



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE ELIPSE
DESDE LAS HABILIDADES VISOESPACIALES

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

VALERIA ÁNGELES MILLÁN

Directora de tesis

DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

PUEBLA, PUE., NOVIEMBRE 2022

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1.....	2
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN	2
1.1 Planteamiento del Problema	4
1.2 Justificación.....	5
1.3 Objetivos de Investigación	5
1.3.1 Objetivo General	5
1.3.2 Objetivo Específico	5
CAPÍTULO 2.....	6
MARCO TEÓRICO.....	6
CAPÍTULO 3.....	11
MARCO METODOLÓGICO.....	11
CAPÍTULO 4.....	15
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	15
CONCLUSIONES	33
Referencias.....	35
Anexos	38

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Habilidades visoespaciales.....	9
Tabla 2. Indicadores de las habilidades visoespaciales respecto a la elipse	12
Tabla 3. Estado de organización visual.....	20
Tabla 4. Estado de escaneo visual.....	23
Tabla 5. Estado de generación de imágenes	25
Tabla 6. Estado de manipulación de la imagen.....	32

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Transformación visual de figuras	7
Figura 2. Conversión congruente	7
Figura 3. Tarea 1 a).....	15
Figura 4. Tarea 1 b).....	16
Figura 5. Tarea 1 c).....	17
Figura 6. Tarea 1 d).....	18
Figura 7. Tarea 2	19
Figura 8. Tarea 3	21
Figura 9. Tarea 4	24
Figura 10. Tarea 5	25
Figura 11. Respuesta de Alma a la tarea 5	26
Figura 12. Respuesta de Blanca a la tarea 5	26
Figura 13. Respuesta de Carla a la tarea 5	27
Figura 14. Tarea 6	28
Figura 15. Tarea 7	29
Figura 16. Tarea 8	30
Figura 17. Respuesta de Alma a la tarea 8	31

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo examinar los procesos de visualización que muestran tres estudiantes de diferentes niveles de formación al realizar una secuencia de tareas diseñadas sobre el tema de Elipse. Los resultados se analizaron bajo el marco de interpretación de habilidades visoespaciales propuesto por Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017), y las habilidades que se estudiaron son organización y escaneo visual y, reconstrucción, generación y manipulación de la imagen. Finalmente, se identificó que el estudio de la elipse requiere habilidades de visualización como las que se estudiaron en este trabajo ya que les permiten desarrollar los elementos básicos de la conceptualización de la elipse al describir su componente conceptual correctamente, así como visualizar y representar gráficamente su componente figural, realizando movimientos dinámicos de rotación mental tridimensional.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tiene por objetivo examinar los procesos de visualización que muestran tres estudiantes de diferentes niveles de formación al realizar una secuencia de tareas sobre el tema de Elipse; el diseño de dicha secuencia de tareas se fundamenta en el marco de las habilidades visoespaciales propuesto por Miragliotta et al. (2017).

En el capítulo 1, llamado Planteamiento de la investigación, se exponen algunos antecedentes que destacan las dificultades respecto a la comprensión del concepto de la Elipse, así como la relevancia de la visualización. Se describe también el planteamiento del problema y la pregunta de investigación, así como la justificación y objetivos que orientaron este trabajo.

En el capítulo 2, denominado como Marco teórico, se presentan los fundamentos de la presente investigación; tales como la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999) y la conceptualización de las habilidades visoespaciales propuesta por Miragliotta et al. (2017).

A continuación, en el capítulo 3 perteneciente al Marco metodológico, se describen el método de la investigación, la población de estudio y las técnicas e instrumentos de recolección de datos.

En el capítulo 4 se presentará el análisis de los procedimientos de los estudiantes bajo el marco de interpretación de las habilidades visoespaciales antes mencionada y mediante un análisis de contenido cualitativo. Finalmente, se presentarán las conclusiones del presente trabajo.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

La elipse es una de las curvas cónicas más conocidas, esto se debe en parte a su presencia frecuente en nuestro entorno diario. Por ejemplo, una acción tan común como inclinar ligeramente un vaso cilíndrico con agua nos da como resultado una elipse, pues el nivel del agua en la superficie la materializará.

Dicha curva ha sido objeto de estudio en numerosas investigaciones. Por ejemplo, Almouloud et al. (2014) resaltan los problemas que tienen los estudiantes del tercer grado de la Escuela Secundaria (Ciencias Exactas y Biología) de Mali, en el aprendizaje de las cónicas. Señala que en su enseñanza prevalecen los aspectos algebraicos sobre los geométricos.

Del mismo modo, Bonilla y Parraguez (2013) también enfatizan la misma problemática y afirman que dicho enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas no es suficiente para lograr una comprensión profunda del concepto de la elipse.

Así mismo, Santa y Jaramillo (2014) detectaron que estudiantes de bachillerato y universidad tenían dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que lograban con facilidad la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones o de sus elementos. En su investigación analizaron y caracterizaron el proceso de comprensión de cinco estudiantes de una institución educativa pública de la ciudad de Medellín, del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele. Los investigadores construyeron un guion de entrevista de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel, de esta manera, el razonamiento de los estudiantes se

basaba en una componente de tipo visual-geométrica inherente de la geometría del doblado de papel. Dichas situaciones lograron en los alumnos conclusiones interesantes, lo que finalmente les permitió comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

Siguiendo la misma línea, la investigación de Olano y Salazar (2018) muestra las dificultades de los estudiantes de nivel secundario para comprender la noción de la Elipse, dado que en su enseñanza prevalecen las representaciones algebraicas dejando de lado las representaciones gráficas. Así que los autores centran su investigación en analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria (16-17 años de edad) cuando desarrollan una secuencia didáctica sobre la Elipse mediada por GeoGebra, dicha secuencia fue diseñada para observar y analizar la coordinación entre el registro figural y lengua natural y el registro gráfico y algebraico. En conclusión, observaron que los estudiantes lograron una mayor comprensión de la condición geométrica de la Elipse cuando coordinan las construcciones por medio de la conversión entre registros.

Por otra parte, uno de los problemas de interés en educación matemática es el de la visualización; debido a que, en el aprendizaje de la geometría, los procesos de visualización constituyen el soporte de la actividad cognitiva (Castiblanco et al. 2004).

Otro de los estudios que ha abordado este tema es la investigación de Marmolejo y Vega (2012), la cual se centra en la visualización enfocada al registro semiótico de las figuras geométricas bidimensionales, ya que son soportes intuitivos que ayudan al aprendizaje de las matemáticas. Las autoras analizaron los procedimientos realizados por un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria de la ciudad de Cali, Colombia. Inicialmente, los estudiantes participaron en una secuencia de enseñanza sobre transformaciones de figuras geométricas, posteriormente realizaron actividades de comparación de figuras según sus cantidades de área. Un análisis de los

procedimientos de los estudiantes muestra que tales formas de proceder revelan lo complejo de la visualización, además evidencian que esta no es obvia ni mucho menos espontanea, por lo que debería ser incluida en procesos de enseñanza, promovida y apoyar su aprendizaje.

Tomando en cuenta las distintas investigaciones mencionadas, es evidente la complejidad de la visualización en matemáticas, más aún en la geometría y que ésta no es obvia, así lo afirma Schilardi (2014):

La visualización es estrictamente necesaria para alcanzar una conceptualización significativa. Por ello, esta habilidad debe incorporarse, promoverse y desarrollarse en los estudiantes, dado que la matemática abunda en contenidos visuales. Cabe agregar que también se debe prestar atención a las representaciones concretas, base de las abstracciones que luego se formalizan. (p. 157)

1.1 Planteamiento del Problema

Basándonos en las dificultades antes planteadas que muestran los estudiantes sobre la comprensión del concepto de la Elipse, particularmente respecto a la visualización de sus registros figural y geométrico, proponemos la presente investigación. La cual destaca la pertinencia de estudiar las habilidades de visualización y registros de representación semiótica involucradas al realizar un conjunto de tareas sobre el tema de Elipse para promover su comprensión en dos estudiantes de licenciatura y uno de bachillerato. Algunas de las tareas serán asistidas por un software de geometría dinámica, a saber, GeoGebra, dado que existe influencia en el uso de dicho software en el aprendizaje de las secciones cónicas (Valenzuela Félix, 2020).

En razón a lo expuesto, la investigación propuesta pretende dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué procesos de visualización evidencian estudiantes de distintos niveles de formación al resolver una secuencia de tareas sobre el tema de Elipse?

1.2 Justificación

Como se ha mencionado anteriormente, existe evidencia sobre las dificultades que presentan los estudiantes respecto a la conceptualización de la Elipse, en parte, esto se debe a abordarla solamente a través de las ecuaciones cartesianas, dejando de lado las representaciones gráficas. Es por ello que en el presente trabajo pretendemos proveer una secuencia de tareas que promueva la comprensión de nuestro objeto de estudio, la Elipse, por medio de las habilidades visoespaciales, así como el análisis de los procesos que estudiantes de bachillerato y licenciatura llevan a cabo al realizar las tareas.

1.3 Objetivos de Investigación

1.3.1 Objetivo General

Examinar los procesos de visualización que muestran tres estudiantes de distintos niveles de formación al realizar una secuencia de tareas diseñadas sobre el tema de Elipse.

1.3.2 Objetivo Específico

Diseñar una secuencia de tareas, algunas de ellas asistidas por GeoGebra, sobre el tema de Elipse, para promover su comprensión por medio de las habilidades visoespaciales en dos estudiantes de licenciatura y uno de bachillerato.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El presente trabajo se apoya en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999) y la conceptualización de las habilidades visuales espaciales propuesta por Miragliotta et al. (2017), tal propuesta está estructurada considerando como marco teórico la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) y las aprehensiones cognitivas de Duval (1995).

De acuerdo con Duval (1999) la representación y la visualización forman parte del núcleo de la comprensión de las matemáticas. El autor menciona que: “La representación se refiere a una gran variedad de actividades de significado: creencias constantes y holísticas sobre algo, varias formas de evocar y denotar objetos, cómo se codifica la información” (p. 3).

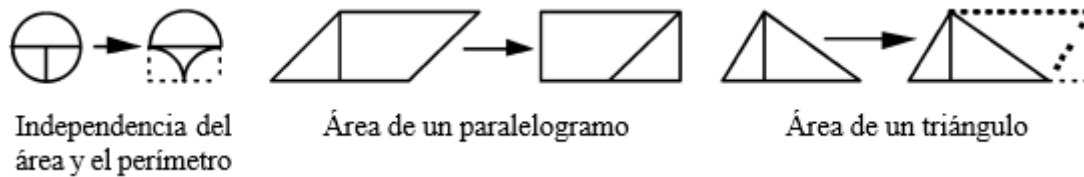
Así mismo, define al registro de representación como cualquier sistema semiótico que proporciona una representación y procesamiento específicos para el pensamiento matemático. El autor señala que: “El pensamiento matemático a menudo requiere activar en paralelo dos o tres registros, incluso cuando solo uno se usa externamente, o parece suficiente, desde un punto de vista matemático” (p. 6).

Para Duval (1999) existen dos tipos de transformaciones de representaciones en el pensamiento matemático: “Tratamiento y Conversión”. Para empezar, las transformaciones por tratamiento se ejecutan dentro de un mismo registro de representación (ver Figura 1).

Por otra parte, describe la conversión como una transformación que se basa en un cambio de registro, es decir, que la representación de un objeto en particular se transforma en una representación distinta del mismo objeto, pero en otro registro (ver Figura 2).

Figura 1

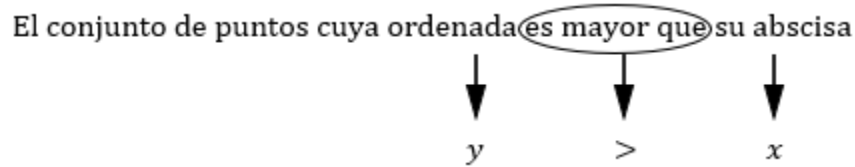
Transformación visual de figuras



Nota. Adaptado de Duval (2006, p.112).

Figura 2

Conversión congruente



Nota. Adaptado de Duval (2006, p.112).

Así mismo, señala que el uso de sistemas de representación semiótica en matemáticas es indispensable, ya que no existe otra manera de tener acceso a los objetos matemáticos sino producir representaciones semióticas, las cuales “organizan relaciones entre unidades representativas” por ejemplo: figuras geométricas, planos cartesianos, redes semánticas, etc.; cabe señalar que dichas unidades deben estar conectadas de manera bidimensional, ya que para que la organización sea obvia, requiere al menos dos dimensiones (Duval, 1999, p. 13).

Es así como el autor plantea la visualización, caracterizándola como “Una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades”. Conviene señalar que para visualizar cualquier registro se necesita de una capacitación adecuada; por lo que conviene destacar que las

figuras geométricas o los gráficos cartesianos, a diferencia de las representaciones icónicas no están abiertamente disponibles. Esto se debe a que los estudiantes no trascienden más que una aprehensión en particular, por lo que es difícil distinguir la organización global, así que solo ven una representación icónica (Duval, 1999, p. 14-15).

Respecto a las figuras geométricas, Fischbein (1993) sostiene que éstas forman una clase especial de conceptos, a los que denomina conceptos figurales, ya que poseen ambos aspectos: los conceptuales y los figurales. Por un lado, poseen propiedades espaciales como forma, posición y tamaño. Por otro lado, y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalidad y perfección.

Por otra parte, Duval (1995) estudió los procesos cognitivos involucrados en el estudio de la geometría, particularmente el proceso de visualización. El autor describe diferentes tipos de aprehensiones cognitivas:

- La *aprehensión perceptiva* es la capacidad para identificar las figuras en un plano o en profundidad.
- La *aprehensión secuencial* es la capacidad para construir o describir la configuración en un orden que está en relación con sus propiedades matemáticas.
- La *aprehensión discursiva* es la capacidad de vincular configuraciones específicas con afirmaciones matemáticas.
- La *aprehensión operativa* es la capacidad de realizar alguna modificación, ya sea física o mental, a una configuración inicial.

Dicho esto, Miragliotta et al. (2017) proponen un marco para interpretar algunas habilidades visoespaciales en el contexto de la geometría euclidiana, fundamentado en la teoría de

los conceptos figurales de Fischbein (1993) y los tipos de aprehensiones cognitivas de Duval (1995). Tal interpretación se describe en la Tabla 1.

Tabla 1

Habilidades visoespaciales

<i>Habilidad visoespacial</i>	<i>Psicología cognitiva</i>	<i>Interpretación geométrica</i>
<i>Organización visual</i>	Habilidad para organizar modelos incompletos o no perfectamente visibles.	Habilidad para reconocer conceptos figurales a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.
<i>Escaneo visual</i>	Habilidad para inspeccionar de forma rápida y precisa una configuración visual para un propósito determinado.	Habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación ¹ .
<i>Reconstrucción visual</i>	Habilidad para reconstruir un modelo dado (con dibujos o herramientas).	Habilidad para reconstruir ² el componente figural de un concepto figural en una representación dada de forma independiente o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.
<i>Generación de imágenes</i>	Habilidad para generar rápidamente imágenes mentales visoespaciales.	Habilidad de reproducir en la mente instantáneamente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo.
<i>Manipulación de la imagen</i>	Habilidad para manipular imágenes mentales visoespaciales para transformarlas y evaluarlas.	Habilidad de usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta.

¹ Esta representación puede ser estática o dinámica según la tarea y el contexto en el que se propone. Por ejemplo, en el caso de una figura dinámica en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), el Escaneo Visual podría estar involucrado en el reconocimiento de propiedades invariantes por arrastre.

² Por ejemplo, creando una construcción geométrica con las herramientas adecuadas o formalizando los pasos constructivos necesarios.

Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva. Esta habilidad hace eco de la aprehensión operativa de Duval, pero también difiere de ella. Las manipulaciones mentales en la figura están estrechamente conectadas al componente conceptual de la figura. De hecho, para manipular una figura manteniendo propiedades dadas, se requiere un fuerte control conceptual sobre ella, como lo resalta Arcavi (2003), quien enfatiza, también, la alta demanda cognitiva involucrada.

<i>Memoria de corto plazo secuencial espacial</i>	Habilidad para recordar una secuencia de diferentes posiciones.	Habilidad para recordar diferentes configuraciones asumidas por el componente figural de un concepto figural durante una manipulación observada o imaginada
<i>Memoria a largo plazo</i>	Habilidad para mantener la información espacial durante un largo periodo de tiempo.	Está involucrado en la habilidad de preservar el componente figural de un concepto figural en la memoria a largo plazo.
<i>Predicción visual</i>	Un proceso que parece ocurrir con frecuencia es imaginar la consecuencia de una manipulación (mental) de la figura; identificando ciertas propiedades o configuraciones de una nueva figura, que surgen de un proceso de manipulación.	

Nota. Adaptado de Miragliotta et al. (2017, p. 344).

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

La investigación a desarrollarse se basa en el paradigma interpretativo, en el cual, según Aravena et al. (2006), el carácter reflexivo del hecho social debe ser asumido por el investigador, con la finalidad de reunir las observaciones para construir una interpretación del fenómeno. En ese sentido, nuestra problemática está centrada en la interpretación de los procesos de visualización que muestran estudiantes al realizar una secuencia de tareas sobre el tema de la elipse.

Por otro lado, el enfoque que adoptaremos es el cualitativo, puesto que permite “Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández et al. 2014). Mientras que la metodología de investigación empleada es un estudio de caso, el cual, según Hernández et al. (2014), “se centra en la descripción y el examen o análisis en profundidad de una o varias unidades y su contexto de manera sistémica y holística”.

Para esto, los informantes fueron tres estudiantes de distintos niveles de formación, de cuarto semestre de Preparatoria, de segundo semestre de la Licenciatura en Actuaría y de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas; tal selección es de tipo opinático, en el cual “el investigador selecciona a los informantes siguiendo criterios estratégicos personales: conocimientos de la situación, facilidad, voluntariedad, etc.” (Andréu Abela, 1998, p. 25).

Por otro lado, el instrumento y técnicas de recolección de datos serán una secuencia de tareas previamente diseñada, la cual estará basada en las habilidades visoespaciales caracterizadas por Miragliotta et al. (2017), algunas de ellas asistidas por GeoGebra; así como una entrevista

semiestructurada. Así pues, el procedimiento de aplicación de las técnicas e instrumentos de recolección de información se describen a continuación.

En primer lugar, se les proporcionó una secuencia de tareas sobre el tema de Elipse a tres estudiantes previamente seleccionados, posteriormente mediante una videollamada con duración máxima de 90 minutos y de manera independiente, cada estudiante resolvió las tareas. Con el propósito de comprender las formas de resolución que emplearon, así como las dificultades a las que se enfrentaron, nos apoyamos de una entrevista semiestructurada. Posteriormente, bajo el marco teórico de las habilidades visoespaciales propuesto por Miragliotta et al. (2017) y mediante la técnica de Análisis de Contenido Cualitativo, se analizaron los procedimientos implementados por ambos estudiantes, ya que de acuerdo con Andréu Abela (1998) “El análisis de contenido cualitativo es definido como un nuevo marco de aproximación empírica, como un método de análisis controlado del proceso de comunicación entre el texto y el contexto, estableciendo un conjunto de reglas de análisis, paso a paso, que les separe de ciertas precipitaciones cuantificadoras” (p. 22). Es preciso subrayar que se definieron algunos indicadores para cada habilidad visoespacial en el tema de Elipse (ver Tabla 2).

Tabla 2

Indicadores de las habilidades visoespaciales respecto a la elipse

<i>Habilidad visoespacial</i>	<i>Interpretación geométrica</i>	<i>Indicadores</i>
<i>Organización visual</i>	Habilidad para reconocer conceptos figurales a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.	Identifica conceptos figurales planos y tridimensionales, a partir de representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles.
<i>Escaneo visual</i>	Habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación	Reconoce las propiedades de la componente figural de la elipse a partir de su representación.

<i>Generación de imágenes</i>	Habilidad de reproducir en la mente instantáneamente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo.	Genera el componente figural de la elipse recuperándolo de la memoria y describiéndolo a través de representaciones verbales.
<i>Reconstrucción visual</i>	Habilidad para reconstruir ² el componente figural de un concepto figural en una representación dada de forma independiente o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.	Construye representaciones gráficas del concepto figural de la elipse a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.
<i>Manipulación de la imagen</i>	Habilidad de usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las entidades geométricas que lo componen.	Habilidad para utilizar las propiedades del concepto figural de las cónicas o para manipular aspectos figurales del concepto figural de las cónicas, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las entidades geométricas que lo componen.

La secuencia de tareas consistió en 8 problemas diseñados para cada una de las habilidades visoespaciales a estudiar.

Las Tareas 1 y 2 corresponden a la habilidad de Organización Visual; consistieron principalmente en mostrarles varias representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles y se les pidió que escribieran las figuras planas y tridimensionales que identificaran.

La tarea 3 se diseñó para estudiar la habilidad de Escaneo Visual; se les proporcionó la representación gráfica de la elipse y se les solicitó que describieran las propiedades de la figura, así como escribir la ecuación de la elipse.

Por otro lado, la Tarea 4 pertenece a la habilidad de Generación de Imágenes; para esta tarea, nos apoyamos de un applet de GeoGebra que muestra los focos y vértices de una elipse con eje mayor situado sobre el eje X, los cuales se pueden manipular por medio de unos deslizadores,

así mismo, se muestra un punto P perteneciente a la elipse. Se les pidió a los estudiantes que describan el tipo de curva que representa la traza de P en su movimiento.

La Tarea 5 corresponde a la habilidad de Reconstrucción Visual, para este caso, se les proporcionó la ecuación general de la elipse y se les requirió que la grafiquen.

Finalmente, las Tareas 6, 7 y 8, se diseñaron para estudiar la habilidad de Manipulación de la Imagen. Para la Tarea 6 y 7 se hizo uso del mismo applet de GeoGebra que se mencionó en la Tarea 4.

Respecto a la Tarea 6, se les sugirió que después de interactuar y manipular los deslizadores que modificaban los focos y vértices, describan la curva que representa la trayectoria del punto P a medida que los focos se alejaban, acercaban o eran iguales entre sí.

Por otro lado, en la Tarea 7 se les cuestionó sobre los valores mínimo y máximo de e respectivamente. En este caso, sin mencionarlo a los estudiantes, el botón ' e ' representaba la excentricidad de la elipse, por lo que este variaba a medida que manipulaban los focos y vértices con los deslizadores. Así mismo, se les preguntó sobre el tipo de curva que representaba la trayectoria del punto P cuando $e = 0$.

Finalmente, para la Tarea 8 se hizo uso de un applet de GeoGebra que mostraba un cono cortado por un plano, así mismo, unos deslizadores que permitían manipular el plano. Se les pidió a los estudiantes que proporcionaran los valores correspondientes a la altura e inclinación del plano para los cuales, la intersección de éste con el cono diera como resultado una circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, respectivamente.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la primera habilidad visoespacial llamada Organización Visual; se diseñaron dos actividades, la primera corresponde a la tarea 1 de la secuencia de tareas (ver Figura 3).

Figura 3

Tarea 1 a)



La respuesta de Alma para este primer inciso fue “círculo, cuadrado, triángulo y rectángulo”. Podemos ver que no menciona a la elipse; a pesar de que la diferencia entre un círculo y una elipse para esta figura es notoria, así como tampoco menciona ninguna figura tridimensional.

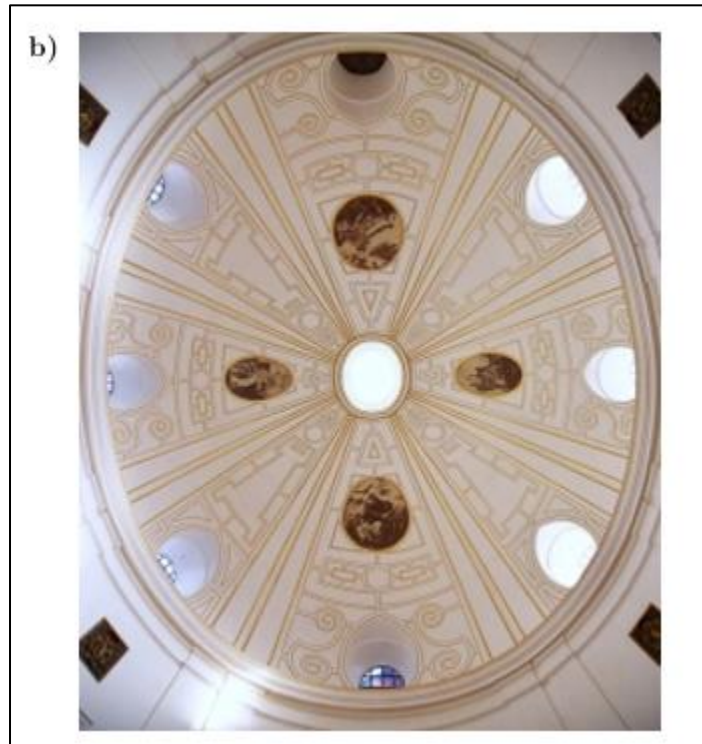
Por otro lado, Blanca encontró “óvalos, cuadrados, triángulos, prisma cuadrangular, esfera, cilindro y cubo”. Notemos que Blanca halló tanto figuras planas como tridimensionales; es preciso resaltar que tampoco mencionó a la elipse, en su lugar visualizó un óvalo, que es muy similar a dicha figura.

Mientras que Carla visualizó “rectas, elipses, círculos, cuadrados, rectángulos, paraboloides, tetraedros y cilindros”. En este caso, Carla también visualizó figuras planas y tridimensionales. Cabe resaltar que ha encontrado una mayor cantidad de figuras y que ha visualizado a la elipse.

La Figura 4 muestra el inciso b) correspondiente aún a la tarea 1, en el que Alma visualizó “círculo, triángulo y cuadrado”. De nueva cuenta vuelve a omitir a la elipse como en el inciso 1 a), aunque esta vez sí notó una figura tridimensional en adición a las planas.

Figura 4

Tarea 1 b)



Por su parte Blanca halló “óvalos, círculos, triángulos y cuadrado”. Similarmente a su respuesta para el inciso 1 a), visualizó un óvalo en lugar de la elipse.

La respuesta de Carla fue “rectas, cuadrados, círculos, elipses y un paraboloide”. Nuevamente visualizó figuras planas y tridimensionales, así como elipses.

Continuamos con el inciso 1 c) (ver Figura 5), en este caso, Alma solo visualizó “círculos y óvalos”. Es decir, ninguna figura tridimensional; así como también, menciona óvalos y no elipses.

Figura 5

Tarea 1c)



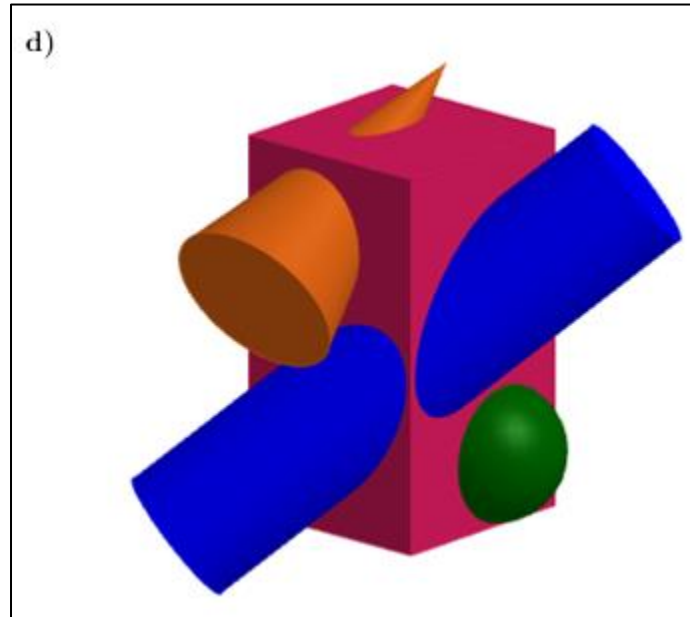
Blanca, por su parte, halló “esferas, círculos y óvalos”. Similarmente a la respuesta de Alma, no mencionó a la elipse, pero visualizó óvalos.

Finalmente, Carla encontró “elipses, esferas y círculos”.

Para terminar con la primera tarea, la respuesta de Alma para el último inciso (ver Figura 6) fue “cono, cilindro, esfera y prisma cuadrangular”. Observemos que, aunque no visualizó ninguna elipse, halló figuras planas y tridimensionales.

Figura 6

Tarea 1 d)



Por otro lado, Blanca encontró “prisma cuadrangular, cilindro, esfera, cono, óvalos y círculos”. Notemos que Blanca ha visualizado un mayor número de figuras tanto planas como tridimensionales; cabe resaltar que, a pesar de no nombrar a la elipse, sí visualizó óvalos.

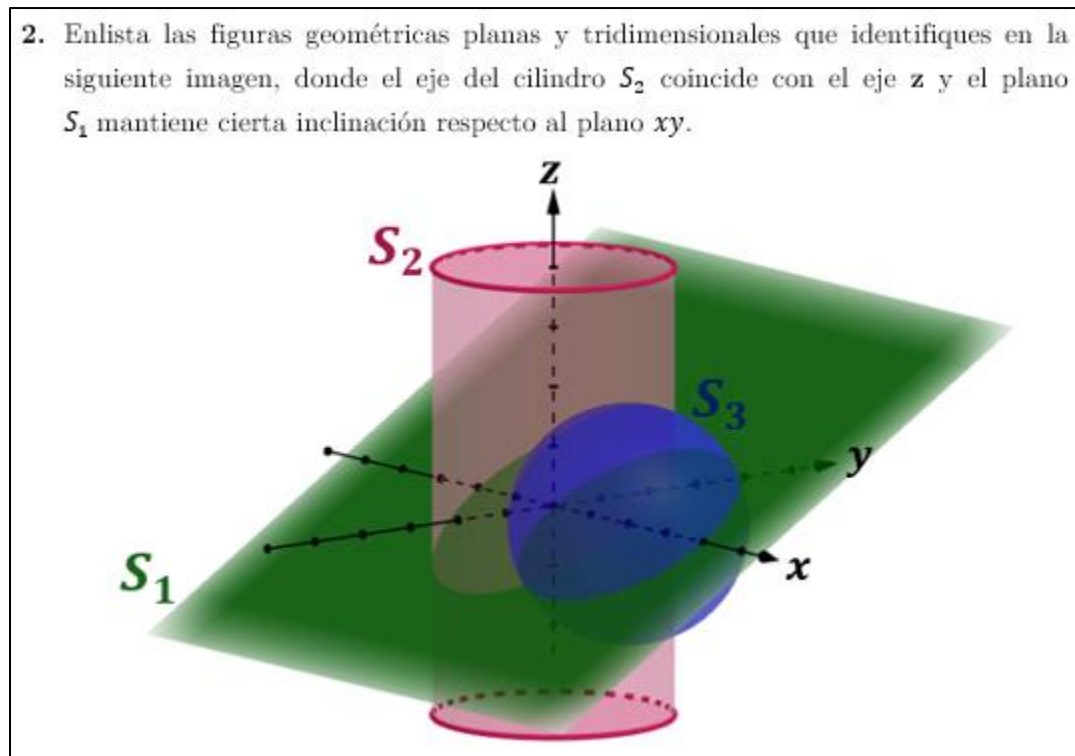
Finalmente, Carla visualizó “paralelepípedo, un cilindro, una esfera y un cono”. En este caso, al igual que Alma, no visualizó ninguna elipse.

Para el ejercicio 2 (ver Figura 7), que también corresponde a la habilidad de organización visual, tenemos que Alma halló “esfera, cilindro, óvalo, rectángulo, triángulos (isósceles, escaleno y equilátero). De nueva cuenta menciona al óvalo y no a la elipse; por otro lado, resalta su respuesta de visualizar triángulos, en la entrevista menciona que “los vio en donde está la división de los ejes”

Para continuar, la respuesta de Blanca fue “romboide, esfera, rectángulos, cilindro y óvalo”. De igual forma, no menciona a la elipse, pero sí al óvalo.

Figura 7

Tarea 2



Finalmente, Carla visualizó “tres elipses, una esfera, un cilindro, un plano, una semiesfera, un pétalo (la figura que se forma al intersectar el cilindro con la esfera y el plano) y un trozo de esfera que se obtiene al intersectar la esfera con el cilindro”. Respecto a las 3 elipses, se le preguntó a Carla si podría indicar en dónde se encuentran, a lo que mencionó que “desde la perspectiva de la imagen, son las bases del cilindro, pero cambiando la perspectiva serían más bien círculos”

La Tabla 3 muestra el nivel de Habilidad Organización Visual de cada informante. Donde E indica que existe evidencia de la habilidad, I indicio y NI no indicio.

En general, tanto Alma como Blanca mencionan constantemente al óvalo en lugar de la elipse a pesar de que ya cursaron la materia de Geometría Analítica.

Tabla 3

Estado de organización visual

Informantes	Tareas				
	1 a)	1 b)	1 c)	1 d)	2
Alma	NI	NI	NI	NI	I
Blanca	E	NI	E	I	I
Carla	E	E	E	NI	E

Por otro lado, pese a que Carla tiene la formación más alta, no logró visualizar ninguna figura bidimensional no completamente visible en el ejercicio 1d); de igual forma, Alma y Blanca muestran la misma dificultad.

Podemos notar que Alma no tuvo evidencia de la habilidad ya que no reconoció ninguna figura tridimensional en los incisos 1a)-1c), ni ninguna bidimensional en 1d).

Finalmente, cabe resaltar que, en un sistema de coordenadas sí lograron visualizar tanto figuras planas como tridimensionales, así como figuras no perfectamente visibles, esto se debe probablemente a que el estudiante está acostumbrado a trabajar con coordenadas cartesianas.

Continuamos con la habilidad de Escaneo Visual, para la cual se diseñó la tarea 3 (ver Figura 8)

Para este caso, Alma respondió “vértice, centro, eje menor, eje mayor” y no escribió la ecuación. Se presenta una parte de la entrevista que hace referencia a dicho ejercicio.

P: ¿Cómo resolviste este ejercicio?

A: Solo me acordé de las propiedades

P: ¿Cómo dedujiste la ecuación?

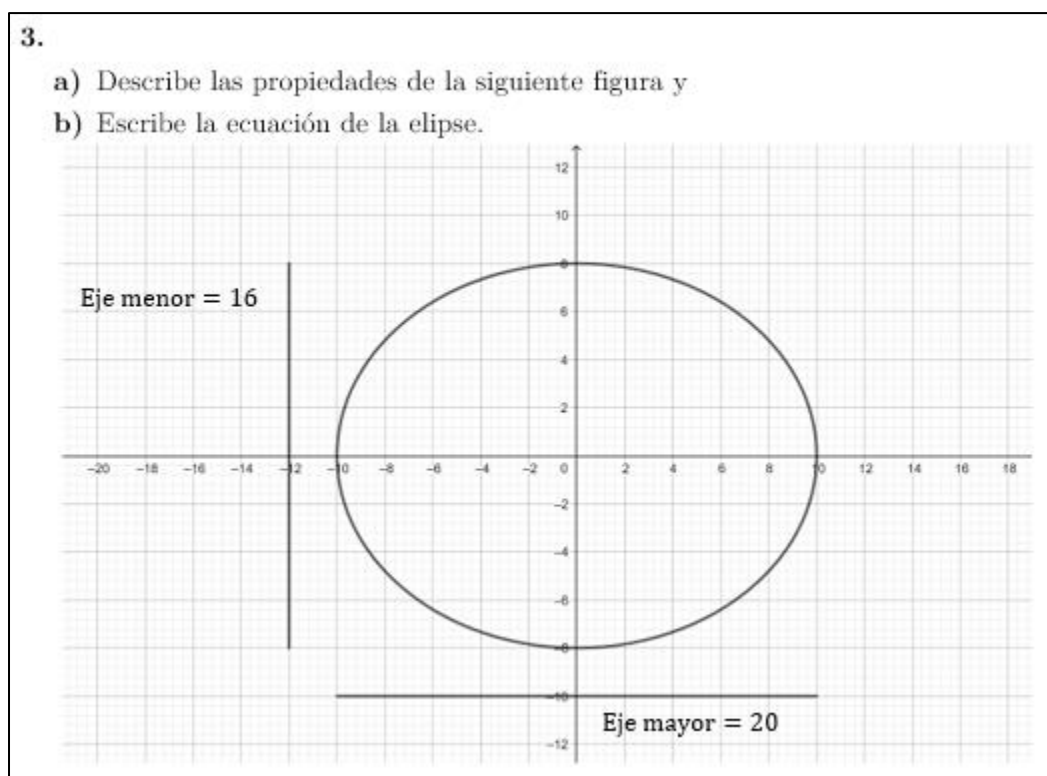
A: Esa no la hice

P: ¿Consideras que en este ejercicio faltó algún dato o información?, ¿Cuál?

A: Yo creo que sí. Como una guía de fórmula.

Figura 8

Tarea 3



Observemos que muestra dificultad para resolver tal ejercicio puesto que no escribió la ecuación, podemos notar en la entrevista que le fue necesaria una fórmula para así poder únicamente sustituir los datos en ésta.

Esto puede interpretarse como que los estudiantes están acostumbrados a cierto tipo de tareas, particularmente al tipo de problemas donde se les da la ecuación y los datos y se les pide graficar; una evidencia más de que en la enseñanza de la elipse, predominan los aspectos algebraicos sobre los geométricos, como se detalla en el planteamiento del presente trabajo.

En el mismo sentido, cabe resaltar que no coordina la conversión entre el registro gráfico al algebraico por lo que se confirma lo que Duval afirma sobre una preponderancia de la conversión del registro algebraico al gráfico, pero no del registro gráfico al algebraico.

La respuesta de Blanca fue “Arco, radio, diámetro, cuerda, centro” y $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En este caso, Blanca escribió la ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen, pero no para este caso en particular donde se le proporcionan ciertos datos. La alumna dio los elementos de una circunferencia y se muestra segura de su respuesta, ya que en la entrevista los vuelve a mencionar. Por lo tanto, se observa que no tiene la habilidad de Escaneo Visual ya que no reconoce las propiedades de la componente figural de la elipse partiendo de su representación. Por otro lado, es evidente la falta de conocimiento sobre esta, pues confunde sus elementos con los de la circunferencia.

Finalmente, Carla argumenta que “Es una elipse con vértices $(0,8), (0,-8), (-10,0), (10,0)$. La longitud del eje mayor es 20, la longitud del eje menor es 16, el eje mayor es paralelo al eje X, los focos tienen coordenadas $(-6,0)$ y $(6,0)$ ”.

“La ecuación de la elipse viene dada por $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ”. Al preguntarle en la entrevista sobre el procedimiento para hallar los focos, mencionó:

“Usando la fórmula $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ”

Como se puede observar, Carla sí mostró evidencia de la habilidad de escaneo visual ya que proporcionó la gran mayoría de elementos de la elipse.

En resumen, se puede observar en la Tabla 4 el resumen del análisis realizado a los informantes respecto a la habilidad de Escaneo Visual.

Tabla 4

Estado de escaneo visual

Informantes	Tareas	
	3 a)	3 b)
Alma	I	NI
Blanca	NI	NI
Carla	E	E

En general, resalta la falta de coordinación para convertir el registro geométrico en el algebraico; esto puede deberse a que, como se mencionó anteriormente, en la enseñanza de la elipse prevalecen más los aspectos algebraicos.

Por otro lado, es necesario mencionar que la falta de conocimiento sobre el objeto de estudio implica la no evidencia de la habilidad, como en el caso de Blanca.

Proseguimos ahora con la habilidad de Generación de Imágenes, para la cual se diseñó la Tarea 4 (ver Figura 9)

Figura 9

Tarea 4

4. Accede al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ytyvxhjg>.
Modifica los valores a y c (con los deslizadores) y desliza el punto P.
a) Describe el tipo de curva que representa la traza de P en su movimiento

Alma manifiesta que “Su tipo de curva era un ovoide en su movimiento”. Se nota que, aunque tiene la noción del tipo de curva, no menciona a la elipse.

Blanca por su parte argumenta que “A debe ser diferente del inverso de C, porque no nos dan datos”. Se le preguntó en la entrevista sobre su respuesta y procedimiento para este ejercicio y menciona que no comprendió el ejercicio; sin embargo, no preguntó cuando se le aplicó la secuencia de tareas, menciona que se dejó llevar por la fórmula que vio en el applet, dicha fórmula hace referencia al lugar geométrico de la elipse. Por tal motivo, al mover los deslizadores tal que los focos estén fuera de los vértices, la fórmula se indeterminaba. Es por ello que la alumna dio esa respuesta para ese caso en particular. Podemos notar que olvida las instrucciones principales, centrándose en algo más que llamó su atención. Al leer nuevamente el enunciado en la entrevista, argumenta que la trayectoria de P es una esfera, posteriormente se da cuenta que en realidad es otra curva, pero no recuerda el nombre, menciona: “Es como un círculo, pero no me acuerdo cómo se llama. Es como un círculo, un óvalo”.

Mientras que Carla afirma que “Al moverse P, obtenemos una elipse” Hacer notar que a pesar de estar jugando con el applet no percibe que la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Tabla 5

Estado de generación de imágenes

Informantes	Tareas
	4
Alma	I
Blanca	NI
Carla	E

Para continuar, la siguiente tarea corresponde a la habilidad de Reconstrucción Visual y se describe en la Figura 10:

Figura 10

Tarea 5

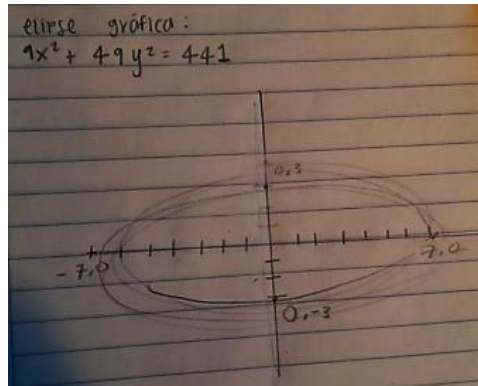
5. Grafica la elipse cuya ecuación es: $9x^2 + 49y^2 = 441$

Alma realiza un esbozo de la elipse (ver Figura 11), en el que se puede observar que las coordenadas de los vértices son correctas, así como la longitud del eje menor. Sin embargo, no escribió las operaciones que usó para llegar a su respuesta; por lo que se le preguntó en la entrevista por su procedimiento, a lo que respondió que “había hecho unos ejercicios anteriormente y por eso se acordó un poco, así mismo trató con varias estrategias y al final lo tuvo que graficar. Básicamente fue como ir interactuando varios puntos”.

Notemos que Alma usa el método de ensayo y error, ya que menciona que fue interactuando con varios puntos, hasta que halló los correctos que le permitieron realizar su dibujo.

Figura 11

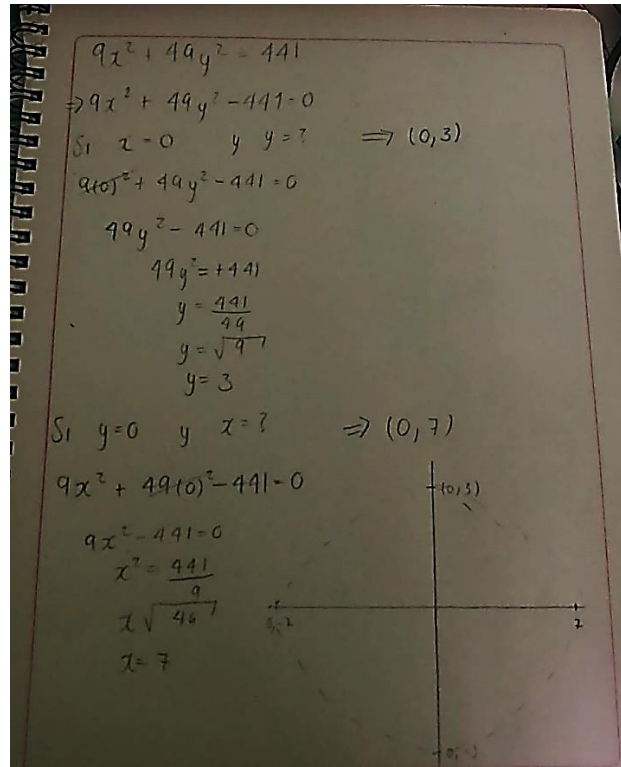
Respuesta de Alma a la tarea 5



Para continuar, veamos la respuesta de Blanca (ver Figura 12):

Figura 12

Respuesta de Blanca a la tarea 5

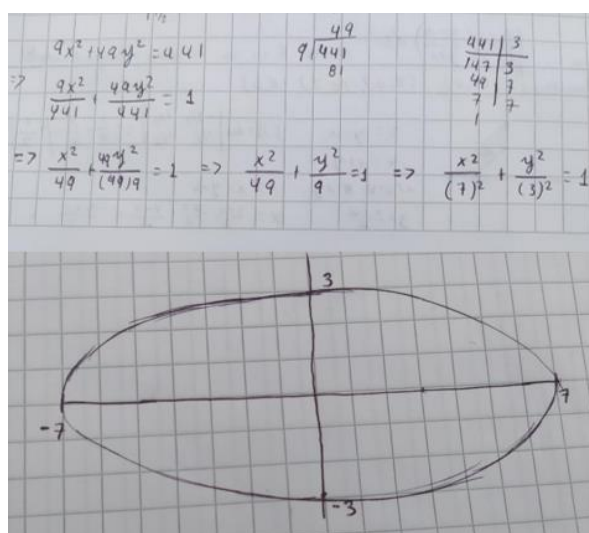


En este caso, Blanca decide buscar las intersecciones de la elipse con los ejes, es así como encuentra los vértices y las coordenadas del eje menor y realiza un esbozo de la elipse, pero no usa una escala correcta al ubicar los puntos, por lo que su gráfica se asemeja más a una circunferencia.

Finalmente, continuamos con la respuesta de Carla (ver Figura 13).

Figura 13

Respuesta de Carla a la tarea 5



En este caso, Carla pasa de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria, para así obtener la longitud de los ejes menor y mayor.

Así pues, la siguiente tabla muestra el nivel de Habilidad Reconstrucción Visual de cada informante. Donde E indica que existe evidencia de la habilidad.

Informantes	Tareas
	5
Alma	E
Blanca	E
Carla	E

En general, cabe destacar que ninguno de los tres informantes halló los focos ni el lado recto para graficar la elipse; así pues, a pesar de que se nota un desconocimiento de la relación que existe entre la ecuación de la elipse y sus propiedades, los estudiantes lograron construir una representación gráfica de esta, por lo que muestran evidencia de la Habilidad de Reconstrucción Visual. Por otro lado, resalta la facilidad de pasar del registro algebraico al registro gráfico, así como lo afirma Duval. Proseguimos con la tarea 6 (ver Figura 14), correspondiente a la habilidad de Manipulación de la imagen.

Figura 14

Tarea 6

6. Accede al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ytyvvhig>. Modifica los valores de **a** y **c** (con los deslizadores) y describe la curva que representa la trayectoria del punto **P** en cada caso:
- a) Cuando los puntos **F** y **F'** se alejan entre sí
 - b) Cuando los puntos **F** y **F'** se acercan entre sí
 - c) Cuando los puntos **F** y **F'** son iguales

Iniciamos con las respuestas de Alma; para el inciso a) menciona que “la trayectoria de **p** es circular”; para el b), que “la trayectoria de **P** es correspondiente a una elipse”, lo cual es correcto y finalmente para el inciso c), indica correctamente que la trayectoria de **P** es circular. Se le preguntó en la entrevista por su procedimiento para llegar a tales respuestas y menciona que lo hizo “interactuando con el material para estar segura de la información y así llegar al resultado”. Se puede observar una dificultad para visualizar la trayectoria del punto **P**, ya que para el primer inciso Alma visualiza una circunferencia, pero en realidad se trata de una elipse con eje mayor sobre el eje **X**; de hecho, mientras los focos se alejan entre sí, el eje menor de la elipse va disminuyendo su longitud, lo que hace que la elipse sea más notoria.

Blanca por su parte argumenta que “los puntos F no pueden ser iguales, que el punto a siempre debe de ser diferente de 0, y el punto a y c no pueden tener los mismos valores, ni el valor a la inversa”. En este caso, Blanca no responde a cada uno de los incisos de la tarea 6, al indagar sobre su respuesta en la entrevista menciona que “la ecuación que aparecía en el applet llamó su atención y se centró en ella” olvidando las indicaciones de la tarea. Es preciso señalar que la ecuación que menciona hace referencia al lugar geométrico de la elipse, es por ello que se indetermina para algunos puntos.

Para concluir con la tarea 6, veamos las respuestas de Carla para cada uno de los incisos; para el inciso a), indica que “cuando F y F' se alejan entre sí obtenemos una elipse con su eje mayor paralelo al eje X; mientras que para el b), obtenemos una elipse con eje mayor paralelo al eje Y, finalmente para el inciso c) obtenemos una circunferencia. Notemos que Carla de deja llevar por su hallazgo en el inciso a) e infiere erróneamente que cuando los focos se alejan entre sí, el eje mayor de la elipse pasa a estar sobre el eje Y.

Continuamos con la tarea 7 (ver Figura 7), que corresponde también a la habilidad de Manipulación de la imagen.

Figura 15

Tarea 7

7. Accede al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ytyvxhjg>. Manipula la figura y encuentra los valores que toma e para cada uno de los casos de la Tarea 6 y responde:
- a) ¿Cuál son los valores mínimo y máximo de e respectivamente?
 - b) Describe la curva que representa la trayectoria del punto P cuando $e=0$

Se observó que las 3 estudiantes manipularon la imagen para poder resolver lo que se les pide. Para el inciso a), Alma señala correctamente que el valor mínimo es 0 y el máximo es 0.98, mientras que para el inciso b), afirma que la trayectoria es circular.

Por otro lado, Blanca argumenta que cuando $e = 0$ entonces $c = 0$ y a puede tomar cualquier valor. Blanca no respondió al inciso a); y para el inciso b), a pesar de que lo que afirma es verdadero, olvidó la indicación principal de describir la curva de la traza del punto P, al indagar en la entrevista, mencionó que se confundió al mirar la ecuación del applet y olvidó las instrucciones principales.

Finalmente, para el inciso a), Carla indica que los valores mínimo y máximo de e son 0 y 1 respectivamente y para el inciso b) señala que se forma un solo punto cuando $e = 0$. En este caso, para el inciso a) Carla nota correctamente que e se encuentra entre 0 y 1, pero para el inciso b) no visualizó que para los casos en que a toma valores distintos de 0, la traza de P es una circunferencia.

Para concluir con la habilidad de Manipulación de la imagen, veamos la Figura 16.

Figura 16

Tarea 8

8. Accede al siguiente link de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/aac68wgg>. Cambia los valores de θ y h para manipular la inclinación y altura del plano respectivamente. ¿Para cuáles valores de θ y h la intersección del plano con el cono produce cada una de las siguientes cónicas?
- a) Círculo
 - b) Elipse
 - c) Hipérbola
 - d) Parábola

Para esta tarea, Alma decidió dar su respuesta en una tabla (ver Figura 17).

Figura 17

Respuesta de Alma a la tarea 8

	Círculo	Elipse	Hipérbola	Parábola
θ	360	15	300	135
h	-1.4	-2	0.7	-4.5

Por otro lado, Blanca indica algunos puntos pertenecientes a cada una de las cónicas, a saber: (0,-2.9) para una circunferencia, (135,-5) perteneciente a una parábola, (195,-5) para la elipse y (85,-5) en el caso de la hipérbola. Notemos que tanto Alma como Blanca han indicado valores correctos para cada una de las cónicas, aunque incompletos, ya que estos valores no eran únicos.

Para terminar; respecto al inciso a) Carla menciona de manera correcta que el caso se da para θ igual a cero y para h distinto de cero; para el inciso b) señala que para θ entre 0 y 45 grados o para θ entre 135 y 180 grados, o para θ entre 270 y 315 grados con h distinto de cero; mientras que para el inciso c) para θ como en el inciso d) y para cualquier h; finalmente para h distinto de cero y θ entre 45 y 135 grados o para θ entre 315 y 360 grados o para θ entre 180 y 270 grados en el caso del inciso d).

En este caso, Carla intenta abarcar más valores que requieren cada una de las cónicas; en el caso de la circunferencia, nota que se da cuando el plano es horizontal y cualquier altura distinta de cero, pero olvida los demás casos en los que el plano también es horizontal, es decir, para $\theta=180^\circ$ y $\theta=360^\circ$; para el caso de la elipse, Carla nota que para θ entre 0 y 45 grados y cualquier h distinta de cero se cumple, pero no es así para los siguientes 90 grados,

posteriormente vuelve a cumplirse para θ entre 135 y 180 grados, por lo que infiere erradamente que después de los siguientes 90 grados volverá a cumplirse la característica que busca, es decir, infiere que también se cumple para θ entre 270 y 315 grados. Finalmente, para los incisos c) y d) también da intervalos erróneos.

Para concluir con la Habilidad de Manipulación de la Imagen, veamos la Tabla 6 que muestra el nivel de dicha habilidad en cada uno de los estudiantes.

Tabla 6

Estado de manipulación de la imagen

Informantes	Tareas								
	6a)	6b)	6c)	7a)	7b)	8a)	8b)	8c)	8d)
Alma	NI	E	E	E	E	I	I	I	I
Blanca	NI	NI	NI	NI	NI	I	I	I	I
Carla	E	NI	E	E	I	I	I	NI	NI

En general, podemos concluir que las tres estudiantes muestran indicio de la habilidad, ya que fueron capaces de manipular los aspectos figúrales de las cónicas, entre ellas la elipse. A pesar de que sus razonamientos tienen diferente perspectiva, a Alma y Blanca les faltó generalizar algunas de sus respuestas; Carla, por su parte, fue capaz de generalizar algunas de ellas, pero en otras infirió erróneamente sus resultados.

CONCLUSIONES

En función del objetivo de esta investigación, que fue examinar los procesos de visualización que muestran tres estudiantes de distintos niveles de formación al realizar una secuencia de tareas diseñadas sobre el tema de elipse, se puede concluir lo siguiente.

Con base en los resultados obtenidos, después de analizar cualitativamente las producciones de las estudiantes, se mostró que estas lograron visualizar más fácilmente figuras planas, tridimensionales y no perfectamente visibles en un sistema de coordenadas, esto se debe, probablemente, a que están acostumbrados a trabajar con coordenadas cartesianas.

Se mostró también que la no evidencia de la habilidad, está relacionada con el nivel de conocimiento sobre el objeto matemático, ya que, a pesar de que las tres estudiantes habían cursado geometría analítica, mostraban confusión y dificultad al completar las tareas, incluso la alumna con el mayor nivel de formación.

En el mismo sentido, se observó que existe relación entre el estado de habilidad y el nivel de formación; puesto que, en el caso de la alumna de bachillerato, mostró indicio en la mayoría de las habilidades estudiadas en el presente trabajo; mientras que Carla, la alumna de licenciatura, mostró evidencia en la mayoría de estas; aunque, por otro lado, la confusión de Blanca al momento de abordar algunas de las tareas, influyó a que mostrara la menor evidencia de las habilidades.

Así también, la habilidad de Reconstrucción Visual fue la única en la que todas las estudiantes mostraron evidencia de esta, lo que resalta que están acostumbrados al tipo de problemas en los que se les da la ecuación y datos y se les pide graficar, como se menciona en el planteamiento del presente trabajo, por lo que se confirma también lo que menciona Duval (1999),

ya que las estudiantes muestran una inclinación de la conversión del registro algebraico al gráfico, pero no del registro gráfico al algebraico.

Por otro lado, se logró evaluar que el uso del software GeoGebra para asistir algunas de las tareas propuestas a las estudiantes, incidió positivamente para promover la habilidad de Manipulación de la imagen, ya que este les permitió manipular el plano y algunos elementos de las cónicas, en particular la elipse.

Se puede concluir que el estudio de la elipse, y en general, las demás cónicas, requiere de habilidades de visualización como las que se estudiaron en este trabajo: las habilidades de organización, escaneo y reconstrucción visual, permiten desarrollar los elementos básicos de la conceptualización de la elipse al describir su componente conceptual correctamente; mientras que las habilidades de generación y manipulación de la imagen, les permiten visualizar y representar gráficamente su componente figural, realizando movimientos dinámicos de rotación mental tridimensional.

Finalmente, con base en el presente trabajo y tomando en cuenta que, en el estudio de las cónicas prevalecen los aspectos algebraicos sobre los geométricos, se sugiere el uso de representaciones geométricas para promover el desarrollo de habilidades visoespaciales y de esta manera se logre una conceptualización significativa de la elipse y en general las cónicas.

Referencias

- Almouloud, S. A., Koné, C. y Sangaré, M. S. (2014). Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the republic of Mali. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4(3), 2-28.
- Andréu Abela, J. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Fundación Centro de Estudios Andaluces Sevilla.
- Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R. y Zúñiga, J. (2006) Investigación Educativa I.
- Bonilla, B., D. y Parraguez G., M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 617-624). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: *Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda.*
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In M. J. Sutherland R. (Ed.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142–157). Springer Science & Business Media.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0>
- Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North*

- American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3–26.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Hernández, S., R., Fernández, C., C., y Baptista, L., P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Marmolejo A., G. A. y Vega R., M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 7-32.
- Martínez Godínez, V. (2013). Paradigmas de investigación. Manual multimedia para el desarrollo de trabajos de investigación. Una visión desde la epistemología dialéctico-crítica.
- Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40B(3), 339-361.
- Olano C., M. F. y Flores S., J. V. (2018). La elipse: una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra en estudiantes de nivel secundario. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, 7(2), 26-39.

- Santa R., Z. M. y Jaramillo L., C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 45-60.
- Schilardi, A. (2013). Estilos de aprendizaje importancia de la visualización en la geometría. *Revista Educación Y Desarrollo Social*, 8(1), 148-161.
- Valenzuela Félix, P. E. (2020). *Aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de las secciones cónicas en estudiantes de ingeniería del I ciclo de una universidad privada, Lima 2020* [Tesis de Maestría]. Universidad César Vallejo.

Anexos

SECUENCIA DE TAREAS

SECUENCIA DE TAREAS

NOMBRE DEL ALUMNO:

EDAD:

ESCOLARIDAD:

A continuación, se te presentan una serie de tareas que deberás completar según se te pida, dispones de una semana para ello. Tómate tu tiempo.

1. Escribe las figuras geométricas planas y tridimensionales que identifiques en cada una de las siguientes imágenes:

a)



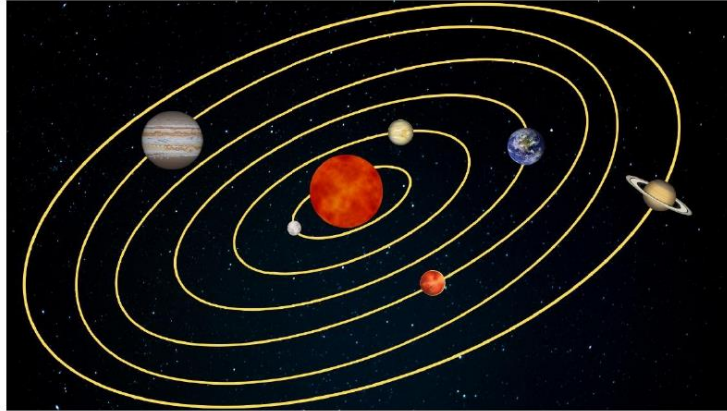
Respuesta:

b)



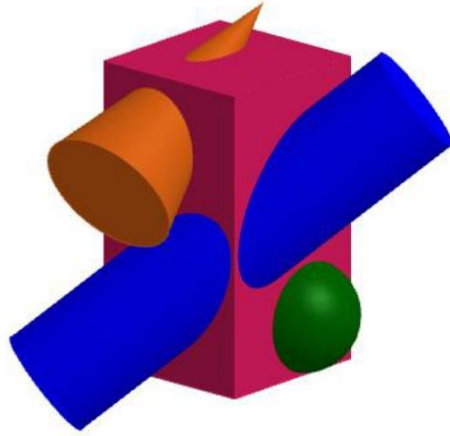
Respuesta:

c)



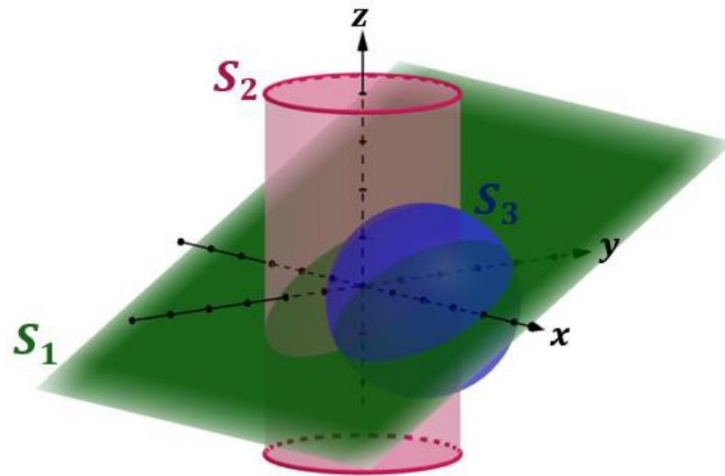
Respuesta:

d)



Respuesta:

2. Enlista las figuras geométricas planas y tridimensionales que identifiques en la siguiente imagen, donde el eje del cilindro S_2 coincide con el eje z y el plano S_1 mantiene cierta inclinación respecto al plano xy .

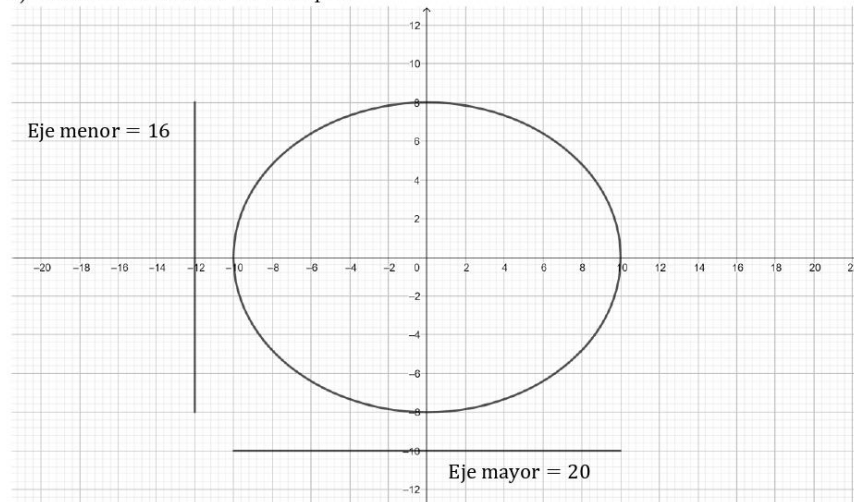


Respuesta:

3.

a) Describe las propiedades de la siguiente figura y

b) Escribe la ecuación de la elipse.



Respuesta:

4. Accede al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ytyvxhjg>.

Modifica los valores a y c (con los deslizadores) y desliza el punto P .

- a) Describe el tipo de curva que representa la traza de P en su movimiento

Respuesta:

5. Grafica la elipse cuya ecuación es: $9x^2 + 49y^2 = 441$

Puedes hacerlo en tu libreta y posteriormente subir una foto en este espacio.

Respuesta:

6. Accede al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ytyvxhjg>. Modifica los valores de **a** y **c** (con los deslizadores) y describe la curva que representa la trayectoria del punto **P** en cada caso:
- a) Cuando los puntos **F** y **F'** se alejan entre sí
 - b) Cuando los puntos **F** y **F'** se acercan entre sí
 - c) Cuando los puntos **F** y **F'** son iguales

Respuesta:

7. En el mismo enlace, observa los valores que toma e para cada uno de los casos anteriores y responde:
- a) ¿Cuál son los valores mínimo y máximo de e respectivamente?
 - b) Describe la curva que representa la trayectoria del punto P cuando $e=0$
 - c) Describe la curva que representa la trayectoria del punto P cuando e se acerca a 1

Respuesta:

8. Accede al siguiente link de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/aac68wgg>.
Cambia los valores de θ y h para manipular la inclinación y altura del plano respectivamente. ¿Para cuáles valores de θ y h la intersección del plano con el cono produce cada una de las siguientes cónicas?

- a) Círculo
- b) Elipse
- c) Hipérbola
- d) Parábola

Respuesta: