BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL TEMA DE VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Tesis para obtener el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
VERÓNICA AGUILAR MENDIETA

DIRECTOR: ERIC FLORES MEDRANO

MAYO 2019

A Dios, por ser el sustento de mi vida.

A mis padres, por apoyarme incondicionalmente en mis decisiones.

A mis hermanas, que me han acompañado con cariño y ternura durante todo este proceso.

A mi esposo, que ha sido una pieza fundamental para el logro de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco, primeramente a Dios, por convertirse en la razón de mi vida y poner en mi camino a todas las personas que me han ayudado e impulsado para llegar a la culminación de esta etapa.

A mis padres, Leonardo Aguilar García y Sofía Mendieta Rivera por ser el sustento de mi crecimiento personal y profesional, a quienes debo lo que soy y lo que tengo.

Gracias a mi padre, porque a pesar de que muchas veces no estuvo de acuerdo con mis decisiones, siempre me apoyo incondicionalmente para lograr mis metas.

De una forma especial, quiero agradecer a mi mamá, que con su ejemplo, ha hecho de mí una buena persona y se ha encargado de impulsarme de todas las maneras posibles para alcanzar mis sueños; por entregar su vida por mí, por consentirme y reprenderme cuando ha sido necesario; por acompañarme con todo su amor y ternura durante todo el trayecto de mi vida, por darme siempre la libertad de elegir y tener plena confianza en que haré lo correcto, por siempre alentarme a seguir adelante y a no rendirme a pesar de mis equivocaciones.

A mis hermanas Cecilia y Guadalupe, por ser mis confidentes, por su paciencia y tolerancia, por su cariño y comprensión a pesar de las diferencias, por ayudarme en todo lo que he necesitado.

A mi esposo, Rafaí, por acompañarme pacientemente y con mucho amor en este proceso, por apoyarme incondicionalmente para concluir mis proyectos. Pero principalmente, gracias por darme tantas alegrías y regalarme la dicha de tener entre nosotros a nuestra princesa Sinaí.

Agradezco a todos mis amigos y compañeros de vida que siempre han creído en mí y me han ayudado a crecer en mi formación personal y académica.

A todos los que han sido parte de mi formación académica, a los que me han ayudado a despertar el interés para entrar a este maravilloso mundo de las matemáticas y a los que me han motivado, con su ejemplo, a seguir el camino de la enseñanza.

En particular, quiero expresar un sincero agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Eric Flores Medrano, por aceptarme como su alumna e integrarme a su proyecto, por el tiempo dedicado a orientar mi trabajo y compartir sus conocimientos, pero especialmente, por su profesionalismo y gran calidad humana.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A partir de nuestra amplia experiencia como estudiantes y una corta trayectoria en la práctica docente, en la enseñanza de las matemáticas, hemos sido testigos de la deficiencia que existe en el desempeño matemático de los alumnos al enfrentarse al aprendizaje del cálculo, razón por la cual, se ha convertido en un objeto de estudio muy concurrido.

Diversos estudios (e.g. García, Vázquez y Hinojosa 2004) han tratado de encontrar y dar una explicación a las dificultades con las que se encuentra el estudiante al enfrentarse al aprendizaje de diversos temas de cálculo.

Entre dichos temas, se encuentra el de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución a traves de la integral. A partir de algunos trabajos, se ha encontrado que entre los obstáculos a los que se enfrentan los alumnos, en el aprendizaje de éste tema, es que no han alcanzado una comprensión satisfactoria del concepto de función y sus diferentes significados (*imagen, altura, segunda coordenada de un par ordenado, expresión algebraica de una función*), además de las limitaciones que presentan para generar mentalmente figuras en tercera dimensión (Andrade y Montecino, 2013); estas últimas, derivadas de las dificultades en el trabajo y representación de lo tridimensional, atribuidas a que durante la enseñanza escolar no se formaliza la tridimensionalidad, lo cual obstaculiza la comprensión de ésta (Andrade y Montecino, 2011).

Pensamos que la práctica común de la enseñanza tradicional, donde el maestro no se ocupa de la creación del sentido de los conocimientos y sólo presenta directamente el saber como objeto cultural, dejando que el alumno se lo apropie como pueda, nos ha traído grandes dificultades al hacer entrar a los estudiantes en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento; pues en particular, la enseñanza tradicional de las matemáticas tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica (García, Vázquez y Hinojosa 2004).

Dicha situación, que deja de lado la construcción de los conocimientos, contradice la noción de aprendizaje que se ha venido manejando como resultado de las necesidades de enseñanza, asumiendo que "el alumno sólo puede aprender produciendo, haciendo funcionar y evolucionar los (sus) conocimientos" (Brousseau, 2007, p. 87). Por esta razón concebimos el aprendizaje como el proceso por el cual se modifican los conocimientos, y bajo las condiciones de que el alumno debe construir el conocimiento por sí mismo y de que el maestro sólo debe provocar este proceso.

Así, coincidimos con Brousseau (1988) en que el trabajo del docente consiste, pues, en *proporcionar al alumno una situación de aprendizaje* para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro.

Motivados en esto y con la seguridad de que la enseñanza exige la existencia de momentos de aprendizaje (dentro de una situación didáctica) en los cuales el alumno se encuentre sólo frente a la resolución de una situación, es decir, de forma que el maestro no intervenga en lo concerniente al saber que se pone en juego (situaciones a-didácticas), se realizó el diseño de una situación didáctica para provocar en el alumno las adaptaciones deseadas, con una *elección acertada* de los problemas que se proponen respecto al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Pues nos interesa ver lo que podemos lograr al aplicar situaciones didácticas diseñadas cuidadosamente que generen momentos de aprendizaje a partir de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

Con la aplicación de la situación didáctica diseñada para el tema *cálculo de volúmenes de sólidos de revolución*, buscamos impactar positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, de forma que a partir de ésta, se generen momentos significativos de aprendizaje, donde los problemas elegidos logren hacerlos actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismos, y así, llegar a una construcción autónoma de los conocimientos esperados.

Una vez obtenidos los resultados, pretendemos analizarlos, para que posteriormente determinemos cómo influyó la aplicación de la situación didáctica diseñada en el desempeño de los estudiantes, y qué tan factible sería utilizarla como una herramienta para lograr un mejor aprendizaje de los conocimientos implicados en el tema a trabajar.

A partir de esto, podemos decir que nuestro *objetivo general* es determinar cómo repercute la gestión de la situación didáctica diseñada, en el proceso de aprendizaje de los alumnos y validar su efectividad para lograr un mejor aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Dicho objetivo pretendemos alcanzarlo a partir de los siguientes *objetivos específicos*:

- Analizar el comportamiento matemático de los estudiantes durante la realización de las actividades propuestas en la situación didáctica diseñada.

- Establecer cómo influyen (intervienen) los elementos de la TSD en los resultados de la situación didáctica aplicada.

En consecuencia, surge la siguiente *pregunta de investigación*:

¿Cómo incide la aplicación de una situación didáctica en el desempeño matemático de los estudiantes para calcular volúmenes de sólidos de revolución?

Para dar respuesta a dicha pregunta, se realizó el diseño de una situación didáctica en el seno del proyecto "Diseño y análisis de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para Cálculo en Bachillerato". En la elaboración de la situación didáctica, participaron los miembros del grupo de investigación de dicho proyecto, quienes la evaluaron y aprobaron una vez que ésta había sido terminada.

La situación didáctica fue pensada cuidadosamente con el fin de propiciar momentos significativos de aprendizaje, durante los cuales, se diera una construcción autónoma de los conocimientos esperados por parte de los alumnos. El diseño de la situación fue aplicado en un grupo de tercer año de bachillerato, y la ejecución estuvo a cargo de una profesora integrante del grupo de investigación.

Una vez aplicada la situación didáctica, se procedió a la recolección e interpretación de datos, a los cuales se tuvo acceso a partir de grabaciones de audio y video que se obtuvieron durante las sesiones con los alumnos, además de su producción escrita. Posteriormente, se realizó un análisis cualitativo de la información, el cual estuvo basado en elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau.

A partir de dicho análisis, se establecieron las conclusiones que nos ayudarían a dar una respuesta concreta a la pregunta de investigación planteada. Dichas conclusiones fueron determinadas a partir de las observaciones que destacaron por cada actividad que conforma la situación didáctica, posteriormente se presentaron algunas conclusiones con respecto a qué tan factible nos parece la aplicación de la situación didáctica diseñada, y finalmente se describen algunas apreciaciones generales que nos parecieron relevantes para ser resaltadas.

El desarrollo de este trabajo de investigación se presenta en cuatro capítulos. El *capítulo I* corresponde al marco teórico, donde se describen y ejemplifican algunos elementos de la TSD en la que basamos nuestro estudio.

En el *capítulo II* se presentan algunos conceptos metodológicos involucrados en nuestro trabajo de investigación y posteriormente se describe la metodología empleada. A continuación se describe el diseño de la situación didáctica que se aplicó y la relación que existe entre esta y los elementos de la TSD. Finalmente abordamos algunas especificaciones acerca de la forma en que se aplicó la situación didáctica y el uso de las técnicas e instrumentos para recolectar la información.

El *capítulo III* se enfoca en el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la situación didáctica diseñada para la elaboración de este trabajo. Dicho análisis consiste, primeramente, en dar una descripción de las situaciones que se presentaron durante la ejecución de la situación didáctica, posteriormente, se analizan e interpretan elementos de la TSD que se encontraron durante el proceso de aprendizaje que tuvieron los alumnos, además de algunos acontecimientos que nos pareció importante destacar. Finalmente se dan posibles explicaciones de lo acontecido.

Y por último, en el *capítulo IV*, se encuentran las conclusiones que surgieron a partir del análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la situación didáctica diseñada.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

El enfoque que abordamos en este trabajo es el de *la Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD), principal contribución teórica de Guy Brousseau (e.g. Brousseau, 1986), desarrollada dentro de la disciplina de la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa.

Esta teoría de la enseñanza es un medio para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos y, más aún, para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos (Brousseau, 1999, p. 11).

Se ha elegido este enfoque debido a que nuestro principal objeto de estudio son las circunstancias que presiden la difusión y adquisición de los conocimientos que se pretenden transmitir al aplicar una situación didáctica. La aplicación se hará con la finalidad de analizar los *efectos* de esas circunstancias en el comportamiento matemático de los alumnos, basándonos en sus reacciones y respuestas hacia las actividades que conforman la situación didáctica.

En este capítulo presentamos las nociones fundamentales y definimos los conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas involucrados en el desarrollo de este estudio.

El contenido del texto se divide en ocho secciones, en las cuales describiremos y, en algunos casos, ejemplificaremos los siguientes constructos: *Situación didáctica, Situación a-didáctica, Situación fundamental, Tipos de situaciones didácticas, Contrato didáctico, Efectos del contrato didáctico, Componentes esenciales del contrato didáctico* y finalmente se presenta un breve apartado *A manera de resumen*, donde resaltamos algunos elementos que sintetizan el contenido del capítulo.

1.1. Situación didáctica

Es importante mencionar que para llegar al concepto de *situación didáctica*, partimos de la siguiente afirmación:

> "el alumno aprende adaptándose a un *medio* que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno que se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje" (Brousseau, 2007, p. 30, el resaltado es nuestro).

Cabe aclarar que en la TSD se concibe al *medio* como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto, pues, como se ha mencionado antes, este medio es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios. Éste, comprende todos los elementos que componen el entorno en el que se encuentra inmerso el alumno, entre ellos: las actividades que se utilizan, los contenidos temáticos, el método de enseñanza, el docente, el plan de estudios, las experiencias previas de los alumnos así como su contexto intelectual, cultural y social, además de todos los medios materiales que se utilicen (dispositivos, ejercicios, textos, material didáctico, etcétera).

Ahora bien, veamos que el sentido ordinario de la palabra *situación* se enfoca a una descripción del conjunto de condiciones que enmarcan una acción, y al ser nuestro interés el estudio de las circunstancias que influyen en la difusión y la adquisición de los conocimientos, notemos que dicha concepción ordinaria no está deslindada de la definición dada por Brousseau (1999):

> "Hemos llamado ´situación´ a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el

> recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas ´situaciones´ requieren de la adquisición 'anterior' de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso ´genético´." (p. 10).

Al ser una situación un *modelo* de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento, entendemos que se trata de un esquema teórico que describe el proceso de transmisión-adquisición de un conocimiento a través de las interacciones generadas entre el sujeto y el medio, que sirve como una pauta para ser reproducido o aplicado. Pero, evidentemente, este esquema no podría existir por sí mismo, tiene que ser diseñado con anticipación, adaptándolo a las necesidades del sujeto. Es por esto que pensamos también que "la situación es, entonces, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta" (Brousseau, 2007, p. 17).

Ahora bien, considerando que el concepto de situación didáctica ha tenido cierta evolución al transcurrir del tiempo, tomaremos en cuenta sus diferentes acepciones para construir una propia. Se dice que "en los inicios de los 70 las *situaciones didácticas* eran las situaciones que sirven para enseñar sin que se considere el rol del profesor. (…) [Más adelante fueron identificadas como] *situaciones matemáticas* aquellas que provocan una actividad matemática en el alumno sin intervención de profesor. (…) [Reservando] el término de *situaciones didácticas* para los modelos que describen la actividad del profesor y también la del alumno. (…) [En una segunda acepción, se concibe como] todo el entorno del alumno, incluidos el docente y el sistema educativo" (Brousseau, 2007, pp. 17-18). Además, en un nueva opinión se tiene que "la **situación didáctica** es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado" (Panizza, 2003, p. 4) por lo que se entiende que se trata de una "situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo" (Ídem, p. 5). Es así como la situación elegida por el docente lo involucra directamente a él mismo con el sistema de interacciones del alumno y su medio, es decir, como parte de la evolución del término, el docente se vuelve parte del entorno y su rol es de suma importancia, a diferencia de la concepción que se tenía en los años 70.

Por tanto, nosotros entendemos por *situación didáctica* un modelo que describe la actividad del docente y del alumno, construido (diseñado) intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Dicho modelo describe también el entorno del alumno en términos de las interacciones entre ellos con su medio y con el docente.

1.2. Situación a-didáctica

Las concepciones actuales de la enseñanza exigen la existencia de momentos de aprendizaje en los cuales el alumno se encuentre sólo frente a la resolución de una situación, lo cual significa que el maestro no debería intervenir en cuestiones relativas al proceso de adaptación del sujeto con su medio. Esto se basa en la hipótesis de que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación. El reconocimiento de la necesidad de estos momentos de aprendizaje da lugar a la noción de **situación a-didáctica** o también llamada fase a-didáctica (dentro de una situación didáctica).

Brousseau (1986) lo define de la siguiente manera:

> "El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego" (citado en Panizza, 2003, p. 4).

Entonces, una de las características principales de una situación a-didáctica es que para poder ser dominada por parte del alumno se requiere hacer uso del conocimiento en juego. Esto significa que es *necesario*, y no solamente posible, utilizar dicho conocimiento, pues no se descarta la existencia de otros procedimientos o conocimientos que ayuden a la resolución de dicha situación, pero cabe la posibilidad de que dichos procedimientos puedan ser bloqueados desde la situación, buscando hacer evolucionar los procesos que utilizan los alumnos. Esto significa que algunos elementos de la situación, como la disponibilidad de medios, pueden ser manipulados por el docente de forma que los alumnos tiendan a modificar las estrategias posibles de resolución y con ello el conocimiento a construir.

Por otra parte, este tipo de situación conlleva una consecuencia a las decisiones (buenas o malas) que toma el alumno sin intervención del maestro. Esta consecuencia, más que a un castigo por una equivocación, se refiere a que la misma situación debe ofrecer información suficiente sobre su producción para que el alumno sea capaz de juzgar los resultados de su acción y que esto le dé la posibilidad de intentar nuevas resoluciones, para que, por sí mismo establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene.

Finalmente, la no intervención del docente en una situación a-didáctica no se refiere al silencio total del maestro, sino a cuidar lo que dice, pues sus intervenciones solo deben motivar la resolución de la situación y estar pensadas para ubicar y mantener a los alumnos en la tarea, y no para conducirlo (de una manera forzada) para llegar (tal vez hasta de una forma inconsciente) a la respuesta esperada por el docente, pues notemos que la intención didáctica en esta situación es que el alumno descubra o construya el conocimiento en cuestión por él mismo. Así es como el docente se limita a diseñar (o elegir) y gestionar las situaciones sin intervenir sobre el proceso cognitivo del alumno.

En esta situación,

> "La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los ´problemas´ que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer." (Brousseau, 1986, p. 14).

De esta manera, asumimos que las situaciones a-didácticas son aquellas que ofrecen al alumno las condiciones necesarias para logre la construcción autónoma de los conocimientos, sin intervención del profesor en lo concerniente al saber que se pone en juego. Dentro de esas condiciones va incluida la información suficiente que debe dar la situación al alumno sobre su producción para que él sea capaz de juzgar los resultados de sus acciones, y esto a la vez, los posibilite a intentar nuevas estrategias de resolución.

1.3. Situación fundamental

Brousseau (1988) postula que para todo conocimiento matemático es posible identificar una situación fundamental, la cual representa la problemática que permite la emergencia de dicho conocimiento. Así es como el conocimiento en juego se convierte en la estrategia óptima para resolver el problema involucrado (Sadovsky, 2005, pp. 2, 8).

Un ejemplo común que se utiliza para ilustrar esta noción, es la situación fundamental de aprendizaje del conteo (o problemática de aprendizaje del conteo), descrito por Brousseau (2007), quien asocia el conteo con la comparación entre cardinalidades de dos conjuntos, lo cual se convirtió en la mejor forma de resolver dicha situación fundamental, es decir, en la estrategia óptima de resolución. Él supone que para cada conocimiento matemático existe *al menos una situación* que lo caracteriza y presenta algunas situaciones asociadas al ejemplo del conteo (pp. 31-40).

Nosotros nos concentraremos sólo en dos de esas situaciones. En la primera, el conteo es concebido como una simple memorización de los nombres de los números, es decir, el poder recitarlos (casi) en orden. Esta concepción es designada muchas veces en entornos familiares, pues en la actualidad, los padres ejercen cierta presión en los niños para hacerlos contar precozmente, y bajo la influencia de dicha insistencia, algunos niños *cuentan* automáticamente desde el momento en que escuchan la palabra número, lo cual trae como consecuencia que traten de resolver otro tipo de problemas contando mecánicamente sin reflexionar sobre la pregunta que se les plantea. Sin embargo, la situación fundamental nos hace ver que dicha actividad no se corresponde con el conteo.

Es segunda instancia, la situación fundamental del conteo consiste en poder comunicar el aprendizaje del conteo a un niño que no sabe contar (saber cuántos hay), pero que debe aprender a resolver la situación sin que el profesor intervenga indicando cuál es el conocimiento a utilizar, aunque usualmente, en la realización de esta tarea no sólo interviene el docente, pues como se ha mencionado la intervención de la familia, en este proceso de aprendizaje del niño, es de gran importancia.

Dicha situación fundamental puede ser empleada para producir momentos didácticos, por ejemplo, Brousseau propone el uso de pinceles y vasitos en una consigna adaptada a niños de entre cinco y seis años de edad. Ésta consiste en proporcionar al niño cierta cantidad de vasitos con pinturas y pinceles, la tarea es colocar en los vasos uno y solo un pincel de forma que no quede algún vasito sin pincel ni pincel sin vasito; en caso de equivocarse el niño debe recoger todos los pinceles y comenzar nuevamente. Esto se hace asumiendo que el niño sabrá contar cuando pueda realizar satisfactoriamente la actividad, aun cuando sea grande la cantidad de vasitos. En otras palabras, el niño sabrá cuántos hay, cuando sea capaz de solicitar a alguien la cantidad de pinceles necesarios verificando la operación y también pueda suministrar una cantidad solicitada.

Las situaciones que se acaban de presentar son prácticas habituales de conteo, ambas se obtienen a partir de la misma situación fundamental, aunque se presentan concebidas de diferente manera, pues a la primera se le llama *conteo popular* ya que esta consiste en la repetición de una serie de palabras por parte del niño bajo el control de un adulto, actividad con la cual el niño no adquiere un conocimiento trascendente, ya que contar va más allá de recitar de memoria la sucesión de números naturales, se trata de adquirir la capacidad de asociar ordenadamente a cada elemento de un conjunto de objetos a un número natural, de manera que esta asociación sea uno a uno, a lo que se llama *conteo escolar clásico*, pues se trata de un conocimiento más evolucionado.

Así, asumimos que la situación fundamental de un conocimiento consiste en una problemática que funciona como acceso para generar el conocimiento en cuestión y que este se convierta en la estrategia óptima de resolución.

1.4. Tipos de situaciones didácticas

Las situaciones didácticas pueden clasificarse en tres clases: situación de acción, situación de formulación y situación de validación; las cuales surgen a partir de las relaciones entre el funcionamiento de los conocimientos del alumno y las características de las situaciones. Pues cabe mencionar que "Desde la perspectiva de la teoría de las situaciones, los alumnos se convierten en los reveladores de las características de las situaciones a las que reaccionan" (Brousseau, 2007, p. 24) a diferencia de las aproximaciones de la psicología donde las situaciones suelen estudiarse como dispositivo para revelar los conocimientos del alumno.

1.4.1. Situación de acción

En términos de Brousseau (2007) para el sujeto, *actuar* consiste en elegir directamente los estados del medio en función de sus propias motivaciones (p. 24). Nosotros asociamos esto con el hecho de que, si existe cierta regularidad en los comportamientos del medio, perceptibles para el sujeto, éste puede aprovecharlas relacionando algunas informaciones (que obtiene de su interacción con dicho medio) con sus decisiones, lo cual puede ayudarle a anticipar sus reacciones o sus respuestas futuras.

Ahora bien, la *situación de acción* se caracteriza por la acción que ejecuta el sujeto sobre su medio durante el proceso de adaptación. Es un momento en el cual los alumnos interaccionan con el medio tomando decisiones bajo un modelo implícito, es decir, bajo un conjunto de relaciones o reglas sobre las cuales el alumno toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas y *a posteriori* de formularlas.

Así, asumimos que la sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a *aprenderse* un método de resolución de su problema.

1.4.2. Situación de formulación

Según Bateson, "la formulación de un conocimiento implícito cambia a la vez sus posibilidades de tratamiento, aprendizaje y adquisición" (citado por Brousseau 2007, p. 25). De ahí la importancia de este tipo de situación, pues a partir de la formulación de los conocimientos implícitos, los alumnos pueden ampliar su percepción sobre el conocimiento en juego y descubrir elementos que no alcanzaría a apreciar en ausencia dicha formulación.

Es importante aclarar que la formulación de un conocimiento corresponde a la capacidad del sujeto para retomarlo, lo cual implica reconocerlo, descomponerlo y reformularlo en un nuevo sistema lingüístico.

En esta situación el medio involucra (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicarle una información. Esto significa que debe haber dos interlocutores en comunicación, de manera que la única forma de resolver la situación sea obteniendo del otro la formulación de los conocimientos en cuestión, donde el emisor más que un informante será un proponente y el receptor se convertirá en un oponente, esto, bajo el supuesto de que poseen las informaciones necesarias para tratar dicha cuestión.

Aquí pueden existir dos momentos, uno que consiste en recoger la información a partir de la observación sobre las reacciones del medio, de manera que su interiorización lleve a un segundo momento, en el cual, a partir de la información recolectada, se desarrollen nuevas estrategias de resolución basadas en la formulación del conocimiento, para posteriormente ser comunicadas.

Por lo anterior, afirmamos que la situación de formulación consiste en dos momentos, el primero donde el alumno recoge información, y el segundo, en el que formula el conocimiento implícito en dicha información y lo utiliza para el desarrollo de técnicas de resolución de un problema determinado.

1.4.3. Situación de validación

Las estrategias desarrolladas por el sujeto en una situación de formulación deben ser comunicadas y sometidas por el otro interlocutor. Esto servirá para asegurar la pertinencia, adecuación y conveniencia de los conocimiento movilizados.

La validación puede verse como el proceso de corrección donde los sujetos involucrados cooperan en busca de la verdad, organizando enunciados que les sirvan como demostraciones, construyendo teorías y vinculando de forma segura un conocimiento a un conjunto de saberes ya establecidos.

En este tipo de situación el sujeto da razones para convencer al otro sobre sus propuestas y acepta razones para cambiar su punto de vista, de esta forma aprende a cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer. El sujeto no solo comunica, aún más, afirma y sostiene su opinión estableciendo la validez de sus propuestas y buscando propiciar puestas a prueba, debates o convenios.

En la situación de validación también puede haber un *enfrentamiento* cuando hay dudas por alguna de las dos partes, y si hay algún desacuerdo, es válido pedir una demostración de lo formulado o exigir que se apliquen las declaraciones hechas en la acción con el medio.

Por lo tanto, la situación de validación consiste en el momento en el cual las estrategias desarrolladas por el sujeto, en una situación de formulación, son comunicadas y sometidas por el otro sujeto involucrado, llegando a una conclusión a traves de un intercambio de ideas donde cada uno argumenta sus propuestas.

1.4.4. Retomando los tipos de situaciones didácticas con un ejemplo

Para ilustrar la idea de los tres tipos de situaciones que se han mencionado anteriormente, se presenta un ejemplo de una situación didáctica tomada de un artículo de investigación titulado *Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación* (Carrillo, 2008) y que fue aplicada en un grupo de cuarto grado de primaria. El tema de la sesión es: *polígonos*.

Para facilitar el análisis de esta situación didáctica, nos dimos a la tarea de asociar un número a la descripción de cada actividad que la conforma, para identificar con claridad cada momento.

La sesión se inicia con la explicación de la maestra acerca del objetivo del trabajo que realizarán: recordar qué es un polígono. Tomando en cuenta que el tema se trabajó un curso anterior, en esta clase se pretende retomar las ideas previas de los alumnos.

1. A continuación, se entrega a cada alumno una ficha (como la que se muestra en la figura 1.1.) con varias figuras dibujadas, de las cuales hay unas que son polígonos y otras que no lo son. Cada alumno individualmente ha de pensar si cada figura es o no un polígono, anotando sus justificaciones.

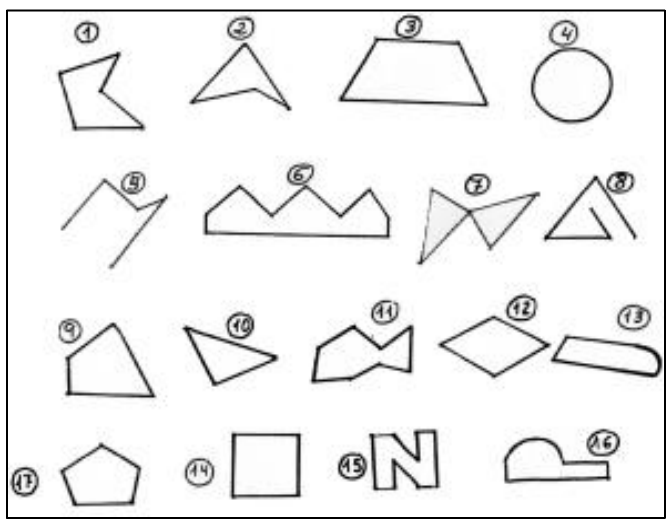


Figura 1.1. Ficha de trabajo para la situación didáctica de *polígonos*

2. Reunidos los alumnos en pequeños grupos, se han de compartir y discutir las anotaciones anteriores. En este proceso el alumno tendrá que intentar convencer de lo que piensa a sus compañeros de grupo, o aceptar

ser convencido si los argumentos de éstos le hacen caer en la cuenta de que tienen razón. Finalmente se pondrá en común lo que cada grupo ha pensado y discutido.

3. Los alumnos comienzan a trabajar individualmente, tras recibir la instrucción de la profesora de seleccionar aquellas figuras de la ficha (véase figura 1.1.) que crean que son polígonos.
4. Cuando los alumnos finalizan el trabajo individual, la profesora los dispone por parejas, enfatizando que la tarea a realizar en este periodo es «comparar con el compañero cuáles son polígonos y cuáles no, comparando los argumentos. En el caso de que te convenzan de alguno que no tenías antes, dejar marcadas ambas respuestas».
5. Cuando todas las parejas dicen haber finalizado, con la intensión de gestionar la participación de los alumnos, se inicia la puesta en común de la actividad donde la maestra comienza preguntando cuáles son las figuras en las que no ha habido acuerdo y se discuten las razones del desacuerdo en el gran grupo.

Con esta situación didáctica el maestro pretende que, a partir del conocimiento que tienen los alumnos acerca del tema, construyan una definición de polígono, esta intensión implica un interés especial en los procesos asociados a la construcción del significado matemático (construir justificaciones, argumentar, analizar argumentos, contrastarlos con los propios, consensuar ideas, etc.).

En la situación didáctica presentada, la primera y segunda parte corresponden a una *situación de formulación*. Pues al inicio, los alumnos piensan (de manera individual) si cada figura de la ficha es o no un polígono y anotan sus justificaciones, para lo cual, deben retomar la información que conocen sobre el tema y reconocer en las figuras las características que las convierten o no en un polígono, para luego interpretarlas y reformular sus ideas, llegando finalmente a la construcción de un argumento (o justificación) con sus propias palabras. Posteriormente, se reúnen en pequeños grupos para compartir y discutir sus anotaciones anteriores, obteniendo unos de otros la formulación del conocimiento esperado, ya que todos poseen la información necesaria para tratar dicha cuestión (debido a que es un tema abordado anteriormente).

En ese proceso en el que los alumnos comparten y discuten sus ideas, entran también en una *situación de validación*, pues cada uno tiene que intentar convencer de lo que piensa a sus compañeros de grupo, o aceptar ser convencido si los argumentos de éstos le hacen caer en la cuenta de que tienen razón.

La actividad 3 corresponde a una *situación de acción*, pues en esta, los alumnos tienen una interacción visual con su medio mientras toman decisiones (bajo un modelo implícito) acerca de si las figuras que se les presentan son o no polígonos. Esto lo hace relacionando la información previa con la que cuenta y la que obtuvo de sus compañeros, con sus decisiones.

Es así como a partir de esta situación didáctica, podemos ejemplificar los tres tipos de situaciones que conocemos, pero más aún, nos sirve para aclarar que el orden en que se presentan este tipo de situaciones en un proceso de enseñanza-aprendizaje, no siempre es primero una de acción, después una formulación y finalmente aun validación. Pues aunque "esto puede ser apropiado en algunos casos no se trata de una regla general" (Panizza, 2003, p. 13), por lo que el orden en que aparecen estas situaciones puede variar en algunos casos.

1.5. Contrato didáctico

Considerando el sentido habitual de la palabra *contrato* como un acuerdo, generalmente escrito, por el cual dos o más partes se comprometen recíprocamente a respetar y cumplir una serie de condiciones; se puede pensar en una concepción intuitiva de este concepto como el conjunto de reglas (explícitas e implícitas), *establecidas* entre el alumno y el docente, que ambos tienen la obligación de cumplir durante el proceso de enseñanza - aprendizaje de un conocimiento.

La noción de *contrato didáctico*, como parte del análisis de los fenómenos concernientes a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática, es concebida por Sadovsky (2005) como un juego sutil (entre el alumno y el docente) en el cual se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer algo, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas; esto se hace a raíz del trabajo en clase con respecto a un determinado objeto matemático. Ella explica que las interacciones entre el docente y el alumno, están muy marcadas por lo que cada uno espera del otro en relación al conocimiento en cuestión, pues las prácticas cotidianas en el aula conducen a que los alumnos se hagan una *representación interna* acerca de lo que está permitido y lo que no es posible con respecto a la cuestión matemática, y es así como terminan elaborando un conjunto de *normas* que monitorean su accionar; razón por la cual se utiliza el término contrato (p. 11).

Un concepto importante en el desarrollo de esta noción es el de *contrato pedagógico*, en el cual, se encuentran precisadas las obligaciones recíprocas entre alumno, sociedad y profesores; pues es un concepto a partir del cual Brousseau (1999) se plantea algunos cuestionamientos que hacen surgir un análisis más profundo sobre su idea acerca del contrato didáctico. Él se pregunta si es posible extender este contrato a la parte *enseñanza* de la educación y si puede el profesor precisar y aplicar un contrato de enseñanza de la misma manera que en el caso del contrato pedagógico (p. 24). Este par de cuestionamientos dan lugar a poner en duda la consistencia de esta noción, pues se dio cuenta de que semejante construcción de modelos, conducía a contradicciones expresadas en la realidad, por ejemplo, de que el profesor no puede decir explícitamente con anticipación lo que el alumno tendría que hacer frente a un problema, de manera que al hacerlo no le quite la posibilidad de manifestar o adquirir el conocimiento en cuestión, además de que el profesor no puede comprometerse a lograr la comprensión de un conocimiento, y mucho menos a hacer que se produzca porque en realidad nadie sabe cómo se hacen matemáticas nuevas. Es así como Brousseau concluye que la relación didáctica entre el docente y el alumno no puede dar lugar formalmente a un contrato, ya que por lo menos las cláusulas no podrían escribirse y las sanciones en caso de rupturas no pueden ser previstas, pero señala que pese a esto, la *ilusión* de la existencia de un contrato es indispensable para que eventualmente la realización de dicha relación tenga éxito (p. 24).

Por todo esto, asumimos con Brousseau (2007) que "cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa... y esta idea crea las posibilidades de intervención" (p. 70), ideas que no pueden ser establecidas de manera precisa debido a su variación natural, ya que como él mismo menciona, la enseñanza y el aprendizaje se efectúan a través de procesos que nunca se encuentran en un equilibrio estable, y por las cuales está conformado el contrato didáctico, que en realidad se convierte en algo incierto e *insostenible*.

1.6. Efectos del contrato didáctico

Bajo la importante hipótesis, de que la enseñanza y el aprendizaje se realizan a través de procesos que nunca se encuentran en equilibrio estable, surge la necesidad de argumentos que aseguren la validez de esta afirmación en cualquier circunstancia, y esto se afronta a partir del análisis de algunos sucesos surgidos en clase.

Brousseau (2007) afirma la existencia de diferencias de sensibilidad de los alumnos frente al contrato didáctico y el efecto de dicho contrato en los desempeños escolares del alumno. Estos efectos escolares del contrato didáctico existentes en los alumnos son los que se presentan a continuación.

1.6.1. Efecto Topaze

Este efecto surge de una situación en la cual, ante repetidos fracasos en la enseñanza de un conocimiento o saber y bajo las consideraciones de que: a) el docente no puede aceptar errores demasiado burdos en las acciones del alumno y b) mucho menos puede dar a conocer directamente la respuesta esperada; el maestro busca al menos un rastro de conformidad por parte del alumno, esto lo lleva a reducir las condiciones de negociación eligiendo preguntas que pueden provocar la respuesta, lo cual naturalmente conduce a un cambio en el carácter de los *conocimientos necesarios* para producir dicha respuesta. Aunque este hecho podría reducirse fácilmente a dar la orden de hacer lo que se espera o revelar la respuesta, esto representaría el total derrumbamiento del acto de enseñanza lo que significa que el maestro toma como responsabilidad suya lo esencial del trabajo y provocaría la completa desaparición de los conocimientos mencionados. A la desaparición total de estos conocimientos necesarios para producir la respuesta, provocada por la manipulación en las preguntas por parte maestro, se le llama *efecto Topaze*.

En palabras más simples, el efecto Topaze está caracterizado por un escenario donde el docente, al percatarse de las dificultades que presenta el alumno para la resolución de un problema planteado, decide acercar al estudiante a la solución, hasta llegar el momento en el que él mismo asuma la responsabilidad del problema proporcionando la respuesta, así es como el alumno llega a la solución de un problema por intervención del profesor y no por sus propios medios, por lo que se imposibilita la construcción autónoma del conocimiento por parte del alumno.

1.6.2. Efecto Jourdain

Este tipo de efecto, está determinado por el actuar del profesor que al encontrarse frente a una situación donde el comportamiento y las respuestas del alumno a un problema planteado son incorrectos, el profesor decide admitirlos como válidos, ya sea por evitar el debate del conocimiento con el alumno o por no evidenciar el fracaso del aprendizaje de dicho conocimiento, esto sucede aun cuando el maestro tenga la certeza de que sus respuestas están motivadas por causas insustanciales.

En otras palabras, este efecto puede explicarse como el hecho de que el docente, por su deseo de insertar cierto conocimiento en actividades más simples para el alumno, sea conducido a sustituir la problemática verdadera por otra más familiar para el alumno, reconociendo en el estudiante un conocimiento que no ha adquirido solo por dar una respuesta aceptable derivada de la simplicidad del problema.

1.6.3. Deslizamiento metacognitivo

Este efecto puede tener lugar cuando una actividad de enseñanza tiende a fracasar, y para que no haya una *ruptura* en el proceso, se continúa desviándose del conocimiento en cuestión a un nuevo objeto de enseñanza. Este nuevo objeto pueden ser las técnicas o métodos del mismo profesor para resolver el problema.

Este hecho puede ejemplificarse con el uso de Diagramas de Venn en la teoría de conjuntos, ya que el manejo de estos resulta mucho más sencillo que la teoría en sí misma. En algunos casos los diagramas pueden dejar de ser sólo herramienta de estudio para representar algunos resultados de la teoría, y el análisis de estos se convierte en el nuevo objeto de enseñanza, dejando de lado el estudio de los mismos conjuntos. Este reemplazo de un objeto de enseñanza por otro es un deslizamiento metacognitivo.

1.6.4. Uso Abusivo de la Analogía

De acuerdo con Brousseau (2007) pensamos que el uso de las analogías es muy bueno para el estudio de algunas nociones y de la resolución de problemas, pero también es verdad que la utilización no controlada de esta herramienta en la relación didáctica, puede causar efectos Topaze (p. 80).

Por ejemplo, al quedarnos solo con problemas análogos (ante el fracaso del aprendizaje) cuando se le da al alumno una nueva oportunidad para que adquiera el conocimiento (como parte del contrato didáctico), con la ilusión de que encuentre la respuesta idónea para el problema planteado; en realidad puede ser que únicamente reconozca regularidades con problemas anteriores y no termine por comprometerse con el problema. Más aún, no se debe suplantar el estudio de una noción compleja por un caso análogo, de lo contrario estamos ante el efecto de uso abusivo de la analogía.

En conclusión, a partir de la descripción de los efectos del contrato didáctico en los alumnos, podemos decir que dichos efectos obstaculizan o pueden llegar a impedir definitivamente la construcción de conocimiento dentro de las interacciones que se producen en la situación didáctica. Así es como estos efectos están determinados por acciones que finalmente generan efectos negativos en el proceso enseñanza-aprendizaje.

1.7. Componentes esenciales del contrato didáctico

Asumiendo el aprendizaje como el proceso por el cual se modifican los conocimientos, y bajo las condiciones de que el alumno debe construir el conocimiento por sí mismo y de que el maestro sólo debe provocar este proceso, surge la siguiente pregunta: ¿cuál es entonces el rol del maestro? La teoría no ofrece como tal una especificación o un modelo de cómo debe ser el comportamiento del maestro, más bien ofrece herramientas para evaluar y orientar sus intervenciones a fin de hacer que el alumno produzca por sí mismo el conocimiento.

"El trabajo del docente consiste, pues, en proporcionar al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro" (Brousseau,1988, p. 66). Esto nos habla de la necesidad de que, el alumno mismo, dé un sentido a los conocimientos y no actué solo por la *obsesión* de satisfacer las expectativas o la voluntad del maestro, en cuanto al conocimiento. Precisamente esta necesidad de dar un sentido a los conocimientos justifica dos componentes importantes en la elección pertinente de las condiciones de enseñanza, que resultan ser responsabilidad del maestro: la *devolución* y la *institucionalización*.

1.7.1. Devolución

Brousseau (1988) afirma que toda situación didáctica contiene algo de intención y deseo del maestro, y menciona que una de las tareas primordiales del maestro, es lograr que el alumno olvide los presupuestos didácticos de la situación, es decir que vea la situación como una necesidad independiente a la voluntad del maestro. Si se alcanza esta meta, estará logrando también con esto que el alumno se convierta en el responsable de la resolución del problema, es decir se lograría que él mismo se haga cargo de obtener un cierto resultado, pero para que esto suceda son necesarios dos aspectos importantes: *que el alumno tenga un proyecto* y *acepte su responsabilidad*. A la actividad mediante la cual el docente busca alcanzar estos dos resultados es a lo que Brousseau llama *devolución* (p. 67).

Sadovky (2005) profundiza un poco en la idea del *proyecto* que el alumno debería tener para haber logrado devolverle la responsabilidad de un problema o de una situación de aprendizaje. Ella le llama *proyecto del alumno* y se refiere al proyecto de adquirir los conocimientos en juego, afirma que no se trata solamente del deseo de aprender del alumno, que aunque es imprescindible no es suficiente, se trata entonces de que el proyecto de aprendizaje del alumno va más allá, pues toma en cuenta de la representación que él tiene hasta este momento del saber cultural que estructura los objetos matemáticos con los que está tratando, representación formada con todo lo que el alumno ha ido organizando y estructurado como producto de su práctica escolar (p. 14).

Pero no sólo se trata de devolverle la responsabilidad de una situación de aprendizaje al alumno, más aún, se trata de lograr que el alumno acepte su responsabilidad, es decir, que asuma las consecuencias de esta transferencia. Pues Brousseau (2007) define también el concepto de devolución como "el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctico) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de esta transferencia" (p.87).

Es así como asumimos la devolución como uno de los roles más importantes del docente en el proceso de aprendizaje, pero no es el único.

1.7.2. Institucionalización.

Al estudiar los tipos de situaciones didácticas, se han mencionado solo tres: la de acción, formulación y validación. Esto es porque la institucionalización surge posteriormente ante una necesidad de asegurar la consistencia del conjunto de movilizaciones del conocimiento, eliminando las que sean contradictorias; esta necesidad fue percibida por Brousseau a partir de las experiencias desarrolladas por docentes de la escuela Jules Michelet, pues observó que al cabo de un tiempo, se resistían a reducir los procesos ya concebidos queriéndose retener para rever lo que ya habían hecho. Le tomó tiempo darse cuenta que los maestros estaban obligados a dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y los vínculos con el conocimiento en juego como resultado de la enseñanza.

Estos comportamientos dieron cuenta de la necesidad de tener momentos de institucionalización en los procesos ya establecidos.

"Fue así como 'descubrimos' (!) lo que hacen todos los docentes en sus clases (…): deben tomar nota de lo que han hecho los alumnos, describir lo que ha sucedido y lo que tiene una relación con el conocimiento al que se apunta, dar un status a los acontecimientos de la clase, como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los otros (culturales, o del programa), indicar que ellos pueden ser reutilizados. El docente tenía que constatar lo que los alumnos debían hacer (y rehacer) o no, habían aprendido o debían aprender" (Brousseau, 1988, p. 74).

"Tomar en cuenta 'oficialmente' el objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización" (Brousseau, 2007, p. 98).

Fue así como se comenzaron a tener en cuenta y se dio prioridad a la existencia de momentos de institucionalización como *espacios* donde se diera el estado indispensable de saberes a los conocimientos en cuestión, pues de lo contrario, Brousseau (2007) afirma que sucedería lo mismo que con los teoremas, que por ausencia de una formulación y una prueba tenderían a desaparecer , ya que los conocimientos permanecerían contextualizados (y no generalizados) y tenderían a desaparecer en forma de recuerdos cotidianos. Pero también es importante tomar en cuenta otras cuestiones acerca de los momentos de institucionalización, pues su utilidad no es inapelable.

"Esta actividad es ineludible: no se puede reducir la enseñanza a la organización de aprendizajes" (Brousseau, 1988, p. 74). Esto quiere decir que no se puede reducir todo a la institucionalización, pues como también afirma Brousseau en este mismo trabajo, para el docente presentar y enseñar directamente el saber cómo objeto cultural y que el alumno *se lo apropie como pueda*, representa una tentación grande, ya que todo puede reducirse a la institucionalización como en las situaciones de enseñanza tradicionales, donde el maestro no se ocupa de la creación del sentido de los conocimientos en juego, pues en este caso sólo se dice lo que se quiere que el niño *aprenda*, se le explica y se verifica que lo haya aprendido. Esta situación queda completamente deslindada de la concepción que se tiene acerca de la función del profesor en el proceso de aprendizaje del alumno, la cual lo considera precursor de las condiciones necesarias en una situación de aprendizaje para la construcción autónoma del conocimiento por parte del alumno, y además, dicha situación contradice la noción de aprendizaje que se ha venido manejando como resultado de las necesidades de enseñanza, pues asumimos que "el alumno sólo puede aprender produciendo, haciendo funcionar y evolucionar los (sus) conocimientos" (Brousseau, 2007, p. 87)

A partir de todo lo descrito anteriormente, podemos decir que la institucionalización es un espacio en el cual el docente toma en cuenta oficialmente los comportamientos y las producciones libres del alumno y establece una relación entre estos y el conocimiento cultural que desea transmitir, con el fin de darle a dicho conocimiento el estado de saber cultural.

Después de haber estudiado estas dos formas de intervención del maestro en una situación de aprendizaje, concluimos con Brousseau (1986) que la devolución y la institucionalización conforman los roles más esenciales que debe asumir el profesor en su trabajo, pues, en la devolución, el maestro pone al alumno en situación a-didáctica y en la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones *libres* del alumno con el saber cultural o científico; pero aunque estas dos formas de negociación son muy distintas, en conjunto conforman una función imprescindible del docente en el proceso de aprendizaje del alumno (p. 39).

1.8. A manera de resumen

A partir de las diferentes concepciones de situación didáctica que se han presentado en la literatura citada, y de su evolución, hemos pensado este concepto como un modelo que describe las interacciones entre el sujeto con su medio y el docente, diseñado y manipulado por el profesor con la intención de enseñar, y más aún, de hacer que el alumno construya un saber determinado. Con esta noción y considerando las concepciones actuales de la enseñanza, que exigen la existencia de momentos de aprendizaje en donde el maestro no intervenga en cuestiones relativas a la adquisición del saber en juego de manera que el alumno se encuentre solo frente a la resolución de una situación, el profesor adquiere una responsabilidad importante en el desarrollo de dicha situación, lo cual conduce a un nuevo término, el de la situación a-didáctica, que es aquella situación en la que el maestro provoca que el alumno se adapte a su medio de la manera deseada, buscando lograr esto a través de la elección sensata de problemas que provoquen la acción autónoma del alumno y en la cual el profesor se rehúsa a intervenir en la construcción de los conocimientos que quiere ver aparecer y que no dejan de tener cierto grado de intencionalidad didáctica; asumiendo que este tipo de situaciones permiten mejorar las condiciones de la construcción autónoma de los conocimientos matemáticos.

En torno a las situaciones didácticas intervienen varios factores implícitos durante el desarrollo de estas, el contrato didáctico es uno de ellos ya que en todas las situaciones didácticas se establece una relación que determina lo que el profesor y el alumno tienen la responsabilidad de hacer frente al otro, y más aún, de lo que cada uno espera de cada cual, y este conjunto de obligaciones recíprocas, por su parecido a un contrato, es lo que se denomina el contrato didáctico, el cual a su vez posee un par de componentes importantes y además puede tener diferentes efectos es el proceso de aprendizaje del alumno.

Los componentes del contrato didáctico son la devolución y la institucionalización, por una parte la devolución es un componente importante debido a que bajo la consideración de Brousseau de que todas las situaciones didácticas tienen algo de intención y deseo del maestro, es necesario que el alumno olvide los presupuestos didácticos de la situación para que vea la situación como una necesidad personal independiente a la voluntad del maestro, convirtiéndose en el único responsable de la resolución del problema; y la actividad mediante la cual el maestro busque estas condiciones de enseñanza es a lo que se llama devolución. La devolución representa un rol indispensable del maestro en el desarrollo de una situación en, conjunto con la institucionalización, la cual consiste en el momento en el que el maestro establece formalmente las relaciones que existen entre los comportamientos o las producciones libres del alumno con el saber cultural o científico.

En conclusión pensamos con Sadovsky (2005) que las obras de Brousseau contienen herramientas teóricas que definen las funciones del docente, pero no especifican explícitamente cuáles son los gestos efectivos del docente que provoquen que el alumno asuma la responsabilidad matemática total del problema que se le plantea, ni a través de qué tipo de discurso el docente se logra que el alumno articule su producción con el saber cultural (p. 13).

CAPÍTULO II

METODOLOGÍA

En este segundo capítulo se explica la metodología empleada para la realización del trabajo a partir de los conceptos teóricos que intervienen en esta.

Posteriormente se describe el diseño de la situación didáctica que se aplicó y la relación que existe entre esta y los elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Finalmente abordamos algunas especificaciones acerca de la forma en que se aplicó la situación didáctica y el uso de las técnicas e instrumentos para recolectar la información.

2.1. Elementos metodológicos

En primera instancia haremos una clarificación de algunos conceptos metodológicos importantes para definir los métodos de investigación utilizados en este trabajo.

Hurtado de Barrera (2010) define el *método* como "el modo o manera de proceder o de hacer algo para alcanzar un objetivo y comprende el conjunto de pasos o etapas generales que guían la acción" (p. 110).

Entre los métodos propuestos en esta teoría, se encuentran los siguientes:

- *El método de la generalización inductiva del empirismo.* Este método genera como producto descripciones.
- *El método hipotético deductivo del positivismo.* El método del positivismo está diseñado para contrastar las hipótesis derivadas de una teoría, pero no para construir teorías. El positivismo no se preocupa por la creación de las teorías de donde se derivan las hipótesis, sino de la verificación de éstas últimas.
- *El método etnográfico o de análisis estructural del estructuralismo.* Con este método se llega a la interpretación de la estructura. El modelo teórico representa un resultado más completó e involucra muchos elementos del problema.
- *El método crítico dialéctico del materialismo histórico.* El método de Marx abarca estadios descriptivos, analíticos y explicativos del proceso de investigación.
- *El método investigación acción participativa del pragmatismo sociológico.* El proceso de este consiste en identificar una idea general, reconocer la situación, efectuar una planificación, desarrollar la primera etapa de la acción, aplicarla, evaluar la acción, revisar el plan general para pasar a la

aplicación de la segunda etapa, y así sucesivamente hasta cumplir completamente las etapas planificadas.

- *El método de investigación-acción del pragmatismo.* Implica la elaboración de una estrategia de ejecución.
- *El método de la fenomenología.* Para la fenomenología el instrumento de conocimiento es la intuición.

Hurtado afirma que cada uno de los pasos del método depende de una serie de *técnicas* para ser desarrollado, y define las técnicas como "modos específicos de hacer algo" (p. 110), mencionando que existen *técnicas de recolección de datos* (entre ellas la entrevista y la observación), técnicas de muestreo y *técnicas de análisis de datos*. Aclara que cuando las técnicas de análisis se basan en datos numéricos y pertenecen al campo de la estadística se les denominan *técnicas cuantitativas*, y cuando se basan en datos verbales se les denomina *técnicas cualitativas*, es decir, que este tipo de técnicas "produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación" (Strauss y Corbin, 2002, pp. 19-20). Así, concluye que los conceptos *cuantitativo* y *cualitativo*, no aluden a tipos de investigación como se encuentra frecuentemente, sino a técnicas en los análisis de investigación.

También destaca la importancia de diferenciar los conceptos de *método* y *tipo de investigación*, esto lo hace motivado en las frecuentes confusiones que se presentan entre dichos conceptos en diferentes contextos. Afirma que "el tipo de investigación alude al grado de profundidad y clase de resultado a lograr en la investigación" (p.110), mencionando que algunos ejemplos de tipos de investigación son la investigación exploratoria, la investigación descriptiva, la investigación proyectiva y la investigación explicativa.

2.1.1. Método y técnicas empleadas en la investigación

Ya clarificados los conceptos metodológicos involucrados en el desarrollo de este trabajo podemos decir que el método de investigación utilizado corresponde al *método de análisis estructural*, ya que como se mencionó antes, este abarca descripción, análisis y explicación del proceso de investigación. Pues en nuestro trabajo se da una descripción de las situaciones que se presentaron durante la ejecución de la situación didáctica, se analizan e interpretan elementos esenciales del proceso y se dan posibles explicaciones a lo acontecido. Así es como determinamos que el tipo de investigación que se realizó es explicativa, pues nos orientamos a establecer algunas causas que pudieron originar los fenómenos acontecidos durante la aplicación de la situación didáctica (a pesar de que estas no son concluyentes), tratando de encontrar el porqué de dichos fenómenos.

La técnica que utilizamos para la recolección de datos fue la observación, la cual corresponde a técnicas cualitativas de análisis de datos, pues estudiamos los efectos de la situación didáctica en los alumnos basándonos en sus expresiones físicas, verbales y escritas, y no en procedimientos de cuantificación.

2.2. Diseño de la situación didáctica

El diseño de la situación didáctica que se aplicó en la realización de este trabajo, se hizo en el seno del proyecto de investigación *Diseño y análisis de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para Cálculo en Bachillerato*, acontecido del mes de septiembre de 2017 al mes de mayo de 2018, en el cual, participaron dos investigadores y tres alumnos de la Maestría en Educación Matemática (MEM) de la BUAP, además de dos alumnos de la licenciatura en matemáticas (BUAP). En este proyecto también participaron cuatro profesores invitados que imparten la materia de cálculo integral en nivel medio superior.

Para la realización del proyecto se efectuaron reuniones semanales con los miembros del grupo de investigación, en las cuales se organizó el trabajo, se diseñó la situación didáctica y los materiales a utilizar, o se discutían elementos teóricos involucrados en el proyecto, en particular, en el trabajo de cada integrante. Al mismo tiempo se realizaban reuniones mensuales con los miembros invitados, en las que se analizó la situación didáctica diseñada (incluyendo los materiales a utilizar) y los posibles efectos que tendría ésta en las acciones matemáticas de los alumnos.

La situación didáctica que se diseñó está basada en el tema *cálculo de volumen de sólidos de revolución*, correspondiente al mapa curricular de tercer grado en nivel medio superior.

2.2.1. Estructura de la situación didáctica

La situación didáctica que se diseñó para la realización del proyecto está conformada por 10 actividades, en las cuales, los alumnos trabajan colectivamente en equipos de 5 personas. Dichas actividades están ordenadas sistemáticamente de acuerdo al proceso de aprendizaje que se espera generar en los alumnos, por lo que cada actividad tiene un objetivo específico.

Cabe mencionar que la situación didáctica fue cuidadosamente diseñada y analizada por el equipo de trabajo, esto con la finalidad de lograr en los alumnos un aprendizaje autónomo a partir de la construcción propia del conocimiento en juego, siendo este último el concepto de sólido de revolución y el método de integración para el cálculo su volumen.

Las actividades están distribuidas en tres partes fundamentales: inicio, desarrollo y cierre. En seguida se presenta la dosificación de dichas actividades:

Inicio

- Actividad 1: Primer acercamiento a sólidos de revolución.
- Actividad 2: Clasifica sólidos de revolución.

Desarrollo

- Actividad 3: Manipula sólidos de revolución con cortes.
- Actividad 4: Regresando a los sólidos clasificados.
- Actividad 5: Con hojas de papel milimétrico.
- Actividad 6: Se les proporciona una función.
- Actividad 7: Video del cálculo de volumen de sólidos de revolución.
- Actividad 8: Aplica lo del video.

Cierre

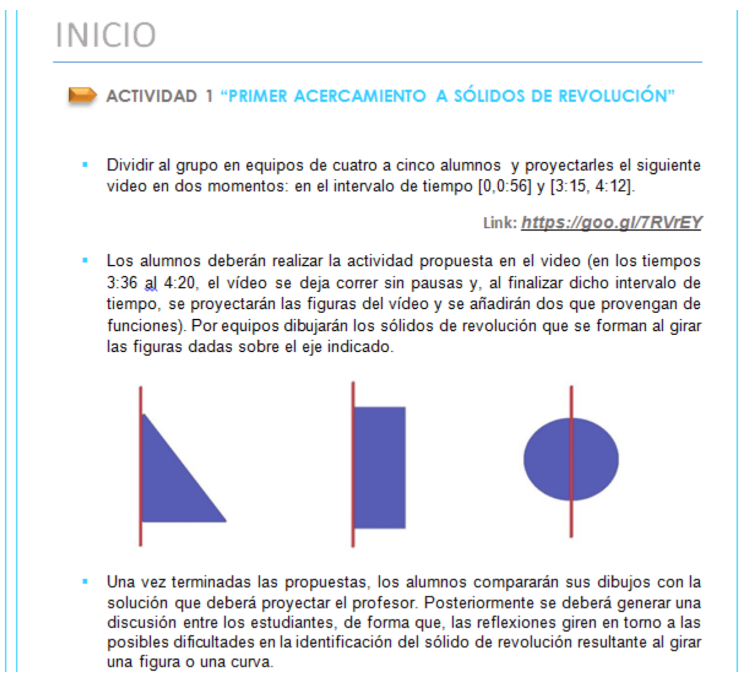
- Actividad 9: Calcular el volumen de objetos.
- Actividad 10: Resumen del tema.

2.2.2. Relación entre la situación didáctica y elementos de la Teoría Brousseauniana

En este apartado se hará una descripción detallada de cada una de las actividades, resaltando sus objetivos específicos y la relación que estos guardan con los elementos de la TSD.

Las consideraciones que se tienen para relacionar los objetivos de las actividades con la TSD, son previas a la aplicación de la situación didáctica en el salón de clases, es decir, se basan únicamente en lo que se espera del actuar del alumno para lograr un aprendizaje autónomo, y aún no, en los resultados de las reacciones de los estudiantes durante la aplicación.

2.2.2.1. Diseño de la actividad 1



INICIO

ACTIVIDAD 1 "PRIMER ACERCAMIENTO A SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- Dividir al grupo en equipos de cuatro a cinco alumnos y proyectarles el siguiente video en dos momentos: en el intervalo de tiempo [0,0:56] y [3:15, 4:12].

Link: https://goo.gl/7RVrEY

- Los alumnos deberán realizar la actividad propuesta en el video (en los tiempos 3:36 al 4:20, el vídeo se deja correr sin pausas y, al finalizar dicho intervalo de tiempo, se proyectarán las figuras del vídeo y se añadirán dos que provengan de funciones). Por equipos dibujarán los sólidos de revolución que se forman al girar las figuras dadas sobre el eje indicado.

- Una vez terminadas las propuestas, los alumnos compararán sus dibujos con la solución que deberá proyectar el profesor. Posteriormente se deberá generar una discusión entre los estudiantes, de forma que, las reflexiones giren en torno a las posibles dificultades en la identificación del sólido de revolución resultante al girar una figura o una curva.

Figura 2.1. Actividad 1 de la *situación didáctica*

La actividad 1 de la situación didáctica tiene como objetivo establecer que un sólido de revolución proviene de un giro, dicho objetivo pretende lograrse a traves de tres etapas durante la actividad. Como puede observarse en la figura 2.1., la primera etapa consiste en ofrecer al alumno información sobre cómo se genera un sólido de revolución, esto a traves de un video; con lo que el alumno se encontraría en una *situación de formulación*, ya que como se ha mencionado en el capítulo I, en dicha situación existe un primer momento donde el alumno recoge la información a partir de la observación sobre las reacciones del medio, en este caso, el alumno debería reconocer los efectos que se producen al rotar una figura plana o una curva alrededor de un eje (y sus implicaciones, tales como la forma circular que debe tener por provenir de un giro), para luego, retomar esta información y utilizarla en actividades posteriores. Es así como se proporcionará a lo estudiantes la información, a traves de una proyección audiovisual, y se pretende que el alumno sea capaz de comprenderla y retomarla para la realización efectiva de las siguientes actividades.

En la segunda etapa de la actividad, el alumno tendrá que dibujar el sólido de revolución generado a partir de la rotación de una figura dada, encontrándose así, en una *situación de acción*, ya que deberá actuar sobre su medio tomando decisiones bajo un modelo implícito, pues tendrá que decidir qué sólido de revolución se genera a partir de cada figura presentada y la forma de representarlo según un conjunto de reglas que él mismo se habría formado a partir de la información recibida, y tal vez también, con ayuda de sus conocimientos previos. Por ejemplo una de estas reglas puede ser la de representar el sólido de revolución con una perspectiva de volumen y no plana, o la de plasmar que el sólido de revolución proviene de un giro usando circunferencias en su dibujo. Esto puede suceder sin que se tenga conciencia de las reglas que se están usando implícitamente, pues estas podrían estar a posteriori de ser formuladas formalmente.

Finalmente, en la tercera etapa, el grupo de alumnos debe compartir y discutir sus propuestas para compararlas con la solución que les propondrá la profesora, lo que llevaría a una *situación de validación*, pues está consiste en el momento en el que ellos comunican sus propuestas y las someten a la opinión de sus compañeros, lo cual, puede llegar a convertirse en un proceso de corrección donde los sujetos involucrados cooperan en busca de la verdad para llegar a la solución.

Es así como se pretende llegar al objetivo de esta actividad, que como se ha mencionado antes, es establecer que los sólidos de revolución se generan *al girar una figura plana o una línea* alrededor de un eje.

2.2.2.2. Diseño de la actividad 2

ACTIVIDAD 2 "CLASIFICA SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

Para la siguiente actividad se les entregará a los alumnos algunos objetos que sean sólidos de revolución y otros que no lo sean (como los que se observan en las siguientes imágenes), además del material necesario para que puedan verificar sus respuestas simulando ejes de rotación.
Con estos objetos los estudiantes deberán:

- Explorarlos y clasificarlos en dos grupos, los que sean sólidos de revolución y los que no.
- Para los que sí lo sean, identificar el eje de rotación para que dicho objeto cumpla las características de ser sólido de revolución. Una vez identificado, indicar la figura que lo genera. Comprobar sus respuestas manipulando los objetos con los materiales que se les proporcionará.
- Para los que no lo sean, dar las razones que los llevan a esa conclusión
- Con base en sus observaciones, se les se les pedirá que discutan sobre las características comunes que encuentren en los objetos que sí son sólidos de revolución y cuáles describen a los que no lo son.

Figura 2.2. Actividad 2 de la *situación didáctica*

Para la actividad 2 de la situación didáctica se proporcionará a los alumnos una colección de objetos, para los cuales, los alumnos deberán conjeturar qué objetos son sólidos de revolución y qué objetos no lo son, y además, determinar el eje de rotación de los que consideren como sólidos de revolución.

Al inicio de esta actividad los alumnos podrán explorar los objetos que se les proporcionan y los clasificarán en sólidos y no sólidos de revolución, identificando el eje de rotación y la figura generadora de los que sí lo sean. Así es como se podría introducir a los estudiantes a una *situación de acción*, pues esta se caracteriza por la acción que ejecuta el sujeto sobre su medio durante el proceso de adaptación, lo cual se efectuará a traves de la exploración y manipulación de los objetos que se entregarán a los estudiantes. Además, al hacer la clasificación, los alumnos tomarían decisiones (bajo un modelo implícito) para elegir el eje de rotación y la figura que genera el sólido de revolución al ser girada sobre dicho eje.

Mediante la exploración de los objetos, el alumno estaría en condición de recoger información a partir de la observación y manipulación de estos, reconociendo así las regularidades perceptibles para él. Esto corresponde a la capacidad del sujeto para retomarlo, lo cual implica reconocerlo, descomponerlo y reformularlo en un nuevo sistema lingüístico; en este caso el alumno debería ser capaz de reconocer las características que definen los sólidos de revolución y reformularlas con sus propias palabras. De esta manera el alumno se encontraría en una *situación de formulación*.

2.2.2.3. Diseño de la actividad 3

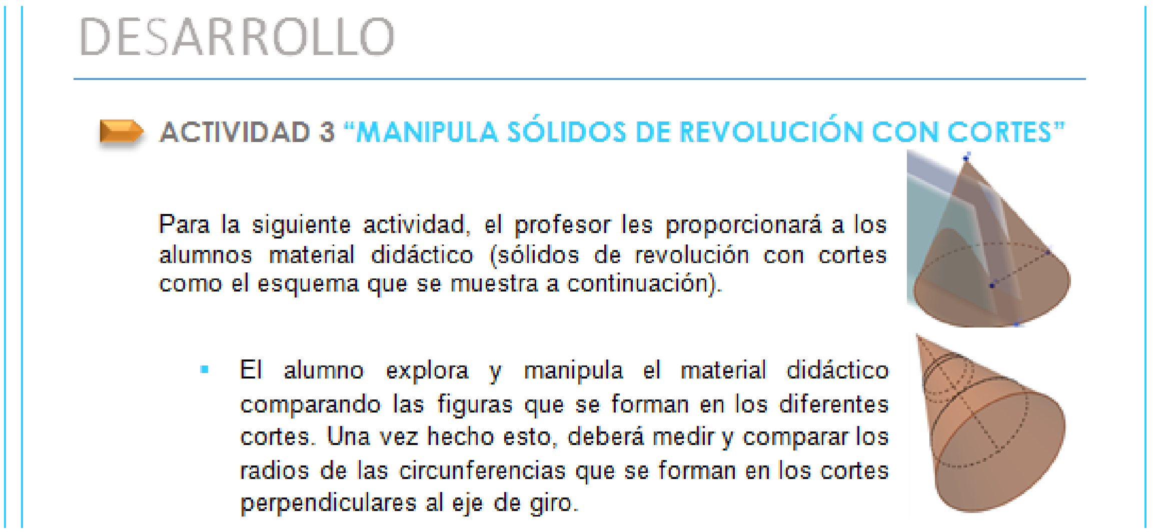


Figura 2.3. Actividad 3 de la *situación didáctica*

La actividad 3 consiste en que el alumno explore el material didáctico que se le proporcionará (para ilustrar, véase la figura 2.4.). Esto es con el fin de que reconozca que los cortes perpendiculares al eje de rotación de cualquier sólido de revolución, son circunferencias.

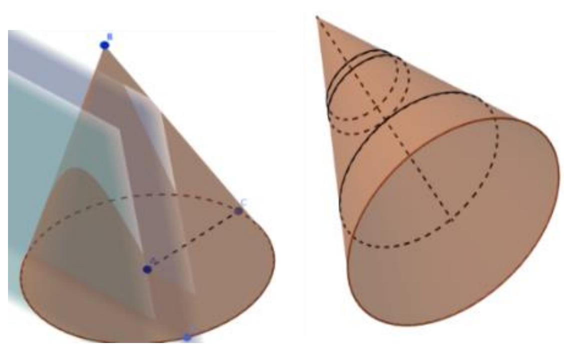


Figura 2.4. Conos de madera con cortes paralelos y perpendiculares al eje de rotación

Por medio de la interacción con el medio, en este caso el material didáctico, el alumno se encontraría en una *situación de acción*. Mediante esta actividad el estudiante debería reconocer la regularidad de los cortes perpendiculares al eje de rotación de todos los sólidos de revolución, y más aún, aprovecharla para darse cuenta de que dichas circunferencias tienen radios diferentes entre sí y que están determinadas por el giro de la figura que se rota para formar el sólido de revolución, siendo capaz de reformular toda esta información de forma que sea plausible para él y para sus compañeros, con lo que llegaría a una *situación de formulación*.

2.2.2.4. Diseño de la actividad 4

ACTIVIDAD 4 "REGRESANDO A LOS SÓLIDOS CLASIFICADOS"

- Regresando a los objetos que clasificaron en la actividad 2, los alumnos decidirán a qué objetos hacer (o simular) los cortes perpendiculares al eje de rotación, observar cómo son dichos cortes y comprobar si los objetos que consideraron como sólidos de revolución, realmente lo son. Para los que sí sean sólidos de revolución, aproximar el radio de las circunferencias que se forman en los cortes.

Figura 2.5. Actividad 4 de la *situación didáctica*

En la actividad 4 los alumnos deberían aprovechar la característica común que habrían descubierto en los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución para rectificar la clasificación de los objetos que hicieron anteriormente, esto los induciría a una *situación de acción*, pues lo harían a traves de la manipulación del material didáctico, con el cual podrán simular ejes o hacer cortes a los objetos que consideren como sólidos de revolución, de forma que esto les permita validar sus predicciones. Finalmente, este momento debería convertirse en un proceso de corrección donde los sujetos involucrados (en este caso los integrantes del equipo) cooperen en busca de la verdad, organizando enunciados que les sirvan como demostraciones a sus afirmaciones, lo cual corresponde a una *situación de validación*, pues es donde el alumno da razones para convencer al otro sobre sus propuestas y acepta razones para cambiar su punto de vista.

Así es como se pretende llevar al alumno a concluir que, la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación de un objeto es una condición necesaria para que sea un sólido de revolución, ya que mediante la manipulación del material, es decir, la interacción con el medio, debería darse cuenta de que los objetos que no cumplan con esta condición no podrían provenir de un giro.

Cabe destacar que el objetivo de la actividad conlleva implícitamente a la existencia de una situación de *institucionalización*, que surgiría a partir de la necesidad de asegurarse de la consistencia de la conclusión a la que lleguen, es decir, de la consistencia del conjunto de movilizaciones del conocimiento adquirido, eliminando las que sean contradictorias.

La forma en la que se desarrolle este último momento, quedará determinada por la reacción de los alumnos en esta actividad, pues el hecho de que los alumnos logren comprender por completo la regularidad (con respecto a los cortes perpendiculares al eje de rotación) que presentan los sólidos de revolución, podría evitar que la institucionalización sea protagonizada completamente por la profesora.

2.2.2.5. Diseño de la actividad 5

ACTIVIDAD 5 "CON HOJAS DE PAPEL MILIMÉTRICO"

El profesor entregará a los alumnos hojas milimétricas.

- Ahora, únicamente con los objetos clasificados como sólidos de revolución, el alumno dibujará en las hojas milimétricas el contorno del objeto, de forma que el eje de rotación coincida con el eje horizontal de la hoja milimétrica, tratando de imaginar el giro de la figura que dibujaron y cómo se forma el sólido de revolución a partir de dicho giro.

- Una vez hecho esto, se discutirá la posibilidad de borrar de su dibujo las líneas paralelas al eje vertical (excepto si tienen curvatura) y todo lo que se encuentre por debajo de eje horizontal, e imaginarse qué figura se forma ahora, si se gira nuevamente alrededor del eje de rotación.

Figura 2.6. Actividad 5 de la *situación didáctica*

Con la actividad 5 se da un paso más en la construcción del conocimiento en juego que se pretende lograr con los alumnos. Como podemos observar en la figura 2.6., esta actividad consiste en dibujar en hojas de papel milimétrico el contorno de los objetos que consideren sólidos de revolución, haciendo coincidir el eje de rotación con el eje horizontal del plano cartesiano, lo cual servirá para que los estudiantes reconozcan la figura que genera dicho sólido de revolución al ser rotada, pero más aún, se busca que el alumno comprenda que basta girar una función (y no necesariamente una figura simétrica plana) alrededor del eje horizontal para generarlo, la misma que puede obtener del contorno esbozado. Para lograrlo, durante la actividad se le pedirá al alumno borrar de su dibujo la parte inferior al eje x y los extremos paralelos al eje y, de manera que únicamente quede una función (como se muestra en la imagen 2.7.).

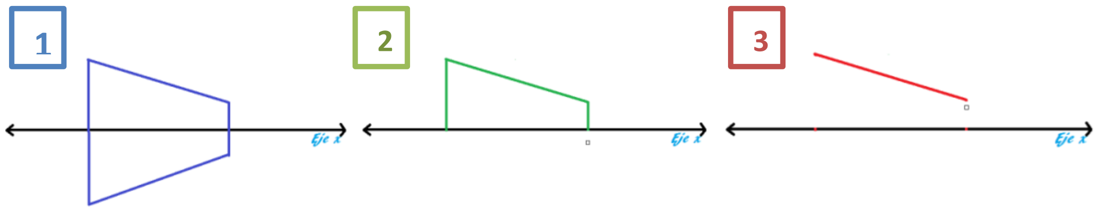


Figura 2.7. Ejemplo de transformaciones del esbozo inicial del contorno de un sólido de revolución

Para lograr el objetivo, se espera que el alumno sea capaz de reconocer que al girar la función obtenida a partir de las transformaciones hechas a su esbozo, se genera el mismo sólido de revolución que tenía inicialmente, lo cual implica que el alumno se situé en una *situación de formulación* donde pueda retomar este hecho y reformularlo de manera que sea claro para él. Se pretende que este reconocimiento, se dé mediante la acción que el alumno ejerce sobre su medio a traves de la experimentación, la cual consistirá en efectuar cambios en su dibujo y analizar lo que sucede en cada caso en cada paso.

2.2.2.6. Diseño de la actividad 6

ACTIVIDAD 6 "SE LES PROPORCIONA UNA FUNCIÓN"

En la siguiente actividad, el profesor debe proporcionar a los alumnos las siguientes funciones: $y = 3$ en el intervalo [1, 9], $y = 2x$ en el intervalo [0, 3], $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6] y $y = x^2 + 1$ en el intervalo [-2,5].

- El alumno deberá dibujar las funciones dadas y los sólidos de revolución que se generan a partir de estas, con la convención de que el eje de rotación será el eje horizontal.
- Una vez dibujado el sólido de revolución generado por cada función, que el alumno se concentre en algún punto sobre el eje de rotación y aproxime la distancia que hay entre dicho punto y algunos otros que se encuentren sobre la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje de rotación a la altura de dicho punto. Luego, que compare las medidas que resulten y que repita el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación. (Se reforzará esta parte de la actividad con un diseño en Geogebra).
- El profesor generará una discusión acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.

Figura 2.8. Actividad 6 de la *situación didáctica*

Para esta actividad, se proporcionará al alumno una función definida en un intervalo determinado, y a partir de esta, deberá construir y dibujar el sólido de revolución generado al rotarla alrededor de un eje; acción en la cual debe ser capaz de aprovechar y aplicar la información que ha adquirido hasta el momento. Para la realización de dicha acción se pedirá al estudiante dibujar su propuesta tomando como eje de rotación el eje de las abscisas para que una vez teniendo el esbozo, se le solicite medir los radios de las circunferencias que se forman en los cortes perpendiculares al eje de rotación en diversos puntos. Con esto se pretende lograr que el alumno se dé cuenta de que existe una variación en el radio de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución generados por las funciones dadas (a excepción del cilindro)), esto si los cortes se toman en distintos puntos, pero, más aún, que sean capaces de inferir que dicha variación queda determinada por una función, de forma que reconozcan que el radio de cada circunferencia que elijan es la imagen de la función que genera el sólido de revolución en el punto de corte.

En primera instancia, el hecho de que el alumno determine los sólidos de revolución generados a partir de algunas funciones dadas, implica la existencia de una *situación de acción*, pues es un momento en el cual los alumnos podrán interaccionar con su medio tomando decisiones que le permitan llegar a la solución de un problema y a traves del cual aprenderán un método de resolución que ellos mismos deberán ir construyendo durante todo el proceso de la actividad. Además para lograr los propósitos de la actividad, y aún más, para alcanzar los conocimientos esperados, el alumno debería insertarse inevitablemente en una *situación de formulación*, pues es la forma en que lograrían descubrir elementos que no alcanzarían a apreciar en ausencia de la formulación de dichos conocimientos. Evidentemente en esta situación, es sumamente importante y necesario que el alumno tenga un reconocimiento propio del conocimiento que se le quiere transmitir, pues esto cambiaría sus posibilidades de aprendizaje y adquisición, para que de esta manera pueda ampliar su percepción sobre el conocimiento esperado. Finalmente se propiciará una discusión grupal acerca de la variación de dichos radios donde, los alumnos que se encentren en condición de reformular las regularidades que hayan encontrado durante la actividad, puedan comunicar y proponer sus observaciones a sus compañeros.

2.2.2.7. Diseño de la actividad 7

ACTIVIDAD 7 "VIDEO DEL CÁLCULO DE VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN"

- Proyectar el video basado en la lectura guiada que se encuentra en el enlace:

  Link: ***https://goo.gl/bDwcu1***

- El profesor deberá discutir con el grupo sobre la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el barrido como estrategia para llegar a la integral, qué es lo que se integra y la similitud de este proceso con el cálculo de área bajo la curva.

Figura 2.9. Actividad 7 de la *situación didáctica*

Posteriormente, en la actividad 7, se proyectará a los alumnos un video sobre el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, con lo cual se espera que sean capaces de transferir el conocimiento que tienen acerca del cálculo de áreas bajo la curva, al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, esto a traves de la integral. Con la observación del video por parte de los alumnos, se encontrarían en un primer momento de una *situación de formulación*, donde pueden recoger la información que se les proporciona en él. Posteriormente llegarían a una situación de acción, pues es aquí donde pueden aprovechar las regularidades del medio perceptibles para ellos, relacionando la información que conocen sobre el cálculo de áreas bajo funciones (asumido como conocimiento previo) con el comportamiento de su medio actual. Además como sabemos de la TSD, encontrar características comunes entre el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y sus conocimientos previos puede ayudarle a anticipar sus reacciones o sus respuestas futuras.

2.2.2.8. Diseño de la actividad 8

ACTIVIDAD 8 "APLICA LO DEL VIDEO"

Los alumnos deberán realizar el siguiente ejercicio de forma individual:

> **Dibujar la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,10] y el sólido de revolución que genera; luego, calcular su volumen por el método de la integral.**

- El profesor deberá realizar una generalización a través de una lluvia de ideas.

Figura 2.10. Actividad 8 de la *situación didáctica*

Las situaciones de formulación y de acción que puedan tener los alumnos en la actividad 7, continúan y se complementan con una siguiente *situación de formulación* durante la actividad 8. En esta se espera que el estudiante aplique la integral para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, pues se le pedirá calcular el volumen de un sólido de revolución generado a partir de una función dada, por lo que para lograr el propósito, es necesario que a partir de la información recolectada en la actividad anterior y con los conocimientos de cálculo que ya poseen, se desarrollen nuevas estrategias de resolución durante la acción.

Cabe destacar que en este momento no únicamente se pueden desarrollar técnicas para calcular el volumen de sólidos de revolución (aunque se espera que lo hagan usando como herramienta la integral), sino también para identificar el tipo de función que se les proporciona, para graficar la función y para integrarla, lo cual identificamos como *una situación de formulación*. Finalmente en esta actividad, se hará una generalización por parte de la profesora (a traves de una lluvia de ideas), acerca de la información tratada hasta el momento, en donde se espera la participación efectiva de los estudiantes.

Este momento correspondería entonces a una parte esencial del proceso didáctico, la *institucionalización*, la cual posibilita al docente para constatar lo que se ha aprendido y lo que se debe aprender, ya que es el momento en el que se toma en cuenta oficialmente el objeto de enseñanza y donde el docente hace una recapitulación de las producciones del alumno estableciendo una relación entre estas y el conocimiento cultural que desea transmitir, esto con el fin de darle a dicho conocimiento el estado de saber cultural.

2.2.2.9. Diseño de la actividad 9

CIERRE

ACTIVIDAD 9 "CALCULAR EL VOLUMEN DE OBJETOS"

Al inicio de esta actividad, el profesor proporcionará a los alumnos objetos que sean sólidos de revolución (por ejemplo, un plato, un vaso, un cilindro, una esfera), uno por equipo, con los cuales el alumno deberá:

- Determinar el eje de rotación.
- Proponer la función que genera el sólido de revolución y sobre qué intervalo queda definida dicha función. (Para esto pueden recurrir a la medición de los objetos, para lo cual el profesor debe facilitarle el material necesario)
- Calcular el volumen del objeto, con al menos dos métodos, de forma que uno de ellos sea utilizando la integral como herramienta y comparar los resultados.
- Por equipos, exponer su resultado al grupo.

Figura 2.11. Actividad 9 de la *situación didáctica*

Para la actividad 9 se les proporcionarán a los alumnos objetos que son sólidos de revolución, para los que deben determinar su eje de rotación y la función que los genera, asi como el intervalo donde queda definida dicha función. Posteriormente se les pedirá calcular el volumen de dichos sólidos de revolución por al menos dos métodos (por ejemplo por el método de integración, descomposición en figuras de las cuales conozcan fórmulas para el cálculo de su volumen o midiendo su capacidad y convirtiendo las unidades de capacidad a unidades de volumen), pues con esto se pretende lograr que el alumno aplique diferentes métodos para el cálculo de volumen de sólidos de revolución, para lo que se requiere forzosamente que el alumno ponga en acción sus conocimientos y habilidades, pero más aún, que a partir de la información que haya logrado recolectar y de sus conocimientos anteriores, sea capaz de reconocer y desarrollar nuevas estrategias de resolución, como las que se mencionan anteriormente, esto sin la intervención de la profesora. Posteriormente las estrategias deberían se propuestas y comunicadas al resto del grupo. Pero no sólo eso, también se espera que los alumnos pueda reconocer la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volumen de sólidos de revolución, es decir, que se den cuenta de que esta herramienta facilita y optimiza el cálculo de dicho volumen en comparación con otros métodos que pueden resultar tediosos y no tan precios. Es así como durante esta actividad los alumnos deberían mantenerse en una *situación de formulación* que continúa en la última actividad.

2.2.2.10. Diseño de la actividad 10

ACTIVIDAD 10 "RESUMEN DEL TEMA"

- Para finalizar, los alumnos harán un resumen de la práctica realizada para este tema rescatando la importancia de la integral para el cálculo de los volúmenes de sólidos de revolución (un resumen por equipo).

Figura 2.12. Actividad 10 de la *situación didáctica*

Para cerrar el tema, en la actividad 10 se pedirá a los estudiantes realizar un resumen de la práctica desarrollada durante la situación didáctica. Esto se hace con el fin de inducir a los alumnos a una recapitulación e interiorización de la información obtenida en la práctica, reformulando, con sus propias palabras, los conocimientos que han adquirido a partir de la información recibida y de sus propias producciones.

2.3. Aplicación de la situación didáctica

En este apartado se hará una descripción de los factores involucrados en la aplicación de la situación didáctica, tales como los informantes y su contexto, además de la técnica e instrumentos de recolección y registro de datos.

Cabe mencionar que la aplicación de la situación didáctica se llevó a cabo en un total de cinco sesiones, cada una de 50 minutos, en las cuales se distribuyeron las actividades planeadas de acuerdo al tiempo disponible para ejecutarla.

2.3.1. Informantes

Los informantes de este estudio fueron alumnos que cursaban el sexto semestre en un bachillerato general ubicado en la ciudad de Puebla.

En este bachillerato los alumnos de tercer grado (quinto y sexto semestre) están ubicados en cuatro áreas de conocimiento, de acuerdo a sus intereses académicos con respecto a la carrera que pretenden estudiar, siendo estas áreas ciencias exactas, ciencias sociales, humanidades y ciencias de la salud.

La aplicación de la situación didáctica fue ejecutada durante algunas clases de matemáticas de un grupo de 40 alumnos, perteneciente al área de ciencias exactas, lo cual significa que se trabajó con alumnos que contaban con cierta habilidad para el estudio de estas ciencias o al menos con el interés de estudiarlas.

Las clases fueron impartidas por una profesora integrante del equipo de investigación de este proyecto, estudiante de la Maestría en Educación Matemática de la BUAP, con lo cual se entiende que ella participó en el diseño de la situación didáctica y del material didáctico utilizado, asi como en la toma de decisiones para la aplicación de ésta, tales como la forma de trabajo y la distribución del grupo, pues por sus recomendaciones el grupo fue dividido en ocho equipos de cinco personas para lograr resultados óptimos. Así, la distribución de los alumnos en los equipos de trabajo fue hecha selectivamente por la profesora, esto fue posible porque ella contaba ya con un conocimiento previo sobre el trabajo de los alumnos en ese grupo, ya que un semestre antes les impartió también la materia de matemáticas.

Cabe destacar que por sugerencias de la profesora, se decidió poner mayor atención en el equipo 6, pues argumentó que los integrantes de ese equipo podrían tener resultados muy interesantes de acuerdo al desempeño que habían mostrado hasta ese momento en la clase, sin embargo, no se pretendió ignorar las intervenciones relevantes de alumnos externos a dicho equipo, por lo que se acordó resaltarlas cuando fuera necesario.

Notemos también que el hecho de que la profesora haya impartido clases a este grupo anteriormente, influye directamente en el desempeño esperado de los alumnos en las actividades que se les aplicaron; pues esto permitió al equipo de investigación saber que los alumnos contaban ya con los conocimientos previos necesarios para que tuvieran resultados satisfactorios, ya que ella misma impartió, en el curso anterior, temas importantes para el desarrollo de las actividades diseñadas, tales como: ecuaciones de secciones cónicas, métodos de integración y cálculo de áreas bajo funciones a traves de la integral.

Es así como desde el diseño de la situación didáctica, se tuvo la seguridad de que los informantes eran estudiantes que tenían las herramientas necesarias para hacer una construcción propia del conocimiento que se quería transmitir.

2.3.2. Técnica e instrumentos de recolección y registro de datos

Como se mencionó en el apartado 2.1.1., la técnica para la recolección de la información que se empleó en este trabajo fue la observación, en este caso se trato de una observación no participante, ya que en esta modalidad el investigador se mantiene al margen del fenómeno a estudiar, convirtiéndose asi en un espectador y limitándose a registrar la información que ofrece la situación.

En este caso no hubo una participación activa en el desarrollo de la situación didáctica y la observación que se llevó a cabo corresponde a una observación no participante, lo cual nos dota de cierta objetividad para analizar los sucesos acontecidos durante la ejecución de la situación didáctica.

La observación no participante que se utilizó para recolectar la información fue indirecta debido a que no se hizo dicha observación sobre el terreno de estudio, sino a traves de la observación en fuentes documentales (videos, audios, producción escrita). Estas fuentes documentales corresponden a los instrumentos de recolección de datos que se emplearon para la realización de este estudio, pues las cinco sesiones fueron grabadas por dos videograbadoras, una dirigida a la profesora y la otra a los alumnos, esta última enfocada el mayor tiempo posible al equipo 6. También se emplearon cinco grabadoras de audio que se distribuyeron en cuatro equipos seleccionados por la profesora (teniendo mayor preferencia por el equipo 6) y una más que se le quedo a ella, esto con la finalidad de tener acceso a los diálogos que no fueran claros en las videograbaciones. Finalmente se cuenta también con imágenes correspondientes a la producción escrita de los alumnos que fueron escaneadas posteriormente a la realización de las actividades en el salón de clases.

Es así como para la revisión y registro de la información, se cuenta con dos videos por sesión, la grabación de audio de cuatro equipos, asi como el de la profesora (correspondiente a todas las sesiones) y la producción escrita de cada actividad.

Al tener acceso a todas las fuentes documentales a traves de la cuales se haría la observación, se comenzó con el análisis de la información. Primeramente se registraron los momentos más significativos de cada sesión y se realizó la transcripción de los diálogos a partir de los videos (apoyándonos de los audios cuando era necesario), dichas transcripciones son utilizadas como evidencias en el análisis de la información que se presenta en el siguiente capítulo.

Finalmente, a partir de las fuentes documentales obtenidas, se hizo la identificación de los elementos de la TSD involucrados en los resultados obtenidos durante la realización de las actividades en el salón de clases, especialmente en las reacciones de los estudiantes durante la aplicación, lo cual da lugar al análisis presentado en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este tercer capítulo haremos un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la situación didáctica diseñada para la elaboración de este trabajo. Este análisis consiste, primeramente, en dar una descripción de las situaciones que se presentaron durante la ejecución de la situación didáctica, posteriormente, se analizan e interpretan elementos de la TSD que se presentaron durante el proceso de aprendizaje que tuvieron los alumnos, además de algunos acontecimientos que nos pareció importante destacar. Finalmente se dan posibles explicaciones de lo acontecido.

El presente análisis está basado estrictamente en los resultados obtenidos durante la realización de las actividades en el salón de clases, especialmente en las reacciones matemáticas de los estudiantes durante la aplicación. Este, se desarrolla siguiendo el orden en el que se realizaron las actividades durante la ejecución de la situación didáctica, resaltando el objetivo específico de cada una y los elementos de la TSD que fueron identificados (estos últimos se resaltan con letra negrita a lo largo del texto); además, se muestran extractos de algunas transcripciones correspondientes a episodios (o escenas) relacionados (as) con el objetivo y el elemento teórico que se esté analizando en cada apartado.

En las transcripciones fue necesario asignar etiquetas a cada uno de los participantes en los diálogos, esto para identificarlos claramente. A los cinco integrantes del equipo seis se les asignó la nomenclatura A_1, A_2,…, A_5 (donde A_X significa *alumno X*), distinta a la de los demás estudiantes, pues recordemos que como se mencionó en el apartado 2.3.1., se pretendía poner mayor atención en los resultados arrojados por el equipo 6, por lo que era necesario distinguir a los integrantes de este equipo de los demás alumnos. Sin embargo, durante las sesiones, frecuentemente surgieron sucesos importantes con alumnos de otros equipos, por lo que se decidió recuperar las participaciones que influyeron determinantemente en el desarrollo de la clase. A cada uno de los estudiantes externos al equipo 6, se les asignó una nomenclatura diferente, siendo esta A_{eX}, donde A_e significa que se trata de un *alumno externo* al equipo 6 y *X* es un número asignado de acuerdo al orden de las participaciones, sin considerar repetición, es decir, el alumno A_{e4} siempre fue identificado con esa etiqueta, sin importar si su participación fue la 4ª y la 8ª.

La letra *P* corresponde a las intervenciones de la *profesora*, A_s se asignó a las participaciones donde varios alumnos dan la misma respuesta al mismo tiempo durante las puestas en común. A_{ni1}, A_{ni2},… corresponde a los alumnos que no son identificados claramente en el video, donde *ni* significa *no identificado* y el número es asignado de acuerdo al orden de esas participaciones en cada extracto, es decir, el hecho de que A_{ni1} aparezca en el extracto 2 y en el extracto 30 no significa que se trata del mismo alumno, sino que fue la primera participación no identificada del extracto 2 y también la primera del extracto 30.

Igualmente a la descripción de las imágenes correspondientes a la producción escrita de los alumnos, se le asignó cierta nomenclatura, en este caso fue AXEY donde *AX* significa *actividad X*, siendo *X* el número de la actividad (por ejemplo *A5* significa *actividad 5*) y *EY* quiere decir *equipo Y* donde *Y* es el número del equipo que elaboró el trabajo, así *A4E3* significa *actividad 4 del equipo 3*. Nótese que, aunque nuevamente utilizamos la letra *A* para la nomenclatura de las imágenes, en este caso omitimos el uso de subíndices para evitar confusiones con la nomenclatura de las transcripciones, donde A_5 significa *alumno 5*. Es asi, como algunas ocasiones se encontrará algo similar a $A3A_4$ lo cual significa *actividad 3 del alumno 4*, esto se encontrará cuando se trate de trabajos que fueron hechos de manera individual.

3.1. Análisis de la actividad 1

Nombre de la actividad: Primer acercamiento a sólidos de revolución

Objetivo: Establecer que un sólido de revolución proviene de un giro.

Primeramente recordemos que para iniciar la ejecución de la situación didáctica, se dividió al grupo en ocho equipos de cuatro (o cinco) personas. Una vez formados los equipos, se proyectó un video que brindó a los alumnos información sobre los sólidos de revolución, esto para introducirlos al tema y poder proceder con la actividad 1 de la situación didáctica.

Después de haber visto el video sobre sólidos de revolución, los estudiantes se ocuparon de dibujar (de manera individual) los sólidos de revolución generados a partir de la rotación de las figuras dadas, encontrándose así en una **situación de acción**, ya que cada estudiante actuó a partir de las decisiones que fue tomando bajo un modelo implícito, es decir, decidió qué sólidos de revolución se generaban y la forma de representarlos según un conjunto de reglas que él mismo se había formado hasta el momento, reglas basadas en la información recibida durante la clase y de sus conocimientos previos. Dentro de estos conocimientos previos está la información con la que contaban los alumnos acerca del tema, ya que realizaron una investigación previa a petición de la profesora; y aún más, la habilidad que se observó en algunos casos para representar figuras tridimensionales correctamente (con cierta perspectiva).

Una vez que los alumnos terminaron de representar los cuerpos generados por las figuras propuestas en el video, se genera una discusión grupal donde los alumnos comparten sus resultados, y aún más, expresan el concepto que se han formado hasta el momento a cerca de lo que es un sólido de revolución. Esta última parte de la discusión es muy enriquecedora, pues consideramos que esto dio pauta a que los alumnos se encontraran en una **situación de validación** donde pudieron comunicar sus propuestas (sobre el concepto que tienen de un sólido de revolución), sometiéndolas a la opinión de sus compañeros, y por supuesto, de la profesora. Fue un espacio donde los sujetos involucrados cooperaron en busca de la verdad, para llegar a construir el concepto de sólido de revolución a partir de sus apreciaciones. Esta situación la podemos apreciar en el siguiente extracto.

Extracto 1

P: ¿Ya tenemos la idea de que es un sólido de revolución?

A_s: Sí.

P: Qué características, para empezar, cuéntenme, ¿qué características tienen los sólidos de revolución?

A_{e6}: Que tiene volumen.

P: Aja, por ejemplo, que tiene volumen.

A_{e21}: Forma un círculo casi normalmente.

P: ¿Forma un circulo?, ¿Cómo es eso que forma un circulo?

A_{ni1}: Tienen base cilíndrica.

P: No todos, este no tiene una base cilíndrica (muestra un sólido de revolución similar a la forma que tiene un balón de futbol americano). A ver, ahorita que estamos hablando de sólidos de revolución ya estamos generando la idea, a lo mejor no nos podemos comunicar porque no tenemos el lenguaje adecuado, pero no se preocupen, poquito a poco lo vamos a ir formalizando, ¿A_{e15} me ibas a decir algo?

A_{e15}: Es como una réplica de esa misma figura muchas veces.

P: Ah, eso es padre, es como una réplica de esa misma figura muchas veces, aja, ¿y cómo están acomodadas?, a ver trato de imaginarme lo que dices, es como una figura, enséñame con tu manitas como la voy acomodando, como una figura, otra vez, sí, porque eso me gusto, es una figura…

A$_{e15}$: Bueno, es una figura plana que rota sobre el eje muchas veces.

P: Ok, entonces ella dice una cosa muy importante, y que a lo mejor no hemos aterrizado mucho, ¿qué es un eje?, estamos hablando de ejes y estamos hablando de rotar figuras planas, entonces, como que ya nos estamos formando la idea de lo que es un sólido de revolución. [Da la palabra a A$_{e22}$].

A$_{e22}$: Yo podría decir que es una figura que, es una figura.

P: Una figura un sólido de revolución.

A$_{e22}$: Es una figura en 3D que se forma a partir de girar otra figura de primera o segunda dimensión sobre su propio eje.

P: ¡Wow! Muy bien, fíjense todo lo que dijo: es una figura en 3D que se obtiene a partir de una figura en una dimensión o en dos dimensiones y que gira alrededor de un eje, eso me está gustando, muy bien, allá atrás quien me dice, por allá atrás no los eh escuchado.

A$_3$: Pues que son figuras tridimensionales, o sea con la figura plana que está en el eje, al momento de rotar hace una figura tridimensional.

P: Muy bien.

Como puede observarse, esta puesta en común nos permite apreciar claramente si se logró o no el objetivo de la actividad. En este caso, en base a los comentarios de los mismos estudiantes se puede notar que, en general, la idea que se habían formado es correcta y que se ha logró establecer que los sólidos de revolución se generan a traves de un giro, pues el hecho de que dijeran que se *forma un circulo* (mencionado por A$_{e21}$ en el extracto 1), habla de que notaron que los giros generan la forma circular de los sólidos de revolución, aunque las expresiones de los alumnos no permitan siempre al maestro comprender completamente lo que ellos quieren expresar (como sucedió con este comentario); esto sucede por no utilizar las palabras adecuadas o las que la profesora espera escuchar. Por otra parte, es visible en el extracto anterior, que los estudiantes identificaron otras características y elementos importantes de los sólidos de revolución, tales como el volumen, la tridimensionalidad, la figura generatriz y el eje de rotación.

Además, independientemente de la importancia que tuvo esta discusión para la actividad, consideramos que ésta corresponde a una **situación de institucionalización**, la cual no estuvo a cargo exclusivo de la profesora, sino que fueron los estudiantes quienes aportaron significativamente, expresando sus opiniones, para hacer una recapitulación de sus apreciaciones y establecer una relación clara entre éstas y el conocimiento que debían adquirir.

Estos resultados pueden apreciarse también en la producción escrita (figuras 3.1. y 3.2.) de los estudiantes, pues en la mayoría de sus dibujos tratan de representar la forma circular de sus sólidos de revolución y la tridimensionalidad a traves de algunos efectos de perspectiva.

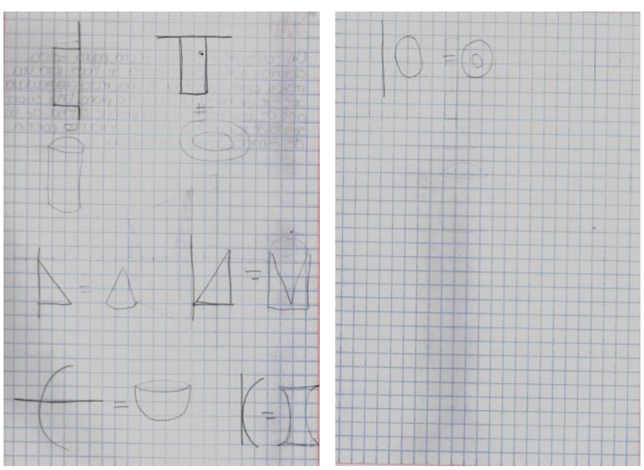


Figura 3.1. Producción escrita $A1A_1$

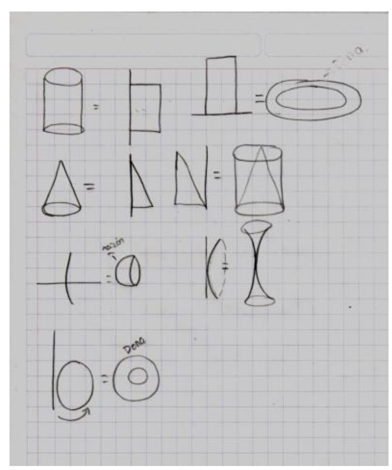


Figura 3.2. Producción escrita $A1A_3$

Todo lo anterior, desde los argumentos que hicieron los alumnos hasta sus producciones escritas, nos indican que los alumnos se encontraron en una **situación de formulación**, pues como se ha mencionado en el capítulo I, en dicha situación existe una fase donde el alumno recoge información sobre las reacciones del medio, de manera que su interiorización lleva a una segunda fase donde, a partir de la información recolectada, el estudiante reconoce, descompone y reformula el conocimiento en un nuevo sistema lingüístico. En este caso, los alumnos recogieron la información que les proporcionó el video y reconocieron (a traves de la observación) los efectos que se producen al rotar una figura plana o una curva alrededor de un eje (como lo es la forma circular que tiene por provenir de un giro), para luego retomar esta información y utilizarla en sus representaciones gráficas. Para esto, se proporcionó la información a traves de una proyección audiovisual que el alumno fue capaz de comprender y retomar para la realización de la actividad. Por lo anterior, asumimos que hubo una interiorización de la información por parte de los alumnos, lo cual les permitió encontrarse en una situación de formulación.

No obstante, cabe destacar que se presentaron algunos errores al identificar y/o representar correctamente los sólidos de revolución que se generaban, y esto lo atribuimos, en cierta parte, a la precariedad que existe en los alumnos para reproducir y representar mental y físicamente formas y figuras en espacios tridimensionales; pues sus producciones escritas muestran déficit de abstracción para procesar información en tres dimensiones. Esto lo podemos observar en las figuras 3.1., 3.2. y en las que se encuentran más adelante. Por ejemplo, se presentan situaciones donde el alumno no logra identificar el sólido de revolución generado, como sucedió en el caso de A_1 y A_3, pues en la segunda figura que se les pido rotar durante la actividad puede notarse que el sólido de revolución que ambos estudiantes proponen es similar pero incorrecto. Otra dificultad con la que se encuentran, es que identifican correctamente el sólido de revolución generado pero no cuidan detalles importantes al momento de representarlo en un dibujo, o bien, les cuesta trabajo dibujarlo en tercera dimensión. Por ejemplo A_1 logro reconocer correctamente el sólido de revolución generado por la sexta figura de la actividad pero no atiende el hecho de que la parábola toca al eje de rotación en un punto, a diferencia de A_3, que para la misma figura, logra representar el sólido de revolución generado correctamente. Por otra parte, tanto A_1 como A_3 tratan de representar lo que se imaginan (*una dona*) pero no alcanzan a dibujarlo correctamente y creemos que esto es debido a que carecen de cierta habilidad para hacer representaciones con perspectiva en tercera dimensión (véanse figuras 3.1 y 3.2).

Consideramos que los errores que tuvieron los estudiantes, en sus producciones escritas, no implican que no se haya logrado establecer la idea de cómo se generan los sólidos de revolución, únicamente los creemos importantes porque nos acercan a conocer las dificultades con las que los alumnos se encuentran para realizar este tipo de actividades. Prueba de esto se encuentra en el caso de la cuarta figura que se pidió rotar durante la actividad 1 (véase figura 3.3).

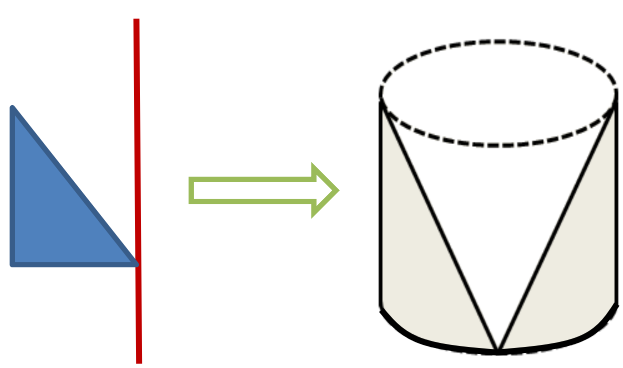


Figura 3.3. Cuarta figura que se pide rotar durante la actividad 1

Para el triángulo mostrado en la figura anterior, A_4 y A_5 lograron reproducir mentalmente el sólido de revolución que se genera al girarlo alrededor del eje vertical (a pesar de que no es un sólido de revolución fácil de identificar), pero los mismos alumnos expresan que no saben cómo plasmarlo en un dibujo, como se muestra en el siguiente extracto.

Extracto 2

A_4: Es un cilindro pero como con un triángulo adentro.
P: No los escucho, ¿qué dijeron?
A_5: Dijimos que es un cilindro, como si tuviera un cono adentro.
P: ¿Ya les cayó el vente a los demás?
A_5: Bien hecho.
A_4: Bien hecho.
A_5: Pero, ¿cómo se dibuja eso? No lo sé dibujar.

En resumen, durante esta actividad, se logró llegar al objetivo a pesar de las dificultades con las que encontró el alumno. Además, se presentaron situaciones de acción, validación y formulación, como se esperaba, y esto contribuyó a que se lograra un aprendizaje significativo en el estudiante.

3.1.1. Elementos a destacar en la actividad 1

Nos parece importante mencionar que en el primer momento de la actividad 1, donde se proyecta la parte del video en la que se pide dibujar los sólidos de revolución generados por las figuras dadas, la profesora pausa repetidamente el video con la intensión de dar suficiente tiempo a los alumnos para realizar sus representaciones, mientras tanto, se genera una discusión entre los alumnos y la profesora acerca de la solución en cada caso. Esta discusión permite que los alumnos comuniquen sus propuestas al resto del grupo y que la profesora intervenga con expresiones o comentarios que guían a los alumnos para saber si su propuesta es correcta o deben modificarla (lo cual puede evitar el error en las respuestas de los alumnos). Esto puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 3

P: ¿Siguiente ya? ¿Ya todo mundo siguió la sugerencia de A_5?, tiene la idea pero no lo sabe dibujar… Siguiente chicos [Reproduce el video] (…) [Pausa el video] ¿otra vez? [Repite el video: *¿qué esperas que suceda con una parábola?*] (…)

A_4: Pues como un tazón ¿no? (Dirigiéndose a su equipo).

P: Ajá, ¿parada o acostada?

A_s: Acostada (…)

P: Ustedes me dicen, ¿qué fue A_{e1}? [Dirigiéndose al alumno] ¿Qué fue?

A_{e1}: <u>Como un medio círculo.</u>

P: <u>Como un medio circulo, mmm… algo parecido</u>

A_{e2}: Como una media esfera.

P: Algo parecido.

A_{ni1}: Como un plato.

P: Como un plato, ¿de cuáles?

A_{ni2}: Como un plato hondo.

A_4: Como un tazón.

P: <u>Ándale, eso como que se parece más</u> [Muestra emoción] pozolero ¿no?, [Reproduce el video] (…) [Pausa el video] ¿otra vez?

A_s: Sí.

P: Cambiaron el eje de rotación acuérdense [Refiriéndose a la parábola del video] (…) [Pausa el video y murmuran los estudiantes, teniendo noción de lo que dibujaran], quiero ver sus dibujos [Se acerca al equipo 8], ¿el qué sigue?, ¿listos? [Reproduce el video] (…) [Pausa el video y los alumnos murmuran discutiendo el posible sólido de revolución] (…) [Repite el video]. <u>Dice A_{e3} que es una dona, yo le creo, pero también la rosquilla</u> [Concluye el video].

En el extracto 3 es muy notable que las intervenciones de la profesora influyen en las decisiones de los alumnos, pues con sus expresiones les indica qué tan cerca o lejos están de la respuesta correcta, por ejemplo, cuando A_{e1} propone que se trata de un medio circulo y ella responde con cierta duda que se trata de algo parecido, le está indicando que está en un error pero cerca de la idea correcta. O bien, cuando le proponen que es un plato hondo o un tazón y ella afirma que esas propuestas se parecen más a la solución, valida las respuestas de los estudiantes. Pero es más evidente la influencia de las opiniones de la profesora en los alumnos cuando muestra con el video la última figura por rotar y comenta que A_{e3} dice que es una dona, y que ella le cree.

Por estas razones, consideramos que estos sucesos inducen al estudiante a la solución, ya sea por intervención de sus compañeros o del profesor (lo cual puede cambiar su perspectiva inicial) y no por sus propios medios. Es por eso que catalogamos este suceso como un **efecto Topaze**. Es así como llegamos a la conclusión de que los resultados de esta actividad quedaron determinados, en cierta medida, por el efecto Topaze que se presentó durante su desarrollo. Sin embargo, la presencia de este efecto influyó, pero no obstaculizó el cumplimiento del objetivo inicial de la actividad.

3.2. Análisis de la actividad 2

Nombre de la actividad: Clasificación de sólidos de revolución Objetivo: Conjeturar qué objetos son sólidos de revolución y qué objetos no lo son, y además, determinar el eje de rotación de los que considere como sólidos de revolución.

La facilidad que se le da al alumno, en esta actividad, de explorar y manipular los objetos que se le entregan para que sean clasificados en sólidos y no sólidos de revolución, fue un factor determinante para la realización efectiva de ésta; pues los alumnos lograron *conjeturar* (y no solo decidir) qué objetos eran y qué objetos no eran sólidos de revolución bajo argumentos válidos que les permitieron defender sus ideas frente a sus compañeros de equipo, argumentos basados en la observación e identificación de características importantes de los objetos que se les entregaron y apoyados de los conocimientos que hasta el momento habían adquirido. Es así como durante esta actividad los alumnos se encontraron en una **situación de acción** y posteriormente de **formulación**. Esto se puede observar en los episodios que se presentan a continuación en los extractos 4 y 5.

Extracto 4

P: Dice que este no es [señala una botella similar a la de la figura 3.4. A]. Tú explícale [refiriéndose a A_5].

A_5: Porque de aquí para abajo [señala la parte cuadrangular] no existe ninguna figura que pueda formas esto, porque una figura por el simple hecho de que tenga un eje de rotación, su base tendría que formar un circulo […] pero no hay ninguna figura que forme un falco como cuadrado.

Extracto 5

A_{e4}: Definitivamente este no es uno, un sólido de revolución, no puede ser [Se dirige a sus compañeros de equipo refiriéndose a una botella con base cuadrangular similar a la de la figura 3.4 A].

A_{e5}: ¿Por qué?

A_{e6}: Porque esta cuadrado [Señala la base de la botella].

A_{e4}: Aja, esta cuadrado aquí. No puede ser un sólido de revolución, aparte esta como un… como algo plano, tiene muchas cosas planas. No creo que sea, porque si girara muchas veces....

A$_{e7}$: Se formaría un cilindro.

(…)

P: ¿Ustedes ya acabaron de clasificarlos?

A$_{e4}$: Sí.

P: Okey, platíquenme cuáles si y por qué y cuáles no, por qué. ¿Con cuáles empezamos? ¿Con los que no?

A$_{e4}$: Con los que no. Pues este [toma la botella que similar a la de la imagen 3.4. A] porque si observamos en una figura que gira alrededor de un eje no podría quedar asi, tendría que quedar circular, bueno que su aspecto plano sea como un círculo (…) Si fuera realmente un sólido de revolución tendría que estar un poco circular y tendría que tener un aspecto…

A$_{e6}$: Como una onda.

A$_{e4}$: Ajá.

P: Debería ser circular entonces. Ustedes piensan que para que sea un sólido de revolución debería de ser circular, como que tienen la idea de eso, como que tienen la idea de eso pero no lo pueden expresar. Okey, por ejemplo estoy de acuerdo con eso… ¿En ese por qué si o por qué no? ¿Ese es no o sí? [Señala una botella como la que se muestra en la figura 3.4. B].

A$_{e4}$: Ese no.

P: ¿Por qué?

A$_{e6}$: Porque si se da cuenta la figura tiene mucho (…) [palabra inaudible] ósea, como lo que pasa en esta [señalando otro objeto con grecas].

P: Con las grecas. Ajá ¿Qué más?

A$_{e6}$: Ajá, y no llega a una forma que este asi como…

A$_{e4}$: Uniforme.

[…]

A$_{e5}$: Ósea si lo ponemos a comparación de los de los videos, el eje a la hora de girar no formaría la parte aquí completa [refiriéndose a la parte de la botella que no es completamente circular] igual que lo que pasaba con el otro, con el del cuadrito, porque acá corta.

P: […] Estos ya me dijeron que no [señala los objetos clasificados por no sólidos de revolución por el quipo] Okey, este tampoco es [toma un objeto similar al de la figura 3.4. C] tampoco es. ¿Por qué?

A_{e4}: Pues de echo porque tiene un aspecto rectangular, ósea como que este lado mide más que este [señala la parte más larga y la más angosta del objeto respectivamente] De hecho no puede ser, tiene que cumplir con un requisito, tiene que topar asi todo [mientras tanto manipula el objeto con la manos].

P: Tiene la idea pero no lo puede explicar.

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 1)

Figura 3.4. Objetos similares a los que se proporcionaron a los alumnos para la actividad 2

En los fragmentos presentados anteriormente, podemos darnos cuenta que los alumnos reconocieron algunas regularidades de los sólidos de revolución perceptibles para ellos, tales como su forma circular y continua. Esto lo hicieron en base a la información que recibieron a partir de la observación y la manipulación de los objetos, información que fueron capaces de retomar, lo cual implicó reconocerla, descomponerla y reformularla en un nuevo sistema lingüístico familiar para ellos; es decir, el alumno fue capaz de reconocer las características que definen a los sólidos de revolución y, más aún, de reformularlas con sus propias palabras para conjeturar qué objetos, de los que recibieron, eran o no sólidos de revolución. Cabe destacar que esto lo lograron a pesar de que no contaban con las palabras adecuadas para explicar correctamente sus ideas. Es así como deducimos que los alumnos se encontraron en una **situación de formulación**.

También hubo **situaciones de validación** durante esta actividad, pues se generaron discusiones entre los equipos para decidir qué objetos eran y qué objetos no eran sólidos de revolución, en donde los alumnos tenían que argumentar sus opiniones ante sus compañeros para convencerlos de sus propuestas y en algunas ocasiones los alumnos tuvieron que aceptar las razones que les daban sus compañeros para cambiar su punto de vista. Este tipo de situación la podemos identificar en los extractos 6 y 7 que se encuentran más adelante.

3.2.1. Elementos a destacar en la actividad 2

Nos parece importante mencionar que a los estudiantes no les causo problema identificar correctamente el eje de rotación y la figura generadora en los objetos que clasificaron como sólidos de revolución, incluso, algunos alumnos los identificaron correctamente en objetos huecos y no dejaron pasar desapercibido este hecho. Esto puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 6

A_{e4}: O sea, lo que queremos buscar es una figura que pueda darnos este espacio por dentro [dirigiéndose a A_{e5} y señalando el interior de un vaso que consideraron como sólido de revolución].

A_{e5}: No es una figura la que da eso, solamente es una línea. Es como la del plato.

A_{e4}: Eso sí es cierto.

A_{e3}: El plato estaba formado por una parábola acostada.

A_{e4}: Ajá de hecho nada mas era una parábola.

[…]

P: ¿Puedes explicarlo A_{e4}?

A_{e4}: Si, bueno está esta figura de revolución, el sólido de revolución, entonces pues tiene el espacio de adentro y pues la recortamos asi (para ilustrar véase figura 3.5.) con el espacio para que a la hora de girar… No se nota porque esta esto muy delgadito y pues se estira mucho pero si se pudiera ver se giraría y pues se formaría tanto la parte de afuera y lo del interior.

P: Exacto. Muy bien, o sea que no es sólido realmente ¿no? esta hueco por dentro.

A_{e4}: Esta hueco.

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 1)

Figura 3.5. Trabajo del equipo 6 en la actividad 2

El extracto anterior es una muestra de que, para los objetos clasificados por los alumnos como sólidos de revolución, no hubo complicaciones al identificar la figura generatriz y su eje de rotación. Sin embargo, para la clasificación de los objetos en sólidos y no sólidos de revolución, se presentó repetidamente (en varios equipos) una complicación. Esto sucedió cuando se trataba de decidir si los objetos con formas ovaladas (como el de la figura 3.4. *C*) son o no sólidos de revolución, pues los alumnos llegaron a creer que dicha forma ovalada implica que el cuerpo sea un sólido de revolución. De alguna forma se aferraron a esa idea, pues aunque buscaban insistentemente la figura que debían rotar asi como su eje de rotación y no los encontraban, no descartaban la posibilidad de que dichos objeto fuesen sólidos de revolución y argumentaban su opinión tratando de convencer a sus compañeros, pues no solo comunicaban su propuesta sino la afirmaban y la sostenían, lo cual dio lugar a una **situación de validación**, situación que se puede apreciar claramente en el siguiente extracto.

Extracto 7

A_{e10}: Haber gíralo [se dirige a A_{e11} y se refiere a un objeto similar al de la figura 3.4. *C*] (A_{e11} gira el objeto) Pero no va a generar la base, ¿o sí?

A_{e11}: Bueno no.

A_{e10}: Es que en mi opinión sólo genera, si te das cuenta, en pico como ese [señala un esbozo del pizarrón] o en circular, porque el eje no te puede dar eso.

A_{e11}: ¿Cómo en el cono que era un pico lo que se formaba pero abajo era circular?

A_{e10}: Ajá, porque has de cuenta que… mira yo digo por esto, que es como (inaudible) [se refiere a la forma ovalada y no circular del objeto], que cuando está girando va generando el círculo, y este no [muestra a sus compañeros una botella similar a la de la figura 3.4. A].

A_{e11}: Entonces serian estos dos [refiriéndose a la botella cuadrangular y al estuche de cepillo dental].

A$_{e23}$: Entonces seria puesta al revés ¿no? [refiriéndose al estuche de cepillo dental]

A$_{e11}$: Pero aun así. O ¿cómo dices tú?

A$_{e23}$: Así [Coloca el estuche de cepillo dental verticalmente].

A$_{e25}$: Ahorita sería una parábola muy chiquita.

A$_{e24}$: ¿No o sí? A ajá puede ser.

A$_{e25}$: Tiene forma**.**

A$_{e24}$: Puede ser asi, no de esto [lo compara con una media esfera dibujada en su libreta].

A$_{e11}$: Ajá, pero muy…

A$_{e24}$: Ajá, muy delgada.

A$_{e10}$: Pero así, haz de cuenta si ponemos una parábola asi…

A$_{e11}$: Si lo ves asi [coloca el objeto de forma horizontal] nada más termina acá [señala la base del objeto]. Puede funcionar [mientras gira el objeto colocado horizontalmente con respecto al eje y] nada más terminando hasta acá. O sea imagínate la gráfica [inaudible] ndamás hasta acá. Podría ser, solo que muy muy chiquita.

A$_{e23}$: Solamente que fuera así. [Muestra a sus compañeras un esbozo en su libreta]

A$_{e11}$: No.

A$_{e10}$: No, o sea tú te estas refiriendo a… O sea tú te refieres asi [hace una simulación con el dedo es su libreta].

A$_{e11}$: Ajá, imagínate asi la parábola, a mira así, imagínate que viene aquí la parábola [Mientras hace el esbozo de la figura 3.6.] Como algo asi ¿no? [Muestra su dibujo a sus compañeros].

A$_{e10}$: Pero…

A$_{e11}$: Bueno, según yo.

A$_{e23}$: Ajá.

A$_{e11}$: No sé qué opinen.

A$_{e10}$: ¿Y si le pegamos diurex y vemos de una ves?

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 4)

Figura 3.6. Producción escrita A2E4

Extracto 8

A_4: Y este a lo mejor podría ser [se refiere a un objeto similar al de la figura 3.4. *C*] Pero tendríamos que checarlo bien, porque tiene como que esto, pero podemos dividirlo a la mitad entonces como que ya sale como que la forma.

P: A, a ver, eso que me dices es importante, o sea ¿dónde pondrías tu eje para que fuera un sólido de revolución? Por ejemplo…

A_4: Es que… [Duda su respuesta].

P: Él ya lo hizo [señala el trabajo de A_5].

A_3: Es que sería […] se puede decir que está en el punto de origen la mitad de una parábola y al momento de rotar se podría de decir que formaría la figura [muestra el objeto similar al de la figura 3.4. *C*]. Sería como que la mitad de una parábola.

A_4: No sé.

P: Pues tal vez les haga falta analizar un poquito más.

A_4: Ajá, es lo que estoy pensando porque como que no me convence, no me termina de convences su forma.

A_5: Yo si…

P: Haber convéncelo y ahorita me convences a mi [dirigiéndose a A_5].

A pesar de las dificultades que se les presentaron a los alumnos en el objeto mencionado (como se observa en los extractos 7 y 8), finalmente, a partir de una puesta en común, se llegó a la conclusión de que no era un sólido de revolución, y esto bajo los argumentos de los mismos estudiantes, como puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 9

P: Y, a ver, el del millón, porque con este estaba observando que hay mucha confusión, ¿este es o no es [sólido de revolución]? [se refiere al objeto similar al de la figura 3.4. *c)*].

A_s: ¡No!

P: No es, ¿por qué?

A_4: Porque no cumple con lo de tener una circunferencia o un círculo que pueda determinar que tiene una rotación [La profesora con su dedo señala un circulo en la base del objeto en cuestión y A_4 señala la base de la botella que tiene en su mano].

A_5: No cumple mis reglas.

P: No cumple las reglas de A_5, A_4 dice que porque no tiene una base como habían mencionado de forma circular.

3.3. Análisis de la actividad 3

Nombre de la actividad: Manipula sólidos de revolución con cortes.

Objetivo: Reconocer que los cortes perpendiculares al eje de rotación de cualquier sólido de revolución, son circulares.

Nuevamente, como en la actividad 2, los alumnos tienen la oportunidad de interactuar físicamente con su medio, en este caso con el material didáctico que se les proporcionó, recordemos que este consistió en dos conos de madera, uno con cortes paralelos y otro con cortes perpendiculares al eje de rotación. Este artefacto debió favorecer a que los alumnos se encontraran en una situación de acción mediante la cual pudieran reconocer la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación en uno de los conos (para que posteriormente fuese generalizada), y más aún, aprovecharla para darse cuenta que dichas circunferencias están determinadas por el giro de la figura que se rota para formar el sólido de revolución. Sin embargo, en esta actividad no se logró llegar fácilmente a este tipo situación como se esperaba, pues los alumnos exploraron el material y lo manipularon durante algunos minutos pero no pusieron atención en la forma de los cortes de cada cono, sino que buscaban la figura que generaba cada sólido, por esta razón, la profesora al darse cuenta que los estudiantes se encontraban un tanto lejos de las observaciones que se necesitaban para continuar con el desarrollo de la actividad, decidió ayudar a los alumnos a ubicar su atención en las formas de los cortes en cada cono. Los extractos que se presentan a continuación muestran estos hechos.

Extracto 10

P: A ver chicos, después de que ya los han estado manipulando, ¿qué diferencia hay entre uno y otro?, entre este por ejemplo [Refiriéndose al cono con cortes paralelos al eje de rotación] y el otro [Refiriéndose al cono con cortes perpendiculares al eje de rotación].

A_{ni1}: Los cortes

P: ¿Qué diferencia hay?

A_{e8}: Que tienen cortes diferentes.

P: Tienen cortes diferentes, ¿y que genera cada corte?, ¿ya observaron?

A_{ni2}: Eje de rotación diferente.

P: Ajá, ok, entonces a ver, traten de analizarlo y me platican, ¿sale?

Así, con ayuda de la profesora, los alumnos logran diferenciar la forma de los cortes perpendiculares con la de los cortes paralelos al eje de rotación de los conos que les proporcionan, pero más aún, pudieron identificar rápidamente que en los cortes perpendiculares al eje de rotación se forman circunferencias

Extracto 11

P: Todos los cortes son paralelos, por lo tanto todos… ¿qué dijimos con respecto al eje de rotación?

A_{e14}: Perpendiculares al eje de rotación.

P: Perpendiculares, ajá, y ¿qué más? ¿Qué más observaron?

A_{e3}: Por ejemplo que en este [muestra el cono con cortes perpendiculares al eje de rotación] todas sus bases son redondas y en el otro no.

P: Eso es una observación muy importante. ¿Ya se dieron cuenta? Dice: en estos [muestra el cono que mostro A_{e3}], los cortes todos son redondos y en el otro no.

Aunque para notar la diferencia entre los radios de las circunferencias generadas por los cortes en función del punto de corte, la profesora vuelve a recurrir a guiar las respuestas de sus alumnos para conseguir la respuesta deseada.

Extracto 12

P: Quiero que me digan… Todas las cosas las han ido descubriendo. Los cortes me generan aquí círculos ¿no? [Muestra a los alumnos los cortes de uno de los conos]. Generen círculos, okey. ¿Y cómo son esos círculos?

A_{ee8}: El diámetro de la parte de abajo coincide con el de la parte de arriba del círculo.

P: Claro, estos coinciden.

[…]

P: Es algo más sencillo, ya están pensando mucho, están pensando muy allá.
A_{ni1}: Está bonito.
P: Está bonito, ¿qué más?
A_{ni2}: Es amarillo.
P: ¿En tamaño cómo son?
A_{ni3}: Proporcionales.
A_{e8}: Son diferentes.
P: Son diferentes. ¿Por qué?
A_{ni4}: Por la forma de la figura.
P: ¿De qué depende el tamaño?
A_{ni5}: De la altura del triángulo… Mmm…
A_{e13}: Yo pienso que de la base y de la altura.
P: Bueno, ¿de qué depende el tamaño de mis círculos? A ver, piensen un poquito más en eso, a ver quién es el primero que me dice de qué depende el tamaño de los círculos.
A_{e6}: De dónde se ubica el corte.
P: Exacto de dónde ubicamos el corte, por supuesto que sí lo corto acá [señala un corte en medio del cono] va a ser más pequeño que este [señala un corte abajo del primero] pero más grande que este [y ahora señala un corte arriba del primero que señaló], ¿sí o no?, ¿ya les cayó el veinte a todos?
A_{s}: Sí.

Por lo anterior podemos decir que fue muy difícil que los alumnos respondieran lo que la profesora quería escuchar, sin embargo después de un rato lograron descubrirlo y expresarlo con palabras sencillas, echo que no hubiera sido posible sin la intervención de la profesora.

Todo lo anterior se hizo con la intensión de que, finalmente, los alumnos fueran capaces de reformular toda esta información de forma plausible para ellos y para sus compañeros. Esto implicaría que los estudiantes generalizaran la idea de los cortes perpendiculares al eje de rotación del cono para todos los sólidos de revolución, y de esa manera llegar a una situación de formulación. Sin embargo en esta actividad consideramos que no fue posible que los alumnos llegaran a dicha situación como se esperaba, pues a pesar de que a partir de la discusión grupal comprendieron la regularidad de la forma circular en los cortes perpendiculares al eje de rotación del cono y la diferencia en los radios de dichas circunferencias (después de haberlos medido), no fue posible que interiorizaran la idea al grado de llegar a la conclusión de que esto se cumplía para todos los sólidos de revolución. Así es como todo se redujo a una **institucionalización** a cargo de la profesora (como una situación de enseñanza tradicional), donde al final de la discusión, al darse cuenta de que para los alumnos no era clara la generalidad, decide revelar la idea de que en los sólidos de revolución los cortes perpendiculares al eje de rotación *siempre* son circulares, esto a partir de una recapitulación de los conocimientos que habían adquirido hasta ese momento (véase extracto 13).

Extracto 13

P: Vamos a cerrar la sesión. ¿Qué hemos aprendido hasta hoy? ¿Quién me dice? Vamos a contar qué hemos hecho para que no nos vayamos en blanco. […] Por lo tanto vamos a tratar de pensar en todo lo que hemos hecho, nos va a ayudar si lo comentamos entre todos. ¿Quién empieza? ¿Qué hemos hecho hasta hoy?

A_2: Pues empezamos a buscar cuales si pertenecen a sólido de revolución y cuáles son las figuras que nos llevan a conllevar que es un sólido de revolución, por qué si y por qué no, y cuántas figuras pueden formar ese sólido.

P: A perfecto, traducción: Dice A_3 (con palabras más, palabras menos) hemos aprendido a identificar los que sí son sólidos de revolución y los que no lo son. Y también hemos identificado la figura que genera esos sólidos de revolución.

A_4: Y también en qué movimientos se generan los sólidos de revolución.

P: ¿En qué movimiento?

A_4: Circular.

P: A la forma de movimiento. Pero algo bien importante para generar un sólido de revolución necesitamos como dijeron la figura, y ¿qué otra cosa necesitamos?

A_s: El eje de rotación.

P: El eje de rotación, okey. También descubrimos otra cosa en los sólidos de revolución, ¿qué descubrimos? [Simula cortes con las manos]. Lo último, la última actividad, ¿qué descubrimos en esa actividad?

A_5: Los cortes.

P: Los cortes ¿qué? paralelos o perpendiculares al eje de rotación. ¿Qué pasa con esos cortes? ¿Qué me van generando? ¿Qué figuras?

A_{e15}: Un cono.

P: Si pero, la última actividad nos enseñó eso, ¿qué nos genera? ¿Qué dijeron por allá?

A_{ni1}: Círculos.

P: Nos genera círculos, por supuesto, muy bien. Entonces también descubrimos que los sólidos de revolución, si hacemos cortes perpendiculares al eje de rotación, me dijeron, siempre me generan círculos. Incluso esos círculos ¿son iguales todos?

A_s: No.

P: ¿En qué solidos de revolución serán iguales los círculos?

A_s: En un cilindro.

P: En un cilindro todos son iguales, ¿en un cono cómo fue? Como que iban ¿qué?

A_{ni2}: Creciendo.

P: Aumentando o disminuyendo dependiendo de cómo lo hubieran puesto. ¿Y de qué dependía el tamaño del diámetro del círculo?

A_{e1}: De donde estuviera el corte.

P: De qué parte elegían para hacer el corte.

3.3.1. Elementos a destacar en la actividad 3

En los extractos 10, 11, 12 y 13 presentados anteriormente, podemos darnos cuenta de que durante la actividad 3 estuvo presente continuamente la guía de la profesora para llegar a las respuestas que se esperaban obtener, lo cual para nosotros significa que el **efecto Topaze** se presentó en varios momentos a lo largo de la actividad.

Uno de esos momentos se presenta en el extracto 10, donde es claro cómo las preguntas que hace la profesora a los alumnos, tales como: ¿qué diferencia hay entre uno y otro? ¿y que genera cada corte? ¿ya observaron?, son determinantes para fijar la atención de los alumnos en lo que la profesora quiere que observen, es decir va guiando a los alumnos para que lleguen a la característica de interés en esta actividad, tomando en cuenta únicamente los comentarios que le parecen convenientes para el momento; lo cual les ayuda significativamente a reconocer la regularidad de los cortes perpendiculares al eje de rotación en uno de los conos y la diferencia con los cortes paralelos a dicho eje. Pero no fue el único momento en el que se presentó este efecto, también lo podemos percibir en los extractos 11, 12 y 13, por lo que podemos decir que este efecto fue muy recurrente durante esta actividad.

Además, se presentó un nuevo elemento de la TSD que no se esperaba encontrar tal como se presentó, la **institucionalización**, limitada por estar totalmente a cargo de la profesora a manera de una situación de enseñanza tradicional. Cabe destacar que una de las razones a las que atribuimos estos sucesos es a la falta de tiempo para permitir que los alumnos identificaran por si mismos las regularidades en el material que se les entrego y luego retomaran esta información para generalizarla y reformularla como una característica de todos los sólidos de revolución.

Cabe destacar que aunque el objetivo de la actividad únicamente buscaba que los alumnos reconocieran la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución, la profesora comienza a introducir la idea de la diferencia que existe entre los radios de dichas circunferencias, considerando diferentes cortes; idea que debía ser completamente aterrizada en la actividad 6.

3.4. Análisis de la actividad 4

Nombre de la actividad: Regresando a los sólidos clasificados.

Objetivo: Concluir que la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación de un objeto, es una condición necesaria para que sea un sólido de revolución.

En esta actividad los alumnos debían aprovechar la característica común que habrían descubierto en los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución y utilizarla para rectificar la clasificación de los objetos que hicieron anteriormente, sin embargo, al inicio de la actividad se pudo notar (por los comentarios de los alumnos) que a pesar de que ya habían tenido una puesta en común acerca de que el giro de la figura generadora (alrededor del eje de rotación) provoca una forma circular en los cortes perpendiculares al eje de rotación, eso no había sido suficiente para que los alumnos se convencieran de que la forma circular en lo cortes perpendiculares al eje de rotación, es una condición necesaria para clasificar un objeto como sólido de revolución, incluso, a pesar de que al final de la actividad anterior la profesora mencionó que esa era una característica común de todos los sólidos de revolución. Esto acontece en el extracto que se presenta a continuación, donde la profesora comienza la clase recordando lo que han hecho hasta el momento, y trata de inducir a los alumnos a que recuerden y compartan con sus compañeros la idea que les dio la sesión anterior acerca de que los cortes perpendiculares al eje de rotación forman circunferencias en todos los sólidos de revolución.

Extracto 14

P: ¿Qué me comentaban a cerca de hacer cortes perpendiculares al eje de rotación? ¿Qué me comentaron ustedes?

A_{e2}: ¿Perpendiculares? Que iban a ser paralelos al eje de rotación.

P: ¿Paralelos? ¿Qué me comentaban a cerca de los cortes que hacíamos perpendiculares al eje de rotación? ¿Qué me comentaron? ¿Qué figuras se formaban?

A_s: Círculos.

P: Se formaban círculos. ¿Eso pasará en todos los sólidos de revolución o sólo en algunos?

A_s: En todos.

A_{ni1}: En algunos.

P: ¿En algunos?

A_s: En todos.

A_{ni1}: En la mayoría.

P: ¿En todos?, ¿en la mayoría? A ver entonces todavía nos falta ver más sólidos de revolución. A ver, saquen sus sólidos de revolución, nada más los que habían clasificado como que sí son sólidos de revolución. ¿Ya los tienen todos? Entonces por equipos fíjense en uno y vamos a hacerle cortes entonces, para ver como son las figuras que se obtienen al hacer el corte.

A consecuencia de lo anterior, el sentido de la actividad tuvo que cambiar, ahora en lugar de utilizar el conocimiento de la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación para verificar la clasificación previa de los objetos, tuvieron que utilizar dichos objetos para tratar de convencerse de que los cortes en cuestión siempre forman circunferencias cuando se trata de un sólido de revolución.

Cabe mencionar que a pesar de que se invirtió el sentido de la actividad, los alumnos se encontraron en una **situación de acción**, donde a traves de la manipulación del material didáctico, con el cual pudieron hacer cortes a los objetos que consideraban como sólidos de revolución, pudieron darse cuenta de que al menos en todos los objetos que eligieron para simular cortes, les resultaron circunferencias en los cortes perpendiculares al eje de rotación; con lo cual, la profesora dio por hecho que ya todos estaba convencidos de que en todo sólido de revolución se cumple esta característica. Esto puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 15

P: ¿En todos son círculos?
A_5: Casi.
A_3: Casi.
P: ¿O en alguno no les dio un circulo? ¿Qué es ese casi?
A_4: No, si en todos nos dio círculos.
A_3: Bueno, en este si todos nos dan círculos [muestra una botella clasificada como sólido de revolución].
P: ¿Todavía dudan que en otros no les den círculos?
A_3: Eh… no [duda en dar una respuesta].
P: En este equipo [se dirige al equipo 5], ¿en todos les dan círculos, les forma un circulo cuando hacen los cortes perpendiculares al eje de rotación?
A_{ni1}: Sí.
P: Acá en este [se dirige al equipó 3] ¿les dio circulo?
A_{ni2}: Sí.
P: ¿Todavía hay duda de que no se formen círculos cuando hacemos los cortes?
A_s: No.
P: ¿No?, ¿Ya sabían o lo acaban de comprobar? o ¿ya estaban seguros?

A_s: Ya estábamos seguros.
P: Eso habíamos comentado al final de la clase pasada ¿no?

Finalmente, se esperaba que de este momento se pasara a un proceso de corrección donde los alumnos utilizaran sus argumentos (basados en sus observaciones) para determinar si la forma circular de los cortes es una condición necesaria para que un objeto sea sólido de revolución, de manera que pudieran exponer sus razones para convencer a los demás sobre sus propuestas y aceptar razones válidas para cambiar su punto de vista (en caso de ser necesario), llegando así a una situación de validación. Posteriormente también se esperaba llegar a una situación de formulación, esto a partir de que los estudiantes se dieran cuenta de que los objetos que no cumplían con esta condición no podrían provenir de un giro y así concluyeran que la forma circular en los cortes perpendiculares al eje de rotación es una condición necesaria para los sólidos de revolución. Lamentablemente no sucedió como se esperaba, los estudiantes no lograron encontrarse en ninguna de las dos situaciones, esto fue debido a que todo se redujo a una pequeña puesta en común a cargo de la profesora (como pudo observarse en los extractos anteriores), donde a traves de preguntas guiadas llego a establecer en los alumnos la idea de que los cortes perpendiculares al eje de rotación en los sólidos de revolución siempre formarían círculos, provocando que los estudiantes ya no lo analizaran más a fondo para concluirlo por ellos mismos.

Cabe destacar que el objetivo de la actividad también pudo haber conllevado a la existencia de una situación de institucionalización, surgida a partir de la necesidad del docente por asegurarse de la consistencia de la conclusión esperada. Sin embargo, al final de esta actividad no existió tal situación, pues se cerró la actividad bajo el supuesto de que los alumnos ya tenían clara la idea (únicamente con las preguntas que la profesora les hizo en el extracto 15) y que estaban completamente convencidos.

3.4.1. Elementos a destacar en la actividad 4

Es evidente que con las preguntas guiadas que hizo la docente en algunos momentos de la actividad (mostrados en los extractos 14 y 15), condujo a los alumnos a las respuestas que esperaba obtener, por lo cual consideramos que nuevamente estuvo presente el **efecto Topaze** a lo largo de esta actividad.

Además del efecto Topaze, apareció un efecto más del contrato didáctico. Esto sucedió a partir de que la profesora, por su deseo de insertar cierto conocimiento en actividades más simples para el alumno, comenzó a conducirlo a sustituir la problemática verdadera por otra más conveniente para el alumno, asumiendo en el estudiante un conocimiento que no había adquirió completamente, sólo por dar una respuesta aceptable debido a la simplicidad de problema. Esto es a lo que llamamos un **efecto Jourdain**, que se presentó cuando cambió el sentido de la actividad al darse cuenta de que los alumnos no estaban convencidos de que en todos los sólidos de revolución se forman circunferencias en los cortes perpendiculares a su eje de rotación y decide utilizar la actividad para que los alumnos se convenzan (véase extracto 14).

Además, cabe destacar que a pesar de que la variación de los radios en las circunferencias formadas en lo cortes de los sólidos de revolución no es un tema considerado para estas primeras actividades, la profesora continua introduciendo en sus alumnos la idea de la variación de los radios perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución e induciendo a los alumnos a encontrar la razón de dicha variación, aprovechando el material que los alumnos están manipulando (como lo hizo desde la actividad 3). Esto se aprecia en la escena que se presenta a continuación en el extracto 16.

Extracto 16

P: ¿Y ya tomaron el radio?, ¿ya midieron? Traten de hacer un esquemita y marquen el radio y díganme dé qué depende el tamaño del radio.

A_{e2}: A el tamaño del radio depende de dónde hagas el corte.

P: De dónde hagas el corte.

A_4: Pero también depende de qué tipo de figura, porque por ejemplo en el caso de un cono pues si varía el tamaño de diámetro del círculo que se forma.

P: ¿Y por ejemplo en ese? [Se refiere a una botella clasificada como sólido de revolución por los alumnos (véase figura 3.7.)].

A_4: Pues por ejemplo estas que son iguales [se refiere a los extremos de la botella] no varían mucho es casi similar. Esta si varia, puede variar pero por lo mismo de la figura que está aquí en medio.

[…]

P: Entonces dice su compañero que de qué depende el tamaño del radio, A_{e2}.

A_{e2}: De donde hagas… Bueno en el caso de otra figura, por ejemplo el cono, depende de dónde hagas el corte, pero por ejemplo si es un cilindro perfecto se puede decir, tienen el mismo tamaño donde hagas el corte.

P: Exacto. ¿Y en un cono?

A_{e2}: Pues en un cono no.

Figura 3.7. Objeto similiar a uno utilizado por los alumnos para la actividad 2

Este hecho, tal como es planteado hasta el momento, pareciera no afectar el proceso de aprendizaje de los alumnos, sin embargo para ese conocimiento se tiene una actividad cuyo objetivo es que los alumnos *descubran* la variación de los radios y dé qué dependen, esto después de haber asimilado que los sólidos de revolución son generados por funciones para estar en condición de descubrir que la variación depende de la función generatriz, por lo cual se consideró hasta la actividad 6. El hecho de que ya tengan esta idea, anticipa a los alumnos de dicha variación en los radios, lo cual ya no permitirá que lo descubran por ellos mismos en la actividad 6.

3.5. Análisis de la actividad 5

Nombre de la actividad: Con hojas de papel milimétrico.

Objetivo: Comprender que basta girar una función (y no necesariamente una figura simétrica plana) alrededor del eje horizontal para generar un sólido de revolución.

Comencemos por recordar que esta actividad consistía en dibujar, en hojas de papel milimétrico, el contorno de los objetos que los alumnos consideraron como sólidos de revolución, haciendo coincidir el eje de rotación de su objeto con el eje horizontal del plano cartesiano. Posteriormente se le pediría al alumno borrar de su dibujo la parte inferior al eje x (véase paso 2, figura 3.8.) e identificar el sólido de revolución que se generaba con esta transformación en su esbozo. Luego, debía borrar también los extremos paralelos al eje y, de manera que únicamente quedara una función (como se muestra en el paso 3 la figura 3.8.) y repetir el experimento de girar la figura para determinar el sólido de revolución generado. Todo esto con el fin de que los alumnos se percataran de que aun con las transformaciones en sus esbozos, los sólidos que se generan son *los mismos*, con la única diferencia de que el generado en el paso 2 es con tapas y el que se genera con el paso 3 no tiene tapas.

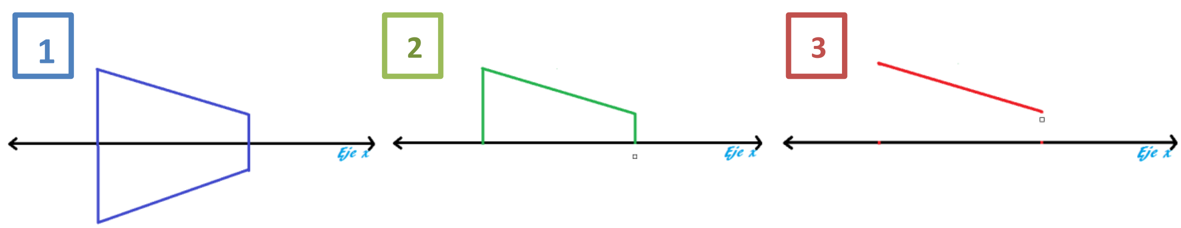


Figura 3.8. Esbozo del proceso que debían seguir los alumnos en la actividad 5

Cabe mencionar que las acciones que conforman esta actividad fueron diseñadas bajo la hipótesis de que algunos estudiantes tendrían la idea errónea de que la figura generatriz de sus sólidos de revolución debería ser una figura simétrica (respecto al eje de rotación) y con la intensión de que el alumno se diera cuenta de que, aun con los cambios efectuados en su diagrama, se genera el mismo sólido de revolución que tenía inicialmente, lo cual implicaría que el alumno se encontrara en una situación de formulación, donde pudiera retomar este hecho y reformularlo de manera que fuese claro para él.

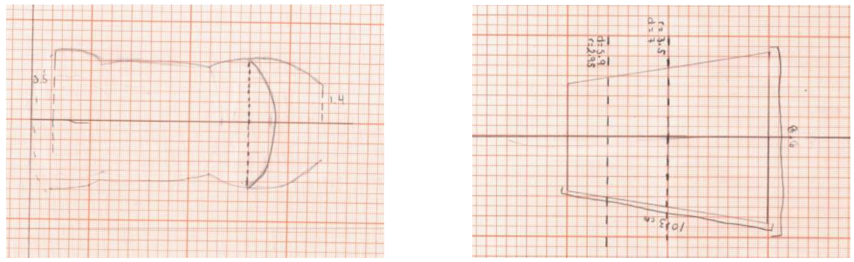
Durante la ejecución de la actividad 5, pudimos comprobar la hipótesis de que algunos estudiantes tendrían la idea de que, para generar sus sólidos de revolución, la figura generatriz debería ser una figura simétrica en la que el eje de rotación coincidiera con el eje de simetría, como se puede apreciar en el extracto 17, donde A_{e3} traza la parte superior del contorno de su sólido de revolución (respecto al eje x como eje de rotación) y pregunta a su equipo si debe dibujar también la parte inferior simétrica a la parte trazada, a lo que A_{e8} le responde afirmando que sí debe hacerlo para que se genere todo el sólido de revolución, afirmación a la que ninguno de sus compañeros se opone.

Extracto 17

A_{e3}: Agárrale y asi detenle [dirigiéndose a A_{e1} mientras marca el contorno de una botella que consideraron como sólido de revolución]. Bueno hasta acá, bueno ahorita lo hacemos. ¿También de este lado lo tenemos que hacer? [Pregunta a sus compañeros, refiriéndose a la parte simétrica del contorno superior con respecto al eje de rotación].
A_{e8}: Eee… Yo creo que sí.
A_{e1}: Sí.
A_{e8}: Para que al girar dé como resultado la botella.
A_{e3}: Ahí está. Si salió la botella.

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 8)

Además a partir de la producción escrita, podemos concluir que en general los alumnos tenían esa idea (véase figura 3.9.) pues a pesar de que en algunos equipos sólo tomaron en cuenta una parte del contorno de la figura generatriz de sus sólidos de revolución, la mayoría representaron las generatrices de sus sólidos de revolución como figuras simétricas.



A. A5E8 B. A5E6

Figura 3.9. Producción escrita de la actividad 5

La escena del extracto 17 y las figuras anteriores le dan sentido al objetivo de esta actividad, pues este es que los alumnos rompan con la idea de que la generatriz de los sólidos de revolución debe ser una figura simétrica, y que descubran a partir de algunas modificaciones específicas en sus dibujos, que no es necesario que sea así, sino que basta con girar una función para generar un sólido de revolución. Esto conllevaría a una situación se acción, donde a partir de las transformaciones en sus dibujos, los alumnos se dieran cuenta de que cualquier sólido de revolución está determinado por una función.

Sin embargo, no fue posible alcanzar el objetivo de esta actividad bajo las situaciones que se pretendían, entre otras razones, la profesora no dio las indicaciones para propiciar alguna discusión que permitiera a los alumnos darse cuenta de que no era necesario trazar la figura simétrica completa como generatriz de los sólidos de revolución, sino al contrario, en algún equipo reveló dicha idea que los alumnos tenían que descubrir por sí mismos, tal fue el caso del equipo 8, como puede percibirse en el siguiente extracto.

Extracto 18

P: ¿Si quedan más o menos esas? Lo hicieron los más… Pero nada más era esta, la de arriba, y ya después tú lo ibas a generar ¿sale? entonces si quieres borra...

¿Porque tu dibujaste los dos verdad? Bórrale esta parte y a partir de esta ya generas la otra ¿sale? Por fas… [Se dirige a A_{e9}].

(Este episodio corresponde a una discusión con integrantes del equipo 8)

Es asi como se presenta un gran salto en el proceso de aprendizaje que se estaba generando en los alumnos, pues no fue posible llegar a una situación de acción donde los alumnos lograran determinar que, basta con girar una función para generar un sólido de revolución, pues en la mayoría de los casos únicamente dibujaron el contorno completo de sus sólidos de revolución (como pudo observarse en la figura 3.9.), quedándose con esa idea, pues inmediatamente la profesora dio la indicación de calcular los radios en distintos puntos, indicación que correspondía a la actividad 6 (como se podrá observar en el extracto 19 que se presenta a continuación). Recordemos que en esta actividad únicamente se trataba de establecer que basta girar una función alrededor de un eje para conseguir un sólido de revolución y determinar la función generadora en cada caso. Como se observa en el extracto 18, únicamente en el equipo 8 la profesora comentó con sus alumnos que una parte de la figura era suficiente para generar su simétrico (conocimiento que tenían que generar por ellos mismos).

En consecuencia tampoco se pudo llegar a una situación de formulación donde los alumnos pudieran retomar este hecho y reformularlo de manera que fuese claro para ellos. En este caso no fue posible llegar a este hecho debido a que no se alcanzó el conocimiento esperado, ya que los estudiantes no pudieron retomar una idea a la que realmente en ningún momento se les permitió llegar por ellos mismos.

Todo esto se lo atribuimos a que las indicaciones que dio la profesora no fueron las que se encuentran en la planeación y esto generó una ruptura en la construcción del conocimiento esperado, pues después de pedir a los alumnos que dibujaran el contorno de los sólidos de revolución que eligieron, dichas indicaciones ya no correspondían con las acciones pre-establecidas en la situación didáctica, esto puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 19

P: Haber miren, por ejemplo, aquí hicieron... [Se refiere al trabajo del equipo 8] ¿Observamos? Aquí está el contorno de este [muestra la botella correspondiente al esbozo] ¿Coinciden sus medidas con las medidas de sólido? [Se dirige al equipo 8] Ya no dibujaron la parte de abajo, les falta la parte de abajo. Ok. Elijan un punto, por ejemplo por aquí [señala un punto sobre el sólido de revolución], calculen el radio de la circunferencia, imagínense que hacen un corte, calculen el radio de la circunferencia que se formaría, lo localizan acá [señala el esbozo de la hoja milimétrica] y chequen si coincide. ¿Si está bien clara la actividad?

A_s: Sí.

P: ¿Sí? Ok. Localicen unos dos puntos y chequen que el radio coincida con el radio de mi sólido de revolución. ¿Sale?

Como ya mencionamos, en el extracto anterior podemos ver claramente como las indicaciones no correspondieron a las de la actividad en curso, pues como se explicó al inicio, se trataba de indicar las transformaciones que los alumnos debían hacer a sus dibujos paso a paso, de forma que los estudiantes analizaran lo que sucedía en cada caso y descubrieran que la generatriz de un sólido de revolución es una función. Sin embargo, las instrucciones que se dieron corresponden a una actividad posterior, donde se asume que los alumnos tienen claro que la generatriz de un sólido de revolución es una función y además, sean capaces de relacionar este hecho con la variación de los radios generados al hacer cortes perpendiculares al eje de rotación en un sólido de revolución.

Concluimos que el objetivo y la intensión didáctica de la actividad no llego su culmen debido a que la actividad no fue realizada como se planeaba, su seguimiento no fue el correcto, pues lo más importante de la actividad era llegar a una discusión que permitiera alcanzar el objetivo, lo cual no se presentó en ningún momento durante su ejecución y ni siquiera se hace una mención de la idea principal. Únicamente cuando los alumnos terminan de medir los radios como se les indicó, la profesora les preguntó a qué se parecía la generatriz de sus sólidos de revolución esperando que se dieran cuenta de que era una función (sin hacer los cambios en su dibujo), pero los alumnos no logran identificarlo con claridad, por lo que ella decide continuar, pasando directamente a la presentación del video que corresponde a la actividad 7 (esto puede apreciarse en la escena que se presenta a continuación en el extracto 20).

Extracto 20

P: Ok. Esto… [Señala el contorno de un sólido de revolución en la hoja milimétrica] la figura o el contorno de la figura que genera mi sólido de revolución, ¿a qué se parece?

A_{ni1}: A un cono.

P: No, el contorno de la figura que genera mi sólido de revolución a qué se parece, esto de acá [señala nuevamente el contorno] ¿a qué se parece?

A_s: A una parábola.

P: ¿A una parábola?

A_{ni2}: No, es como a una recta.

P: Como a una recta ¿no? O sea a lo mejor si esta asi un poquito… por ejemplo aquí tiene una curvita ¿no? Pero, ¿hay alguno donde haya sido una recta? […]

P: Ok, bueno a lo mejor no lo ven, esto es una recta [Ahora señala el contorno de la figura en el trabajo del equipo 3] Es una recta. Otro que sea diferente, quién me dice más o menos a qué se parece, ¿a qué se parece? Haber préstame este [pide el trabajo del equipo 4]. El contorno de la figura en esta parte ¿qué es? [Señala una parte del contorno dibujado]

A_{e10}: Una recta.

P: ¿En esta parte qué es? [Señala ahora otra parte del mismo contorno].

A_{e11}: Una curvita.

P: Es como más curva. ¿Y por ejemplo en esta? [Nuevamente señala una parte diferente del contorno de la figura que está usando].

A_{ni3}: ¿Como una semiparábola?

P: Como una semiparábola […] Ok. Entonces, a ver, conclusión, ya midieron, ya vieron que el tamaño del radio depende del lugar en donde hagan el corte, ya identificaron el contorno. Eso es lo que me está generando, esa figura es digamos lo que me está generando mi sólido de revolución. ¿Sale? ¿Dudas hasta aquí?

A_s: No.

P: ¿No? Bueno, vamos a ver un video y más o menos es un recuento de lo que hemos hecho.

Como puede observarse en el extracto anterior, la respuesta de los alumnos a la pregunta de la profesora no fue la que ella esperaba, pues parecía esperar que los alumnos se acercaran a la idea de que se parecía a una función. Al no funcionar esta dinámica, decide pasar a otra actividad sin concluir adecuadamente la discusión que generó, pues a manera de conclusión solamente hizo un recuento de lo que los alumnos habían aprendido hasta ese momento

3.5.1. Elementos a destacar en la actividad 5

Nos parece relevante mencionar que para cuando los alumnos tuvieran que calcular el radio de la circunferencia formada por un corte en sus sólidos de revolución, se esperaba que fueran capaces de explotar sus conocimientos previos y aplicar estrategias propias para estimarlo eficazmente, ya que no siempre es posible hacerlo directamente midiendo; y aunque esta no era una acción correspondiente al momento de aprendizaje, fue en esta actividad donde tuvieron la necesidad de estimar dicho radio para verificar las medidas de su esbozo, ya que la profesora les indicó que las medidas de sus dibujos debían corresponder a las dimensiones reales de sus objetos clasificados como sólidos de revolución. La necesidad de corroborar estos datos, llevo a los alumnos del equipo 3 a recurrir a la mediación del perímetro de la circunferencia generada por el corte en un punto específico del sólido de revolución (usando como instrumento un cable de auriculares y tiras de papel), para que a partir de este dato calcularan la medida del radio correspondiente. Es así como se logró que algunos estudiantes retomaran estrategias básicas para realizar correctamente la actividad que se les pidió, ya que para otros representaba cierta complicación y trataban de hacerlo únicamente con regla.

También es importante retomar lo que aconteció en el extracto 18, pues creemos que el hecho de que la profesora revelara a A_{e9} que sólo debían dibujar una parte del contorno de su sólido de revolución, corresponde a la presencia del **efecto Topaze**, pues al percatarse de las dificultades que presentaba el alumno para la resolución del problema y para evitar equivocaciones burdas, decide acercar al estudiante a la solución, revelando una idea que él mismo debía descubrir, por lo que el alumno llega a este conocimiento por intervención del profesor y no por sus propios medios, y como consecuencia, el alumno no comprendió lo que la profesora quiso decirle, únicamente asumió la información sin interiorizarla. Esto puede observarse en la producción escrita que finalmente entregaron (véase figura 3.9.), donde se nota que hicieron caso omiso a la indicación de la profesora y dejó su contorno como una figura simétrica.

Durante el desarrollo de esta actividad se presentó también el **efecto Jourdain**, pues como se mencionó en el capítulo I, este se presenta cuando el profesor se encuentra frente a una situación donde el comportamiento y las respuestas del alumno a un problema planteado son incorrectos, por lo que decide admitirlos como válidos, ya sea por evitar el debate del conocimiento con el alumno o por no evidenciar el fracaso del aprendizaje de dicho conocimiento. Esto sucedió en el momento que se concluyó la actividad, donde la profesora pregunta a los alumnos a qué se parece el contorno de los sólidos de revolución que dibujaron en la hojas milimétricas, a lo que los alumnos no logran dar una respuesta correcta, por lo que la profesora acepta como válidas las respuestas de los estudiantes y decide continuar para evitar el debate sobre el conocimiento esperado, decisión que atribuimos en gran parte a la premura del tiempo para concluir la actividad (véase extracto 20).

3.6. Análisis de las actividades 6 y 7

Nombre de la actividad 6: Se les proporciona una función.

Objetivo: Darse cuenta de que existe una variación en el radio de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación, inferir que dicha variación queda determinada por una función y reconocer que el radio de cada circunferencia que elijan es la imagen de la función que genera el sólido de revolución en el punto de corte.

Nombre de la actividad 7: Video del cálculo de volumen de sólidos de revolución.

Objetivo: Transferir el conocimiento que tienen acerca del cálculo de áreas bajo la curva al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Es importante aclarar que la forma en que se presenta este apartado, a diferencia de los anteriores, es a causa de la manera en que la profesora decidió ejecutar las actividades 6 y 7 durante su aplicación, pues prácticamente, las fusionó en una sola. A continuación, se describen detalladamente los hechos que provocaron este cambio en la aplicación de la situación didáctica.

Comencemos por recordar que la intensión de la actividad 6 era que, una vez que los alumnos hubiesen asimilado que la generatriz de un sólido de revolución es una función, dibujaran los sólidos de revolución generados a partir de una serie de funciones dadas, para que ahora sí, calcularan y compararan los radios de las circunferencias resultantes de diferentes cortes perpendiculares al eje de rotación en los sólidos de revolución, de manera que, a traves de una discusión, quedará establecido por los mismos alumnos que la variación de dichos radios depende del valor de la función generatriz en los puntos correspondientes.

Sin embargo, toda esa parte fue omitida en el momento que le correspondía y reemplazada por la proyección del video correspondiente a la actividad 7, provocando una ruptura en el proceso de aprendizaje de los alumnos, proceso en el cual se esperaba que adquirieran los conocimientos esperados de manera sistemática. Esta ruptura comenzó desde la actividad 5 con la omisión de algunas acciones importantes y continuó en las actividades 6 y 7 por las modificaciones improvisadas que se le hicieron a la situación didáctica durante su aplicación. No obstante, a pesar de que al llegar a la proyección del video, los alumnos aún no contaban con los conocimientos previos necesarios (como el que la generatriz de un sólido de revolución es una función) para trabajar el volumen de sólidos de revolución con integrales, reaccionaron inmediata y correctamente relacionando la información presentada en el video (sobre el cálculo de volumen por integrales) con sus conocimientos previos sobre el cálculo de áreas bajo la curva por integrales; pues de inmediato, sin la intervención de la profesora, un alumno respondió a la pregunta del video acerca de cómo harían para calcular el volumen de sólidos de revolución, diciendo que lo haría con la integral. Estos hechos los podemos apreciar en el siguiente extracto.

Extracto 21

V: […] Ahora es momento de reflexionar, de compartir ideas y de discutir. ¿Cómo harías para calcular el volumen de sólidos de revolución?

A_{e4}: Con la integral.

P: Declaraciones fuertes [se muestra asombrada]. Haber, híjole, que rápidos van. Ok. ¿Les gustó el video?

A_s: ¡Sí!

P: Platíquenme sobre el video, ¿quién quiere decir algo?

[…]

P: ¿Si se les hace familiar ese método?

A_s: ¡Sí!

[…]

P: Ajá, y ahora haciendo esa… Vamos a transferir eso que dijo A_{e13} ahora con sus sólidos de revolución.

[…]

A_4: […] Con las figuras hicimos los rectángulos y los trapecios muy pequeños que se acercaran cada vez más al área exacta de la figura por lo que tuvimos que poner un límite al infinito para que ya encontráramos el área exacta de la figura y en este caso pues van a ser con cilindritos pequeñitos infinitos para acercarnos al volumen de la figura.

*La letra **V** corresponde a un fragmento del video proyectado durante esta actividad.*

Así podemos darnos cuenta que durante la discusión que se generó en torno a la información del video, los alumnos comentaron analogías entre el método que utilizaron para calcular áreas bajo una curva y las que utilizarían para calcular volúmenes de sólidos de revolución, lo cual catalogamos como una **situación de formulación**.

Cabe mencionar que a pesar de las rupturas que se presentaron desde la actividad 5, aún podían rescatarse pertinentemente los saberes que se deseaban transmitir a los alumnos desde las actividades anteriores, pues durante esa misma discusión pudieron percatarse, de forma clara y sin intervención de la profesora, que los sólidos de revolución se generan a traves de funciones, lo cual les permite calcular fácilmente el volumen de cualquier sólido de revolución de forma exacta a traves de las integrales.

Extracto 22

A_{e4}: A y ahorita que observamos el video, me pude percatar que los sólidos de revolución se pueden formar a traves de funciones tan simples que hemos visto y que estos conocimientos que ahorita hemos adquirido, más bien físicamente, los podemos transportar a algo más exacto que es ocupando, pues como decía A_4, las integrales; y pues está muy padre porque podemos encontrar el área de las cosas.

P: El área ¿o?

A_{e4}: El volumen.
A_5: Es hermoso…
P: Ok, bueno, entonces ahora ¿qué nos falta? Nos falta que íbamos a hacer otra actividad sólo que ya no nos iba a dar tiempo. Nos falta ahora identificar, si tenemos una función… Porque como dijo su compañero A_{e4}, dice nosotros hemos visto que las funciones, algunas funciones… ¿o cómo dijiste? [Se dirige a A_{e4}] generan sólidos de revolución o que algunos son generados por funciones dijo ¿no? Entonces ahora la siguiente actividad va a ser esa, a partir de ciertas funciones en ciertos intervalos vamos a generar sólidos de revolución, todo esto encaminado a calcular ¿qué?
A_s: Volúmenes.
P: Volúmenes. ¿A traves de…?
A_s: Integrales.
P: Como que va a ser a traves de integrales.

Como puede apreciarse en el episodio mostrado en el extracto anterior, un alumno externó claramente a sus compañeros la idea de que los sólidos de revolución son generados por funciones, idea que hasta ese momento, ni siquiera había sido mencionada con claridad a pesar de que tenía toda una actividad destinada para su adquisición. Sin embargo, creemos que la profesora no le dio la importancia necesaria a la aportación del alumno, pues como se puede observar, únicamente lo mencionó, pero no con el énfasis que consideramos necesario en ese instante, ya que para nosotros era el momento perfecto para retomarla y lograr que quedara totalmente claro para todos los alumnos.

Además, en los últimos comentarios de la profesora, podemos darnos cuenta de que la omisión de la actividad 6 fue por falta de tiempo en la tercera sesión, por lo que decidió proyectar el video de la actividad 7 para aprovechar el poco tiempo restante, rompiendo asi con el orden correcto de la situación didáctica para la construcción de los conocimientos esperados.

Después de lo acontecido, en la siguiente sesión (cuarta sesión) se retomó la actividad 6, donde los alumnos dibujaron los sólidos de revolución generados por las funciones dadas, pero no sin antes tener una pequeña discusión grupal donde compartieron lo aprendido hasta ese momento. Durante esta puesta en común, se hicieron comentarios relevantes que influyen de manera importante en la construcción de los conocimientos, los cuales se presentan en el siguiente extracto.

Extracto 23

P: Ok, entonces queremos seguir aprendiendo acerca de sólidos de revolución. Resulta que ahora, ustedes me han dicho que los sólidos de revolución se generan ¿cómo?

A_{e13}: A traves de un eje, bueno de un lado, dando vueltas a un eje de una figura plana.

P: Dice A_{e13}, dando vueltas alrededor de un eje a una figura plana. Ok, ¿quién más me dice algo?

A_5: Bueno era a traves de un eje de rotación.

P: Lo genero a traves de un eje de rotación. ¿Qué más?

A_{e2}: Bueno sería el contorno de una figura ¿no?, porque si fuera una figura plana, bueno completamente, sería el sólido no completo, sin el espacio de adentro.

P: Eso es una observación importante, ¿entendieron lo que dijo?

A_s: ¡Sí!

[…]

P: Entonces dice, vamos a generar sólidos de revolución ya sea rotando una figura, y eso dice A_{e13} que me va a dar un sólido ¿qué?

A_{e13}: Hueco.

A_{e7}: Hueco.

P: ¡No! Rotando una figura.

A_{e13}: A un sólido completo, bueno…
P: Lleno, ¿ajá? Y la otra es, rotando el contorno, esa observación fue muy importante ¿verdad? Y mucho nos ayudó a observar eso el equipo de A_5 y de A_4 [refiriéndose al equipo 6][…]Entonces bueno, ahora vamos a hacer una actividad [se refiere a las acciones correspondientes a la actividad 6][…]

A traves de este extracto podemos percatarnos de que a pesar de que en la sesión anterior A_{e4} mencionó claramente que los sólidos de revolución son generados por funciones (véase extracto 22), en las respuestas de los alumnos aún no aparece esta afirmación, pues para ese momento se esperaría que lo tuvieran claro, sin embargo, siguen hablando de figuras planas o de su contorno, que no siempre es una función. Aun así, la profesora concluye la discusión, haciendo caso omiso a este hecho, y continúa con la actividad 6, dando las indicaciones correspondientes, pues en ese momento proporcionó a los alumnos las cuatro funciones establecidas en la planeación de la situación didáctica y les pide dibujar el sólido de revolución generado por cada una de esas funciones.

Cabe señalar que al inicio de la actividad 6, los alumnos hacen una pre-identificación correcta de las funciones a partir únicamente de las ecuaciones que se les presentan en el pizarrón, por lo que se puede notar la solidez de sus conocimientos en geometría analítica. Veamos el siguiente extracto.

Extracto 24

P: ¿Ya entendieron perfectamente lo que van a hacer? ¿Qué vamos a hacer con estas ecuaciones o funciones? ¿Qué vamos a hacer?
A_4: Graficarlas.
P: Las vamos a graficar en el intervalo indicado y luego lo van a rotar para obtener el sólido de revolución y

quiero sus dibujitos, ¿sale? Ok, ¿tienen idea de que representan cada una de estas gráficas? ¿Quién me dice? […]

P: ¿Esta es qué? [Refiriéndose a la función $y = x^2 + 1$].

A_s: Una parábola.

P: Ajá es una parábola, ¿qué más me dicen de ella?

A_4: La parábola esta…

A_s: Hacia arriba.

A_{13}: y está en el 1.

P: y está en el 1. ¿Qué quiere decir eso?

A_{e4}: Su origen está en el 0 con 1.

P: ¿Su origen está en 0 con 1? Ajá, ¿de qué otra forma también se llama ese puntito? Origen ¿o?

A_s: Vértice.

P: Vértice, perfecto. Ok. ¿Tienen idea de lo que es esto? [Señala la función $y = 2x$].

A_{ni1}: Una línea.

A_{ni2}: Una recta.

A_s: Una recta.

P: Una recta. ¿Qué más me pueden decir?

A_4: Que pasa por 2 con 0, 0 con 2 ¿no?

P: ¿Pasa en 0 con 2?

A_s: ¡No!

A_4: No, no, no.

P: ¡No! ¿Verdad que no? Ajá, ¿Qué más me dicen? ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

A_s: Dos.

P: O sea que tiene un ángulo ¿cómo de cuánto?

A_s: Como de 66 grados.

P: Como un ángulo de 66 grados. ¿Esta $y = 3$?

A_s: Es una recta.

P: Una línea recta, ¿qué más?

A_4: Es paralela a la x.

P: Ajá, es paralela al eje x. ¿Qué idea les da de lo que van a obtener aquí? ¿Qué sólido de revolución van a obtener aquí?

A_s: Un cilindro.

P: Un cilindro. ¿Acá? [Señala nuevamente la función $y = 2x$].

A_4: Como un conito.

P: A como un cono, tal vez. Esto [señala la función $y = \sqrt{36 - x^2}$]. ¿Se acuerdan que es eso?

A_s: Sí. Media circunferencia.

P: Es media circunferencia o ¿qué van a obtener?

A_s: Una esfera.

P: Ok.

A_4: Pero…

P: Haber, digan los peros…

A_4: Es que lo que pasa es que al parecer, al graficarlo saldría como un cuarto de la circunferencia, entonces puede que salga como media esfera.

P: No si viene con todo. Ok, a trabajar por fas.

En el extracto anterior podemos observar que, en general, la participación de los alumnos habla de la facilidad que tuvieron para identificar la gráfica de una función cuando se trata de alguna sección cónica, y más aún, de dar algunas características específicas de su gráfica, lo cual parece ser un factor favorable para la realización eficaz de la actividad. Sin embargo, a pesar de esto, aún hubo algunos casos de alumnos a los que se les complicó graficar ecuaciones sencillas al desarrollar la actividad, como la de la función constante. Esto puede apreciarse en el siguiente extracto.

Extracto 25

A_{e13}: Oye, ¿esta cómo? Nada más me da tres en todo, porque no hay x, porque [inaudible].

A_{e14}: Entonces nada más seria asi [comienza a graficar $y = 3$] Digamos que esta asi, 1, 2, 3 acá [marca el punto (0,3)] entonces 3 con 3…

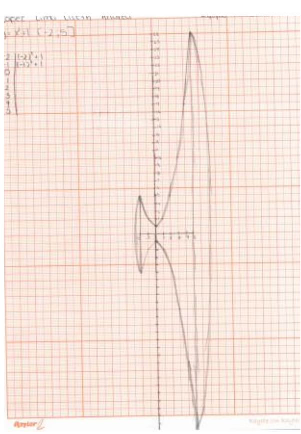
A_{13}: Entonces no es necesario hacer la tabla ¿verdad? porque si es todo 3.

A_{e14}: Nada más es una recta así [señala una recta horizontal] Ajá exacto.

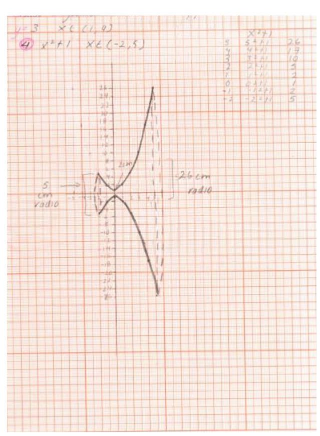
A_{e15}: ¡Wow!

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 7)

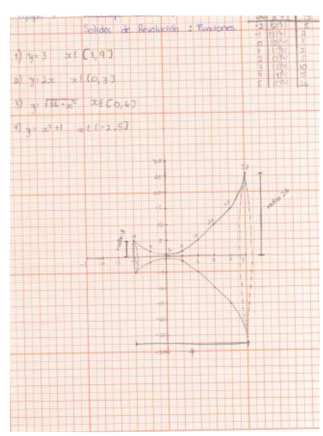
En este extracto podemos observar la discusión generada entre los integrantes de un equipo 7, donde se tenía duda acerca de la gráfica de la función constante por lo que A_{e13} realizó una tabla auxiliar para graficar $y = 3$ y después de los comentarios que compartió con A_{e14} se percata que dicha tabla no es necesaria y decide borrarla; pero al parecer no sólo A_{e13} tenía dudas sobre esta función, el resto de sus compañeros mostraron expresiones de asombro al aclarar las dudas, tal es el caso de A_{e15} como se puede apreciar en el extracto 25. Sin embargo, no fue el único caso donde se recurrió a la tabulación como herramienta auxiliar para graficar correctamente, también otros estudiantes la utilizaron, pues una cuarta parte de los trabajos entregados recurrieron a la tabulación. En el ejercicio que más se recurrió a esta herramienta fue para graficar la función $y = x^2 + 1$ y luego para graficar la función $y = 2x$. En la producción escrita que se muestra a continuación se pueden apreciar algunos trabajos de los alumnos donde recurrieron a la tabulación para obtener las gráficas de las funciones que se les pidieron.



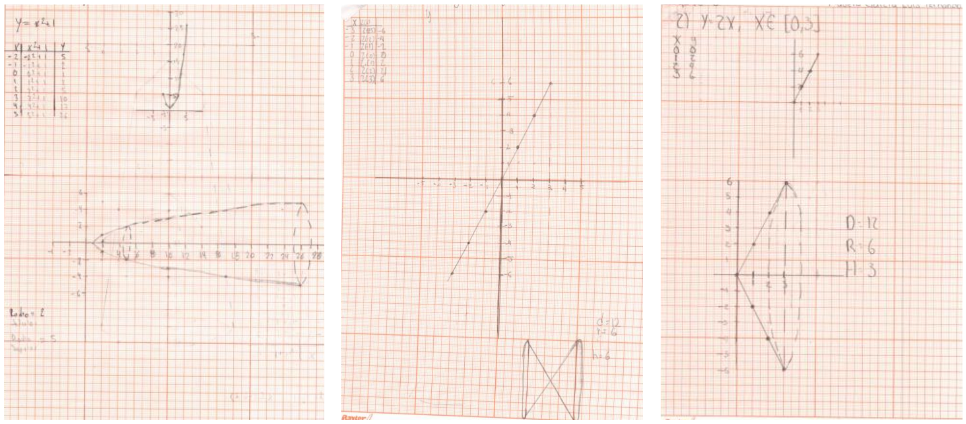
A. A6E7



B. A6E2



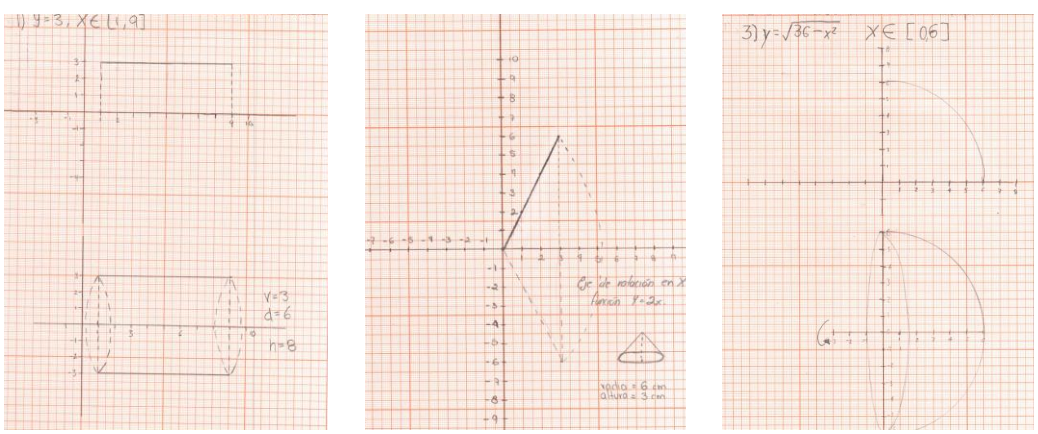
C. A6E5



D. A6E6 E. A6E5 F. A6E8

Figura 3.10. Producción escrita de la actividad 6 con tabulaciones

Pensamos que aunque la mayoría de los alumnos cuentan con los conocimientos básicos para graficar ese tipo de funciones sin tabular, algunos aún recurren a este método como una forma de verificar sus predicciones. Pero también hay quien lo utiliza como único recurso, aunque se trata de un porcentaje muy pequeño de alumnos, sin embargo, es evidente que el graficar correctamente funciones similares a las que se les pidió, no representa un obstáculo para lograr el objetivo de la actividad, pues la mayoría de los trabajos no presentaron evidencia de haber utilizado la tabulación para la elaboración de sus gráficas, y en su mayoría fueron correctas. En la siguiente figura podemos observar algunos de estos trabajos.



A. A6E4 B. A6E3 C. A6E6

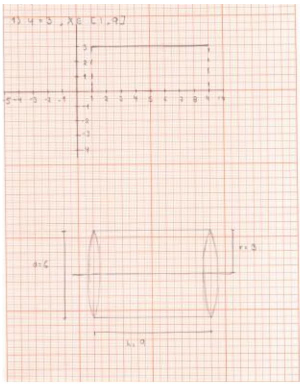
Figura 3.11. Producción escrita de la actividad 6, correcta y sin tabulaciones

Los resultados de esta actividad son claros en la producción escrita de los alumnos. Dichos resultados fueron variados, hubo desde trabajos que no presentaron errores (aproximadamente la mitad) hasta trabajos con errores que no les permitieron llegar a la solución de los ejercicios. En seguida se mencionan explícitamente los errores más comunes, desde los más sencillos hasta los más *delicados*. Por ejemplo, el caso más común fue que los alumnos graficaron la función dada y representaron el sólido de revolución correctamente en el intervalo correspondiente, sin embargo, se confundieron al colocar las medidas en su esbozo, esto puede apreciarse en la figura 3.12. donde se presentan algunos ejemplos de la producción escrita de los equipos que tuvieron dicha confusión.

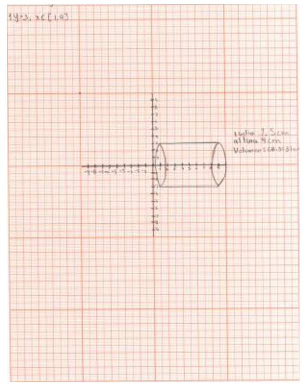
Nótese que en la figura 3.12. A. se trata de la función constante $y = 3$ en el intervalo [1,9], donde el único desacierto es que creyeron que la altura del cilindro generado era de 9 unidades; y en las figuras 3.12. B. y C. ignoraron la escala que usaron para graficar, colocando las dimensiones de acuerdo a las medidas reales de su dibujo. En el esbozo de la fig. 3.12. D., confundieron el radio del cuarto de circunferencia con su diámetro, a pesar de que la gráfica de su función $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo $[0, 6]$ fue correcta al igual que el sólido que se genera al rotarla con respecto al eje de las abscisas.

Y finalmente en la fig 3.12. E. la gráfica de la función constante en el intervalo dado fue correcta y efectivamente el sólido de revolución que genera esta función al girarla con respecto al eje x es un cilindro, pese a que no fue representado correctamente, pues olvido cuál era el eje de rotación, y que dicho eje debe quedar en el centro del sólido de revolución ya que coincide con un eje de simetría.

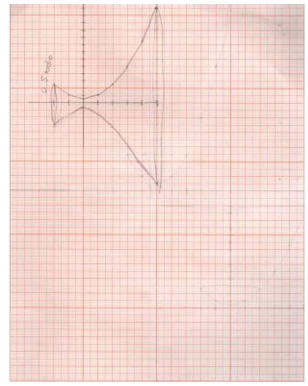
.



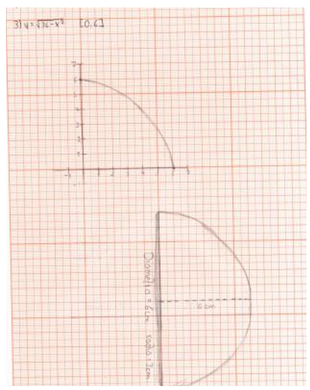
A. A6E5



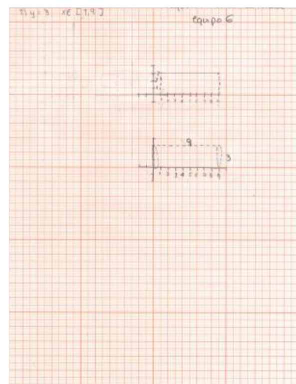
B. A6E5



C. A6E4



D. A6E4



E. A6E6

Figura 3.12. Producción escrita de la A6 con errores en las dimensiones de los esbozos

En todos los casos anteriores, los alumnos representaron correctamente las funciones en los intervalos dados y también lograron visualizar adecuadamente los sólidos de revolución generados en cada caso, sin embargo descuidaron el detalle de las dimensiones correctas del sólido generado, la mayoría confiando en que la altura del cilindro era de 9 unidades, otros olvidándose de la escala que utilizaron y tomando las medias reales de su dibujo y unos más, representando incorrectamente su sólido de revolución; pero consideramos que en la mayoría de esos trabajos (excepto en el de la fig. 3.12. E.), los errores fueron a causa de un descuido que no influye negativamente para mentalizar correctamente los sólidos de revolución que generan las funciones dadas y por lo tanto no obstaculiza el logro del objetivo de esta parte de la actividad.

Otro suceso interesante fue que los alumnos ignoraron el intervalo indicado para graficar la función dada, lo cual provocó que aunque identificaran bien el sólido generado por su esbozo, este no correspondería al generado por la misma función en el intervalo dado. En algunos equipos hubo intervención de la profesora para que los alumnos se dieran cuenta de ese detalle y corrigieran sus trabajos (esto puede observarse en el siguiente extracto), pero en donde no hubo esa intervención, si tuvieron problemas para identificar correctamente el sólido de revolución generado en el intervalo indicado (véase figura 3.13.).

Extracto 26

P: ¿Qué pasó hijo? [Refiriéndose a A_{e1}]**.**
A_{e1}: Ya quedó, el segundo, solamente el segundo.
P: A ti te tocó, ¿qué te tocó?
A_{e1}: El 3… Raíz.
P: Mmm… este la 3… [Se trata de la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo [0, 6]].
A_{e1}: Raíz de 36.
P: Quiero que cheques bien ese intervalo, es de cero a seis.
A_{e1}: A bueno.
P: Quiero que cheques bien y especifica por favor tu intervalo, que quede bien claro, y tu sólido de revolución también, sobre todo también tu eje de rotación.

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 8)

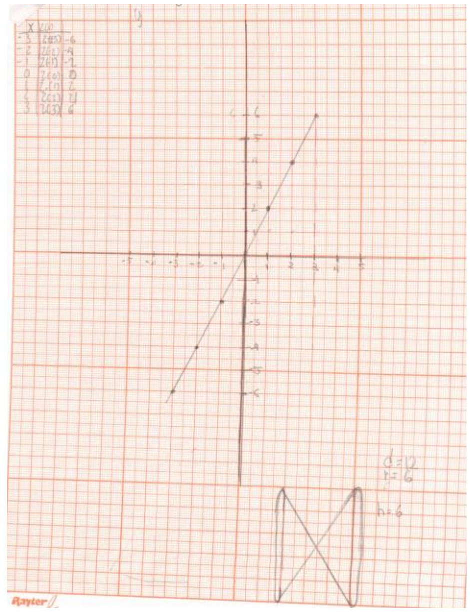
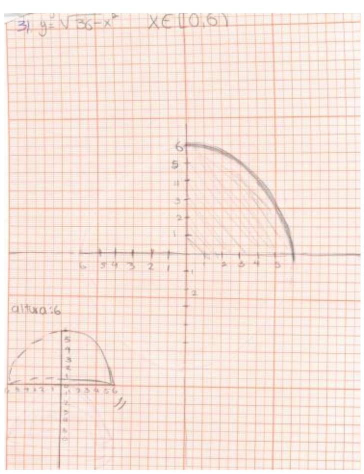
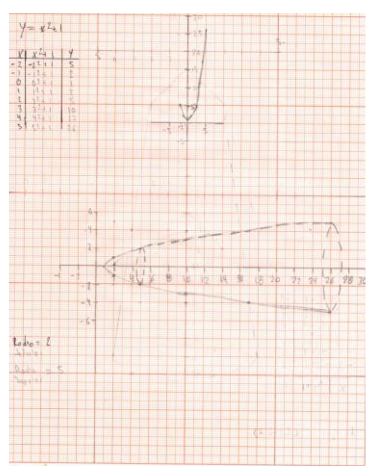


Figura 3.13. Producción escrita A6E5

Por otra parte, algunos alumnos no lograron llegar al sólido de revolución generado por algunas funciones debido a que cambiaron el eje de rotación, pues la profesora fue muy clara en que debían hacerlo con respecto al eje x y lo hicieron alrededor del eje de las ordenadas (véase figura 3.14).



A. A6E7



B. A6E6

Figura 3.14. Producción escrita de la actividad 6 donde no respetaron el eje de rotación

En la figura 3.14. A. podemos observar claramente que se cambió el eje de rotación, sin embargo, con esa consideración el sólido de revolución generado es correcto. En cambio, en la fig. 3.14. B., el alumno cambió el eje de rotación, pero curiosamente también roto el plano cartesiano. Creemos que esto puede ser a causa de que el alumno inicialmente haya intentado rotar su función (la cual graficó correctamente) respecto al eje x y al encontrarse con dificultad para imaginarse el sólido de revolución generado, decidió hacerlo más sencillo (pero equivocadamente) rotando el plano cartesiano y tomando al eje de las ordenadas como eje x, de forma que pareciera que rotó su *función* con respecto al eje indicado, ignorando que su grafica dejo de ser una función al rotar el plano cartesiano. De este último caso podemos destacar que, al parecer, si hubo dificultad para que los alumnos visualizaran correctamente los sólidos de revolución generados por algunas de las funciones que se les proporcionaron, aunque tenían la idea clara de cómo generarlos. También hubo quien confundió definitivamente la ubicación correcta de los ejes del plano cartesiano, por lo que no logró llegar satisfactoriamente a la solución del problema, a pesar de que tiene la idea correcta del sólido de revolución que debería formarse, esto puede observarse en la figura 3.15.

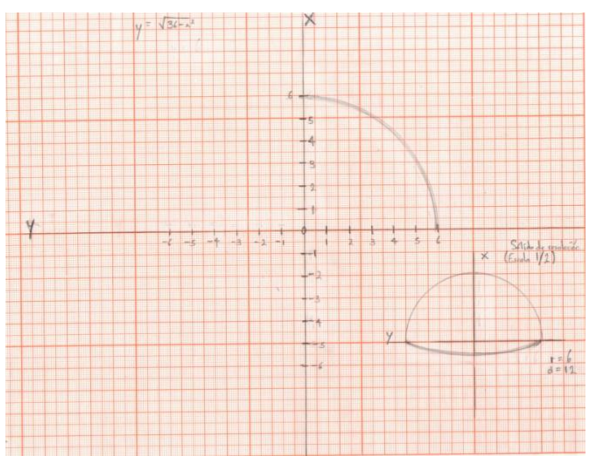


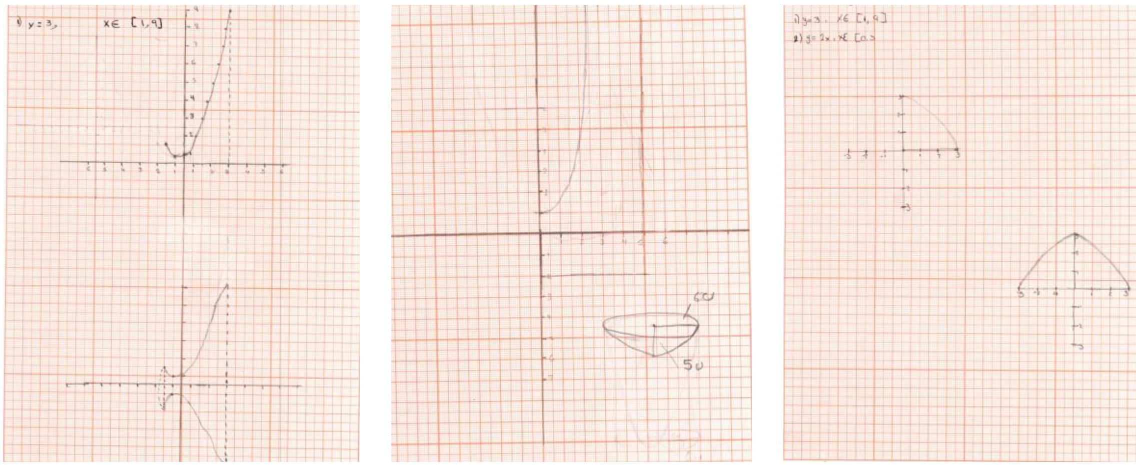
Figura 3.15. Producción escrita A6E5

Finalmente, se encontraron escasos trabajos donde por graficar mal la función, no llegaron satisfactoriamente al sólido de revolución que debía generarse. Únicamente en un equipo, pudimos notar que los alumnos definitivamente no tenían idea de la gráfica de una de las funciones que se les solicitó (véase figura 3.16. C.).

En la figura 3.16. A. podemos observar que los alumnos tenían una idea correcta de la gráfica de la función que estaban representando, pero al parecer evaluaron mal en uno de los puntos que decidió tomar como referencia, lo cual provocó que su función saliera un poco distorsionada, sin embargo esto no fue un obstáculo para que imaginara correctamente (aunque no con las dimensiones adecuadas) el sólido de revolución generado por la gráfica que le resultó.

Por otro lado, en la fig. 3.16. B. observamos que los alumnos no encontraron la forma de graficar la función $y = x^2 + 1$, pero sabían que se trataba de una parábola paralela al eje y (quizá por los comentarios que se hicieron en la puesta en común anterior a la actividad), por lo que decidieron dibujarla (aunque con las dimensiones incorrectas) y representaron, intuitivamente, el sólido de revolución que imaginaron que debería generarse.

Cabe mencionar que en este último caso, aunque el sólido de revolución que se imaginaron corresponde al resultante de rotar una parábola, no corresponde al de la función que graficaron y mucho menos a la función solicitada. Por último, en la figura 3.16. C. observamos un caso donde no se tenía ni idea de las características de la función que se debía graficar, pues se trataba de la función $y = 2x$ en el intervalo $[0,3]$, por lo que evidentemente no fue posible identificar el sólido de revolución que dicha función genera.

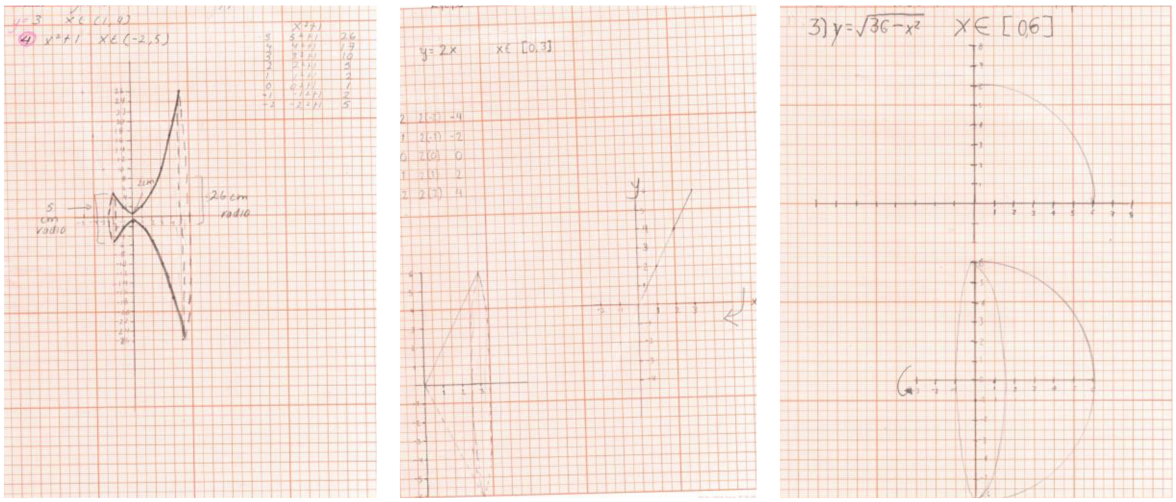


A. A6E8 B. A6E3 C. A6E7

Figura 3.16. Producción escrita de la actividad 6 donde no lograron graficar correctamente la función.

Por los resultados presentados anteriormente, podemos darnos cuenta que en general, los alumnos fueron capaces de identificar correctamente los sólidos de revolución generados por las funciones que se les proporcionaron. Las principales causas que no permitieron a los alumnos llegar satisfactoriamente a la solución de la actividad fueron: errores al anotar las dimensiones de los sólidos de revolución, cambiar el eje de rotación y dificultades para graficar algunas funciones, pero aun con esas equivocaciones, en la gran mayoría de esos trabajos hay una idea clara y correcta de los sólidos de revolución generados por cada función, pues en muy pocos trabajos (tres aproximadamente) se les presentaron complicaciones que obstaculizaron la realización efectiva de la actividad. Así, es como los estudiantes se encontraron en una **situación de acción** como se esperaba, pues fue un momento donde interaccionaron con su medio y tuvieron la necesidad de tomar decisiones que les permitieron llegar a sus respuestas.

Menos de la mitad de los trabajos entregados presentaron algún error por sencillo que este fuere, los demás son correctos en su totalidad, y algunos de éstos se muestran a continuación en la figura 3.17.



A. A6E2 B. A6E4 C. A6E6

Figura 3.17. Producción escrita correcta A6

Al inicio de la sesión 5, se retomó la última parte de la actividad 6, pues se pidió a los alumnos que eligieran un esbozo de los que habían realizado y tomaran algunos puntos para calcular el radio las circunferencias formadas por los cortes perpendiculares al eje de rotación del sólido de revolución en dichos puntos. Esto fue con el fin de que los estudiantes descubrieran de qué depende el radio de dichas circunferencias, pues desde la actividad 3 habían comparado los radios de las circunferencias formadas por diferentes cortes en los conos que se les proporcionaron, dándose cuenta de que la variación de estos radios depende del lugar donde se hace el corte. Durante esta última parte de la actividad 6, hubo cierta intervención de la profesora, pues guio a los alumnos para encontrar la forma en que podían determinar los radios que les había indicado. Eso sucedió desde el momento en que se comenzaron a repartir reglas a los equipos, ya qque ella les pregunta si medirían los radios con las reglas o había otra forma de calcularlos, propiciando cierta duda en los alumnos.

Extracto 27

P: ¿A poco van a medir con la regla? ¿O hay otra forma de calcular el radio de ese sólido de revolución?
A_{ni1}: Obvio.
P: Bueno, entonces ustedes sorpréndanme.
[…]
P: […] La función que tienes es $y = x^2 + 1$. Ok. ¿Entonces tú lo mediste con el papel milimétrico? [Refiriéndose a A_{e15}]
A_{e15}: Ajá.
P: ¿Está perfectamente trazada tu figura como para confiar?
A_{e15}: Bueno nada más aquí le corté, pero de acá a acá si está bien [Se refiere a un extremo de la gráfica].
P: Ajá. ¿Y qué otra forma seria para estar segura de cuánto mide? [La alumna se queda en silencio y la profesora continua] Porque a lo mejor si no tuviéramos los dibujos muy exactos pudiéramos tener problemas ¿no?
[…]
P: Haber acá. [Se dirige a observar el trabajo de A_{e14}] ¿En cuatro apoco en cuatro? [Señala la gráfica en $x = 4$] O sea, aquí lo mediste pero, ¿está bien echa tu figura? ¿Lo hiciste con compas?
A_{e14}: No, no la hice con compas.
P: Ahí, ¿de qué otra forma estarías segura?
A_{e14}: No sé.
P: ¿No sé? ¿Cómo se llama la función?
A_{e14}: A, es $y = \sqrt{36 - x^2}$
P: [Inaudible]
A_{e14}: A bueno. [Retoma su trabajo]

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 7)

Como puede observarse en el extracto anterior, a pesar del comentario que la profesora hizo al inicio de la clase, aún hubo alumnos que midieron los radios con ayuda del papel milimétrico (o con regla), por lo que ella intervino nuevamente en los equipos, haciendo comentarios que llevaran a los alumnos a pensar en otras alternativas y a darse cuenta de que sus funciones no estaban trazadas con tanta precisión como para confiar en las medidas del dibujo. Pero incluso con los comentarios de la profesora fue difícil que los alumnos que aún no asimilaban que los sólidos de revolución se generan a partir de *funciones,* respondieran a la actividad como se esperaba, es decir, evaluando la función en algún valor de x (perteneciente al intervalo indicado en cada función) y así encontrar el radio de la circunferencia formada por el corte en ese punto. Esto puede apreciarse a continuación en el extracto 28.

Extracto 28

A4: ¿Para poder sacar bien el radio de esto debo de usar una fórmula o algo por el estilo?
P: No sé, tú dime.
A4: Yo siento que sí, pero no estoy seguro de cómo.
P: ¿Cómo calculas este? [Señala la imagen en $x = 0$ de la función graficada].
A4: Con esta fórmula [Señalando la función $y = \sqrt{36 - x^2}$] Y aparte,… Ajá si, nada más con esta fórmula y pues sale medio circulo con la función y ya por la forma en que se especificó pues nada más da medio circulo.
P: Mmm entonces a ver, ¿en la otra? ¿Cuál es el otro que hicieron? [Toma la hoja donde dibujaron la gráfica de $y = 2x$] Por ejemplo aquí, ¿cómo calculaste este? [Señala la imagen de la función en $x = 3$].
A4: Mmm… ¿este? [Señala nuevamente el punto señalado por la profesora].
P: Sí, porque me pusieron esta medida, ¿sí o no? ¿Cómo

la calculaste?

A4: Pues porque básicamente cuando gira, es básicamente la misma medida pero solamente que hacia abajo.

P: Ajá, ¿y cómo sacaste la medida de arriba?

A4: ¿La medida de arriba? Mmm… Pues…

P: ¿Es el radio no? ¿Cómo lo sacaste?

A5: [inaudible]

P: Ajá, él ya lo vio [refiriéndose a A5]**.** Ok.

En el extracto anterior podemos darnos cuenta de que aun con las analogías que usaba la profesora con respecto a las medidas que tenían calculadas correctamente, para algunos alumnos fue muy difícil hacerse conscientes de que evaluando la función en el punto de interés les resultaba el radio de la circunferencia formada en ese punto. En general, aunque la mayoría comprendió que para encontrar los radios exactos debían evaluar la función en lugar de medir, necesitaron la orientación de la profesora, pues en principió casi todos midieron con la regla o con el papel milimétrico, ignorando la inexactitud de sus dibujos e incluso la escala que habían utilizado. Creemos que esto fue a causa de que, hasta ese momento, aún no había quedado claro que el radio de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución, depende de la función generatriz (hecho que debió quedar claro para todos los alumnos en actividades anteriores); y por tanto, no se les ocurría fácilmente evaluar la función para hallar las medidas que se les pidieron. Pero es importante mencionar que, aunque a la mayoría de los estudiantes les costó trabajo darse cuenta, por ellos mismos, de que sustituyendo la función hallarían fácilmente los radios que necesitaban calcular, hubo quienes se dieron cuenta fácilmente de esto sin la intervención de la profesora (por ejemplo algunos alumnos del equipo 1 y del 5), y curiosamente en uno de esos casos se trató del mismo alumno que en la sesión anterior (véase extracto 22), después de ver el video, comentó que se había percatado de que los sólidos de revolución se forman a traves de funciones. Esto puede observarse en el siguiente extracto.

Extracto 29

A_{e4}: En esta [refiriéndose a la gráfica del sólido de revolución generado por la función $y = 2x$]. Si lo trazamos acá [traza una línea vertical que pasa por $x = 2$].

A_{e5}: Cuatro ¿no?

A_{e7}: Ajá si cuatro.

A_{e4}: ¿Por qué cuatro?

A_{e5}: Es cuatro porque topas acá [señala el punto donde se intersecta la línea vertical, que trazó Ae_4, con la recta simétrica a la función].

A_{e4}: A, ajá, pero cuando sustituimos a x, por decir en dos y hacia arriba nos va a dar de altura cuatro porque dos…

A_{e5}: Si, dos por dos son cuatro.

A_{e4}: O sea si la trazáramos acá en 2.5, si lo ponemos aquí en x serian cinco tal vez por eso cuatro, ajá en esta es cuatro.

(Este episodio corresponde a una discusión entre los integrantes del equipo 1, mientras la profesora orientaba a otros equipos y antes de hacer comentarios a todo el grupo)

Es por esto que creemos que el hecho de que los alumnos hubieran comprendido que los sólidos de revolución son generados a partir de rotar funciones, como en el caso de Ae_4, era un factor esencial para que los alumnos descubrieran que los radios que se les pido calcular están determinados por la función, hecho al que no fue posible llegar fácilmente por méritos propios de los estudiantes.

Como se mencionó en el capítulo II, para lograr los propósitos y alcanzar los conocimientos esperados, durante esta parte de la actividad se esperaba una situación de formulación para el alumno, donde tuviera un reconocimiento propio del conocimiento que se le quería transmitir, es decir, que descubriera (por el mismo) elementos que no alcanzaría a apreciar en ausencia de la formulación de dichos conocimientos. Lamentablemente, en este caso no se logró que el alumno se encontrara en este tipo de situación, y por lo tanto, se vieron afectadas sus posibilidades de aprendizaje, pues no hubo un reconocimiento propio, ni mucho menos una construcción del conocimiento esperado desde las actividad previas.

Finalmente, después de las intervenciones de la profesora, en los equipos pareció haber quedado clara la forma más simple de determinar el radio de la circunferencia formada en cualquier punto, pues ella misma lo retomó formalmente en forma de conclusión para esa actividad, es por esto que consideramos que hubo presencia de una **situación de institucionalización** que puede apreciarse en el siguiente extracto.

Extracto 30

P:	Muy bien, haber, como que ya todo mundo se dio cuenta que con la regla no era tan sencillo, bueno perdón, con la regla era muy sencillo, mediamos, pero no era ¿qué?
A_s:	Precisa.
P:	No es exacto, no es preciso.
A_5:	Es aproximado.
P:	Exacto, es aproximado. Hay una forma de hacerlo exacto, ¿cuál es?
A_s:	Sustituyendo el valor.
A_{e2}:	Sustituyendo en el valor del corte, bueno de echo el corte en la función.
P:	Exacto, ¿si les quedo claro a todos?
A_s:	Sí.
P:	Dice A_{e2} en la x donde yo haga el corte, lo único que voy a hacer es sustituir en la función y ya hago las operaciones.

Sin embargo, a pesar de que la aparición de esta situación al final de la actividad fue de gran utilidad, no podemos dejar pasar desapercibido que justo en ese momento se consideraba una discusión donde se comentara de qué depende la variación de los radios, de forma que los alumnos reformularan las regularidades que hubieran encontrado durante la actividad y las comunicaran a sus compañeros, para juntos llegar a la formulación del conocimiento esperado. Creemos que la falta de tiempo influyó considerablemente en la decisión de reemplazar la discusión por un momento de institucionalización, además de que antes, en la actividad de los conos desmontables, ya se había comentado sobre esto, aunque aún sin el concepto de función.

En nuestra opinión, a causa del salto que hubo en el desarrollo de las actividades, no para todos los alumnos quedo completamente clara la idea de que un sólido de revolución se genera a partir de girar una función y de que el radio de cualquier corte (perpendicular al eje de rotación) depende del valor de la función en el punto de interés; por lo cual, no se logró la construcción autónoma de los aprendizajes esperados, sin embargo, al final quedo claro el conocimiento para los alumnos a traves de una situación de institucionalización. Esto fue necesario porque la mayoría de los alumnos no lograron comprender completamente dicho conocimiento a causa de que no hubo una construcción propia.

Una vez concluidas las acciones correspondientes a la actividad 6, se proyectó nuevamente el video de la actividad 7, con lo que los alumnos se encontraron en un primer momento de una **situación de formulación** donde pudieron recoger, de una manera más consiente, la información que se les proporcionó en él. Asumimos que por la información con la que ya contaban (de la investigación previa que realizaron) y por la proyección anticipada del video, su experiencia con la manipulación de los sólidos de revolución era mayor, incluso desde la primera proyección algunos alumnos hablaban ya sobre integrar para obtener el volumen de los sólidos de revolución.

Posteriormente se generó una discusión acerca del método que se utilizaría para calcular el volumen del sólido de revolución, la cual comenzó comentando las similitudes que los estudiantes encontraban de este proceso con el cálculo de área bajo la curva.

Extracto 31

P: Díganme todo lo que vamos a hacer para calcular el… ¿Qué vamos a calcular?

A_s: El volumen.

P: El volumen. Ok. Les menciona por ahí que si ese método ya lo habían utilizado. ¿Cuál método? ¿A qué se refiere?

A_{e2}: Supongo que lo va a hacer con el método de los circulitos para calcular el volumen, pero como en el que vimos de usar los rectangulitos mientras era más delgadito será más precisa el área, entonces supongo que va a ser igual, más cilindros pero más delgaditos para sacar el volumen exacto.

P: ¿A_5?

A_5: Yo creo que va a ser como cuando hicimos lo de los trapecios que hacíamos uno más delgado y más delgado para sacar el área de la parábola, y ahora vamos a ocuparlo para el volumen.

P: El área que había entre la parábola y el eje de las x. Ok, ¿quién más? ¿A_{e4}?

A_{e4}: Que para sacar el área de los sólidos de revolución pues…

P: ¿El área?

A_{e4}: No, el volumen. Íbamos a ocupar las funciones, yo me imagino que vamos a ocupar las integrales más o menos asi porque ya nos percatamos que al trasladarlas a las hojas podemos utilizar ciertas formulas pero tenemos que checar que los radios cambian mientras crece el sólido de revolución o depende de su forma, la que este. Pero no me llega una idea concreta de cómo le haríamos porque es un sólido de revolución pero o sea si es algo plano…

P: O sea que no puedes hacer la trasferencia de algo plano a tercera dimensión.

A_{e4}: Ajá.

P: Ae_{12}.

A_{e12}: Pero, ¿cómo lo vamos a hacer? si un ejemplo, cuando vimos integración sacábamos el área debajo de las funciones, entonces ¿cómo lo haríamos en tres dimensiones?

P: Ok, es la misma duda que tiene Ae_4 ¿verdad? ¿A alguien se le ocurre cómo?

A_{e5}: ¿Nos una ayudadita?

P: ¿Les doy una ayudadita? Ok.

[…] [La profesora hace un breve repaso de cómo pasaron del barrido de rectángulos muy delgados a una integral para calcular el área bajo la curva]

P: Entonces ahora voy a hacer el barrido con los cilindros o con mis discos y esos discos asi como este [señala su esbozo del pizarrón] tenia este rectangulito es tan delgadito que parece un cabellito que mide de aquí a acá $G(x)$, ahora ese círculo está en tercera dimensión. ¿Ajá? ¿Quién me dice? O sea es lo que va a hacer el barrido, pero ¿quién es? Es un circulo, ¿qué más? No les quiero decir yo.

A_5: Otra vez.

A_{e4}: ¿No es…? Bueno me estoy imaginando que es asi, que va a ser pi por radio al cuadrado y le vamos a restar de donde esté ubicado en el de las x…

P: Bueno, de dónde a dónde ese es otro rollo pero eso que dijo él, ¿ya lo vio todo mundo? ¿No? Diles otra vez.

A_{e4}: pi por radio al cuadrado.

P: ¿Por qué pi por radio al cuadrado?
[Hablan varios alumnos a la vez]

A_{ni1}: ¿Porque es el área de círculo?

P: Porque es el área del círculo. ¿Sí o no? Aquí va a tener pi por radio al cuadrado con un radio chiquito, aquí va a tener pi por radio al cuadrado con un radio más grande [Simula un cono y lo que va diciendo con sus manos] y asi sucesivamente dependiendo de dónde esté situado ese disco, entonces el barrido en realidad lo voy a hacer con el área del circulo que es como dice su compañero pi por radio al cuadrado, pero ese radio ¿quién es? ¿Quién es ese radio? Ustedes lo calcularon hace un rato.

A_{e3}: ¿La altura?

P: ¡La altura! O sea, ¿quién?

A_{e16}: ¿$G(x)$?

P: $G(x)$ o …

A_{e16}: La función.

P: ¡La función! Entonces ya me pueden decir, vamos a hacer un barrido, dice A_{e4}, para calcular el volumen, dice, vamos a hacer un barrido y esto es la integral. Vamos a hacer un barrido, ¿de dónde a dónde? Donde me indiquen de a a b.
[…]

P: Ok, entonces es desde a hasta b voy a ir haciendo el barrido con mi círculo, con el área del circulo de distintos tamaños, y esa área me dice A_{e4}, que es pi por radio al cuadrado, pero ¿quién es el radio dijimos?

A_{e4}: La altura.

A_{e16}: La función.

P: ¿Entonces qué escribo aquí?

A_{e17}: La función.

P: ¿Qué más?

A_{e4}: Por pi.

P: ¿Qué más?

A_{ni2}: Por radio al cuadrado.

P: Ajá pero ¿quién es el radio? Ustedes díganme qué escribo.

A_{e4}: Sería la función por pi.
P: La función por pi. ¿Qué más?
A_{ni3}: Al cuadrado.
P: ¿Y quién está al cuadrado? ¿También pi?
A_s: No, la función.
P: ¿Aquí?
A_s: Sí.
P: Ok. Entonces como va a ser el barrido es: la integral del intervalo que me estén indicando de a a b, de pi por $f(x)$ al cuadrado. Esta va a ser mi integral.

El extracto anterior se convirtió en una **situación de acción** para los alumnos, pues relacionaron la información que ya conocían sobre el cálculo de área bajo la curva con el método que se les propuso para calcular el volumen de los sólidos de revolución a traves de los cilindros de altura muy pequeña. Además como ya se ha mencionado antes, por la TSD, sabemos que el encontrar características comunes entre el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y sus conocimientos previos les ayudó a anticipar sus reacciones o sus respuestas futuras (como se puede percibir en el extracto anterior); sin embargo, que se encontraron con algunas complicaciones para trasladar este conocimiento de segunda a tercera dimensión por lo que requirieron el apoyo de la profesora. Es por eso que se hizo un breve recordatorio de cómo pasaron del barrido de rectángulos muy delgados a una integral, para calcular el área bajo la curva; esto ayudó mucho a los alumnos a identificar poco a poco lo que tenían que integrar para hallar el volumen de un sólido de revolución, y así, fueron construyendo entre todos la fórmula que utilizarían para calcular el volumen en términos de una integral. De esta manera los alumnos se mantuvieron en **situaciones de acción** y **de formulación**. A partir de lo anterior podemos decir que, a pesar de las eventualidades con el orden de las actividades, se logró llegar a la intensión didáctica y al objetivo de esta actividad 7, pues como se ha mencionado, los alumnos se encontraron en situaciones de acción y formulación, logrando transferir el conocimiento que tenían acerca del cálculo de áreas bajo la curva al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

3.6.1. Elementos a destacar en las actividades 6 y 7

Durante estas actividades, hubo lugar para algunos efectos del contrato didáctico, por ejemplo, en la actividad 6 se hizo presente el **efecto Jourdain**; pues en la discusión presentada en el extracto 22 podemos observar cómo la profesora evita el debate sobre el comentario de A_{e4} (donde menciona que los sólidos de revolución se pueden formar a traves de funciones), y lo admite sin darle la importancia que merecía después de no haberse logrado la construcción de dicho conocimiento por parte de los alumnos. Además recordemos que este efecto se venía presentando desde la actividad 5 (véase extracto 20), pues en una sesión anterior la profesora había intentado llegar a esa conclusión con los estudiantes, pero al estar frente a respuestas incorrectas del alumno, decide aceptarlas y evitar entrar en discusión.

Posteriormente, en el extracto 23 podemos observar que se vuelve a presentar el mismo efecto, esta vez la profesora por su deseo de insertar el conocimiento en juego, decide admitir las respuestas de los alumnos como válidas cuando les pregunta cómo se generan los sólidos de revolución, a lo que ellos responden que rotando figuras planas o el contorno de dichas figuras; cuando a esas alturas su respuesta debería ser que se forman al rotar funciones. Es así como se sustituye el planteamiento inicial a uno más familiar para el alumno (acorde a sus respuestas), reconociendo en los estudiantes un conocimiento que no han adquirido solo por dar una respuesta aceptable debido a la simplicidad del planteamiento.

Al concluir la actividad de dibujar los sólidos de revolución generados por las funciones que se les proporcionaron a los alumnos, se genera una discusión acerca de los resultados obtenidos, y durante esa discusión se abrió paso a una retroalimentación a cerca de la diferencia entre una función y una ecuación. En este caso hubo quien trataba de explicar sus ideas, que en realidad eran correctas, aunque estaba escaso del vocabulario adecuado para expresar correctamente lo que quería dar a entender, y más aún, lo que el maestro esperaba escuchar. Este hecho hizo que la profesora no lograra captar lo que los alumnos le querían decir y trataba de acercarlos más a lo que ella esperaba que dijeran. Este suceso puede apreciarse en el siguiente extracto.

Extracto 32

P: ¿Esto qué era? [Refiriéndose la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ en el intervalo $[0, 6]$].

A_s: Un cuarto de circunferencia.

P: Esto es muy importante, un cuarto de circunferencia. Muy bien. ¿Cuánto mide de aquí a aquí? [Se refiere al radio del cuarto de circunferencia].

A_s: Seis.

P: Seis. Porque me está indicando que es de 0 a 6, la x se mueve de 0 a 6 y entonces al rotarlo acá [se refiere al rotarlo con respecto al eje x] ¿qué se me forma?

A_s: ¡Un tazón! ¡Media esfera!

P: Ok, ¿cuánto mide de aquí a aquí? [Se refiere nuevamente al radio del cuarto de circunferencia pero ahora sobre el eje y].

A_s: Seis.

P: Seis. ¿Cómo lo calculamos? ¿Sustituyendo qué valor?

A_{ni1}: Cero.

P: Cero ¿no? porque estoy acá en cero. Sustituyo cero y esto me dio seis. Y si me dio aquí 36 *menos* 0 me va a dar 36. ¿Cuál es la raíz de 36?

A_s: Seis.
Da seis y menos seis.

P: Ajá, pero como es una ¿qué dijimos?

A_s: Un cuarto de circunferencia.

P: No, ¿por qué no grafiqué más seis y menos seis? O sea, esto [se refiere a la parte inferior de la semiesfera] lo obtuve porque roté.

A$_{ni3}$: A porque lo está rotando al revés.

P: No, o sea, ¿pero yo por qué no hice mi grafica desde un inicio asi? [Señalando la semicircunferencia vertical]. ¿Por qué nada más hice esta parte? [Refiriéndose al cuarto de circunferencia a la derecha del eje y y por encima del eje x].

A$_{e13}$: Porque primero están los números y cuando están primero los números sólo es un cuarto.

A$_{e8}$: Por el intervalo.

A$_{4}$: Por el intervalo.

A$_{e6}$: ¿Porque tiene raíz cuadrada?

P: Ajá, pero la raíz cuadrada es seis y también es menos seis. Porque menos seis al cuadrado también es 36 y aquí cuando sustituyo el cero me da 36, entonces la raíz de 36 dicen que es seis y menos seis. Eso es muy cierto. ¿Qué pasó A$_{e18}$?

A$_{e18}$: Porque ahí especifica que x pertenece de 0 a 6.

P: x, de cero a seis, y para este x [Se refiere a $x = 0$] si yo hiciera la gráfica sacando la raíz me da este resultado positivo y este negativo [Señala $y = 6$ y $y = -6$ sobre en la gráfica] y entonces me hubiera dado esto [Se refiere a la semiesfera vertical ubicada a la derecha del eje x]. ¿Y entonces qué pasa? ¿Por qué? Hay una palabra clave.

A$_{4}$: Por la función.

P: Exacto. ¿Porque es qué?

A$_{4}$: Porque la función solo da medio circulo, digo, media circunferencia, y el intervalo nada más pide la mitad de la mitad de la circunferencia. Bueno un cuarto de la circunferencia.

P: No pensé que ya lo había dicho. O sea tiene que ver con función. ¿Cuál es la definición de función? ¿Qué dice para que sea una función? ¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una función? ¿Ya se les olvido?

[…]

P: Bueno, no nos vamos a detener pero se los dejo de tarea.

En el extracto anterior podemos percatarnos de que la respuesta de A_4 es correcta y responde perfectamente bien a la pregunta de la profesora, su única limitación es el vocabulario que emplea, pues la profesora espera escuchar que es porque se está graficando una función (y no la ecuación de la circunferencia), por lo cual sólo genera la parte superior de la circunferencia, debido a que en una función a cada valor de x le corresponde uno y solo uno en y; sin embargo, a pesar de que el alumno no lo dice con las palabras esperadas, en su respuesta va implícito lo que ella espera escuchar. Es así como la profesora, al percatarse de las dificultades que presenta el alumno para dar respuesta a la pregunta planteada, decide acercar al estudiante a la solución, entrando así en un efecto Topaze, aunque finalmente, por la falta de tiempo, ya no siguió la discusión y no pudo continuar guiando al estudiante a la respuesta que quería escuchar.

Más adelante durante el desarrollo de la actividad 6, se dio otro caso de **efecto Topaze**, pues como se mencionó antes, en la última parte de la actividad 6, hubo cierta intervención de la profesora guiando a los alumnos para determinar los radios que indicó, pues en el momento que se repartieron reglas a los equipos ella les pregunta si medirían los radios con las reglas o había otra forma de calcularlos, propiciando duda en los alumnos, esto para evitar equivocaciones burdas por parte de los alumnos. Sin embargo, a pesar de los comentarios de la profesora, hubo alumnos que midieron los radios con ayuda del papel milimétrico (o con regla), por lo que ella intervino nuevamente en los equipos haciendo comentarios que acercaran a los alumnos a pensar en otras alternativas, hasta lograr que se dieran cuenta de que sus funciones no estaban trazadas con tanta precisión como para confiar en las medidas del dibujo, pero aun así fue difícil que los alumnos lo hicieran evaluando la función conscientemente. (Todo esto se puede apreciar en el extracto 27). Es por esto que creemos que, en este caso, la aparición de este efecto influyó considerablemente en los estudiantes, obstaculizando la construcción propia del conocimiento en esperado.

3.7. Análisis de la actividad 8

Nombre de la actividad 8: Aplica lo del video.

Objetivo: Aplicar la integral para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Comencemos por recordar que esta actividad se trata de pedir a los alumnos que dibujen la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,10] y el sólido de revolución que ésta genera al rotarse respecto al eje x. Posteriormente se les pide calcular el volumen del sólido generado, por el método de la integral. Todo esto con el objetivo de que los alumnos fueran capaces de aplicar el método que se les presentó en el video, pero ahora, al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución; sin embargo, la actividad 8 no comenzó con el ejercicio mencionado, sino que la profesora retomó los trabajos ya realizados en la actividad anterior y pidió a los alumnos escoger dos de ellos para calcular su volumen por medio de la integral. Aunque este último no era el ejercicio considerado en la planeación de la situación didáctica, al realizarse cumple con los mismos propósitos que se tenían para el ejercicio planeado, además de que los resultados nos permiten analizar las mismas variantes; es por esto que lo consideramos adecuada esta actividad.

A pesar de que la integración de funciones se consideraba un conocimiento previo para la situación didáctica, durante la ejecución de la actividad pudimos percatarnos de que los alumnos tuvieron problemas para evaluar las integrales de las funciones dadas, hecho que sorprendió a la profesora debido a que ella misma había visto el tema con los estudiantes un par de meses antes y ellos mostraban dominio de este, y más aún, por la sencillez de las funciones que debían integrar. Este hecho se ve reflejado en la producción escrita de los alumnos que se muestra a continuación; pues de los 14 trabajos entregados (dos por equipo, excepto el equipo 6) únicamente en un equipo llegaron a la solución de forma totalmente correcta (véase figura 3.18.).

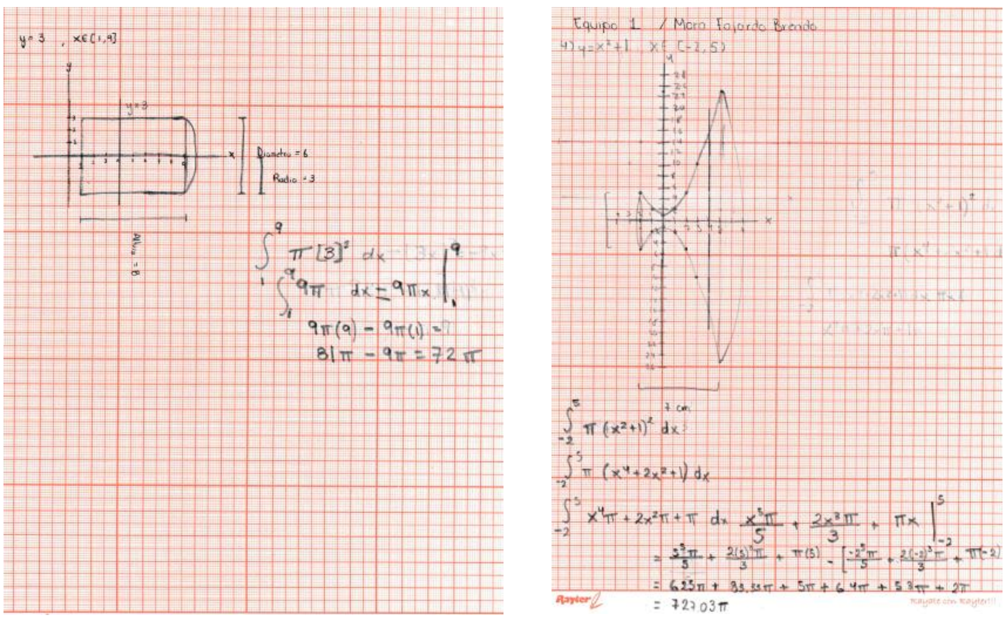
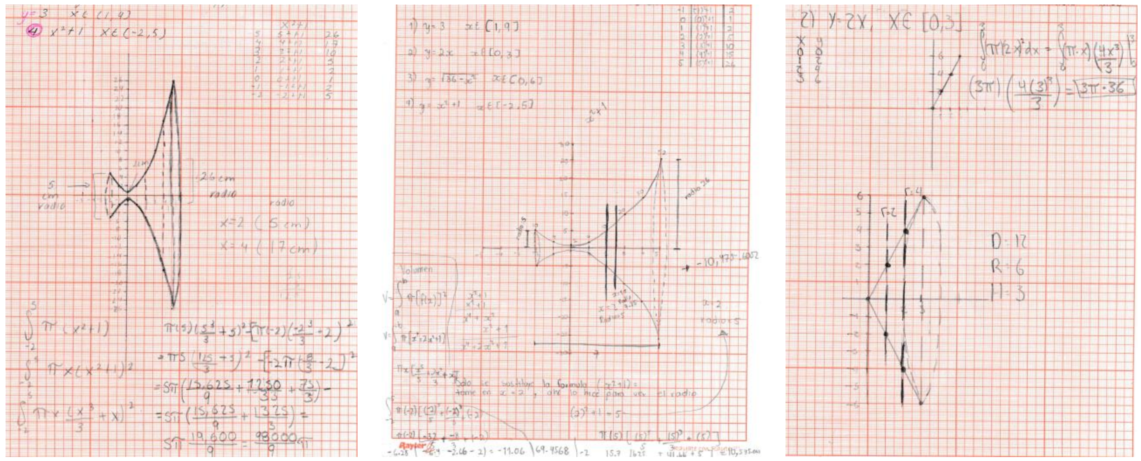


Figura 3.18. Producción escrita A8E1

En la mayor parte de los trabajos, los alumnos erraron al sustituir la función o los límites de integración en la fórmula para calcular el volumen de sólidos de revolución, y lo más común, fue que se equivocaron al integrar la función correspondiente a la figura que eligieron.



A. A8E2 B. A8E5 C. A8E8

Figura 3.19. Producción escrita correspondiente a la actividad 8 con errores al integrar la función

Como puede observarse en la figura anterior, el error más frecuente a la hora de integrar fue que los alumnos no recordaron que $\int cx\,dx = c\int x\,dx$ y asumieron erróneamente que $\int cx\,dx = \int c\,dx \cdot \int x\,dx$; además, en varios casos los alumnos integraron la expresión $\pi(x^2+1)^2$ sin desarrollar el binomio al cuadrado e ignorando que para hacerlo de esa forma debían usar la regla de la cadena. Este tipo de equivocaciones, no permitieron, a la mayoría de los alumnos, llegar a la respuesta correcta del volumen de sus figuras, sin embargo, se mantuvieron tomando decisiones (colectivas) respecto a las acciones ejecutadas sobre su medio y fue la primera vez que calcularon el volumen por medio de la integral, lo cual los ubicó en una **situación de acción**, pues creemos que el surgimiento de algún tipo de situación didáctica es independiente de los aciertos o errores de los alumnos.

El hecho de tomar decisiones en colectivo, permitió notar las distintas opiniones de los integrantes de cada equipo para ejecutar la actividad, y aunque ya habían comprendido el origen de la fórmula, aún no se enfrentaban a utilizar este método por sí mismos; esto les causó confusiones en cuanto a lo que tenían que sustituir y a la forma de asignar los límites de integración, por lo cual se encontraron inmersos en una **situación de formulación**, pues fue el momento en el que los estudiantes retomaron y reformularon de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos, y además, sus mismas dudas los llevaron a involucrar a sus compañeros para resolver la situación, convirtiéndose de alguna forma en oponentes, ya que ambos partes poseían las informaciones necesarias para tratar dicha cuestión.

Cabe mencionar que por falta de tiempo, en la quinta (y última) sesión, el ejercicio destinado para esta actividad fue reemplazado por calcular el volumen de dos sólidos de revolución con los que los alumnos habían trabajado previamente, sin embargo este no se ignoró, pues al final de la sesión la profesora pidió a los estudiantes resolverlo de tarea. Sin embargo por cuestiones ajenas al equipo de trabajo que participo en la realización del proyecto, no fue posible contar con esos trabajos para su análisis.

3.7.1. Elementos a destacar en la actividad 8

A pesar de que los alumnos ya habían trabajado previamente con la integral para calcular áreas comprendidas entre una función y el eje x, en esta actividad, se les complicó identificar correctamente, por sí mismos, la función que tenían que integrar, pues llegaron a pensar que solo debían sustituir el valor de la función en un punto específico, como puede apreciarse en los siguientes extractos y en la figura 3.20.

Extracto 33

A_4: Entonces por ejemplo el intervalo que va a manejar la integral viene siendo por ejemplo aquí, ¿de cero a seis?

P: Exacto.

A4: ¿Ya después tenemos que sustituir?

P: De cero a seis vas a ir haciendo el barrido, como dijimos, con tus círculos de área πr^2, ¿no? Vas a ir haciendo el barrido de cero hasta seis.

A4: Ajá, y después la función que por ejemplo seria alguno de mis puntos, que por ejemplo aquí fue tres, entonces lo sustituimos y…

P: ¿La función cuál es? ¿Cuál es tu función?

A4: f de tres.

P: No pero es en general. O sea es en general, acuérdate. Ahí no pusimos un g de x en particular, ahí pusimos cualquier altura, o sea cualquier círculo.

A3: ¿Entonces sería más como $2x$?

P: Exacto $2x$, nada más $2x$.

A4: ¿Entonces aquí seria seis por ejemplo? Es que no termino de comprender.

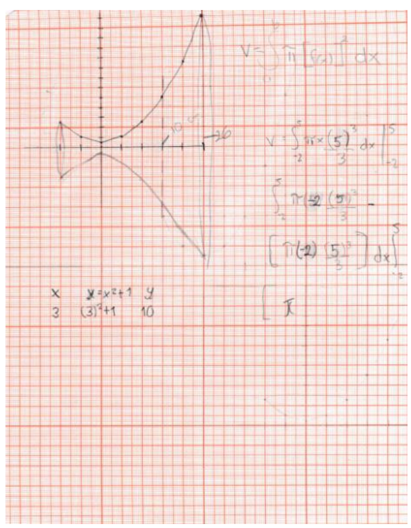


Figura 3.20. Producción escrita A8E4

Extracto 34

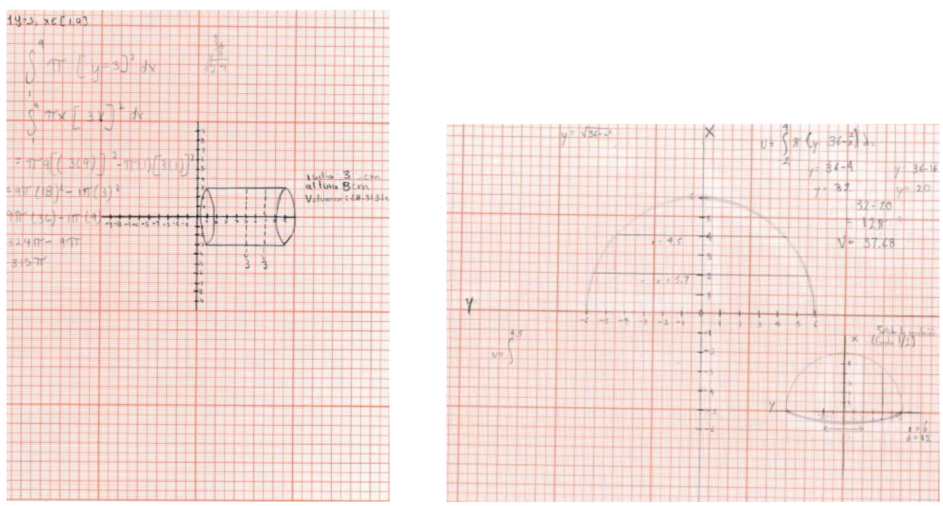
[La profesora se dirige al equipo 4 para corregirlos con respecto a la función $y = 3$]

P: ¿Cuál función fue? Ésta al cuadrado, ¿de dónde sacan este tres? ¿Cuál es la integral? Aquí me da…

A$_{e10}$: Pusimos de uno a…
P: Ajá está bien, ¿el radio quién es?
A$_{e10}$: Tres.
P: Tres, entonces ya siempre es tres ¿no? Porque tu función…
A$_{e10}$: Es constante.
P: Exacto, entonces aquí tu función ¿cómo se llama? [Los alumnos dudan y se quedan en silencio porque no saben qué responder].
A$_{e10}$: Es que necesito mi libreta.
A$_{e11}$: Es esta [señala la expresión algebraica de la función $y = 3$].
A$_{e10}$: A ver ¿cómo dijo?
P: Hasta aquí van bien [únicamente señala la fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución con los limites definidos]. Pero ¿cómo se llama tu función?
A$_{e11}$: y igual a 3.
P: Ajá, ¿o sea?
A$_{e11}$: y igual a 3.
P: ¿O sea?
A$_{e10}$: Tres.
P: Aquí es tres al cuadrado.
A$_{e23}$: Sin la f ¿verdad?
P: Sin f exacto. Entonces qué te queda, la integral de uno a nueve de π por tres. ¿Y cuál es esa integral? ¿Cuál es la integral de π por tres? Ya hicimos ese ejercicio.

Como pudimos observar en lel extracto 34, entre otras cosas, a los alumnos les costó identificar cómo sustituir la función cuando se trata de una constante, y más aún, que la intervención de la profesora pareció haber ayudado a los alumnos a clarificar la forma en que debían sustituir, sin embargo en el trabajo escrito que entregaron se puede observar que a pesar de la ayuda que recibieron no quedo completamente clara la forma correcta de hacerlo. Por lo que inferimos que la intervención de la profesora no necesariamente garantiza que se comprenda completamente la solución de una actividad.

Además, en varios casos a la hora sustituir la fórmula para calcular el volumen de sólidos de revolución, sustituyeron $f(x)$ por la ecuación completa, es decir, por $y = 3$ o $y = 36 - x^2$ en lugar de sólo sustituir $f(x)$ por 3 o $36 - x^2$ respectivamente (véase figura 3.21.).



A. A8E2 B. A8E5

Figura 3.21. Producción escrita correspondiente a la actividad 8 donde sustituyen erróneamente la función

De hecho no sólo se les complico la sustitución de la función, sino también habían olvidado algunas reglas sencillas de integración, lo cual fue un factor que influyó determinantemente en que la mayoría de los alumnos no llegaran a la solución de sus ejercicios; por lo cual fue necesaria la intervención de la profesora al percatarse de que en casi todos los equipos no sabían cómo integrar las constantes, por lo que tuvo que recordarlo de forma grupal a traves de ejemplos.

Extracto 35

P: ¿Cuál es la integral de cinco?
A_{ni1}: Diez.
P: ¿Cuál es la integral de cinco?
A_{e2}: Cinco x sobre uno.
P: Cinco x. ¿Y cuál es la integral de nueve?
A_{ni2}: Nueve x.
P: ¿Cuál es la integral de raíz de dos?
[Los alumnos comienzan a hablar al mismo tiempo dando respuestas incorrectas].
A_{e4}: Raíz cuadrada de dos
P: ¿Cuál es la integral de 7?
A_{s}: Siete x.
P: ¿De tres medios?
A_{e4}: Raíz cuadrada de tres.
P: O sea dejan de integrar de diciembre para acá ¿y ya se le olvido?
A_{e2}: Tres medios de x.
P: Tres medios de x. Okey. ¿Cuál es la integral de menos diez?
A_{ni3}: Menos diez x.
P: Menos diez x. Okey. ¿La integral de menos cien tercios?
A_{s}: Menos cien tercios de x.
P: ¿Y raíz de 5?
A_{s}: Cinco x.
[…]
P: ¿Cuál es la integral de π?
A_{ni4}: πx.
P: ¿Cuál es la integral de raíz de dos?
A_{ni5}: Raíz de dos a la x.
P: ¿A la x?
A_{s}: Por x.
P: Por x. Raíz de dos por x. ¿Cuál es la integral de raíz de cinco por cuatro?
A_{ni6}: Raíz de cinco por cuatro x. Okey. Pues ya. No jueguen apenas dejaron de integrar de diciembre para acá y ya se le olvido.

La intervención de la profesora ayudó a los alumnos a corregir algunos errores que habían cometido y evitar algunos otros, guiándolos (en cierta parte) para continuar con sus cálculos y acercarlos a la respuesta. Este acontecimiento lo catalogamos como un **efecto Topaze**, efecto que se hizo presente a lo largo de la actividad, ya sea en intervenciones grupales o por equipo. Esto fue a causa de las múltiples complicaciones que tuvieron los alumnos en los cálculos para integrar correctamente cualquier tipo de función.

3.8. Análisis de las actividades 9 y 10

Nombre de la actividad 9: Calcular el volumen de objetos.

Objetivo: Aplicar diferentes métodos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y reconocer la potencialidad de la integral como herramienta para dicho cálculo.

Nombre de la actividad 10: Resumen del tema.

Objetivo: Hacer una recapitulación e interiorización de la información obtenida en la práctica.

Como sucedió en la actividad anterior, la falta de tiempo en la última sesión no permitió que se llevara a cabo la actividad 9 en el salón de clases, pues como recordaremos, se trataba de que los alumnos determinaran las dimensiones de un par de recipientes que les fueron entregados por equipo (todos estos sólidos de revolución); de los cuales debían calcular el volumen por dos métodos distintos, siendo uno de ellos el cálculo de volúmenes a traves de la integral. Por tanto, es evidente que se trata de una actividad que los alumnos pueden resolver por sí mismos, pero tiene cierto grado de dificultad, principalmente para determinar las dimensiones exactas de dichos recipientes y para definir correctamente la función que genera a cada sólido de revolución, por lo que se requiere de suficiente tiempo disponible para realizarlo cuidadosamente. Por estas razones, la profesora pidió a los estudiantes que realizaran ese trabajo como tarea, trabajo que ya no fue posible analizar debido a que no tuvimos acceso a la producción escrita de los alumnos correspondiente a esta actividad.

Por la misma razón no fue posible realizar la actividad 10, por lo que los alumnos llegaron únicamente a la realización de la actividad 9.

Así, concluimos el análisis de los resultados que obtuvimos en la aplicación de la situación didáctica diseñada para la realización del proyecto, donde mencionamos momentos clave en los que aparecieron elementos teóricos de la TSD y destacamos los sucesos que nos parecieron más relevantes durante su ejecución.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo determinadas a partir de los resultados que se obtuvieron, específicamente, de la aplicación de la situación didáctica diseñada para la realización de esta investigación.

Las conclusiones se presentan clasificadas en cuatro apartados. En el primer apartado se exponen las que se refieren a cada actividad que conforma el diseño de la situación didáctica, en el segundo, las que están relacionadas con algunos elementos teóricos encontrados durante la ejecución, en el tercer apartado se dan las conclusiones de validación de la situación didáctica aplicada y finalmente se presentan algunas apreciaciones generales de acuerdo a nuestra perspectiva.

Cabe mencionar que en el primer apartado se encuentra el nombre, el objetivo y el contenido de cada actividad en el orden y lugar correspondiente en el que se presentan las conclusiones. De forma similar, en el segundo, se recuerdan las caracterizaciones de los elementos teóricos a los que aluden las conclusiones presentadas allí.

4.1. Conclusiones por actividad

A partir de las apreciaciones que tuvimos durante la ejecución de la situación didáctica, presentadas en el capítulo III, determinamos las siguientes conclusiones por actividad.

Actividad 1

Primer acercamiento a sólidos de revolución

Objetivo: Establecer que un sólido de revolución proviene de un giro.

Los alumnos debían:

- *Observar un video sobre sólidos de revolución.*
- *Dibujar los sólidos de revolución generados al girar las figuras propuestas en el video.*
- *Comparar sus resultados con la solución proyectada por la profesora, para posteriormente, discutir dichos resultados y las posibles dificultades con las que se encuentren para obtenerlos.*

→ En la producción escrita de los alumnos pudimos percatarnos de que, en general, existe un grado alto de precariedad para reproducir y representar mental y gráficamente formas y figuras en espacios tridimensionales.

→ El debate que se suscitó, acerca de los sólidos de revolución obtenidos al rotar cada figura solicitada en el video (mientras los alumnos plasmaban sus respuestas), provocó que los resultados obtenidos no fueran auténticamente de los estudiantes, pues las intervenciones de la profesora y de sus compañeros influyó en las decisiones que iban tomando en ese momento y les permitía cambiar sus perspectivas iniciales, evitando ciertos errores; por lo cual, sus producciones escritas correspondientes a esta actividad no dan una información confiable acerca del trabajo de cada alumno y mucho menos nos permiten apreciar realmente el nivel de logro de la actividad.

→ La discusión que generó la profesora durante el desarrollo de esta actividad, acerca de lo que es un sólido de revolución (donde los alumnos expresaron el concepto que se habían formado personalmente), fue determinante para verificar, a traves de las opiniones de los alumnos, el cumplimiento del objetivo de la actividad. Cabe mencionar que ésta no era parte de la situación didáctica diseñada, sin embargo, sin su realización no hubiera sido posible saber con certeza el concepto de sólido de revolución que los alumnos se habían formado hasta ese momento.

→ Aunque los resultados de esta actividad quedaron determinados, en cierta medida, por las intervenciones de la profesora y de los mismos estudiantes mientras era resuelta, esto no obstaculizó el cumplimiento del objetivo inicial de la actividad.

Actividad 2

Clasificación de sólidos de revolución

Objetivo: Conjeturar qué objetos son sólidos de revolución y qué objetos no lo son, y además, determinar el eje de rotación de los que se consideren como sólidos de revolución.

Los alumnos debían:

- *Explorar y clasificar, en sólidos y no sólidos de revolución, un conjunto de objetos que les fue proporcionado.*

- *Identificar el eje de rotación y la figura generatriz de los objetos que clasifiquen como sólidos de revolución y posteriormente comprobar sus respuestas manipulando el material didáctico.*
- *Participar en una discusión donde den las razones que les llevaron a decidir qué objetos no son sólidos de revolución y expresando las características comunes entre los objetos clasificados como sólidos de revolución (o entre los que no lo son).*

→ El proporcionar a los alumnos los medios necesarios para explorar y manipular los objetos que debían ser clasificados en sólidos y no sólidos de revolución, fue un factor determinante para la realización efectiva y el logro del objetivo de esta actividad, pues los alumnos *conjeturaron* conscientemente sus respuestas bajo argumentos basados en los aprendizajes adquiridos hasta ese momento.

→ En general, podemos decir que el objetivo de la actividad 2 fue alcanzado, sin embargo, hubo ciertas complicaciones para los alumnos durante su realización; por ejemplo, notamos que la forma ovalada de los objetos les hace dudar si son o no sólidos de revolución, sin embargo, consideramos estas dudas como una oportunidad para enriquecer la construcción del conocimiento esperado a lo largo de las actividades posteriores.

Actividad 3

Manipula sólidos de revolución con cortes

Objetivo: Reconocer que los cortes perpendiculares al eje de rotación de cualquier sólido de revolución, son circunferencias.

Los alumnos debían:

- *Explorar y manipular un par de conos de madera, uno con cortes paralelos y otro con cortes perpendiculares a su eje de rotación.*
- *Medir y comparar los radios de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación de uno de los conos.*

→ Las intervenciones de la profesora en esta actividad, fueron un factor determinate para tratar de lograr el objetivo, pues el acceso que tuvieron los alumnos al material didáctico no fue suficiente para darse cuenta de la regularidad en los cortes perpendiculares al eje de rotación de uno de los conos. Esto fue porque la atención de los estudiantes estaba centrada en algunas características, de los sólidos de revolución, consideradas en actividades anteriores.

→ Los comentarios de la profesora que buscaban guiar a los estudiantes para identificar la forma circular de los cortes en uno de los conos y el hecho de que se expresara abiertamente que, en uno de ellos los cortes eran circulares cuando estos eran perpendiculares al eje de rotación, no fueron indicios suficientes para que los alumnos lograran reconocer dicha regularidad en los sólidos de revolución.

→ No dar seguimiento a la idea de que los cortes eran circulares en uno de los conos, una vez que ésta había sido mencionada, contribuyó a que no se cumpliera el objetivo de la actividad, pues dicho comentario era la pauta para inducir a los estudiantes a la generalización de la característica mencionada, sin embargo, la discusión se desvió del tema.

→ En esta actividad no se logró que los alumnos reconocieran por ellos mismos que los cortes perpendiculares al eje de rotación de cualquier sólido de revolución son circunferencias.

→ Pedir a los alumnos que midieran y compararan los radios de las circunferencias formadas en los cortes de uno de los conos y tratar de inducirlos precipitadamente a descubrir de qué depende la variación de dichos radios, desvió la atención de la clase durante la discusión, rompió con el proceso de construcción del conocimiento que se llevaba hasta ese momento y evitó que los alumnos interiorizaran completamente la idea de la variación en los radios, pues esto se hizo antes de que los alumnos llegaran a comprender completamente la forma circular en los cortes.

→ La discusión guiada excesivamente por la profesora, se redujo a una situación de enseñanza tradicional, donde a partir de las ideas expresadas anteriormente, afirmó a manera de conclusión que los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución *siempre* son circulares. Así, la afirmación de la profesora reveló el conocimiento que quería transmitir y no permitió que el alumno lo construyera por el mismo.

→ Guiar demasiado las respuestas de los estudiantes y no dar un seguimiento conveniente a la idea esencial de la actividad, provocó que los alumnos no lograran interiorizar ninguna de los planteamientos mencionadas durante la discusión, ya que no provinieron de una construcción autónoma por parte de los estudiantes.

Actividad 4

Regresando a los sólidos clasificados

Objetivo: Concluir que la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación de un objeto, es una condición necesaria para que sea un sólido de revolución.

Los alumnos debían:

- *Retomar los objetos clasificados en la actividad 2 para hacer cortes perpendiculares a su eje de rotación y verificar si su clasificación fue correcta.*
- *Aproximar el radio de las circunferencias formadas en los cortes de los objetos que sí sean sólidos de revolución.*

→ Al llegar a esta actividad, los alumnos aún no estaban convencidos de que la forma circular de los cortes perpendiculares al eje de rotación es una característica común de todos los sólidos de revolución, a pesar de que anteriormente la profesora lo afirmó con claridad, por lo cual los estudiantes no estaban en condición de reclasificar los objetos de la primera actividad bajo ese supuesto.

→ Reorientar la actividad y aprovecharla para que los alumnos se convencieran de que la forma circular en los cortes es una condición necesaria para que un objeto sea sólido de revolución, fue una decisión favorable para tratar de establecer la idea, pues era indispensable para continuar con el proceso de aprendizaje.

→ Nuevamente se insertó en los alumnos la idea de la forma circular en los cortes de *todos* los sólidos de revolución a través de preguntas guiadas, ya que la manipulación del material en esta actividad, no fue suficiente para que quedaran completamente convencidos, provocando que los estudiantes ya no lo analizaran más a fondo para concluirlo por ellos mismos.

→ El hecho de que los alumnos no se hayan convencido por ellos mismos de la regularidad en los cortes de todos los sólidos de revolución, y el cerrar la actividad bajo el supuesto de que ya tenían clara dicha idea, provocó que el conocimiento adquirido no fuera sólido.

Actividad 5

Con hojas de papel milimétrico

Objetivo: Comprender que basta girar una función (y no necesariamente una figura simétrica plana) alrededor del eje horizontal para generar un sólido de revolución.

Los alumnos debían:

- *Dibujar en hojas milimétricas el contorno de los objetos clasificados como sólidos de revolución, de forma que el eje de rotación coincida con el eje horizontal de la hoja milimétrica, tratando de imaginar el giro de la figura que dibujaron y cómo se forma el sólido de revolución a partir de dicho giro.*
- *Discutir la posibilidad de borrar de sus dibujos las líneas paralelas al eje vertical (excepto si tienen curvatura) y todo lo que se encuentre por debajo de eje horizontal, e imaginarse qué figura se forma ahora, si se gira nuevamente alrededor del eje de rotación.*

Es importante recordar que como se mencionó en el capítulo III, la actividad 5 no fue realizada como se estableció en el diseño de la situación didáctica, pues se redujo a pedir a los alumnos que dibujaran el contorno de sus objetos (con las especificaciones estipuladas), e inmediatamente la profesora dio la indicación de calcular, en distintos puntos, los radios de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación de los sólidos de revolución generados por las contornos dibujados, indicación que correspondía a la actividad 6. Finalmente, después de una breve discusión que se generó a cerca de las figuras que generaban los objetos que clasificaron como sólidos de revolución, les fue proyectado el video correspondiente a la actividad 7.

→ El sentido de la actividad fue cambiado completamente dado que las indicaciones para llevarla a cabo no correspondieron con las establecidas en el diseño de la situación didáctica, esto provocó una ruptura en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

→ Dado que no se realizó la actividad como se había establecido, no se alcanzó el conocimiento esperado, pues en ningún momento se permitió a los alumnos darse cuenta de que no era necesario trazar todo el contorno de sus sólidos de revolución para que fueran generados al rotar la figura.

→ El no respetar el orden de las actividades provocó que la construcción autónoma del conocimiento al que se esperaba llegar, no fuera progresiva, pues esto provocó varios saltos que dejaron *huecos* en el proceso de aprendizaje que se trataba de efectuar.

→ El objetivo y la intensión didáctica de la actividad 5 no llegaron a su culmen debido a que la actividad no fue realizada como se planeaba, pues lo más importante de la actividad era llegar a una discusión que permitiera alcanzar el objetivo, lo cual no se presentó en ningún momento durante su ejecución y ni siquiera se hace una mención de que basta girar una función alrededor del eje horizontal, y no necesariamente una figura simétrica, para generar un sólido de revolución..

Actividades 6 y 7

Actividad 6: Se les proporciona una función

Objetivo: Darse cuenta de que existe una variación en el radio de las circunferencias formadas en los cortes perpendiculares al eje de rotación, inferir que dicha variación queda determinada por una función y reconocer que el radio de cada circunferencia que elijan es la imagen de la función que genera el sólido de revolución en el punto de corte.

Los alumnos debían:

- *Dibujar la gráfica de un conjunto de funciones dadas y los sólidos de revolución que se genera a partir de rotar cada una con respecto al eje horizontal.*
- *Concentrarse en algún punto sobre el eje de rotación y aproximar la distancia que hay entre dicho punto y algunos otros que se encuentren sobre la circunferencia que se formaría al hacer un corte perpendicular al eje de rotación a la altura de dicho punto. Posteriormente, comparar las medidas que resulten y repetir el mismo procedimiento en algunos otros puntos sobre el eje de rotación.*
- *Discutir acerca de cómo es dicha distancia en diferentes puntos sobre el eje de rotación, y a qué se debe o de qué depende la variación.*

Actividad 7: Video del cálculo de volumen de sólidos de revolución

Objetivo: Transferir el conocimiento que tienen acerca del cálculo de áreas bajo la curva al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

El alumno debería:

- *Observar un video sobre el cálculo de volumen de sólidos de revolución.*
- *Discutir con el grupo sobre la potencialidad de la integral como herramienta para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, el barrido como estrategia para llegar a la integral, qué es lo que se integra y la similitud de este proceso con el cálculo de área bajo la curva.*

→ Al llegar a la actividad 6 los alumnos no contaban con los conocimientos necesarios para alcanzar el objetivo de dicha actividad.

→ Remplazar las acciones establecidas en la primera parte de la actividad 6 por la proyección del video de la actividad 7, rompió completamente con el orden de la situación didáctica, por lo que la forma en que se manejaron las actividades 6 y 7 ya no corresponden a lo establecido y mucho menos al proceso de construcción del aprendizaje que se quería lograr en los estudiantes.

→ Al llegar a la proyección del video, los alumnos reaccionaron inmediata y correctamente relacionando la información presentada en éste con sus conocimientos previos sobre el cálculo de áreas bajo la curva por integrales, esto a pesar de que aún no contaban con los conocimientos previos necesarios para trabajar conscientemente con el volumen de sólidos de revolución por integrales.

→ Se desaprovecharon momentos importantes donde los alumnos externaron algunas ideas que identificaron en el video, ideas que ya debían ser claras;

pues la profesora no les dio el énfasis necesario para retomarlas y dejarlas bien establecidas en ese momento. Esto parece haber sucedido por falta de tiempo.

→ En estas actividades fue notable la facilidad que tenían los alumnos para identificar las gráficas de algunas funciones a partir de su ecuación. Dicha cualidad pudo haber enriquecido más las actividades si hubiesen sido ejecutadas en el orden y con las indicaciones adecuadas.

→ Fueron aprovechados algunos errores de los alumnos para retomar ideas centrales relacionadas con el conocimiento que se quería transmitir, las cuales tenían que quedar establecidas durante las actividades 6 y 7; sin embargo esas ideas fueron retomadas por la profesora, por lo que no se trató de un reconocimiento propio de los alumnos.

→ Basados en los conocimientos previos que mostraron los alumnos acerca del cálculo de áreas bajo funciones por medio de la integral, fue notorio el éxito que tuvieron para transferir ese conocimiento al método del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución a través de la integración.

→ Los conocimientos esperados de la actividad 6 no fueron alcanzados debido a que no hubo una construcción autónoma de éstos por parte de los alumnos.

→ El objetivo de la actividad 7 pudo lograrse aun con las deficiencias en los conocimientos que se debieron adquirir en las actividades previas.

Actividad 8

Aplica lo del video.

Objetivo: Aplicar la integral para el cálculo de volumen de sólidos de revolución.

Los alumnos debían:

- *Dibujar la gráfica de una función dada y el sólido de revolución generado al ser rotada con respecto al eje horizontal.*
- *Calcular el volumen del sólido de revolución dibujado, por el método de la integral.*
- *Participar en una discusión grupal inducida por la profesora, para generalizar el método, a traves de una lluvia de ideas.*

→ Lo resultados obtenidos de esta actividad no fueron satisfactorios debido a que los alumnos habían olvidado algunas reglas básicas de integración, en la mayoría de los casos y, en otros más, porque presentaron problemas para sustituir datos en las fórmulas.

→ La falta de tiempo no permitió que los estudiantes recordaran detalles que habían olvidado sobre las reglas de integración, y por la misma razón no se les pudo dar la oportunidad de retomar y corregir sus trabajos, sin embargo, fue notable que comprendieron el método utilizado.

4.2. Conclusiones por elemento teórico

SITUACIONES DIDÁCTICAS

Situación de acción

> *Se caracteriza por la acción que ejecuta el sujeto sobre su medio durante el proceso de adaptación, es decir, es un momento en el cual los alumnos interaccionan con el medio tomando decisiones bajo un modelo implícito (relaciones o reglas sobre las cuales toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas y a posteriori de formularlas).*

→ Se hizo presente también cuando los estudiantes tenían la encomienda de dar solución a algún problema o ejercicio planteado.

Situación de formulación

> *Esta situación se distingue por la existencia de dos momentos, uno que consiste en recoger la información a partir de la observación sobre las reacciones del medio, de manera que su interiorización lleve a un segundo momento, donde a partir de la información recolectada, se desarrollen nuevas estrategias de resolución basadas en la formulación de un conocimiento, para posteriormente ser comunicadas.*
>
> > *Recordemos que la formulación de un conocimiento corresponde a la capacidad del sujeto para retomarlo, lo cual implica reconocerlo, descomponerlo y reformularlo en un nuevo sistema lingüístico.*

→ Se presentó en varias ocasiones, principalmente se encontró cuando los estudiantes tenían que reconocer alguna regularidad o característica del objeto de estudio y retomarlo de forma general.

→ Los principales indicadores de esta situación, fueron las participaciones de los estudiantes, que en general fueron significativas.

→ Esta situación fue una de las más esperadas a lo largo de la ejecución de la situación didáctica, ya que la consideramos esencial en la construcción autónoma de los conocimientos, sin embargo, su ausencia en las últimas actividades fue muy común y determinó los resultados obtenidos en éstas.

Situación de validación

En este tipo de situación el sujeto comunica su opinión afirmando sus propuestas y buscando propiciar puestas a prueba, debates o convenios; para lo cual, da razones para convencer al otro sobre sus afirmaciones y acepta razones para cambiar su punto de vista. De esta forma aprende a cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer y establece la validez de sus propuestas.

→ Este tipo de situación fue menos frecuente que las dos anteriores. Principalmente la encontramos en las discusiones entre los integrantes de cada equipo, cuando se trataba de tomar una decisión entre todos, donde cada uno expresaba su opinión y defendían sus posturas a traves de argumentos basados en lo que ellos consideraban correcto, tratando de convencerse entre sí.

Institucionalización

Es un espacio en el cual el docente toma en cuenta oficialmente los comportamientos y las producciones libres del alumno y establece una relación entre estos y el conocimiento cultural que desea transmitir, con el fin de darle a dicho conocimiento el estado de saber cultural

→ Los momentos de institucionalización se encontraron principalmente al final de las puestas en común, cuando la profesora hacía una recapitulación de las producciones del alumno y se ocupaba de establecer una relación entre estas y el conocimiento que deseaba transmitir, por supuesto tomando como punto de partida las aportaciones de los estudiantes que le parecían convenientes.

→ La institucionalización estrictamente a cargo de la profesora (que finalmente se convertía en una situación tradicional de enseñanza) la encontramos en momentos donde ya se había discutido por un gran rato alguna idea que no podía aterrizarse o que los alumnos no lograban percibir por ellos mismos. Así, por la premura del tiempo, la profesora optaba por hacer una recapitulación, dando sentido a los comentarios más convenientes para llegar finalmente a la idea central de la discusión, dejando que los alumnos se apropiaran de los conocimientos de la forma en que les fuera posible.

EFECTOS DEL CONTRATO DIDÁCTICO

Efecto Topaze

Está caracterizado por un escenario donde el docente, al percatarse de las dificultades que presenta el alumno para la resolución de un problema planteado, decide acercar al estudiante a la solución, hasta llegar el momento en el que él mismo asuma la responsabilidad del problema proporcionando la respuesta, así es como el alumno llega a la solución de un problema por intervención del profesor y no por sus propios medios, por lo que se imposibilita la construcción autónoma del conocimiento por parte del alumno.

→ Durante la mayoría de las puestas en común donde los alumnos daban sus puntos de vista, hubo presencia del efecto Topaze, pues la profesora guiaba discretamente a los alumnos para llegar a las respuestas correctas y con sus comentarios, la forma en que manejaba la situación evitaba el error en los alumnos, pues durante estas discusiones tomaba las respuestas favorables para continuar con el desarrollo de la clase y en la mayoría de los casos, ignoraba los comentarios incorrectos de los alumnos, lo cual de alguna forma obstaculizó que los alumnos descubrieran sus errores por ellos mismos, aunque favoreció el avance de las clases.

→ Este efecto también se dio frecuentemente cuando la profesora tenía contacto directo con algún equipo o algún alumno al detectar algún error en sus producciones, de forma que los orientaba hasta llegar a la solución de la duda que tuvieran en el instante.

→ La presencia frecuente de este efecto la atribuimos a la premura del tiempo disponible para la aplicación de la situación didáctica, pues en repetidas ocasiones la profesora recurrió a las intervenciones cuando se percataba de que los estudiantes se detenían mucho en alguna actividad por alguna complicación que se les presentaba y lo hacía para que pudieran avanzar a las siguientes actividades.

Efecto Jourdain

Se distingue por el deseo de insertar cierto conocimiento en actividades más simples para el alumno por parte del docente, lo cual lo conduce a sustituir la problemática verdadera por otra más familiar, reconociendo en el estudiante un conocimiento que no ha adquirido solo por dar una respuesta aceptable derivada de la simplicidad del problema.

→ Este efecto se presentó pocas veces a lo largo de la ejecución de la situación didáctica, sin embargo, se encontraba en algunas puestas en común donde las respuestas de los alumnos eran incorrectas constantemente, por lo que la profesora decidía admitirlos como válidos evitando el debate del conocimiento con el alumno para poder continuar con la discusión y llegar a la idea central.

→ También estuvo presente cuando los alumnos no estaban listos para enfrentarse a una actividad y, por el deseo de insertar cierto conocimiento para el cual no parecían estar preparados, la profesora se las planteaba de una forma más simple, sustituyendo la problemática verdadera por una más familiar para los estudiantes, aunque esta nueva no tuviera todas las características de la problemática original.

4.3. Validación de la situación didáctica

→ La construcción sistemática del conocimiento se vio afectada de manera importante por la reorganización improvisada en el orden de las actividades, sin embargo, mientras se ejecutaron en el orden correcto, se iba logrando satisfactoriamente la construcción de este.

→ El uso del material didáctico que se les proporcionó a los alumnos fue favorable para lograr la construcción autónoma de los conocimientos que iban obteniendo en las actividades de la situación didáctica (principalmente en las primeras actividades); además de que resultó ser una motivación importante para los estudiantes.

→ Lo resultados obtenidos en la aplicación de la situación didáctica fueron buenos, pero no óptimos; principalmente, debido al desorden que se generó en la ejecución de las actividades que la conformaron y a las indicaciones que no correspondían en algunos momentos.

→ En algunas ocasiones, las intervenciones no reguladas de la profesora en las puestas en común provocaron que los conocimientos que los alumnos tenían que construir autónomamente, fueran transmitidos de alguna manera, bajo situaciones tradicionales de enseñanza.

→ A partir de las reacciones y participaciones de los estudiantes, podemos afirmar que de haber ejecutado la situación didáctica completa, en el orden correcto y sin omitir acciones que conforman cada actividad, pudo hacer dado resultados muy satisfactorios, pues las observaciones, las aportaciones y los argumentos de los alumnos fueron relevantes.

→ El rol de la profesora en la ejecución de la situación didáctica fue determinante para los resultados obtenidos. Creemos que para obtener los resultados óptimos hizo falta que en todo momento tuviera presente orientar sus intervenciones a fin de hacer que los alumnos produjeran por sí mismos el conocimiento, pues varias de esas intervenciones provocaron la presencia de efectos del contrato didáctico, lo cual desvió el objetivo de la actividades en varias ocasiones.

4.4. Conclusiones generales

→ Los efectos que tuvo la ejecución de la situación didáctica en las acciones de los alumnos, no dependieron únicamente de la estructura de ésta, pues independientemente del diseño, dichos efectos estuvieron en función de diversas variantes como los conocimientos previos de los estudiantes, las intervenciones de la profesora, los efectos del contrato didáctico, el tiempo disponible para ejecutar cada actividad, etc.

→ Los errores que tuvieron los estudiantes y las dificultades con las que se encontraron durante la realización de las actividades que componen la situación didáctica, repercutieron significativamente en el nivel de logro de los objetivos de las actividades. Pues en varias ocasiones dichas dificultades les permitieron revalorar y reorientar sus apreciaciones para llegar al conocimiento esperado, y en algunas otras, se convirtieron obstáculos para la realización efectiva de las actividades.

→ La gestión de situaciones didácticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje repercutió favorablemente en la construcción de los conocimientos esperados. Es decir, la presencia de situaciones de acción, formulación, validación o institucionalización influyeron positivamente en el logro efectivo de los objetivos, y más aún, contribuyeron significativamente a la construcción autónoma de los conocimientos.

→ Los errores o complicaciones que tuvieron los estudiantes al desarrollar las actividades no implicaron que no pudieran encentrarse en una situación de formulación (u otro tipo de situación didáctica) o que el encontrarse en este tipo de situaciones les evitara tener errores o dificultades, pues las apreciaciones de los estudiantes (correctas o incorrectas) fueron importantes para la construcción de conocimiento.

Durante el análisis de los resultados y la determinación de nuestras conclusiones, nos surgieron varios cuestionamientos que nos parece interesante analizar pero que no son nuestro principal objeto de estudio, por lo que nos atrevemos a proponerlas como objetos de nuevos trabajos de investigación. Algunas de estas interrogantes son: ¿Cómo interviene el uso de material didáctico en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas?, ¿Cómo repercute la utilización de situaciones didácticas en el desempeño de los alumnos, para la enseñanza de las matemáticas?, ¿Qué importancia tiene minimizar la influencia de la precariedad de conocimientos previos en el desempeño matemático de los estudiantes ante una situación didáctica?

Esperamos tener, más adelante, la oportunidad de desarrollar otros estudios que puedan dar respuesta a dichas preguntas, y así, hacer una aportación significativa a la enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS

Andrade, M., Montecino A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. XIII CIAEM-IACME, Recife Brasil.

Andrade, M., Montecino A. (2013). Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución. Civnestav del IPN, México.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), pp. 33-115.

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz (coords). (1994). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Argentina: Paidós.

Brousseau, G. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática 12(1) pp. 5-38.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Buenos Aires, Argentina: Libros de Zorzal.

Carrillo, J[1]., Climent, N[1]., Gorgorió, N.[2], Prat, M[2]. y Rojas, F[2]. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. [1]Universidad de Huelva, [2]Universitat Autónoma de Barcelona.

García, L., Vázquez R. A., Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Ingenierias, Julio-Septiembre, Vol. VII, No. 24.

Hurtado de Barrera, J. (2010). Guía para la comprensión holística de la ciencia. Tercera Edición, Fundación Sypal: Caracas. (Parte II Capítulo 3 y 4). Universidad Nacional Abierta. Dirección de Investigación y Postgrado.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. Recuperado de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf el 22 de octubre de 2018.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5, 13-66.

Strauss, A. L., Corbin, J., y Zimmerman, E. (2002). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Universidad de Antioquia.