τ_V. Así, existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X tales que $A \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Luego, $\bigcup_{i=1}^n U_i$ es abierto en X. Por el Teorema 2.15, se sigue que $\Gamma\big(\bigcup_{i=1}^n U_i\big) \in \tau_H$ y $\Lambda(U_i) \in \tau_H$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así,

$$\Gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\Big] \in \tau_H.$$

Por el Teorema 2.17.1, inferimos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\Big].$$

Luego, $\mathcal{U} \in \tau_H$. De manera que $\tau_V \subset \tau_H$.

Ahora, sean $\mathcal{V} \in \tau_H$ y $A \in \mathcal{V}$. Probemos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Recordemos que una base para τ_H está dada por $\gamma_H = \{\mathbf{B}(\delta, C) : C \in 2^X \ y \ \delta > 0\}$. De manera que existen $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \in \mathbf{B}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{V}$.

Por otro lado, observemos que la colección $\{B(\frac{\varepsilon}{2}, b) : b \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Como F es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^n B(\frac{\varepsilon}{2}, b_i)$.

Sea $U_i = B(\frac{\varepsilon}{2}, b_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos

$$\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\big) \cap \big[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\big]$$

(por el Teorema 2.17.1). Notemos que $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$.

Ahora, probemos que $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Sea $D \in \mathcal{W}$, luego,

$$D \in \Gamma\big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\big) \cap \big[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\big].$$

Así, $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Afirmamos que

$$D \subset N(\varepsilon, F). \tag{2.2.1}$$

En efecto, si $e \in D$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = B(\frac{\varepsilon}{2}, b_j)$. Así, $d(e, b_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, además $b_j \in F$. En resumen, para cada $e \in D$, existe $b_j \in F$ tal que $d(e, b_j) < \varepsilon$. De manera que $D \subset N(\varepsilon, F)$.

Veamos que

$$F \subset N(\varepsilon, D). \tag{2.2.2}$$

Si $b \in F$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = B(\frac{\varepsilon}{2}, b_k)$. Así, $d(b, b_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, inferimos que $D \cap B(\frac{\varepsilon}{2}, b_k) \neq \emptyset$, se sigue que existe $z \in D \cap B(\frac{\varepsilon}{2}, b_k)$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(b, z) \leq d(b, b_k) + d(b_k, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $d(b, z) < \varepsilon$. Por lo tanto, para cada $b \in F$, existe $z \in D$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. En consecuencia, $F \subset B(\varepsilon, D)$.

De (2.2.1), (2.2.2) y por el Teorema 2.10, implicamos que

$$H(F, D) < \varepsilon.$$

Así, $D \in \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Por lo tanto, $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, F)$. Dado que

$$\mathbf{B}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{V},$$

deducimos que $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

En resumen, para cada $\mathcal{V} \in \tau_H$ tal que $A \in \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Esto demuestra que $\tau_H \subset \tau_V$. Por tanto, $\tau_H = \tau_V$. $\square$

Capítulo 3

Propiedades de 2^X y $C(X)$

El contenido de este capítulo fue inspirado de los ejercicios 2.10, 2.13, 2.16 y 2.17 del Capítulo 2 de la referencia [4]. En los cuales encontramos propiedades de los hiperespacios 2^X y $C(X)$, algunas de las cuales se heredan del espacio X, como el ser continuo y la conexidad local. La arco conexidad se tiene en estos hiperespacios aunque el continuo X no tenga esta propiedad.

3.1. Funciones de Whitney

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios garantiza la existencia de las funciones de Whitney para el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo, este resultado se debe a Hassler Whitney quien, en 1933 fue el primero en construir este tipo de funciones especiales en ciertos espacios de conjuntos.

Definición 3.1. *Sea X un continuo. Una **función de Whitney** para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.*

2. *Para cada A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.*

Una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$ es una función continua de $C(X)$ en $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones *1* y *2*.

Las funciones de Whitney nos proporcionan una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

El siguiente teorema, es conocido como el criterio M. de Weierstrass, el cual, muestra una manera de construir funciones continuas a partir de sucesiones de funciones continuas. Esto nos servirá para dar una expresión explícita de algunas funciones de Whitney.

Teorema 3.2. *[2, 10.5, pág. 85] Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas del espacio métrico X en $\mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}^+$ son tales que $\mid \mu_n(x) \mid \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in X$, entonces la función $\mu : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mu(x) = \frac{\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu_n(x)}{2^n}$$

es una función continua.

Teorema 3.3. *Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X.*

Demostración. Como X es un espacio métrico compacto, podemos elegir un subconjunto denso y numerable, $D = \{z_1, z_2, \ldots\}$, de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mu_n : 2^X \to [0, \infty),$$

como $\mu_n(A) = máx\{d(a, z_n) : a \in A\} - mín\{d(a, z_n) : a \in A\}$; esta función μ_n está bien definida ya que d es una función continua y A es un conjunto compacto.

"Geométricamente, $\mu_n(A)$ se puede interpretar como el ancho del anillo mínimo centrado en z_n que contie a A".

Finalmente definimos

$$\mu : 2^X \to [0, \infty),$$

como $\mu(A) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$.

Probaremos que μ cumple las propiedades *1* y *2* de la definición de funciones de Whitney. Veamos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, μ_n es continua.

Sea $\varepsilon > 0$, A, $B \in 2^X$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, tales que $H(A, B) < \delta$. Demostremos que μ_n es uniformemente continua. Como A y B son compactos, existen elementos a_1, $a_2 \in A$ y b_1, $b_2 \in B$, tales que

(i) $d(z_n, a_1) = máx\{d(z_n, a) : a \in A\}$

(ii) $d(z_n, a_2) = mín\{d(z_n, a) : a \in A\}$

(iii) $d(z_n, b_1) = máx\{d(z_n, b) : b \in B\}$

(iv) $d(z_n, b_2) = mín\{d(z_n, b) : b \in B\}$

Como $H(A, B) < \delta$, por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, de manera que existen x, $y \in A$ tales que $d(x, b_1) < \delta$ y $d(y, b_2) < \delta$. Luego, por (i), tenemos que

$$d(z_n, b_1) \leq d(z_n, x) + d(x, b_1) < d(z_n, a_1) + \delta,$$

ya que $d(z_n, x) \leq d(z_n, a_1)$. Así,

$$d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) < \delta \tag{3.1.1}$$

Por otra parte,

$$d(z_n, a_2) \leq d(z_n, y) \leq d(z_n, b_2) + (b_2, y) < d(z_n, b_2) + \delta.$$

De donde

$$d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) < \delta \tag{3.1.2}$$

De manera análoga existen x_1, $y_1 \in B$ tales que $d(x_1, a_1) < \delta$ y $d(y_1, a_2)$. Luego, tenemos que

$$d(z_n, a_1) \leq d(z_n, x_1) + d(x_1, a_1) < (z_n, b_1) + \delta.$$

Por lo tanto,

$$d(z_n, a_1) - d(z_n, b_1) < \delta \tag{3.1.3}$$

Además

$$d(z_n, b_2) \leq d(z_n, y_1) \leq d(z_n, a_2) + (a_2, y_1) < d(z_n, a_2) + \delta.$$

Así,

$$d(z_n, b_2) - d(z_n, a_2) < \delta. \tag{3.1.4}$$

Por lo tanto, de (3.1.1) y (3.1.3), se sigue que

$$\mid d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) \mid < \delta$$

y de (3.1.2) y (3.1.4), obtenemos que

$$\mid d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) \mid < \delta.$$

De manera que $\mid (d(z_n, b_1) - d(z_n, b_2)) - (d(z_n, a_1) - d(z_n, a_2)) \mid$

$$\leq \mid d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) \mid + \mid d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) \mid < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Es decir,

$$\mid \mu_n(B) - \mu_n(A) \mid < \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

Ahora, si $x \in X$, entonces $\mu_n(\{x\}) = 0$, ya que

$$\mu_n(\{x\}) = \textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in \{x\}\} - \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in \{x\}\}$$

$$= d(z_n, x) - d(z_n, x) = 0.$$

De aquí,

$$\mu(\{x\}) = 0. \tag{3.1.6}$$

Probemos que si $A \subseteq B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

Sea $A \subseteq B$, entonces $\{d(z_n, a) : a \in A\} \subseteq \{d(z_n, b) : b \in B\}$. De aquí que

$$\textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq \textit{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} \text{ y}$$

$$\textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\} \leq \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\},$$

se sigue que

$$-\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq -\textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}.$$

Por tanto

$$\textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq$$

$$\textit{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} - \textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}$$

es decir,

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(B). \tag{3.1.7}$$

Ahora veamos que la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada.

Sea $M = \textit{diám}(X) = \textit{máx}\{d(x, y) : x, y \in X\}$, entonces

$$\textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq$$

$$\textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq M,$$

ya que $A \subset X$. De donde, $\mu_n(A) \leq M$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $A \in 2^X$.

La función μ está bien definida, por (3.1.5) y por Teorema 3.2, tenemos que μ es continua. En lo que sigue demostramos que si $A \subsetneq B$, entonces

$$\text{existe un } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mu_n(A) < \mu_n(B). \tag{3.1.8}$$

Sean A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Elijamos $b_0 \in B \setminus A$. Como A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Como D es denso, existe $z_n \in D \cap B(b_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Para esta n veamos que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. Notemos que

$$\textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq \textit{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} \text{ y}$$

$$\textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\} \leq d(z_n, b_0).$$

Además

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Porque de lo contrario, si

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces existe $a \in A$ tal que $d(z_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ y esto implica que

$$d(a, b_0) \leq d(a, z_n) + d(z_n, b_0) < \varepsilon.$$

Así, $a \in B(b_0, \varepsilon) \cap A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\varepsilon}{2} > d(z_n, b_0) \geq \textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}.$$

Luego,

$$\mu_n(A) = \textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\}$$

$< máx\{d(z_n, b) : b \in B\} - mín\{d(z_n, b) : b \in B\} = \mu_n(B)$.

Luego, por (3.1.7) y (3.1.8), tenemos que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Por tanto, μ es una función de Whitney. $\square$

Teorema 3.4. *Si A y B son subconjuntos en X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([t, 1]) \bigcap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}.$$

Notemos que $\mu^{-1}([t, 1])$ es cerrado en $C(X)$ ya que μ es una funcíon continua. Además, por el Teorema 2.15, tenemos que $\{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$ es cerrado en $C(X)$. Así, el conjunto $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es compacto, además es diferente del vacío pues B pertenece a él. De manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para toda $D \in \mathcal{A}$.

Ahora, sea

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([0, t]) \bigcap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}.$$

De nuevo, el Teorema 2.15, nos garantiza que $\mathcal{B}$ es compacto y como A pertence a $\mathcal{B}$ tenemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, así, μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$. Es decir, existe un elemento $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para toda $D \in \mathcal{B}$.

Si ocurriera que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$, podríamos proponer al conjunto C. Supongamos que $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como $F \subset E$, tenemos que $F \subsetneq E$. Por el Teorema 1.13, existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subsetneq E \subset B$. Entonces $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $t \leq \mu(G)$, entonces $G \in \mathcal{A}$ y $\mu(G) < \mu(E)$, lo cual es una contradicción. Si $\mu(G) \leq t$, entonces $G \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < \mu(G)$, esto contradice la elección de F. Con esta doble contradicción terminamos la prueba de que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ y también la demostración del teorema. □

Teorema 3.5. *Si X es un continuo no degenerado, entonces existen funciones de Whitney $\mu_1 : 2^X \to [0,1]$ y $\mu_2 : C(X) \to [0,1]$ tales que $\mu_1(X) = 1 = \mu_2(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3, tenemos que existe una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0, \infty)$. Definimos, para cada $A \in 2^X$, la función $\mu_1 : 2^X \to [0,1]$ dada por $\mu_1(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$. Sea $\mu_2 = \mu_1 |_{C(X)}$. Observemos que μ_1 y μ_2 son funciones de Whitney, además, $\mu_1(X) = 1$ y $\mu_2(X) = 1$. □

Dado que los hiperespacios son espacios métricos, la definición de sucesiones y el criterio de convergencia de sucesiones, es el mismo que conocemos en cualquier espacio métrico. Los siguentes resultados nos serán de gran utilidad en el desarrollo de la sección 3.2 de este capítulo.

Teorema 3.6. *[5, 1.19] Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $x \in X$. Se cumple que $x \in$ lím inf A_n si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que lím $x_n = x$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.7. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $x \in X$. Se cumple que $x \in$ lím sup A_n si, y sólo si, existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que lím $x_{n_k} = x$.*

Demostración. Sea $x \in$ *lím sup* A_n. Luego, existe $J_1 \subset \mathbb{N}$ tal que J_1 es infinito y $A_n \cap B(x,1) \neq \emptyset$, para cada $n \in J_1$. Elegimos $n_1 \in J_1$ y $x_{n_1} \in B(x,1) \cap A_{n_1}$. De manera análoga, existe $J_2 \subset \mathbb{N}$

tal que J_2 es infinito y $A_n \cap B(x, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$, para cada $n \in J_2$. Tomemos $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$ y $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{n_2}$.

Supongamos que ya hemos construido una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$ y una sucesión de puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$. Por tanto, $\textit{lím}\ x_{n_k} = x$.

Supongamos ahora que existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\textit{lím}\ x_{n_k} = x$. Veamos que $x \in \textit{lím sup}\ A_n$. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq N$ tenemos que $x_{n_k} \in U$. Puesto que $x_{n_k} \in A_{n_k}$, tenemos que $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$. Sea $J = \{n_k : k \geq N\}$, luego, $J \subset \mathbb{N}$, J es infinito y $A_{n_k} \cap U \neq \emptyset$ para cada $n_k \in J$. Por lo tanto, $x \in \textit{lím sup}\ A_n$. □

Teorema 3.8. *[6, Teorema 4.11] Si X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $A \in 2^X$, entonces $\textit{lím}\ A_n = A$, con la métrica de Hausdorff, si y sólo si $\textit{lím inf}\ A_n = A = \textit{lím sup}\ A_n$.*

Teorema 3.9. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\textit{lím}\ A_n = A$ y $\textit{lím}\ B_n = B$, donde A, $B \in 2^X$. Se cumple lo siguiente*

1. *Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$,*
2. *$\textit{lím}\ (A_n \cup B_n) = A \cup B$,*
3. *si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$,*
4. *no siempre ocurre que $\textit{lím}\ (A_n \cap B_n) = A \cap B$*

Demostración. 1. Sea $x \in A$. Veamos que $x \in B$. Puesto que B es cerrado, basta ver que $x \in \overline{B}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\textit{lím}\ A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para, cada $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como *lím* $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para, cada $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \in N$, $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y $B_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, $B \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$, para cada $n \geq N$. Ahora, fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Puesto que $x \in A$, existe $y \in A_m$, tal que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis, $A_m \subset B_m$ así, $y \in B_m$. Existe $z \in B$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$. De manera que $z \in B(x, \varepsilon) \cap B$. En consecuencia, $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{B} = B$. Por lo tanto, $A \subset B$.

2. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(\varepsilon, A \cup B)$.

Como *lím* $A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \varepsilon$. Similarmente, como *lím* $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \varepsilon$.

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. En consecuencia, para cada $n \geq N$, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$. Luego, por el Teorema 2.10, para cada $n \geq N$, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, $B \subset N(\varepsilon, B_n)$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$. De manera que, para cada $n \geq N$, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Luego, por el Teorema 2.5, para cada $n \geq N$, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Por tanto, para cada $n \geq N$, $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$. Así, para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathbf{B}(\varepsilon, A \cup B)$. Concluimos que *lím* $(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

3. Supongamos que $A \cap B = \emptyset$ por el Teorema 2.6, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset$. Por otro lado, como *lím* $A_n = A$ y *lím* $B_n = B$, existen N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_1$, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y para cada $n \geq N_2$, $H(B_n, B) < \varepsilon$.

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \geq N$, $H(A_n, A) <$

ε y $H(B_n, B) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, $B \subset N(\varepsilon, B_n)$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$, para cada $n \geq N$.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$. Por hipótesis, tenemos que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$. Sea $c_m \in A_m \cap B_m$, entonces $c_m \in N(\varepsilon, A)$ y $c_m \in N(\varepsilon, B)$, así, $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$.

4. Consideremos el continuo $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$, y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n.

Observemos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de 2^X tales que *lím* $A_n = A$ y *lím* $B_n = B$, donde $A = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, $B = [0, 1] \times \{0\}$. Luego, $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\} = A$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n = \{p_n\}$. Así, *lím* $(A_n \cap B_n) = \{p_0\}$, donde p_0 es el punto $(1, 0)$. Por lo tanto, *lím* $(A_n \cap B_n) \neq A \cap B$. $\square$

A continuación exponemos la existencia de los arcos ordenados, este resultado nos es de gran utilidad para demostrar que 2^X y $C(X)$ son arco conexos.

Definición 3.10. *Sean X un continuo y A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ es un* ***arco ordenado*** *de A a B en 2^X, si cumple lo siguiente.*

1. *$\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,*
2. *si t, $s \in [0, 1]$ son tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.*

Por lo regular un arco ordenado α, de A a B, se identifica con su imagen y decimos que $\Gamma = \alpha([0, 1])$ es el arco ordenado de A a B. De manera que para cada $C \in \Gamma$, tenemos que $A \subset C \subset B$.

Aunque la recíproca del siguiente teorema (Teorema 3.11) es cierta, en este trabajo sólo así lo necesitamos.

Teorema 3.11. *Si X y Y son continuos, $p \in X$ y $f : X \to Y$ una función tal que para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a p y tal que satisface la condición*

$$\text{si } \lim f(p_n) = q, \text{ entonces } q = f(p),$$

entonces f es continua en p.

Demostración. Supongamos que f no es continua en p, luego, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ se tiene $f(B(p,\delta)) \not\subset B(f(p),\varepsilon)$. Para este ε tomemos $\delta_1 = 1$ y $p_1 \in B(p,\delta_1)$ tal que $f(p_1) \notin B(f(p),\varepsilon)$. De manera análoga, sea $\delta_2 = \frac{1}{2}$ y $p_2 \in B(p,\delta_2)$ tal que $f(p_2) \notin B(f(p),\varepsilon)$. De forma inductiva, sea $\delta_n = \frac{1}{n}$ y $p_n \in B(p,\delta_n)$ tal que $f(p_n) \notin B(f(p),\varepsilon)$. Notemos que la suseción $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p. Sin embargo, $\lim f(p_n) \neq f(p)$ ya que $f(p_n) \notin B(f(p),\varepsilon)$. Con esto probamos este teorema. $\square$

Teorema 3.12. *Sean X un continuo y A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *existe un arco ordenado de A a B en 2^X,*
2. *para cada componente C de B, tenemos que $C \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\alpha : [0,1] \to 2^X$ un arco ordenado de A a B. Supongamos que existe una componente K de B tal que $K \cap A = \emptyset$. Por el Teorema 1.10, existe un conjunto abierto y cerrado L en B tal que $K \subset L$ y $L \cap A = \emptyset$. Se sigue que L y $B \setminus L$ son cerrados en B y así, en X.

Sean $\mathcal{A} = \{D \in 2^X : C \subset B \setminus L\}$ y $\mathcal{B} = \{C \in 2^X : C \cap L \neq \emptyset\}$. Como $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son no vacíos. Además, por el Teorema 2.15, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados en 2^X.

Veamos que $\alpha([0,1]) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sea $t \in [0,1]$, entonces $\alpha(t) \subset B$. Así, $\alpha(t) \subset B \setminus L$ o $\alpha(t) \cap L \neq \emptyset$, por lo tanto, $\alpha(t) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, es decir, $\alpha([0,1]) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Dado que $A \in \alpha([0,1]) \cap \mathcal{A}$ y $B \in \alpha([0,1]) \cap \mathcal{B}$, tenemos que $\alpha([0,1]) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\alpha([0,1]) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Todo esto contradice la conexidad de $\alpha([0,1])$. Por lo tanto, para cada componente C de B tenemos que $C \cap A \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que toda componente de B intersecta a A. Por el Teorema 3.5, existe una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0,1]$. Sea $C(B) = \{D \in 2^X : D \subset B\}$. Por el Teorema 2.15, $C(B)$ es cerrado en 2^X y así, compacto. Para cada $a \in A$ y para cada $t \in [0,1]$, sea $F(a,t) = \bigcup\{D \in C(B) : a \in D$ y $\mu(D) \leq t\}$. Para cada $t \in [0,1]$, sea $\alpha(t) = \bigcup\{F(a,t) : a \in A\}$ y veamos que $\alpha(t)$ es cerrado en X, para cada $t \in [0,1]$.

Sean $t \in [0,1]$ y $p \in \overline{\alpha(t)}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\alpha(t)$ tal que $\text{lím}\ x_n = p$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $a_n \in A$ tal que $x_n \in F(a_n, t)$. Luego, existe $D_n \in C(B)$ tal que $x_n \in D_n$. Consideremos las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$:

(a) $a_n \in D_n \cap A$,

(b) $x_n \in D_n$,

(c) $D_n \in C(B)$,

(d) $\mu(D_n) \leq t$.

De (a), tenemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. Como A es compacto, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\text{lím}\ a_{n_k} = a$, para algún $a \in A$.

De (c), tenemos que $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(B)$. Como $C(B)$ es compacto, existe una subsucesión $\{D_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\text{lím}\ D_{n_j} = T, \text{ para algún } T \in C(B).$$

De (a) y por el Teorema 3.9, tenemos que $a \in T \cap A$. Además, como μ es continua y por (d), se sigue que $D \subset F(a,t)$. Por otro lado, por (b), tenemos que $p \in D$. Así, $p \in F(a,t)$. Luego, $p \in \alpha(t)$. Por lo tanto, $\overline{\alpha(t)} \subset \alpha(t)$. De manera que $\alpha(t)$ es cerrado en X.

Como $\alpha(t)$ es cerrado en X, para cada $t \in [0,1]$. Tiene sentido definir la función $\alpha : [0,1] \to 2^X$ por $\alpha(t) = \bigcup \big\{F(a,t) : a \in A\big\}$. Veamos que α es continua.

Por el Teorema 3.11, basta probar que si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $[0,1]$ tal que $\lim t_n = t$, para algún $t \in [0,1]$, y $\lim \alpha(t_n) = E$, para algún $E \in 2^X$, entonces $\alpha(t) = E$. Así, sean $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $[0,1]$ y $t \in [0,1]$ tales que $\lim t_n = t$ y $\lim \alpha(t_n) = E$, para algún $E \in 2^X$. Demostraremos que $\alpha(t) = E$. Sea $p \in \alpha(t)$, luego, existen $a \in A$ y $D \in C(B)$ tales que $a, p \in D$ y $\mu(D) \leq t$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = \min \{t_n, \mu(D)\}$. Como $\{a\}$, $D \in C(B)$, $\mu_{|C(B)}$ es una función de Whitney, $s_n \in [\mu(\{a\}), \mu(D)]$ y por el Teorema 1.10, existe $D_n \in C(B)$ tal que $a \in D_n \subset D$ y $\mu(D_n) = s_n$. En particular, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(D)$. Como $C(D)$ es compacto, existe una subsucesión $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim D_{n_k} = D_0$, para algún $D_0 \in C(D)$. Como $\lim s_n = \lim \min \{t_n, \mu(D)\} = \min \{\lim t_n, \mu(D)\} = \min \{t, \mu(D)\} = \mu(D)$, tenemos que

$$\lim s_n = \mu(D) \tag{3.1.9}$$

Como $\lim D_{n_k} = D_0$, se sigue que $\mu(D_0) = \mu(\lim D_{n_k}) = \lim \mu(D_{n_k}) = \lim s_{n_k}$. Luego, por (3.1.9), $\mu(D_0) = \mu(D)$. Ahora, si $D_0 \subsetneq D$, entonces $\mu(D_0) < \mu(D)$. Lo cual es una contradicción. Se sigue que $D_0 = D$.

Notemos que $D_{n_k} \subset F(a, t_{n_k}) \subset \alpha(t_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, $\lim \alpha(t_k) = E$. Luego, por el Teorema 3.9, inferimos que *lím* $D_{n_k} \subset$ *lím* $\alpha(t_{n_k})$, es decir, $D \subset E$. Dado que $p \in D$, concluimos que $p \in E$. De manera que $\alpha(t) \subset E$.

Tomemos $p \in E$. Como *lím* $\alpha(t_n) = E$, entonces *lím ínf* $\alpha(t_n) = E$. Luego, por el Teorema 3.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $p_n \in \alpha(t_n)$ tal que *lím* $p_n = p$.

Entonces existen $a_n \in A$ y $D_n \in C(B)$ tales que $a_n, p_n \in D_n$ y $\mu(D_n) \leq t_n$. Puesto que A y $C(B)$ son compactos, existen subsucesiones $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, tales que $a_{n_k} \to a$, para algún $a \in A$ y *lím* $D_{n_k} = D$, para algún $D \in C(B)$. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(D_n) \leq t_n$, por la continuidad de μ tenemos que $\mu(D) \leq t$. Además, dado que $\{a_{n_k}\} \subset D_{n_k}$ y $\{p_{n_k}\} \subset D_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.6, tenemos que $a, p \in D$. Luego, $p \in F(a,t)$. Así, $p \in \alpha(t)$. Por lo tanto, $E \subset \alpha(t)$. De manera que $\alpha(t) = E$. Con lo anterior tenemos que α es continua.

Como $F(a,0) = \{a\}$, se sigue que $\alpha(0) = \{\{a\} : a \in A\} = A$, es decir,

$$\alpha(0) = A. \tag{3.1.10}$$

Por otro lado, para cada $b \in B$, denotamos por C_b a la componente de B tal que $b \in C_b$. Veamos que

$$\text{para cada } a \in A, \text{ tenemos que } F(a,1) = C_a. \tag{3.1.11}$$

Sea $a \in A$. Luego, $a \in B$. Sea C_a la componente de B tal que $a \in C_a$. Tomemos $x \in F(a,1)$. Existe $D \in C(B)$ tal que x, $a \in D$. Como $a \in C_a \cap D$, se sigue que $D \subset C_a$. De modo que $F(a,1) \subset C_a$. Ahora, notemos que $C_a \in C(B)$, $a \in C_a$ y $\mu(C_a) \leq 1$. De manera que $C_a \subset F(a,1)$. Así, $F(a,1) = C_a$. Esto prueba (3.1.11).

Ahora veamos que

$$\alpha(1) = B. \tag{3.1.12}$$

Es conocido que $B = \bigcup \{C_b : b \in B\}$. Tomemos $p \in \alpha(1)$, entonces existe $a \in A$ tal que $p \in F(a,1)$. Por (3.1.11), tenemos que $p \in C_a$. De manera que $p \in B$. Así, $\alpha(1) \subset B$. Ahora, tomemos $p \in B$. Entonces existe $b \in B$ tal que $p \in C_b$. Por hipótesis, tenemos que $C_b \cap A \neq \emptyset$. Consideremos $a \in C_b \cap A$. Notemos que $C_b \in C(B)$ y $\mu(C_b) \leq 1$. De modo que $C_b \subset F(a,1)$. Luego, $p \in F(a,1)$. Así, $p \in \alpha(1)$. Por lo tanto, $B \subset \alpha(1)$. De manera que $\alpha(1) = B$.

Observemos que si $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$. Ahora, si $0 < s < t < 1$ no necesariamente $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. De modo que α no es un arco ordenado. Sin embargo, α nos ayudara a construir el arco ordenado que estamos buscando.

Sean $u = \mu(A)$ y $v = \mu(B)$. Dada $t \in [0,1]$ tenemos que $A = \alpha(0) \subset \alpha(t) \subset \alpha(1) = B$. Como μ es una función de Whitney, $u = \mu(A) = \mu(\alpha(0)) \leq \mu(\alpha(t)) \leq \mu(\alpha(1)) = \mu(B) = v$. De modo que $\mu(\alpha(t)) \in [u,v]$. Luego, $\mu(\alpha[0,1]) \subset [u,v]$.

Sea $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$. Notemos que $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de 2^X. Como u, $v \in \mu(\mathcal{A})$ y $\mu(\mathcal{A})$ es arco conexo, se sigue que $[u,v] \subset \mu(\mathcal{A})$. Por tanto, $\mu(\mathcal{A}) = [u,v]$.

Por lo anterior, tenemos que $\mu_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [u,v]$ es una función continua y suprayectiva. Además, si $s \leq t$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. Así, $\mu(\alpha(s)) < \mu(\alpha(t))$, de manera que $\mu_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [u,v]$ es inyectiva. Luego, $\mu_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [u,v]$ es un homeomorfismo.

Como $A \subsetneq B$, $u < v$. Consideremos un homeomorfismo estrictamente creciente $\phi : [0,1] \to [u,v]$ tal que $\phi(0) = u$ y $\phi(1) = v$. Tomemos la función $\beta = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1} \circ \phi : [0,1] \to \mathcal{A} \subset 2^X$. Se sigue que β es continua. Por (3.1.10), inferimos que $\beta(0) = A$. Por (3.1.12), tememos que $\beta(1) = B$. Además, si $s < t$, entonces $\phi(s) < \phi(t)$. Así, $\beta(s) \subsetneq \beta(t)$, ya que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es una biyección. Por lo tanto, $\beta : [0,1] \to 2^X$ es un arco ordenado que une A con B. $\square$

Teorema 3.13. *Si X es un continuo y A, $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3, existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$. Consideremos el conjunto

$$E = \{\mu(A), \mu(B)\} \bigcup \Big[\big(\mu(A), \mu(B)\big) \cap \mathbb{Q}\Big].$$

Sean $r_1, r_2, \dots$ una enumeración del conjunto E tal que $r_1 = \mu(A)$ y $r_2 = \mu(B)$.

Veamos que existe una sucesión $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subset A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$.

En efecto, sean $A_1 = A$ y $A_2 = B$ (así, $\mu(A_1) = r_1$ y $\mu(A_2) = r_2$). Como $r_3 \in (r_1, r_2)$, por el Teorema 3.4, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_3 \subset A_2$ y $\mu(A_3) = r_3$.

Supongamos por inducción que ya hemos construido subcontinuos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de X que satisfacen las propiedades señaladas. Por la densidad de E, consideremos el número r_{n+1}, luego, existen $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que $r_i < r_{n+1} < r_j$ y $(r_i, r_j) \cap \{r_1, r_2, \dots, r_n\} = \emptyset$, por el Teorema 3.4, existe $A_{n+1} \in C(X)$ tal que $A_i \subset A_{n+1} \subset A_j$ y $\mu(A_{n+1}) = r_{n+1}$.

Por lo tanto, de forma inductiva, hemos obtenido la sucesión $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(X)$ que deseamos.

Sea $\mathcal{A} = \overline{\{A_1, A_2, \dots\}}_{C(X)}$. Veamos que $\mu_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [r_1, r_2]$ es un homeomorfismo.

Notemos que $\mathcal{A}$ es compacto y $\mu_{|\mathcal{A}}$ es continua. Por la construcción de $\mathcal{A}$, tenemos que $\mu(\mathcal{A}) \subset [r_1, r_2]$. Además, $\mu(\mathcal{A})$ es un compacto que contiene a todos los números racionales del intervalo no degenerado $[r_1, r_2]$. De modo que $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$. Por lo tanto, $\mu_{|\mathcal{A}}$ es suprayectiva.

Ahora, veamos que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es inyectiva. Sean C, $D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$. Luego, existen subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a C y $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a D. Consideremos las respectivas subsucesiones $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$. Como el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito, inferimos que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$ ocurre, para una infinidad de números k. Así, podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $r_{n_k} \leq r_{m_k}$. Por la construcción de $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$, $A_{n_k} \subset A_{m_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 3.9, $C \subset D$. Dado que $C \neq D$, se sigue que $\mu(C) < \mu(D)$. Por lo tanto, $\mu_{|\mathcal{A}}$ es inyectiva. Puesto que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es una biyección continua, $\mathcal{A}$ compacto y $[r_1, r_2]$ es Hausdorff, tenemos que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo.

Consideremos un homeomorfismo estrictamente creciente $\phi : [0,1] \to [r_1, r_2]$ tal que $\phi(0) = r_1$ y $\phi(1) = r_2$. Definamos $\alpha = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1} \circ \phi : [0,1] \to \mathcal{A} \subset C(X)$. Notemos que α es continua, $\alpha(0) = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1}(\phi(0)) = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1}(r_1) = A$, análogamente $\alpha(1) = B$. Además, si s, $t \in [0,1]$ tales que $s < t$, entonces $\phi(s) < \phi(t)$. Así, $\alpha(s) < \alpha(t)$, ya que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es una biyección. Por lo tanto, $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado de A a B en $C(X)$. $\square$

3.2. Propiedades Topológicas

El objetivo principal de esta sección es mostrar que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son localmente conexos cuando X es localmente conexo.

Teorema 3.14. *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X. Entonces*

1. *lím inf* $A_n \subset$ *lím sup* A_n,
2. *lím inf* A_n *y lím sup* A_n *son cerrados en* X *y*
3. *lím sup* $A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Es claro que se cumple *1*.

2. Veamos que *lím inf* $A_n = \overline{\textit{lím inf } A_n}$. Sólo basta probar que $\overline{\textit{lím inf } A_n} \subset$ *lím inf* A_n.

Sea $x \in \overline{\textit{lím inf } A_n}$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Luego, (*lím inf* A_n) $\cap U \neq \emptyset$. Así, sea $y \in$ (*lím inf* A_n) $\cap U$. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ tenemos que $A_n \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in$ *lím inf* A_n. En consecuencia tenemos que

$$\overline{\textit{lím inf } A_n} \subset \textit{lím inf } A_n.$$

Concluimos que *lím inf* A_n es cerrado. De forma análoga se prueba que *lím sup* A_n es cerrado.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Puesto que X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que *lím* $x_{n_k} = z$, para algún $z \in X$.

Del Teorema 3.7, se sigue que $z \in$ *lím sup* A_n. Por lo tanto, *lím sup* $A_n \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 3.15. *Si* X *es un continuo, entonces* 2^X *es completo.*

Demostración. Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en 2^X y $A =$ *lím sup* A_n.

Por el Teorema 3.14, tenemos que $A \in 2^X$. Veamos que A_n converge a A con la métrica de Hausdorff. Por el Teorema 3.8, basta probar que *lím inf* $A_n = A =$ *lím sup* A_n.

Como *lím sup* $A_n = A$ y *lím inf* $A_n \subset$ *lím sup* A_n por el Teorema 3.14, resta probar que $A \subset$ *lím inf* A_n.

Sean $x \in$ *lím sup* A_n y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un subconjunto J infinito de $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \in J$ tenemos que $A_n \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$.

Por otro lado, como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en 2^X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n, m \geq N$.

Fijemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geq N$ y $M \in J$. Ahora, sea $n \geq N$, luego,

$$H(A_n, A_M) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ y } A_M \cap B(x, \tfrac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset.$$

Por el Teorema 2.10, tenemos que $A_M \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$. Ahora, fijemos un punto $y \in A_M \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Puesto que $A_M \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, existe $z \in A_n$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tenemos que $z \in B(x, \varepsilon)$ y como $z \in A_n$, se sigue que $z \in A_n \cap B(x, \varepsilon)$.

Por lo tanto, $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Así, $x \in$ *lím inf* A_n. Con esto concluimos que 2^X es completo. $\square$

Un espacio métrico (X, d) es *totalmente acotado* o precompacto, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Teorema 3.16. *Si X es un continuo, entonces 2^X es totalmente acotado.*

Demostración. Fijemos un continuo X y sea $\varepsilon > 0$. Como X es compacto, es claro que X es totalmente acotado. Entonces, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\Big).$$

Así,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B\Big(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\Big)}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sean

$$B_i = \overline{B(x_i, \tfrac{\varepsilon}{4})},\ \mathcal{H} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \text{ y } \mathcal{F}$$

la colección de todos los subconjuntos de $\mathcal{H}$, menos el vacío. Notemos que $\mid \mathcal{F} \mid = 2^n - 1$. Sea $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \ldots, C_{2^n-1}\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ sea $A_i = \bigcup C_i$. Observemos que para cada $i = \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, se tiene que A_i es unión finita de cerrados. Así, $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n-1} \in 2^X$. Veamos que $2^X = \bigcup_{i=1}^{2^n-1} \mathbf{B}(A_i, \varepsilon)$. Sea $A \in 2^X$, luego $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Pongamos $J = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : B_i \cap A \neq \emptyset\}$, se sigue que $\{B_i : i \in J\} \in \mathcal{F}$. De manera que existe $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $\{B_i : i \in J\} = C_k$. Consideremos el respectivo $A_k = \bigcup C_k$. Como $A_k = \bigcup C_k = \bigcup_{i \in J} B_i$ y $A \subset \bigcup_{i \in J} B_i = A_k$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A_k)$.

Por otro lado, si $x \in A_k$, entonces existe $i \in J$ tal que $x \in B_i$. Puesto que $A \cap B_i \neq \emptyset$, sea $z \in A \cap B_i$, luego, $z \in B_i \subset B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Así, $d(z, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in B_i \subset B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, se sigue que $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $d(x, z) \leq d(x, x_i) + d(x_i, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tenemos que $d(x, z) < \varepsilon$, así, $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $A_k \subset N(\varepsilon, A)$.

Luego, por el Teorema 2.10, se sigue que $H(A, A_k) < \varepsilon$. En resumen existe $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $A \in \mathbf{B}(A_k, \varepsilon)$, es decir, $A \in \bigcup_{i=1}^{2^n-1} \mathbf{B}(A_i, \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$2^X = \bigcup_{i=1}^{2^n-1} \mathbf{B}(A_i, \varepsilon).$$

Esto muestra que 2^X es totalmente acotado. $\square$

Teorema 3.17. *Si X es un continuo, entonces 2^X es compacto.*

Demostración. Sea X un continuo. Por los Teoremas 3.15 y 3.16, tenemos que 2^X es completo y totalmente acotado. Además es conocido que todo espacio métrico completo y totalmente acotado es compacto [8, Teorema 6.3.8, pág. 231]. Por tanto, el hiperespacio 2^X es compacto. $\square$

Teorema 3.18. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es cerrado en 2^X.*

Demostración. Basta probar que $\overline{C(X)} \subset C(X)$. Sea $A \in \overline{C(X)}$. Luego, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que *lím* $A_n = A$. Queremos demostrar que $A \in C(X)$.

Como $A \in 2^X$, sólo resta probar que A es conexo. Supongamos lo contrario, sean G y W conjuntos no vacíos y cerrados en A, notemos que G y W son cerrados en X, tales que $A = G \cup W$ y $G \cap W = \emptyset$. Ahora, como G y W son compactos y $G \cap W = \emptyset$, tenemos que $d(G, W) > 0$. Sea $\varepsilon = d(G, W)$. Puesto que *lím* $A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ para cada $n \geq N$.

Por otra parte, como $A = G \cup W$, por el Teorema 2.2, se sigue que

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A\right) = N\left(\frac{\varepsilon}{2}, G\right) \cup N\left(\frac{\varepsilon}{2}, W\right).$$

Notemos que, por el Teorema 2.2, $N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, W)$ son abiertos en X. Además, por la elección de ε tenemos que

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}, G\right) \cap N\left(\frac{\varepsilon}{2}, W\right) = \emptyset.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Luego, $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_m)$ y $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Así, $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, W)$ y como A_m es conexo se sigue que $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$ o $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, W)$.

Supongamos que $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$. Entonces

$$N\Big(\frac{\varepsilon}{2}, A_m\Big) \subset N(\varepsilon, G).$$

En efecto, si $x \in N(\frac{\varepsilon}{2}, A_m)$, entonces existe $x_m \in A_m$ tal que $d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo supuesto, existe $g \in G$ tal que $d(x_m, g) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $d(x, g) \leq d(x, x_m) + d(x_m, g) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tenemos que $d(x, g) < \varepsilon$. Así, $x \in N(\varepsilon, G)$. Ahora, como $W \subset A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_m) \subset N(\varepsilon, G)$, tenemos que $W \cap N(\varepsilon, G) = W$. Por la elección de ε, se sigue que $W \cap N(\varepsilon, G) = \emptyset$. Por lo tanto, $W = \emptyset$. Análogamente, si $A_m \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, W)$, entonces $G = \emptyset$. Lo cual es una contradiccón ya que $W \neq \emptyset$ y $G \neq \emptyset$. Por lo tanto, A es conexo. De manera que $\overline{C(X)} \subset C(X)$, es decir, $C(X)$ es cerrado en 2^X. $\square$

Teorema 3.19. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea X un continuo. Por el Teorema 3.17, tenemos que 2^X es compacto y por el Teorema 3.18, inferimos que $C(X)$ es cerrado en 2^X. De manera que $C(X)$ es compacto. $\square$

Teorema 3.20. *Si X es un continuo, entonces 2^X es arco conexo.*

Demostración. Sean X un continuo y $A \in 2^X$ tal que $A \neq X$. Por el Teorema 3.12, existe un arco ordenado de A a X en 2^X. De manera que cada elemento de $2^X \setminus \{X\}$, se puede conectar mediante un arco con X. Por lo tanto, 2^X es arco conexo. $\square$

Teorema 3.21. *Si X es un continuo, entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 3.17, tenemos que 2^X es compacto. Además, por el Teorema 3.20, tenemos que 2^X es conexo. Así, 2^X es un continuo. $\square$

Teorema 3.22. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sea $A \in C(X)$ tal que $A \neq X$. Por el Teorema 3.13, existe un arco ordenado de A a X en $C(X)$. De manera que cada elemento de $C(X) \setminus \{X\}$, se puede conectar mediante un arco con X. Por lo tanto, el hiperespacio $C(X)$ es arco conexo. $\square$

Teorema 3.23. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 3.19, tenemos que $C(X)$ es compacto. Además, por el Teorema 3.22, $C(X)$ es conexo. De manera que $C(X)$ es un continuo. $\square$

Teorema 3.24. *Si X es un continuo y $\mathcal{A}$ cerrado en 2^X y no vacío, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ cerrado en 2^X y no vacío. Veamos que $\bigcup \mathcal{A}$ es cerrado en X. Para esto, probamos que

$$\overline{\bigcup \mathcal{A}} \subset \bigcup \mathcal{A}.$$

Sea $x \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$. Luego, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\bigcup \mathcal{A}$ tal que $\lim x_n = x$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Consideremos la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por el Teorema 3.17, inferimos que 2^X es compacto. Como $\mathcal{A}$ es cerrado en 2^X, tenemos que $\mathcal{A}$ es compacto. Así, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim A_{n_k} = A$, para algún $A \in \mathcal{A}$. Tomemos la respectiva subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Además, tenemos que *lím* $x_{n_k} = x$ y $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 3.9, implicamos que $x \in A$. Así, $x \in \bigcup \mathcal{A}$. De manera que $\overline{\bigcup \mathcal{A}} \subset \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A}$ es un cerrado en X y no vacío, ya que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, es decir, $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$. $\square$

Sean X un continuo, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$, denotamos por $\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ al conjunto $\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{\varepsilon > 0 : \mathcal{A} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, \mathcal{B}) \ y \ \mathcal{B} \subset \mathbf{B}(\varepsilon, \mathcal{A})\}$.

Por el Teorema 3.21, tenemos que 2^X es un continuo. Luego, todos los resultados que se han demostrado para 2^X son válidos para 2^{2^X}. Así, 2^{2^X} es un continuo. La *métrica de Hausdorff* para 2^{2^X} la denotamos por $\mathbf{H}$. De manera que, para cada $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$, tenemos que

$$\mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \acute{\imath}nf\, \mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Por el Teorema 3.24 podemos definir la siguiente función unión.

Definición 3.25. *Sea X un continuo. La* ***función unión*** *es la función $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ cuya regla de correspondencia es $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.*

Teorema 3.26. *Sea X un continuo, la función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea X un continuo. Probemos que la función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ es uniformemente continua. Veamos que dados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$, se cumple que $H\big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\big) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, donde $\mathbf{H}$ es la métrica de Hausdorff en 2^{2^X}.

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon \in \mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Así, $\mathcal{A} \subset \mathbf{B_1}(\varepsilon, \mathcal{B})$ *y* $\mathcal{B} \subset \mathbf{B_1}(\varepsilon, \mathcal{A})$. Ahora, si $a \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Así, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.10, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Así, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Luego, $a \in N\big(\varepsilon, \bigcup \mathcal{B}\big)$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \subset N\Big(\varepsilon, \bigcup \mathcal{B}\Big)$.

De manera análoga, tenemos que $\bigcup \mathcal{B} \subset N\Big(\varepsilon, \bigcup \mathcal{A}\Big)$. Por tanto, $\varepsilon \in E\big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\big)$. Luego, $\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset E\big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\big)$, inferimos que *ínf* $E\big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\big) \leq$ *ínf* $\mathbf{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, es decir,

$$H\Big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\Big) \leq \mathbf{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Ahora, sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta = \varepsilon$. Si $\mathbf{H}_H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \delta$, entonces, $H\big(\bigcup \mathcal{A}, \bigcup \mathcal{B}\big) < \varepsilon$. Así, la función unión es uniformemente continua. Por tanto, la función unión es continua. $\square$

Teorema 3.27. *Si X es un continuo y $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de 2^X y $K \in \mathcal{K}$, entonces para cada componente C de $\bigcup \mathcal{K}$, tenemos que $K \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X y $K \in \mathcal{K}$. Supongamos que existe una componente C de $\bigcup \mathcal{K}$ tal que $K \cap C = \emptyset$.

Por el Teorema 3.24, tenemos que $\bigcup \mathcal{K}$ es compacto. Luego, C y K son cerrados en $\bigcup \mathcal{K}$. Además, ningún conexo en $\bigcup \mathcal{K}$ intersecta a K y a C simultáneamente. Aplicando el Teorema 1.11, al espacio $\bigcup \mathcal{K}$ y a los conjuntos K y C, tenemos que existen cerrados A y B en $\bigcup \mathcal{K}$ tal que $\bigcup \mathcal{K} = A \cup B$, con $K \subset A$, $C \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Como A y B son cerrados en $\bigcup \mathcal{K}$ y $\bigcup \mathcal{K}$ es cerrado en X, tenemos que A y B son cerrados en X. Sea

$$\mathcal{K}_0 = \{L \in \mathcal{K} : L \subset A\} \text{ y } \mathcal{K}_1 = \{L \in \mathcal{K} : L \cap B \neq \emptyset\}.$$

Luego, por el Teorema 2.15, $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son cerrados en 2^X. Puesto que $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ tenemos que $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son cerrados en $\mathcal{K}$. Además $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$.

Ahora, como $K \in \mathcal{K}$ y $K \subset A$, tenemos que $K \in \mathcal{K}_0$. Así, $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$. Por otro lado, sea $x \in C$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{K}$, de manera que existe $L \in \mathcal{K}$ tal que $x \in L$. Como $C \subset B$, tenemos que $x \in B$, en consecuencia $x \in L \cap B$, así, $L \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $L \in \mathcal{K}_1$. De aquí, $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$.

En resumen, tenemos que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$, donde $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son cerrados y no vacíos en $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$. Lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{K}$ es un continuo. Esto demuestra el teorema. $\square$

Teorema 3.28. *Si X es un continuo y $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$. Por el Teorema 3.24, tenemos que $\bigcup \mathcal{K}$ es compacto y no vacío en X. Sólo resta probar que $\bigcup \mathcal{K}$ es conexo.

Sean C y D componentes de $\bigcup \mathcal{K}$. Tomemos $K \in \mathcal{K} \cap C(X)$. Por el Teorema 3.27, tenemos que $K \cap C \neq \emptyset$ y $K \cap D \neq \emptyset$. Puesto que $K \in C(X)$, tenemos que $K \subset C$ y $K \subset D$, así, $C \cap D \neq \emptyset$, de manera que $C = D$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{K}$ es conexo. En consecuencia $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X. $\square$

Teorema 3.29. *Sean X un continuo y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subcontinuos no degenerados de X. Tenemos que*

1. *$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ es un conexo de 2^X.*

2. *Si $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap C(X)$ es un conexo de $C(X)$.*

Demostración. Notemos que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ es un subconjunto de 2^X no degenerado y $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$.

Sea $A \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}$, entonces $A \subsetneq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Observemos que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ tiene a lo más n componentes, a saber,

$A_1, A_2, \ldots, A_n$. Como $A \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que cada componente de $\bigcup_{i=1}^n A_i$ intersecta a A. Luego, por el Teorema 3.12, existe un arco ordenado Γ en 2^X de A a $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Notemos que $\Gamma \subset \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$. Por tanto, todo elemento de $A \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \setminus \big\{\bigcup_{i=1}^n A_i\big\}$, se puede unir mediante un arco con $\bigcup_{i=1}^n A_i$. De manera que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es conexo en 2^X. Con esto concluimos *1*.

2. Sea $B \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \cap C(X)$. Luego, $B \cup \big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$.

Si $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \cap C(X) = \big\{\bigcup_{i=1}^n A_i\big\}$, entonces

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \cap C(X) \text{ es conexo.}$$

Si $A \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \setminus \big\{\bigcup_{i=1}^n A_i\big\}$, entonces de manera análoga como en *1* de este teorema, tenemos que

$$A \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \cap C(X)$$

es un conexo de $C(X)$. □

Teorema 3.30. *Sea X un continuo no degenerado. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es localmente conexo,*
2. *2^X es localmente conexo,*
3. *$C(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea X localmente conexo. Veamos que 2^X lo es. Por el Teorema 1.18, basta probar que 2^X es conexo en pequeño. Sea $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ un abierto en 2^X tales que $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 2.20, tenemos que $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_n \textit{ son abiertos en } X,\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología del hiperespacio 2^X. Así, existen $U_1, U_2, \dots, U_n$ abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$.

Luego, por el Teorema 2.19, existen abiertos $V_1, V_2, \dots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sea $a \in A$. Entonces para alguna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $a \in V_j$ ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Consideremos la componente C_a de V_j tal que $a \in C_a$. Así, $A \subset \bigcup \{C_a : a \in A\}$. Dado que X es localmente conexo, por el Teorema 1.17 tenemos que C_a es abierto en X, para cada $a \in A$.

Como X es compacto y A es un cerrado en X, inferimos que A es compacto, luego, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} C_{a_i}$. Observemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, tenemos que $C_{a_i} \subset \overline{C_{a_i}} \subset U_j$, para alguna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $A \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea $x_i \in A \cap V_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea C_{x_i} la componente de V_i tal que $x_i \in C_{x_i}$. Como X es localmente conexo, por el Teorema 1.17, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, inferimos que C_{x_i} es un abierto en X. Notemos que $C_{x_i} \subset \overline{C_{x_i}} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea

$$J_i = \{k \in \{1, 2, \dots, r\} : C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $J_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $W_i = C_{x_i} \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} C_{a_k}\right)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que W_i es conexo y abierto en X, ya que es unión de conexos y abiertos en X. De manera que $\langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle$ es abierto en 2^X, y $A \in \langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle$.

Además, $W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$, para cada $i \in$

$\{1, 2, \ldots, n\}$. Luego,

$$A \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle \subset \langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n}\rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle.$$

Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la componente C_{x_i}tiene más de un punto. En efecto, si existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $x \in X$ tal que $C_{x_l} = \{x\}$, entonces C_{x_l} es abierto y cerrado en X. De manera que $C_{x_l} = X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo no degenerado de X. Luego, por el Teorema 3.29, inferimos que $\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n}\rangle$ es un conexo tal que $A \in int(\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n}\rangle) \subset \mathcal{U}$. Esto prueba que 2^X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.18, se sigue que 2^X es localmente conexo.

De manera análoga se prueba que si X es localmente conexo, entonces $C(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supongamos que 2^X es localmente conexo, veamos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U un abierto en X tal que $p \in U$. Se sigue que $\{p\} \in \langle U\rangle$. Notemos que $\langle U\rangle$ es abierto en 2^X. Consideremos un abierto $\mathcal{W}$ en 2^X tal que $p \in \mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \langle U\rangle$. Como 2^X es localmente conexo, existe un conexo y abierto $\mathcal{V}$ en 2^X tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Por el Teorema 2.20, existen abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{V}$. Luego, por el Teorema 2.19, existen abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en X tales que

$$\{p\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Así, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. Como $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U\rangle$, se sigue que $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \subset \bigcup \overline{\mathcal{V}} \subset U$. Dado que $\{p\} \in \overline{\mathcal{V}} \cap C(X)$, tenemos que $\overline{\mathcal{V}} \cap C(X) \neq \emptyset$. Como $\overline{\mathcal{V}}$ es un subcontinuo de 2^X, por el Teorema 3.28, tenemos que $\bigcup \overline{\mathcal{V}}$ es un conexo de X. Sea $V = \bigcup \overline{\mathcal{V}}$, por lo tanto, $p \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subset V \subset U$. Como $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ es abierto en X, concluimos que $p \in int(V) \subset V \subset U$. Así, X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.18, tenemos que X es localmente conexo.

De manera similar de demuestra que si $C(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo. □

3.3. Funciones Inducidas

Definición 3.31. *Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Denotamos por $2^f : 2^X \to 2^Y$ y por $C(f) : C(X) \to C(Y)$ a las **funciones inducidas** definidas, respectivamente, para cada $A \in 2^X$ por*

$$2^f(A) = f(A),$$

$$C(f)(A) = f(A).$$

Teorema 3.32. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, $U \subset Y$ y $V \subset Y$. Consideremos las funciones inducidas $2^f : 2^X \to 2^Y$ y $C(f) : C(X) \to C(Y)$. Tenemos que*

1. $(2^f)^{-1}(\Gamma(U)) = \Gamma(f^{-1}(U))$,
2. $(2^f)^{-1}(\Lambda(U)) = \Lambda(f^{-1}(U))$,
3. $(C(f))^{-1}(\Gamma(V) \cap C(Y)) = \Gamma(f^{-1}(V)) \cap C(X)$,
4. $(C(f))^{-1}(\Lambda(V) \cap C(Y)) = \Lambda(f^{-1}(V)) \cap C(X)$.

Demostración. 1. Si $A \in (2^f)^{-1}(\Gamma(U))$, entonces $2^f(A) \in \Gamma(U)$, es decir, $f(A) \in \Gamma(U)$. Luego, $f(A) \subset U$, así, $f^{-1}(f(A)) \subset$

$f^{-1}(U)$, como $A \subset f^{-1}(f(A))$ tenemos que $A \subset f^{-1}(U)$. De manera que $A \in \Gamma(f^{-1}(U))$. Así,

$$(2^f)^{-1}(\Gamma(U)) \subset \Gamma(f^{-1}(U)). \tag{3.3.1}$$

Sea $A \in \Gamma(f^{-1}(U))$, luego, $A \subset f^{-1}(U)$, entonces $f(A) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U$, así, $f(A) \subset U$. Como $f(A) = 2^f(A)$, tenemos que $2^f(A) \in \Gamma(U)$, y así $A \in (2^f)^{-1}(\Gamma(U))$. Luego,

$$\Gamma(f^{-1}(U)) \subset (2^f)^{-1}(\Gamma(U)). \tag{3.3.2}$$

Por (3.3.1) y (3.3.2) concluimos que

$$(2^f)^{-1}(\Gamma(U)) = \Gamma(f^{-1}(U)).$$

2. Si $A \in (2^f)^{-1}(\Lambda(U))$, entonces $2^f(A) = f(A) \in \Lambda(U)$. Así, $f(A) \cap U \neq \emptyset$, sea $z \in f(A) \cap U$. Entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$, luego, $x \in f^{-1}(z)$. Como $f^{-1}(z) \subset f^{-1}(U)$, $x \in f^{-1}(U)$, luego, $x \in A \cap f^{-1}(U)$. Así, $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, de manera que $A \in \Lambda(f^{-1}(U))$. Por tanto,

$$(2^f)^{-1}(\Lambda(U)) \subset \Lambda(f^{-1}(U)). \tag{3.3.3}$$

Ahora sea $B \in \Lambda(f^{-1}(U))$. Entonces $B \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Así, $f(B) \cap U \neq \emptyset$. Luego, $2^f(B) = f(B) \in \Lambda(U)$. En consecuencia, $B \in (2^f)^{-1}(\Lambda(U))$. Por tanto,

$$\Lambda(f^{-1}(U)) \subset (2^f)^{-1}(\Lambda(U)). \tag{3.3.4}$$

Así, por (3.3.3) y (3.3.4) tenemos que

$$(2^f)^{-1}(\Lambda(U)) = \Lambda(f^{-1}(U)).$$

Las pruebas de *3* y *4* son análogas. $\square$

Teorema 3.33. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces la función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es continua.*

Demostración. Por el Teorema 2.21, $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U$ es abierto en $Y\} \cup \{\Lambda(U) : U$ es abierto en $Y\}$ es subbase para la topología de Vietoris, τ_V, del hiperespacio 2^Y. Para probar que 2^f es continua, basta probar que, para cada abierto U de Y, tenemos que $(2^f)^{-1}(\Gamma(U))$ y $(2^f)^{-1}(\Lambda(U))$ son abiertos en 2^X.

Sea U un abierto en Y. Como f es continua, se sigue que $f^{-1}(U)$ es un abierto en X. Luego, por el Teorema 2.15, tenemos que $\Gamma(f^{-1}(U))$ y $\Lambda(f^{-1}(U))$ son abiertos en 2^X. Por el Teorema 3.32, tenemos que

$$(2^f)^{-1}(\Gamma(U)) = \Gamma(f^{-1}(U)) \text{ y } (2^f)^{-1}(\Lambda(U)) = \Lambda(f^{-1}(U)).$$

De manera que $(2^f)^{-1}(\Gamma(U))$ y $(2^f)^{-1}(\Lambda(U))$ son abiertos en 2^X. $\square$

Teorema 3.34. *Una función $f : X \to Y$ continua entre continuos es inyectiva si, y sólo si, la función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que f es inyectiva. Sean A y $B \in 2^X$ tales que $2^f(A) = 2^f(B)$. Entonces $f(A) = f(B)$. Como f es inyectiva, se sigue que $A = B$. Por tanto, 2^f es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que 2^f es inyectiva. Sean x y $y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $\{f(x)\} = \{f(y)\}$, así, $f(\{x\}) = f(\{y\})$, es decir, $2^f(\{x\}) = 2^f(\{y\})$. Como 2^f es inyectiva, tenemos que $\{x\} = \{y\}$. Esto es, $x = y$. Por tanto, f es inyectiva. $\square$

Teorema 3.35. *Una función $f : X \to Y$ continua entre continuos es suprayectiva si, y sólo si, la función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es suprayectiva.*

Demostración. Supongamos que f es suprayectiva. Tomemos $B \in 2^Y$, así, $f(f^{-1}(B)) = B$. Sea $A = f^{-1}(B)$, luego, $A \in 2^X$ y $2^f(A) = f(A) = B$. Por tanto, 2^f es suprayectiva.

Ahora, supongamos que 2^f es suprayectiva. Sea $y \in Y$, luego, $\{y\} \in 2^Y$. Como 2^f es suprayectiva, existe $A \in 2^X$ tal que $2^f(A) = f(A) = \{y\}$. Existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por tanto, f es suprayectiva. $\square$

Considerando la función restringida de 2^f a $C(X)$, tenemos que $2^f| \, C(X) : C(X) \to C(Y)$, y la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$, son iguales, es decir, $2^f| \, C(X) = C(f)$. De esto obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.36. *Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es continua.*

La demostración del siguente resultado es similar a la prueba que se da en el Teorema 3.34.

Teorema 3.37. *Una $f : X \to Y$ función continua entre continuos es inyectiva si, y sólo si, la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es inyectiva.*

Teorema 3.38. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es suprayectiva, entonces f es suprayectiva.*

Demostración. Supongamos que $C(f)$ es suprayectiva. Sea $y \in Y$, luego, $\{y\} \in C(Y)$. Como $C(f)$ es suprayectiva, existe $A \in$

$C(X)$ tal que $C(f)(A) = f(A) = \{y\}$. Además, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Esto prueba que f es suprayectiva. $\square$

Observación 3.39. *La función inducida $C(f)$ no siempre es suprayectiva, aunque la función f lo sea.*

Ejemplo 3.40. *Sean $X = [0,1]$, $Y = S^1$, donde S^1 es la circunferencia unitaria y $f : X \to Y$ la función definida por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$, para cada $t \in [0,1]$. Entonces f es continua, suprayectiva y $C(f)$ no es suprayectiva.*

Es claro que f es continua y suprayectiva. Veamos que la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ no es suprayectiva.

Sean $A = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ y $f(A) = B$. Notemos que $B \in C(Y)$. Además, para cada $H \in C(X)$, $f(H) \neq B$. Por lo tanto, $C(f) : C(X) \to C(Y)$ no es suprayectiva.

Teorema 3.41. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Las siguentes condiciones son equivalentes.*

1. *$f : X \to Y$ es un homeomorfismo,*
2. *$C(f) : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo,*
3. *$2^f : 2^X \to 2^Y$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo. Luego, por los Teoremas 3.34 y 3.35, tenemos que 2^f es biyectiva. Además, por el Teorema 3.33, inferimos que 2^f es continua. Por otra parte, por el Teorema 3.21, tenemos que 2^X y 2^Y son continuos. Se sigue que 2^f es un homeomorfismo.

Ahora, supongamos que 2^f es un homeomorfismo y probemos que $C(f)$ es un homeomorfismo. Como $2^f|_{C(X)} = C(f)$, tenemos que $C(f)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, así basta ver que $C(f)$ es suprayectiva. Para esto, sea $B \in C(Y)$. Como 2^f

es un homeomorfismo y $B \in 2^Y$, existe $A \in 2^X$ tal que $2^f(A) = f(A) = B$. Supongamos que A no es conexo. Entonces existen G y K cerrados en X, no vacíos y ajenos tales que $A = G \cup K$. Por los Teoremas 3.34 y 3.35, tenemos que f es biyectiva. Además, $B = f(A) = f(G \cup K) = f(G) \cup f(K)$, luego, $f(G)$ y $f(K)$ son no vacíos y cerrados en Y. De manera que B no es conexo, lo cual es una contradicción. Así, $A \in C(X)$. Además, $C(f)(A) = f(A) = B$. Luego, $C(f)$ es suprayectiva. Por lo tanto, $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo.

Finalmente, supongamos que $C(f)$ es un homeomorfismo. Mostraremos que f es un homeomorfismo. Por los Teoremas 3.37 y 3.38, tenemos que f es biyectiva y continua. Como X y Y son continuos, si sigue que f es un homeomorfismo. $\square$

El libro indicado por [6] es el libro básico del buen continuero, en el cual el lector encontrará más información alrededor de la *Teoría de los Continuos* y el libro [4] es muy recomendable para iniciar una larga vida en el maravilloso mundo de la *Teoría de los Hiperespacios de los Continuos.*

Bibliografía

[1] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[3] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.

[4] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.

[5] F. B. Mendoza, *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[7] G. Salicrup, *Introducción a la Topología,* Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[8] V. Tkachuk, *Curso Básico de Topología General,* Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), ISBN:970-654-362-7, 1999.

[9] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 1998.

Índice alfabético