



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

***“PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS BASADAS EN
LA PRUEBA INTERNACIONAL PISA”***

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Presenta:

TERESA SALAZAR VALDIVIESO

Asesores de tesis:

**DR. JUAN CARLOS MACÍAS ROMERO
LIC. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ**

Puebla, Puebla, Julio 2014

Índice general

Introducción	1
I. Descripción del proyecto PISA y la competencia matemática	5
1.1 El programa internacional de evaluación de estudiantes (PISA) de la OCDE	5
1.2 Descripción del proyecto PISA.....	6
1.3 Definición de la competencia matemática.....	9
1.4 Procesos	9
1.5 Contenido	10
1.6 Situación o Contexto	12
1.7 Niveles de desempeño	12
1.8 Ejemplos de reactivos de matemáticas en PISA.....	14
1.9 Los niveles de competencia en matemáticas.....	17
1.10 Características de los estudiantes eficaces en los niveles de competencia en matemáticas	18
1.11 Promedios de competencias internacionales de la prueba PISA	19
1.12 Resultados por entidad federativa de la prueba pisa en México	24
II. Estudio de campo en el Estado de Puebla	28
2.1 Diagnóstico en el estado de Puebla.....	28
2.2 Resultados obtenidos de la prueba.....	30
2.3 Análisis de la prueba diagnóstica.....	34
2.4 Prueba PISA diagnóstico aplicada en la evaluación por la secretaria de educación pública de Puebla en el año 2012	35
2.5 Reactivo 1: Manzanas	36
2.6 Reactivo 2: Velocidad de un coche de carreras	40
2.7 Reactivo 3: Granja	44
2.8 Reactivo 4: Basura	47
2.9 Reactivo 5: Terremoto.....	48
2.10 Reactivo 6: Campeonato de Ping Pong	50
2.11 Reactivo 7: El mejor coche	51

2.12 Reactivo 8: Caramelos de colores	54
2.13 Reactivo 9: Exámenes de Ciencias	55
2.14 Reactivo 10: Opciones	57
2.15 Reactivo 11: Apoyo para el Presidente.....	59
2.16 Reactivo 12: Patrón escalonado.....	60
2.17 Reactivo 13: Pasos	62
2.18 Reactivo 14: Robos	67
2.19 Reactivo 15: Carpintero.....	69
2.20 Reactivo 16: Exportaciones.....	72
2.21 Reactivo 17: La Escalera.....	75
2.22 Reactivo 18: Calificaciones	76
2.23 Reactivo 19: Cubos con números.....	78
2.24 Reactivo 20: El Depósito de agua.....	82
2.25 Reactivo 21: Tiempo de reacción.....	85
2.26 Reactivo 22: Concentración de un fármaco.....	87
2.27 Reactivo 23: Presa-Depredador.....	93
2.28 Reactivo 24: Pirámides Demográficas.....	95

III. Secuencias didácticas para el estudio de problemas matemáticos tipo PISA.....101

3.1 Asociación de PISA con el plan y programa de estudios de secundaria3.2	101
3.2 Secuencias didácticas para el reactivo: Granjas	105
3.3 Secuencias didácticas para el reactivo: Basura	114
3.4 Secuencias didácticas para el reactivo: Pasos	119
3.5 Sugerencias didácticas para el reactivo: Manzanas	125
3.6 Sugerencias didácticas para el reactivo: Velocidad de un coche de carreras.....	127
3.7 Sugerencias didácticas para el reactivo: Terremoto.....	130
3.8 Sugerencias didácticas para el reactivo: Campeonato de ping pong	134
3.9 Sugerencias didácticas para el reactivo: El mejor coche	136
3.10 Sugerencias didácticas para el reactivo: Caramelos de colores	138
3.11 Sugerencias didácticas para el reactivo: Exámenes de ciencias	141
3.12 Sugerencias didácticas para el reactivo: Opciones	144
3.13 Sugerencias didácticas para el reactivo: Patrón escalonado.....	149

3.14 Sugerencias didácticas para el reactivo: Robos	150
3.15 Sugerencias didácticas para el reactivo: Carpintero.....	151
3.16 Sugerencias didácticas para el reactivo: Exportaciones.....	152
3.17 Sugerencias didácticas para el reactivo: La escalera	154
3.18 Sugerencias didácticas para el reactivo: Calificaciones.....	156
3.19 Sugerencias didácticas para el reactivo: Cubos con números.....	157
3.20 Sugerencias didácticas para el reactivo: El depósito de agua	159
3.21 Sugerencias didácticas para el reactivo: Concentración de un fármaco.....	161
3.22 Sugerencias didácticas para el reactivo: Presa-depredador	164
Conclusión	167
Bibliografía	168

INTRODUCCIÓN

Los sistemas educativos de muchos países son objeto hoy día de monitoreos periódicos, mediante proyectos de evaluación de alcance nacional e internacional. La información derivada de esos proyectos es vasta y valiosa para la toma de decisiones. Una de las evaluaciones más conocidas actualmente es llamada PISA (por las siglas en inglés del nombre Programme for International Student Assessment), de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). PISA es un programa diseñado específicamente para incidir en la política educativa y aportar sistemáticamente datos, informes, análisis y reportes dirigidos a la sociedad en general y a quienes toman las decisiones respecto a los asuntos más relevantes de la política educativa. El objetivo principal de PISA es la evaluación de las aptitudes o competencias que los estudiantes necesitarán a lo largo de la vida. Su grupo objetivo es la población de 15 años que se encuentra en el momento de ingresar a la educación preuniversitaria o están a punto de incorporarse a la vida laboral.

Dada su regularidad, rigor técnico, confiabilidad y alcance, sus resultados son esperados en los países participantes y no participantes como insumos importantes de información para establecer políticas públicas que tengan efectos en la mejora de la calidad educativa.

Los resultados del rendimiento que los estudiantes mexicanos han tenido ante esta prueba, han sido inferiores a los de los alumnos de los demás países de la OCDE en todas las pruebas aplicadas a la fecha. Estos resultados se explican, en parte, porque muchos estudiantes tienen condiciones menos favorables para el aprendizaje que los de otros países de la OCDE, tanto en el hogar como en la escuela. Otros elementos que contribuyen a explicar esos resultados son el enfoque memorístico, los métodos de enseñanza obsoletos y la promoción de habilidades de rutina, que prevalecen, en muchos casos, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las escuelas mexicanas, públicas y privadas, a pesar de que los planes de estudio prescriban el desarrollo de habilidades más complejas.

Al reflexionar en los resultados obtenidos en México notamos que el proyecto PISA no ha sido asimilado y aprovechado en las aulas, como una herramienta que permita que los estudiantes alcancen habilidades y aprendizajes más complejos, no memorísticos ni rutinarios, mediante la intervención educativa de quienes, día a día, están frente a los grupos.

Al cuestionarnos sobre qué puede hacer un docente para que sus alumnos obtengan mejores resultados en la prueba PISA sin dejar de aprender matemáticas de manera significativa, surge el motivo principal de este trabajo de tesis. En éste presentamos un material dirigido a los maestros cuyo objetivo es colaborar en el proceso de motivación mediante un trabajo analítico y reflexivo que propicie el que los estudiantes adquieran las competencias matemáticas que PISA ha definido como relevantes para el desempeño personal y social en la sociedad del conocimiento.

Nosotros tenemos la plena convicción de que el trabajo docente es sumamente importante; por ello, nos proponemos apoyar a los maestros, para que su práctica docente

mejore de forma tal que paulatinamente enfrenten la tarea docente en forma más rica y no reproduciendo paradigmas en desuso. Para lograrlo, presentamos este material de apoyo, que contiene estrategias didácticas basadas en la resolución de problemas que contribuyan a la promoción de la reflexión y análisis de los planes de estudio y la práctica cotidiana, hasta la construcción de estrategias de enseñanza y, en especial, para lograr aprendizajes significativos.

La resolución de problemas es propia de la actividad matemática. Las estrategias didácticas basadas en la resolución de problemas han tenido un fuerte auge en los últimos años. De hecho, organismos e instituciones educativas en diversos países propusieron como objetivo prioritario de la educación matemática que los alumnos adquieran y desarrollen estrategias para resolver problemas, [14].

Las estrategias de este tipo permiten que los alumnos consigan varios objetivos:

- Asimilar informaciones, conceptos y principios.
- Ser capaces de transferirlas para solucionar problemas más globales.
- Analizar y sintetizar situaciones problemáticas.
- Adquirir y desarrollar estrategias de resolución de problemas, [5].

Son las primeras estrategias que dan posteriormente paso a las estrategias expertas. Hacen que el alumno reflexione, impidiendo el tradicional aprendizaje memorístico. La necesidad de transferencia, análisis y síntesis obliga a relacionar los conceptos matemáticos de una manera no artificial e inconexa.

Por tanto, la resolución de problemas es un instrumento metodológico muy importante. El ejercicio de reflexión que se hace durante la resolución de un problema permite construir conceptos y establecer relaciones entre ellos.

La resolución de problemas no solamente tiene las ventajas que hemos relacionado, sino que también podemos decir que aborda algunas características educativas que pensamos que son importantes:

- La motivación: planteando situaciones problema se consigue aumentar el interés del alumno.
- La atención a la diversidad: la utilización de variables didácticas nos permite crear situaciones con diferente nivel de dificultad de acuerdo con el nivel de desarrollo cognitivo del alumno.
- Las relaciones de comunicación: la resolución de problemas facilita las relaciones de comunicación con múltiples emisores y receptores de información, [5].
- El aprendizaje colaborativo: la metodología de resolución de problemas en el aula requiere de un aprendizaje colaborativo.
- El conocimiento relacional: la resolución de problemas permite que los alumnos obtengan un conocimiento relacional, de tal forma que la estructura del conocimiento matemático que se adquiere permite anclarse en relaciones implícitas entre los conceptos y las situaciones problemáticas a resolver, conocimiento que es bien sabido resulta más duradero que el mero conocimiento memorístico, [10].

Como ya hemos señalado anteriormente la resolución de problemas tiene una importancia capital en el aprendizaje por descubrimiento. En la resolución de problemas podemos distinguir por un lado, las estructuras matemáticas que tienen los alumnos y por otro, las estrategias que poseen para movilizar su conocimiento, detectando las relaciones que ligán a los distintos objetos matemáticos y seleccionando las que son útiles. Ellas distinguen entre tres aspectos básicos en la resolución de problemas:

- Representación del problema
- Interrelación del entorno de una tarea con el conocimiento que tiene un alumno
- El análisis de los problemas y la exploración de las estructuras del conocimiento para asociar a una tarea la información que inicialmente pudiera no haberse relacionado con la misma

Debemos decir que la resolución de problemas como base de la adquisición de los conocimientos matemáticos es reconocida mundialmente. “El significado de las Matemáticas viene esencialmente de los problemas a resolver, no de las definiciones y las fórmulas”, [25]. “Los problemas a resolver son la fuente real del conocimiento y de la resolución de problemas es también el criterio para la adquisición de problemas”, [4].

Una vez dicho esto, debemos añadir que de la elección del tipo de problemas que se plantean y del grado de motivación que despierta en el alumno va a depender en gran medida el éxito o fracaso en la construcción del conocimiento matemático a través del descubrimiento.

La propuesta que estamos haciendo consiste en resolver problemas tipo examen PISA.

En general el contenido de esta tesis está estructurado en tres capítulos de la siguiente manera:

El primer capítulo, ***“Descripción del proyecto PISA y la Competencia Matemática”***, tiene como objetivo presentar el marco general sobre el que se sustenta la evaluación realizada en el proyecto PISA (Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) para el área de matemáticas. Así mismo, se incluye una descripción concisa de lo que es el proyecto de evaluación. Después, se exponen las diversas dimensiones del dominio de Matemáticas a fin de que el docente conozca los procesos, el contenido, el contexto o la situación y los niveles de desempeño de la prueba PISA. Este capítulo servirá al docente como referencia teórica de las propuestas didácticas que hacemos. Exponemos también los resultados que México ha obtenido en las evaluaciones de PISA desde 2003 hasta 2012. Analizamos lo que nos dicen esos resultados sobre el nivel de preparación de los jóvenes mexicanos para aprender y desarrollarse en la sociedad del conocimiento.

En el segundo capítulo, ***“Estudio de campo en el Estado de Puebla”***, exponemos los resultados que se obtuvieron al aplicar una prueba tipo PISA a estudiantes del nivel medio superior en el estado de Puebla. Este capítulo tiene como objetivo que todos los actores educativos involucrados aprovechen la información para la reflexión y, sobre todo, para detonar cada uno en el ámbito de responsabilidad que le compete, y para poder tener

acciones de mejora continua, también exponemos y resolvemos de manera correcta cada uno de los reactivos de la prueba PISA que se aplicaron en la investigación, con la finalidad de que los profesores observen las carencias y dificultades que presentan los alumnos poblanos y esto los motive a trabajar en elevar el nivel de aprendizaje de los alumnos en el aula.

En el tercer capítulo, ***“Secuencias didácticas para el estudio de problemas matemáticos tipo PISA”***, presentamos ejemplos de secuencias y sugerencias didácticas para que los profesores las utilicen en el aula. Usamos un formato de secuencia didáctica que incluye los siguientes aspectos: el contenido, el contexto, el proceso. Además consideramos el número de sesiones, los propósitos, los aprendizajes esperados y las actividades que se van a desarrollar que consideran los programas de secundaria. Para las secuencias que presentamos incluimos además un formato para la evaluación formativa de aplicación de procesos y desarrollo de competencias. Finalmente damos una lista de sugerencias didácticas para los demás reactivos.

CAPÍTULO I

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO PISA Y LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Este capítulo tiene como objetivo presentar el marco general sobre el que se sustenta la evaluación realizada en el proyecto PISA (Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en el área de Matemáticas. Así mismo, se incluye una descripción concisa de lo que es el proyecto de evaluación, las diversas dimensiones del dominio de Matemáticas a fin de que el docente conozca los procesos, el contenido, el contexto o la situación y los niveles de desempeño. Exponemos también cuáles son los resultados de México en las evaluaciones de PISA desde 2003 hasta 2012 analizando qué nos dicen esos resultados sobre el nivel de preparación de los jóvenes mexicanos para aprender y desarrollarse en la sociedad del conocimiento.

1.1 EL PROGRAMA INTERNACIONAL DE EVALUACIÓN DE ESTUDIANTES (PISA) DE LA OCDE

La organización para la cooperación y el desarrollo económicos (OCDE) reúne actualmente a 34 países miembros y 32 asociados, comprometidos con la democracia y la economía de mercado para los que constituye un foro único de debate, desarrollo y perfeccionamiento de políticas económicas y sociales, los países miembros y asociados de la OCDE se muestran en seguida:

TABLA 1.1 MIEMBROS DE LA OCDE

1. Australia	10. México	19. Irlanda	28. Eslovenia
2. Bélgica	11. Nueva Zelanda	20. Islandia	29. España
3. Chile	12. Países Bajos	21. Israel	30. República Checa
4. Dinamarca	13. Noruega	22. Italia	31. Turquía
5. Alemania	14. Austria	23. Japón	32. Hungría
6. Estonia	15. Polonia	24. Canadá	33. Reino Unido
7. Finlandia	16. Portugal	25. Corea	34. Estados Unidos
8. Francia	17. Suecia	26. Luxemburgo	
9. Grecia	18. Suiza	27. República Eslovaca	

TABLA 1.2 PAÍSES ASOCIADOS DE LA OCDE

1. Albania	9. China (Taiwán)	17. Jordania	25. Rumanía
2. Argentina	10. Chipre	18. Kazajistán	26. Serbia
3. Brasil	11. Colombia	19. Letonia	27. Singapur
4. Bulgaria	12. Costa Rica	20. Liechtenstein	28. Tailandia
5. Catar	13. Croacia	21. Lituania	29. Taiwán
6. China (Hong-Kong)	14. Emiratos Árabes Unidos	22. Malasia	30. Túnez
7. China (Macao)	15. Federación Rusa	23. Montenegro	31. Uruguay
8. China (Shanghái)	16. Indonesia	24. Perú	32. Vietnam

La misión de la OCDE consiste en promover políticas destinadas a:

- Lograr la máxima expansión posible del crecimiento económico y el empleo, y un mejor nivel de vida de los países miembros, sin dejar de mantener la estabilidad financiera y, de esa forma, contribuir al desarrollo de la economía mundial.
- Contribuir a una sana y sólida expansión económica en países –tanto miembros como no miembros– que estén en pleno proceso de desarrollo económico.
- Contribuir a la expansión del comercio mundial con criterios multilaterales y no discriminatorios, dentro del respeto a las obligaciones internacionales.

Además, la OCDE mantiene relaciones activas con cerca de 70 países más, con organizaciones no gubernamentales y con representantes de la sociedad civil, lo que confiere a sus actividades un alcance mundial.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO PISA

Se trata de un proyecto de la OCDE, cuyo objetivo es evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años y medir en qué grado los estudiantes son capaces de recurrir a lo aprendido cuando se enfrentan a situaciones novedosas, tanto en el ámbito escolar como fuera de él; es decir, busca estimar el nivel de habilidades y competencias esenciales para su participación plena en la sociedad. Se trata de una población que se encuentra a punto de iniciar el bachillerato o que está a punto de integrarse a la vida laboral. Es muy importante destacar que el Programa ha sido concebido como un recurso para ofrecer información abundante y detallada que permita a los países miembros adoptar las decisiones y políticas públicas necesarias para mejorar los niveles educativos.

A partir del impulso otorgado por la OCDE, en el año 2000 se realizó la primera evaluación internacional con la participación de 31 países. Para el 2003 eran 40, para 2006 eran 57, para el 2009 y 2012 la cifra llegó a los 65. Los países buscan, sobre todo, obtener de forma sistemática información que les permita realizar los análisis pertinentes con el fin de “supervisar adecuadamente el desempeño y valorar el alcance de las metas” que se han propuesto en sus propios sistemas educativos.

Los exámenes

Los exámenes utilizados en el proceso de evaluación no requieren otra cosa que papel y lápiz y cada estudiante cuenta con dos horas para responderlo. Cada examen es una combinación de preguntas directas con una única respuesta correcta (preguntas que sólo admiten algunas palabras o algunas frases breves por respuesta, o que ofrecen múltiples opciones para que el alumno marque alguna o algunas), y preguntas que requieren que los estudiantes elaboren sus propias respuestas. Las preguntas del primer tipo sólo pueden ser correctas o incorrectas, y las del segundo tipo son de evaluación más compleja y admiten respuestas parcialmente correctas.

Es importante destacar que si bien PISA utiliza la herramienta de las preguntas de opción múltiple, una porción importante de los reactivos, particularmente los más complejos, requieren del alumno la redacción de textos e incluso la elaboración de diagramas.

No todos los alumnos tienen el mismo examen sobre la mesa el día de la prueba; a diferentes alumnos les tocan cuadernillos distintos. Tal como se aplicó la prueba en 2009 y 2012 había 13 cuadernillos de examen diferentes, cada uno de ellos con cuatro capítulos o grupos de actividades de evaluación.

¿Qué evalúa PISA?

La evaluación de PISA se centra en tres áreas que tradicionalmente se han considerado claves para el aprendizaje en todos los sistemas educativos: Ciencias, Lectura y Matemáticas. Sin embargo, la evaluación no es curricular, sino basada en competencias. Esto es, en términos de habilidades, destrezas y actitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para responder a situaciones reales que se les pudieran presentar en el futuro.

El modelo de evaluación PISA está centrado en el concepto de *literacy* (aptitud o competencia, aunque en diferentes países ha sido traducido como cultura, formación, alfabetización o habilidad). En México, este concepto se ha manejado como *competencia* y definido como “un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación y valores, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diversos contextos sociales”.

Periodicidad

La evaluación a través de PISA se realiza cada tres años, con el objeto de permitir a los países supervisar adecuadamente su desempeño y valorar el alcance de las metas educativas propuestas. Cada año de su realización el proyecto se ha concentrado en alguna de las tres áreas evaluadas: en la evaluación del año 2000 se dio especial atención a la competencia en lectura, en el 2003 a la competencia en matemáticas, en 2006 a la competencia en el área de ciencias, en 2009 nuevamente a la competencia en lectura y en 2012 fue en Matemáticas. El dominio prioritario ocupa las dos terceras partes de las preguntas de la evaluación. Esto quiere decir que la parte más extensa del examen se refiere al área de concentración correspondiente a ese año (Los porcentajes son aproximadamente 66% para el área de concentración y 17% para cada una de las otras áreas).

Población objetivo

Como existen diferencias entre los países en cuanto a la naturaleza y duración de escolaridad, PISA optó por definir la población objetivo en relación con una edad determinada, con el fin de garantizar que los resultados del desempeño educativo sean comparables. De esta forma se incluye a los estudiantes de entre 15 años tres meses y 16 años dos meses al momento de la evaluación, que estén inscritos en una institución educativa a

partir del tercer año de secundaria y primer año de bachillerato. Las muestras representativas que se utilizan oscilan entre 4 mil 500 y 10 mil estudiantes, de aproximadamente 150 escuelas por cada país. De esta manera es posible realizar inferencias nacionales. Si un país desea disponer de una mayor representatividad respecto a cierto estrato de su población, puede solicitar una sobre muestra, este fue el caso de México que en el ciclo de evaluación de 2003 solicitó los resultados por entidad federativa

Evaluar las competencias

La evaluación de competencias no se dirige a la verificación de contenidos; no pone la atención en el hecho de que ciertos datos o conocimientos hayan sido adquiridos. Se trata de una evaluación que busca identificar la existencia de ciertas capacidades, habilidades y aptitudes que, en conjunto, permiten a la persona resolver problemas y situaciones de la vida. No interesa, pues, en el enfoque de la evaluación de competencias, sólo si una persona lee y cuánto lee, por ejemplo, sino más bien qué competencia tiene en la lectura: qué capacidad para identificar ideas y argumentos en el texto, qué destreza para reconocer problemas y planteamientos distintos.

Hay competencias muy generales, que preceden a la formación escolar, como la competencia comunicativa, o las competencias de colaboración o de creatividad. Algunas competencias básicas ligadas a la enseñanza escolar son, por ejemplo, la lectura, la escritura y el cálculo. La exploración del proyecto PISA se refiere a competencias específicas, detalladas y divididas en sub-competencias, dentro de cada área.

La definición de competencia utilizada en México por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación es la siguiente: “un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación, valores y emociones, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diferentes contextos sociales”.

¿Qué tipos de resultados ofrece el estudio PISA?

La evaluación PISA ofrece tres tipos de resultados:

- Indicadores básicos que describen un perfil del conocimiento y las competencias de los alumnos.
- Indicadores que muestran cómo se relacionan esas competencias con variables demográficas, sociales, económicas y culturales.
- Indicadores de las tendencias que ilustran los cambios en el rendimiento de los alumnos y en las relaciones entre las variables del alumno individual y las del centro educativo y los resultados de los alumnos.

1.3 DEFINICIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Es la capacidad de un individuo de identificar y comprender el papel de las Matemáticas en el mundo actual, emitir juicios bien fundamentados y utilizarlas y comprometerse con ellas de manera que pueda satisfacer las necesidades de la vida del sujeto como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

La Competencia matemática de PISA no se reduce al dominio de la terminología, los datos y procedimientos matemáticos ni a la habilidad para realizar diversas operaciones y poner en práctica determinados métodos; la Competencia matemática supone una combinación de estos elementos con objeto de responder a exigencias que se plantean en contextos reales. Implica poseer la habilidad para plantear, formular e interpretar problemas mediante las Matemáticas en una variedad de situaciones y contextos que van desde lo sencillo a lo complejo.

La Competencia matemática de PISA se integra por las siguientes dimensiones:

DIMENSIONES	
PROCESOS	▪ Reproducción. ▪ Conexión. ▪ Reflexión.
CONTENIDO	▪ Cantidad. ▪ Espacio y forma. ▪ Cambio relaciones. ▪ Probabilidad.
SITUACIÓN O CONTEXTO	▪ Personal. ▪ Pública. ▪ Educativa y laboral. ▪ Probabilidad. ▪ Científica.

A continuación se describen las características de cada una de las dimensiones de la competencia matemática:

1.4 PROCESOS

Son las capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos.

Reproducción

Este proceso comprende el conocimiento de hechos, la retención memorística de objetos y propiedades matemáticas, el desarrollo de procedimientos que resultan de rutina para un estudiante y la aplicación de algoritmos estándar. Implica la realización de cálculos simples para la solución de problemas comunes; incluye el conocimiento, definición de hechos y representación de problemas. El pensamiento matemático en este proceso está relacionado con preguntas tales como: ¿existe? si es así, ¿cuántos? Implica también conocer el tipo de

respuesta que ofrecen las Matemáticas a estas respuestas, así como distinguir entre varios tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis).

Conexión

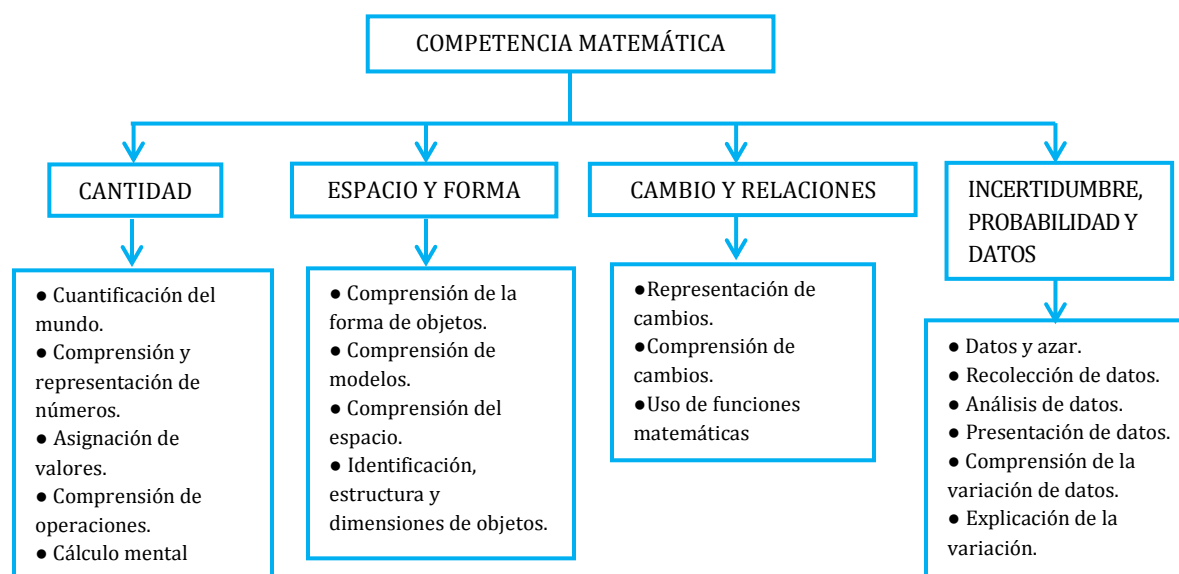
El proceso de conexión de información de ideas y procedimientos matemáticos permite resolver problemas que ya no son sólo de rutina, sino que incluyen escenarios familiares. Para su desarrollo la conexión considera la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución de problemas. En este proceso se espera que los estudiantes manejen diferentes métodos de representación matemática (de acuerdo con la situación y el objetivo del problema). El establecimiento de conexiones requiere también que los estudiantes sean capaces de distinguir y relacionar diferentes definiciones, afirmaciones, ejemplos y demostraciones; así como decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural.

Reflexión

En este proceso se espera que el estudiante sepa lo que es una demostración matemática y sus diferencias con otros tipos de razonamiento, así como tener sentido de la heurística (qué puede ocurrir y por qué) y crear argumentos matemáticos. Supone que los estudiantes puedan matematizar una condición, es decir, que reconozcan y extraigan las Matemáticas de una situación y emplearlas para resolver un problema, también para desarrollar sus propios modelos y estrategias y presentar argumentos matemáticos (incluyendo demostraciones y generalizaciones).

1.5 CONTENIDO

Esta dimensión se refiere al tipo de tema abordado en los problemas y tareas de Matemáticas que se presenta a los estudiantes. PISA clasifica el contenido matemático en cuatro, como se presenta en el siguiente esquema:



Cantidad

Este tema se centra en la importancia de la cuantificación para entender y organizar el mundo. Abarca los fenómenos numéricos, así como las relaciones y los patrones cuantitativos. Implica la comprensión del concepto de tamaño relativo, el reconocimiento de patrones numéricos y el uso de los números para representar cantidades y propiedades cuantificables de objetos de la vida real (operaciones y medidas). Además, aborda el procesamiento y la comprensión de los números presentados en diversas formas.

Un aspecto importante es el razonamiento cuantitativo, que implica un sentido numérico, la comprensión del significado de las operaciones, el cálculo mental y la estimación. La rama de las Matemáticas asociada más frecuentemente con el razonamiento cuantitativo es la Aritmética.

Espacio y forma

Se relaciona con los fenómenos espaciales y geométricos. Requiere la búsqueda de similitudes y diferencias al analizar los componentes de las formas, reconocer patrones y figuras en diferentes representaciones y dimensiones, así como entender las propiedades de objetos geométricos y sus posiciones relativas. Este contenido se relaciona con la Geometría.

Cambio y relaciones

Involucra las manifestaciones matemáticas del cambio, así como las relaciones funcionales (lineales, exponenciales, logísticas, tanto discretas como continuas) y la dependencia entre variables.

Las relaciones matemáticas se expresan mediante ecuaciones, fórmulas o desigualdades, pero las relaciones de carácter más general (como la equivalencia o la divisibilidad y la integración, por mencionar algunas) también son importantes. Las relaciones se pueden expresar por medio de una variedad de representaciones, como por ejemplo tablas, expresiones simbólicas, algebraicas, gráficas y geométricas. Dado que las distintas representaciones pueden tener diferentes propósitos y propiedades, la traducción entre representaciones es a menudo de importancia capital cuando se trata de resolver actividades matemáticas. Este contenido se relaciona con el Álgebra.

Incertidumbre, probabilidad y datos

La incertidumbre y datos son un fenómeno central del análisis matemático de muchas situaciones de los problemas, y la teoría de la incertidumbre y datos y la estadística, así como las técnicas de representación y descripción de datos, se han establecido para darle respuesta. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones, y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y datos son fundamentales. La presentación e interpretación de datos son conceptos clave en esta categoría. Este contenido involucra los fenómenos y las relaciones de probabilidad y estadística que llegan a ser cada vez más relevantes en la sociedad de la información. Las actividades y conceptos específicos de este contenido son la recolección de ocurrencia de los fenómenos y la inferencia.

1.6 SITUACIÓN O CONTEXTO

Son los ámbitos en que se sitúan los problemas de Matemáticas. Los tipos de situación pueden ser personales, educativos o laborales, públicos y científicos. La situación personal se relaciona directamente con las actividades cotidianas de los estudiantes; la educativa o laboral se refiere a la vida de un alumno en la escuela o en ambiente laboral; la situación pública está situada en la comunidad y se basa en la forma que los educandos entienden las relaciones entre los elementos de su entorno; y la situación teórica o un problema específicamente matemático.

1.7 NIVELES DE DESEMPEÑO

Los resultados se presentan en niveles que permiten catalogar el desempeño de los estudiantes y describir las habilidades y las tareas que son capaces de hacer, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Niveles	Cantidad	Espacio y forma	Cambio y relaciones	Probabilidad
6	Conceptuar y trabajar con modelos que contengan procesos y relaciones matemáticas complejas; trabajar con expresiones formales y simbólicas; usar habilidades de razonamiento avanzado para derivar estrategias de solución de problemas y asociarlas con contextos múltiples; usar procesos de cálculo secuencial; formular conclusiones, argumentos y explicaciones precisas.	Resolver problemas complejos que involucren representaciones múltiples y que incluyan procesos de cálculo secuencial. Identificar y extraer información relevante y asociar diferente información relacionada. Razonar, comprender, reflexionar y generalizar resultados y hallazgos; comunicar soluciones y dar explicaciones y argumentaciones.	Usar comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstractas. Tener conocimiento técnico y de convenciones para solucionar problemas y generalizar soluciones matemáticas a problemas complejos del mundo real.	Usar habilidades de pensamiento y razonamiento de alto nivel en contextos estadísticos o probabilísticos para crear representaciones matemáticas de situaciones del mundo real; comprender y reflexionar para resolver problemas, y formular argumentos y explicaciones.
5	Trabajar de manera efectiva con modelos de situaciones complejas para solucionar problemas; usar habilidades de razonamiento, comprensión e interpretación bien desarrolladas con diferentes representaciones; realizar procesos secuenciales; comunicar razonamiento y argumentos.	Resolver problemas que requieran hacer suposiciones apropiadas o que impliquen trabajar con suposiciones dadas. Usar el razonamiento espacial, argumentar, y la capacidad para identificar información relevante; interpretar y asociar diferentes representaciones; trabajar de manera estratégica y realizar procesos múltiples y secuenciales.	Resolver problemas, usando el álgebra avanzada, modelos y expresiones matemáticas formales. Asociar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real. Usar habilidades de solución de problemas complejos y de multinivel. Reflexionar y comunicar razonamientos y argumentaciones.	Aplicar conocimiento probabilístico y estadístico en situaciones problema que estén de alguna manera estructuradas y en donde la representación matemática sea parcialmente aparente. Usar el razonamiento y la comprensión para interpretar y analizar información dada, para desarrollar modelos apropiados y realizar procesos de cálculo secuenciales; comunicar razones y argumentos.

4	Trabajar de manera efectiva con modelos simples de situaciones complejas; usar habilidades de razonamiento en una variedad de contextos; interpretar diferentes representaciones de una misma situación; analizar y aplicar relaciones cuantitativas; usar diferentes habilidades de cálculo para la solución de problemas.	Resolver problemas que impliquen razonamiento visual y espacial, así como la argumentación en contextos no familiares; relacionar e integrar diferentes representaciones; realizar procesos secuenciales; aplicar habilidades de visualización espacial e interpretación.	Entender y trabajar con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real para resolver problemas prácticos. Tener flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos no familiares; y comunicar las explicaciones y argumentaciones resultantes.	Usar conceptos básicos de estadística y probabilidad combinado con razonamiento numérico en contextos menos familiares para la solución de problemas simples; realizar procesos de cálculo secuencial o de multinivel; usar y comunicar argumentos basados en la interpretación d datos.
3	Usar estrategias simples de solución de problemas que incluyan el razonamiento en contextos familiares; interpretar tablas para localizar información; realizar cálculos descritos explícitamente, incluyendo procesos secuenciales.	Resolver problemas que impliquen razonamiento visual y espacial elemental en contextos familiares; relacionar diferentes representaciones de objetos fami-liares; usar habilidades de solución de problemas elementales; diseñar estrategias simples y aplicar algoritmos simples.	Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas) que incluyan cierta interpretación y razonamiento en contextos familiares, así como la comunicación de argumentaciones.	Interpretar información y datos estadísticos y asociar diferentes fuentes de información; usar razonamiento básico con conceptos símbolos y convenciones simples de probabilidad; y comunicar el razonamiento.
2	Interpretar tablas sencillas para identificar y extraer información relevante; realizar cálculos aritméticos básicos; interpretar y trabajar con relaciones cuantitativas simples.	Resolver problemas de representación matemática simple, donde el contenido matemático sea directo y claramente presentado; usar pensamiento matemático básico, así como convenciones en contextos familiares.	Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas); usar habilidades básicas de interpretación y razonamiento.	Localizar información estadística presentada en forma gráfica; entender conceptos y convenciones estadísticas básicas.
1	Resolver problemas del tipo más básico, en donde toda la información relevante se presenta explícitamente. La situación está bien dirigida y tiene un alcance limitado, de tal forma que la actividad es obvia y la tarea matemática es básica, como una operación aritmética simple.	Resolver problemas simples en contex-tos familiares, usando dibujos de objetos geométricos familiares; y aplicar habilidades de conteo y cálculo básicos.	Localizar información relevante en una tabla o gráfica sencilla; seguir instrucciones directas y simples, al leer información de una tabla o gráfica en una forma familiar o estándar; realizar cálculos simples que impliquen relaciones entre dos variables familiares.	Entender y usar ideas básicas de probabilidad en contextos experimentales familiares.

Los estudiantes cuyo desempeño se sitúa por debajo del Nivel 1 son incapaces de tener éxito en las tareas más básicas que busca medir PISA. Esto no significa que no posean habilidades matemáticas, pero la mayoría de estos estudiantes probablemente tendrán serias dificultades para usar las Matemáticas como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida.

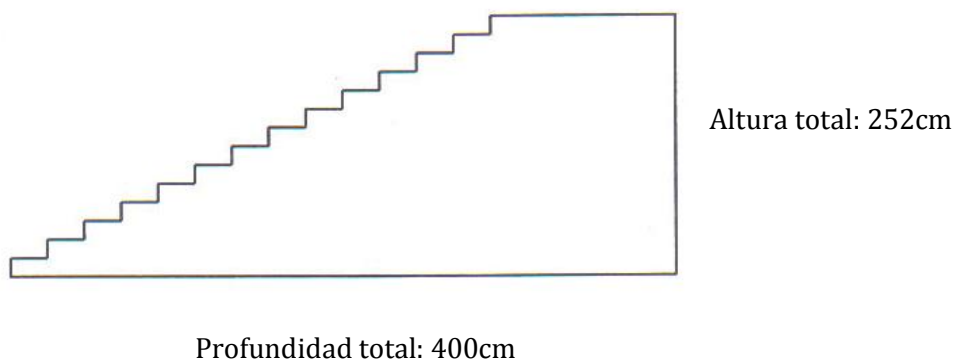
1.8 EJEMPLOS DE REACTIVOS DE MATEMÁTICAS EN PISA

En seguida mostramos algunos ejemplos de reactivos que han sido aplicados en las pruebas de PISA:

CONTENIDO DE ESPACIO Y FORMA

Reactivo. La escalera

En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tiene una altura total de 252cm:



¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones? Altura: _____ cm.

Esta pregunta de respuesta corta se sitúa en un contexto de la vida real. El estudiante debe interpretar y resolver el problema, que emplea dos modelos de interpretación distintos: de lenguaje, incluyendo números, y gráfico. Esta pregunta también tiene información redundante (como la profundidad de 400 cm) que puede confundir al alumno, pero que no es rara en el proceso de solución de problemas en la vida real. El procedimiento que en efecto se requiere consiste en realizar una división sencilla. Debido a que ésta es una operación básica con números (252 dividido entre 14) la pregunta pertenece al grupo de competencia de reproducción. Toda la información necesaria se presenta en el contexto de una situación reconocible y los estudiantes pueden extraer los datos relevantes de ella. La pregunta tiene una dificultad de nivel 2.

CONTENIDO DE CAMBIO Y RELACIONES

Reactivo: Pasos



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos. Posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.

Si aplicamos la fórmula a Gabriel que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Gabriel? Anota el procedimiento.

Esta pregunta abierta se sitúa en un contexto personal. La pregunta se refiere a la relación entre el número de pasos por minuto y el largo de los pasos, lo que significa que se ubica en el renglón de cambios y relaciones. Los estudiantes deben resolverlo mediante una sustitución en una fórmula sencilla y realizando un cálculo de rutina: si $n/p = 140$ y $n = 70$, ¿cuál es el valor de p ? Las competencias que se requieren están relacionadas con la reproducción de habilidades, la manipulación de expresiones que contienen símbolos y fórmulas y la realización de cálculos. Con esta combinación de competencias y el entorno del mundo real que los estudiantes deben manejar, la pregunta tiene un nivel de dificultad 5.

CONTENIDO DE CANTIDAD

Reactivo: Tipo de cambio

Mei-Ling de Singapur se estaba preparando para ir a Sudáfrica por tres meses como estudiante de intercambio. Necesitaba cambiar algunos dólares de Singapur (SGD) por rands sudafricanos (ZAR). Durante estos tres meses el tipo de cambio pasó de 4.2 a 4.0 ZAR por SGD. ¿Favoreció a Mei-Ling que el tipo de cambio actual sea de 4.0 ZAR en lugar de 4.2 ZAR cuando cambió sus rands sudafricanos de nuevo a dólares de Singapur? Escribe una explicación que apoye tu respuesta.

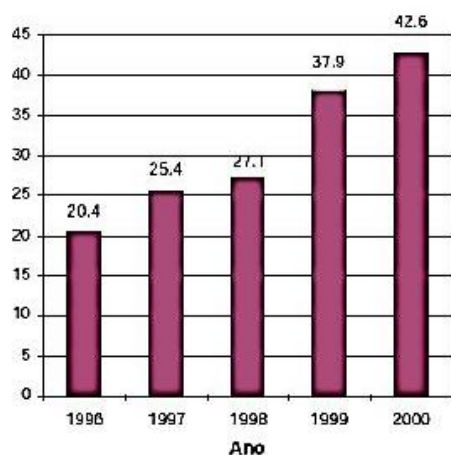
Esta pregunta abierta se sitúa en un contexto personal. Los estudiantes deben aplicar conocimientos de procedimientos que involucran operaciones numéricas como multiplicación y división, lo cual ubica a la pregunta en el renglón de contenidos cuantitativos. Los alumnos deben interpretar una relación matemática no trivial (una modificación específica en el tipo de cambio entre 1 dólar de Singapur y 1 rand sudafricano), reflexionar sobre este cambio, aplicar un razonamiento flexible para resolver el problema y aplicar habilidades básicas cuantitativas y de cálculo. Los estudiantes también deben elaborar una explicación de su conclusión. La combinación de un contexto familiar, una situación compleja, un problema que sale de la rutina, la necesidad de razonar, profundizar y comunicar llevan a que esta pregunta tenga una dificultad nivel 4.

CONTENIDO DE INCERTIDUMBRE

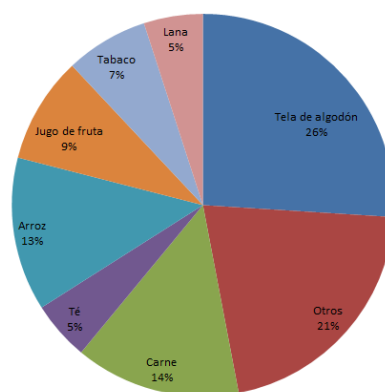
Reactivo: Exportaciones

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el Zed como moneda:

Total de exportaciones anuales de Zedlandia en millones de Zeds, 1996-2000



Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

- a) 1.8 millones de zeds.
- b) 2.3 millones de zeds.
- c) 2.4 millones de zeds.
- d) 3.8 millones de zeds.

Esta pregunta de opción múltiple se sitúa en un contexto público y en el renglón de incertidumbre. La pregunta requiere leer datos de una gráfica de barras y otra de pastel y combinar los datos para llevar a cabo una operación numérica básica. De manera específica, involucra la decodificación de las gráficas, al determinar el total de exportaciones anuales en 2000 (42.6 millones de zeds) y el porcentaje que aparece en las exportaciones de jugo de frutas (9 por ciento). Esta actividad, sumada al proceso de conectar estas cifras mediante la operación numérica adecuada (9 de 42.6 por ciento) ubica a esta pregunta en el grupo de conexiones. La pregunta tiene una dificultad de nivel 4.

1.9 LOS NIVELES DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICAS

Para efectuar la evaluación en el área de matemáticas se han establecido seis niveles de competencia tanto en la escala combinada, como en las sub-escalas que se refieren a los componentes particulares *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad*. Los niveles de la escala combinada se definen como sigue:

Nivel 6 (*más de 668 puntos*). Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información. Demuestran pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar sus conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones.

Nivel 5 (*de 607 a 668 puntos*). En este nivel los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de razonamiento bien desarrolladas, representaciones de asociación y caracterizaciones simbólicas y formales.

Nivel 4 (*de 545 a 606 puntos*). Los estudiantes son capaces de trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos y asociándolos directamente a situaciones del mundo real. Pueden usar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente con cierta comprensión en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos.

Nivel 3 (*de 483 a 544 puntos*). Quienes se sitúan en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias simples de solución de problemas. Pueden interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como razonar directamente a partir de ellas. Pueden generar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones.

Nivel 2 (*de 421 a 482 puntos*). En el segundo nivel los alumnos pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos. Son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados.

Nivel 1 (*de 358 a 420 puntos*). Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo.

Por debajo del nivel 1 (*menos de 358 puntos*). Se trata de estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

1.10 CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTUDIANTES EFICACES EN LOS NIVELES DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICAS

¿Cómo aprenden los estudiantes de 15 años? Los motivados, que confían en su capacidad y que con regularidad aplican estrategias eficaces de aprendizaje tienden a mostrar un mejor desempeño escolar. Sin embargo, los enfoques positivos no sólo contribuyen a explicar el desempeño estudiantil, sino que son resultados importantes de la educación por derecho propio. Los estudiantes que aprenden con eficacia cuando terminan sus estudios y, en especial, los que han conseguido regular su propio aprendizaje, a menudo se considera que tienen una mayor probabilidad de continuar formándose a lo largo de su vida.

PISA pregunta a los estudiantes acerca de cuatro aspectos de sus enfoques hacia el aprendizaje de las matemáticas:

Su motivación

Si están interesados y disfrutan las matemáticas, si consideran que les ayudará a alcanzar sus metas, si tienen una perspectiva positiva sobre su escuela y si sienten que pertenecen ahí.

Lo que piensan acerca de ellos mismos

La confianza que tienen en su capacidad en matemáticas (“concepto de sí”) y su capacidad para superar los retos de aprendizaje que encuentran difíciles (“eficacia personal”).

Factores emocionales

En específico, qué tan ansiosos se sienten los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Estrategias de aprendizaje

La medida en la que los estudiantes “memorizan” información nueva, la “profundizan” al pensar cómo se relaciona con lo ya aprendido y el “control” de su nuevo aprendizaje verificando que alcanzaron nuevas metas de formación.

Al analizar las respuestas de los estudiantes, PISA muestra tres puntos útiles acerca de los enfoques de los jóvenes respecto del aprendizaje. El primero es la medida en la que los alumnos en distintos países tienen ciertas características autodefinidas que pueden ayudarles a aprender. En segundo lugar, los resultados de PISA muestran en qué medida se asocian características particulares con el desempeño. Tercero, muestran cómo la motivación, las ideas sobre su persona y los factores emocionales están vinculados a la adopción de estrategias de aprendizaje eficaces y, por ende, pueden ayudar a los estudiantes a convertirse en practicantes del aprendizaje permanente.

1.11 PROMEDIOS DE COMPETENCIAS INTERNACIONALES DE LA PRUEBA PISA

La estadística más atendida es aquélla que resume el rendimiento de los estudiantes mediante el promedio de los puntajes obtenidos, por lo que en esta sección se recogen los resultados del análisis del rendimiento del alumnado exclusivamente en Matemáticas. Nosotros nos enfocaremos en analizar detalladamente cual ha sido el lugar y el nivel que México ha obtenido a través de las 5 evaluaciones que PISA ha realizado (2000-2012). Así pues en las siguientes tablas se presentan los resultados que tanto los países oficiales como los asociados de la OCDE han obtenido a lo largo de los 12 años de evaluación.

TABLA 1.3 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EN EL AÑO 2000.

País	Media	País	Media
1. Japón	557	17. Noruega	499
2. Corea	547	18. Rep. Checa	498
3. N. Zelandia	537	19. Estados U.	493
4. Finlandia	535	20. Alemania	490
5. Australia	533	21. Hungría	488
6. Canadá	533	22. Rusia	478
7. Suiza	529	23. España	476
8. R. Unido	529	24. Polonia	470
9. Bélgica	520	25. Letonia	463
10. Francia	517	26. Italia	457
11. Austria	515	27. Portugal	454
12. Dinamarca	514	28. Grecia	447
13. Islandia	514	29. Luxemburgo	446
15. Suecia	510	30. México	387
16. Irlanda	503	31. Brasil	334

Como se muestra en la tabla 1.3 en el 2000 participaron 31 países y México se ubicó en el lugar 30, obtuvo un promedio de 387 lo que lo situó en el nivel 1. Según los criterios psicométricos especificados en el documento PISA-Internacional, los alumnos ubicados en los Niveles 0 y 1 tienen muy pocas posibilidades de participar exitosamente en las sociedades modernas de conocimiento. Estos alumnos estarían marginados del mercado laboral globalizado y tecnificado. Su participación ciudadana también estaría limitada, ya que su nivel de conocimiento matemático sería insuficiente para formular juicios y opiniones relativamente elaborados, que estuvieran basados en información cuantitativa, del desempeño de las instituciones sociales (por ejemplo, la Secretaría de Educación Pública). México refleja las limitaciones de un sistema educativo para proveer, a todo su estudiantado, con la educación matemática de calidad para favorecer su desarrollo humano.

TABLA 1.4 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EN EL AÑO 2003.

País	Media	País	Media
1. Hong Kong-China*	550	21. Eslovaquia	498
2. Finlandia	544	22. Noruega	495
3. Corea	542	23. Luxemburgo	493
4. Holanda	538	24. Polonia	490
5. Liechtenstein*	536	25. Hungría	490
6. Japón	534	26. España	485
7. Canadá	532	27. Letonia*	483
8. Bélgica	529	28. Estados Unidos	483
9. Macao-China*	527	29. Rusia*	468
10. Suiza	527	30. Portugal	466
11. Australia	524	31. Italia	466
12. Nueva Zelanda	523	32. Grecia	445
13. Rep. Checa	516	33. Serbia*	437
14. Islandia	515	34. Turquía	423
15. Dinamarca	514	35. Uruguay*	422
16. Francia	511	36. Tailandia*	417
17. Suecia	509	37. México	385
18. Austria	506	38. Indonesia*	360
19. Alemania	503	39. Túnez*	359
20. Irlanda	503	40. Brasil*	356

*Los países con asterisco no son miembros de la OCDE, sino más bien fueron invitados.

Como se muestra en la tabla 1.4 en el 2003 participaron 40 países y México se ubicó en el lugar 37, es decir, el último lugar de los miembros de la OCDE, obtuvo un promedio de 385 lo que lo situó en el nivel 1. Llama la atención, sobre todo, la proporción de estudiantes mexicanos calificados como deficientes en matemáticas, es decir aquellos que no alcanzan siquiera el primer grado en la jerarquía de valores (38.1%). Si a esos estudiantes se aúna el grupo de alumnos que calificaron en el nivel inicial (27.9%), tenemos que más de dos terceras partes de los jóvenes de 15 años aún en la escuela cuentan, a lo mucho, con capacidades iniciales para enfrentar los desafíos cognitivos de la sociedad del conocimiento. Apenas una proporción de 0.4% de los alumnos mexicanos clasifica en niveles satisfactorios (5 y 6 de la escala), cuando cerca de 15% de los estudiantes del área OCDE accede a los mismos, [20, pág. 259-260]. En resumen, la comparación con el promedio OCDE es claramente expresiva de un desempeño insatisfactorio en matemáticas.

TABLA 1.5 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS 2006.

País	Media	País	Media	País	Media	País	Media
1. Taipéi, China*	549	16. República Checa	510	31. Letonia*	486	46. Bulgaria*	413
2. Finlandia	548	17. Islandia	506	32. España	480	47. Chile	411
3. Hong Kong, China*	547	18. Austria	505	33. Azerbaijón*	476	48. México	406
4. Corea	547	19. Eslovenia*	504	34. Federación Rusa	476	49. Montenegro*	399
5. Holanda	531	20. Alemania	504	35. Estados Unidos	474	50. Indonesia*	391
6. Suiza	530	21. Suecia	502	36. Croacia	467	51. Jordania*	384
7. Canadá	527	22. Irlanda	501	37. Portugal	466	52. Argentina*	381
8. Macao, China*	525	23. Francia	496	38. Italia	462	53. Colombia*	370
9. Liechtenstein*	525	24. Reino Unido*	495	39. Grecia	459	54. Brasil*	370
10. Japón	523	25. Polonia	495	40. Israel*	442	55. Túnez*	365
11. Nueva Zelanda	522	26. Eslovaquia*	492	41. Serbia*	435	56. Qatar*	318
12. Bélgica	520	27. Hungría	491	42. Uruguay*	427	57. Kirguistán*	311
13. Australia	520	28. Luxemburgo	490	43. Turquía	424		
14. Estonia*	515	29. Noruega	490	44. Tailandia*	417		
15. Dinamarca	513	30. Lituania*	486	45. Rumania	415		

*Los países con asterisco no son miembros de la OCDE, sino más bien fueron invitados.

Como se muestra en la tabla 1.5 en el 2006 participaron 57 países y México se ubicó en el lugar 48, otra vez, en el último lugar de los países miembros de la OCDE, obtuvo un promedio de 406 lo que lo situó en el nivel 1, [18, pág. 32]. Si comparamos los resultados del desempeño en Matemáticas entre PISA 2006 y PISA 2003, encontramos que México mejoró su desempeño, ya que aumentó 20 puntos, pero con un total de 406 puntos aún se encuentra muy por debajo del promedio de la OCDE.

Es importante contemplar no sólo el lugar que ocupamos sino la magnitud de las diferencias que nos separan de los países que están a la cabeza. En 2006, México en relación con los niveles de desempeño en Matemática, tuvo un porcentaje cercano al 55% de estudiantes que están en nivel 1 y bajo 1. Este es un dato preocupante, porque más de la mitad de los estudiantes en México no han desarrollado competencias que les permitan enfrentar situaciones problemáticas de vida que impliquen el uso de las matemáticas. Su razonamiento matemático sólo se aplica a contextos muy familiares; podrían usar procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones y no siendo capaces de proponer modos alternativos de resolver. El porcentaje de estudiantes Mexicanos bajo el nivel 1 fue tres veces el del promedio de la OCDE y el porcentaje en el nivel 1 fue casi el doble de ese promedio.

TABLA 1.6 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS 2009.

País	Media	País	Media	País	Media
1. Shanghái - China*	600	23. República Eslovaca	497	45. Azerbaiyán	431
2. Singapur*	562	24. Austria	496	46. Bulgaria	428
3. Hong Kong - China*	555	25. Polonia	495	47. Rumanía	427
4. Corea del Sur	546	26. Suecia	494	48. Uruguay*	427
5. Taipéi - China*	543	27. República Checa	493	49. Chile	421
6. Finlandia	541	28. Reino Unido	492	50. Tailandia	419
7. Liechtenstein*	536	29. Hungría	490	51. México	419
8. Suiza	534	30. Luxemburgo	489	52. Trinidad y Tobago*	414
9. Japón	529	31. Estados Unidos	487	53. Kazajistán*	405
10. Canadá	527	32. Irlanda	487	54. Montenegro*	403
11. Países Bajos *	526	33. Portugal	487	55. Argentina*	388
12. Macao-China*	525	34. España	483	56. Jordania*	387
13. Nueva Zelanda	519	35. Italia	483	57. Brasil*	386
14. Bélgica	515	36. Letonia	482	58. Colombia*	381
15. Australia	514	37. Lituania	477	59. Albania*	377
16. Alemania	513	38. Federación Rusa	468	60. Túnez*	371
17. Estonia	512	39. Grecia	466	61. Indonesia*	371
18. Islandia	507	40. Croacia	460	62. Qatar*	368
19. Dinamarca	503	41. Dubái (EAU)*	453	63. Perú*	365
20. Eslovenia	501	42. Israel*	447	64. Panamá*	360
21. Noruega	498	43. Turquía	445	65. Kirguistán*	331
22. Francia	497	44. Serbia	442		

*Los países con asterisco no son miembros de la OCDE, sino más bien fueron invitados.

Después de cuatro evaluaciones, de casi una década de la calidad de la educación, México sigue ocupando el último lugar de desempeño entre los países de la OCDE. Como lo muestra la tabla 1.6, México ocupó el lugar 51 (419 puntos en promedio) de entre 65 naciones, [21, pág. 2].

Aunque Matemáticas es la única asignatura en donde hay un constante crecimiento; México es el país con el más alto incremento en desempeño con 33 puntos porcentuales de incremento entre 2003 (385 puntos) y 2009. Así mismo, México es el país con una reducción mayor de los estudiantes con nivel de desempeño por debajo del nivel 2 en matemáticas (es decir menos de 420 puntos) entre 2003 (66%) y 2009 (51%). Para la OCDE estar en esos

niveles significa que al concluir la secundaria o cursar el primer año del bachillerato los estudiantes apenas reconocen en un texto ideas sencillas de las matemáticas, es decir solo tienen las habilidades de resolver operaciones “rutinarias” en donde se les dan instrucciones directas y en situaciones explícitas.

TABLA 1.7 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EN EL AÑO 2012.

País	Media	País	Media	País	Media
1. China Shanghai*	613	23. Nueva Zelanda	500	45. Rumania*	445
2. Singapur*	573	24. Republica Checa	499	46. Chipre*	440
3. Hong Kong-China*	561	25. Francia	495	47. Bulgaria*	439
4. China Taipéi*	560	26. Reino Unido	494	48. Emiratos Árabes*	434
5. Corea	554	27. Islandia	493	49. Kazajistán*	432
6. Macao-China*	538	28. Latvia	491	50. Tailandia	427
7. Japón	536	29. Luxemburgo	490	51. Chile	423
8. Liechtenstein*	535	30. Noruega	489	52. Malasia	421
9. Suiza	531	31. Portugal	487	53. México	413
10. Holanda	523	32. Italia	485	54. Montenegro*	410
11. Estonia	521	33. España	484	55. Uruguay*	409
12. Finlandia	519	34. Rusia	482	56. Costa Rica*	407
13. Canadá	518	35. República Eslovaca	482	57. Albania*	394
14. Polonia	518	36. Estados Unidos	481	58. Brasil*	391
15. Bélgica	515	37. Lituania*	479	59. Argentina*	388
16. Alemania	514	38. Suecia	478	60. Tunisia	388
17. Vietnam*	511	39. Hungría	477	61. Jordania*	386
18. Austria	506	40. Croacia*	471	62. Colombia*	376
19. Australia	504	41. Israel*	466	63. Qatar*	376
20. Irlanda	501	42. Grecia	453	64. Indonesia*	375
21. Eslovenia	501	43. Serbia*	449	65. Perú*	368
22. Dinamarca	500	44. Turquía	448		

*Los países con asterisco no son miembros de la OCDE, sino más bien fueron invitados.

La tabla 1.7 nos muestra que México obtuvo una media de desempeño de 413 puntos (OCDE 494 y al 397). La distancia entre México y la media de la OCDE es equivalente a 2 años escolares. También cabe mencionar que de los 65 países evaluados México se ubica en el lugar 53 y más alarmante es el hecho de que México está en el último lugar de los 34 países miembros de la OCDE. Por otro lado los resultados de la evaluación nos muestran que 55% de los alumnos mexicanos no alcanzan el nivel de competencias básico (nivel 2) en matemáticas (promedio OCDE: 23%) y que menos del 1% de los alumnos mexicanos de 15 años logra alcanzar los niveles de competencia más altos (niveles 5 y 6) en matemáticas (promedio OCDE: 13%).

El alumno promedio en México obtiene 413 puntos en matemáticas. El puntaje promedio en la OCDE es de 494, una diferencia con México que equivale a casi dos años de escolaridad. Este puntaje promedio sitúa a México por debajo del desempeño promedio de Portugal (487 puntos), España (484), Chile (423); a un nivel similar al de Uruguay y Costa Rica y por encima del rendimiento de Brasil (391), Argentina (388), Colombia (376) y Perú (368). Los alumnos mexicanos de más alto rendimiento obtienen el mismo puntaje que un alumno promedio en Japón (539 puntos), [22, pág. 1- 3].

1.12 RESULTADOS POR ENTIDAD FEDERATIVA DE LA PRUEBA PISA EN MÉXICO

En México, la aplicación de PISA está a cargo del INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación). En el siguiente cuadro vemos el total de alumnos que realizaron la prueba PISA en México en las 4 evaluaciones en las que ha participado, así como el número de escuelas seleccionadas, [19, pág. 28].

Cantidad de Escuelas y alumnos evaluados en México PISA 2000-2012

	2000	2003	2006	2009	2012
Número de Alumnos que realizaron la prueba	5,276	29,983	33,706	38,250	33,806

A partir del 2003 se hizo una muestra ampliada que permitiera el análisis por entidad federativa. Ahora corresponde revisar la situación dentro de Puebla, para conocer con mayor detalle el desempeño logrado por los estudiantes poblanos evaluados. De esta manera se enriquecerá el panorama que ofrecen los resultados de PISA y, sobre todo, se podrán identificar mejor los retos que de ellos se deriven para las políticas y las prácticas educativas.

A continuación analizaremos los resultados que el Estado de Puebla ha tenido desde el año 2003 al 2012, cabe mencionar que para obtener el promedio los resultados de los estados han sido ponderados por igual como si aportaran todos ellos el mismo número de alumnos. Este promedio, por tanto, es la media aritmética de las puntuaciones medias de los países.

TABLA 1.8 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA GLOBAL DE MATEMÁTICAS, POR ENTIDAD FEDERATIVA, PISA 2003.

Entidad	Media	Entidad	Media	Entidad	Media
1. Colima	443	12. Morelos	390	23. Campeche	374
2. Distrito Federal	435	13. Coahuila	387	24. Sonora	373
3. Aguascalientes	429	14. Yucatán	387	25. Durango	369
4. Jalisco	420	15. Estado de México	385	26. Veracruz	357
5. Chihuahua	413	16. Guanajuato	385	27. Chiapas	356
6. Querétaro	409	17. Baja California	384	28. Tlaxcala	355
7. Nuevo León	408	18. Nayarit	383	29. Guerrero	351
8. Tamaulipas	402	19. Zacatecas	382	30. Tabasco	335
9. Sinaloa	398	20. Baja California Sur	378	31. Oaxaca	329
10. Hidalgo	392	21. Puebla	376	32. Michoacán	
11. Quintana Roo	390	22. San Luis Potosí	375	Media Nacional	373.43

Como nos lo muestra la tabla 1.8 en el 2003 el estado de Puebla se encontró ubicado en el nivel 1, [17, pág. 80]. Lo que indica que en 2003 los alumnos poblanos solo fueron capaces de responder preguntas que involucraban contextos familiares en los que toda la información relevante está presente y las preguntas están definidas de manera clara, lograron tener la posibilidad de identificar información y llevar a cabo procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas. Pudieron llevar a cabo acciones que son obvias y consecuencia inmediata del estímulo presentado.

TABLA 1.9 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA GLOBAL DE MATEMÁTICAS, POR ENTIDAD FEDERATIVA, PISA 2006.

Entidad	Media	Entidad	Media
1. Distrito Federal	439	9. Chihuahua	418
2. Aguascalientes	437	10. Estado de México	413
3. Nuevo León	432	11. Tamaulipas	412
4. Querétaro	429	12. Baja California	411
5. Sonora	425	13. Durango	411
6. Coahuila	425	14. Guanajuato	411
7. Jalisco	421	15. Yucatán	409
8. Colima	420	16. San Luis Potosí	409

Entidad	Media	Entidad	Media
17. Zacatecas	408	25. Campeche	388
18. Baja California Sur	406	26. Michoacán	387
19. Tlaxcala	404	27. Puebla	387
20. Quintana Roo	404	28. Oaxaca	387
21. Veracruz	404	29. Guerrero	370
22. Sinaloa	402	30. Chiapas	368
23. Hidalgo	401	31. Tabasco	363
24. Nayarit	399	Media Nacional	406

Como nos lo muestra la tabla 1.9, en el 2006 el estado de Puebla se encontró ubicado en el nivel 1 nuevamente, [18, pág. 35]. Sin embargo como se observa, en tres años hubo una mejora visible ya que Puebla obtuvo 11 puntos más. Es importante mencionar que en 2003, el Estado de Puebla estaba en el lugar 21 y en el 2006 descendió 6 lugares. Esto significa, que otros estados fueron mejorando al grado de superar a Puebla.

TABLA 1.10 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA GLOBAL DE MATEMÁTICAS, POR ENTIDAD FEDERATIVA, PISA 2009.

Entidad	Media	Entidad	Media
1. Distrito Federal	455	17. Coahuila	416
2. Nuevo León	455	18. Quintana Roo	416
3. Chihuahua	445	19. Baja California	416
4. Aguascalientes	442	20. Michoacán	413
5. Colima	440	21. Morelos	413
6. Jalisco	436	22. Veracruz	411
7. Estado de México	424	23. Sonora	410
8. Zacatecas	424	24. Campeche	406
9. Puebla	424	25. Tamaulipas	405
10. Nayarit	423	26. Tlaxcala	405
11. Querétaro	423	27. Yucatán	404
12. Guanajuato	422	28. Oaxaca	399
13. Hidalgo	422	29. San Luis Potosí	394
14. Sinaloa	417	30. Tabasco	380
15. Durango	417	31. Guerrero	378
16. Baja California Sur	416	32. Chiapas	368
		Media Nacional	419

La tabla 1.10 nos muestra que el estado de Puebla en el año 2009 ascendió un nivel, comparándolo con los años anteriores 2003, 2006, [19, pág. 113]. Así que los estudiantes del Estado de Puebla ya fueron capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que exigen, cuando mucho, inferencias directas. Así mismo fueron capaces de extraer información relevante de una sola fuente y utilizar un solo modelo de representación ya que pudieron emplear el grado más básico de algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Siendo capaces de utilizar razonamientos directos y de realizar interpretaciones literales de los resultados.

TABLA 1.11 MEDIAS DE DESEMPEÑO EN ESCALA GLOBAL DE MATEMÁTICAS, POR ENTIDAD FEDERATIVA, PISA 2012.

Entidad	Media	Entidad	Media
1. Aguascalientes	437	16. San Luis Potosí	412
2. Nuevo León	436	17. Guanajuato	412
3. Jalisco	435	18. Tlaxcala	411
4. Querétaro	434	19. Tamaulipas	411
5. Colima	429	20. Sinaloa	411
6. Chihuahua	428	21. Quintana Roo	411
7. Distrito Federal	428	22. Yucatán	410
8. Durango	424	23. Zacatecas	408
9. Morelos	421	24. Hidalgo	406
10. Coahuila	418	25. Veracruz	402
11. México	417	26. Campeche	396
12. Puebla	415	27. Tabasco	378
13. Baja California	415	28. Chiapas	373
14. Baja California Sur	414	29. Guerrero	367
15. Nayarit	414	Media Nacional	413

Es importante mencionar que no se presentan los resultados de Michoacán, Sonora y Oaxaca debido a que las tasas de participación de sus escuelas secundarias fueron inferiores a las requeridas.

Si comparamos los resultados en los puntajes que se obtuvieron por parte del Estado de Puebla en el 2012 con los del año 2009 observamos que Puebla tuvo una caída en el nivel de competencia, regresando al nivel 1, además se situó en el lugar 12, lo que muestra que descendió 3 lugares, y al obtener una media de 415, tuvo 9 puntos menos que en 2009, [24, pág. 20].

CAPITULO II

ESTUDIO DE CAMPO EN EL ESTADO DE PUEBLA

En este capítulo presentamos un análisis de los resultados que se obtuvieron a partir de la aplicación de una prueba diagnóstica tipo PISA a estudiantes de bachilleratos generales del estado de Puebla. El objetivo es de dar a conocer a la comunidad educativa y a la sociedad en general, los resultados alcanzados por los alumnos poblanos que participaron en este proyecto. Igualmente este capítulo tiene como finalidad que todos los actores educativos involucrados aprovechen la información para la reflexión y, sobre todo, para detonar cada uno en el ámbito de responsabilidad que le compete, y para poder tener acciones de mejora continua. También exponemos y resolvemos de manera correcta cada uno de los reactivos de la prueba PISA que se aplicó en la investigación con el objeto de que los profesores observen las carencias y dificultades que presentan los alumnos poblanos y esto los motive a trabajar en elevar el nivel de aprendizaje de los alumnos en el aula.

2.1 DIAGNÓSTICO EN EL ESTADO DE PUEBLA

En enero del 2012 la Secretaría de Educación Pública tomó la determinación de hacer un diagnóstico en el estado de Puebla, con la finalidad de detectar el nivel de aprendizaje con el que cuentan los alumnos con una edad promedio de 15 años que están finalizando el nivel básico o iniciando el nivel medio superior. Esta acción se tomó dado que el 20 y 21 de Marzo del 2012 se aplicaría la prueba PISA en el estado de Puebla y de manera general, se averiguaría si los alumnos de secundaria o preparatoria eran capaces de razonar los problemas matemáticos que se les presentan. Se demandaba que tuvieran una evaluación previa, para ver si los alumnos eran capaces de analizar y argumentar sus conclusiones de manera coherente, y esta evaluación serviría para que tanto los profesores, como los estudiantes estuvieran familiarizados con el examen. Nosotros participamos en la aplicación y calificación de la prueba, así como en la capacitación a docentes y a alumnos.

A continuación describiremos la metodología de la actividad, las características de los participantes, los materiales empleados y el procedimiento.

Un total de 1898 estudiantes seleccionados al azar tomaron parte de la investigación. Los seleccionados forzosamente debían cumplir la condición de haber nacido en el año de 1996, y deberían estar cursando el primero de bachillerato.

Los bachilleratos del estado de Puebla a los que se les aplicó la prueba de diagnóstico fueron los siguientes:

NO.	BACHILLERATO	CLAVE	NO. DE ALUMNOS
1	HEROES DE ZACAPOAXTLA	21EES0307S	9
2	OCTAVIO PAZ (DE ZAPOTITLAN DE SALINAS)	21EBH0405O	12
3	PALATINO	21PBH0387X	28
4	EMILIANO ZAPATA	21EBH0479H	77
5	DIEGO RIVERA	21EBH0810Y	15
6	VICENTE LOMBARDO TOLEDANO	21EBH071N	7
7	OCTAVIO PAZ	21EBH0271R	25
8	BACHILLERATO GENERAL JOSE VASCONCELOS	21PBH0388W	5
9	C.E. MANUEL ÁVILA CAMACHO	21EBH0032B	90
10	OCTAVIO PAZ	21EBH0621F	7
11	OCTAVIO PAZ LOZANO	21EBH0279J	91
12	BACHILLERATO GENERAL XICOTEPEC	21PBH0283B	25
13	LATINOAMERICANA	21PBH0106Y	9
14	C.E. NIÑOS HEROES DE CHAPULTEPEC	21EBH0047Z	154
15	20 DE NOVIEMBRE	21EBH0319U	29
16	BENEMERITO INSTITUTO NORMAL DEL ESTADO DE PUE.	21EBH0525C	344
17	C.E.NICOLAS REYES ALEGRE	21EBH0543F	21
18	BACHILLERATO GENERAL OFICIAL LUIS DONALDO COLOSIO	21EBH0147S	96
19	2 DE ABRIL	21EBH0613X	35
20	GUADALUPE VICTORIA	21EBH0267E	41
21	C.E. PDTE VENUSTIANO CARRANZA	21EBH0713W	38
22	GUADALUPE VICTORIA	21EBH0357X	38
23	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	21EBH0711H	52
24	JOSÉ MARÍA MORELOS	21EBH0665C	18
25	C.E. GUADALUPE VICTORIA	21EBH0858B	75
26	RAQUEL FLORES GONZALEZ	21EBH0247B	68
27	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	21EBH0711H	40
28	BENITO JUAREZ GARCIA	21EBH0159X	19

NO.	BACHILLERATO	CLAVE	NO. DE ALUMNOS
29	COLEGIO EUROPEO	21PBH0429F	28
30	COLEGIO BUCARELI DE PUEBLA	21PBH0240D	26
31	INSTITUTO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS	21PBH0227J	87
32	INSTITUTO MERCEDARIO FRAY GABRIEL TELLEZ, A.C.	21PBH0452G	6
33	INSTITUTO DE DESARROLLO EDUCATIVO	21PBH0167L	4
34	CADETE JUAN ESCUTIA	21EBH0124H	180
35	TIERRA Y LIBERTAD	21EBH07391O	16
36	C.E. DR. ALFREDO TOXQUI FERNANDEZ DE LARA	21EBH0496Y	83

Una vez elegidas las escuelas, se diseñó un material especial, una prueba tipo PISA. Y para el boceto de una prueba adecuada para este trabajo, se analizaron detenidamente los problemas de Matemáticas que PISA aplicó y que posteriormente liberó (en internet), [16]. Finalmente se seleccionaron 24 reactivos con los cuales se creó la prueba diagnóstica que más adelante analizaremos pregunta a pregunta y la forma en cómo los estudiantes respondieron. Ya terminados los exámenes, la siguiente etapa consistió en una capacitación para los profesores de las respectivas escuelas seleccionadas. Dicha capacitación tuvo una duración de dos días, durante los cuales se trabajó con los profesores la solución del examen, reactivo por reactivo, de tal manera que los profesores tuvieran en sus manos las soluciones detalladas de cada problema. Posteriormente se animó a los profesores para que trabajaran en clases con los problemas expuestos en la capacitación. La sugerencia fue que permitieran que los alumnos trataran de resolver los problemas en una clase con participación activa de todos y el profesor sería un guía simplemente. Finalmente, se aplicó el examen en las respectivas escuelas ya mencionadas. En aproximadamente una semana se revisó detalladamente una muestra representativa de exámenes, en total 797 exámenes. Cabe mencionar que la mayor puntuación que un alumno podía lograr en este examen era de 43 puntos.

2.2 RESULTADOS OBTENIDOS DE LA PRUEBA

Una vez realizada la prueba, procedimos a calificar cada uno de los exámenes aplicados, y así llegamos a los siguientes resultados:

PROMEDIO DE ACIERTOS DE LA PRUEBA APLICADA

NO.	BACHILLERES	TOTAL DE EXAMENES	MUESTRA CALIFICADA	PROMEDIO PUNTOS
1	HEROES DE ZACAPOAXTLA SECUNDARIA	9	9	4.2
2	OCTAVIO PAZ(DE ZAPOTITLAN DE SALINAS)	12	12	5.7
3	PALATINO	28	14	6.1
4	EMILIANO ZAPATA	77	30	6.8
5	DIEGO RIVERA	15	15	6.9
6	VICENTE LOMBARDO TOLEDANO	7	7	7.3
7	OCTAVIO PAZ	25	25	8.6
8	BACHILLERATO GENERAL JOSE VASCONCELOS	5	5	9.2
9	C.E. MANUEL ÁVILA CAMACHO	90	45	9.2
10	OCTAVIO PAZ	7	7	9.4
11	OCTAVIO PAZ LOZANO	91	20	9.5
12	BACHILLERATO GENERAL XICOTEPEC	25	13	9.8
13	LATINOAMERICANA	9	9	10.1
14	C.E. NIÑOS HEROES DE CHAPULTEPEC	154	45	10.2
15	20 DE NOVIEMBRE	29	10	11
16	BINE	344	90	11.4
17	C.E.NICOLAS REYES ALEGRE	21	21	12.1
18	BACHILLERATO GENERAL OFICIAL LUIS DONALDO COLOSIO	96	30	12.4
19	2 de Abril	35	20	12.5
20	GUADALUPE VICTORIA	41	41	12.5
21	C.E. PDTE VENUSTIANO CARRANZA	38	15	12.7
22	GUADALUPE VICTORIA	38	20	13.1
23	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	52	20	13.5
24	JOSÉ MARÍA MORELOS	18	18	14
25	C.E. GUADALUPE VICTORIA	75	30	14.3
26	RAQUEL FLORES GONZALEZ	68	30	14.5
27	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	40	40	15.1

NO.	BACHILLERES	TOTAL DE EXAMENES	MUESTRA CALIFICADA	PROMEDIO PUNTOS
28	BENITO JUAREZ GARCIA	19	10	16
29	COLEGIO EUROPEO	28	14	16.4
30	COLEGIO BUCARELI DE PUEBLA	26	26	16.6
31	INSTITUTO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS	87	30	17
32	INSTITUTO MERCEDARIO FRAY GABRIEL TELLEZ, A.C.	6	6	17.7
33	INSTITUTO DE DESARROLLO EDUCATIVO	4	4	18.5
34	CADETE JUAN ESCUTIA	180	30	18.8
35	TIERRA Y LIBERTAD	16	16	19.2
36	C.E. DR. ALFREDO TOXQUI FERNANDEZ DE LARA	83	20	26.5

La tabla anterior nos muestra el total de exámenes aplicados por escuela, así como la muestra de los exámenes que se calificaron y finalmente el promedio por escuelas. La escuela que obtuvo el mejor promedio en esta evaluación fue el C.E. Dr. Alfredo Toxqui Fernández de Lara con un promedio de 26.5 cabe mencionar que estos 26.5 puntos es un poco más que la media (total 43 puntos). Desafortunadamente, al revisar las respuestas de estos alumnos nos dimos cuenta de que sus respuestas eran muy semejantes a las que dieron los profesores. Esto hace pensar que su profesor trabajó previamente los problemas y sus respuestas con los estudiantes. La diferencia de estos con los demás en el desarrollo de sus respuestas fue muy grande. Mientras que la escuela que se quedó en un foco rojo fue “Héroes de Zacapoaxtla” con un promedio de 4.2 aciertos. Pero, al observar la tabla notamos que existe una gran variedad en el desempeño matemático en el estado de Puebla, es decir, el nivel está distribuido de manera irregular, así entonces los alumnos del estado de Puebla no cuentan con el mismo nivel matemático, y las variaciones entre los resultados obtenidos nos dejan mucho trabajo por realizar, si se desea lograr una educación regular en el estado.

Por otro lado, analizando los datos anteriores hemos obtenido resultados muy alarmantes, ya que el promedio de puntos que se obtuvo en total por todas las escuelas fue de 12.6 puntos por escuela. Es decir, la calificación del estado de Puebla en esta prueba fue de 2.9 (es decir 209) así que dentro de los seis niveles de dominio en matemáticas, en esta evaluación, el Estado de Puebla quedó situado por debajo del nivel uno, ya que como mínimo para pertenecer a este nivel se necesitaba un promedio mínimo de 358.

Esto nos muestra que la educación en el estado de Puebla debe ser reforzada, puesto que los alumnos tienen serias deficiencias ya que no son capaces de responder preguntas que involucran contextos familiares en los que toda la información relevante está presente y las preguntas están definidas de manera clara. Es preocupante que ni siquiera tengan la

posibilidad de identificar información y llevar a cabo procedimientos de rutina de acuerdo con instrucciones directas en situaciones explícitas.

PROMEDIO ACUMULADO DE LA PRUEBA APLICADA

Dentro de los datos analizados hay algunos que también son de relevancia, uno de ellos es el porcentaje acumulado por escuelas. De acuerdo a los resultados, las calificaciones por escuela se encuentran distribuidas de la siguiente manera:

NO.	ESCUELAS	TOTAL DE EXAMENES	MUESTRA CALIFICADA	PROMEDIO ACUMULADO
1	HEROES DE ZACAPOAXTLA SECUNDARIA	9	9	10%
2	OCTAVIO PAZ	12	12	13%
3	PALATINO	28	14	14%
4	EMILIANO ZAPATA	77	30	16%
5	DIEGO RIVERA	15	15	16%
6	VICENTE LOMBARDO TOLEDANO	7	7	17%
7	OCTAVIO PAZ GRADO	25	25	20%
8	BACHILLERATO GENERAL JOSE VASCONCELOS	5	5	21%
9	C.E. MANUEL ÁVILA CAMACHO	90	45	21%
10	OCTAVIO PAZ	7	7	22%
11	OCTAVIO PAZ LOZANO	91	20	22%
12	BACHILLERATO GENERAL XICOTEPEC	25	13	23%
13	LATINOAMERICANA	9	9	24%
14	C.E. NIÑOS HEROES DE CHAPULTEPEC	154	45	24%
15	20 DE NOVIEMBRE	29	10	26%
16	BENEMERITO INSTITUTO NORMAL DEL ESTADO DE PUEBLA	344	90	26%
17	C.E.NICOLAS REYES ALEGRE	21	21	28%
18	BACHILLERATO GENERAL OFICIAL LUIS DONALDO COLOSIO	96	30	29%
19	2 DE ABRIL	35	20	29%
20	GUADALUPE VICTORIA	41	41	29%
21	C.E. PDTE VENUSTIANO CARRANZA	38	15	30%
22	GUADALUPE VICTORIA	38	20	30%
23	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	52	20	31%
24	JOSÉ MARÍA MORELOS	18	18	33%

NO.	ESCUELAS	TOTAL DE EXAMENES	MUESTRA CALIFICADA	PROMEDIO ACUMULADO
25	C.E. GUADALUPE VICTORIA	75	30	33%
26	RAQUEL FLORES GONZALEZ	68	30	34%
27	ISABEL DÍAZ DE BARTLETT	40	40	35%
28	BENITO JUAREZ GARCIA	19	10	37%
29	COLEGIO EUROPEO	28	14	38%
30	COLEGIO BUCARELI DE PUEBLA	26	26	39%
31	INSTITUTO DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS	87	30	40%
32	INSTITUTO MERCEDARIO FRAY GABRIEL TELLEZ, A.C.	6	6	41%
33	INSTITUTO DE DESARROLLO EDUCATIVO	4	4	43%
34	CADETE JUAN ESCUTIA	180	30	44%
35	TIERRA Y LIBERTAD	16	16	45%
36	C.E. DR. ALFREDO TOXQUI FERNANDEZ DE LARA	83	20	62%

2.3 ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

En esta sección analizaremos detenidamente los resultados obtenidos, aunque indagaremos reactivo por reactivo, en particular dirigiremos la atención en cuales fueron las preguntas que ocasionaron más dificultad entre los alumnos, es decir las preguntas que tuvieron la menor puntuación en general.

Cabe mencionar que de los 797 exámenes revisados la máxima puntuación que podía obtener todo el estado de Puebla con la muestra tomada era de 34271 puntos. Sin embargo la puntuación total que se obtuvo de esta investigación fue de 10036. Este resultado nos deja ver claramente que en el estado existe un retraso preocupante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (sobre todo al compararlo con los parámetros de PISA).

Por ello es de nuestro interés revelar cuáles fueron exactamente los errores que los alumnos tuvieron, expondremos en este trabajo los errores matemáticos que en general manifestó la mayoría de la población estudiantil que sustentó esta prueba diagnóstica.

La siguiente tabla nos muestra los puntajes y el porcentaje total de la muestra de alumnos que contesto acertadamente a cada uno de los reactivos en esta prueba diagnóstica:

PUNTUACIÓN POR REACTIVOS

REACTIVO	PUNTUACIÓN	%	REACTIVO	PUNTUACIÓN	%
1	503	63.11%	21	61	7.65%
2	152	19.07%	22	217	27.23%
3	152	19.07%	23	207	25.97%
4	421	52.82%	24	380	47.68%
5	664	83.31%	25	216	27.10%
6	586	73.53%	26	391	49.06%
7	123	15.43%	27	109	13.68%
8	387	48.56%	28	235	29.49%
9	511	64.12%	29	163	20.45%
10	353	44.29%	30	245	30.74%
11	379	47.55%	31	12	1.51%
12	567	71.14%	32	79	9.91%
13	398	49.94%	33	279	35.01%
14	85	10.66%	34	137	17.19%
15	238	29.86%	35	101	12.67%
16	141	17.69%	36	76	9.54%
17	279	35.01%	37	170	21.33%
18	163	20.45%	38	16	2.01%
19	492	61.73%	39	71	8.91%
20	232	29.11%			

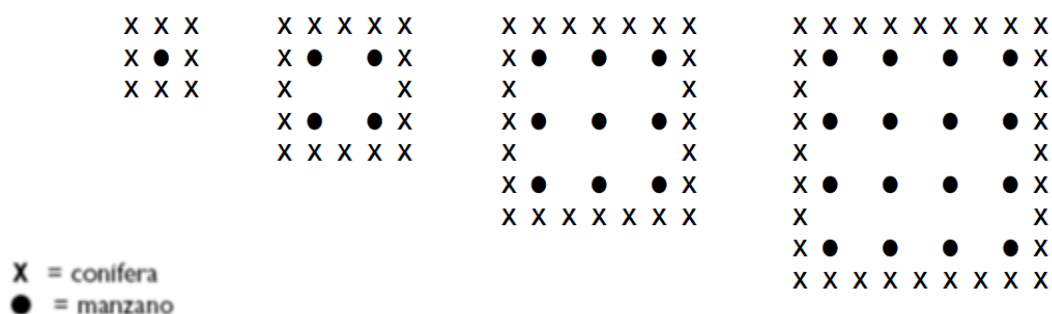
2.4 PRUEBA PISA DIAGNÓSTICO APLICADA EN LA EVALUACIÓN POR LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE PUEBLA EN EL AÑO 2012

A continuación exponemos y resolvemos de manera correcta cada uno de los reactivos de la prueba PISA que se aplicaron en la investigación. Una vez que se da la solución a cada pregunta, continúa una sección donde aparecerán los resultados erróneos que tuvieron los alumnos junto con un análisis detallado del por qué son incorrectas tales respuestas.

2.5 REACTIVO 1: MANZANAS

Un granjero plantó árboles de manzanas siguiendo un patrón cuadrado. Para protegerlos del viento plantó pinos alrededor de huerto.

A continuación se presentan diagramas de esta situación, donde podrás apreciar el patrón usado para plantar los árboles de manzana y de pinos, para cualquier número de filas (n) de árboles de manzana.



PREGUNTA 1:

Completa la tabla:

No.	Número de árboles de manzana	Número de pinos
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 1:

Observando los dibujos dados, se tiene los resultados hasta $n=4$, al llegar a $n = 5$, debemos analizar la relación entre n , número de manzanos y número de pinos. En el caso de los manzanos, observamos que el número corresponde a n^2 . En el caso de los pinos corresponde a $8n$. Por lo tanto para el caso $n = 5$ el número de manzanos es $5^2 = 25$ y el número de pinos $8(5) = 40$. Por lo tanto la tabla completa queda la siguiente manera:

No.	Número de árboles de manzana	Número de pinos
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 503 lo hicieron de manera correcta es decir 63.11% de la población estudiantil acertó. Mostremos sin embargo algunos de los errores que los alumnos cometieron:

A)	n	No. De árboles	No. De pinos
	1	1	8
	2	4	16
	3	9	24
	4	16	32
	5		

B)	n	No. De árboles	No. De pinos
	1	1	8
	2	4	16
	3	9	24
	4	16	32
	5	25	38

C)	n	No. De árboles	No. De pinos
	1	1	8
	2	4	16
	3	9	24
	4	4	32
	5	5	40

D)	n	No. De árboles	No. De pinos
	1	1	8
	2	4	16
	3	9	24
	4	16	32
	5	20	44

Observamos que los alumnos completaron la tabla correctamente hasta el cuarto renglón, ya que podían utilizar la figura que se les daba, sin embargo al tener que responder el quinto renglón, algunos simplemente lo dejaron vacío, y otros trataron de responderlo sin relacionar los datos que ya habían obtenido con los nuevos; ellos necesitaban hacer simples cálculos como una suma. En el caso del número de pinos es claro que la suma es de 8 en 8 por lo que $32+8=40$ mas no a 38, 44 etc. Por otra parte algunos estudiantes encontraron una relación sin contar manualmente cada uno de los pinos y manzanas, sin embargo la sucesión era incorrecta, por ejemplo, para el número de árboles de manzanas 1, 4, 9, 4, 5, etc.

Lo anterior nos deja ver que los alumnos no pueden continuar dos secuencias de números a partir de un dibujo.

PREGUNTA 2:

Del dibujo se obtiene

$$\text{Número de árboles de manzana} = n^2$$

$$\text{Numero de pinos} = 8n$$

Donde n es el número de filas de árboles de manzana.

Existe un valor para n en el cual el número de árboles de manzana es igual al de pinos. Encuentra el valor para n y muestra tu método para calcularlo.

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 2:

El método para resolver este problema es plantear y resolver la ecuación:

$$n^2 = 8n$$

$$n^2 - 8n = 0$$

$$n(n - 8) = 0$$

$$n - 8 = 0 \text{ y } n = 0$$

$$n = 8 \text{ y } n = 0$$

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 152 lo hicieron de manera correcta es decir 19.07% de la población estudiantil acertó. Mostremos algunos de los errores que los alumnos cometieron:

A)

$1 \times 1 = 1$	$8 \times 1 = 8$
$2 \times 2 = 4$	$8 \times 2 = 16$
$3 \times 3 = 9$	$8 \times 3 = 24$
$4 \times 4 = 16$	$8 \times 4 = 32$
$5 \times 5 = 25$	$8 \times 5 = 40$

B)

Para $n = 8$ $n = 8(1) = 2$

$n^2 = 1^2 = 1$	$= 8(2) = 16$
$2^2 = 4$	$= 8(3) = 24$
$3^2 = 9$	$= 8(4) = 32$
$4^2 = 16$	$= 8(5) = 40$
$5^2 = 25$	

La falta de habilidad en el manejo de la información en los alumnos es preocupante, pues no son capaces de entender lo que el problema les está solicitando. La idea de este problema era encontrar un valor donde el número de filas de árboles de manzana igualara al de pinos. Y lo que ellos hicieron fue simplemente en las dos fórmulas sustituir los valores que ya conocían sin llegar a resolver el sistema que se pretendía lograran plantear y resolver.

Lo anterior nos muestra que los alumnos no son capaces de resolver una ecuación cuadrática sin termino independiente, deben resolver $n^2 = 8n$

PREGUNTA 3:

Imagina que el granjero quiere hacer más grande un huerto con más filas de árboles. Conforme el granjero amplíe su huerto, ¿qué se incrementará más rápidamente: la cantidad de árboles de manzana o la de pinos? Explica cómo encontraste tu respuesta.

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 3:

El número de los árboles de manzanas crece más rápido ya que como se muestra en las fórmulas, el número de manzanos está elevado al cuadrado y en cambio el de pinos está multiplicado por 8.

Por ejemplo para $n=8$ se tiene lo siguiente:

$$M = 8^2 = 64$$

$$P = 8(8) = 64$$

Para $n=9$ se tiene lo siguiente:

$$M = 9^2 = 81$$

$$P = 8(9) = 72$$

.

Para $n=n$

$$M = (n)^2 = n^2$$

$$P = 8(n) = 8n$$

Donde

$$n^2 > 8n$$

Así sucesivamente, se puede ver que si bien el número de pinos aumentan, los manzanos lo harán más rápido, es decir, el número de manzanos aumenta de manera progresiva en cantidad conforme pasa el tiempo superando al número de pinos.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 152 lo hicieron de manera correcta es decir 19.07% de la población estudiantil acertó. Mostremos algunos de los errores que los alumnos cometieron:

A) pues yo digo que se incrementara mas rapido es el pino por que las manzanas quieren mas tiempo para que crezcan

B) Si les rriegan agua a los pinos y a los arboles de manzana ban a crese igual, Pero, en ocasiones crese mas rapido una planta que un arbol

C) En este caso los pino incrementan mas rapido porque debe de haber mas pinos que arboles de manzanas.

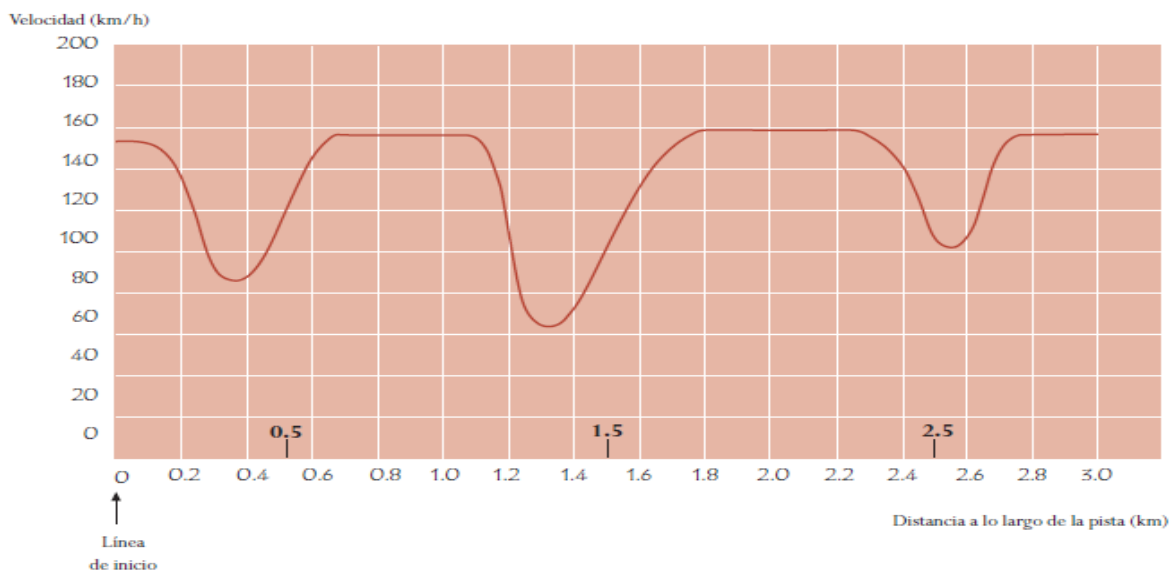
D) la de los pinos por que estan mas juntos y los de las manzanas mas separados y mientras mas grande el terreno mas pinos se requieren para cubrir el terreno

Los estudiantes que respondieron como: A) Pues yo digo que se incrementará más rápido es el pino por que las manzanas quieren más tiempo para que crezcan, C) En este caso los pinos incrementan más rápido porque debe de haber más pinos que arboles de manzana, D) La de los pinos porque están más juntos y los de las manzanas más separados y mientras más grande el terreno más pinos se requiere para cerrar el terreno, no fueron competentes para utilizar las dos fórmulas que se les proporcionaba en el inciso anterior, y de esa manera calcular la cantidad de árboles de manzana y de pino en un patrón. Sino que más bien, se dejaron llevar por el dibujo que se les presentó donde aparentemente mientras más manzanas, mayor es la cantidad de pinos. Y lamentablemente algo que nos inquieta es que incluso dieron respuestas fuera del contexto matemático, siendo estas incoherentes. Por ejemplo: B) Si le riegan agua a los pinos y a los arboles de manzana van a crecer igual, pero en ocasiones crece más rápido una planta que un árbol.

De las respuestas de los alumnos observamos que les cuesta trabajo analizar que crece más rápido y justificar la respuesta, es decir no son capaces de encontrar la razón de crecimiento de diferentes magnitudes a partir de un diagrama argumentarlo.

2.6 REACTIVO 2: VELOCIDAD DE UN COCHE DE CARRERAS

La siguiente gráfica muestra como la velocidad de un auto de carreras varía a lo largo de un trayecto plano de 3 kilómetros durante su segunda vuelta.



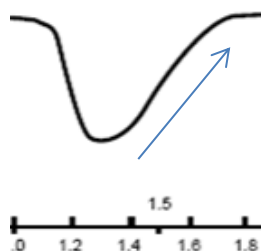
PREGUNTA 4:

¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el inicio de la recta más larga del trayecto?

- a) 0.5 km b) 1.5 km c) 2.3 km d) 2.6 km

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 4:

Para responder esta pregunta en primer lugar se tiene que observar y analizar detenidamente la gráfica, y así interpretar que la recta más larga del trayecto es aquella donde se encuentra la pendiente más prolongada a comparación con todas las demás y en las gráficas se encuentra en el siguiente tramo:



De esta manera llegamos a la conclusión de que la respuesta correcta es b) 1.5 km.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 421 lo hicieron de manera correcta es decir 52.82% de la población estudiantil acertó.

Debido a que ésta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que elegir la respuesta correcta, sin justificarla, al analizar los resultados de los 376 alumnos que respondieron erróneamente, encontramos que consideraron que la respuesta era la c) 2.3 km ó d) 2.7 km, los alumnos especularon en que el problema se resolvía si seleccionaban la distancia más lejana recorrida desde el inicio hasta aproximadamente el final de la gráfica. Para ellos eso era la recta más larga del trayecto, sin razonar en que ese trayecto completo tenía incluidas curvas.

PREGUNTA 5:

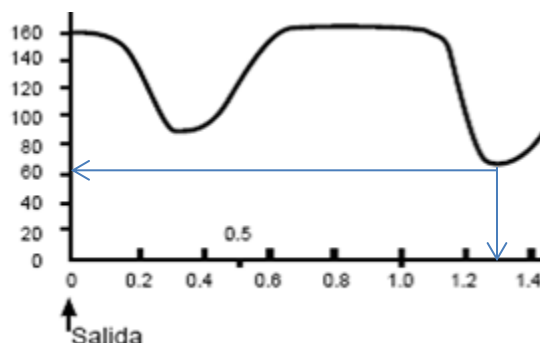
¿Dónde se registró la velocidad más baja durante la segunda vuelta?

- a) En la línea de salida.
- b) A los 0.8 km aproximadamente.
- c) A los 1.3 km aproximadamente.
- d) En la mitad del camino.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 5:

De manera similar a la pregunta anterior, observando detenidamente la gráfica obtenemos que la velocidad más baja durante la segunda vuelta es de 60 km/h.

Gráficamente esto se encuentra a los 1.3km aproximadamente, como se muestra a continuación:



RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 664 lo hicieron de manera correcta es decir 83.31% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 133 alumnos restantes, encontramos en que los alumnos consideraron que la respuesta era la a) En la línea de salida ó d) En la mitad del camino.

Los que contestaron la opción a) fue debido a que pensaron que el carro al iniciar su recorrido tenía una velocidad menor, los que seleccionaron la opción d) fue porque en ese tramo de la gráfica el carro lleva un trayecto recto quizá pensando en que ahí podía llevar una velocidad baja y constante, ya que no se enfrentaba a la curvas.

PREGUNTA 6:

¿Qué puedes decir sobre la velocidad del auto entre las marcas de los 2.6 km y 2.8 km?

- a) La velocidad del auto permanece constante.
- b) La velocidad del auto aumenta.
- c) La velocidad del auto disminuye.
- d) No se puede determinar la velocidad del auto desde la gráfica.

SOLUCIÓN A LA PREGUNTA 6:

Lo que se puede observar en la gráfica es que la función es creciente. Por lo tanto también la velocidad del coche es creciente, se ve un aumento ya que el auto aceleró. Por lo que la respuesta correcta es la b) La velocidad del auto aumenta.

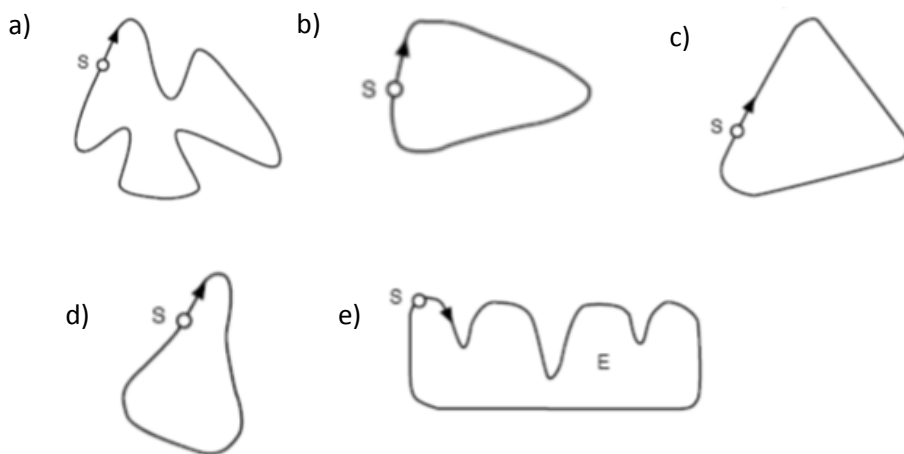
RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 586 lo hicieron de manera correcta es decir 73.53% de la población estudiantil acertó.

Los 211 alumnos restantes, no lograron aplicar sus conceptos de “función creciente” ya que respondieron que la velocidad del auto permanecía constante e incluso hubo quienes consideraron que la velocidad del auto disminuía, observamos que incluso estos alumnos no lograron trasladar a su vida real este problema, ni aplicar conceptos de su vida cotidiana para llegar a una interpretación correcta

PREGUNTA 7:

A continuación se muestran los dibujos de cinco trayectos: ¿En cuál de los trayectos viajó el auto del que se obtuvo la gráfica anterior?



SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 7:

Debemos analizar detenidamente que la salida está muy próxima a una curva, porque se ve una bajada pronunciada, por otro lado cada vez que el auto recorre una curva este tiene que desacelerar. Así la gráfica tiene tres desaceleraciones, lo que correspondería a tres curvas; por lo tanto la opción b) es la trayectoria correcta, ya que las desaceleraciones encajan bien con la gráfica.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 123 lo hicieron de manera correcta es decir 15.43% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 674 alumnos restantes, encontramos que la respuesta de la mayoría era la opción e) es decir consideraron que la trayectoria correcta era la que

visualmente se parecía a la gráfica dada, sin analizar ni razonar qué significaban las curvas del trayecto.



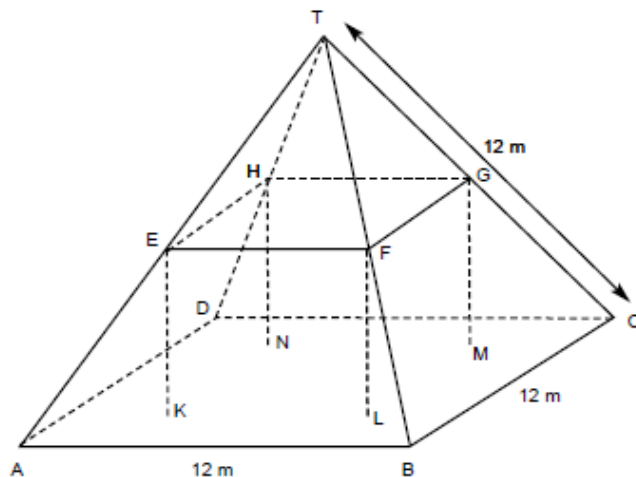
Los resultados analizados de las preguntas 4-7 nos muestran que cuando los alumnos ven representaciones graficas de distancia, tiempo y velocidad, estos presentan mayor dificultad para analizar y llegar a una interpretación de la información.

2.7 REACTIVO 3: GRANJA

Aquí ves una fotografía de una casa de campo con el tejado en forma de pirámide



Debajo hay un modelo matemático del tejado de la casa con las medidas correspondientes.



La planta del ático, ABCD en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) EFGHKL. E es el punto medio de AT, F es el punto medio de BT, G es el punto medio de CT y H es el punto medio de DT. Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.

PREGUNTA 8:

Calcula el área de la planta del ático ABCD.

El área de la planta del ático ABCD es igual a ____ m^2

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 8:

Como el piso del ático es un cuadrado, y la información nos da el dato de que este tiene 12 m por lado entonces basta con utilizar la fórmula para calcular el área de un cuadrado:

$$\text{Área} = L \times L$$

$$\text{Área} = 12 \times 12$$

$$\text{Área} = 144 \text{ m}^2$$

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta sólo 387 lo hicieron de manera correcta es decir 48.56 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 410 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

A) ...24... m^2 B) ...36... m^2 C) ...48... m^2

Observamos que algunos alumnos no se saben la fórmula del área de un cuadrado, ó la confunden con el concepto de perímetro, es decir al saber que cada lado del ático medía 12 m lo que hicieron fue sumar los cuatro lados obteniendo así 48. Por otro lado hubo alumnos que consideraron que como la figura era una pirámide, entonces se trataba de un triángulo por lo que de igual forma confundieran el perímetro con el área, realizaron la operación $12+12+12=36$.

Lo anterior nos deja ver que a los alumnos les resultó complicado utilizar el modelo matemático del tejado de la casa, quizá porque se trataba de una pirámide, pero sobre todo es evidente que no manejan de manera correcta definiciones básicas como el del área, ni las operaciones aritméticas.

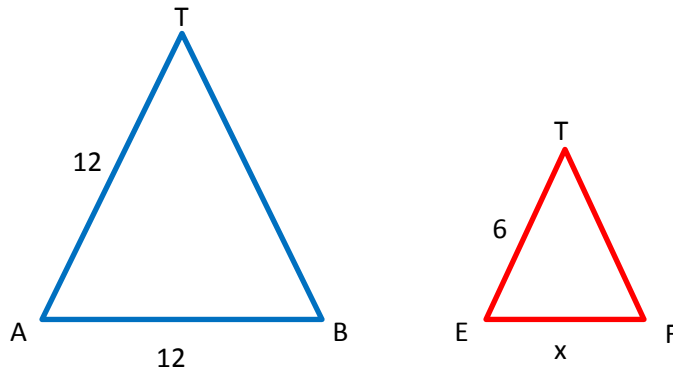
PREGUNTA 9:

Calcula la longitud EF, uno de los límites horizontales del bloque.

La longitud EF es igual a ____ m

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 9:

“E es el punto medio de AT, F es el punto medio de BT, G es el punto medio de CT y H es el punto medio de DT”. De la información anterior obtenemos los siguientes triángulos:



Tenemos entonces que el triángulo ATB y el triángulo ETF son semejantes ya que dos lados son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, por lo que podemos utilizar lo siguiente:

$$\frac{AT}{ET} = \frac{AB}{EF}$$

Sustituyendo los valores que el problema nos da tenemos lo siguiente:

$$\frac{12}{6} = \frac{12}{x}$$

Despejando a x tenemos lo siguiente:

$$12(x) = 12(6)$$

$$12x = 72$$

$$x = 6$$

Por lo tanto EF vale 6m.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 511 lo hicieron de manera correcta es decir 64.12 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 286 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:



Notamos que pocos alumnos comprenden realmente el concepto de punto medio, incluso no saben usar el criterio de semejanza, algunos respondieron que el segmento EF medía lo mismo que el AB, a pesar de que la información dejaba claro que eso no era posible. Otros alumnos creyeron que como tenían que encontrar el lado de un triángulo de lado 12, entonces dividieron el lado entre 3, obteniendo que el segmento $EF=4$.

Lo anterior nos muestra que los alumnos no logran resolver problemas que impliquen contextos familiares, en este problema en específico era necesario conocer el concepto de congruencia y semejanza de triángulos y realizar cálculos básicos.

2.8 REACTIVO 4: BASURA

Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información, sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

Tipos de Basura	Tiempo de Descomposición
Piel de Plátano	1,3 años
Piel de Naranja	1-3 años
Cajas de Cartón	0,5 años
Chicles	20-25 años
Periódicos	Unos pocos días
Vasos de Plástico	Más de 100 años

PREGUNTA 10:

Un estudiante está considerando presentar los resultados en una gráfica de barras. Da una razón por la cual la gráfica de barras no es adecuada para presentar estos datos.

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 10:

- El periódico sería invisible comparado con los vasos de plástico, es decir si intentamos hacer una gráfica de barras en la que tuviéramos que graficar el periodo de descomposición de más de cien años contra el periodo de descomposición de unos pocos días estas no tienen una proporcionalidad entre dos cantidades ya que no son medibles, así pues no se podría visualizar bien, ni interpretar, ya que el rango entre

ambos es muy grande, así que no sería fácil que cualquier persona en común podría interpretarlo y el objetivo de las gráficas sería que cualquiera se pudiera interpretar.

- La diferencia en la longitud de las barras en el diagrama de barras sería demasiado grande.
- La longitud de la barra para los vasos de plástico es indeterminada.
- No se puede hacer una barra para 1-3 años o una barra par 20-25 años.
- Es muy amplio el rango de unos días, a 100 años.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 353 lo hicieron de manera correcta es decir 44.29 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 444 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

- A) Porque algunos datos no se pueden representar graficamente.
- B) no es tan facil esta un poco complicado
- C) No se distinguirían bien los resultados y sería un poco confuso.
- D)
- 

Los alumnos tenían que dar una razón, comparando y evaluando la información que la tabla les daba. Los estudiantes que respondieron como en: A) Porque algunos datos no se pueden representar gráficamente, B) No es tan fácil es un poco complicado, C) No se distinguirían bien los resultados y sería un poco confuso, no son capaces de formular y comunicar con precisión sus argumentos, no expresan con detalle cuáles son los datos que consideran complicados, simplemente generalizan. Incluso aunque era incomprendible hubo quienes hicieron un tipo de gráfica con los datos, lo cual indica que este estudiante no comprendió la pregunta aunque trató de dar una respuesta.

Lo anterior nos muestra que los alumnos no comprendieron conceptos de la vida real como tiempos de descomposición, tipos de basura, además de que les resulto difícil ordenar datos, y analizar la amplitud entre ellos.

2.9 REACTIVO 5: TERREMOTO

Se emitió un documental por televisión acerca de los terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. En él se incluyó una discusión sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo afirmó: “Durante los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres”.

PREGUNTA 11:

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

- a) $(\frac{2}{3})(20) = 13.3$, de modo que, dentro de 13 ó 14 años a partir de esta fecha habrá un terremoto en la ciudad de Zed.
- b) $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, de modo que se puede estar seguro que habrá un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento dentro de los próximos 20 años.
- c) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento durante los próximos 20 años es más alta que la probabilidad de que no haya un terremoto.
- d) No se puede decir que va a pasar, porque nadie puede estar seguro de cuándo habrá un terremoto.

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 11:

Indaguemos lo que significa que: “Durante los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres”.

Esto quiere decir que, la probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed es de $\frac{2}{3} = .66$, por otro lado la probabilidad de que no ocurra es de $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = .33$. Por lo que al decir 2 de 3, se refiere a que durante un lapso de años, en este caso 20 años, es más alta la probabilidad de que suceda un terremoto. Por lo que la respuesta correcta es: La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento durante los próximos 20 años es más alta que la probabilidad de que no haya un terremoto.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 379 lo hicieron de manera correcta es decir 47.55% de la población estudiantil acertó.

Esta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que elegir la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 418 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue que consideraron que la respuesta era la b) $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, de modo que se puede estar seguro que habrá un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento dentro de los próximos 20 años ó d) No se puede decir qué va a pasar, porque nadie puede estar seguro de cuándo habrá un terremoto. En estos casos los alumnos no son capaces de aplicar sus conocimientos probabilísticos más básicos, ni usar su razonamiento numérico, ya que las respuestas seleccionadas no se fundamentan en lo que el geólogo afirma.

De lo anterior observamos que para los alumnos trabajar con los términos de Frecuencia, Probabilidad y predicción, es dificultoso, cuando se enfrentan a contextos que les resultan poco familiares, y no son capaces de establecer adecuadamente la interpretación de los datos.

En definitiva no logran llegar a la aplicación de las fórmulas de probabilidad de que ocurra o no un evento determinado.

2.10 REACTIVO 6: CAMPEONATO DE PING PONG

Tomás, Ricardo, Luis y David han formado un grupo de entrenamiento de un club de Ping-Pong. Cada jugador quiere jugar una vez contra cada uno de los otros jugadores. Han reservado dos mesas de ping-pong para estas partidas.

PREGUNTA 12:

Completa la siguiente plantilla de partidas escribiendo los nombres de los jugadores que jugarán en cada partida.

	Mesa 1	Mesa 2
1ª Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2ª Ronda		
3ª Ronda		

SOLUCIÓN DE LA PREGUNTA 12:

	Mesa 1	Mesa 2
1ª Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2ª Ronda	Tomás- Luis	Ricardo-David
3ª Ronda	Tomás- David	Ricardo-Luis

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 567 lo hicieron de manera correcta es decir 71.14% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 230 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

A)

	Mesa 1	Mesa 2
1a Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2a Ronda	Tomás- Luis	Luis - TOMÁS
3a Ronda	Tomás-David	Luis - Ricardo

B)

	Mesa 1	Mesa 2
1a Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2a Ronda	David - tomas	Ricardo - Luis
3a Ronda	ricardo - david	to mas - David

C)

	Mesa 1	Mesa 2
1a Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2a Ronda	Tomás-Luis	David - TOMÁS
3a Ronda	David - Ricardo	Luis - Ricardo

D)

	Mesa 1	Mesa 2
1a Ronda	Tomás - Ricardo	Luis - David
2a Ronda	Tomás - David	Ricardo - Luis
3a Ronda	Ricardo - Luis	Tomás - David

La clave para poder resolver adecuadamente este problema era comprender el enunciado “Cada jugador quiere jugar una vez contra cada uno de los otros jugadores”, aparte de que se debía deducir que un mismo jugador no podía estar al mismo tiempo en las dos mesas, y fue justamente eso lo que los alumnos no razonaron, ya que consideraron que en una mesa jugaran Tomas-Luis y al mismo tiempo en la segunda mesa jugaran Luis-Tomas, otros propusieron que en la segunda ronda jugaran David-Tomas y en la tercera Tomas- David lo que es una contradicción.

Así que escribir las cuatro partidas pendientes correctamente descritas y distribuidas en las rondas 2 y 3 les resulta complicado a los alumnos, debido a que no son capaces de resolver problemas que impliquen trabajar con suposiciones dadas, o información relevante en los enunciados del problema que es esencial para la resolución correcta.

2.11 REACTIVO 7: EL MEJOR COCHE

Una revista de automóviles emplea un sistema de calificación para evaluar los coches nuevos, dando el premio de “Auto del año” al coche con la mayor calificación total. Se están evaluando cinco coches nuevos y sus calificaciones se muestran en el recuadro.

Coche	Dispositivo de seguridad (S)	Consumo de combustible (F)	Apariencia exterior (E)	Accesorios interiores (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Las calificaciones se interpretan de la siguiente forma:

3 puntos = Excelente

2 puntos = Bueno

1 punto = Regular

PREGUNTA 13:

Para calcular la calificación total de un coche, la revista emplea la siguiente regla, que es la suma ponderada de los puntos individuales de calificación:

$$\text{Calificación total} = (3S) + F + E + T$$

Calcula la calificación total para el coche “Ca”. Escribe tu respuesta en el espacio siguiente.

Calificación total para “Ca”:_____

SOLUCIÓN 13:

En este problema simplemente tenemos que sustituir en la ecuación el valor indicado y así obtenemos:

La calificación total para el coche “Ca” es:

$$(3xS) + F + E + T = (3x3) + 1 + 2 + 3 = 15$$

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 398 lo hicieron de manera correcta es decir 49.94% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 399 alumnos restantes, encontramos que las siguientes respuestas fueron las más frecuentes:

- A) Calificación total para "Ca": $(3 \times 3) + F + E + T$
- B) Calificación total para "Ca": Excelente
- C) Calificación total para "Ca": 12
- D) Calificación total para "Ca": 9

Aunque este problema requería que los alumnos simplemente ejecutaran un procedimiento descrito con bastante claridad, la comprensión de este tipo de alumnos es muy baja, algunos ni siquiera utilizaron la fórmula descrita y simplemente a su juicio dieron la calificación total como “Excelente”, ó simplemente reescribieron la misma fórmula sin hacer sustituciones. Otros por su parte no supieron aplicar sus habilidades de cálculos básicos, en este caso específico, era necesario hacer una sustitución, una multiplicación y una suma, sin embargo, como se muestra, al realizar sus operaciones el resultado que les dio fue: 12 ó 9.

PREGUNTA 14:

El fabricante del coche “Ca” pensó que la regla para la calificación total era injusta. Escribe una regla para calcular la calificación total de modo que el coche “Ca” sea el ganador. Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribirla poniendo números positivos en los cuatro espacios de la ecuación de abajo.

$$\text{Calificación total} = (\quad)S + (\quad)F + (\quad)E + (\quad)T$$

SOLUCIÓN 14:

Así pues cualquier fórmula que haga ganador al coche “Ca” y que cumpla con las reglas dadas es aceptable y existe una infinidad de respuestas, basta con proponer un coeficiente mayor o igual que 3 en las variables S y T y dejar con coeficiente 1 a las variables F y E.

➤ $Ca = (3)S + (1)F + (1)E + (3)T$

➤ $Ca = (3)S + (1)F + (1)E + (1)T^2$

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 85 lo hicieron de manera correcta es decir 10.66% de la población estudiantil acertó. Al analizar los resultados de los 712 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

A) Calificación total =
 $3 \times S + 2 \times F + 3 \times E + 3 \times T$

C) Calificación total =
 $3 \times S + 9 \times F + 9 \times E + 18 \times T$

B) Calificación total =
 $11 \times S + 15 \times F + 5 \times E + 12 \times T$

D) Calificación total =
 $3 \times S + 3 \times F + 3 \times E + 3 \times T$

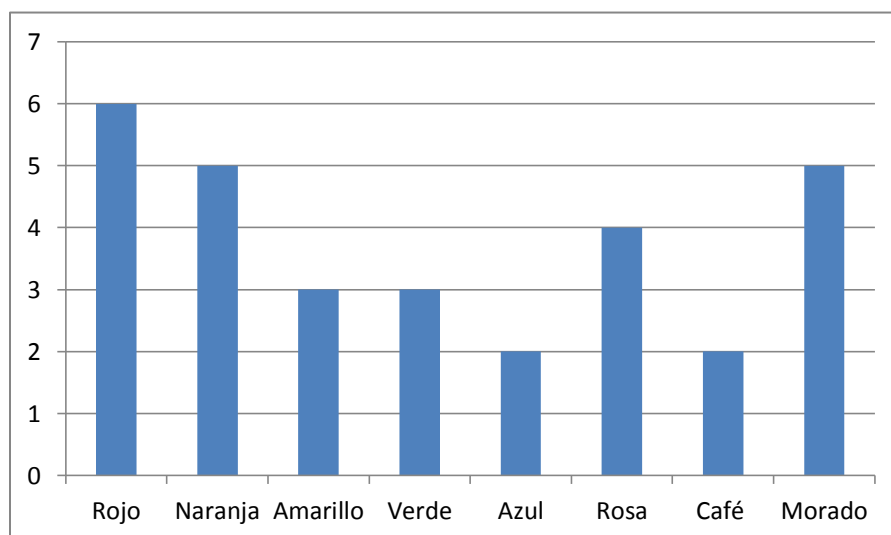
Los alumnos no lograron profundizar, ni comprender la relación matemática que se les planteó. No tuvieron la capacidad de generalizar y utilizar la información que se les daba. Es decir, la condición que tenían que lograr, es que en su nueva fórmula el carro “Ca” siempre fuera ganador, sin embargo algunas de las fórmulas que los alumnos crearon solo cumplían una condición, por ejemplo su fórmula cumplía que el carro “Ca” tuviera mayor puntuación que el “M2” pero no se dieron cuenta de que su fórmula hacía que la puntuación del carro “Ca” fuera igual a la de “Sp”. Y en algunas soluciones la fórmula nunca cumplió siquiera que el carro “Ca” fuera ganador. Por otro lado hubo alumnos que simplemente sustituyeron de manera absurda el nombre de los carros en la formula.

Los resultados de las preguntas 13 y 14 nos muestran que para los alumnos no resultan familiares las relaciones expresadas mediante una función de varias variables y menos cuando tienen que relacionarlas con valores que se expresan mediante tablas.

2.12 REACTIVO 8: CARAMELOS DE COLORES.

PREGUNTA 15:

La mamá de Roberto lo dejó tomar un caramelo de una bolsa. Roberto no puede ver los caramelos. El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en la gráfica siguiente.



¿Cuál es la probabilidad de que Roberto escoja un caramelo rojo?

- a) 10%
- b) 20%
- c) 25%
- d) 50%

SOLUCIÓN 15:

Observando la gráfica de barras tenemos que existen:

6 caramelos rojos, 5 caramelos naranjas, 3 caramelos amarillos, 3 caramelos verdes, 2 caramelos azules, 4 caramelos rosas, 2 caramelos cafés, 5 caramelos morados.

Así que tenemos un total de caramelos: $6+5+3+3+2+4+2+5 = 30$

Y para obtener la probabilidad de que Roberto escoja un caramelo rojo utilizando la fórmula clásica de probabilidad:

$$Probabilidad = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ Totales}$$

Así tenemos que:

Casos Favorables sería el total de caramelos rojos es decir:

Casos Favorables: 6

Y para los casos totales tendríamos el número de todos los caramelos que hay, es decir:

Casos Totales: 30

$$\text{Probabilidad [Escoja un caramelo rojo]} = \frac{6}{30}$$

$$\text{Probabilidad [Escoja un caramelo rojo]} = .2$$

Es decir, la probabilidad de que escoja un Caramelo rojo es de 20%. Por lo que la respuesta correcta es b).

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 283 lo hicieron de manera correcta es decir 29.86 % de la población estudiantil acertó.

Debido a que ésta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que rellenar la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 514 alumnos, encontramos que el error más frecuente fue que consideraron que la respuesta era la c) 50% ó d) 25%. En primer lugar podemos descartar de manera directa la respuesta c) ya que si existen 30 caramelos en total, deberíamos tener 15 caramelos rojos para que la probabilidad fuera del 50% pero esto es ilógico ya que la gráfica muestra que hay 6 caramelos rojos. Y lo mismo sucede para el caso de los que respondieron d) para que eso se cumpliera deberían tener aproximadamente 8 caramelos. Es claro entonces que estos alumnos no son capaces de localizar información que se les da en forma gráfica, para después, aplicarla a conceptos básicos de probabilidad. Es notoria la falta conocimiento de la probabilidad clásica en el aula.

2.13 REACTIVO 9: EXÁMENES DE CIENCIAS

PREGUNTA 16:

En la escuela de Malena, su maestro de ciencias les aplicó exámenes de 100 preguntas. Malena tuvo un promedio de 60 aciertos en sus primeros cuatro exámenes de Ciencias. En el quinto examen obtuvo 80 aciertos.

¿Cuál es el promedio de aciertos de Malena en Ciencias después de los cinco exámenes?

Promedio: ____

SOLUCIÓN 16:

El enunciado nos dice que Malena tuvo un promedio de 60 aciertos en sus primeros 4 exámenes así entonces utilizando la fórmula de promedio tendremos lo siguiente:

$$promedio = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Sustituyendo el valor conocido del promedio tenemos:

$$60 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

Despejando las incógnitas obtenemos:

$$60(4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$240 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Por otro lado el enunciado también nos dice que Malena obtuvo 80 aciertos en el quinto examen es decir:

$$x_5 = 80$$

Con todos estos datos, para obtener el promedio total de aciertos de Malena en Ciencias tenemos entonces lo siguiente:

$$promedio = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$promedio = \frac{240 + 80}{5}$$

$$promedio = \frac{320}{5}$$

$$promedio = 64$$

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 141 lo hicieron de manera correcta es decir 17.69% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 654 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

- A) Promedio: ... 4.8 ... B) Promedio: ... 140 ... aciertos ...
- C) Promedio: ... 6.4 ... D) Promedio: ... 7.0 ...

Para los alumnos los 60 aciertos representaban un promedio de 6. Entonces algunos dividieron el promedio de los primeros 4 exámenes es decir $6/4=1.5$, este valor se lo sumaron a los 80 aciertos, pues para ellos representaba un promedio de 8, es decir $8+1.5=9.5$ y finalmente dividieron este valor entre dos, dándoles así un promedio de 4.8. Por otro lado hubo alumnos que simplemente sumaron los dos diferentes aciertos es decir $60+80=140$ y para ellos eso era el promedio total de los cinco exámenes que por supuesto es erróneo. Otros sumaron ambas cantidades para dividirlos por dos, obteniendo: $6+9=15/2=7$. Es decir el promedio era de 7. Y finalmente el error más cometido por los alumnos fue el de interpretar el 64 como 6.4

Este problema requería de los alumnos conocimiento básico para calcular el promedio de un conjunto de números y vemos que no lograron hacerlo, además, percibimos que los alumnos no recapacitan sobre sus operaciones, ya que solo buscan una manera de encontrar un resultado aunque este no tenga sentido con la pregunta o problema.

2.14 REACTIVO 10: OPCIONES

PREGUNTA 17:

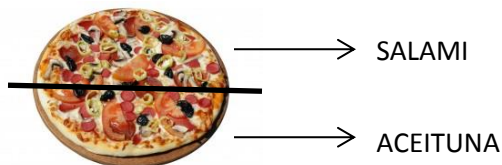
En una pizzería, se puede ordenar una pizza básica con dos ingredientes: queso y tomate. Puedes también crear tu propia pizza con ingredientes extra. Puedes elegir entre cuatro distintos ingredientes extra: aceitunas, jamón, champiñones y salami. Rubén quiere ordenar una pizza con dos distintos ingredientes extra.

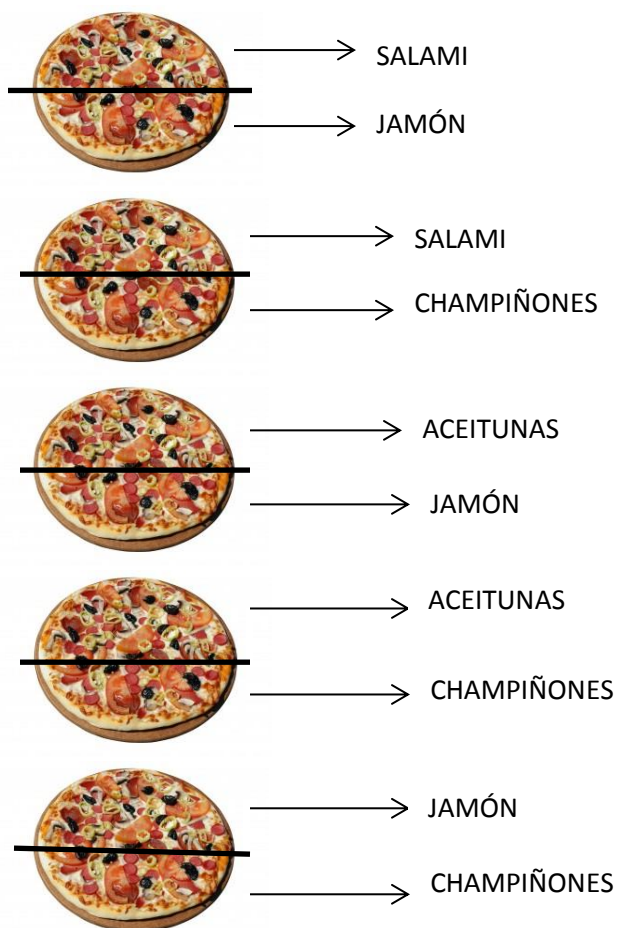
¿De entre cuántas combinaciones distintas puede elegir Rubén?

Respuesta: ____ combinaciones.

SOLUCIÓN 17:

Podemos contar las posibles combinaciones. Obteniendo así:





Respuesta: Seis posibles combinaciones.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 279 lo hicieron de manera correcta es decir 35.01 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 518 alumnos restantes, encontramos las siguientes respuestas:

A)8..... combinaciones B)12..... combinaciones

En este caso, la mayoría de los alumnos tomaron los dos ingredientes de la pizza básica: queso y tomate, y los multiplicaron por cuatro distintos ingredientes extra: aceitunas, jamón, champiñones y salami es decir obtuvieron 8 posibles combinaciones. Por otro lado algunos alumnos sumaron todos los 6 ingredientes es decir: queso, tomate, aceitunas, jamón, champiñones y salami, y lo multiplicaron por los dos distintos ingredientes obteniendo así que Rubén tendría 12 combinaciones distintas para elegir.

Podemos observar de los resultados anteriores que los alumnos no pueden resolver problemas de combinatoria, aun cuando este tema se ve desde la primaria (principio multiplicativo).

2.15 REACTIVO 11: APOYO PARA EL PRESIDENTE

PREGUNTA 18:

En Zedlandia, se llevaron a cabo encuestas de opinión para conocer el nivel de popularidad del Presidente con motivo de la próxima elección. Cuatro periódicos hicieron, cada uno, su propia encuesta a nivel nacional. Los resultados de las cuatro encuestas se muestran abajo:

Periódico 1: 36.5% (encuesta realizada el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos con derecho a voto, seleccionados al azar).

Periódico 2: 41.0% (encuesta realizada el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos con derecho a voto, seleccionados al azar).

Periódico 3: 39.0 % (encuesta realizada el 20 de enero, con una muestra de 1000 ciudadanos con derecho a voto, seleccionados al azar).

Periódico 4: 44.5% (encuesta realizada el 20 de enero, con 1000 lectores que llamaron por teléfono).

¿Qué resultado tiene mayor probabilidad de ser el mejor para predecir el nivel de popularidad del Presidente si la elección se lleva a cabo el 25 de enero?

Proporciona dos razones que apoyen tu respuesta.

SOLUCIÓN 18:

El resultado del periódico 3 es el mejor para predecir el nivel de popularidad por las siguientes razones:

- Porque han seleccionado más ciudadanos al azar entre los que tienen derecho a votar.
- Porque han pedido la opinión a 1000 personas seleccionadas al azar, y la fecha es más próxima a la fecha de elección, por lo que los votantes tienen menor tiempo de cambiar de opinión.
- Porque fueron seleccionados al azar y tenían derecho a voto.
- Porque mil personas fueron seleccionadas al azar.

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 163 lo hicieron de manera correcta es decir 20.45 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 634 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue:

- A) el periodico 4 por que ellos mismos llamaron
- B) El que tiene el 44.5% por que creo que el lleva mas ventaja de ganar
- C) Periodico 1 por que el 6 ya tenia 500 Ciudadanos para el 25 va a tener 2000
- D) el del primer periodico porque puede volver a levantar encuestas y todavia tiene tiempo.

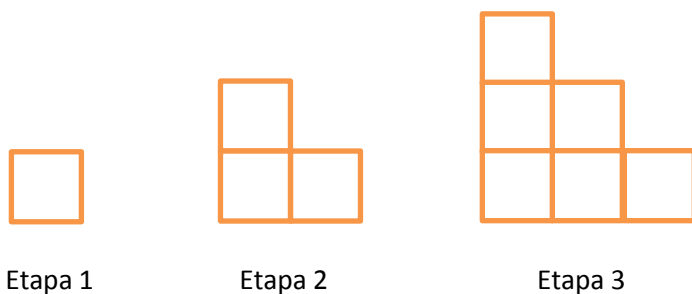
En este problema las respuestas fueron muy variables, sin embargo se observa que los estudiantes que responden como en: A) El periódico cuatro porque ellos mismos llamaron, B) El que tiene el 44.5% porque creo que el lleva más ventaja de ganar, C) Periódico 1 por q el 6 ya tenía 500 ciudadanos para el 25 va a tener 2000, D) El del primer periódico por que puede volver a levantar encuestas y toda vía tiene tiempo, no fueron aptos para usar habilidades de razonamiento sobre un sondeo en una variedad de contextos.

Los sondeos de opinión son un método de investigación o una técnica de recolección de datos y para los alumnos existió una cierta confusión acerca de cuál era la unidad de análisis, los resultados erróneos de los alumnos a este reactivo nos muestra que al revolver a un problema que trate sobre encuesta por muestreo, no consiguen razonar y comparar los datos específicos de cada muestra.

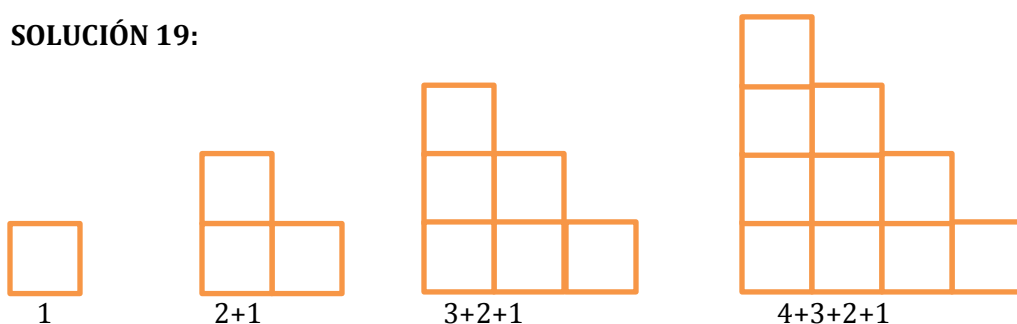
2.16 REACTIVO 12: PATRÓN ESCALONADO

PREGUNTA 19:

Roberto construye un patrón escalonado utilizando cuadros. Estas son las etapas que sigue:

SOLUCIÓN 19:

Como puedes ver, él usa un cuadro en la Etapa 1, tres cuadros en la Etapa 2 y seis en la Etapa 3. ¿Cuántos cuadros deberá usar en la cuarta etapa? Respuesta: ____cuadrados.

SOLUCIÓN 19:

En la cuarta etapa tenemos entonces 4+3+2+1 cuadros es decir 10.

Otra manera de resolverlo sería la siguiente:

$$\text{Suma de números consecutivos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Suma de cuatro números consecutivos} = \frac{4(4+1)}{2}$$

$$\text{Suma de cuatro números consecutivos} = \frac{4(5)}{2}$$

$$\text{Suma de numeros cuatro consecutivos} = \frac{20}{2}$$

$$\text{Suma de numeros cuatro consecutivos} = 10$$

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 492 lo hicieron de manera correcta es decir 61.73 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 305 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue:

A)9.....cuadros B)8.....cuadros

Los alumnos no consiguieron utilizar el razonamiento espacial, incluso no fueron capaces de utilizar sus procesos de cálculo secuencial, la manera de resolver este problema era muy sencilla, pero los resultados anteriores muestran que los alumnos no lograron utilizar la ayuda visual para obtener una solución general.

Podemos comentar que el pensamiento matemático en este problema estaba relacionado con la pregunta ¿Cuántos?, y para responder, los alumnos debían utilizar la sucesión que se les mostraba en el gráfico, pero no lo pudieron hacer, eso nos deja ver que a los alumnos se les hace complejo seguir una regla o algoritmo.

2.17 REACTIVO 13: PASOS.



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos. Posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.

PREGUNTA 20:

Si aplicamos la fórmula a Gabriel que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Gabriel? Anota el procedimiento.

SOLUCIÓN 20:

Gabriel da 70 pasos por minuto entonces tenemos que $n=70$ sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{n}{p} = 140$$

$$\frac{70}{p} = 140$$

$$\frac{70}{140} = p$$

$$\frac{70}{140} = 0.5$$

Así pues la longitud del paso de Gabriel es de .5 metros o 50cm.

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 232 lo hicieron de manera correcta es decir 29.11 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 565 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue como en los siguientes:

A) $n/p = 140$
 $70/p = 140$
 $p = 140 \times 70$
 $p = 9400 \text{ m}$

B) $n=70$ $n/p = 140$
 $p=?$
 $70/p = 140$
 $p = 140 \div 70$ $p = 2 \text{ metros.}$

C) n/p $n=70$
 $70/p = 140$
 $p = 140 \cdot 70$
 $p = 7800$

D) $n/p = 140$ $70/9800 = 140$
 $70/x = 140$ $\frac{140}{\times 70}$
 9800

La mayoría de los alumnos logró plantear de manera adecuada el problema, sustituyendo en la fórmula de manera correcta los datos, sin embargo como nos muestran las respuestas anteriores, no tuvieron la capacidad de resolver esta ecuación de primer grado. Es

decir no lograron despejar a la variable p de la manera adecuada, pues no dominan las relaciones básicas y sus equivalentes.

Lo anterior nos muestra que el cociente n/p desconcierta a los alumnos, pero también observamos que el hecho de que la incógnita sea el dividendo $70/p = 140$, provoca que el alumno crea que existe mayor dificultad para encontrar el valor de p , esto nos indica que los conocimientos con los que cuentan los alumnos en relación con este contenido matemático no son domados, incluso cabría preguntarnos si los alumnos son capaces de comprender una de las relaciones más importantes y básicas como la de $d/v = t$.

PREGUNTA 21:

Bernardo sabe que sus pasos son de 0.80 metros. Aplicando la fórmula, calcula la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Anota el procedimiento.

SOLUCIÓN 21:

Bernardo sabe que sus pasos son de 0.80 metros así pues tenemos que $p = .80$ m

Sustituyendo

$$\frac{n}{p} = 140$$

$$\frac{n}{.80} = 140$$

$$n = 140(.80)$$

$$n = 112$$

Esto nos muestra que Bernardo da 112 pasos por minuto, pero la longitud de cada paso es de .80 metros.

Así entonces para ver la distancia recorrida por Bernardo tenemos:

$$d = (112)(.80) = 89.6$$

Para calcular la velocidad tenemos que:

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v = \frac{89.6m}{min}$$

Por último tenemos que convertir el resultado anterior a km/h:

En primer lugar convertimos los minutos a horas, esto usando una simple regla de tres. Se sabe que una hora tiene 60 minutos, veamos cuantas horas representa un minuto así:

$$1 \text{ hora} \longrightarrow 60 \text{ minutos}$$

$$x \longrightarrow 1 \text{ minuto}$$

Tenemos entonces que:

$$x = \frac{1}{60}$$

$$x = .0166 \text{ horas}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad minutos por hora:

$$v = \frac{89.6m}{min} = \frac{89.6m}{.0166h}$$

Realizando la división obtenemos:

$$v = \frac{5397.59m}{h}$$

En segundo lugar convertimos los metros a kilómetros, esto usando nuevamente la regla de tres. Se sabe que un kilómetro es igual a 1000 metros, veamos cuantos kilómetros representa 5397.59 metros:

$$1000 \text{ metros} \longrightarrow 1 \text{ kilómetro}$$

$$5397.59 \text{ metros} \longrightarrow y$$

Tenemos entonces que:

$$y = \frac{5397.59}{1000}$$

$$y = 5.3975 \text{ kilómetros}$$

Sustituyendo en la ecuación de kilómetros por metros:

$$v = \frac{5.3975 \text{ km}}{h}$$

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 61 lo hicieron de manera correcta es decir 7.65% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 736 alumnos restantes, encontramos que los errores más frecuentes fueron:

A)

$$\begin{aligned} 140 \times 0.80 &= 112 \\ 0.80 \times 112 &= 89.6 \end{aligned}$$

B)

$$\begin{aligned} n/p &= 140 \\ n/.80 &= 1.65 \text{ m} \end{aligned}$$

C)

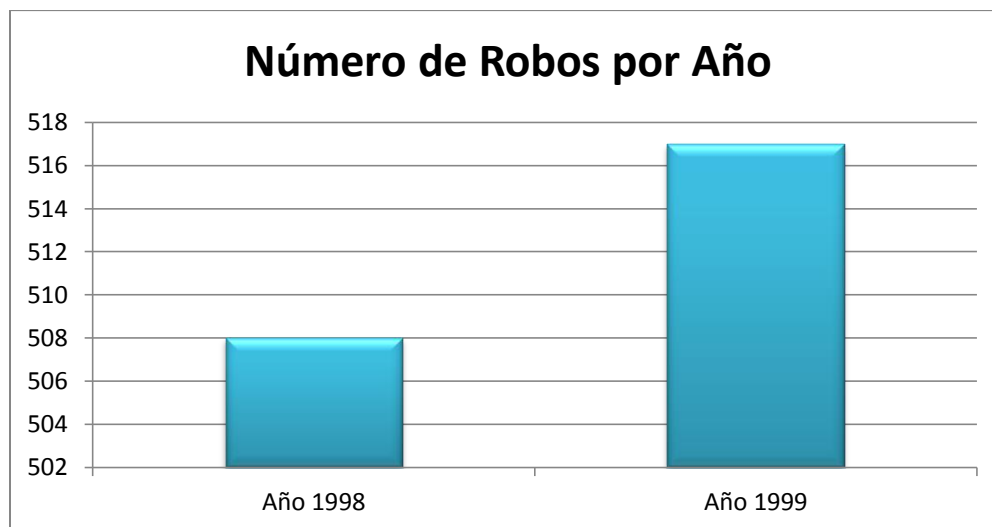
Pues el tanto de pasos
que dio en un minuto
se multiplica por los
Kilometros.

En este problema, los alumnos que responde como: A) $140 \times 0.80 = 112$, $0.80 \times 112 = 89.6$, B) $n/p = 140$, $n/.80 = 1.65 \text{ m}$, ó C) Pues el tanto de pasos que dio en un minuto se multiplica por los kilómetros, no lograron conceptualizar la información, ya que no lograron razonar en un nivel avanzado de matemáticas. Los alumnos tenían que trabajar con conversiones numéricas, este problema requería aplicar ciertos conocimientos previos de la relación de metros y Kilómetros. Pero como se muestra en los resultados, simplemente no lograron elaborar las operaciones correctas.

2.18 REACTIVO 14: ROBOS

Un reportero en la TV, mostró la siguiente gráfica y dijo:

“La gráfica muestra que hay un descomunal incremento en el número de robos de 1998 a 1999”



PREGUNTA 22:

¿Consideras que la afirmación del reportero es una interpretación razonable de la gráfica? Da una explicación que apoye tu respuesta.

SOLUCIÓN 22:

Necesitamos en primer lugar, entender detalladamente los datos que nos proporciona la gráfica, en ella se nos muestra que en el año de 1998 hubo 508 robos y en 1999 hubo aproximadamente 517 robos. Ahora calculemos cual fue realmente el aumento que existió de un año a otro.

Analicemos que el porcentaje de aumento para que en el año 1999 fueran 517.

Si tomamos que en 1999 hubo 517 robos tenemos:

$$517 \longrightarrow 100\%$$

$$508 \longrightarrow x$$

Realizando la regla de tres simple:

$$508(100\%) = 517x$$

Despejando el valor de x:

$$\frac{508(100\%)}{517} = x$$

$$98.25\% = x$$

Así el aumento que entonces se experimentó de un año al otro fue de:

$$Aumento = 100\% - 98.25\% = 1.75\%$$

Es decir un aumento del 1.75% por lo que la afirmación “La gráfica muestra que hay un descomunal incremento en el número de robos de 1998 a 1999” no es razonable.

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 217 lo hicieron de manera correcta es decir 27.23% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 508 alumnos restantes, encontramos que los errores más frecuente fueron:

- A) Si por que aumenta en un año mas que el numero de robos en 1998-1999
- B) Si podria ser porque cada año va aumentando pero aumento mucho en un año
- C) Que ocurren mas robos por falta de apollo policiaco.
- D) Si porque el reporte ro investiga todo lo que el pueda

Muchos alumnos se dejaron llevar solo por el tamaño de las gráficas sin ni siquiera analizar detenidamente cual había sido realmente el aumento de robos, respondiendo así que la afirmación era cierta. Por otro lado hubo alumnos que respondieron fuera de contexto, y sin analizar la gráfica que se les daba, por ejemplo contestaron “si es cierto porque actualmente existe muchos robos por falta de dinero”, etc. Esto nos hace llegar a la conclusión de que los alumnos no logran distinguir el significado de un tipo específico de afirmación relacionándolo con datos gráficos.

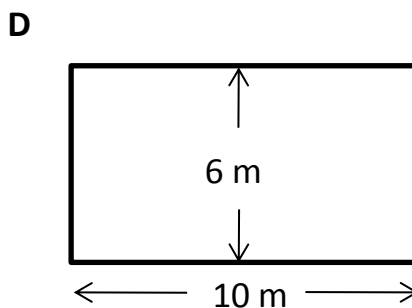
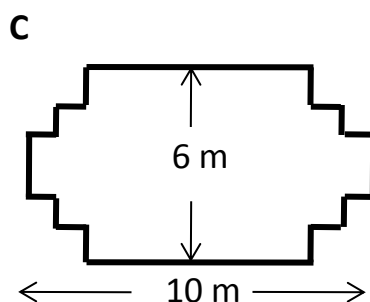
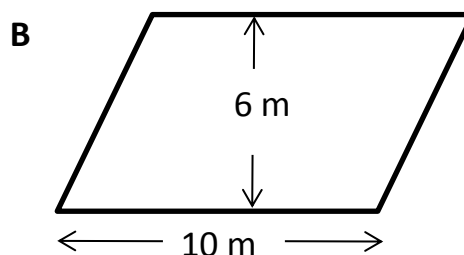
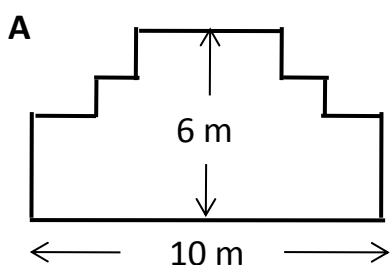
Es importante mencionar que el hecho de que el grafico no empiece en cero produce confusión entre los alumnos, así que carecen de habilidades de visualización espacial e

interpretación cuando se trata de algo que no utilizan comúnmente, y lo que es peor, dan argumentos que no tiene nada que ver con lo que les están preguntando el problema.

2.19 REACTIVO 15: CARPINTERO

PREGUNTA 23:

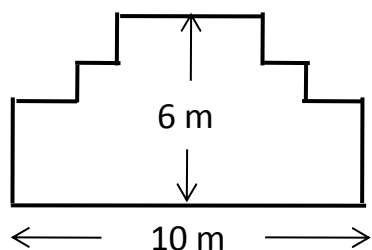
Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín.



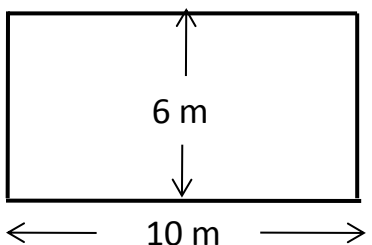
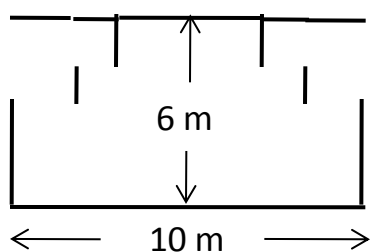
Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.

Diseño del Jardín	Usando este Diseño, ¿Se puede realizar con 32 metros de cerca?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

SOLUCIÓN 23: Diseño A



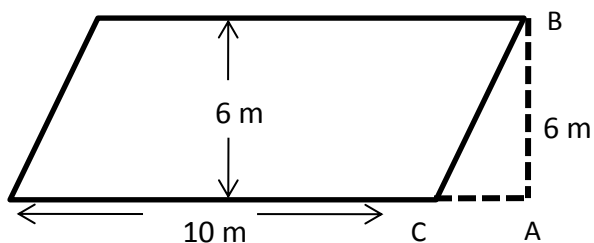
La figura la podemos separar usando solo traslaciones paralelas de algunos segmentos:



En efecto como hay lados paralelos a los lados de la figura, al moverlos y reubicarlos formamos un rectángulo que tiene por medidas 10 m de largo y 6 m de ancho, que nos dan como perímetro de la figura los 32 m que tiene el carpintero para cercar.

Por tanto este diseño, sí se puede cercar con los 32 m de madera que se tienen.

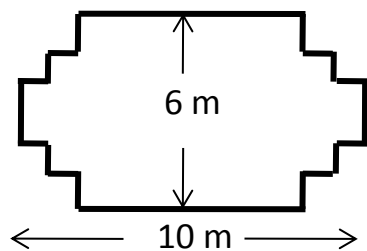
Diseño B



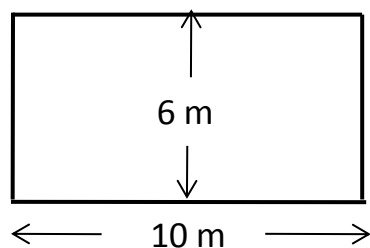
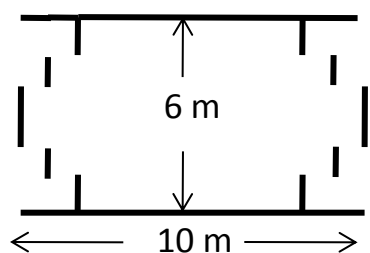
En figura formada por los puntos A, B, C, que es un triángulo rectángulo observamos que AB, equivale a la altura de 6 m, y que la distancia $AC > AB$, por tanto la distancia AB que corresponde al lado menor del paralelogramo mide más de 6 m, entonces el perímetro de esta figura será mayor de 32 m y en este caso no alcanzaría la cerca para cubrir éste perímetro.

Diseño C

Aplicando la estrategia de la primera figura.



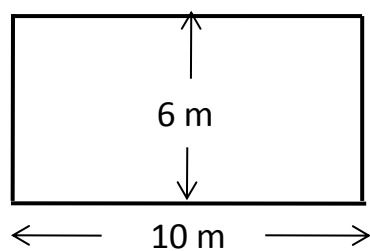
Usando traslaciones paralelas de algunos segmentos:



Observamos que con cada lado que hemos reubicado formamos un rectángulo de 10 por 6 cm y por tanto su perímetro es de 32 cm, de donde podemos afirmar que este diseño sí se puede cercar con el material que tiene el carpintero.

Diseño D

Y de este último diseño, obtenemos su perímetro y podemos afirmar que también se puede cercar con los 32 m de cerca que tiene el carpintero, porque su perímetro es de 32 m.



Finalmente la solución del problema es:

Diseño del Jardín	Usando este Diseño, ¿Se puede realizar con 32 metros de cerca?
Diseño A	<u>Sí</u> / No
Diseño B	Sí / <u>No</u>
Diseño C	<u>Sí</u> / No
Diseño D	<u>Sí</u> / No

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 207 lo hicieron de manera correcta es decir 25.97 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 590 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue:

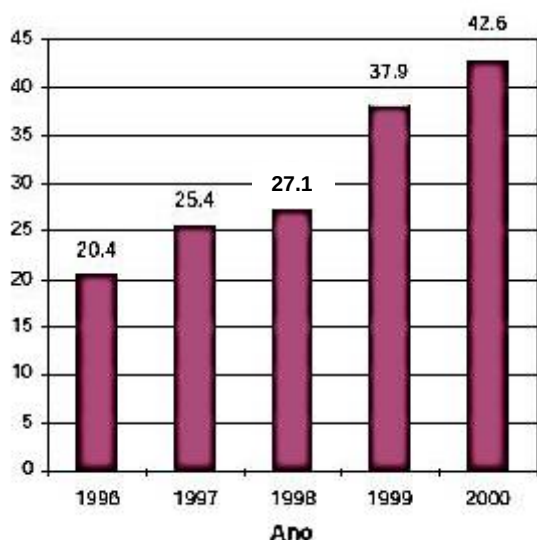
A)	<table> <tr> <th>Diseño del Jardín</th><th>¿Se puede realizar ?</th></tr> <tr> <td>A</td><td>Sí / <u>No</u></td></tr> <tr> <td>B</td><td><u>Sí</u> / No</td></tr> <tr> <td>C</td><td>Sí / <u>No</u></td></tr> <tr> <td>D</td><td><u>Sí</u> / No</td></tr> </table>	Diseño del Jardín	¿Se puede realizar ?	A	Sí / <u>No</u>	B	<u>Sí</u> / No	C	Sí / <u>No</u>	D	<u>Sí</u> / No
Diseño del Jardín	¿Se puede realizar ?										
A	Sí / <u>No</u>										
B	<u>Sí</u> / No										
C	Sí / <u>No</u>										
D	<u>Sí</u> / No										
B)	<table> <tr> <th>Diseño del Jardín</th><th>¿Se puede realizar ?</th></tr> <tr> <td>A</td><td><u>Sí</u> / No</td></tr> <tr> <td>B</td><td>Sí / <u>No</u></td></tr> <tr> <td>C</td><td>Sí / <u>No</u></td></tr> <tr> <td>D</td><td><u>Sí</u> / No</td></tr> </table>	Diseño del Jardín	¿Se puede realizar ?	A	<u>Sí</u> / No	B	Sí / <u>No</u>	C	Sí / <u>No</u>	D	<u>Sí</u> / No
Diseño del Jardín	¿Se puede realizar ?										
A	<u>Sí</u> / No										
B	Sí / <u>No</u>										
C	Sí / <u>No</u>										
D	<u>Sí</u> / No										

De manera errónea los alumnos consideraron que el cuadrado de la figura D y el paralelogramo de la figura B, eran los únicos terrenos en los que el carpintero podía realizar una cerca con 32 metros. Para responder este problema era necesario que los alumnos analizaran detenidamente las figuras geométricas, y aplicaran el concepto de área, sin embargo observamos que cuando los alumnos vieron las figuras geométricas A y C se enfrentaron a un obstáculo porque tal vez no habían visto ni sacado el área de ese tipo de figuras geométricas antes. Estos alumnos por lo tanto no logran tener una estrategia mediante el uso de habilidades de pensamiento amplias y bien desarrolladas respecto de la Geometría.

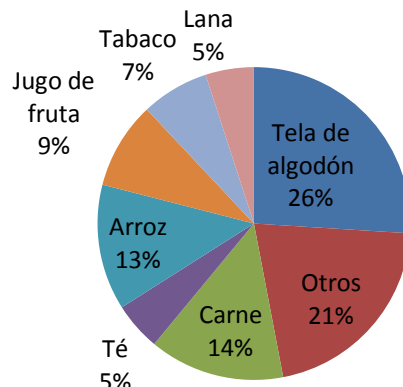
2.20 REACTIVO 16: EXPORTACIONES

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el Zed como moneda.

Total de exportaciones anuales de Zedlandia en millones de Zeds, 1996-2000



Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



¿Cuál es el valor total (en millones de Zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta: _____

SOLUCIÓN 25:

La gráfica de barras nos muestra que en 1998 se exportó un total de 27.1 millones de Zeds.

RESULTADOS OBTENIDOS.

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 380 lo hicieron de manera correcta es decir 47.68 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 417 alumnos restantes, encontramos que los errores más frecuentes fueron:

- A) ...37.1 millones...
- B) ...255 millones...
- C) ...7.34.41 millones...

Podemos observar que nuestra población estudiantil no sabe interpretar los diagramas más básicos, en este caso específico el de barras. Los alumnos tenían que referirse al año de 1998 e interpretar en la gráfica el total de las exportaciones, pero no lo hicieron así, algunos respondieron basados en el año 1997 y otros el de 1999, observamos nuevamente que los alumnos no logran localizar la información presentada en forma gráfica, para llegar a una interpretación correcta.

PREGUNTA 25:

¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

- e) 1.8 millones de zeds.
- f) 2.3 millones de zeds.
- g) 2.4 millones de zeds.
- h) 3.8 millones de zeds.

SOLUCIÓN 25:

¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

La gráfica de pastel nos muestra que en el 2000 se exportó un 9% de jugo de fruta. Pero la gráfica de barras nos dice que el total de exportaciones en el 2000 fue de 42.6 millones de Zeds. De la información anterior obtenemos lo siguiente:

42.6 —→ 100%

x —→ 9%

$$x = \frac{(42.6)(9)}{100}$$

$$x = \frac{383.4}{100}$$

$$x = 3.8$$

Entonces el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000 fue de 3.8 millones de Zeds es decir la respuesta correcta es d) 3.8 millones de zeds.

RESULTADOS OBTENIDOS.

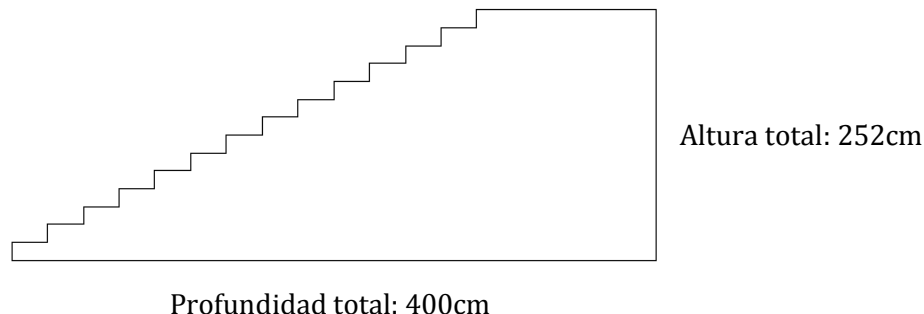
De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta 216 lo hicieron de manera correcta es decir 27.10 % de la población estudiantil acertó.

Esta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que rellenar la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 518 alumnos restantes, encontramos que las respuestas erróneas más frecuentes: b) 2.3 millones de zeds ó c) 2.4 millones de zeds. Así que los alumnos no son capaces de utilizar sus habilidades básicas de estadística para interpretar y usar la información para obtener un nuevo dato numérico.

2.21 REACTIVO 17: LA ESCALERA

PREGUNTA 26:

En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tienen una altura total de 252cm:



¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones?

Altura: _____ cm.

SOLUCIÓN 26:

La altura total es de 252cm, pero está distribuida entre 14 escalones por lo tanto tenemos que:

$$\text{Altura de un escalon} = \frac{252}{14}$$

$$\text{Altura de un escalon} = 18 \text{ cm.}$$

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 391 lo hicieron de manera correcta es decir 49.06 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 406 alumnos restantes, obtuvimos las siguientes respuestas:

- A) ...55... cm B) ...30... cm
- C) ...0.63... cm D) ...560... cm

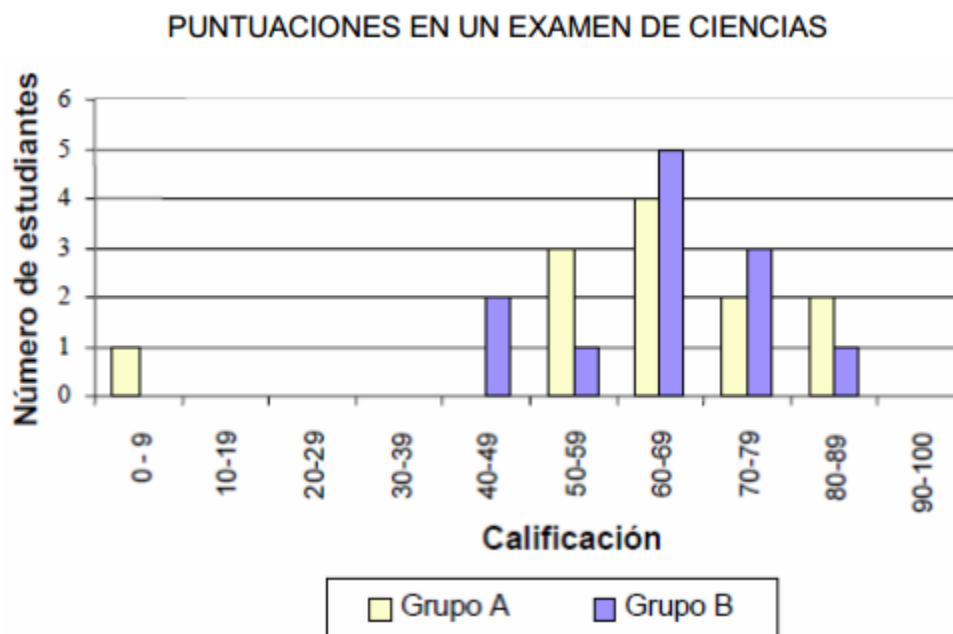
Los alumnos no lograron trabajar de manera efectiva con este modelo simple, no lograron establecer de manera correcta la relación entre los datos que este problema les daba. Por lo que realizaron cálculos como $254/400 = .63$ que difícilmente los llevarían a la solución correcta, y a pesar de que este problema involucraba un contexto familiar para ellos, no lograron resolver este problema simple.

2.22 REACTIVO 18: CALIFICACIONES

PREGUNTA 27:

En el diagrama de abajo se muestran los resultados de un examen de ciencias para dos grupos, el Grupo A y el grupo B.

La calificación promedio para el Grupo A es 62.0 y el promedio para el Grupo B es 64.5. Los estudiantes pasan la prueba cuando su calificación es de 50 o más.



Viendo el diagrama, la maestra afirmó que el Grupo B le fuera mejor que al Grupo A en esta prueba.

Los estudiantes del Grupo A no estuvieron de acuerdo con su maestra y tratan de convencerla de que no necesariamente le fue mejor al Grupo B.

Empleando la gráfica, da un argumento matemático que podría emplear los estudiantes del grupo A.

SOLUCIÓN 27:

Los argumentos válidos se pueden relacionar con el número de estudiantes que aprobó, o que los reprobados del grupo A son menos pero tienen muy baja calificación ó que es mayor el número de estudiantes con puntajes en el nivel más alto.

Por ejemplo:

- Aquí dice que la maestra tomó el mejor promedio que sacó el grupo que es 64.5, pero nada más fue el promedio, y si vemos en la tabla, en el grupo A hubo 11 aprobados pero en el grupo B hubo solo 10 aprobados.
- Otra razón es que en el grupo A hubo solo 1 y mientras que en el grupo B hubo 2.
- Si comparamos el promedio de aprobados y reprobados. Se puede decir que el en A hubo mayor número de aprobados.

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta sólo 109 lo hicieron de manera correcta es decir 13.68% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 688 alumnos restantes, se obtuvo lo siguiente:

- A) No porque al sumar al lado las calificaciones los dos grupos están iguales.
- B) No es congruente porque no cambia mucho la diferencia.
- C) El grupo A tuvo un mayor porcentaje ya que en la gráfica muestra lo dicho.
- D) Sumar todos los calificaciones para así poder sacar un porcentaje claro.

Aunque en esta pregunta no se involucran ecuaciones, ni polinomios, los alumnos no son capaces de responder correctamente. La respuesta a esta pregunta requería que los alumnos leyeran y analizaran los datos de un diagrama y combinaran esos datos para llegar a una respuesta adecuada. De manera específica este reactivo relaciona conceptos de gráficas, promedio, distribuciones, y frecuencias. Los alumnos que responden como se muestra en A), B), C), D), no logran establecer argumentos congruentes basados en las gráficas, y por ellos les cuesta mucho trabajo dar argumentos matemáticos, además los alumnos tiene problemas para interpretar información de datos estadísticos y asociar diferentes fuentes de información en una misma.

2.23 REACTIVO 19: CUBOS CON NÚMEROS

PREGUNTA 28:

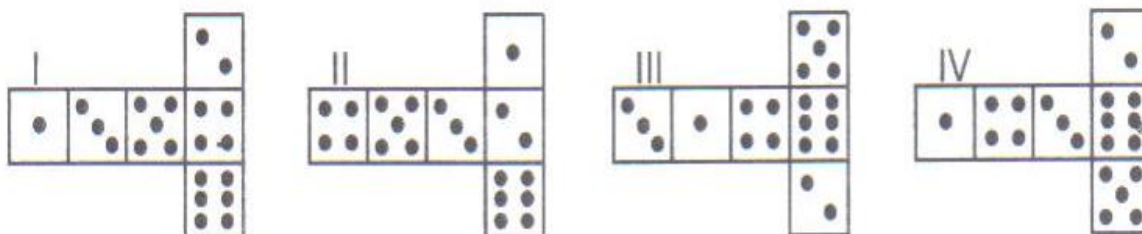
Del lado derecho encontrarás un dibujo de dos dados. Los dados son cubos especiales con números para los cuales se aplica la siguiente regla:

El número total de puntos en dos caras opuestas siempre es siete.

Tú puedes construir un sencillo cubo con números cortando, doblando y pegando un pedazo de cartón. En el diagrama de abajo puedes ver cuatro recortes que pueden usarse para hacer cubos, con puntos en las caras



¿Cuál o cuáles de las siguientes formas puede (n) doblarse para formar un cubo que cumpla con la regla de que la suma de las caras opuestas sea 7?

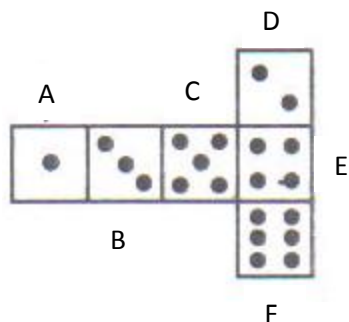


Para cada forma, pon un círculo alrededor de “Sí” o de “No” en el cuadro que aparece a continuación.

Forma	¿Cumple con la regla de la suma?
I	Sí / No
II	Sí / No
III	Sí / No
IV	Sí / No

SOLUCIÓN 28:

Figura I



Cuando armemos este cubo, veamos cual es la relación entre las caras, La cara opuesta de A es C, la cara opuesta de B es E y finalmente la cara opuesta de D es F.

Veamos si cumplen la propiedad:

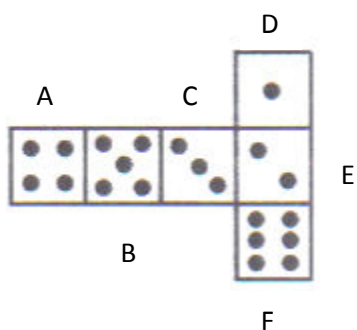
$$A+C= 1+5= 6$$

$$B+E= 3+4= 7$$

$$D+F= 2+6= 8$$

Este cubo no cumple con la propiedad pedida, por que la suma de sus caras opuestas debe ser 7.

Figura II



Veamos si cumplen la propiedad:

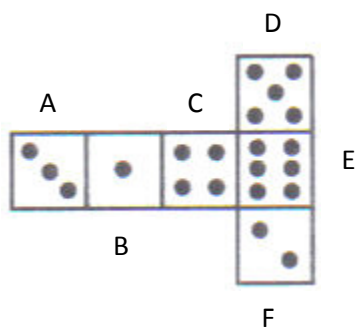
$$A+C= 4+3=7$$

$$B+E=5+2=7$$

$$D+F= 1+6=7$$

Este cubo sí cumple con la propiedad pedida.

Figura III



Veamos si cumplen la propiedad:

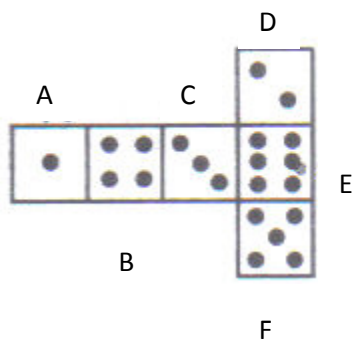
$$A+C= 3+4=7$$

$$B+E=1+6=7$$

$$D+F= 5+2=7$$

Este cubo sí cumple con la propiedad pedida.

FIGURA IV.



Veamos si cumplen la propiedad:

$$A+C= 1+3=4$$

$$B+E=4+6=10$$

$$D+F= 2+5=7$$

Este cubo no cumple con la propiedad pedida, por que la suma de sus caras opuestas debe ser 7.

Finalmente el resultado correcto es el siguiente:

Forma	¿Cumple con la regla de la suma?
I	Sí / <u>No</u>
II	<u>Sí</u> / No
III	<u>Sí</u> / No
IV	Sí / <u>No</u>

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta sólo 235 lo hicieron de manera correcta es decir 29.49% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 562 alumnos restantes, obtuvimos que ellos respondieran lo siguiente:

A)

Forma	¿ Cumple con la Regla?
I	Sí / <u>No</u>
II	Sí / <u>No</u>
III	<u>Sí</u> / No
IV	<u>Sí</u> / No

B)

Forma	¿ Cumple con la Regla?
I	<u>Sí</u> / No sí
II	Sí / <u>No</u> no
III	Sí / <u>No</u> no
IV	<u>Sí</u> / No sí

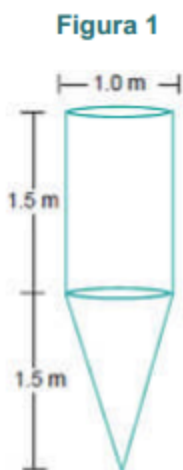
Como observamos los alumnos no pudieron interpretar y resolver el problema que incluía números y figuras gráficas, los alumnos no trabajaron directamente con el concepto de cubo, y no lograron extraer de la información las restricciones necesarias para poder solucionar el problema.

Lo anterior nos deja ver que a los alumnos se les dificulta comprender el lenguaje de este tipo de problemas que relacionan el concepto de figuras tridimensionales con operaciones básicas con números.

2.24 REACTIVO 20: EL DEPÓSITO DE AGUA.

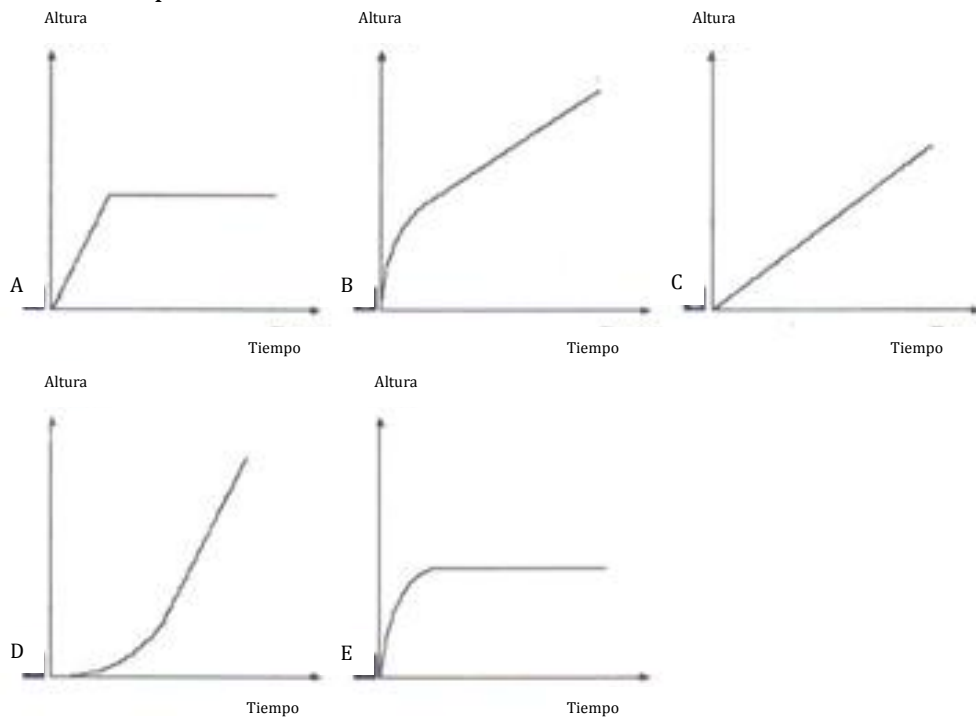
PREGUNTA 29:

Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura 1. Inicialmente el depósito está vacío. Después, se llena con agua a razón de un litro por segundo.



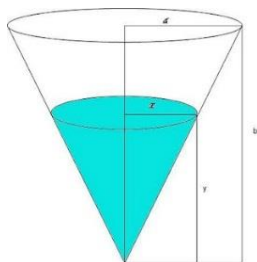
Depósito de agua

¿Cuál de los gráficos siguientes muestra cómo va cambiando la altura del agua en la cisterna en función del tiempo?

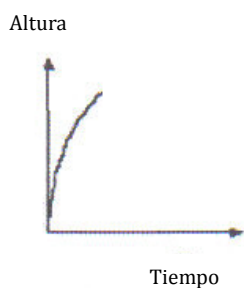


SOLUCIÓN 29:

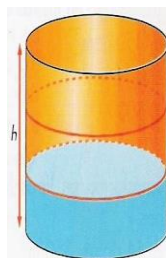
Analicemos detalladamente la forma del depósito de agua, en primer lugar tiene forma cónica



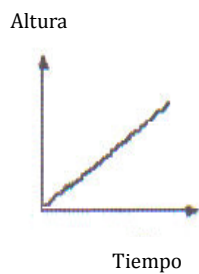
Así que en este depósito, sucede, que mientras avanza el tiempo, se empieza a llenar de una manera creciente, en poco tiempo la altura crece rápidamente, por lo que la gráfica sería la siguiente:



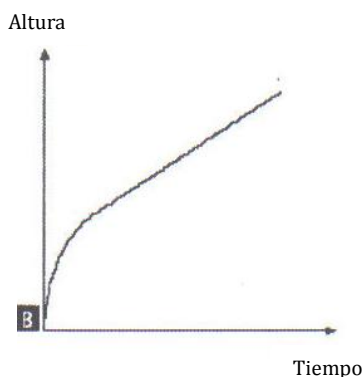
Por otro lado a nuestro depósito le sigue un cilindro en la parte superior:



Así que en este depósito, sucede, que mientras avanza el tiempo, se empieza a llenar de una manera constante por lo que la gráfica sería la siguiente:



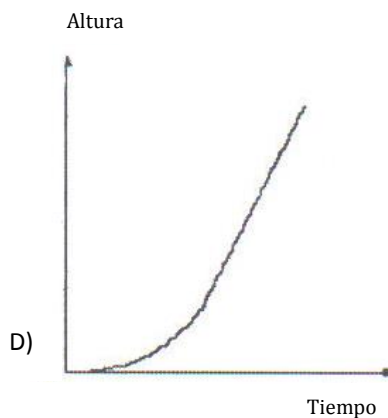
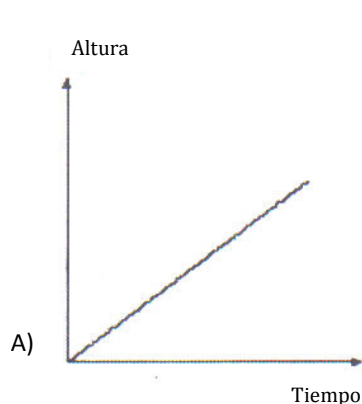
Finalmente uniendo ambas gráficas se crea la siguiente:



RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 163 lo hicieron de manera correcta es decir 20.45% de la población estudiantil acertó.

Esta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que elegir la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 634 alumnos restantes, encontramos que las gráficas que eligieron más frecuentemente fueron:



Los alumnos que eligieron la gráfica A) responden a esta pregunta como si el depósito de agua fuera un cilindro, sin tomar en cuenta el cono, por otro lado los que eligieron la gráfica D) si consideraron el cono y el cilindro, pero graficaron como si el cono estuviera invertido. Las respuestas de los alumnos nos muestran que no logran graficar problemas que involucren combinar figuras tridimensionales. Además podemos mencionar que si el problema hubiera pedido la gráfica de una sola figura tridimensional como por ejemplo el Cilindro, habría sido más sencillo para los alumnos comprender y graficar, sin embargo, este problema de PISA tiene como objeto llevar al alumno a una profunda reflexión, para resolver problemas complejos que involucren representaciones graficas de figuras múltiples, esto nos hace reflexionar sobre lo necesario que es, que en las aulas los profesores trabajen con apoyos visuales para que los alumnos logren llevar a la vida real los modelos matemáticos.

2.25 REACTIVO 21: TIEMPO DE REACCIÓN

En una carrera de velocidad, el tiempo de reacción es el tiempo que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el taco de salida. El tiempo final incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera.

En la tabla siguiente figura el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores en una carrera de velocidad de 100 metros.

Carril	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
1	0.147	10.09
2	0.136	9.99
3	0.197	9.87
4	0.180	No acabó
5	0.210	10.17
6	0.216	10.04
7	0.174	10.08
8	0.193	10.13



PREGUNTA 30:

Identifica a los corredores que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la tabla siguiente con su número de carril, su tiempo de reacción y su tiempo final.

Medalla	Carril	Tiempo de reacción	Tiempo final
Oro			
Plata			
Bronce			

SOLUCIÓN 30:

Medalla	Carril	Tiempo de reacción	Tiempo final
Oro	3	0.197	9.87
Plata	2	0.136	9.99
Bronce	6	0.216	10.04

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 245 lo hicieron de manera correcta es decir 30.74% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 552 alumnos restantes, obtenemos en común los siguientes:

A)	<table> <tr> <th>Medalla</th><th>Carril</th><th>Tiempo de Reacción</th><th>Tiempo Final</th></tr> <tr> <td>Oro</td><td>3</td><td>0.197</td><td>9.87</td></tr> <tr> <td>Plata</td><td>2</td><td>0.136</td><td>9.99</td></tr> <tr> <td>Bronce</td><td>1</td><td>0.147</td><td>10.09</td></tr> </table>	Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final	Oro	3	0.197	9.87	Plata	2	0.136	9.99	Bronce	1	0.147	10.09	B)	<table> <tr> <th>Medalla</th><th>Carril</th><th>Tiempo de Reacción</th><th>Tiempo Final</th></tr> <tr> <td>Oro</td><td>2</td><td>0.136</td><td>9.99</td></tr> <tr> <td>Plata</td><td>1</td><td>0.147</td><td>10.09</td></tr> <tr> <td>Bronce</td><td>7</td><td>0.177</td><td>10.08</td></tr> </table>	Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final	Oro	2	0.136	9.99	Plata	1	0.147	10.09	Bronce	7	0.177	10.08
Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final																																
Oro	3	0.197	9.87																																
Plata	2	0.136	9.99																																
Bronce	1	0.147	10.09																																
Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final																																
Oro	2	0.136	9.99																																
Plata	1	0.147	10.09																																
Bronce	7	0.177	10.08																																
C)	<table> <tr> <th>Medalla</th><th>Carril</th><th>Tiempo de Reacción</th><th>Tiempo Final</th></tr> <tr> <td>Oro</td><td>2</td><td>0.136</td><td>9.99</td></tr> <tr> <td>Plata</td><td>3</td><td>0.197</td><td>9.87</td></tr> <tr> <td>Bronce</td><td>6</td><td>0.216</td><td>10.04</td></tr> </table>	Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final	Oro	2	0.136	9.99	Plata	3	0.197	9.87	Bronce	6	0.216	10.04	D)	<table> <tr> <th>Medalla</th><th>Carril</th><th>Tiempo de Reacción</th><th>Tiempo Final</th></tr> <tr> <td>Oro</td><td>2</td><td>0.136</td><td>9.99</td></tr> <tr> <td>Plata</td><td>1</td><td>0.147</td><td>10.09</td></tr> <tr> <td>Bronce</td><td>7</td><td>0.174</td><td>10.08</td></tr> </table>	Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final	Oro	2	0.136	9.99	Plata	1	0.147	10.09	Bronce	7	0.174	10.08
Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final																																
Oro	2	0.136	9.99																																
Plata	3	0.197	9.87																																
Bronce	6	0.216	10.04																																
Medalla	Carril	Tiempo de Reacción	Tiempo Final																																
Oro	2	0.136	9.99																																
Plata	1	0.147	10.09																																
Bronce	7	0.174	10.08																																

Este problema requería que los estudiantes analizaran detalladamente la tabla de las posiciones, para después, interpretarla, y así de manera efectiva responder a la pregunta. Sin embargo otra vez, se nota el desprovisto manejo de los alumnos en este nivel. Por ejemplo, en este problema hubo alumnos que al ordenar los datos, no tuvieron el detalle de realmente identificar los tiempos finales para ordenarlos de mayor a menor. Hubo quienes llegaron a la conclusión equivocada de que $9.99 < 9.87$, entre otras.

PREGUNTA 31:

Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos. Sí el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, entonces se considera que se ha producido una salida falsa porque el corredor tiene que haber salido antes de oír la señal.

Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce hubiera sido menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN 31:

Algunas de las posibles justificaciones son las siguientes:

- Sí, su tiempo de reacción hubiera sido de 0.06 segundos más rápido, automáticamente hubiera obtenido el segundo lugar.
- Si hubiera tenido oportunidad de ganarse la medalla de plata, si su tiempo de reacción hubiera sido menor o igual a 0.166 segundos.
- Si, el tiempo de reacción más rápido posible, hubiera sido de 9.93, con lo que alcanzaba la medalla de plata.
- Ganador de bronce podría haber ganado la de plata. Porque hay una diferencia de tiempo de reacción de 0.080(milésimas de segundo).
 $0.216 - 0.136 = 0.080$,
 $10.040 - 0.080 = 9.960$,
 $9.99 - 9.96 = 0.03$ le habría ganado por 3 centésimas al ganador de la medalla de plata.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta sólo 12 lo hicieron de manera correcta es decir 1.51% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 785 alumnos restantes, obtenemos lo siguiente:

- A) Si...la...pudo haber...
ganado...si encerio...
hubiese el salido unos
segundos antes.
- B) Si...Por que iba
a salir mas
rapido...que el
otro.
- C) Si...pero no...obtuvo la...
fuerza necesaria...
- D) Si...por que en base al
tiempo de salida...se
toma...para el tiempo final

Para responder a este pregunta era importante que los alumnos comprendieran que cuando una persona tiene que realizar alguna acción en respuesta a un dado estímulo, transcurre un cierto tiempo entre la recepción del estímulo y la ejecución de la acción y que este intervalo de tiempo se conoce como tiempo de reacción, los resultados nos muestran que a los alumnos se les dificulta trabajar con tiempos de reacción, y por ello no capaces de fundamentar sus respuestas con argumentaciones justificables. Ni siquiera llegan a utilizar la herramienta matemática para resolver los problemas, incluso sus respuestas salen de contexto, por ejemplo “Sí, pero no tuvo la fuerza necesaria”, el razonamiento y la comprensión matemática son mínimos en este tipos de alumnos ya que de situaciones explícitas y concretas no son capaces de extraer datos para formular nuevas conclusiones.

Este reactivo de PISA debe alertar a todos los involucrados en el quehacer educativo, es importante notar que para los alumnos resulto complejo ordenar los datos, y esto es porque los alumnos no están acostumbrados a trabajar con el concepto de “Tiempo de reacción” ni con datos decimales reales.

2.26 REACTIVO 22: CONCENTRACIÓN DE UN FÁRMACO

A una mujer ingresada en un hospital, le ponen una inyección de penicilina. Su cuerpo va eliminando gradualmente la penicilina de modo que, una hora después de la inyección, sólo el 60% de la penicilina permanece activa.

Esta pauta continúa: al final de cada hora sólo permanece activo el 60% de la penicilina presente al final de la hora anterior.

Supón que a la mujer se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8 de la mañana.

PREGUNTA 32:

Completa la tabla escribiendo el total de penicilina que permanecerá activa en la sangre de la mujer a intervalos de una hora desde las 08:00 hasta las 11:00 horas.

Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
Penicilina (mg)	300			

SOLUCIÓN 32:

A las 8:00 tiene 300 miligramos de penicilina, eso significa que esa cantidad representa el 100%. Veamos cuánto es el 40% de penicilina que no queda activa:

$$300 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longleftarrow 40\%$$

Establecemos la siguiente regla de tres simple:

$$(300)(40) = (100)(x)$$

Resolviendo la ecuación de primer grado tenemos:

$$12000 = (100)(x)$$

$$\frac{12000}{100} = x$$

$$120 = x$$

Veamos ahora el total de penicilina que permanecerá activa al pasar 1 hora en la sangre de la mujer es decir: $300 - 120 = 180$.

A las 10:00 tiene 180 miligramos de penicilina, eso significa que esa cantidad representa el 100%. Veamos cuánto es el 40% de penicilina que no queda activa:

$$180 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longleftarrow 40\%$$

Establecemos la siguiente regla de tres simple:

$$(180)(40) = (100)(x)$$

Resolviendo la ecuación de primer grado tenemos:

$$7200 = (100)(x)$$

$$\frac{7200}{100} = x$$

$$72 = x$$

Veamos ahora el total de penicilina que permanecerá activa al pasar 1 hora en la sangre de la mujer es decir: $180-72=108$.

A las 11:00 tiene 108 miligramos de penicilina, eso significa que esa cantidad representa el 100%. Veamos cuánto es el 40% de penicilina que no queda activa:

$$108 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longleftarrow 40\%$$

Establecemos la siguiente regla de tres simple:

$$(108)(40) = (100)(x)$$

Resolviendo la ecuación de primer grado tenemos:

$$4320 = (100)(x)$$

$$\frac{4320}{100} = x$$

$$43.2 = x$$

Veamos ahora el total de penicilina que permanecerá activa en la sangre de la mujer es decir: $108-43.2=64.8$.

Finalmente la tabla queda así:

Hora	8:00	9:00	10:00	11:00
Penicilina	300	180	108	64.8

RESULTADOS OBTENIDOS

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 79 lo hicieron de manera correcta es decir 9.91 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 718 alumnos restantes, obtenemos los siguientes:

A)	Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
	Penicilina (mg)	300	400	500	600

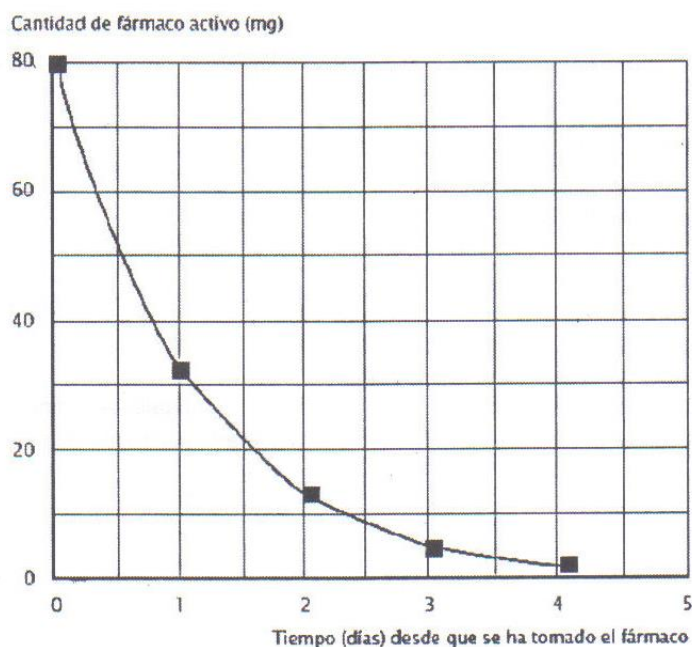
B)	Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
	Penicilina (mg)	300	170	50	30

C)	Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
	Penicilina (mg)	300	250	225	150

D)	Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
	Penicilina (mg)	300	200	100	50

Los alumnos no llegan a tener la habilidad para resolver problemas que requieran, cálculos básicos, con porcentajes y reglas de tres. En este problema eran necesarios tanto la comprensión lectora, como el dominio del manejo de porcentajes. Sin embargo los alumnos no saben entender y manejar representaciones que involucren múltiples datos.

Pedro tiene que tomar 80 mg de un fármaco para controlar su presión sanguínea. El siguiente gráfico muestra la cantidad inicial del fármaco y la cantidad que permanece activa en la sangre de Pedro después de uno, dos, tres y cuatro días.



PREGUNTA 33:

¿Cuánta cantidad de fármaco permanece activa al final del primer día?

- A) 6 mg
- B) 12 mg
- C) 26 mg
- D) 32 mg

SOLUCIÓN 33:

Este problema requiere, de analizar detalladamente la gráfica, esta nos muestra que al iniciar el día la cantidad de fármaco activo es de 80 mg, y al finalizarlo la gráfica nos muestra que la cantidad de fármaco que permanece activa es de 32 mg.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta sólo 279 lo hicieron de manera correcta es decir 35.01 % de la población estudiantil acertó.

Esta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que elegir la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 518 alumnos restantes, encontramos que en común el error más frecuente fue que consideraron que la respuesta era la c) 26 mg. Nuevamente los alumnos carecen de la habilidad de identificar y extraer información relevante de la gráfica.

PREGUNTA 34:

En el gráfico de la pregunta precedente puede verse que, cada día, permanece activa en la sangre de Pedro aproximadamente la misma proporción de fármaco con relación al día anterior.

Al final de cada día, ¿cuál de las siguientes cifras representa el porcentaje aproximado de fármaco del día anterior que permanece activo?

- A) 20%
- B) 30%
- C) 40%
- D) 80%

SOLUCIÓN 34:

Tiempo (días).	0	1	2	3	4	5
Fármaco activo.	80	32	18			

Si 80 mg representa el 100% del concentrado de fármaco, ahora veamos qué porcentaje se pierde al pasa un día:

$$80 \longrightarrow 100\%$$

$$32 \longrightarrow x$$

Resolviendo la regla de tres tenemos lo siguiente:

$$(80)(x) = (100)(32)$$

$$(80)(x) = 3200$$

$$x = \frac{3200}{80}$$

$$x = 40$$

Por lo que el 40 % representa el porcentaje aproximado de fármaco del día anterior que permanece activo.

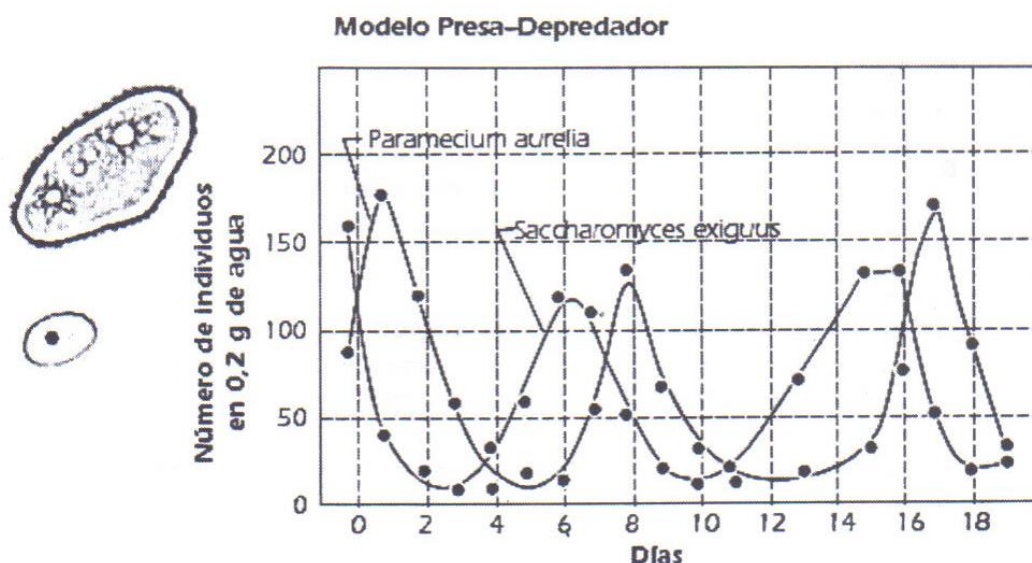
RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 137 lo hicieron de manera correcta es decir 17.19% de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 660 alumnos restantes, encontramos que el error más frecuente fue que consideraron que la respuesta era la b) 30% ó d) 80%. Este problema se relaciona directamente con las actividades cotidianas de los estudiantes, y a pesar de eso, reafirmamos que los alumnos no tienen una comprensión de lo que se les plantea en los problemas. En este caso en específico carecen de una planeación matemática adecuada y finalmente eso los lleva a no resolver apropiadamente este problema.

2.27 REACTIVO 23: PRESA-DEPREDADOR

En el gráfico que viene a continuación se muestra el crecimiento de dos organismos vivos: el Paramecium y el Saccharomyces.



PEGUNTA 35:

Uno de los dos animales (el depredador) se come al otro (la presa). ¿Permite el gráfico identificar cuál es la presa y cuál el depredador?

A (Sí) B (No)

Una propiedad del fenómeno presa-depredador se puede expresar de la siguiente manera: la tasa de crecimiento de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas disponibles. ¿Es aplicable esta propiedad al gráfico anterior?

A (Sí) B (No)

SOLUCIÓN 35:

Para comprender lo que dicen, hay que tener claro dos conceptos. Primero, entenderemos por “**depredador**”, aquel ser vivo que caza y da muerte a otro animal y, por “**presa**”, al animal que es cazado. Lo que se sabe hasta el momento es que el ciclo depredador-presa está caracterizado por constantes subidas y bajadas en abundancia de depredadores y presas.

Esto se explica porque en un mismo hábitat, si los depredadores son muy eficientes cazando y comiendo presas, en un corto plazo las presas podrían desaparecer. Una población o cantidad de depredadores bien alimentados traería como consecuencia una mayor reproducción y, por tanto, un aumento rápido en el número de depredadores.

¿Qué sucede si aumentan los depredadores y disminuyen las presas? Entonces, faltarán presas para alimentar al mayor número de depredadores, disminuyendo rápidamente su población. Al poco tiempo, la relación se habrá invertido y existirán más presas que predadores para cazarlas.

Así que entendiendo el comportamiento Presa-Depredador llegamos a la conclusión de que el gráfico si permite identificar cuál es la presa y cuál el depredador.

Por otro lado, el concepto depredador-presa se puede definir mediante un ejemplo. Ahora podemos considerar un hábitat en donde coexisten dos especies que interaccionan entre ellas. Por una parte, tenemos la especie P (La presa: conejos) y que en ausencia de depredadores es capaz de crecer de forma ilimitada a una tasa de crecimiento $a > 0$ (los conejos se alimentan de hierba y en un ambiente sin depredadores y con recursos ilimitados, crecerá). Por otra parte, tenemos la otra especie D (depredador: zorros) que en ausencia de presa y, por lo tanto, de comida, decrecen con una tasa negativa.

Pero obviamente, los zorros se comen a los conejos y, por lo tanto, la población de conejos se verá mermada en presencia de zorros y viceversa, la población de zorros se verá aumentada en presencia de conejos. Esta ley explica la interacción existente entre ambas, en términos de las tasas de crecimiento y mortalidad parece natural asumir que la tasa de mortalidad de la presa P debe ser proporcional al número de depredadores. De forma similar, la tasa de nacimientos del depredador D será proporcional al número de presas.

Por lo que en el gráfico anterior se visualiza lo explicado anteriormente, que la tasa de crecimiento de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas disponibles. Por lo que la respuesta este problema es Sí, Sí.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 101 lo hicieron de manera correcta es decir 12.67 % de la población estudiantil acertó.

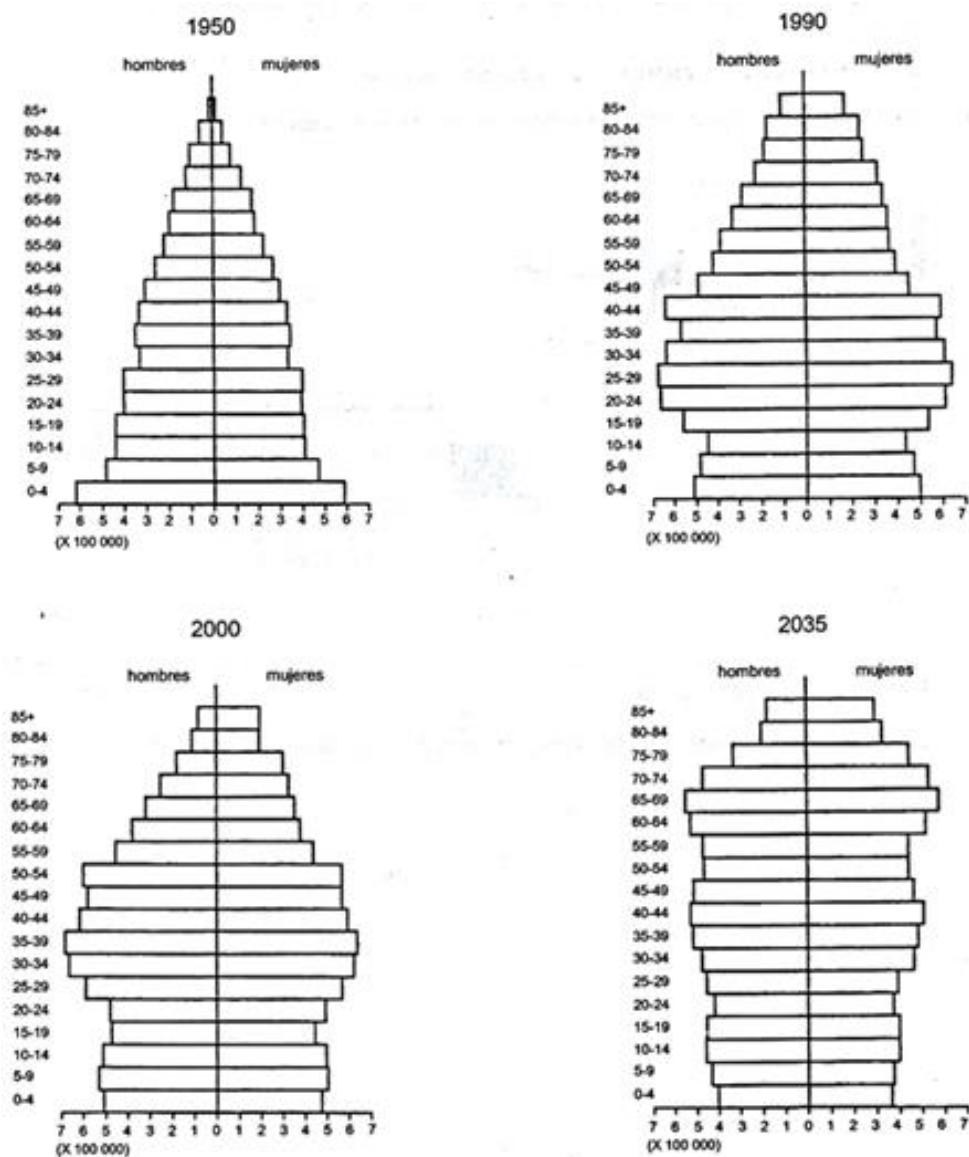
Esta fue una de las preguntas con opción múltiple, los alumnos tenían que elegir la respuesta correcta, sin mostrar a detalle sus justificaciones, al analizar los resultados de los 696 alumnos restantes, encontramos que algunas de las respuestas frecuentes fueron las siguientes:

- | | | | | | |
|----|---|---------------------------------------|----|---|---------------------------------------|
| A) | A ☒ (Sí) | (No) | B) | A ☒ (Sí) | (No) |
| | B ☐ (Sí) | ☒ (No) | | B ☐ (Sí) | ☒ (No) |
| C) | A ☐ (Sí) | ☒ (No) | D) | A ☐ (Sí) | ☒ (No) |
| | B ☐ (Sí) | ☒ (No) | | B ☒ (Sí) | ☐ (No) |

En este problema los alumnos no son capaces de encontrar similitudes y diferencias al analizar componentes gráficos, además de que no manejan la dependencia entre variables, nuevamente para resolver este problema era necesario que mezclaran las matemáticas con su entorno, pero descubrimos que los alumnos no solo tiene dificultades para la extracción de datos e interpretación de una gráfica, sino que además carecen de conocimientos generales de la vida real.

2.28 REACTIVO 24: PIRÁMIDES DEMOGRÁFICAS

En un país, se elaboran algunas pirámides demográficas para mostrar la distribución de su población en 1950, 1990, 2000 y 2035.



PREGUNTA 36:

¿Cuánta gente (entre niños y niñas) espera tener este país en el 2035, del grupo de los 5-9 años? Muestra como encontraste tu respuesta.

SOLUCIÓN 36:

Si observamos la gráfica del 2035 y sumamos los valores del largo de la barra para hombres de 4.2 y mujeres 3.8 del grupo de 5 a 9 años y luego lo multiplicamos por 100 000 obtendremos:

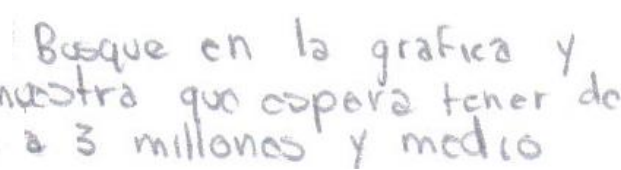
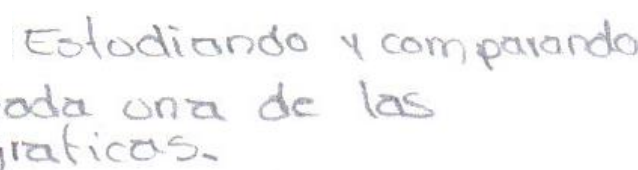
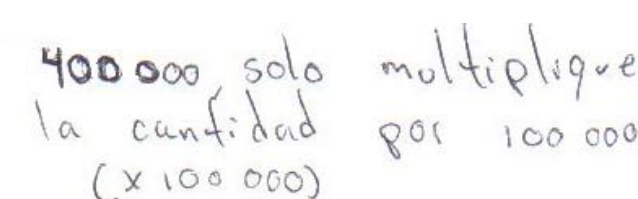
Aproximadamente 4200000 hombres y 3900000 mujeres, la cantidad de gente entre niños y niñas que espera tener este país en el 2035 es aproximadamente de:

$$4200\ 000 + 3900000 = 8100000$$

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 76 lo hicieron de manera correcta es decir 9.54 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 721 alumnos restantes, encontramos lo siguiente:

- A)  del 5-9 son 4
- B)  Busque en la grafica y muestra que espera tener de 4 a 3 millones y medio
- C)  Estudiando y comparando cada una de las graficas.
- D)  400 000 solo multiplique la cantidad por 100 000 (x 100 000)

A pesar de que las pirámides demográficas son fáciles de interpretar, descubrimos en esta investigación y por la manera de responder de los alumnos que simplemente no comprenden lo que estas gráficas transmiten.

PREGUNTA 37:

En 1950, Juan tenía 3 años.

- I. ¿En qué grupo de edad se encontraba Juan en 1950?
- II. ¿En qué grupo de edad se encontrará en 2035?

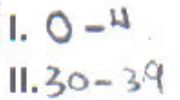
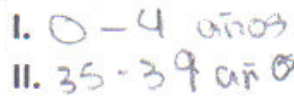
SOLUCIÓN 37:

- I. Localizando la información dada en la pirámide demográfica de 1950, Juan se encontraba en el rango de 0-4.
- II. Primero vemos cuantos años habrán pasado del 1950 a 2035. Haciendo una resta obtenemos que $2035-1950= 85$ años. Así que Juan tendría $85+3=88$ años. Por lo que en 2035, Juan se encontraría el grupo de edad de 85+.

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 170 lo hicieron de manera correcta es decir 21.33 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 627 alumnos restantes, encontramos este tipo de respuestas:

- A)  B) 

Muchos alumnos se confunden y creen que por ser el 2035 entonces solo pasaron 35 años, por los que de 0-4 ahora tendrán 35-39 años. Lo que nos hace ver que los alumnos carecen de la comprensión necesaria para resolver este tipo de problemas.

PREGUNTA 38:

De acuerdo con estas pirámides, sólo parte del grupo de 0-4 años en 1950 alcanzará a llegar a la edad de 85+. ¿Qué porcentaje de la población representará (asumiendo que no existen efectos migratorios)? Muestra cómo encontraste tu respuesta.

SOLUCIÓN 38:

En 1950 la población entre 0-4 era de aproximadamente 1200000. Pero para 2035 la población de 85+ será de 500000. Calculemos que porcentaje de población representará entonces:

$$12\ 00000 \longrightarrow 100\%$$

$$5\ 00000 \longrightarrow x$$

Resolviendo la regla de tres obtenemos:

$$(500000)(100) = (1200000)(x)$$

$$\frac{50000000}{1200000} = x$$

$$\frac{500}{12} = x$$

$$41.66 = x$$

Por lo tanto el porcentaje de población que representara aproximadamente es del 41.66%

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 16 lo hicieron de manera correcta es decir 2.01 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 781 alumnos restantes, encontramos este tipo de respuestas:

- A) Se van muriendo la gente
- B) El mínimo por ciento ya que va disminuyendo conforme los años pasan.
- C) -10% , ya que estas eran fechas complicadas para esta población.

Los alumnos que respondieron como: A) Se va muriendo la gente, B) El mínimo por ciento ya que va disminuyendo conforme los años pasan, C) - 10%, ya que eran fechas complicadas para esta población, no lograron realizar las operaciones necesarias para calcular exactamente el porcentaje que representaría la población en el año pedido, más bien dieron justificaciones erróneas y además que estaban fuera del contexto matemático.

PREGUNTA 39:

Encierra en un círculo, ya sea cierto o falso en cada una de las afirmaciones, apóyate en la información de las pirámides demográficas (asumiendo que no hay efectos migratorios).

AFIRMACIÓN	CIERTO Ó FALSO
La edad promedio de la población ha disminuido de 1950 a 2035.	Cierto/ Falso
La población total de 1990 es mayor que la de 1950.	Cierto/ Falso
El tamaño de la población económicamente activa (20-64 años) se incrementó de 1950 a 1990.	Cierto/ Falso
Existen evidencias de que a partir de 1990, las mujeres vivirán más que los hombres.	Cierto/ Falso

SOLUCIÓN 39:

Para dar respuesta a las afirmaciones es necesario analizar detalladamente las pirámides demográficas llegando así a las siguientes respuestas:

AFIRMACIÓN	CIERTO Ó FALSO
La edad promedio de la población ha disminuido de 1950 a 2035.	Cierto/ <u>Falso</u>
La población total de 1990 es mayor que la de 1950.	<u>Cierto</u> / Falso
El tamaño de la población económicamente activa (20-64 años) se incrementó de 1950 a 1990.	<u>Cierto</u> / Falso
Existen evidencias de que a partir de 1990, las mujeres vivirán más que los hombres.	Cierto/ <u>Falso</u>

RESULTADOS OBTENIDOS:

De los 797 alumnos que respondieron a esta pregunta solo 71 lo hicieron de manera correcta es decir 8.91 % de la población estudiantil acertó.

Al analizar los resultados de los 726 alumnos restantes, encontramos en común lo siguiente:

A)

AFIRMACIÓN	Cierto ó Falso
1	Cierto / <u>Falso</u>
2	<u>Cierto</u> / Falso
3	Cierto / <u>Falso</u>
4	<u>Cierto</u> / Falso

B)

AFIRMACIÓN	Cierto ó Falso
1	Cierto / <u>Falso</u>
2	<u>Cierto</u> / Falso
3	<u>Cierto</u> / Falso
4	Cierto / <u>Falso</u>

La mayoría de los alumnos se enfrentó a un conflicto de interpretación de las pirámides demográficas sobre todo en las afirmaciones 3 y 4, ya que cuando las preguntas se involucraban más con detalles de la vida real, existieron alumnos a los que cuando se les involucra en el contexto frases como: “existía evidencia” ó “Población económicamente activa” no logran comprender en el caso de los alumnos como: A) que en las pirámides demográficas no se proporciona esa información, B) a pesar de que tienen la información que se pregunta en las pirámides no logran responder correctamente.

CAPÍTULO III

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL ESTUDIO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS TIPO PISA

El propósito de este capítulo es presentar ejemplos de secuencias y sugerencias didácticas para que los profesores las utilicen en el aula. Aquí, usamos un formato de secuencia didáctica que incluye los siguientes aspectos (expuestos en el capítulo I de esta tesis): el contenido, el contexto, el proceso. Además consideramos el número de sesiones, los propósitos, los aprendizajes esperados y las actividades que se van a desarrollar que manejan los programas de secundaria. Para las secuencias que presentamos incluimos además un formato para la evaluación formativa de aplicación de procesos y desarrollo de competencias.

Las secuencias y sugerencias didácticas en este trabajo se estructuran con base en actividades lúdicas, resolución de problemas análogos a los de la prueba, uso de teoremas, creación de nuevas preguntas sobre un mismo reactivo y planteamiento de proyectos, por lo que se hallarán una o más sugerencias para los reactivos que contiene nuestra prueba modelo PISA.

La intención es que los docentes conjuguen el programa de secundaria con las dimensiones del dominio de Matemáticas de PISA para que sus alumnos desarrollen las competencias requeridas para que en el futuro puedan alcanzar niveles satisfactorios en las evaluaciones subsecuentes de PISA. El trabajar con estas secuencias didácticas puede ser una herramienta útil que permite mejorar las competencias de los alumnos en el marco teórico de PISA y en concordancia con los propósitos del plan de estudios.

3.1 ASOCIACIÓN DE PISA CON EL PLAN Y PROGRAMA DE ESTUDIOS DE SECUNDARIA

Las formas en que los individuos se acercan al conocimiento en su proceso de formación y desarrollo traen consigo retos que la educación enfrenta, y que son señalados por los índices de calidad en la educación.

Para responder a estos retos es necesario, el mejoramiento del sistema en su conjunto, pero para saber qué se necesita mejorar es preciso hacer un análisis de la situación que se vive, donde las instituciones piden rendir cuentas de lo que se hace o deja de hacerse en las escuelas, de lo que los maestros han de realizar y de los resultados que se obtienen en las diversas evaluaciones nacionales e internacionales.

En educación ya no podemos decir que estamos solos, que trabajamos nosotros y nuestros alumnos, ahora nos damos cuenta que con el mundo globalizado ya estamos comparando nuestro sistema educativo con el de países más avanzados y observamos los resultados: las estadísticas muestran los avances obtenidos; ahora el mundo se puede ver, como alguien dijo por “una ventana más grande”, lo que implica que desde el maestro de la escuela Rural unitaria, hasta el docente de Telesecundaria, o el maestro de una escuela Urbana o Privada, el docente esté inmerso en un trabajo que nos compete a todos los que trabajamos por mejorar los sistemas educativos y que realizamos nuestro mejor esfuerzo porque recibimos los resultados de algunas evaluaciones.

Pero, ¿estamos trabajando para el mismo rumbo? o ¿damos tiros sin apuntar a un blanco? ¿Nuestro trabajo dentro del aula tiene el enfoque correcto para elevar la calidad de nuestras prácticas o solamente estamos aplicando metodologías, materiales o esfuerzos que no nos ofrecen un buen resultado?

La siguiente tabla nos muestra, a manera de síntesis algunos rasgos vistos desde PISA y desde el Programa de Matemáticas 2011 de secundaria [23], con el fin de observar similitudes y diferencias entre ambos y así encontrar un punto de asociación, así como también una relación entre un aspecto de PISA con los respectivos conocimientos y habilidades del Programa de Matemáticas 2011:

RASGOS	PISA	PROGRAMA
Competencia Matemática	Capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las Matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar y relacionarse con las Matemáticas de manera que se puedan satisfacer sus necesidades vitales, como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos	Como un saber hacer (habilidades) con el saber cómo los conocimientos y el ser como los valores y actitudes, es decir, manifestar una competencia es poner en juego esas habilidades, actitudes, conocimientos en el logro de un propósito en un contexto que te toque desenvolverte. Las competencias se observan en la acción integrada de sus componentes. El alumno emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones. Llegar a ser matemáticamente competente está ligado a la comprensión del contenido matemático, cuando se comprenden las nociones y procedimientos matemáticos se pueden utilizar de forma flexible, adaptándolas a situaciones nuevas y permitiendo establecer relación entre ellas y emplearlas para aprender un nuevo contenido matemático.
Procesos	Reproducción Conexión Reflexión	Planteamiento de problemas en un contexto dado. Trabajo en equipo, interacción del alumno y equipo con el problema planteado (empleo de conocimientos previos). Confrontaciones de ideas, observar, analizar, reflexionar. Argumentar, comunicar, manejar técnicas, sesiones grupales, obtener conclusiones, práctica y ejercitación.
Situación	Personal Científica Educativa Laboral Pública	Los problemas son contextualizados en los diferentes ámbitos e intereses del alumno: familiar, social, etcétera.

RASGOS	PISA	PROGRAMA
Contenido	Espacio y Forma Cantidad Cambio y Relaciones Probabilidad	Sentido numérico y pensamiento algebraico. Forma, espacio y medida. Manejo de la información. Se ven a lo largo de los tres grados, en cinco bloques y se tocan los tres ejes en cada bloque.
Niveles de desempeño	Seis niveles de progresión de avance	Líneas de progreso del desarrollo de competencias: ➤ Resolver de manera autónoma o con ayuda ➤ De los procedimientos informales a los procedimientos expertos ➤ De la justificación pragmática a la justificación axiomática
Evaluación	Evaluación de competencias o aptitudes que los jóvenes necesitarán a lo largo de su vida	Constructiva y formativa en dos líneas: ¿Qué sabe hacer el alumno? y ¿en qué sentido aplica lo que sabe? ¿Cómo se van desarrollando sus competencias?
Objetivo	Incidir en las políticas educativas de los países participantes	Que el alumno tenga una formación matemática que le permita enfrentar y responder problemas de la vida moderna

Al hacer este análisis se encuentra un punto de asociación y éste es el desarrollo de competencias; el programa desea que los alumnos desarrollen las competencias necesarias para responder a las exigencias de la vida social y PISA evalúa en qué medida o de qué calidad es el desarrollo de las competencias de los alumnos participantes.

El enfoque en PISA es observar el rumbo de las políticas educativas. En el programa 2011 se busca formar al alumno para que sea un ciudadano con el perfil de egreso que se plantea, y en especial en Matemáticas se desea que el alumno tenga una formación matemática que le permita enfrentar y resolver los problemas de la vida moderna. Los

resultados de PISA son “insumos” para la retroalimentación del trabajo con el Programa de Matemáticas y con las demás asignaturas del currículo de secundaria y así lograr una mejor calidad educativa.

Los procesos que emplea el programa, como tareas que se activan para conectar los fenómenos relacionados con los problemas, son actividades donde el alumno va a poner en juego procesos cognitivos: observación, reflexión, análisis, argumentación y comunicación de ideas matemáticas. Lo ideal es que estos procesos se logren como está planteado, pero hay muchos factores que lo impiden tales como: la falta de estrategias del docente para dirigir al alumno en estos aspectos, los deficientes conocimientos previos que muchas veces trae el alumno, falta de tiempo, falta de materiales, etcétera, que impiden que los procesos se lleven a cabo y se logren las metas.

En general se puede decir que el programa curricular 2011 está pensado y tiene los elementos para que el alumno en un futuro pueda evaluarse en PISA y obtenga resultados destacados, pero que aún faltan muchos aspectos por consolidar, estamos empezando, vamos lento, pero creemos que finalmente si se lleva la metodología como se ha planeado, hay apoyo para los docentes y se mejoran las necesidades sociales de algunos medios se pueden alcanzar mejores resultados en PISA.

Secuencia didáctica

Como ya se ha dicho, el Programa de Matemáticas 2011 pide que se trabaje proponiendo a los alumnos un medio o tarea matemática, un problema, un desafío, al que se enfrentarán los alumnos, e intercambiando ideas con sus compañeros de equipo y con su grupo llegarán a procedimientos de solución y así irán trabajando los conocimientos y habilidades logrando desarrollar la Competencia matemática y las demás competencias que señala el perfil de egreso de educación básica. El programa de cada grado se lleva a cabo en cinco bloques, al inicio de cada bloque se presentan aprendizajes esperados que se desarrollan en apartados para lograr estudiar los conocimientos habilidades de una manera gradual con el fin de establecer metas parciales a lo largo del año escolar. PISA pone especial atención a las “capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva, mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos” y se espera que los alumnos demuestren las tareas matemáticas de reproducción, conexión y reflexión. Demostrando su Competencia matemática en seis niveles de desempeño.

Enseguida damos tres ejemplos de secuencia didáctica considerando los aspectos de PISA y el programa de secundaria.

Nota. Cada vez que enunciemos un reactivo, entre corchetes indicamos el número de página de este documento en el cual se encuentra su solución para una mejor referencia con la intención de que nuestro trabajo sea lo más auto contenido posible.

3.2 SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL REACTIVO: Granjas [Pág. 44]

Contenido: Espacio y forma

Programa: Grado primero, bloque III. Grado tercero, bloque III, IV, V

Sesiones: Cuatro

Contexto: Laboral

Propósito:

- Que los alumnos comprendan los significados de área y perímetro, semejanza de triángulos, volúmenes de cuerpos geométricos, mediante procesos de reproducción, conexión y reflexión que les permitan ir desarrollando sus competencias.

Aprendizajes esperados:

- ✓ Resolver problemas que impliquen el cálculo del área de cuadriláteros.
- ✓ Resolver problemas de semejanza que impliquen utilizar esta propiedad en triángulos o en cualquier figura.
- ✓ Construir desarrollos planos de conos.
- ✓ Resolver problemas que impliquen el cálculo del volumen de conos.
- ✓ Anticipar el cambio del volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.

Procesos que se estarán aplicando: Reproducción, conexión e integración para la solución de problemas.

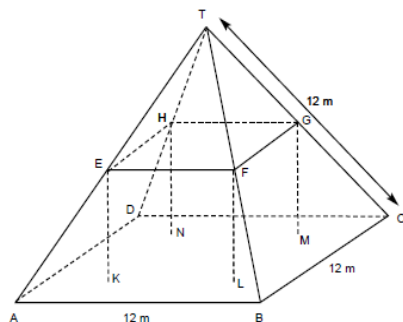
Habilidades que se van desarrollando: Resolución de problemas, comunicación de información matemática, validación de procedimientos y resultados, manejo de técnicas.

Sesión 1. Calculando las medidas de un ático

Aquí ves una fotografía de una casa de campo con el tejado en forma de pirámide



Debajo hay un modelo matemático del tejado de la casa con las medidas correspondientes.



La planta del ático, ABCD en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) EFGHKL MN. E es el punto medio de AT, F es el

punto medio de BT, G es el punto medio de CT y H es el punto medio de DT. Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.

PREGUNTA 8: Calcula el área de la planta del ático ABCD. El área de la planta del ático ABCD es igual a: $__\text{m}^2$.

PREGUNTA 9: Calcula la longitud EF, uno de los límites horizontales del bloque. La longitud EF es igual: $__\text{m}$.

Recomendaciones:

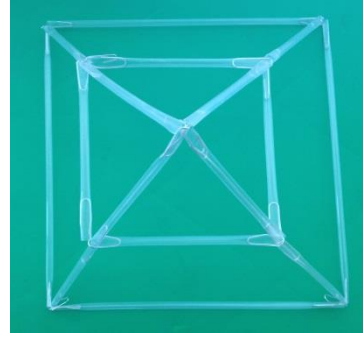
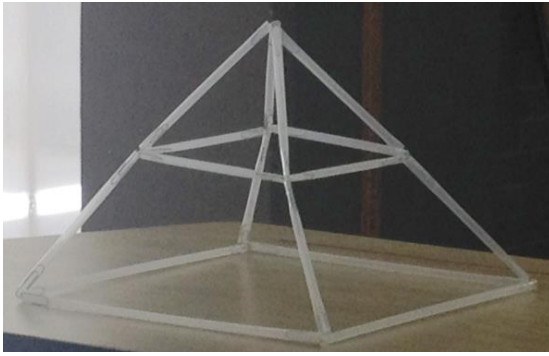
- El docente planteará el problema a los alumnos destinando entre diez y quince minutos para que ellos, primero individualmente, y después reunidos en equipos lo resuelvan.
- Motivar a los alumnos a que hagan la traducción e interpretación de los procedimientos por los que se puede resolver el problema, que empleen los cálculos necesarios y mediante ideas y procedimientos matemáticos busquen respuestas.
- Estar atento a los procedimientos que los equipos van realizando, dejándolos proponer y guiándolos mediante preguntas que los hagan reflexionar sobre algún error.
- Observar el trabajo de los equipos para que a la hora de la puesta en común se puedan hacer precisiones sobre los procedimientos y las respuestas presentadas.
- Posteriormente se hará una confrontación de ideas en torno a los procedimientos y respuestas encontradas, así como las dudas que se tuvieron para realizar las operaciones.
- Es importante que haga la debida conexión de ideas en relación a las operaciones que se empleen para resolver las preguntas.
- Finalmente se llegará a conclusiones dejando en claro los argumentos y la solución correcta a las preguntas de problema.
- Para retroalimentar los argumentos dichos por los estudiantes el docente propondrá la siguiente actividad.

Actividad

El docente, previamente a la sesión, pide a los estudiantes llevar el material siguiente:

- Popotes del mismo tamaño (12cm)
- Clips.

Después les propone construir un modelo que represente el tejado de la casa. En otras palabras, el estudiante debe construir un poliedro con las características que pide el problema. Una vez construido, el docente utiliza esta representación para que los alumnos se percaten de la validez de sus argumentos dados en las respuestas de las preguntas.



El docente puede aprovechar el material para hacer más preguntas: Sobre Áreas, Perímetro, Volumen, Semejanzas, Número de caras, etc.

Se sugiere aprovechar el material para trabajar temas de interés didáctico, vea [1, pág. 75]:

1. Construcción de polígonos.
2. Construcción de poliedros, en particular regulares.
3. Teorema de Euler.
4. Construir triángulos equiláteros con 9 popotes iguales, ¿Es posible construirlo con menos popotes? ¿Cuál es el mínimo número de popotes para construir triángulos equiláteros?
5. Construir un poliedro tal que de cada vértice salgan 5 aristas iguales. ¿Cuántas caras tiene? ¿Cómo son?

Sesión 2. El teorema de Tales

Una vez que se ha trabajado con el problema y el material el docente puede concluir el tema demostrando el Teorema de Tales o en su defecto, solo les puede platicar a los estudiantes de lo que trata.

Teorema de Tales. Si dos o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre éstas son proporcionales.

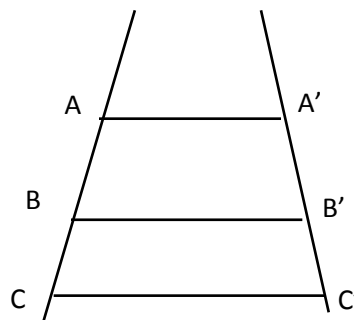


Figura 1.1

En la figura 1.1 las rectas AA' , BB' y CC' son paralelas, y las AB y $A'B'$ son transversales a ellas. Queremos demostrar que los segmentos AB y BC , son proporcionales a los segmentos $A'B'$ y $B'C'$, respectivamente es decir, $AB/BC=A'B'/B'C'$.

Para demostrar esto hagamos lo siguiente: dividamos al segmento AB en segmentos suficientemente pequeños, digamos que de tamaño p , tales que $AB=np$, con n entero. Hay dos posibilidades, que exista al menos un segmento de tamaño p tal que $BC=mp$, con m entero, o que no exista m entero que cumpla con que $BC=mp$ para ningún segmento de tamaño menor o igual a AB . Si m existe para algún p , los segmentos AB y BC se llaman conmensurables; si es así, tracemos rectas paralelas dadas que pasen por cada subdivisión de tamaño p . Estas rectas dividirán a los segmentos del mismo tamaño, digamos q .

Para demostrar esto último, hagamos por facilidad, $n=2$, entonces, tomemos un punto M que divida al segmento AB en dos partes iguales, como en la figura 1.2. Tracemos MM' paralela a AA' ; $A'Z$ paralela a AM y $M'Z'$ paralela a MB , con lo que formaremos dos paralelogramos, el $AA'ZM$ y el $MM'Z'B$, en los que $AM=A'Z$ y $MB=M'Z'$; además los ángulos $ZA'M'$ y $Z'M'B'$ son iguales, pues son correspondientes entre paralelas.

Por la misma razón el ángulo $A'M'Z$ y el ángulo $M'B'Z'$ son iguales. Ello implica que los triángulos $A'M'Z$ y $M'B'Z'$ son congruentes (ALA), y por lo tanto el segmento $A'M'$ es igual al segmento $M'B'$.

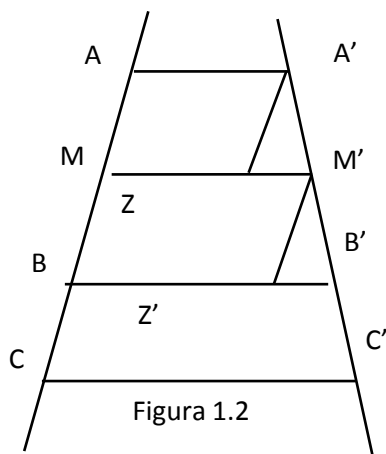


Figura 1.2

En la figura 1.3, $AB= p$ y $BC= 2p$, de donde $A'B'= q$ y $B'C'= 2q$.

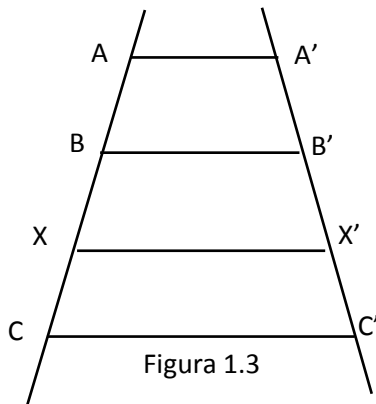


Figura 1.3

En general, $A'B' = nq$ y $B'C' = mq$.

Tenemos pues que $AB/BC = np/mp = n/m$; por otra parte, $A'B'/B'C' = nq/mq = n/m$, lo que demuestra el Teorema para el caso en que AB y BC sean conmensurables.

Supongamos ahora que para cierto p , $AB = np$, pero que no existe un entero m tal que $BC = mp$. Subdividamos cada segmento de tamaño p en n segmentos, digamos que de tamaño p' , de manera que $AB = n^2 p'$, es posible que ahora si exista un entero m tal que $BC = mp'$, en cuyo caso procederemos como en el caso anterior. De no ser así tendremos lo siguiente:

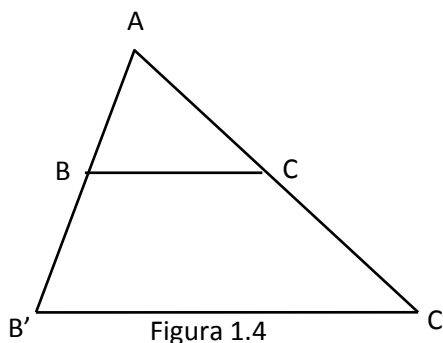
Para la subdivisión en segmento de tamaño p , $AB = np$ y $BC = mp + r$, donde r es un segmento de tamaño menor que p .

Para la subdivisión en segmentos de tamaño $p' = p/n$, $AB = n^2 p'$ y $BC = m'p' + r'$, donde m' es un entero y r' es menor o igual que r .

Si r' es distinta de cero, procedemos a subdividir los segmentos de tamaño p' en n partes iguales, de tal manera que $AB = n^3 p''$, donde $p'' = p'/n$, entonces $BC = m''p'' + r''$ donde m'' es un entero y r'' es menor o igual que r' ; así vamos construyendo una sucesión de valores de los residuos, $\{r, r', r'', \dots, r^n\}$, tal que cada uno de sus términos es menor o igual al anterior; es decir, el sobrante de dividir al segmento BC en segmentos de tamaño cada vez menor es, en algún momento, tan pequeño como se quiera, de tal manera que a algún valor determinado podremos considerarlo totalmente despreciable y tomar como una buena aproximación $BC = m^n p^n$ para alguna $n > 0$. En ese momento procedemos como en el caso en que AB y BC eran conmensurables y habremos demostrado el teorema de Tales.

Una consecuencia directa del Teorema de Tales que es muy aconsejable que los docentes expongan a los estudiantes es el siguiente resultado:

Teorema de la Semejanza. Si se tienen dos paralelas cortadas por dos transversales no paralelas entre sí, de tal manera que se forman dos triángulos con dos de sus lados sobrepuestos (AB y AB' , así como AC y AC') y los terceros paralelos entonces, las razones de lados correspondientes son iguales o, dicho de otra forma, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes (Vea la figura 1.4)



Así:

$$AB/AB' = AC/AC' = BC/B'C'$$

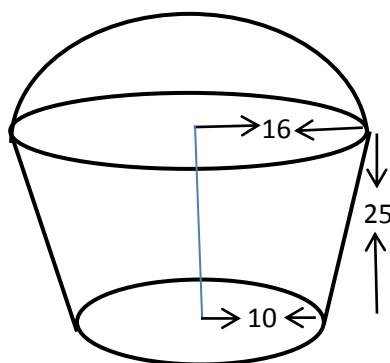
La solución al problema de la casa de campo queda entonces sustentada por una consecuencia directa del teorema de Tales.

Para profundizar el respecto vea [6, pág. 22-24].

Sesión 3. Volumen de una cubeta

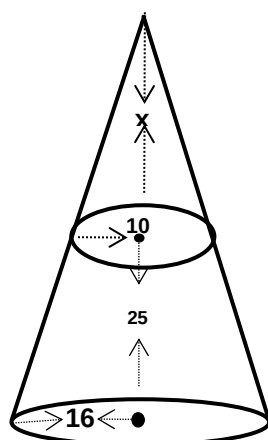
Le sugerimos también al profesor que use en clase problemas que trabajen los conceptos de PISA y que tengan modelos de la vida real y además que tengan alguna relación con los conceptos ya vistos en las sesiones anteriores.

Por ejemplo: ¿Qué volumen tendrá una cubeta como la de la figura siguiente, cuyo radio menor es de 10 cm, su radio mayor es de 16 cm y de altura 25 cm?

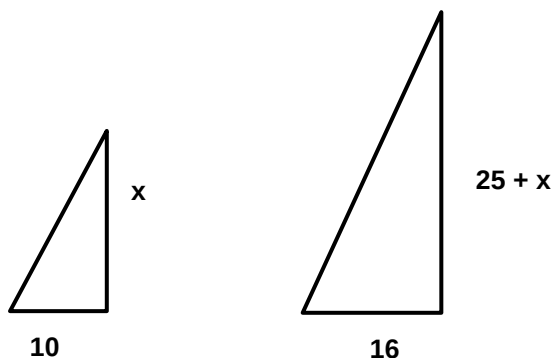


Solución:

¿Qué cuerpo geométrico asociamos a esta figura representativa de una cubeta? La asociamos con un cono, nada más que la cubeta sería un cono truncado. Entonces, formemos el cono que se supone produjo la cubeta. Ahora coloquemos la figura en una posición que nos permita identificar mejor sus elementos volteando la cubeta.



Ahora sí, esta figura nos es conocida, pero nos aparece un elemento desconocido ¿Cuál es y qué nos hace falta para continuar nuestros cálculos? Ciertamente, la altura del “conito”. ¿Qué conocimiento aplicaremos y cómo? El de los triángulos semejantes (la consecuencia del Teorema de Tales vista en la sesión 2):



Establezcamos la relación gracias al teorema de la semejanza:

$$\frac{16}{10} = \frac{25 + x}{x}$$

$$16x = 10x + 250$$

$$16x - 10x = 250$$

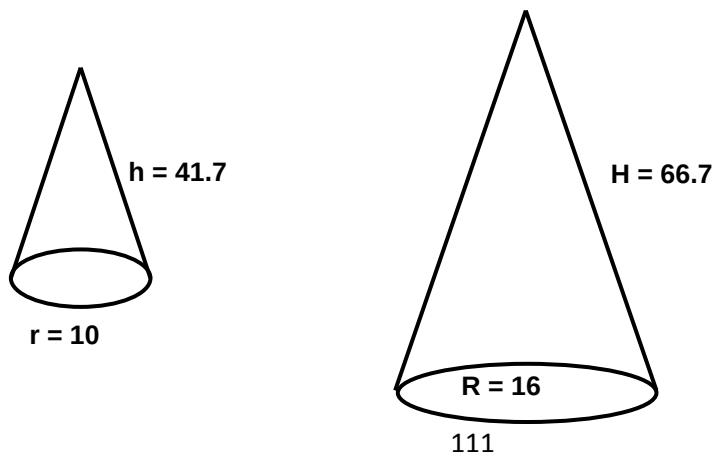
$$6x = 250$$

$$x = 250 / 6$$

$$x \approx 41.7$$

¿Qué nos restaría para calcular el volumen de la cubeta? ¿Cómo lo realizaríamos?

Tenemos ahora dos conos: el cono pequeño construido sobre la cubeta y el cono mayor construido con la cubeta.



Fórmula del volumen del cono:

Obtenemos el volumen de cada cono aplicando la fórmula respectiva. Obtenemos la diferencia y ésta diferencia es el volumen de la cubeta. $V = \pi r^2 h / 3$

Volumen cono chico:

$$V = 3.1416 \times 10^2 \times 41.7 / 3 = 4366.8$$

$$V = 4366.8 \text{ cm}^3$$

Volumen del cono mayor:

$$V = 3.1416 \times 16^2 \times 66.7 / 3 = 17881.15$$

$$V = 17881.15 \text{ cm}^3$$

$$\text{Diferencia} = 13514.35 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen de la cubeta: } 13514.35 \text{ cm}^3$$

Finalmente transformemos a litros, para ello recordemos que:

$$1 \text{ lt} = 1000 \text{ ml} = 1000 \text{ cm}^3$$

Utilizando una regla de tres simple tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ lt} & \longrightarrow & 1000 \text{ ml} \\ x & \longrightarrow & 13514.35 \text{ ml} \end{array}$$

Entonces:

$$x = (1)(13514.35) / 1000$$

$$x = 13.51 \text{ litros.}$$

Sesión 4. Panel solar

Actividad

Para continuar con el mismo contexto del problema del ático, el docente, previamente a la sesión, pide a los estudiantes llevar el material siguiente:

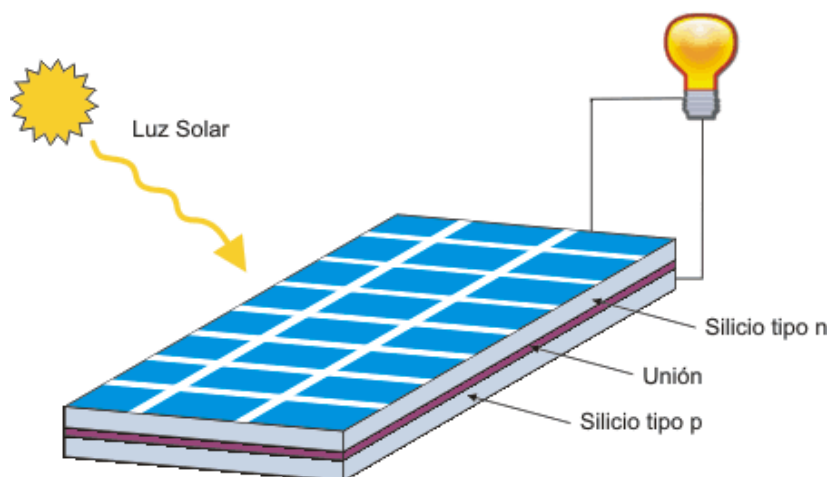
- Un periódico
- Una cartulina

Y el docente les platica de manera informal a sus estudiantes que para una casa de campo se necesita luz solar.



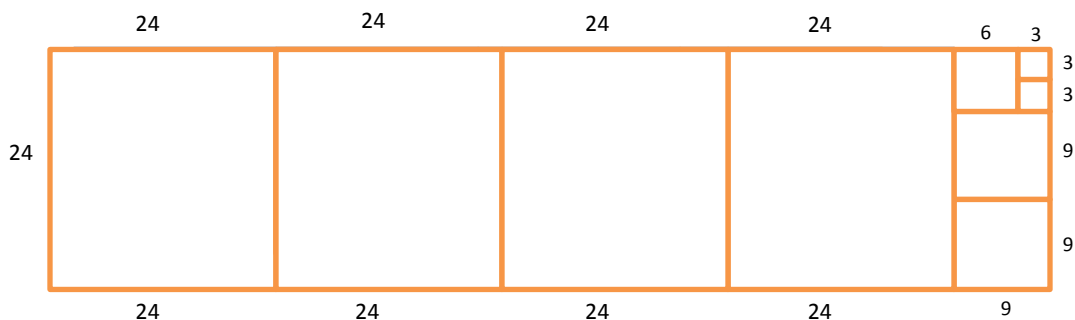
Para esto solicita a los alumnos que individualmente resuelvan el siguiente problema:

Un panel solar de 105 x 24 cm se tiene que cubrir con cuadrados de silicón de distintos tamaños sin que se traslapen. ¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que se pueden usar para cubrir todo el panel?

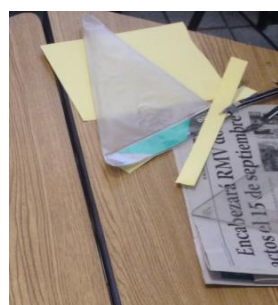


Solución:

El mínimo numero de cuadrados es 9, con las medidas siguientes:



Una vez que los alumnos respondan el problema, pídeles que formen equipos de cinco y que comparen sus resultados, subsecuentemente les propone construir con el material solicitado previamente, un modelo que represente el panel solar, en otras palabras, los estudiantes deben construir sobre el periódico un rectángulo de 105 x 24 cm. que representará el panel, una vez construido, el docente pide a los alumnos que recorten la cartulina que representará los cuadros de silicón, una vez explicado esto, el docente pide a los alumnos que encuentren el mínimo número de cuadrados que se pueden usar para cubrir todo el panel sin que se traslapen.



El docente puede aprovechar el material para hacer más preguntas: Sobre Áreas o perímetros de cuadrados, etc.

3.3 SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL REACTIVO: Basura [Pág. 47]

Contenido: Incertidumbre

Programa: Grado primero, bloque IV. Grado segundo, bloque I, III, V. Grado tercero, bloque V.

Sesiones: Tres

Contexto: Científica

Propósitos:

- Que los alumnos analicen e interpreten información contenida en gráficas de barras, así como la construcción y diseño de éstas examinando las frecuencias absolutas y relativas.
- Que analicen magnitudes con respecto a un total, que se familiaricen con la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad, así como el volumen y longitud.
- Que practiquen problemas que impliquen el cálculo de porcentajes mediante procesos de reproducción, conexión y reflexión que les permitan ir desarrollando sus competencias.

Aprendizajes esperados:

- ✓ Interpretar y comunicar información mediante graficas de barras.
- ✓ Diseñar a partir de datos obtenidos graficas de barras.
- ✓ Interpretar y calcular frecuencia absoluta.
- ✓ Interpretar y calcular frecuencia relativa.
- ✓ Resolver problemas que involucren cálculo de porcentajes.
- ✓ Resolver problemas que impliquen relaciones entre unidades de capacidad.
- ✓ Llevar a la vida real el concepto de volumen.

Procesos que se estarán aplicando: Reproducción, conexión y reflexión para la solución de problemas.

Habilidades que se van desarrollando: Resolución de problemas, argumentación, comunicación de información matemática, validación de procedimientos y resultados, manejo de técnicas.

Sesión 1. El medio ambiente y la basura

Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información, sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente deshecha:

Tipos de Basura	Tiempo de Descomposición
Piel de Plátano	1.3 años
Piel de Naranja	1-3 años
Cajas de Cartón	0.5 años
Chicles	20-25 años
Periódicos	Unos pocos días
Vasos de Plástico	Más de 100 años

PREGUNTA 10: Un estudiante está considerando presentar los resultados en una gráfica de barra. Da una razón por la cual la gráfica de barras no es adecuada para presentar estos datos.

Recomendaciones:

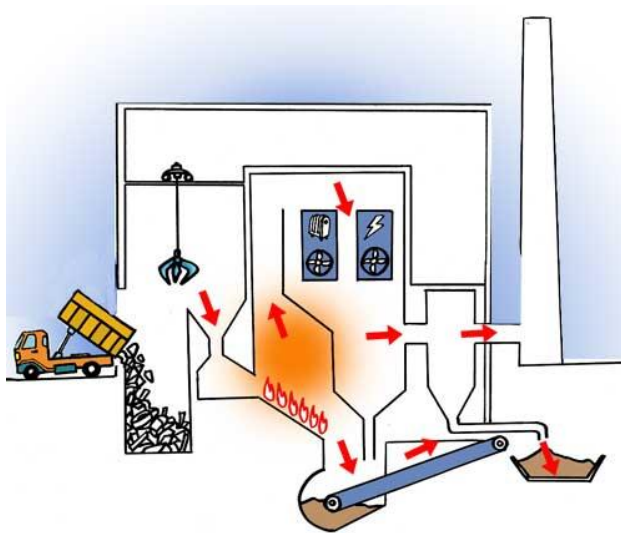
- El docente planteará el problema a los alumnos destinando entre diez y quince minutos para que ellos, primero individualmente, y después reunidos en equipos lo resuelvan.
- El plantearle a los alumnos solo una pregunta es con la intención de que ellos la analicen detalladamente y recurran a sus conocimientos previos para entrar en la situación.
- Siempre es importante el monitoreo cuando los alumnos intentan resolver el problema en equipos, el profesor puede apoyarlos en sus reflexiones, como por ejemplo ¿porque la gráfica de barras no es adecuada? Sugiriendo que traten de visualizar las diferentes gráficas.
- Para familiarizarse con PISA el docente debe recordar que los alumnos no necesitan dar una respuesta única, es decir pueden dar diferentes justificaciones, PISA hace que el alumno se haga crítico, se busca que el alumno comprenda el problema. Por ello, el profesor debe tomarse el tiempo para analizar los diferentes tipos de procedimientos de sus alumnos.
- En último lugar se llegará a la solución dejando en claro los argumentos correctos a la pregunta del problema.

Sesión 2. ¿Vertedero o incineradora?

Para retroalimentar lo analizado en la sesión 1, el docente propone a los estudiantes que respondan a lo siguiente, para profundizar sobre el tema y obtener reflexiones:

En una bolsa de plástico de basura hay un 30% de papel o cartón, un 5% de vidrio, un 5% de plástico, un 50% de materia orgánica y un 10% de otros componentes. Una persona genera un kilogramo diario de desperdicios, [2, pág. 185].

- a) ¿De dónde proceden los tipos de desperdicios de una bolsa habitual? ¿Cuántos gramos de papel tira una persona en un año?
- b) Los vertederos tienen la vida corta porque se llenan pronto. Imagínate que cada persona de un pueblo de mil habitantes tira desperdicios cada día equivalentes a un recipiente cúbico de 20cm x 20cm x 20cm y que la capacidad de un vertedero local fuera de 1 km^3 . ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el vertedero?
- c) Aquí tienes el esquema de una incineradora. En ella entra basura y salen residuos y gases. Consideremos que una incineradora “trata” en un año 30000 toneladas de desperdicios, que con filtros eléctricos emiten 180000 kg de ácido clorhídrico y que con un sistema de lavado suplementario puede emitir 3,000kg de este mismo ácido. ¿Qué tanto por ciento de reducción de este ácido supone?
- d) Busca más información sobre ventajas e inconvenientes de vertederos e incineradoras.



- e) Para retroalimentar esta situación, el docente propondrá la siguiente actividad de tarea.

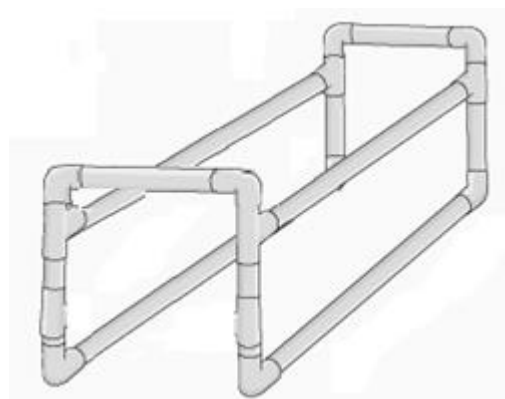
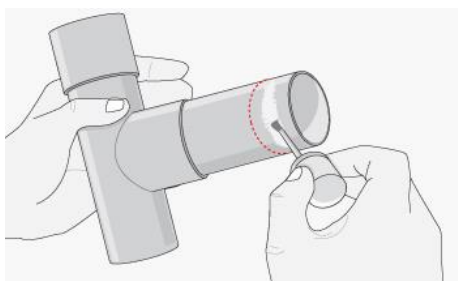
Actividad

Mi proyecto “Un depósito para reciclar”

Como un mini proyecto, el docente puede solicitar a sus alumnos que en equipos fabriquen contenedores de basura. El material a utilizar es el siguiente:

1. Tubos de PVC.
2. Malla para mosquitero.
3. Pegamento, grapas o remaches.

Deben construir un paralelepípedo cuyas aristas estén fabricadas con los tubos de PVC y cuyas caras estén formadas por la malla para mosquitero. El contenedor debe tener 1m^3 de volumen.



Se trata de que los estudiantes no compren material de más, por lo que deben hacer primero sus cálculos. La cara superior del contenedor no lleva malla. Con este mini proyecto el profesor puede aprovechar para trabajar diversos temas como:

- Volumen.
- Área.
- Longitud.
-

Puede hacer preguntas como: ¿Cuántas botellas de 1 litro caben en el contenedor? ¿Si se tienen 500 botellas, cuántos contenedores se necesitan para ellas? etc. (El material lo puede cambiar por otro que considere mejor y más barato.)

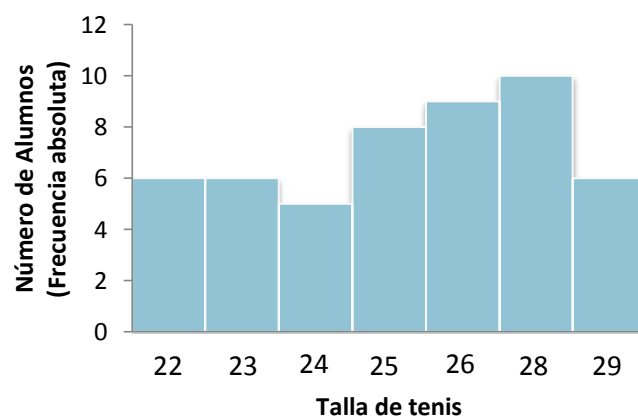


Sesión 3. Olimpiada juvenil

Finalmente, una actividad que el profesor puede aplicar en el aula para que los alumnos comprendan el significado de una gráfica de barras es la siguiente:

Para la olimpiada juvenil, el director de la Escuela le pide al profesor de Educación física que organice los datos de cuántos pares de tenis de cada número se necesitan para los 50 alumnos que participan en esta olimpiada, [8, pág. 102]. Para ello, el profesor elabora una tabla de datos y una gráfica como la que se muestra:

Número de calzado	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
22	6	$6/50 = 0.12$
23	6	$6/50 = 0.12$
24	5	$5/50 = 0.1$
25	8	$8/50 = 0.16$
26	9	$9/50 = 0.18$
27	10	$10/50 = .02$
28	6	$6/50 = 0.12$
Totales	50	$50/50 = 0.1$



FRECUENCIA ABSOLUTA

Es el número de veces que aparece un dato en una muestra estadística



FRECUENCIA RELATIVA

Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el total de frecuencias absolutas. También

El docente solicita a los estudiantes que en su cuaderno, elaboren la tabla de datos y la gráfica con respecto a los pants y a las playeras, utilizando la gráfica de barras:

Talla de pants	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
32	6	
34	8	
36	14	
38	12	
40	10	
42	20	
44	12	
46	18	
Totales		



Talla de playeras	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
32	5	
34	7	
36	15	
38	13	
40	10	
42	14	
44	16	
46	20	
Totales		

3.4 SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL REACTIVO: Pasos [Pág. 62]

Contenido: Cambio y relaciones

Programa: Grado primero, bloque III, V. Grado segundo, bloque IV

Sesiones: Dos

Contexto: Personal

Propósitos:

- Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas $\frac{a}{x} = b$, y $\frac{x}{a} = b$, donde a, b son números naturales y/o decimales.
- Que los alumnos comprendan los significados de proporcionalidad directa de tipo valor faltante, con factor de proporcionalidad entero o fraccionario.
- Que el alumno interprete y exprese relaciones de proporcionalidad directa o inversa, algebraicamente.
- Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Aprendizajes esperados:

- ✓ Resolver problemas que impliquen sustituir valores en una fórmula.
- ✓ Resolver problemas que impliquen despejar una variable.
- ✓ Realizar estimaciones de medidas relacionadas con diferentes magnitudes.
- ✓ Resolver problemas que impliquen conversiones de unidades de longitud.
- ✓ Resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Procesos que se estarán aplicando: Reproducción, conexión e integración para la solución de problemas.

Habilidades que se van desarrollando: Resolución de problemas, usando comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstracta, comunicación de información matemática, validación de procedimientos y resultados, manejo de técnicas.

Sesión 1. La longitud del paso

El docente solicita a los estudiantes que le digan con sus propias palabras cómo entienden la siguiente situación:



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos. Posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde:

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.

PREGUNTA 20:

Si aplicamos la fórmula a Gabriel que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Gabriel? Anota el procedimiento.

PREGUNTA 21:

Bernardo sabe que sus pasos son de 0.80 metros. Aplicando la fórmula, calcula la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Anota el procedimiento.

Recomendaciones:

- El docente planteará el problema a los alumnos destinando entre quince y veinte minutos para que ellos, primero individualmente, y después reunidos en equipos lo resuelvan.
- Para contestar la primera pregunta, el alumno necesita sustituir los valores en la fórmula dada, por lo que el monitoreo del profesor es importante, el profesor puede hacerlos reflexionar preguntándoles: ¿La colocación de los datos en la fórmula es correcta?

- Para familiarizarse con PISA el docente debe recordar que en el primer reactivo se requiere de procesos de reproducción, donde el alumno requiere del conocimiento de los hechos, la representación, el reconocimiento de equivalencias y propiedades matemáticas, recomendamos por lo tanto que una vez terminado el tiempo para responder la pregunta, el docente permita que los alumnos expongan sus soluciones con el resto del grupo comparando así diferentes argumentos ya sean correctos o erróneos.
- En último lugar se llegará a la solución dejando en claro los argumentos correctos a la pregunta del problema.

Sesión 2. Habilidad de medir con pasos

Para continuar con el tema, resulta conveniente motivar a los estudiantes preguntándoles si ellos saben cuánto mide su longitud de paso. Como no siempre se dispone de regla para medir o de cinta métrica, por lo tanto, es muy útil saber cómo, sin necesidad de ellas, pueden efectuarse mediciones aproximadas. Por ejemplo, durante una excursión, puede medirse fácilmente con pasos una distancia más o menos larga. Para ello es preciso conocer la longitud de un paso, así como saber contar los pasos con exactitud. Naturalmente, no todos los pasos son siempre iguales: podemos andar a paso corto, y también caminar a paso largo. Sin embargo, cuando se efectúa una marcha ordinaria, los pasos son aproximadamente de la misma longitud. Conocida la longitud media de cada paso, puede, sin gran error, medirse la distancia recorrida. De esta forma el docente puede llevar a cabo las actividades siguientes:

Actividad 1

El docente, previamente a la sesión, pide a los estudiantes llevar el material siguiente:

- Cinta métrica
- O flexómetro

Para determinar la longitud media del paso propio, es necesario medir la longitud total de muchos pasos y calcular la magnitud de uno. Para hacer esta operación, hace falta utilizar una cinta métrica.

Pida a los alumnos que formen grupos de 5, y después pídale que extiendan la cinta en un terreno llano (por ejemplo las canchas de deportivas) y mida la distancia correspondiente a 20 metros. Marque esa línea en el suelo y retire la cinta. Pídale que elijan a un miembro del equipo para que ande con paso ordinario, siguiendo la línea, y cuente el número de pasos que ha dado. El docente debe explicarles a los alumnos que es posible que no resulte un número exacto de pasos en la distancia que se mida. Entonces, si el resto es menor que la mitad de un paso, puede simplemente despreciarse; si es mayor que medio paso, puede contarse ese resto como un paso entero.

Finalmente enséñeles que dividiendo la distancia total de 20 metros por el número de pasos, obtendremos la longitud media de uno. Este número no hay que olvidarlo, para, en caso necesario, hacer uso de él cuando se deseen realizar mediciones de distancia.

Modelo Matemático

La longitud media del paso de un adulto equivale a la mitad de su estatura, hasta la altura de sus ojos. Así, por ejemplo, si la estatura de una persona es de 1,40 m, entonces la longitud de su paso, es de *70 centímetros*. Vale la pena comprobarlo.

Además de averiguar la longitud de su paso, le resulta útil saber su *velocidad* de marcha, es decir, la cantidad de kilómetros que recorre durante una hora. Con frecuencia se emplea la regla siguiente: Nosotros andamos durante la hora tantos kilómetros, ¿cuántos pasos se hacen durante tres segundos? Así, por ejemplo, si nosotros damos cuatro pasos en tres segundos, entonces, durante una hora recorreremos *4 kilómetros*.

Sin embargo, la regla resulta útil solamente cuando conocemos la longitud del paso. Este valor se halla fácilmente, llamando x la longitud del paso, y n , la cantidad de pasos que damos en tres segundos, mediante la ecuación:

$$\frac{3.600}{3} * n * x = n * 1000$$

$$\frac{3.600}{3} x = \frac{n * 1000}{n}$$

$$\frac{3.600}{3} x = 1000$$

$$1200x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{1200}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Es decir, la longitud está entre *80 y 85 centímetros*.

Este es un paso relativamente grande; corresponde a una persona muy alta. Si su paso no mide entre *80 y 85 cm*, tendrá que calcular la velocidad de su marcha midiendo el tiempo que tarda en ir de un lado a otro.

Actividad 2

El profesor pide a los estudiantes que:

- Midan la longitud de su paso.
- Cuenten cuántos pasos da en un minuto.
- Calculen la velocidad de su andar.
- Realicen una gráfica tiempo-número de pasos.

El profesor puede plantear preguntas como las siguientes:

- a) ¿Cuántos pasos das sin detenerte en una hora?
- b) ¿Cuánto tiempo tardas en caminar un kilómetro sin detenerte?

En las escuelas generalmente nos quedamos en la reproducción. Pero PISA busca que los profesores hagan reflexionar y orientar a los alumnos para que empiecen a razonar con análisis y con procedimientos matemáticos para lograr generalizar. PISA lleva una información interesante de su vida real al contexto matemático. Así que de las actividades anteriores el profesor, logrará que partiendo de algo cotidiano como caminar, el alumno sepa aplicar formulas y comprenda ideas como la de velocidad, pero más importante comprenda que las matemáticas se encuentran en su entorno y le resulten más familiares.

Sesión 3. La jarra de miel.

Por otro lado en el caso de las preguntas del problema de los pasos, el alumno debía utilizar una fórmula que el problema inicialmente le da y despejar la incógnita deseada, para que los alumnos tengan éxito en este tipo de problemas es necesario que comprenda y más aún sepan por ellos mismos deducir y plantear problemas.

Un problema que sugerimos al docente para que los alumnos practiquen no solo el concepto de despejar una variable, sino también complementando resuelvan un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

Una jarra llena de miel pesa 500 gramos. Esta misma jarra llena de alcohol pesa 350 gramos. Si el alcohol pesa la mitad que la miel, ¿cuánto pesa la jarra?



Aquí presentamos una solución. Posiblemente los estudiantes hallen otras formas de resolverlo:

Solución:

1 Jarra de Miel $\longrightarrow$ 500gr.

1 Jarra de Alcohol $\longrightarrow$ 350gr.

$$1) J + M = 500$$

$$2) J + \frac{1}{2} M = 350$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución tenemos lo siguiente:

Despejando de 1):

$$M = 500 - J$$

Sustituyendo en 2:

$$J + \frac{1}{2}(500 - J) = 350$$

$$J + 250 - \frac{J}{2} = 350$$

$$J - \frac{J}{2} = 350 - 250$$

$$\frac{J}{2} = 100$$

$$J = 2(100)$$

$J = 200$ Así pues hemos encontrado el valor de lo que pesa la jarra.

Volviendo a las ecuaciones 1) y 2) obtendremos el peso exacto de la miel y del alcohol.

$$1) J + M = 500$$

$$(200) + M = 500$$

$$M = 500 - 200$$

$$M = 300$$

Así pues hemos encontrado el valor de la miel 300 gr.

Encontremos ahora el valor del alcohol:

$$2) J + \frac{1}{2} M = 350$$

$$(200) + \frac{1}{2} M = 350$$

$$\frac{1}{2} M = 350 - 200$$

$$\frac{1}{2} M = 150$$

Esto representaría el valor del Alcohol: 150gr.

Las secuencias anteriores pueden ser evaluadas utilizando la siguiente:

Evaluación formativa de aplicación de procesos y desarrollo de competencias

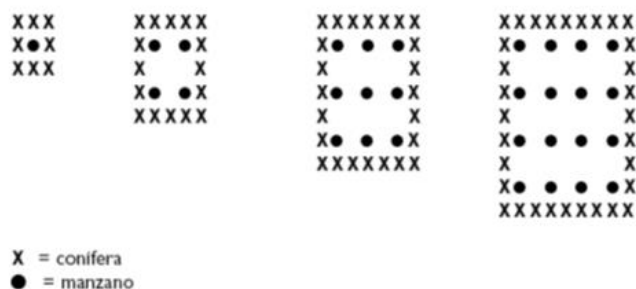
Lista de alumnos	¿Muestra Autonomía en la resolución de problemas?	¿Presenta avance para pasar de los procedimientos informales a los procedimientos expertos?	¿Va avanzando en la presentación de sus argumentos partiendo de una explicación pragmática a una apoyada en axiomas?	¿Reproduce Procedimientos conocidos para resolver problemas, incluye la definición de hechos, la realización de cálculos y procedimientos de rutina?	¿Requiere la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver problemas no rutinarios en escenarios familiares? ¿Considera la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución de problemas estándar?	¿Moviliza la comprensión, reflexión y creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias? ¿Abarca la formulación y solución de problemas complejos? Desarrolla una Aproximación matemática y capacidad de generalización.
1						
2						
3						

Ahora, en lo que sigue solo daremos sugerencias didácticas para trabajar los reactivos que se consideraron en el capítulo II de este trabajo. Recomendamos que los docentes usen el mismo formato de las tres secuencias anteriores para que construyan las propias.

3.5 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Manzanas [Pág. 36]

Un granjero plantó árboles de manzanas siguiendo un patrón cuadrado. Para protegerlos del viento plantó pinos alrededor de huerto.

A continuación se presentan diagramas de esta situación, donde podrás apreciar el patrón usado para plantar los árboles de manzana y de pinos, para cualquier número de filas (n) de árboles de manzana.



PREGUNTA 1: Completa la tabla:

No.	Número de árboles de manzana	Número de pinos
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Sugerencias para la pregunta 1

El profesor puede preguntar a los alumnos lo siguiente:

- Completa la tabla hasta $n=10$
- Halla un patrón para el cálculo del número de árboles de manzanas
- Halla un patrón para el cálculo del número de árboles de pinos
- Si hay 120 pinos ¿Cuántos árboles de manzana habrá? Y si hay 400 árboles de manzana ¿Cuántos pinos habrá?
- Considerando los diagramas de la pregunta uno, halla varias formas de contar el número de pinos.
- Sea P en número de pinos que hay en una fila. Halle una fórmula en términos de P para calcular el número de pinos en total que hay en cualquier diagrama.

Sugerencia: Compruebe que $P = 2n + 1$. Si a cada fila de pinos le quitamos el pino de cada esquina tendremos:

$$P - 2 = (2n + 1) - 2 = 2n - 1$$

Al hacer esto, note que en cada lado quedan el mismo número de pinos, por lo que podemos calcularlos al multiplicar por 4:

$$4(P - 2) = 4(2n - 1)$$

Y para calcular el total de pinos, ahora hay que sumar los 4 pinos que se habían quitado:

$$4(2n - 1) + 4 = 4(2n - 1) + 4$$

Observe que el miembro derecho es $8n$:

$$4(2n - 1) + 4 = 8n - 4 + 4 = 8n$$

Y el miembro izquierdo es:

$$4(P - 2) + 4 = 8P - 8 + 4 = 4P - 4 = 4(P - 1)$$

Por lo tanto la formula buscada es:

$$4(P - 1)$$

PREGUNTA 2: Hay dos fórmulas que puedes usar para calcular la cantidad de árboles de manzana y de pino en un patrón como el anteriormente descrito:

Número de árboles de manzana = n^2

Numero de pinos = $8n$

Donde n es el número de filas de árboles de manzana es igual al de pinos. Encuentra el valor para n y muestra tu método para calcularlo.

Sugerencia didáctica para la pregunta 2

El profesor puede preguntar a los alumnos lo siguiente:

- a) Si hay 200 pinos ¿Cuál es el número de filas de árboles de manzanas?
- b) Realice una gráfica para el número de árboles de manzanas y para el número de pinos.
- c) Halle el punto de intersección de las gráficas.

PREGUNTA 3: Imagina que el granjero quiere hacer más grande su huerto con más filas de árboles. Conforme el granjero amplíe su huerto, ¿qué se incrementará más rápidamente: la cantidad de árboles de manzana o la de pinos? Explica cómo encontraste tu respuesta.

Sugerencia didáctica para la pregunta 3

El profesor puede pedir al alumno lo siguiente:

- a) Haga un análisis de la gráfica obtenida en el inciso b) anterior para comparar el número de árboles de manzanas y el de pinos.

3.6 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: velocidad de un coche de carreras [Pág. 40]

Este grafico muestra como varia la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llena de 3km durante su segunda vuelta.



PREGUNTA 4: ¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el inicio de la recta más larga del trayecto?

PREGUNTA 5: ¿Dónde se registró la velocidad más baja durante la segunda vuelta?

PREGUNTA 6: ¿Qué puedes decir sobre la velocidad del auto entre las marcas de los 2.6km y 2.8km?

PREGUNTA 7: A continuación se muestran los dibujos de cinco trayectos: ¿En cuál de los trayectos viajó el auto del que se obtuvo la gráfica anterior?



Sugerencias didácticas

El profesor puede plantearles a sus alumnos las siguientes preguntas con la finalidad de aprovechar al máximo el problema:

- ¿Qué velocidad llevaba el carro cuando realizó la segunda desaceleración?
- ¿Qué velocidad llevaba el carro antes de recorrer la segunda curva?
- ¿Cuál es la distancia aproximada del tramo recto más largo de la pista?
- ¿Cuál es la curva más cerrada?
- ¿Cuál es la velocidad más alta que alcanza el auto?
- ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando el auto alcanza la velocidad más baja en la segunda vuelta?
- ¿Si el conductor no conoce la pista podemos hacer la gráfica de la primera vuelta?
- ¿Consideras que la gráfica de la tercera vuelta sería la misma de la segunda?

Nota: Sería importante para lograr que el alumno preste atención a este problema el cuestionarle lo siguiente ¿La gráfica que se muestra en este problema es de un caso real? (Después de dejar que responda el alumno) Justifique: Si es una gráfica de la vida real, y esto es porque cuando un auto entra en curvas tiene que desacelerar y al encontrar una recta acelera otra vez.

Actividad 1

“Rueda-metro”



¿Cómo puede medir distancias que no están en línea recta? Una respuesta puede ser usando un cordón, poniéndolo en la misma forma del camino, luego extendiéndolo de manera recta y midiéndolo con un flexómetro. ¿Pero si el camino es muy largo, como le haría?

Aquí le damos una opción. Pida a los estudiantes que elaboren su propio instrumento que les ayude a medir

caminos rectos y curvos.

Lo primero que se necesita es elaborar una rueda (de plástico, madera, metal, etc.) que tenga un metro de perímetro a la cual se le pondrá un soporte para llevarla rodando. Al mismo tiempo, se aconseja ponerle un dispositivo que ayude a contar el número de vueltas que va dando. Este dispositivo puede ser de plástico, metal, etc., el cual se colocara en un punto de la circunferencia de la rueda con la intención de que produzca un sonido y esté a su vez nos indique que ha pasado una vuelta. La rueda se debe graduar en centímetros pues los caminos pueden medir distancias fraccionarias. Pida a los alumnos medir distancias rectas y curvas usando su propio Rueda-metro, [9, pág. 50].



Interés didáctico:

1. Medida de recorridos en metros y centímetros (paseos, calles, fachadas,..., etcétera).
2. Medida de áreas y volúmenes a partir de las medidas longitudinales hechas con el rueda-metro.
3. Aproximación al número pi.
4. Estudio de funciones trigonométricas (seno, coseno,...).
5. Proporcionalidad entre ángulos y longitudes de arcos.

Actividad 2

Calculando velocidades

En la cancha de la escuela pida a los alumnos que:

1. Tracen un camino recto que mida 100 metros. (O la distancia que usted determine).
2. Calculen su velocidad al correr esta distancia.
3. Obtenga una tabla con los nombres, tiempos, edades estaturas y pesos.
4. Realicen varias gráficas (edad-tiempo, estatura-tiempo, peso-tiempo)

Ahora pida a los alumnos que:

- a) Tracen un camino (un circuito con curvas cerradas y no tan cerradas) que mida cien metros o la distancia que usted determine. El Ruedometro sirve para tal efecto.
- b) Calculen su velocidad en este circuito.
- c) Obtenga una tabla con los nombres y tiempo.

- d) Comparen las tablas obtenidas del camino recto y del circuito manifestando las diferencias matemáticas y físicas.
- e) En las curvas más cerradas ¿Cómo era su velocidad?
- f) Realicen un dibujo del circuito con curvas.
- g) Realicen una gráfica de la velocidad de los alumnos respecto de la distancia recorrida.

3.7 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Terremoto [Pág. 48]

Se emitió un documental por televisión acerca de los terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. En él se incluyó una discusión sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo afirmó: “Durante los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres”.

PREGUNTA 11: ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

- e) $(\frac{2}{3})(20) = 13.3$, de modo que, dentro de 13 ó 14 años a partir de esta fecha habrá un terremoto en la ciudad de Zed.
- f) $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, de modo que se puede estar seguro que habrá un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento dentro de los próximos 20 años.
- g) La probabilidad de que haya un terremoto en la ciudad de Zed en algún momento durante los próximos 20 años es más alta que la probabilidad de que no haya un terremoto.
- h) No se puede decir que va a pasar, porque nadie puede estar seguro de cuándo habrá un terremoto.

Sugerencias Didácticas

La pregunta sobre el Terremoto involucra el concepto de probabilidad el profesor puede explicar a la clase lo siguiente:

El concepto de probabilidad tiene su origen en problemas de conteo, recordemos la definición clásica de probabilidad, dada por Laplace (pero usada por Cardano un siglo antes):

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{números de casos posibles}}$$

Es cierto que el origen de la teoría de probabilidad se encuentra en los juegos de azar. Girolamo Cardano, uno de los hombres universales del renacimiento italiano, fue el primero en estudiar probabilidades concienzudamente. Cardano fue un gran apostador, pero a cambio encontró la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado, la hazaña intelectual más grande desde la época de los griegos, quienes trataron infructuosamente de encontrar la solución. Este hecho fue un gran suceso para la humanidad: Por primera vez después de casi

dos mil años se resolvía un problema que los antiguos no habían podido resolver. Este es uno de los hechos por lo que llamamos “Renacimiento” a este periodo, [13, pág.2-3].

Quizás alguna vez el concepto de probabilidad estuvo ligado a lo fortuito y a lo transitorio. “Llevar una vida azarosa” era lo mismo que decir: llevar una vida insegura. De tal manera que lo azaroso era lo opuesto de lo cierto, de lo seguro. Alguna vez se pensó que todo se podía conocer con certidumbre. Laplace, por ejemplo, sostenía que el futuro estaba completamente determinado por el presente.

Hace tiempo que sabemos que la realidad es totalmente opuesta a esta imagen determinista. El comportamiento de las partículas elementales está descrito por ondas de probabilidad. Nuestras modernas máquinas electrónicas, de las que dependemos cada vez más, no podrían existir sin la mecánica cuántica. De esta manera, la probabilidad está en el corazón de las teorías científicas que necesitamos para sobrevivir.

Una vez que el profesor despierte el interés de sus alumnos con la historia y el concepto básico de probabilidad se sugiere que el docente proponga al estudiante que analice lo siguiente:

¿Quién tiene razón?

El profesor puede plantarles a los alumnos el siguiente problema:

En un colegio, los resultados han sido los que se reflejan en el cuadro adjunto. En él aparecen los aprobados de dos años consecutivos, y se han distinguido según fueran los alumnos fueran repetidores o no.

	1993		1994	
	Matrícula	Aprobados	Matrículas	Aprobados
No repiten	22	12	15	8
Repetidores	3	2	10	9
TOTAL	25	15	25	17

Hasta aquí los datos, son los mismos para todos. Lo que difieren son las interpretaciones. A continuación reproducimos algunas de ellas.

- *El director del colegio:* “El año 94 marca un avance del 13% en el número de aprobados entre nuestros alumnos de octavo. Es otra demostración del buen trabajo que han realizado a lo largo del año los profesores y alumnos. Felicitaciones para todos.”

- *Un profesor del colegio:* “Agradezco al director su comentario en lo que me afecta, pero no creo que haya que echar las campanas al vuelo porque la tasa de aprobados no ha crecido más del 8%.”
- *Un alumno:* “Como siempre, los profesores tienen un punto de vista muy extraño. Tanto si se es repetidor como si no, este año las cosas han ido peor que en el 93. No creo que sea cuestión de felicitarse.”
- *Un alumno repetidor:* “No creo que haya que ponerse como el compañero, porque la verdad es que, repitiendo, en el 94 tenían un 35,5% más de posibilidades de aprobar que en el curso pasado.”
- *Otro alumno repetidor:* “En absoluto. Repitiendo este año tenías un 10% menos de posibilidades de aprobar que en el 93.”

Es evidente que los comentarios no solo difieren algo, si no que parecen ser absolutamente contradictorios.

La idea de este problema, es que el profesor deje que los alumnos den sus respuestas y justificaciones, para que esto se debata en clase. Se trata de analizar los comentarios de este problema y llegar a la conclusión con todo el grupo que todos ellos tienen razón. Para el profesor proporcionamos las respuestas y comentarios correctos.

Antes de pasar a comentar estas afirmaciones, conviene apuntar que situaciones parecidas a la aquí descrita son más frecuentes de lo que parece. Se dan en la presentación de los resultados económicos de las empresas; en las ventas conseguidas individualmente por cada agente comercial; en la presentación de los resultados en las escuelas y por la publicidad y la trascendencia de los hechos, cada vez que hay elecciones y los distintos partidos analizan los resultados que han obtenido.

Analicemos las diferentes afirmaciones. Parece evidente que todo el mundo, cuando hace una afirmación, sobre todo si conlleva alguna precisión numérica como es nuestro caso, procura analizar los datos y hacer operaciones con ellos.

Acto seguido elige la que cree más interesante para él o más llamativa. Por eso vamos a intentar desentrañar cual es el procedimiento seguido por cada uno.

Para poder hacerlo, vamos a utilizar lo que llamaremos “Las tasas de éxito” (entendiendo por tal el porcentaje de aprobados) del conjunto del curso y de cada uno de las partes en que se divide en los 2 años y las relaciones entre ellos.

En los dos años que nos ocupan, las (tasas de éxito) serán:

- En 1993 $T_1=15/25=0.6$, luego del 60%.
- En 1994 $T_2=17/25=0.68$ por tanto del 68%.

Pasemos a ver las variaciones de esas tasas. Podemos considerar la variación absoluta:

$$68\%-60\%= 8\%.$$

Es lo que dice el profesor. Luego sí que tiene razón.

Pero podemos considerar también la variación relativa que será el cociente entre la absoluta y la tasa inicial de éxito, es decir $8/60=0.133$, luego es del 13.3% que es lo que afirma el director, incluso quedando un poco corto. Por lo tanto el director también tiene razón.

Para analizar ahora los comentarios de los alumnos vamos a calcular las tasas de éxito diferenciado entre alumnos entre repetidores y no repetidores.

En el caso de los no repetidores, obtenemos, en 1993, $a_1 = 12/22 = 0.545$, luego del 54.5%.

En 1994 será $a_2=8/15 = 0.533$, es decir el 53.3%.

Para los repetidores, con cálculos idénticos, será, en 1993 $b_1=3/3=1$, el 100%. Y en 1994, $b_2=9/10=0.9$ ósea, el 90 %.

A la vista de esos números, y como $a_2 < a_1$ y $b_2 < b_1$ se ve que el primer alumno también tenía razón en su comentario.

Pasemos ahora a los repetidores. Uno de ellos es en el 94, con lo que su tasa de éxito es $b_2=90\%$. Pero no lo era en el 93, en el que su tasa de éxito fue $a_1 = 54.5\%$. Y como $b_2 = a_1 + 35.5\%$ resulta que también tiene razón.

Y, para no dejarle mal, es lo que le pasa también con el otro repetidor, que también tiene razón puesto que $b_2 = b_1 - 10\%$.

Así pues todos tienen razón pero cada uno se refería a algo diferente.

Es interesante destacar que este caso introduce una corriente de sano escepticismo. Aquello de que los números son incontrovertibles (el “2 y 2 son 4”) del habla coloquial como muestra de algo indiscutible, de que una vez que se han hecho determinadas operaciones, si se hacen bien, no se puede discutir, parece que no siempre funciona. Puede ser una corriente de aire fresco en la seriedad tan pesada que suele rodear a las matemáticas, [7, pág. 40].

3.8 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Campeonato de ping pong [Pág. 50]

Tomás, Ricardo, Luis y David han formado un grupo de entrenamiento de un club de Ping-Pong. Cada jugador quiere jugar una vez contra cada uno de los otros jugadores. Han reservado dos mesas de ping-pong para estas partidas.

PREGUNTA 12: Completa la siguiente plantilla de partidas escribiendo los nombres de los jugadores que jugarán en cada partida.

	Mesa 1	Mesa 2
1ª Ronda	Tomás – Ricardo	Luis – David
2ª Ronda		
3ª Ronda		

Sugerencias didácticas

Actividad 1

El docente forma equipos con los alumnos y propone que armen un torneo de fútbol, básquetbol o vóleybol donde jueguen todos contra todos de tal forma que haya tres partidos el mismo día a la misma hora en 3 canchas diferentes. La intención es que los estudiantes hagan un esquema para manejar esta información.

También se le propone al profesor que ponga a trabajar a sus alumnos con los siguientes problemas:

El jugador más valioso

El baloncesto es un deporte en el que las estadísticas de cada jugador (lo que se llama “los números” del mismo) tienen gran importancia: cuantos puntos ha obtenido y el porcentaje de aciertos, el número de tapones, rebotes, asistencias, etcétera

Aprovechando este tema, se pueden realizar actividades en las que se calculen porcentajes. Como las siguientes, en la que, además, se trata de hacer una clasificación de los jugadores que han participado en un partido de baloncesto:

Toma las estadísticas de un partido de baloncesto que aparecen en los periódicos o en internet (busca alguna en el que estén para cada jugador los tiros intentados y transformados, así como los rebotes, tapones, etc.). Queremos que encuentres con todos esos datos el jugador más valioso (JMV) del partido:

1. Propón una tabla para elegir el JMV. Confréntalo con los que propongan tus compañeros y traten de ponerse de acuerdo. Una vez que lo hayas conseguido, haz una clasificación de los jugadores de los dos equipos siguiendo la tabla que hayas decidido.

2. En caso de no ponerse de acuerdo , o para darles una idea les proponemos el siguiente tabla:
- Por cada punto, tapón, asistencia, recuperación o falta a favor se sumara un punto.
 - Por cada pérdida de balón o falta en contra se restará un punto.
 - Se sumaran puntos por porcentajes de acierto en los lanzamientos de la siguiente forma:
 - Tiros de campo: menos del 20%, 0 puntos; entre 20 y 40% 1 punto; entre el 40 y el 60%, 2 puntos; más del 60%, 3 puntos.
 - Tiros libres: menos del 40% 0 puntos; entre 40 y 60% 1 punto; entre el 60 y el 80% 2 puntos; más del 80%, 3 puntos.
 - Se sumaran puntos por minutos jugados 2 puntos, menos de 10 minutos, 0 puntos; entre 10 y 20, 1 punto; entre 20 y 30, 2 puntos; más de 30 minutos, 3 puntos.
3. Compara las clasificaciones obtenidas utilizando las diferentes tablas. ¿Hay muchas diferencias? No daremos resultados, porque depende de los datos que se hayan obtenido de la prensa, del internet y de las tablas propuestas. Pero queremos llamar la atención sobre el hecho de que, además de trabajar con los porcentajes, hay que buscar los métodos más apropiados para realizar la clasificación, una de las aplicaciones más importantes en la formación de conocimiento, y que casi nunca se desarrolla en la enseñanza (y cuando se hace es aplicando tablas dictadas por el profesor), [7, pág. 42].

Torneo de tenis

En un torneo de tenis se inscriben 128 participantes. Como es bien sabido, se juega por simple eliminación. Es decir, el jugador que pierda un partido queda eliminado.

La pregunta es: ¿Cuántos partidos se jugaron en total hasta definir el campeón?

Es obvio que uno puede hacer la cuenta escribiendo todos los datos, pero la idea es poner a prueba la capacidad para pensar distinto, para pensar en forma “no convencional”.

La tentación que uno tiene es la de dividir el número de participantes por dos, con lo que quedan 64 partidos para la primera ronda. Como se elimina la mitad de ellos, quedarán, después de esos 64 partidos, 64 competidores. Luego, los dividimos en dos otra vez, y tendremos 32 partidos, y así sucesivamente. Resultaría que uno tiene que sumar la cantidad de partidos hasta llegar al partido final.

Si uno suma todos estos partidos:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127.$$

Otra forma es como sigue:

Como hay 128 participantes, para que uno quede eliminado tiene que perder un partido, nada más que uno. Pero tiene que perderlo. Luego, si hay 128 participantes al comienzo del torneo, y al final queda uno (el campeón, quien es el único, quien es el único que no perdió ninguno de los partidos que jugó), significa que los restantes 127, para haber quedado eliminados tiene que haber perdido exactamente un partido. Y como en cada partido siempre hay exactamente un ganador y un perdedor lo que tuvo que pasar es que tuvieron que jugarse 127 partidos para que quedaran eliminados todos y quedara uno sólo que fue el único que los ganó todos. Moraleja: se jugaron exactamente 127 partidos.

3.9 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: El mejor coche [Pág. 51]

Una revista de automóviles emplea un sistema de calificación para evaluar los coches nuevos, dando el premio de “Auto del año” al coche con la mayor calificación total. Se están evaluando cinco coches nuevos y sus calificaciones se muestran en el recuadro.

Coche	Dispositivo de seguridad (S)	Consumo de combustible (F)	Apariencia exterior (E)	Accesorios interiores (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Las calificaciones se interpretan de la siguiente forma:

3 puntos = Excelente, 2 puntos = Bueno, 1 punto = Regular.

PREGUNTA 13: Para calcular la calificación total de un coche, la revista emplea la siguiente regla, que es la suma ponderada de los puntos individuales de calificación:

$$\text{Calificación total} = (3xS) + F + E + T$$

Calcula la calificación total para el coche “Ca”.

PREGUNTA 14: El fabricante del coche “Ca” pensó que la regla para la calificación total era injusta. Escribe una regla para calcular la calificación total de modo que el coche “Ca” sea el ganador. Tu regla debe incluir las cuatro variables y debes escribirla poniendo números positivos en los cuatro espacios de la ecuación de abajo.

$$\text{Calificación total} = (\quad)S + (\quad)F + (\quad)E + (\quad)T$$

Sugerencias didácticas

El profesor puede aplicar los siguientes problemas en el aula y pedir a los alumnos que expongan al grupo sus respuestas, con la finalidad de que los alumnos logren desarrollar la capacidad de comunicar con precisión sus acciones y reflexiones con respecto a sus conclusiones.

Tarifas eléctricas

Se quiere realizar una modificación a las tarifas eléctricas en el estado de Yucatán. De este modo, con la finalidad de informar a la población sobre los beneficios de las nuevas tarifas se distribuyó un volante.

NUEVAS TARIFAS ELÉCTRICAS



Comisión Federal de Energía.
Av. Loma Bonita, Num. 100 Col. Uxmal, México, D.F. C.P.
06520. RFC: CFE110101-M10

1 de octubre de 2011

Estimado usuario:

Con la finalidad de apoyar a los consumidores del Estado de Yucatán, reformularemos el esquema tarifario actual. Esto debido al gran consumo de energía que se realiza durante los meses de verano debido a las elevadas temperaturas que se registran.

A continuación presentamos una tabla comparativa con respecto a los esquemas tarifarios actuales y el propuesto.

	Primer Bimestre	Segundo Bimestre	Tercer Bimestre	Cuarto Bimestre	Quinto Bimestre
Consumo en kWh	150	398	400	450	310
Costo Tarifa actual	185	408.2	410	455	329
Costo Nueva Tarifa	100	296	300	400	120

Los usuarios que consuman una cantidad menor o igual a 300 kWh pagarán una tarifa preferencial fija. Sin embargo, cada kWh que sobrepase ese margen tendrá un costo extra de 2 pesos. Con la forma de pago anterior, la tarifa fija era hasta por un consumo máximo de 100 kWh. Posterior a esto se pagaban de acuerdo con la siguiente fórmula $\text{pago} = .9(x - 100) + 140$, donde x representa los kWh consumidos.

www.cfemex.gob.mx

Material Didáctico. La situación aquí presente es hipotética y nada tiene que ver la realidad de empresa o secretaría de gobierno alguna. Esta se ha desarrollado pensando en el logro de objetivos educativos específicos

Después de analizar la información en el volante, Pedro y María tienen dudas de si en verdad les benefician las nuevas tarifas.

1. En el último recibo de luz (con el antiguo plan tarifario), María pagó \$80 pesos por un consumo de 90 kWh, ¿le conviene el cambio de tarifa? ¿Cuál era la tarifa fija antes de la nueva? Entre uno y cien paga lo mismo que son \$80 ya que no rebasó los 100kwh.

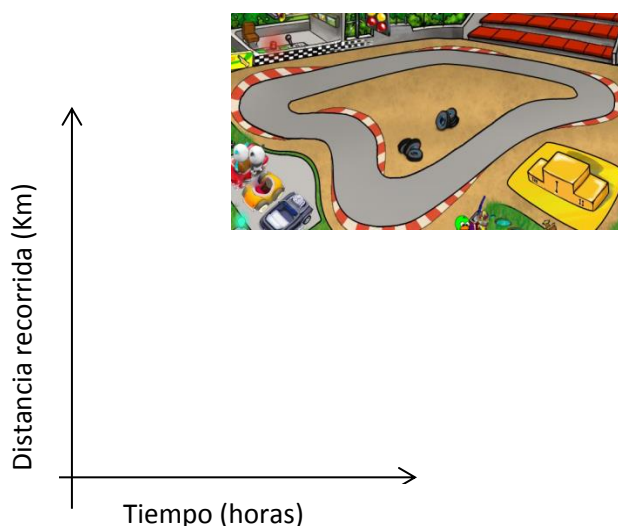
2. Pedro no recuerda cuánto pagó en su último recibo de luz, pero recuerda que el consumo realizado fue de 375 kWh, ¿le conviene el cambio de tarifa? Esta pregunta es absurda.

3. María y Pedro organizaron la fiesta de fin de año en la oficina en la que trabajan, y ellos se encargaron del pago de los servicios, incluido el de la luz. Ellos pagaron \$599 por un consumo de 610 kWh, ¿le conviene el cambio de tarifa a su jefe? Ellos se preguntan a qué personas les conviene el cambio de tarifa y a quienes no. Ayúdalos a encontrar una respuesta.

Autódromo

Un automóvil de carreras recorre 150 km cada hora. ¿Qué distancia recorrerá en $3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}$ y 6 horas?, [8, pág. 103].

Tiempo (h)	Distancia (km)
1	150
2	
3	
$3\frac{1}{2}$	
4	
$4\frac{1}{2}$	
5	
$5\frac{1}{2}$	
6	

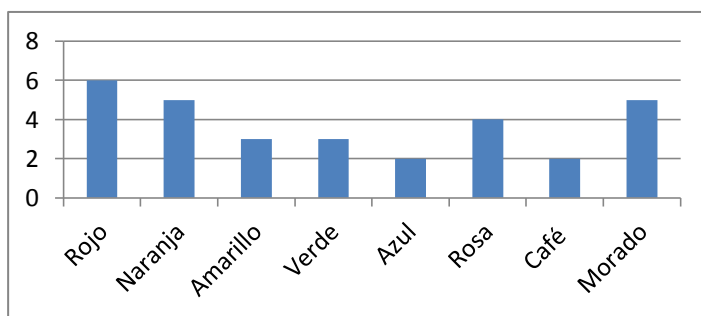


3.10 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Caramelos de colores [Pág. 54]

PREGUNTA 15:

La mamá de Roberto lo dejó tomar un caramelo de una bolsa. Roberto no puede ver los caramelos.

El número de caramelos de cada color que hay en la bolsa se muestra en la gráfica siguiente.



¿Cuál es la probabilidad de que Roberto escoja un caramelo rojo?

Sugerencias didácticas

Utilizando el problema anterior, el profesor puede preguntar a los alumnos:

1. ¿Cuál es el caramelo que tiene mayor probabilidad de salir?
2. ¿Cuál es el caramelo que tiene la menor probabilidad de salir?
3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo rojo y luego un verde?

Actividad 1

Lunetas de colores

El profesor pide a los estudiantes por anticipado que cada uno lleve al aula una bolsa de lunetas y solicita lo siguiente:



- a) Que cada quien cuente la cantidad de lunetas que tiene su bolsa.
- b) Que cuenten la cantidad de lunetas por colores.
- c) Que haga una gráfica: Colores-Número de lunetas.
- d) Que revuelvan las lunetas y las coloquen nuevamente en la bolsa.
- e) Que calculen la probabilidad obtener una luneta roja (u otro color).
- f) Que calcule la probabilidad de obtener una luneta azul (u otra de diferente color a la del inciso e)
- g) Que calcule la probabilidad de obtener en una sola sacada, una luneta roja luego una azul.
- h) Que calcule la probabilidad de obtener en una sola sacada, una luneta roja o una azul.

Actividad 2

Se le propone también al profesor que ponga a trabajar a sus alumnos con el concepto de porcentaje con problemas de la vida real como el siguiente:

La sandía



Una sandía de agua que pesa 20 kg. Está formado por un 99% de agua.

Después de darle el sol todo el día, parte del agua se evapora y se queda con el 98 % de agua. ¿Cuánto pesará la sandía después de la evaporación?

Solución:

$$20\text{kg} \longrightarrow 100\%$$

$$x \text{ kg} \longrightarrow 99\%$$

$$x = \frac{(20)(99)}{100}$$

$$x = \frac{1980}{100}$$

$$x = 19.8\text{kg}$$

Ahora se tiene que toda el agua que tiene la sandía sería:

$$19.8 \longrightarrow 100\%$$

$$y \text{ kg} \longrightarrow 98\%$$

$$y = \frac{(19.8)(98)}{100}$$

$$y = \frac{1940.4}{100}$$

$$y = 19.40\text{kg}$$

Así pues, si notamos .2 de la fruta no se evapora.

Finalmente, lo que pesa la sandía después de la evaporación es:

$$19.4 + .2 = 19.6 \text{ kg.}$$

3.11 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Exámenes de ciencias [Pág. 55]

PREGUNTA 16:

En la escuela de Malena, su maestro de ciencias les aplicó exámenes de 100 preguntas. Malena tuvo un promedio de 60 aciertos en sus primeros cuatro exámenes de Ciencias. En el quinto examen obtuvo 80 aciertos.

¿Cuál es el promedio de aciertos de Malena en Ciencias después de los cinco exámenes?

Promedio: ____

Sugerencias didácticas

El promedio es un cálculo sencillo que el alumno debe usar. Pero para que el alumno sepa que es lo que va a usar para resolver este tipo de problemas es necesario que el profesor en clase le dé una idea matemática concreta, de esa forma el tendrá las herramientas adecuadas.

En seguida, mostraremos algunas actividades para trabajar con este concepto.

Actividad 1

Promedios

Los promedios nos dan información general acerca de datos reunidos. La precipitación promedio de lluvia en un año no nos dice cuanto llovió en un día en especial, pero si nos da información para comparar la precipitación de un año con la de otro. Como la lluvia se junta en lagos y presas, la comparación de un año con otro indica que tan húmeda es la región.

Las calificaciones que se anotan en las boletas escolares son un promedio de las puntuaciones que se obtuvieron en cada materia durante un número específico de días. Las calificaciones de Laura en matemáticas durante el periodo de estudio fueron 86, 97, 94, 89, 95 y 91.

Para determinar su promedio de calificaciones en matemáticas, sigue estos pasos:

Paso 1: Determina la suma de las calificaciones: $86 + 97 + 94 + 89 + 95 + 91 = 552$

Paso 2: Divide la suma entre 6, que es el número total de puntuaciones.

Actividad 2

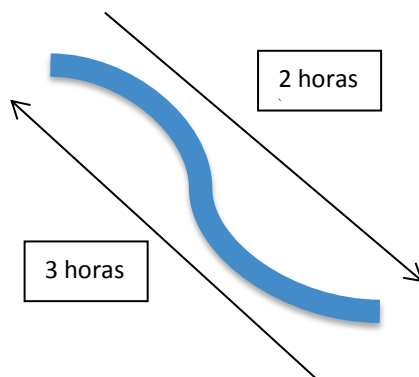
Una vez que el profesor haya terminado de explicar el concepto de promedio le sugerimos plantear el siguiente problema:

El nadador

Carlos, buen nadador, recorre una distancia río abajo en 2 horas. Si el regreso al punto de salida, es decir recorriendo la misma distancia y al mismo ritmo, pero río arriba tarda 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría Carlos en recorrer esa misma distancia en un lago?



Solución:



Si tomamos los dos tiempos que el nadador se hizo y los intersecto el punto medio es el total que Carlos haría en recorrer un lago normal.

Este es un problema de promedios, primero debemos sacarlo que representan los tiempos en minutos, entonces 2 horas representa 120 minutos y 3 horas representa 180 minutos

Así pues:

$$\frac{120 + 180}{2} = 150 \text{ minutos}$$

Es decir 2 horas con 30 minutos.

Es importante que al presentarle a los alumnos este tipo de problemas ellos puedan exponer a sus compañeros las diferentes formas de resolver el problema esto hará que como profesor uno se dé cuenta de que tipo de pensamiento tienen los alumnos y además así también se retroalimentan los alumnos entre ellos.

Actividad 3

¿Quién es más alto?

El profesor pide a los estudiantes que realicen lo siguiente:

- Obtener su estatura.
- Calcular el promedio de estatura de los varones.
- Calcular el promedio de estatura de las mujeres.
- Calcular el promedio de estaturas del grupo.
- Realiza una gráfica de: Estatura-número de alumnos.

¿Qué tan largo?

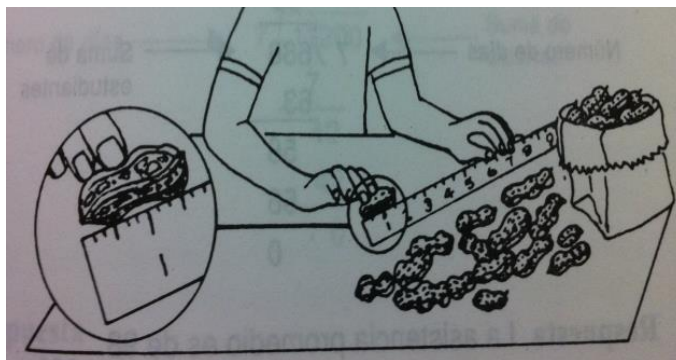
Objetivo: Determinar la longitud promedio de un cacahuete.

Material: 20 cacahuates con cáscara, una regla.

Procedimiento:

- Mide y anota la longitud de cada cacahuete., redondéala al centímetro o pulgada más cercana.
- Suma las 20 medidas.
- Divide la suma de las medidas de longitud entre 20, que es el número de cacahuates.

Resultados: Las sumas de las longitudes dividida entre el número total de cacahuates medidos da la longitud promedio de estos. La longitud de los cacahuates varía de 2 ½ a 5cm (1 a 2 pulgadas).



¿Sabías que...

Hay alrededor de 250 cacahuates de tamaño promedio en 454gr (una libra) de cacahuates? Los cacahuates son uno de los alimentos más nutritivos. Hay más proteínas en un kilo de cacahuates que en un kilo de carne, [15, pág. 43].

3.12 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Opciones [Pág. 57]

PREGUNTA 17:

En una pizzería, se puede ordenar una pizza básica con dos ingredientes: queso y tomate. Puedes también crear tu propia pizza con ingredientes extra. Puedes elegir entre cuatro distintos ingredientes extra: aceitunas, jamón, champiñones y salami. Rubén quiere ordenar una pizza con dos distintos ingredientes extra.

¿De entre cuántas combinaciones distintas puede elegir Rubén?

Respuesta: ____ combinaciones.

Sugerencias didácticas

Proponemos al profesor que analice con sus alumnos el siguiente tema:

Principios básicos

Uno de los conceptos matemáticos abstractos más primitivos que conocemos es el de número y, dentro de los números, el de los números naturales o enteros positivos: 1, 2, 3, 4, etc. Con ellos representamos las cantidades de objetos que se nos presentan en la vida cotidiana. En esta sección desarrollaremos algunas técnicas que permiten determinar con facilidad cantidades. Comencemos por ilustrar la necesidad de aprender estas técnicas de conteo con unos ejemplos:

Si se nos enseña un puñado de canicas y se nos pregunta cuantas son, un vistazo nos bastara para contarlas y darla repuesta; sin embargo si se nos pregunta cuántas patas tiene 100 perros, en lugar de buscar los 100 animales y contarles las patas, haremos una abstracción, y la operación: $4 \times 100 = 400$ nos dirá la respuesta; utilizamos aquí una técnica muy simple de multiplicación. Desde luego hay preguntas que necesitan técnicas más elaboradas. Estudiaremos estas técnicas mediante ejemplos que iremos complicando gradualmente.

Analicemos primero con cuidado un ejemplo que a primera vista es trivial pero que nos enseña la clave básica del conteo.

Ejemplo. ¿Cuántos números enteros de tres o menos cifras hay?

Solución. La respuesta a esta pregunta es fácil: Hay 1000 pues son todos los números enteros de 0 a 999. Esta solución no nos enseña gran cosa. Retomemos ahora el problema buscando una solución constructiva; esto es, para cualquier $n = 1, 2, 3, \dots$, la cantidad de números de hasta $n+1$ cifras se puede obtener de la cantidad de números de hasta n cifras: simplemente se multiplica por 10. Vamos a describir con detalle este procedimiento.

Números de a lo más una cifra hay 10, a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. Para contar los de hasta dos cifras (del 0 al 99) no necesitamos escribirlos todos; basta con observar que la primera cifra puede ser cualquiera de los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y por cada uno de éstos hay 10 terminaciones distintas; por ejemplo, los números de dos cifras que empiezan con 4 son: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 y 49, diez en total; lo mismo para cada una de las otras decenas. Así la cantidad de enteros entre 0 y 99 es $10 \times 10 = 100$. El siguiente paso es análogo: Para contar los números de hasta tres cifras hay que agregar un dígito (posiblemente 0) a cada uno de los 100 números de 2 o menos cifras; como hay diez posibilidades la respuesta será $10 \times 10 = 1000$.

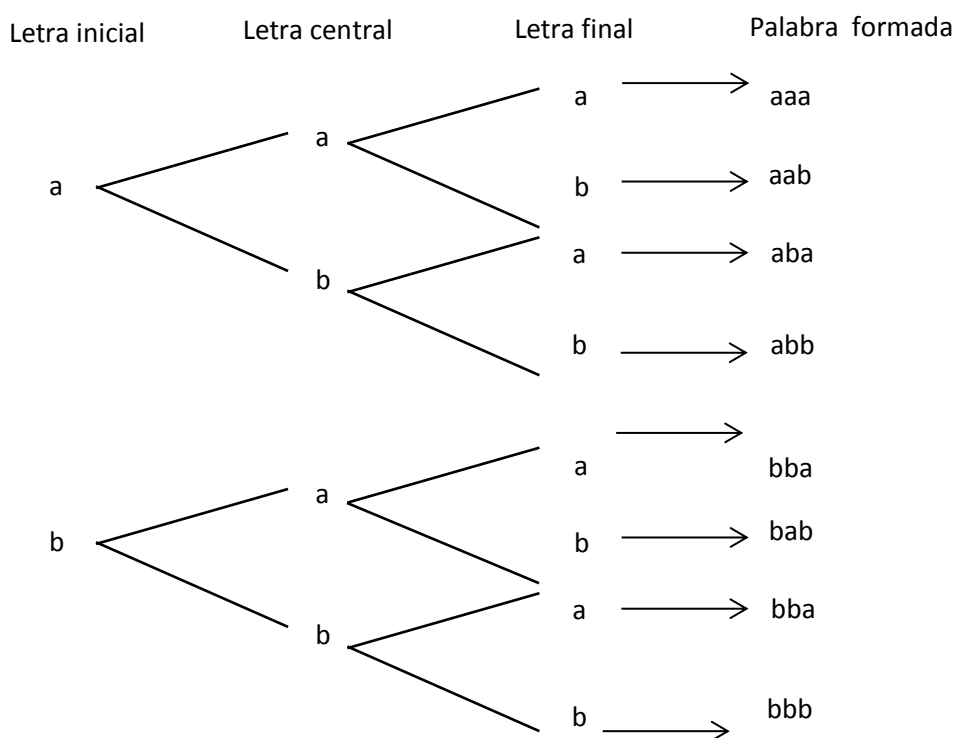
Este procedimiento de “construir sobre lo ya construido” que hacemos utilizando se llama procedimientos inductivos. Muchas demostraciones de propiedades y fórmulas de números naturales se basan en él. El principio combinatorio que manejamos en el ejemplo anterior (y que manejaremos en los siguientes) es:

Principio fundamental de Conteo.

Si una cierta tarea puede realizarse de m maneras diferentes y, para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas juntas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas diferentes.

Ejemplo. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si se dispone de un alfabeto con dos letras: a y b ?

Solución: Procedemos como en el ejemplo anterior. En este caso conviene ilustrarlo haciendo un “diagrama árbol”.



Resolvamos ahora el ejemplo utilizando nuestro principio fundamental de Conteo. Consideremos tres casillas: , la primera para la letra inicial, la segunda para letra central y la tercera para la letra final. En cada casilla hay dos elecciones posibles: letra a o letra b. La respuesta entonces $\underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} = 8$. El procedimiento inductivo es como sigue: En la primera casilla hay dos posibilidades para elegir la letra. Una vez formada una palabra de una letra: a o b, para agrandar a una palabra de dos letras hay dos posibilidades, así que palabras de dos letras hay $2 \times 2 = 4$. Para completar cada una de éstas a una palabra de tres letras hay dos posibilidades; entonces hay $4 \times 2 = 8$ palabras de tres letras.

Ejemplo. ¿Cuántas banderas bicolors se pueden formar si se dispone de 4 lienzos de tela de colores distintos y un asta? (Nota: Banderas como rojo-rojo no son permisibles; por otro lado, es importante el color que queda junto al asta, de esta manera banderas como rojo-azul y azul-rojo se consideran distintas.) Solución. En este caso consideramos dos casillas. La de la izquierda, digamos, representa el lienzo junto al asta, el cual tiene 4 elecciones posibles. Una vez elegido éste, el color para la derecha se puede escoger de 3 formas (pues no se repiten repetición de colores). Así hay $4 \times 3 = 12$ formas distintas de formar las banderas.

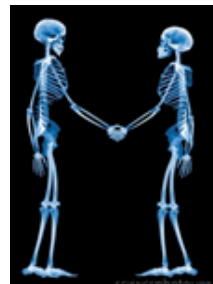
En [11, sec. 1] y en [13, cap. 2] se puede estudiar más a fondo los conceptos básicos de la combinatoria. Ahí se encuentran diversos ejemplos y problemas para proponer a los estudiantes.

Actividad

Después de analizar la teoría el profesor puede ponerles a sus alumnos los siguientes problemas para que ellos lo resuelvan de diferentes formas:

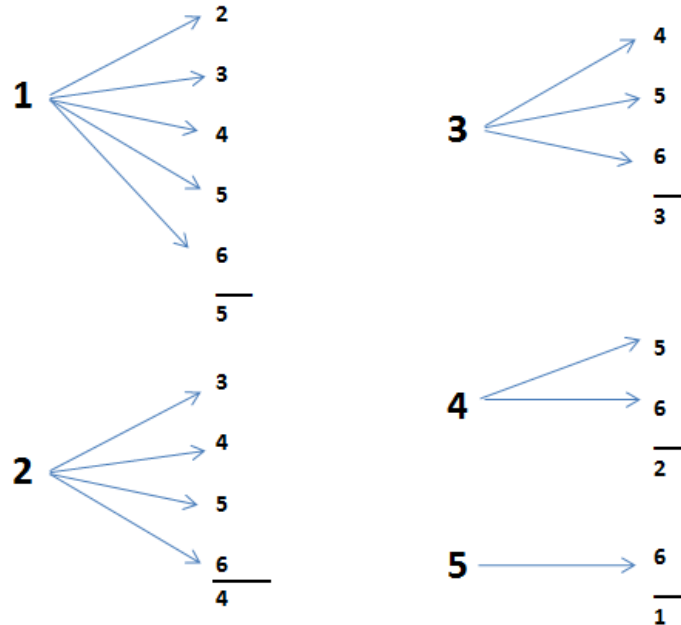
1. La reunión

- a) Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon las manos. Podrías decir cuántas personas asistieron a esa reunión sabiendo que hubo 15 apretones de manos. si fueran 30 los apretones, ¿cuántas personas habrían asistido?



Solución 1. Inducida o por Combinación

Basándose en que una persona no podía saludarse a ella misma, se buscó una serie numérica que al sumarla diera 15 y en base a eso se obtuvo el siguiente resultado, donde cada número representa a una persona diferente.



Así por lo tanto se requiere de 6 personas para generar los 15 saludos. Y la serie que se encontró es $5+4+3+2+1=15$.

Solución 2. Utilizando la fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{2} &= 15 \\ \rightarrow x(x-1) &= 30 \\ \rightarrow x^2 - x &= 30 \\ \rightarrow x^2 - x - 30 &= 0 \\ \rightarrow (x-6)(x+5) & \\ x &= 6, \quad x = -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto de aquí se obtiene que el número de personas que se necesita para generar los quince saludos, sea 6.

Es importante tener presente que la prueba Pisa busca que a partir del modelo matemático el alumno puede llegar al verbal propuesto. Por ellos es necesario dejar que los alumnos resuelvan los problemas como ellos puedan sin imponerles nada, y después que ya comprendieron el significado del problema entonces introducirlos a aplicar por ejemplo en este caso la ecuación de segundo grado y al hacerlo de esta forma el problema fácilmente se resuelve

- b) Hay 6 personas en una reunión. Si cada una saluda de mano a todas las demás personas participantes ¿Cuántos apretones de mano tienen lugar?

Solución:

Una manera de hacer que el alumno resuelva este ejercicio es pidiéndole que lo lleve a la práctica, por ejemplo el profesor puede pedir que se hicieran equipos de 6 para que ellos puedan interactuar el problema llegando a la solución de 15 saludos con la práctica y posteriormente encontrar la forma matemática de resolver llegando así:

Tengo 6 personas que pueden saludar a (6-1) ya que esta persona no se puede saludar a ella misma.

Entonces ahora:

$$\frac{6(6-1)}{2} = n$$

$$\frac{6(5)}{2} = n$$

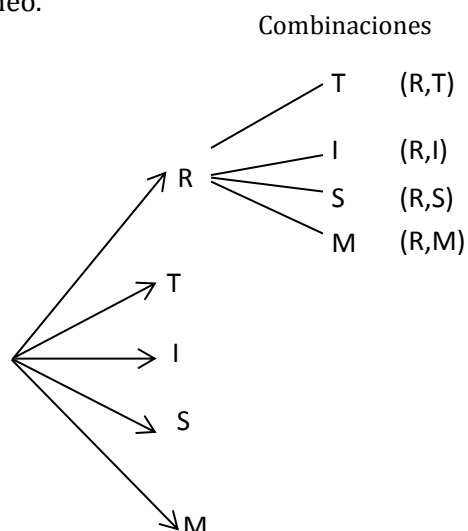
$$\frac{30}{2} = n$$

$$15 = n$$

Una vez que se trabajó con el grupo el problema anterior el profesor puede proponer el siguiente problema para que los alumnos resuelvan:

2. Campeonato de verano

1. En la escuela secundaria núm. 26 se efectuó un torneo de basquetbol todos contra todos de ida y vuelta con los siguientes equipos: los Reventados (R), los Titanes (T), los Intelectuales (I), los Sexys (S), los Matemáticos (M). Completa el siguiente diagrama de árbol para ver todas las combinaciones posibles que pueden hacerse. Calcula todas las combinaciones posibles que pueden hacerse en la primera ronda del torneo.



- a) ¿Cuántos partidos jugarán los Titanes?
 - b) ¿Cuántos partidos se jugarán en total en total en la primera ronda?
2. En la semifinal, quedan los equipos: los Titanes, los Sexys y los Matemáticos. Haz el diagrama de árbol para ver todas las combinaciones posibles.
 - a) ¿Cuántos partidos jugarán ahora los titanes?
 - b) ¿Cuántos partidos habrá en total en la semifinal?
3. En la final se enfrentan en un solo juego los Titanes y los Matemáticos.
 - a) ¿Cuántos partidos jugarán los Titanes durante todo el torneo?
 - b) ¿Cuántos partidos se jugarán en total durante todo el torneo?

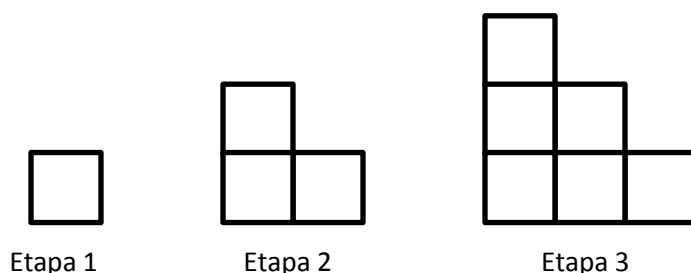
Finalmente una recomendación importante para encaminar al alumno a la resolución de problemas PISA, es pedirle que él trate de escribir y redactar su solución y compartirla con el grupo.

Nota: Si los alumnos saben interpretar los resultados y deducir la generalización de soluciones, se puede rescatar bastantes conceptos, ya que las diferentes soluciones nos llevan a introducir variados temas matemáticos.

3.13 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Patrón escalonado [Pág. 60]

PREGUNTA 19:

Roberto construye un patrón escalonado utilizando cuadros. Estas son las etapas que sigue:



Como puedes ver, él usa un cuadro en la Etapa 1, tres cuadros en la Etapa 2 y seis en la Etapa 3. ¿Cuántos cuadros deberá usar en la cuarta etapa? Respuesta: ____cuadrados.

Sugerencias didácticas

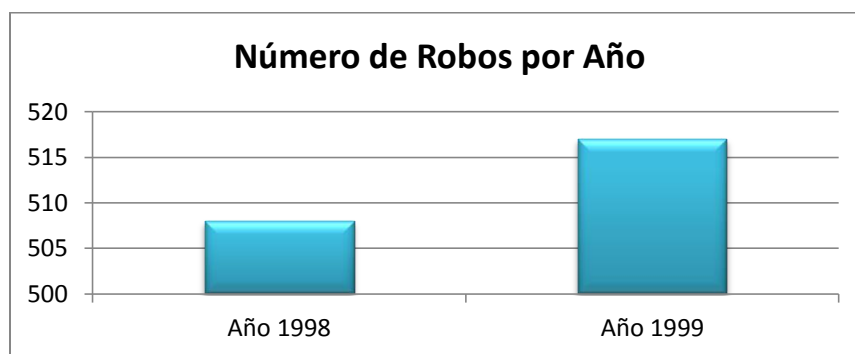
El profesor pide a los estudiantes que realicen lo siguiente, [3, pág. 32]:

- a) Calcular la suma de los números del 1 al 20 de varias formas.
- b) Calcular la suma del 1 al 100.
- c) Obtener una fórmula para calcular la suma del 1 a un número n .
- d) Calcula la suma siguiente: $3+6+10+15+21+28+36+45+55$ y obtén una fórmula para el cálculo de los números triangulares.

- e) Calcula la suma siguiente: $1+4+9+16+25+49+64+81+100$ y obtén una fórmula para el cálculo de los números cuadrados.
- f) Calcular la suma:
 $1+4+6+9+16+25+56+49+64+81+100$.
- g) Hallar una fórmula para calcular la suma de los cuadrados de los primeros n números.

3.14 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Robos [Pág. 67]

Un reportero en la TV, mostró la siguiente gráfica y dijo: “La gráfica muestra que hay un descomunal incremento en el número de robos de 1998 a 1999”



PREGUNTA 22:

¿Consideras que la afirmación del reportero es una interpretación razonable de la gráfica? Da una explicación que apoye tu respuesta.

Sugerencia didáctica

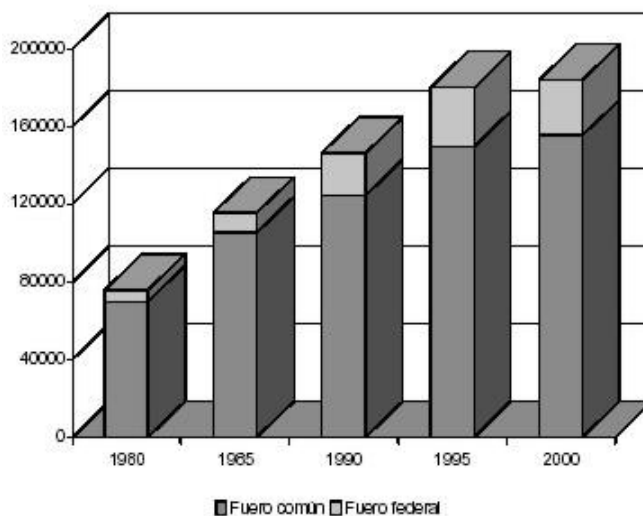
El profesor puede pedirles a sus alumnos que investiguen datos estadísticos sobre el robo en la república Mexicana. Dándoles las siguientes instrucciones:

- a) Creen afirmaciones correctas e incorrectas de los datos que obtuvieron
- b) Posteriormente expongan al grupo sus interpretaciones y acciones.

Presuntos delincuentes en México

Un periódico local del estado de México mostró el siguiente gráfico y dijo: “En términos de su crecimiento, el número total de presuntos delincuentes en el país se incrementó en casi 142 por ciento de 1980 al año 2000”

Presuntos delincuentes en México por fuero

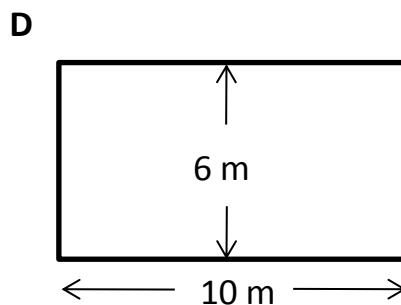
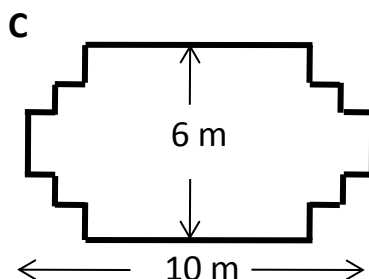
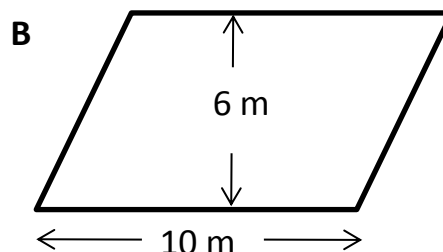
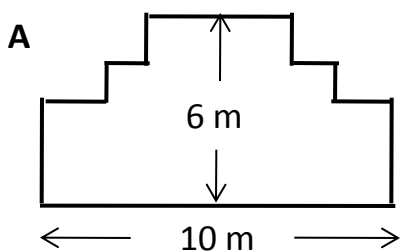


Fuente: Estadísticas judiciales en materia penal, 2001. INEGI.

1. ¿Consideras que la afirmación del periódico es una interpretación razonable de la gráfica? Da una justificación.
2. ¿La gráfica muestra que hay un mínimo aumento en la Evolución del crimen violento?

3.15 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Carpintero [Pág. 69]

PREGUNTA 23: Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín.



Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.

Diseño del Jardín	Usando este Diseño, ¿Se puede realizar con 32 metros de cerca?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Sugerencia didáctica

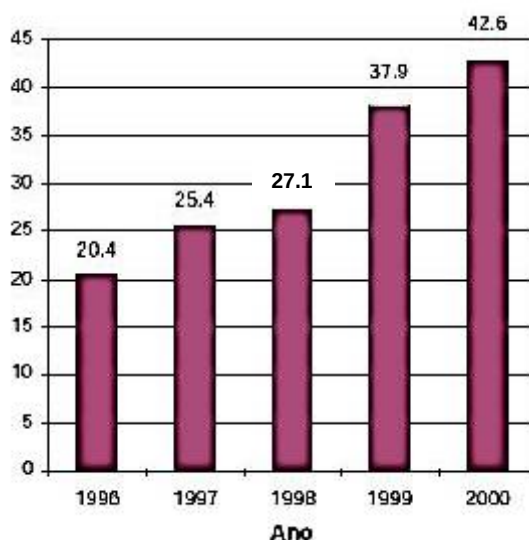
Para sacarle más provecho a este problema el profesor podría plantearles a los alumnos las siguientes preguntas:

- Si el carpintero se tarda 1 hora por metro lineal, ¿cuánto se tardará por todo el recorrido de cada una de las diferentes figuras?
- Si el carpintero cobrara cierta cantidad por metro, ¿cobraría lo mismo por cada uno de los trabajos?
- ¿En que figura se desperdicia más material?
- Si dada la figura yo duplicara la longitud de todos los lados ¿cuál sería el nuevo perímetro?

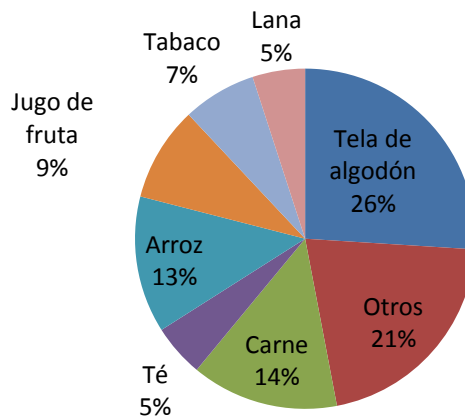
3.16 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Exportaciones [Pág. 72]

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el Zed como moneda.

Total de exportaciones anuales de Zedlandia en millones de Zeds, 1996-2000



Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



¿Cuál es el valor total (en millones de Zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta: ____.

PREGUNTA 25:

¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

- i) 1.8 millones de zeds.
- j) 2.3 millones de zeds.
- k) 2.4 millones de zeds.
- l) 3.8 millones de zeds.

Sugerencia didáctica

El docente puede pedir a los alumnos que investiguen o que se las ingenien para inventar problemas parecidos al de las exportaciones. Que utilicen gráficas de pastel, de barras, lineales etc. Una vez que los alumnos tengan un nuevo problema, pida que trabajen en parejas y comparen sus preguntas con la finalidad de que comuniquen brevemente sus interpretaciones y resultados.

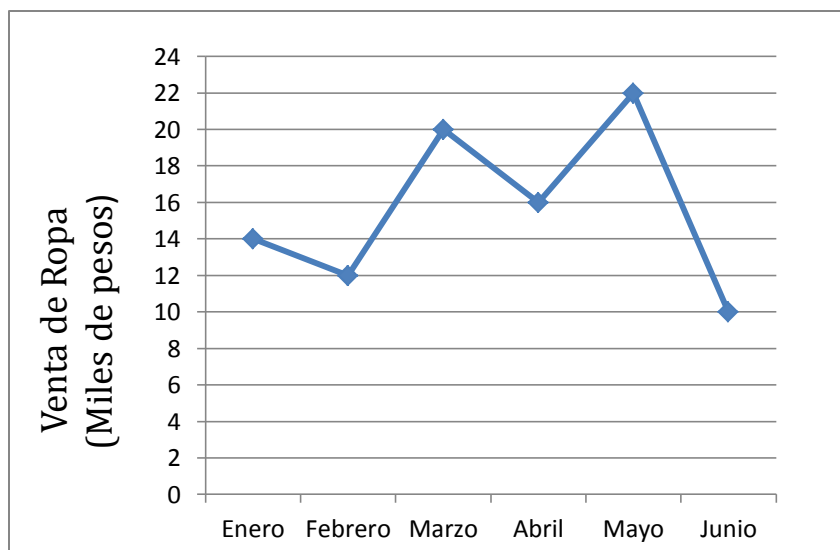
El profesor puede proponer estos dos ejemplos:

1. La siguiente gráfica muestra la distribución del presupuesto de \$3,000,000 de la Compañía BBB en un año. De acuerdo con la información de la gráfica ¿Cuánto dinero se asigna a salarios? Muestra tus cálculos y justifica tu respuesta.

Distribución del Presupuesto
de la compañía BBB



2. Observa la siguiente gráfica que representa las ventas de un almacén de ropa de un semestre del año. De acuerdo con ella, contesta lo siguiente:

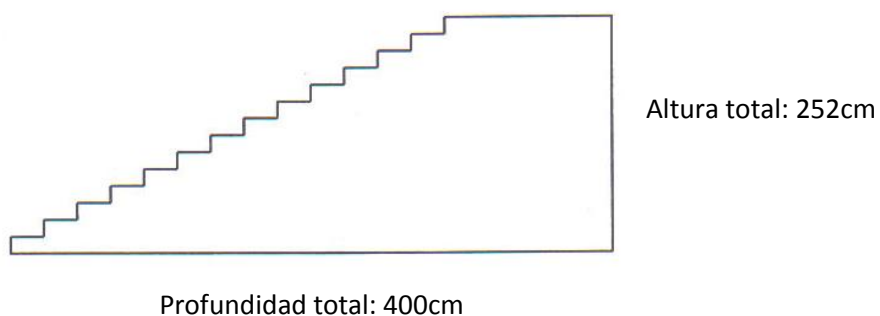


1. ¿En qué mes hubo mayor venta?
2. ¿En qué mes las ventas fueron menores?
3. ¿Cuántos meses se necesitaron para vender más de \$50,000.00?
4. ¿Cuánto llevaban vendido hasta el mes de febrero?

3.17 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: La escalera [Pág. 75]

PREGUNTA 26:

En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tienen una altura total de 252cm:



¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones?

Altura: _____ cm.

Sugerencia didáctica

Le proponemos al profesor que ponga el siguiente problema a sus alumnos:

La pirámide del Sol



Es la edificación más grande de Teotihuacán y una de las más grandes de Mesoamérica. Se encuentra en la Calzada de los muertos, entre la Pirámide de la Luna y la Ciudadela, junto a la gran montaña de Cerro Gordo. La pirámide forma parte de un gran complejo situado en el centro de la antigua ciudad.

Al visitante se le permite subir hasta su cima y este peregrinaje se vuelve la mayor atracción al visitar la zona arqueológica. Se le han puesto unos pasamanos para auxiliarse y no perder el equilibrio en la subida de los 365 escalones, uno por cada día del año, que son bastante empinados. Fue construida por los habitantes de la ciudad de Teotihuacán entre el siglo I a. C. y los siglos VIII o IX d. C.

- Si sabemos que la pirámide tiene 365 escalones y una altura de 71.17 m. ¿Cuál es la altura de cada uno de los 365 escalones? (Suponiendo que todos los escalones tienen la misma altura?)
- Completa los datos faltantes en la siguiente tabla:

DIMENSION	VALOR
Perímetro de la Base	
Lado	223.47 m
Pendiente	44.76m
Área de la superficie lateral	
Volumen	

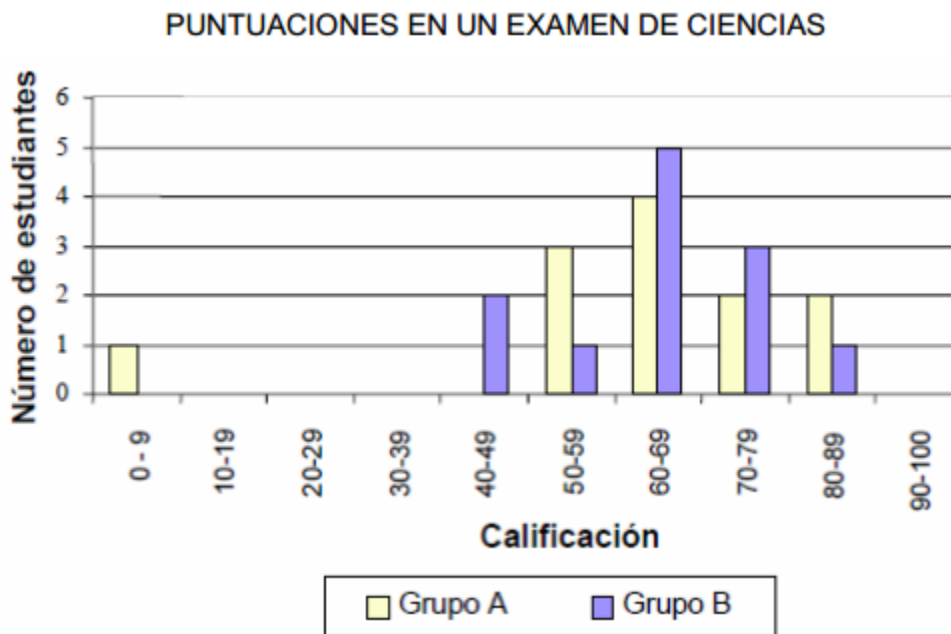
Le proponemos al profesor que pida a sus alumnos que investiguen los datos del cuadro anterior para la pirámide que a ellos más les llame la atención.

3.18 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Calificaciones [Pág. 76]

PREGUNTA 27:

En el diagrama de abajo se muestran los resultados de un examen de ciencias para dos grupos, el Grupo A y el grupo B.

La calificación promedio para el Grupo A es 62.0 y el promedio para el Grupo B es 64.5. Los estudiantes pasan la prueba cuando su calificación es de 50 o más.



Viendo el diagrama, la maestra afirmó que el Grupo B le fuera mejor que al Grupo A en esta prueba.

Los estudiantes del Grupo A no estuvieron de acuerdo con su maestra y tratan de convencerla de que no necesariamente le fue mejor al Grupo B.

Empleando la gráfica, da un argumento matemático que podría emplear los estudiantes del grupo A.

Actividad

Promedio de calificaciones de tu grupo

El profesor pide a los estudiantes que realicen lo siguiente:

1. Obtén la calificación del mes anterior en Matemáticas de cada uno de tus compañeros.
2. Calcular el promedio de calificaciones de los varones.
3. Calcula el promedio de calificaciones de las mujeres.
4. Calcula el promedio de calificaciones del grupo.
5. Realiza una gráfica de: Calificaciones-número de alumnos.

3.19 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Cubos con números [Pág. 78]

PREGUNTA 28:

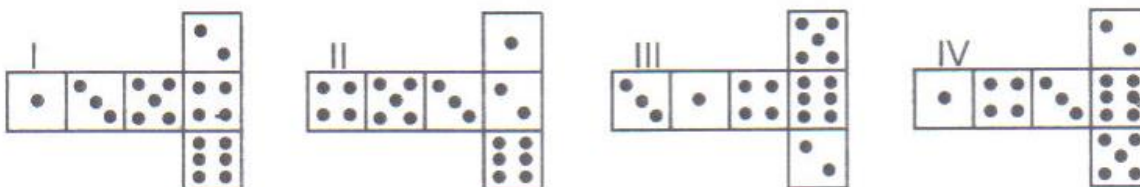
Del lado derecho encontrarás un dibujo de dos dados. Los dados son cubos especiales con números para los cuales se aplica la siguiente regla:

El número total de puntos en dos caras opuestas siempre es siete.

Tú puedes construir un sencillo cubo con números cortando, doblando y pegando un pedazo de cartón. En el diagrama de abajo puedes ver cuatro recortes que pueden usarse para hacer cubos, con puntos en las caras



¿Cuál o cuáles de las siguientes formas puede (n) doblarse para formar un cubo que cumpla con la regla de que la suma de las caras opuestas sea 7?



Para cada forma, pon un círculo alrededor de “Sí” o de “No” en el cuadro que aparece a continuación.

Forma	¿Cumple con la regla de la suma?
I	Sí / No
II	Sí / No
III	Sí / No
IV	Sí / No

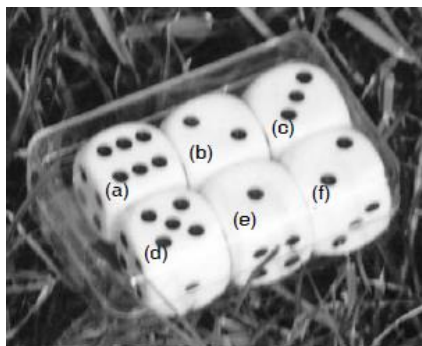
Sugerencias didácticas

Cubos

Le proponemos al profesor utilizar los siguientes problemas con sus alumnos, para familiarizarlos con el concepto de cubo.

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados:

La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete.

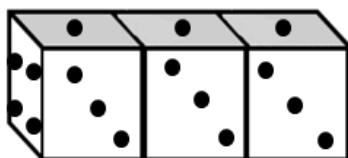


Escribe en cada casilla de la tabla siguiente el número de puntos que tiene la cara inferior del dado correspondiente que aparece en la foto.

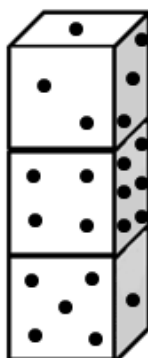
(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Conociendo que la suma de las dos caras opuestas del dado suma 7 el profesor puede pedir a los alumnos que creen problemas divertidos por ejemplo:

1. ¿Cuál es la suma de las caras ocultas de los dados?



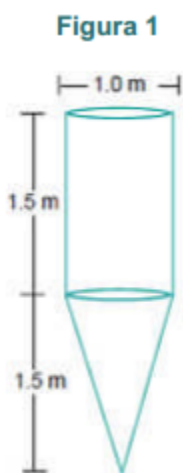
2. De las dieciocho caras, siete quedan visibles, dejando once caras escondidas. ¿El número total de puntos que no está visible es?



3.20 PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: El depósito de agua [Pág. 82]

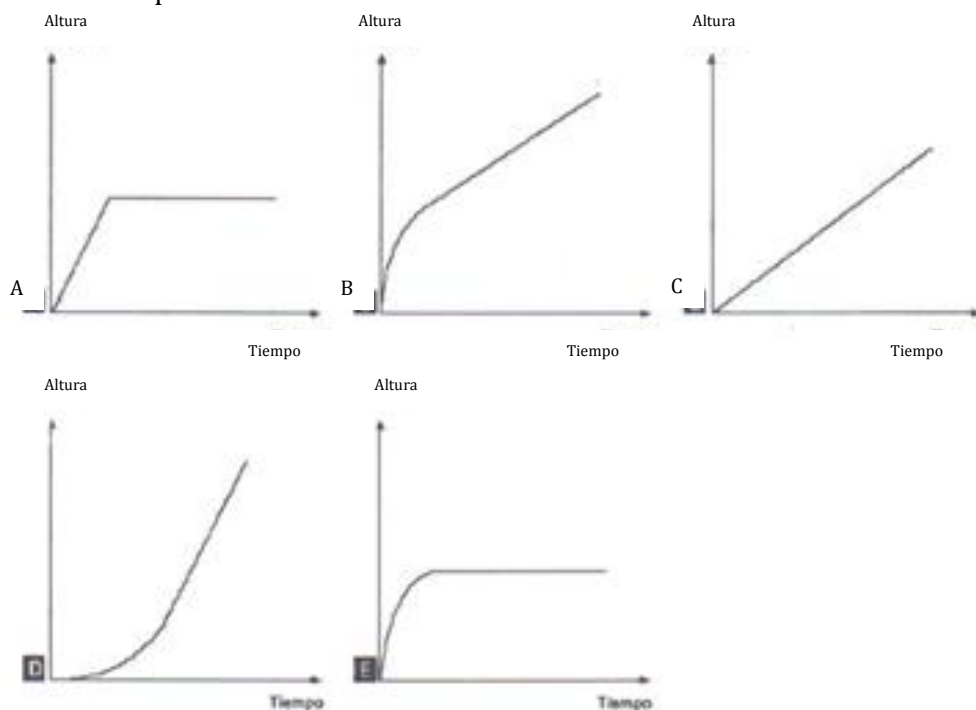
PREGUNTA 29:

Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura 1. Inicialmente el depósito está vacío. Después, se llena con agua a razón de un litro por segundo.



Depósito de agua

¿Cuál de los gráficos siguientes muestra cómo va cambiando la altura del agua en la cisterna en función del tiempo?



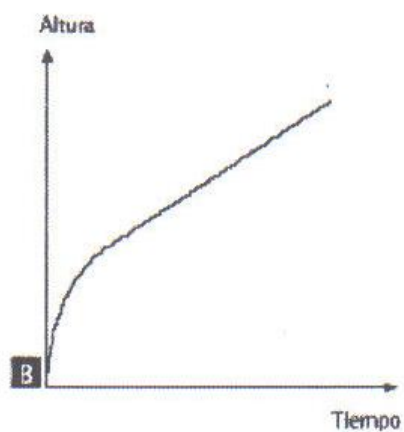
Sugerencia didáctica

Le proponemos al profesor que pida a los estudiantes que elaboren la forma del depósito de agua para cada una de las siguientes gráficas que nos muestran cómo va cambiando la altura del agua en la cisterna en función del tiempo.

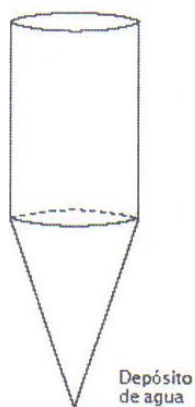
Por ejemplo:

Dada la siguiente gráfica, dibuja que forma tiene el depósito.

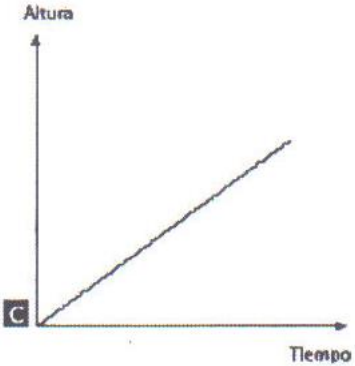
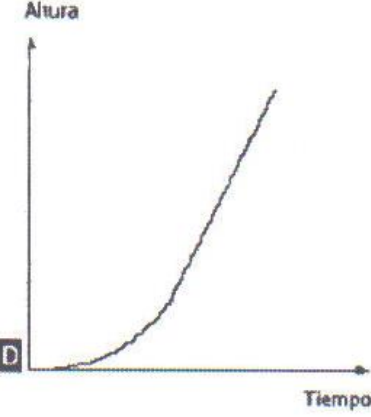
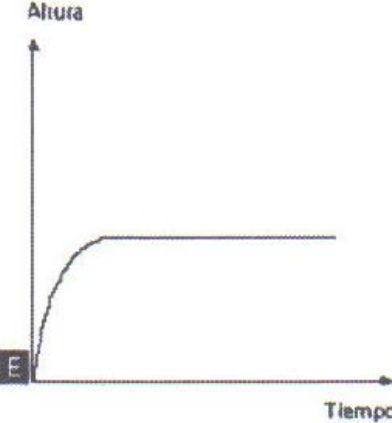
GRÁFICA



DIBUJO DEL DEPÓSITO



GRÁFICA	DIBUJO

3.21 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Concentración de un fármaco [Pág. 87]

A una mujer ingresada en un hospital, le ponen una inyección de penicilina. Su cuerpo va eliminando gradualmente la penicilina de modo que, una hora después de la inyección, sólo el 60% de la penicilina permanece activa.

Esta pauta continúa: al final de cada hora sólo permanece activo el 60% de la penicilina presente al final de la hora anterior.

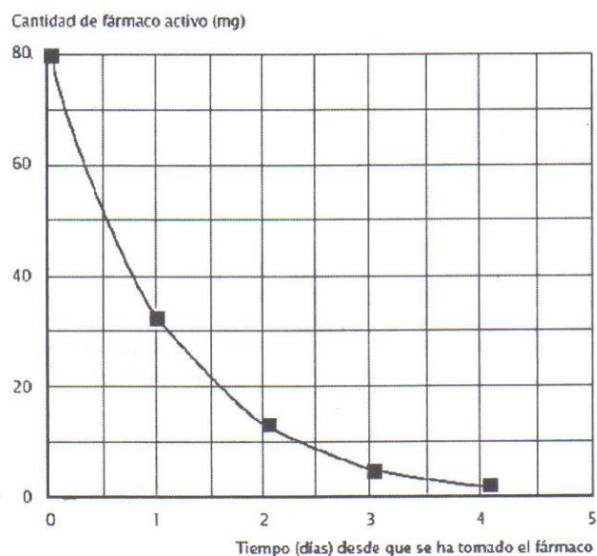
Supón que a la mujer se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8 de la mañana.

PREGUNTA 32:

Completa la tabla escribiendo el total de penicilina que permanecerá activa en la sangre de la mujer a intervalos de una hora desde las 08:00 hasta las 11:00 horas.

Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
Penicilina (mg)	300			

Pedro tiene que tomar 80 mg de un fármaco para controlar su presión sanguínea. El siguiente gráfico muestra la cantidad inicial del fármaco y la cantidad que permanece activa en la sangre de Pedro después de uno, dos, tres y cuatro días.



PREGUNTA 33:

¿Cuánta cantidad de fármaco permanece activa al final del primer día?

- E) 6 mg
- F) 12 mg
- G) 26 mg
- H) 32 mg

PREGUNTA 34:

En el gráfico de la pregunta precedente puede verse que, cada día, permanece activa en la sangre de Pedro aproximadamente la misma proporción de fármaco con relación al día anterior.

Al final de cada día, ¿cuál de las siguientes cifras representa el porcentaje aproximado de fármaco del día anterior que permanece activo?

- I) 20%
- J) 30%
- K) 40%
- L) 80%

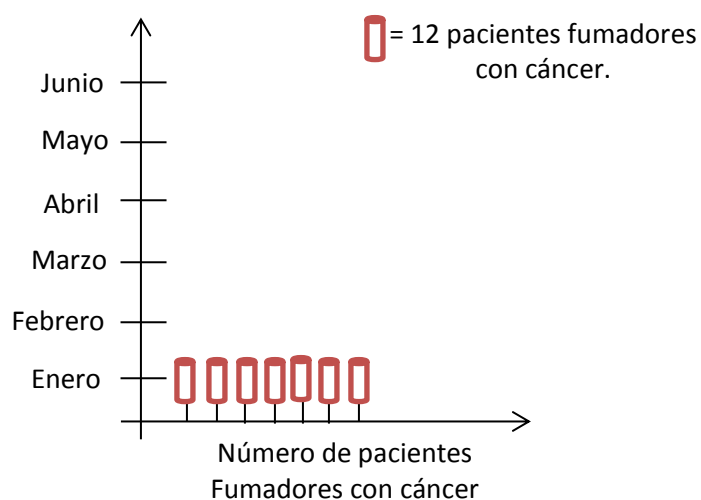
Sugerencia didáctica

¿Sabes lo que produce fumar?

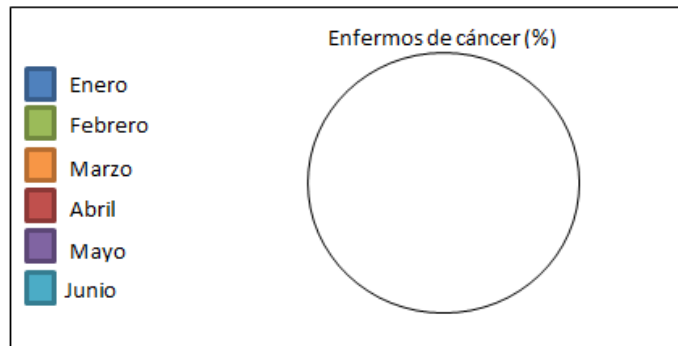
El cáncer de pulmón es causado, la mayoría de las veces, por fumar. Los médicos de una clínica hicieron una investigación sobre el número de pacientes que se habían presentado con cáncer de pulmón, en un periodo de seis meses, considerando que la causa era el cigarro.

En enero hubo 84 pacientes, en febrero 336, en marzo 138, en abril 72, en mayo 186 y en junio 246. Completa la siguiente tabla con esta información y elabora la gráfica correspondiente (pictograma), [8, pág. 104].

Meses	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Enero		
Febrero		
Marzo		
Abril		
Mayo		
Junio		
Totales		

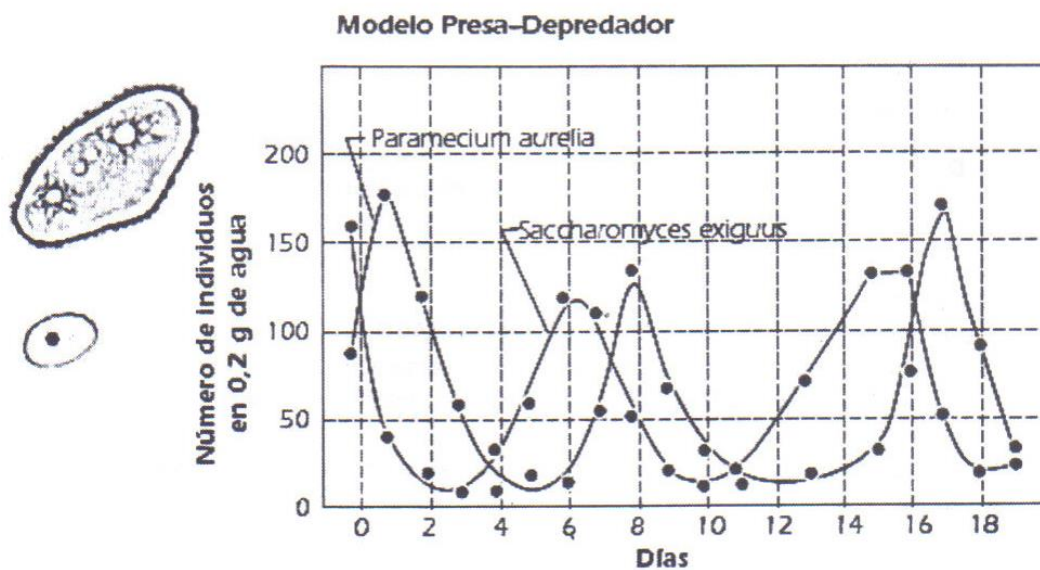


Considerando los datos anteriores, elabora una gráfica de sectores circulares y coloréala.



3.22 SUGERENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL REACTIVO: Presa-depredador [Pág. 93]

En el gráfico que viene a continuación se muestra el crecimiento de dos organismos vivos: el *Paramecium* y el *Saccharomyces*.



PEGUNTA 35:

Uno de los dos animales (el depredador) se come al otro (la presa). ¿Permite el gráfico identificar cuál es la presa y cuál el depredador?

A (Sí) B (No)

Una propiedad del fenómeno presa-depredador se puede expresar de la siguiente manera: la tasa de crecimiento de los depredadores es proporcional a la cantidad de presas disponibles. ¿Es aplicable esta propiedad al gráfico anterior?

A (Sí) B (No)

Sugerencia didáctica

Se le propone al profesor que trabaje con la siguiente actividad de aprendizaje, para que los alumnos profundicen los siguientes conocimientos matemáticos: Función *Seno*, Representación gráfica, Periodo de variación y Ecuación trigonométrica.

Ciertos sistemas ecológicos pueden representarse mediante funciones periódicas. Por ejemplo, el número de depredadores y el número de presas en una región varían periódicamente. (Los coyotes son depredadores, los conejos son la presa.) Si el número de depredadores en una región es relativamente pequeño, la presa se incrementará, pero, conforme la presa se vuelve más abundante, el número de depredadores aumentará por que el alimento es fácil de encontrar. Conforme el número de depredadores continúa creciendo, el número de presas comenzará eventualmente a decrecer, lo que significa que el alimento para los depredadores se tornará escaso, lo que ocasiona que disminuya la población del depredador, lo que permite que sobrevivan más presas, y así sucesivamente. Este ciclo se repite una y otra vez con las dos poblaciones oscilando alrededor de sus valores promedio respectivos. La función *seno* se usa frecuentemente para describir la relación depredador-presa en un sistema ecológico equilibrado.

Problema Depredador- Presa

La población de conejos en una cierta región está dada mediante la ecuación

$N = 500 + 150 \text{ sen } 2t$, donde t es el tiempo en años. Representa esta situación mediante una gráfica.

Se propone a los estudiantes que analicen la ecuación para que determinen el término constante y qué es lo que representa así como el coeficiente de la función seno. De esta manera pueden deducir que dicho coeficiente representa la variación de la población de conejos. Aquí cabe preguntar cuál es la población promedio y cómo varía. De acuerdo a lo que se conoce de la función *seno* su periodo de variación es de 2π . Por lo que la gráfica que deben deducir está dada por años contra número de conejos.

Analizar el problema depredador-presa basándose en la gráfica obtenida en el problema anterior.

En este caso el número de depredadores y el número de presas en una región varían periódicamente. Si el número de coyotes aumenta, el de conejos disminuye pero si este

disminuye entonces el de coyotes también y otra vez si hay pocos coyotes, el número de conejos vuelve a aumentar.

Con esta propuesta los alumnos deben conocer que ciertos sistemas de carácter ecológico pueden representarse mediante funciones periódicas. Con la introducción de este problema se pueden proponer otros que tengan que ver con el mismo conocimiento matemático por ejemplo problemas sobre la variación de la temperatura estacional, el movimiento armónico, etc., [12, pág. 170].

CONCLUSIONES

Al finalizar la presente tesis podemos comentar lo siguiente:

- Los resultados obtenidos por los alumnos Poblanos a través de las cuatro evaluaciones de PISA (2003-2012), muestran que la mayoría de los alumnos aprenden sólo a memorizar y reproducir conocimientos, más no a razonar la situación de cada problema específico. Por ello es importante cambiar los patrones de aprendizaje, ya que de no hacerlo así se tendrán costos altos debido a una mala preparación de los alumnos para el mercado laboral del mañana.
- De acuerdo con los resultados que obtuvimos en el estudio de campo, podemos concluir que si queremos que los alumnos Poblanos demuestren pensamientos y razonamientos matemáticos avanzados, de manera que puedan aplicar sus conocimientos y destrezas para enfrentar situaciones novedosas, los docentes deben dedicarles una atención rigurosa y continua. Una manera de lograrlo es utilizando las propuestas didácticas de la presente tesis, ya que mediante éstas se pretende fomentar la capacidad de los alumnos para usar la matemática como complemento de su vida en general.
- En el año 2012 el Estado de Puebla intentó mejorar el rendimiento de los alumnos para hacer frente a la prueba PISA que se realizaría en ese mismo año. Esta tesis logró demostrar que desafortunadamente faltó dar a los docentes propuestas y material didáctico que lograra ese objetivo, por lo que este trabajo de tesis representa el principio del mismo y deja la puerta abierta a más investigaciones de índole pedagógico.
- Finalmente consideramos que esta Tesis logró abrirnos los ojos para notar las deficiencias reales y preocupantes de los alumnos poblanos, así mismo en el análisis de previos años pudimos notar que el gobierno no se ha esforzado por desarrollar proyectos de apoyo didáctico a la docencia, en lo que respecta a la prueba PISA. Por ello hacemos un llamado a la conciencia de la secretaria de educación pública, con la finalidad de que tomen en consideración este trabajo de Tesis como el inicio de una posible mejora en la educación de los alumnos poblanos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alsina C. et alt., *Materiales para construir la geometría*, Editorial Síntesis, 1998.
- [2] Alsina C. et alt., *Enseñar matemáticas*, Graó, 1996.
- [3] Azarquiel Grupo, *Ideas y actividades para enseñar algebra*, Editorial Síntesis, 2007.
- [4] Balacheff, N. (1990): *Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics*. En Neshier: Kilpatrick, *Mathematics and cognition: A research synthesis*, Cambridge Univ. Press, págs. 135 – 148.
- [5] Bautista, A. (1987): *Fundamentos de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas*. Revista de Educación, núm. 282, 1987, pp. 151 – 160.
- [6] Cárdenas R.S., *Dos o tres trazos*, UNAM, 2003.
- [7] Corbalán F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Graó, 2005.
- [8] García M., Delgado M., *Invitación a las matemáticas 2*, Pearson, 2003.
- [9] Gay D., *Geometry by Discovery*, Jonh Wiley & Sons, 1998.
- [10] Guzmán, M. (1991): *Para pensar mejor. Labor, Barcelona, 1991. La última edición: Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Pirámide, Madrid.
- [11] Pérez S.M., *Combinatoria*, UNAM, 2003.
- [12] Rice B., Strange J., *Trigonometría plana*, C.E.C.S.A., 1983.
- [13] Rincón M.H., *Cuando cuentas cuántos...*, UNAM, 2002.
- [14] Sordo Juanena, J. M (2005): *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría*. Tesis de Doctorado. Universidad Complutense de Madrid, España.
- [15] VanCleave J., *Matemáticas para niños y jóvenes*, Limusa, 2002.

REFERENCIAS WEB

- [16] Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2003). *PISA 2003 pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Recuperado el día 02/05/13 de: http://descartes.cnice.mec.es/heda/ASIPIISA/ASIPIISA_LCR/bibliografia/pisa2003liberados.pdf#view=Fit

- [17] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México*. Recuperado el día 20/07/13 de:
http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2000_2003/Completo/informepisa2003.pdf
- [18] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2007). *PISA 2006 en México Conclusiones*. Recuperado el día 15/08/13 de:
http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2006_ejecutivo/Completo/pisaresumen.pdf
- [19] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2010). *México en PISA 2009*. Recuperado el día 08/10/13 de:
http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA_2009/Completo/pisa2009.pdf
- [20] Seminario de Educación superior UNAM (2003). *México en los resultados pisa 2003*. Recuperado el día 28/11/13 de:
<http://www.ses.unam.mx/integrantes/uploadfile/rrodriguez/RR2005d.pdf>
- [21] OCDE (2009) Mejores Políticas para una vida mejor. *PISA 2009 Mensajes Claves para México*. Recuperado el día 28/11/13 de:
<http://www.oecd.org/centrodemexico/medios/46640394.pdf>
- [22] OCDE (2012) Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA 2012- resultados). Recuperado el día 01/01/14 de:
<http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf>
- [23] Secretaria de Educación Pública (2011). *Programas de estudio 2011: Guía para el Maestro. Educación básica secundaria*. Recuperado el día 01/01/14 de:
http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/images/PDF/prog-secundaria/sec_matematicas2011.pdf
- [24] Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2013). *México en PISA 2012 principales resultados*. Recuperado el día 01/02/14 de:
<http://www.slideshare.net/vmtaguil/resultados-pisa-2012>
- [25] Universidad de Cádiz España. Departamento de Didáctica (1994). *La naturaleza de la matemática escolar: problemas fundamentales de la didáctica de la matemática*. Recuperado el día 27/06/14 de:
http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/24/R24_7.pdf