Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Espacios Polacos, conjuntos de Ramsey y la Propiedad de Baire

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
SONIA NAVARRO FLORES

DIRECTORES DE TESIS
Ibarra Contreras Manuel
Martínez Ruiz Iván

PUEBLA, PUE. ENERO 2014

A mis padres y mi hermana.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia. A mis padres, sin cuyo esfuerzo esto no habría sido posible y a mi hermana, quien siempre me brindó su apoyo y su cariño. También agradezco mucho a mis asesores y a mis sinodales. A mis asesores Manuel e Iván por acceder a asesorarme en este trabajo y por brindarme su apoyo, su paciencia y su amistad. Y a mis sinodales, el Dr. Oleg Okunev, el Dr. Agustín Contreras Carreto y al Dr. Alejandro Ramírez Páramo por acceder a revisar mi trabajo en poco tiempo y enriquecer el trabajo con sus correcciones.

Finalmente quiero agradecer a todos mis amigos. A Sergio, Jessica, Germán, Adriana, Jerónimo, Isabel y a todos los demás por brindarme su apoyo y cariño y por todo lo que compartimos a lo largo de la carrera.

TEORÍA DE CONJUNTOS

Cada cuerpo tiene
su armonía y
su desarmonía
en algunos casos
la suma de armonías
puede ser casi
empalagosa
en otros
el conjunto
de desarmonías
produce algo mejor
que la belleza.

Mario Benedetti

Introducción

La teoría descriptiva de conjuntos consiste esencialmente en el estudio de subconjuntos de espacios topológicos que resultan de aplicar un proceso de construcción a partir de conjuntos sencillos o que satisfacen una definición más o menos explícita.
Los precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos se remontan a finales del siglo XIX, cuando Cantor trataba de demostrar la hipótesis del continuo. En la práctica, todo se reducía a demostrar que todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ es numerable o bien tiene el cardinal del continuo, $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. Cantor abordó el problema de formas muy diversas, y una de ellas fue estudiar primero los subconjuntos de $\mathbb{R}$ más sencillos para ir analizando progresivamente conjuntos más complejos.
Los subconjuntos más sencillos son sin duda los conjuntos abiertos, especialmente a la hora de calcular cardinales, pues todo abierto no vacío contiene un intervalo abierto, y todo intervalo abierto se puede biyectar con $\mathbb{R}$.
Cantor se propuso entonces estudiar los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Ya no es cierto que todos tengan cardinal $\mathfrak{c}$, pues, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un subconjunto cerrado numerable. No obstante, sucede que todo subconjunto cerrado e infinito de $\mathbb{R}$ es numerable o tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Para llegar a esta conclusión estudió primero los conjuntos cerrados que llamó perfectos, que son los conjuntos cerrados no vacíos sin puntos aislados, y demostró que todo conjunto cerrado perfecto contiene una copia del conjunto de Cantor, y esto a su vez implica que tiene cardinal $\mathfrak{c}$.
El caso de un conjunto cerrado arbitrario fue resuelto por un joven estudiante sueco llamado Ivar Otto Bendixson, que se lo comunicó a Cantor en una carta, en la que demostraba, basándose en ideas de Cantor, que cualquier conjunto cerrado puede descomponerse como unión de un conjunto cerrado perfecto (o vacío) y de un conjunto numerable. Por lo tanto, ningún conjunto cerrado podía servir de contraejemplo a la hipótesis del continuo.
Es en la demostración de este hecho, que hoy se conoce como teorema de Cantor-Bendixson y que fue publicada en 1883, donde podemos encontrar un argumento que puede verse como uno de los primeros precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos. Cantor celebró el resultado, pero lo cierto es que no lo aprovechó.

Para encontrar otro precedente de la teoría descriptiva de conjuntos hemos de dejar pasar 16 años y trasladarnos a Francia, donde, en 1899, René-Louis Baire defendió su tesis doctoral. Se conocido que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua, así como que esto no es cierto en general para límites puntuales. Por ello Baire introdujo las que hoy se conocen como funciones de Baire a través de una recursión transfinita. La clase de las funciones de Baire para un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es la menor familia de funciones reales definidas sobre X que contiene a las funciones continuas y es cerrada bajo límites puntuales. Como Cantor, Baire avistó un camino, pero no se decidió a seguirlo.

El primer trabajo que puede considerarse propiamente como teoría descriptiva de conjuntos en el sentido moderno es el titulado *Sur les fonctions représentables analytiquement*, publicado por Lebesgue en 1905.

Lebesgue estudió a su vez una clase de conjuntos introducida de forma más o menos vaga por Emile Borel en el curso de sus investigaciones sobre teoría de la medida y teoría de la probabilidad. En términos modernos la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico es la menor familia de subconjuntos $\mathcal{B}$ que contiene a los conjuntos abiertos y que es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables y bajo complementos.

Durante los años posteriores al término de la Primera Guerra Mundial los matemáticos Lusin en Moscú y Sierpinski en Varsovia dirigieron los avances en la teoría descriptiva de conjuntos, a la que posteriormente se sumarían varios matemáticos rusos y, sobre todo, polacos como Banach, Kuratowski, Ulam, Tarski, etc. Entre las contribuciones de la escuela de topólogos polacos cabe destacar el hecho de que, en lugar de trabajar en $\mathbb{R}^n$, desarrollaron la teoría descriptiva de conjuntos en una familia de espacios más generales, desarrollaron la teoría en la clase de los espacios topológicos completamente metrizables y separables. Las malas relaciones de la Unión Soviética con la Europa capitalista hicieron que su trabajo permaneciera prácticamente desconocido en Occidente y, cuando fue descubierto, los espacios topológicos completamente metrizables y separables recibieron el nombre de espacios polacos.

La introducción de los espacios polacos confirió gran flexibilidad a la teoría. Por ejemplo, el más simple de los espacios polacos no triviales es el espacio de Baire $\mathcal{N}=\omega^\omega$ formado por las sucesiones de números naturales, considerado como producto de infinitas copias del espacio discreto ω con la topología producto usual. El estudio de $\mathcal{N}$ es especialmente simple en comparación con el de otros espacios polacos y, al mismo tiempo, los resultados obtenidos para $\mathcal{N}$ pueden generalizarse a espacios polacos arbitrarios gracias a ciertos resultados generales, como que todo espacio polaco es imagen continua de $\mathcal{N}$, o que dos espacios polacos cualesquiera no numerables X e Y son Borel-isomorfos, es decir, existe una biyección $f : X \to Y$ que hace corresponder las respectivas σ-álgebras de Borel. Otra conexión destacable entre $\mathcal{N}$ y $\mathbb{R}$ es que existe un homeomorfismo entre $\mathcal{N}$ y el espacio de los números irracionales.

Poseriormente Nikolai Nikolaevich Lusin, Mikhail Yakovlevich Suslin y Pavel Sergeevich Alexandroff continuaron con el desarrollo de esta teoría estudiando otros conjuntos a los cuales llamaron proyectivos de los cuales no haremos mención en este trabajo. El objetivo de este trabajo es presentar resultados importantes de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, que han sido fundamentales en el desarrollo de ésta, y posteriormente presentar una aplicación de la Teoría Descriptiva de Conjuntos a la topología y a la combinatoria. En el primer capítulo se revisarán los preliminares, nociones básicas de Teoría de conjuntos, espacios métricos y árboles que nos dotarán del lenguaje necesario para entender los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo se introducirá el concepto de espacio Polaco, que es el tipo de espacio métrico que nos interesa y con la ayuda de herramientas como los esquemas de Cantor y de Lusin se presentan algunas caracterizaciones de éstos, posteriormente se presenta al hiperespacio de los conjuntos compactos de un espacio métricos y se revisan algunas características que comparte el hiperespacio con el espacio las cuales nos serán de utilidad el último capítulo.

En el tercer capítulo se estudia una propiedad topológica llamada la Propiedad de Baire y se revisan algunas nociones de Teoría de Juegos para caracterizar a los conjuntos que tienen ésta propiedad en los espacios Polacos, además se introduce la noción de conjunto de Borel que es de gran importancia en el desarrollo de la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

En el cuarto captítulo se revisan conceptos de combinatoria infinita y se introduce una nueva topología sobre la colección de subconjuntos infinitos delos naturales, que es la topología de Ellentuck, para finalizar con el Teorema de Ellentuck que caracteriza propiedades combinatorias como el ser un conjunto de Ramsey con propiedades topológicas como tener la Propiedad de Baire en este espacio.

Índice general

Espacios Polacos, conjuntos de Ramsey y la Propiedad de Baire

Sonia Navarro Flores

Enero 2014

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer resultados y nociones básicas de Teoría de Conjuntos, espacios métricos y árboles. Los resultados de Teoría de Conjuntos nos permitirán establecer notación que se usará durante todo el trabajo, así como entender los conceptos de ordinal y cardinal que usaremos en el último capítulo en la sección de Invariantes cardinales. Los resultados de espacios métricos son importantes pues los espacios Polacos, que son de gran importancia en este trabajo, son casos particulares de espacios métricos. Los resultados de árboles serán de gran utilidad cuando revisemos algunos juegos sobre espacios topológicos.

Recordemos que si tenemos dos conjuntos A y B, su producto cartesiano se define como $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Definición 1.1. *Un conjunto R es una relación binaria si todo elemento de R es un par ordenado, es decir, si para todo $z \in R$, existen clases x, y tales que $z = (x, y)$. Si existen conjuntos A, B tales que $R \subseteq A \times B$ diremos que A es una relación de A en B; y si $R \subseteq A \times A$ diremos simplemente que R es una relación en A.*

Definición 1.2. *Una relación f es llamada función si para cualesquiera a, b, c tales que $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ se cumple que $b = c$.*

El que una pareja ordenada (a, b) pertenezca a una relación R se denota como aRb. Muchas relaciones son de particular interés; en seguida introduciremos una muy importante.

Definición 1.3. *Si A es una clase, la relación de pertenencia en A está definida por*

$$\in_A = \{(a, b) : a \in A, b \in A \text{ y } a \in b\} \tag{1.1}$$

Recordemos que una relación es transitiva si cada vez que tengamos aRb, bRc se cumple que aRc; una relación es asimétrica si aRb implica que no puede ocurrir bRa. Además si $R \subseteq A \times A$ diremos que la relación R conecta si para cualesquiera a, $b \in A$ se cumple que aRb o bRa. A una relación que es asimétrica y transitiva se le llama orden estricto, en este caso solamente le llamaremos orden pues la relación que nos interesa es la relación de pertenencia y ésta es un orden estricto. Si R es un orden sobre A, el par (A, R) se llama conjunto ordenado. Generalmente se usan los símbolos $<$ y $\prec$ para denotar a los órdenes.
Ahora definiremos lo que es un buen orden y para esto recordemos que si tenemos un conjunto ordenado $(A, <)$ y $B \subseteq A$ entonces $b \in B$ es el elemento mínimo de B si para cada $x \in B$ se cumple que $x = b$ o $x > b$.

Normalmente en matemáticas nos interesa saber cuándo dos objetos son *el mismo*, la siguiente definición nos ayudará a saber cuándo dos órdenes son *el mismo*, es decir, que solamente cambia el nombre de los elementos de cada conjunto pero su comportamiento con respecto al orden de cada uno es igual.

Definición 1.4. *Sean $(A, <)$, $(B, \prec)$ dos órdenes y $h : A \to B$ una función biyectiva, diremos que h es un isomorfismo entro los dos conjuntos ordenados si para cualesquiera p_1, $p_2 \in P$ se cumple que $p_1 < p_2$ si y sólo si $h(p_1) \prec h(p_2)$.*

Definición 1.5. *Sea (A, R) un conjunto ordenado, diremos que (A, R) es bien ordenado si para cada subconjunto no vacío $C \subseteq A$ se cumple que C tiene elemento mínimo. En este caso a R se le llama buen orden.*

Definición 1.6. *Una conjunto α es un ordinal o número ordinal si la relación $\in_\alpha$ es un buen orden en α.*

La idea central del concepto de ordinal es generalizar el concepto de número natural. En teoría de conjuntos se construyen los números naturales de tal forma que si n es un número natural, $n = \{0, 1, ..., n-1\}$; observemos que cada número natural es ordinal. Además la colección de números naturales es un ordinal, a este ordinal lo denotamos por $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$ y es el primer ordinal más grande que cualquier número natural. Los ordinales cumplen varias propiedades interesantes, por ejemplo, que cualquier elemento de un ordinal es un ordinal y que si α es un ordinal entonces $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal

y además es el sucesor de α. Además la colección de los ordinales es bien ordenado por la pertenencia.
Usando el Axioma de Elección se puede verificar que cualquier conjunto puede ser bien ordenado, y usando el Axioma de Reemplazo se puede probar que cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal. De esto se sigue que cualquier conjunto es biyectable a un ordinal.

Ahora definiremos el concepto de cardinal, para esto es necesario extender la noción de "tener la misma cantidad de elementos .ª la cual le llamaremos equipotencia.

Definición 1.7. *Sean A y B conjuntos, diremos que A y B son equipotentes si existe una función biyectiva entre ambos.*

Definición 1.8. *Sea κ un conjunto. κ es un cardinal o número cardinal si κ es un ordinal y no existe un ordinal α tal que $\alpha \in \kappa$, y α y κ sean equipotentes.*

De las definiciones anteriores se puede ver que cada conjunto A es equipotente a un único cardinal el cual denotaremos por $\mid A \mid$ y le llamaremos el cardinal de A.

Si un conjunto es biyectable con algún número natural diremos que es un conjunto finito. El número cardinal del conjunto de los números naturales es $\aleph_0$, cualquier conjunto que sea equipotente al conjunto de los números naturales se llamará numerable y por conjunto no numerable entenderemos a un conjunto de cardinal mayor que $\aleph_0$. El cardinal del conjunto de los números reales es $\mathfrak{c}$, conocido como el cardinal del continuo y es estrictamente mayor que $\aleph_0$ con el orden que hereda de los ordinales.

1.1. Espacios métricos y espacios topológicos

El concepto abstracto de espacio métrico fue introducido inicialmente por el matemático francés M. Fréchet en 1906 y desarrollado más tarde por el famoso topólogo F. Hausdorff.
Después de 1920, la topología métrica es objeto de exhaustivas investigaciones que logran su pleno desarrollo y poner de manifiesto su extraordinario poder unificador de diversas teorías que hasta entonces parecían dispersas e independientes.
A su vez la escuela de Moscú realizaba importantes descubrimientos sobre

propiedades de los espacios métricos, su principal objetivo era encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico fuera metrizable.

Desde un punto de vista intuitivo, un espacio métrico es un conjunto en el que podemos hablar de una distancia entre sus elementos. La siguiente definición extrae las propiedades que caracterizan la noción de distancia.

Definición 1.9. *Un espacio métrico es una pareja* (X, d) *donde* X *es un conjunto y* $d : X^2 \to [0, \infty)$ *una función tal que para cada* x, y, $z \in X$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

En el caso en que (X, d) *sea un espacio métrico a* d *se le llama una métrica sobre* X.

Un ejemplo de espacio métrico es $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ donde $d_{\mathbb{R}}$ es la distancia usual en $\mathbb{R}$. Si X es un conjunto arbitrario podemos dotar a X de la métrica discreta la cual cumple que si $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

En lo sucesivo denotaremos por $\mathbb{R}_+$ al conjunto de los reales positivos.

Definición 1.10. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $r \in \mathbb{R}_+$. *Se define la bola abierta con centro en* x *y radio* r *como* $B_X(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. *Cuando no haya confusión sobre el espacio métrico del que se habla se escribirá* $B(x, r)$ *o* $B_r(x)$.

Definición 1.11. *Sean* (X, d_X) *y* (Y, d_Y) *espacios métricos y* $f : X \to Y$ *una función*

1. *Diremos que* f *es una isometría si* f *es una biyección y para cualesquiera* x_1, $x_2 \in X$: $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$

2. *Diremos que f es un encaje isométrico si f es una isometría de X en $f[X]$*

Definición 1.12. *Sea (X, d) un espacio métrico, un subconjunto $D \subseteq X$ es denso si y sólo si para cada conjunto abierto U, $D \cap U \neq \emptyset$.*

Para verificar la densidad es suficiente probar que el subconjunto denso intersecta a cada bola abierta.

Definición 1.13. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso tal que $\mid D \mid = \aleph_0$, el espacio es separable.*

Recordemos que una sucesión en un espacio métrico (X, d) es un subconjunto numerable de X y lo denotamos por $\{x_n\}_{n\in\omega}$, también podemos pensar a una sucesión como una función $f : \omega \to X$ donde $x_n = f(n)$ para cada $n \in \omega$.
Además recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es convergente si existe $x \in X$ si para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $N \in \omega$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$.

Definición 1.14. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión de Cauchy en X es una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de X tal que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe $M \in \omega$ tal que si $m, n \in \omega$ y $m, n > M$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Se puede probar que que en un espacio métrico todas las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy. Por la definición anterior el recíproco también se cumple cuando el espacio es completamente metrizable, sin embargo no se cumple para cualquier espacio métrico. Veamos un ejemplo, nos fijamos el el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica que hereda de $\mathbb{R}$, la cual denotaremos por d, y en la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\omega}$, observamos que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $((0, 1), d)$ sin embargo no es una sucesión convergente en pues en caso de serlo tendría que converger a 0 pero $0 \notin (0, 1)$.

Definición 1.15. *El espacio métrico (X, d) es completo si cada sucesión de Cauchy tiene un límite en X.*

Teorema 1.16. *Dado un espacio métrico (X, d) existe un espacio métrico completo (X', d') tal que existe una isometría entre (X, d) y un subespacio de (X', d') denso en (X', d'). Este espacio es único salvo isometría y es llamado la completación de (X, d).*

Definición 1.17. *Sea* (Y, d) *un espacio métrico. Para cualquier* $B \subset Y$ *no vacío definimos* $diam(B)$=$sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ *y por convención definimos* $diam(\emptyset) = 0$.

Cantor demostró la siguiente caracterización de los espacios métricos completos.

Teorema 1.18. *(Cantor) Un espacio métrico es completo si y sólo si para cualquier colección* $\{A_n\}_{n\in\omega}$ *de conjuntos cerrados no vacíos tales que para cualquier* $n \in \omega$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ *e* $\text{ínf}\{diam(A_n){:}n \in \omega\}=0$ *se cumple que* $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$.

Definición 1.19. *Un espacio topológico es una pareja* (X, τ)*, donde* X *es un conjunto y* τ *una colección de subconjuntos de* X *tal que* $\emptyset$, $X \in \tau$ *y* τ *es cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Tal colección es llamada una topología sobre* X *y sus elementos conjuntos abiertos. Los complementos de los conjuntos abiertos son llamados conjuntos cerrados.*

Definición 1.20. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subseteq X$.

1. *Se define el interior de* A *en* X*, al que denotaremos como* $int(A)$*, como* $\bigcup\{U \subseteq X : U \text{ es abierto y } U \subseteq A\}$

2. *La cerradura de* A *en* X*, denotada por* $cl_X A$*, se define como el conjunto* $cl_X A = \bigcap\{E \subseteq X{:}E \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset E\}$*. Cuando no haya confusión sobre el espacio en el cual se toma la cerradura del conjunto* A*, ésta simplemente se denotará por* $\bar{A}$.

Definición 1.21. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*. Diremos que* A *es un conjunto* G_δ *si* $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ *donde* $U_n \in \tau$ *para cada* $n \in \omega$ *y diremos que* A *es un conjunto* F_σ *si* $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ *donde* F_n *es un conjunto cerrado en* X *para cada* $n \in \omega$.

Definición 1.22. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $Y \subseteq X$*. Definimos* $\tau|Y$=$\{U \cap Y : U \in \tau\}$*, diremos que* $(Y, \tau|Y)$ *es un subespacio de* (X, τ) *y que* $\tau|Y$ *es la topología relativa de* Y.

En algunas ocasiones no es necesario conocer cómo es cada abierto en la topología pues hay ciertas familias de abiertos que determinan la topología y es esto lo que motiva la definición de base y sub-base.

Definición 1.23. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathfrak{B} \subset \tau$, $\mathfrak{B}$ es una base para τ si para cada $A \in \tau$ existe $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ tal que $A = \bigcup \mathfrak{B}'$.*

Se puede probar que si X es un conjunto y $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ cumple que $\bigcup \mathfrak{B} = X$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ si $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq (B_1 \cap B_2)$. Entonces $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup \mathfrak{B}' : \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}\}$ es una topología sobre X.

Definición 1.24. *Sea (X,τ) un espacio topológico. $\delta \subseteq \tau$ es una sub-base para X si $\mathfrak{B}_\delta$=$\{\bigcap \delta'$: $\delta' \subseteq \delta$ y $\mid \delta' \mid < \omega\}$ es una base para τ.*

Si (X, τ) espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $\mathfrak{B}$ una base para τ, podemos inducir una topología sobre Y a partir de X. Si $\mathfrak{B} \mid Y$=$\{B \cap Y : B \in \mathfrak{B}\}$, entonces $\mathfrak{B} \mid Y$ es una base para la topología que Y hereda de X.

De ahora en adelante cuando no haya confusión denotaremos por X al espacio topológico (X, τ).

Teorema 1.25. *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces las bolas abiertas de (X, d) forman una base para una topología sobre X a la que llamaremos τ_d.*

A topología τ_d del Teorema 1.25 se le llama la topología inducida por la métrica d, también diremos que d es compatible con la topología.

Cuando tengamos un conjunto X con dos métricas tales que generan los mismos abiertos diremos que las métricas son equivalentes. Si (X, d) es un espacio métrico se puede probar que existe una métrica equivalente d' tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $d'(x, y) < 1$ lo cual se denotará por $d' < 1$. Por lo tanto, en lo sucesivo cuando sea necesario podemos suponer que cualquier métrica cumple que la distancia de cualesquiera dos puntos es menor que 1

Definición 1.26. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$, diremos que $V \subset X$ es una vecindad de x en X si existe A es abierto tal que $x \in A$ y $A \subseteq V$.*

Definición 1.27. *Sean (X,τ) espacio topológico y $x \in X$. Si $\mathfrak{B}(x)$ es una colección de vecindades de x en X, diremos que $\mathfrak{B}(x)$ es una base de vecindades de x en X si para cualquier V vecindad de x existe $B \in \mathfrak{B}(x)$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq V$.*

Note que en los espacios métricos las bolas abiertas con centro en algún punto x fijo forman una base de vecindades para x, también las bolas abiertan con radio $\frac{1}{n}$ con $n \in \omega$ y centro en x forman una base numerable de vecindades para x.

Definición 1.28. *Un espacio topológico (X, τ) es metrizable si existe una métrica d sobre X tal que τ es la topología inducida por la métrica d. En este caso diremos que la métrica d es compatible con la topología τ.*

Si la métrica d es completa diremos que el espacio es completamente metrizable.

Cabe mencionar que cada espacio topológico (X, τ) discreto es completemente metrizable pues la métrica discreta es compatible con τ y es completa.

Definición 1.29. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Diremos que f es continua en x si para cada $V \in \tau'$ tal que $f(x) \in V$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $f[U] \subset V$.*

Definición 1.30. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. f es continua en X si para cada $x \in X$, f es continua en x.*

Recordemos que el que una función f sea continua es equivalente a que la preimagen de los conjuntos abiertos sea un conjunto abierto. Además observemos que para verificar la continuidad es suficiente fijarse en abiertos básicos del espacio Y, es decir, si $\mathfrak{B}$ es una base para τ' entonces se cumple que f es continua si y sólo si para cada $B \in \mathfrak{B}$ se cumple que $f^{-1}[B]$ es un conjunto abierto en X.

Definición 1.31. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, f es un homeomorfismo si f es biyectiva y continua y f^{-1} es continua también.*

Definición 1.32. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, diremos que f es un encaje si es un homeomorfismo sobre su imagen.*

La definición de densidad se puede extender a la clase de los espacios topológicos sustituyendo bolas abiertas por abiertos, es decir, un subconjunto de un espacio topológico es denso si intersecta a cada abierto no vacío del espacio. Con esta definición de densidad en espacios topológicos extendemos la definición de espacio métrico separable a espacio topológico separable. Además para verificar la densidad de un conjunto en un espacio topológico es suficiente verificar que el conjunto intersecta a todos los elementos de una base.

Definición 1.33. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que el espacio es segundo numerable si tiene una base $\mathfrak{B}$ tal que $|\mathfrak{B}| \leq \omega$.*

Ahora enunciaremos una caracterización importante de la metrizabilidad.

Teorema 1.34. *Sea X un espacio topológico segundo numerable, X es un espacio metrizable si y sólo si es regular.*

Ahora definiremos algunas propiedades de separación que clasifican a los espacios topológicos; los espacios en los que estamos interesados, que son los metrizables cumplen todos estos axiomas.

Definición 1.35. *Sea (X, τ) un espacio topológico*

1. *X es T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o bien $y \in U$ y $x \notin U$.*

2. *X es T_1 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.*

3. *X es Hausdorff o T_2 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

4. *X es regular o T_3 si X es T_1 y para cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ y $x \in X \setminus F$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

5. *X es completamente regular o Tychonoff o $T_{3,5}$ si es T_1 y para cualquier conjunto cerredo $F \subseteq X$ y cualquier $s \in X$ tal que $x \notin F$ existe una función $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[F] = \{1\}$.*

6. *X es normal o T_4 si X es T_1 y para cualesquiera $F_1, F_2 \subset X$ conjuntos cerrados ajenos existen $U, V \in \tau$ tales que $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Se puede probar que cada propiedad implica la propiedad anterior, es decir, si un espacio es normal entonces es completamente regular, si es completamente regular entonces es regular y así. Las propiedades de ser T_0, T_1,

T_2, T_3 y $T_{3,5}$ son hereditarias y topológicas, es decir, si un espacio posee alguna de estas propiedades entonces cualquier subespacio y cualquier espacio homeomorfo a este la poseen. La propiedad de ser normal no es topológica ni hereditaria, sin embargo si se hereda a subespacios cerrados.

Los siguientes resultados serán importantes en el desarrollo de nuestro trabajo pues las caracterizaciones de las propiedades de ser regular y normal que se presentan se usarán en varias pruebas posteriores, no presentaremos las pruebas de éstos pero se pueden encontrar en [1]

Teorema 1.36. *Sea (X,τ) un espacio T_1, entonces X es regular si y sólo si para cualesquiera $U \in \tau$ y $x \in U$, existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$*

Teorema 1.37. *Sea (X,τ) un espacio T_1, se cumple que X es normal si y sólo si para cualquier conjunto cerrado $F \subseteq X$ y cualquier conjunto abierto A tal que $F \subseteq A$, existe un conjunto abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq A$*

Teorema 1.38. *Sea X un espacio topológico segundo numerable. Entonces X es metrizable si y sólo si X es T_3.*

Teorema 1.39. *(Lema de Urysohn) Sea X un espacio metrizable. Si A, B son conjuntos cerrados de X tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces existe una función $f : X \to [0,1]$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$*

Teorema 1.40. *(Teorema de Extensión de Tietze) Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ es continua, existe $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}\mid_A = f$*

1.2. Espacios compactos

Definición 1.41. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$, diremos que A es compacto si para cualquier colección de abiertos en X, $\{U_i : i \in I\}$ con $I \neq \emptyset$ tal que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe un conjunto finito de índices $J \subseteq I$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.*

Definición 1.42. *Sean X un conjunto y una colección de subconjuntos de X, $\mathcal{F} = \{F_s : s \in \omega\}$. Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y para cualquier conjunto finito $\{s_1, s_2, ..., s_k\} \subseteq S$ se cumple que $\bigcap_{i=1}^{i=k} F_{s_i} \neq \emptyset$*

En seguida veremos que esta propiedad ayuda a caracterizar a los espacios compactos que son Hausdorff.

Teorema 1.43. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, X es un espacio compacto si y sólo si cada familia de subconjuntos de X que posee la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Definición 1.44. *Dado un espacio topológico (X, τ) diremos que $\mathfrak{U} \subseteq \tau$ es una cubierta abierta de X si $X = \bigcup \mathfrak{U}$.*

Las siguientes proposiciones son muy importantes porque arrojan resultados importantes sobre los espacios y conjuntos compactos, las pruebas de éstas no se presentarán en este trabajo, pues no es el objetivo de éste profundizar en el tema pero se pueden encontrar en [1].

Proposición 1.45.

1. *Los subconjuntos compactos de un espacio T_2 son cerrados.*
2. *Un subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*
3. *La unión de una cantidad finita de subespacios compactos de un espacio topológico es compacto.*
4. *La imagen continua de un espacio compacto es compacto.*
5. *Una función continua de un espacio compacto en un T_2 es un encaje.*
6. *(Teorema de Tychonoff)El producto de espacios compactos es compacto.*

Proposición 1.46. *Sea (X, d) un espacio métrico, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *X es compacto.*
2. *Cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*
3. *X es totalmente acotado, es decir, para cada $\epsilon > 0$, X puede ser cubierto por una cantidad finita de bolas de radio menor que ϵ.*

Ahora enunciaremos una caracterización de la metrizabilidad en los espacios topológicos compactos.

Proposición 1.47. *Si X es un espacio topológico compacto, entonces X es metrizable si y sólo si X es T_2 y segundo numerable.*

Definición 1.48. *Si X es un espacio metrizable y separable, una compactación de X es un espacio metrizable y compacto Y en el cual X puede ser encajado como un conjunto denso.*

1.3. Árboles

Definición 1.49. *Sean $A \neq \emptyset$ un conjunto y $n \in \omega$. Se define:*

1. $A^n = \{s : \{0, 1, ..., n-1\} \to A : s$ *es función* $\}$.
2. $A^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} A^n$.
3. *A n se le denomina la longitud de s y se denota por $l(s)$.*

Notación 1.50. *Si $s \in A^n$, escribiremos $(s_0, ..., s_{n-1})$ para denotarlo.*

Definición 1.51. *Sean $A \neq \emptyset$ un conjunto y $m, n \in \omega$. Si $s = (s_i)_{i<n} \in A^n$, $t = (t_j)_{j<m} \in A^m$ y $\{s_k : k < \omega\} \subseteq A^{<\omega}$, se definen:*

1. *La concatenación de s y t, denotada por $s\,\hat{}\,t$, es la sucesión $s\,\hat{}\,t = (s_0, s_1, ..., s_{n-1}, t_0, t_1, ..., t_{m-1}) \in A^{n+m}$.*
2. *La concatenación infinita de todos los s_k con $k \in \omega$, denotada por $s_0\hat{}s_1\hat{}...$ como el único $x \in A^\omega$ tal que para cada $i \in \omega$ $x(i) = s_0(i)$ si $i < l(s_0)$ y $x(i) = s_j(i - l(s_{j-1}))$ si $l(s_{j-1}) \leq i < l(s_j)$ para cada $j \in \omega - \{0\}$.*

Observamos que si $s \in A^n$ donde n es un número natural y $a \in A$, $s\hat{}(a)$ representa a la función $f \in A^{n+1}$ tal que $f\,|_n = s$ y $f(n) = a$, a dicha función también la denotaremos como $s\hat{}a$ cuando no haya confusión. También observamos que (a) denota a la función $f \in A^1$ tal que $f(0)=a$.

Definición 1.52. *Sean A un conjunto y $T \subseteq A^{<\omega}$. Diremos que T es un árbol sobre A si para cualesquiera $s \in T$, $t \in A^{<\omega}$ tales que $t \subseteq s$ se cumple que $t \in T$.*

Definición 1.53. *Sean A un conjunto no vacío y T un árbol sobre A. Un elemento $x \in A^\omega$ se denomina una rama infinita de T si $\forall n \in \omega : x|_n \in T$.*

Definición 1.54. *Sean A un conjunto no vacío y T un árbol sobre A. El cuerpo de T, denotado por $[T]$, es el conjunto de todas las ramas infinitas de T, es decir $[T]$ =$\{x \in A^\omega : \forall n \in \omega : x|_n \in T\}$.*

Definición 1.55. *Sean A un conjunto y T un árbol sobre A. T es bien podado si para todo $s \in T$ existe $t \in T$ tal que $s \subseteq t$ y $s \neq t$.*

Teorema 1.56. *Sea A un conjunto no vacío y considérese a A como espacio topológico con la topología discreta, entonces el producto topológico A^ω es un espacio metrizable y una métrica compatible es $d : A^\omega \times A^\omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in A^\omega$*

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-n-1} & \textit{si } x \neq y, \textit{ donde } n\text{=}\textit{mín}\{k \in \omega : x(k) \neq y(k)\} \\ 0 & \textit{si } x = y. \end{cases}$$

Definición 1.57. *Una métrica d sobre un conjunto X es una ultramétrica si dados $x, y \in X$, $d(x,y) \leq$ máx $\{d(x,z), d(z,y)\}$ para todo $z \in X$.*

Si A es un conjunto no vacío y d es la métrica definida en el Teorema 1.56, se puede probar que d es una ultramétrica sobre A^ω.

Definición 1.58. *Sean A un conjunto no vacío y $s \in A^{<\omega}$. Se define el conjunto $< s >= \{x \in A^\omega : s \subseteq x\}$ al que se denomina como el cono generado por s.*

Aunque ya hemos hablado antes de de los productos topológicos, dada su estrecha relación con los conos generados por los elementos de $A^{<\omega}$, resulta muy conveniente hablar de la base canónica de un producto topológico.
Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una familia no vacía de espacios topológicos tal que para cada $\alpha \in I$ se cumple que $X_\alpha \neq \emptyset$, entonces el producto topológico de esta familia es el espacio $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$ donde una base para la topología τ consiste en los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ donde cada U_α es un abierto en X_α y para todos salvo una cantidad finita de α, $U_\alpha = X_\alpha$. A dicha base se le conoce como la base canónica.
Además si para cada $\alpha \in I$ se cumple que $\mathfrak{B}_\alpha$ es una base para el espacio (X_α, τ) entonces la colección de los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in I} B_\alpha$ donde para una cantidad finita de elementos de I, $B_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$y para el resto $B_\alpha = X_\alpha$, también es una base para el espacio producto.
Como se ha considerado al conjunto no vacío A con la topología discreta, una base para el producto topológico A^ω es la colección de los $\prod_{n \in \omega} B_n$ donde $\mid B_n \mid$=1 para una cantidad finita de n y B_n=X_n para los demás n.

Proposición 1.59. *La base estándar para la topología de A^ω consiste de todos los conos $< s >$, donde $s \in A^\omega$.*

Note que si $\prod_{n\in\omega} B_n$ es un básico canónico del espacio producto y los B_n que son subconjuntos propios de A son singulares podemos fijarnos en n_0=máx$\{n \in \omega$:$| B_n |= 1\}$ entonces si para cada $m \in \omega$ tal que $m \leq n_0$ elegimos $x_n \in B_n$ y $s : n_0 + 1 \to A$ es una función tal que para cada $m \leq n_0$ s_m=$s(m)$=x_m, entonces $< s >\subseteq \prod_{n\in\omega} B_n$.
Además, si $s \in A^n \subseteq A^{<\omega}$, definimos una familia de abiertos $\{B_n\}_{n\in\omega}$ donde para cada $m < n$, B_m=$\{s_m\}$ y si $m \geq n$ B_n=A, entonces $< s >$=$\prod_{n\in\omega} B_n$.

Observación 1.60. *1. $< s >\subseteq< t >$ si y sólo si $t \subseteq s$;*

2. $s \not\subseteq t$ y $t \not\subseteq s$ son incompatibles si y sólo si $< s > \cap < t >= \emptyset$.

Definición 1.61. *Sean A un conjunto no vacío y T un árbol sobre A, diremos que T es de ramificación finita si para cada $s \in T$, $\{a \in A : s\,\hat{}\,a \in T\}$ es un conjunto finito.*

Lema 1.62. *(König)Sea A un conjunto no vacío y T un árbol de ramificación finita sobre A, si T es infinito entonces $[T] \neq \emptyset$.*

Demostración. Sabemos que $\emptyset \in T$ y como T es infinito tiene una cantidad infinita de sucesores, como T es de ramificación finita existe $a_0 \in A$ tal que (a_0) tiene una infinidad de sucesores, y como T es de ramificación finita existe $a_1 \in A$ tal que $(a_0)\,\hat{}\,(a_1)$ tiene una infinidad de sucesores, y así, recursivamente se conswtruye una rama infinita $x = (a_0)\,\hat{}\,(a_1)\,\hat{}\,...\,\hat{}\,(a_n)\,\hat{}\,...\in [T]$.
Por lo tanto $[T] \neq \emptyset$. □

Proposición 1.63. *Sean A un conjunto no vacío y T un árbol bien podado sobre A. Entonces $[T]$ es compacto si y sólo si T es de ramificación finita.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Suponga que $[T]$ es compacto y veamos que T es de ramificación finita.
Si T no es de ramificación finita, existe $s_0 \in T$ tal que $\{a \in A : s_0\,\hat{}\,(a) \in T\}$ es infinito. Si $\mathfrak{U}$=$\{< s_0\,\hat{}\,(a) >: s_0\,\hat{}\,(a) \in T\}\cup\{< s >: l(s) = l(s_0)$ y $s \neq s_0\}$, entonces $\bigcup\mathfrak{U}$=$[T]$. En efecto, sea $x \in [T]$, como x es una rama infinita de T $x\,|_{s_0}\in T$ si $x\,|_{s_0}$=s_0 existe $a \in A$ tal que $x \in< s_0\,\hat{}\,(a) >$, en otro caso existe $s \in T$ tal que $l(s) = l(s_0)$ y $x \in< s >$.
Ahora, notemos que si a_1, $a_2 \in A$ son tales que $s_0\,\hat{}\,(a_1)$, $s_0\,\hat{}\,(a_2) \in T$ y

$a_1 \neq a_2$, entonces $< s_0\hat{}(a_1) > \cap < s_0\hat{}(a_2) >=\emptyset$ pues $s_0\hat{}(a_1)$ y $s_0\hat{}(a_2)$ son incompatibles. Por lo tanto $\mathfrak{U}$ no admite colecciones finitas que cubran $[T]$, lo cual comtradice la compacidad.
Por lo tanto T es de ramificación finita.

$\Leftarrow]$ Como ya lo hemos comentado anteriormente, para verificar la compacidad de $[T]$ basta fijarnos en elementos de la base estándar. Sean $\mathfrak{U}$=$\{< s_i >: i \in I\}$ tal que $\bigcup \mathfrak{U} = [T]$ y T'=$\{t \in T : \forall i \in I :< t > \setminus < s_i >\neq \emptyset \}$.En seguida probaremos que T' es finito. Lo haremos por contradicción. Si T' es infinito, entonces por el Lema 1.62 T' tiene una rama infinita, entonces $\mathfrak{U}$ no cubre a $[T]$ lo cual es una contradicción, así que T' es finito.
Si $< \emptyset >\in \mathfrak{U}$ entonces $< \emptyset >=[T]$ y $\{< \emptyset >\}\subset \mathfrak{U}$.
En caso contrario, sea T''=$\{t \in T' : \nexists r \in T', t \subseteq r\}$, el cual es finito. Para cada $t \in T''$ existen s^t_{i1},s^t_{i2},...,$s^t_{in_t}$ con $n_t \in \omega$, $i_l \in I$ para $l \in$$\{1, 2,...,n_t\}$ tal que $< t >\subseteq\bigcup_{l\leq n_t} < s^t_{il} >$.
Veamos que $[T]$= $\bigcup_{t\in T''} < t >$
Si $t \in T''$, como $T'' \subseteq T' \subseteq T$, $t \in T$ y así $< t >\subseteq T$, por lo tanto es suficiente verificar que $[T] \subseteq \bigcup_{t\in T''} < t >$.
Sea $x \in [T]$, como $\mathfrak{U}$ es cubierta existe $i \in I$ tal que $x \in< s_i >$, en caso de que sean varios s_i elegimos el que cumpla que $l(s_i)$ es mínimo, note que, como $< \emptyset >\in \mathfrak{U}$, $l(s_i)> 0$ y así, $s\mid_{l(s_i)-1}\in T''$ y $x \in < s\mid_{l(s_i)-1}>$, entonces $[T] \subseteq \bigcup_{t\in T''} < t >$. Por lo tanto, $[T] \subseteq \bigcup_{t\in T''} < t >$.
Entonces $[T] = \bigcup\{< s^t_{il} >:t \in T'', l \in\{1,2,...,n_t\}\}$, y $\{< s^t_{il} >:t \in T''$, $l \in\{1,2,...,n_t\}\}$ es una subcolección finita de $\mathfrak{U}$.
Por lo tanto, $[T]$ es compacto.

$\square$

Los siguiente resultados son importantes pues se usarán para probar algunos resultados de Teoría de Juegos y de combinatoria infinita, cabe mencionar que son equivalentes al Axioma de Elección y aunque su prueba no se presentará en este trabajo se puede consultar en [4] .

Teorema 1.64. *(Lema de Kuratowski-Zorn) Cualquier conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene elemento maximal.*

Note que cualquier árbol es un conjunto parcialmente ordenado por la contención $\subseteq$ de conjuntos.

Definición 1.65. *Sean* X *un conjunto y* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$*, diremos que* $\mathcal{F}$ *es una familis de carácter finito si para cada conjunto* A *se cumple que* $A \in \mathcal{F}$ *si y sólo si cualquier subconjunto finito de* A *pertenece a* $\mathcal{F}$*.*

Teorema 1.66. *(Lema de Tukey-Teichmuller) Sean* X *un conjunto y* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$*, si* $\mathcal{F}$ *es una familia de carácter finito entonces* $\mathcal{F}$ *admite un elemento maximal.*

Capítulo 2

Espacios Polacos

2.1. Espacios Polacos

En este capítulo se estudian y prueban propiedades de los espacios Polacos

Definición 2.1. *Un espacio Polaco es un espacio topológico separable y completamente metrizable.*

Algunos ejemplos de espacios Polacos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ para cada $n \in \omega$

Proposición 2.2. *1. La completación de un espacio métrico separable es un espacio Polaco.*

2. Un subespacio cerrado de un espacio Polaco es un espacio Polaco.

Demostración. 1) Sean (X, d) un espacio métrico y (X', d') la completación de X, como (X', d') es la completación de X existe $f : X \to X'$ isometría tal que $f[X]$ es denso en X'. Como X es separable, existe $D \subseteq X$ denso numerable. Entonces $f[D]$ es denso en $f[X]$, en efecto, sean $y \in f[X]$ y $r \in \mathbb{R}_+$, probaremos que $B_r(y) \cap f[D] \neq \emptyset$.
Como $y \in f[X]$ existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, y de que D es denso en X se sigue que $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$, sea $y \in B_r(x) \cap D$ note que como f es isometría $d'(f(x), f(y))$=$d(x, y) \leq r$, de donde $f(y) \in B_r(y)$, entonces $f(y) \in f[D] \cap B_r(y)$.
Por lo tanto $f[D]$ es denso en $f[X]$.
Ahora veremos que $f[D]$ es denso en X'. Sea U abierto no vacío en X' como $f[X]$ es denso en X' $f[X] \cap U \neq \emptyset$, como $f[X] \cap U$ es un abierto no vacío en

$f[X]$ y $f[D]$ es denso en $f[X]$ se tiene que $f[D] \cap (f[X] \cap U) \neq \emptyset$. Como f es biyección $f[D]$ también es numerable y así, X' es separable.
Como X' es un espacio completamente metrizable y separable es Polaco.
2) Sean (X, d) un espacio Polaco y $Y \subseteq X$ subespacio cerrado de X, como Y es cerrado en X la métrica que hereda como subespacio es completa. Además si D es un denso numerable contenido en X, entonces $Y{=}Y{\cap}X{=}Y{\cap}cl_X(D){=}cl_Y(D{\cap}Y)$ pues Y es cerrado, entonces Y es separable y por lo tanto Polaco.

$\square$

Teorema 2.3. *El producto topológico de una cantidad numerable de espacios Polacos es un espacio Polaco.*

Demostración. Sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una colección numerable de espacios Polacos y sea $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ el producto topológico. Veremos que X es un espacio Polaco. Primero veamos que X es un espacio separable. Sea $n \in \omega$, como X_n es un espacio separable tiene una base numerable a la que denotaremos por $\mathfrak{B}_n$, nos fijamos en la colección $\mathfrak{B} = \{U_0 \times U_1 \times ... \times U_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} X_n : m \in \omega$ y para cada $i \in \{0, 1, ..., m\}$ se cumple que $U_i \in \mathfrak{B}_i\}$. Observamos que $\mathfrak{B}$ es una base numerable para X.
Ahora veremos que X es un espacio metrizable. Para cada $n \in \omega$ se cumple que X es un espacio completamente metrizable por lo tanto existe una métrica completa compatible con la topología de X_n, llamémosle d_n y supongamos que $d_n < 1$. Definimos sobre X la métrica d tal que para cualesquiera x, $y \in \prod_{n\in\omega} X_n$ se cumple que $d(x,y){=}\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n)$ donde $x{=}(x_n)_{n\in\omega}$, $y{=}(y_n)_{n\in\omega}$, como hemos pedido que para cada $n \in \omega$ se cumpla que $d_n < 1$ tenemos que $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}}$ y como la serie $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}}$ es convergente entonces la serie $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n)$ también converge. Ahora vamos a ver que la topología que induce esta métrica coincide con la topología producto. Para cada $x \in X$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ y $m \in \omega$ definimos $\mathcal{U}_\epsilon^m(x) = B_\epsilon(x_0) \times B_\epsilon(x_1) \times ... \times B_\epsilon(x_m) \times \prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$, observamos que $\{\mathcal{U}_\epsilon^m(x) : x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ y $m \in \omega\}$ es una base para la topología producto. Sean $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en la topología producto y $x \in \mathcal{U}$, veamos que $\mathcal{U}$ es un abierto en la topología inducida por d. Existen $\epsilon > 0$ y $m \in \omega$ tales que $\mathcal{U}_\epsilon^m(x) \subseteq \mathcal{U}$, observamos que $B_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x) \subseteq \mathcal{U}_\epsilon^m(x)$ y por lo tanto $x \in B_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x) \subseteq \mathcal{U}$, de esto se sigue que $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en la topología inducida por d. Ahora, sea $\epsilon > 0$, recordamos que las bolas abiertas forman una base para la topología inducida por la métrica veamos que $B_\epsilon(x)$

es un conjunto abierto en la topología producto. Como la serie $\sum_{n\in\omega}\frac{1}{2^{n+1}}$ converge, existe $m \in \omega$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$ y existe $\delta > 0$ tal que si para cada $n \leq m$ $y_n \in X_n$ y $d_n(x_n, y_n) < \delta$ entonces $\sum_{n=0}^{n=m} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $y \in X$ tal que para cada $n < m$ se cumple que $d_n(x_n, y_n) < \epsilon$, entonces $d(x, y) < \epsilon$. Por lo tanto $\mathcal{U}_\delta^m(x) \subseteq B_\epsilon(x)$, de esto se sigue que los conjuntos abiertos en la topología inducida por la métrica son conjuntos abiertos en la topología producto, por lo tanto las topologías coinciden y X es un espacio metrizable.
Ahora veamos que la métrica d es completa. Sea $\{x^i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en X, para cada $n \in \omega$ la sucesión $\{x_n^i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en X_n y como X_n es un espacio métrico completo la sucesión $\{x_n^i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión convergente y por lo tanto tiene límite, llamémosle y_n. Sea $x \in X$ tal que $x(n) = y_n$ entonces la sucesión $\{x^i\}_{i\in\omega}$ converge a x. De todo lo anterior se sigue que X es un espacio Polaco. □

Observemos que si A es un conjunto con la topología discreta, es completamente metrizable y si además es numerable entonces es Polaco.

Proposición 2.4. *El espacio A^ω visto como el producto topológico de ω copias de A con la topología discreta, es completamente metrizable y si A es numerable entonces es Polaco*

En particular nos interesan los casos donde $A = 2 =\{0,1\}$ y cuando $A = \omega$.
A $\mathcal{C}$=2^ω se le llama el espacio de Cantor y a $\mathcal{N}$=ω^ω el espacio de Baire. En las siguientes secciones se probarán resultados generales tales como que cualquier espacio Polaco es la imagen continua del espacio $\mathcal{N}$ así que, los resultados que podamos obtener de los espacios de Cantor y de Baire nos aportarán mucha información sobre los espacios Polacos en general.

Definición 2.5. *Sean X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ función. Se define la oscilación de f en $x \in X$ como $osc_f(x) = ínf\,\{diam(f[U]) : U$ es vecindad de $x\}$.*

Note que si $x \in A$ entonces x es un punto de continuidad de f si y sólo si $osc_f(x) = 0$. En efecto, si f es continua en x, para cada $n \in \omega$ existe U_n vecindad de x tal que $f[U_n] \subset B_{\frac{1}{2n}}(f(x))$, entonces $diam(f[U_n]) \leq diam(B_{\frac{1}{2n}}(f(x)))$=$\frac{1}{n}$
Entonces $osc_f(x) = inf\{diam(f[U])$: U es una vecindad abierta de $x\} \leq$

$inf\{diam(f[U_n]) : n \in \omega\} \leq$ ínf $\{diam(B_{\frac{1}{2n}}(f(x))) : n \in \omega\}=$ ínf$\{\frac{1}{n} : n \in \omega\}= 0$. Por lo tanto $osc_f(x) = 0$.
El regreso lo veremos por contrarrecíproca, supongamos que f es discontinua en x, entonces existe $r > 0$ tal que para cualquier vecindad U de x, existe $a \in U$ tal que $d(f(a), f(x)) \geq r$, por lo tanto para cada vecindad U de x, se cumple que $diam(f[U]) \geq r$; por lo tanto $osc_f(x) \geq r > 0$.

Proposición 2.6. *Si X es un espacio topológico, Y un espacio metrizable y $f : X \to Y$ función, entonces los puntos de continuidad de f forman un conjunto G_δ.*

Demostración. Para cada $\epsilon > 0$ sea A_ϵ=$\{x \in X : osc_f(x) < \epsilon\}$. Veamos que es abierto. Si $x \in A_\epsilon$, entonces $osc_f(x) < \epsilon$, entonces ϵ no es cota inferior de $\{diam(f[U]) : U$ es vecindad de $x\}$ y por tanto existe U vecindad de x tal que $diam(f[U]) < \epsilon$. Veamos que $U \subset A_\epsilon$. Si $y \in U$, U también es una vecindad de y y como $diam(f[U]) < \epsilon$, se tiene que $osc_f(y) < \epsilon$, entonces $y \in A_\epsilon$, por tanto $U \subset A_\epsilon$ y así A_ϵ es abierto.
Entonces, si A=$\{x \in X : f$ es continua en $x\}$, se tiene que A=$\bigcap_{n\in\omega} A_{\frac{1}{n+1}}$ y por lo tanto A es un conjunto G_δ. □

Proposición 2.7. *Sea (X, τ) un espacio metrizable, entonces cada subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ.*

Demostración. Sea d la métrica sobre X compatible con la topología τ. Para cada $x \in X$ y $A \subset X$ no vacío, se define $d(x, A)$=ínf$\{d(x, y) : y \in A\}$. No es difícil probar que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
Si definimos la ϵ bola alrededor de A como $B(A, \epsilon)$=$\{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$, note que ésta es un conjunto abierto. Entonces si $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, F=$\bigcap_{n\in\omega} B(F, \frac{1}{n+1})$ y por lo tanto, F es un conjunto G_δ □

Teorema 2.8. *(Kuratowski)Si X es un espacio topológico metrizable, Y un espacio completamente metrizable, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ función continua entonces existen un conjunto G_δ, G y una función continua $g : G \to Y$ tales que $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ y g extiende a f.*

Demostración. Sean d la métrica compatible con la topología en X, d_Y la métrica compatible con la topología de Y G=$\bar{A}\cap\{x \in X$:$osc_f(x)$=$0\}$, como $\bar{A}$ es un conjunto cerrado es G_δ y como $\{x \in X$:$osc_f(x)$=$0\}$ también los es, se sigue que G es un conjunto G_δ. Además como $A \subseteq X$ y f es continua en X, $A \subseteq\{x \in X$:$osc_f(x)$=$0\}$, entonces $A \subseteq G \subseteq \bar{A}$.

Sea $x \in G$, definiremos una función g sobre G. Como $x \in \bar{A}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n{=}x$, entonces $\lim_{n\to\infty} diam(f[\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}]){=}0$ pues f es continua, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en Y y como Y es un espacio completamente metrizable existe $y \in Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n){=}y$, sea $g(x){=}y$.
Veamos que g está bien definida. Sean $\{x_n\}_{n\in\omega}$, $\{y_n\}_{n\in\omega}$ sucesiones en A tales que $\lim_{n\to\infty} x_n{=}x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n{=}x$ con $x \in G$. Entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n){=}0$ pues si $\epsilon > 0$, para $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ existen M, $N \in \mathbb{N}$ tales que si $m > M$ $x_m \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ y si $n > N$ $y_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Sea $n >$máx$\{M, N\}$ entonces $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n)$ y como $d(x_n, x){+}d(x, y_n) < \frac{\epsilon}{2}{+}\frac{\epsilon}{2}{=}\epsilon$ entonces $d(x_n, y_n) < \epsilon$. Entonces, como f es una función continua, se cumple que $\lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)){=}0$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n){=}\lim_{n\to\infty} f(y_n)$, entonces g no depende de la sucesión que se tome.
Resta ver que la función g extiende a f. Sea $x \in A$, existe $\{x_n\}_{n\in\omega}$ sucesión en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n{=}x$, como f es continua $\lim_{n\to\infty} f(x_n){=}f(x)$, entonces $g(x){=}f(x)$ y así, g extiende a f.

$\square$

Recordemos que si X, Y y Z son conjuntos y $R \subseteq X \times Y$, la función proyección de R con respecto a X es una función $\pi_X : R \to X$ tal que para cada $(x, y) \in R$ se cumple que $\pi_X(x, y) = x$ y a la imagen de esta función, $\pi_X[R]$ se le llama la proyección de R con respecto a X, de forma análoga se pueden definir la función proyección de R con respecto a Y y la proyección de R con respecto a Y. Además, si $f : Z \to X \times Y$ es una función para verificar su continuidad es suficiente probar que al hacer la composición con las funciones proyecciones π_X y π_Y las funciones que nos resultan son continuas.

Teorema 2.9. *Sean X, Y espacios topológicos completamente metrizables, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ y $f : A \to B$ un homeomorfismo. Entonces f se puede extender a un homeomorfismo $h : G \to H$ donde $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ y G, H son conjuntos G_δ*

Demostración. Tenemos que $f : A \to Y$ y $f^{-1} : B \to$ son funciones continuas, aplicando el Teorema anterios tenemos que existen G_1, H_1 conjuntos G_δ en X y Y respectivamente y funciones continuas $f_1 : G_1 \to Y$ y $g_1 : H_1 \to X$ que exienden a f y f^{-1} respectivamente. Sean $R = f_1$ y $S = \{(x, y) : x = g_1(y)\}$ y definamos $G = \pi_X(R \cap S)$, $H = \pi_Y(R \cap S)$ entonces $A \subseteq G \subseteq G_1$ y $B \subseteq H \subseteq H_1$. Observemos que $x \in G$ si y sólo si existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R \cap S$ si y sólo si existe $y \in Y$ tal que $y = f_1(x)$ y $x = g_1(y)$ si y sólo si $x = g_1(f_1(x))$, de la misma forma se puede ver que $y \in H$ si y sólo si $y = f_1(g_1(y))$. Entonces $h = f_1 \mid_G$ es un homeomorfismo de G en H. Veamos que G y H son conjuntos G_δ. Sea la función $\pi : G_1 \to X \times Y$ tal que $\pi(x) = (x, f_1(x))$, como al componer π con las funciones proyecciones nos resultan la función identidad y f_1, que son funciones continuas, tenemos que π es una función continua de G en $X \times Y$. Como la imagen de π es un conjunto cerrado en $X \times Y$ entonces es un conjunto G_δ en $X \times Y$ y como la imagen inversa de un conjunto G_δ bajo una función continua es un conjunto G_δ se sigue que G es un conjunto G_δ en X. De la misma forma se puede ver que H es un conjunto G_δ en Y y observemos que h extiende a f. $\square$

Teorema 2.10. *Si X es un espacio metrizable y $Y \subseteq X$ es un espacio completamente metrizable visto como subespacio de X, entonces Y es un conjunto G_δ en X. Además, si X es completamente metrizable y $Y \subseteq X$ es un conjunto G_δ, entonces Y es un espacio completamente metrizable.*

Demostración. Para la primera afirmación consideraremos la identidad $id_Y : Y \to Y$ que es continua, entonces por el Teorema 2.8 existen un conjunto G_δ, G tal que $Y \subseteq \overline{Y}$ y una extensión continua de id_Y, $g : G \to Y$. Como Y es denso en G, g y id_G coinciden en Y y son funciones continuas entonces $g = id_G$. Entonces como $g : G \to Y$ y $g = id_Y$ se tiene que $G = Y$, por lo tanto Y es un conjunto G_δ.
Ahora veamos que se cumple la segunda afirmación. Como Y es un conjunto G_δ existe una colección de conjuntos abiertos en X, $\{U_n : n \in \omega\}$ tal que $Y = \bigcap_{n\in\omega}$. Para cada $n \in \omega$ sea $F_n = X \setminus U_n$ y sea d la métrica completa compatible con la topología de X. Definimos una nueva métrica sobre Y como sigue, si $x, y \in Y$ definimos $d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n\in\omega} \text{mín}\{\frac{1}{2^{n+1}}, \mid \frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)} \mid\}$. Esta es una métrica compatible con la topología de Y. Veamos que (Y, d') es un espacio métrico completo. Sea $\{y_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en (Y, d') entonces es una sucesión de Cauchy en (X, d) y como es un espacio métrico completo existe $y \in X$ tal que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a y en X entonces para cada $n \in \omega$ se cumple que $\lim_{i,j\to\infty} \mid \frac{1}{d(y_i,F_n)} - \frac{1}{d(y_j,F_n)} \mid = 0$, entonces para cada $n \in \omega$ la sucesión $\{\frac{1}{d(y_i,F_n)}\}_{i\in\omega}$ converge en $\mathbb{R}$ entonces la sucesión $\{d(y_i, F_n)\}_{i\in\omega}$ está acotada inferiormente y tiene una cota inferior mayor que 0 y como para cada $n \in \omega$ la sucesión $\{d(y_i, F_n)\}_{i\in\omega}$ converge a $d(y, F_n)$ entonces $d(y, F_n) \neq 0$. Entonces para cada $n \in \omega$ tenemos que $y \notin F_n$ y entonces $y \in Y$ y la sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a y en Y. $\square$

Proposición 2.11. *Existe un encaje de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{C}$*

Demostración. Definamos la función $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $x \in \mathcal{N}$, $f(x) = 0^{x_0}10^{x_1}10^{x_2}$ donde $x = (x_n)_{n\in\omega}$ y para cada $n \in \omega$, 0^{x_n} representa a la sucesión de tamaño x_n que solamente tiene al 0. Veamos que f es un homeomorfismo sobre su imagen.
Observamos que f es una función inyectiva y que su imagen es el conjunto de las sucesiones que no cumplen que son constantes a partir de cierto momento. Los abiertos de la forma $< s > \cap f[\mathcal{N}]$ donde $s \in 2^{<\omega}$ termina en 1 forman una base para $f[\mathcal{N}]$ y $f^{-1}[< s > \cap f[\mathcal{N}]]=< t >$ donde t es la sucesión que cuenta cada bloque de ceros consecutivos de s. Por lo tanto f es continua.
Ahora, si $t \in \omega^{<\omega}$ entonces $f[< t >] =< s > \cap f[\mathcal{N}]$ donde s se define a partir de t como en la definición de f. Por lo tanto f es un homeomorfismo sobre su imagen.

□

2.2. Espacios Polacos perfectos

Recordemos que si X es un espacio topológico y $x \in X$, x es un punto de acumulación de X si para cada vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $x \neq y$.

Definición 2.12. *Un espacio topológico X es un espacio perfecto si todos sus puntos son puntos de acumulación. Si $P \subseteq X$, P es un conjunto perfecto en X si es un conjunto cerrado y es un espacio perfecto con la topología que hereda de X.*

Definición 2.13. *Un esquema de Cantor sobre un conjunto X es una familia $(A_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ de subconjuntos de X tal que :*

1. $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1}=\emptyset$, *para* $s \in 2^{<\omega}$*;*
2. $A_{s^\frown i} \subset A_s$, *para* $s \in 2^{<\omega}$, $i \in\{0, 1\}$.

Teorema 2.14. *Sea X un espacio Polaco perfecto no vacío. Entonces existe un encaje de $\mathcal{C}$ en X.*

Demostración. Vamos a difinir un esquema de Cantor sobre X, $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ tal que para cada $s \in 2^{<\omega}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. U_s es un conjunto abierto no vacío;

2. diam$(U_s)\leq 2^{-l(s)}$;

3. si $i\in\{0,1\}$ entonces $\overline{U_{s\hat{}i}}\subseteq U_s$.

Definiremos el esquema de Cantor $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ por inducción sobre la longitud de s, $l(s)$. Sea $U_\emptyset$ cualquier conjunto abierto no vacío en X tal que diam$(U_\emptyset)< 2^0$, ahora suponga que para $s\in 2^{<\omega}$ se ha definido U_s, como X es un espacio perfecto no tiene puntos aislados entonces $\mid U_s\mid> 1$ entonces podemos elegir x, $y\in U_s$ tales que $x\neq y$, como X es un espacio normal podemos encontrar dos conjuntos abiertos en X, U y V tales que $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V\neq\emptyset$, $\bar{U}\subseteq U_s$ y $\bar{V}\subseteq U_s$ entonces definimos $U_{s\hat{}0}{=}U$ y $U_{s\hat{}1}{=}V$. Observamos que el esquema de Cantor que definimos cumple las condiciones que requerimos.
Sea $x\in\mathcal{C}$. Notemos que $\bigcap_{n\in\omega}U_{x|_n}{=}\bigcap_{n\in\omega}\overline{U_{x|_n}}$ y, como X es un espacio métrico completo, por el Teorema 1.18, X cumple la Propiedad de Cantor y por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega}U_{x|_n}{=}\bigcap_{n\in\omega}\overline{U_{x|_n}}\neq\emptyset$; además como ínf$\{diam(U_{x|_n}):n\in\omega\}{=}0$ ésta intersección no puede tener más de un elemento, sea $f(x)\in\bigcap_{n\in\omega}U_{x|_n}$. Veamos que f es una función inyectiva. En efecto, sean x, $y\in\mathcal{C}$ tales que $x\neq y$. Como $x\neq y$ existe $n\in\omega$ el mínimo número natural tal que $x(n)\neq y(n)$, sin pérdida de generalidad suponga que $x(n){=}0$ y $y(n){=}1$ entonces $U_{x|_n}{=}U_{y|_n}$ y $U_{x|_{n+1}}\cap U_{y|_{n+1}}{=}U_{x|_n\hat{}0}\cap U_{x|_n\hat{}1}{=}\emptyset$ y por lo tanto $f(x)\neq f(y)$. Ahora veamos que f es una función continua. En efecto, sea U un conjunto abierto en X, vamos a probar que $f^{-1}[U]$ es un conjunto abierto en $\mathcal{C}$. Si $f^{-1}[U]$ es el conjunto vacío se cumple que es un conjunto abierto, suponga que $f^{-1}[U]\neq\emptyset$ y sea $x\in f^{-1}[U]$, como X es un espacio perfecto y U es un conjunto abierto en X se cumple que $diam(U)>0$ y como ínf$\{diam(U_{x|_n})\}{=}0$ tenemos que existe $n\in\omega$ tal que $U_{x|_n}\subseteq U$. Sea $s{=}x_n$, veamos que $<s>\subseteq f^{-1}[U]$. Sea $y\in<s>$, entonces $x_n{=}y_n$ entonces $U_{x|_n}{=}U_{y|_n}$ y por lo tanto $f(y)\in U_{x|_n}\subseteq U$ y así, se tiene que $y\in f^{-1}[U]$, por lo tanto $<s>\subseteq f^{-1}[U]$ y de esto se sigue que f es una función continua. Como f es una función inyectiva y continua de $\mathcal{C}$ que es un espacio compacto en X que es un espacio Hausdorff, por la Proposición 1.45 inciso 5), se sigue que f es un encaje.

□

Definición 2.15. *Sean X un espacio topológico y $x\in X$, diremos que x es un punto de condensación de X si cada vecindad abierta de x es no numerable.*

Teorema 2.16. *(Cantor-Bendixson) Sea X un espacio Polaco. Entonces existen un único subconjunto perfecto de X, P y un único subconjunto abierto y numerable de X, C tales que $X = P \cup C$*

Demostración. Para cualquier espacio Polaco X definimos $X^*=\{x \in X\colon x$ es un punto de condensación de $X\}$. Sean $P=X^*$, $C=X \setminus X^*$ y sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base numerable para el espacio X, observamos que por la forma en que definimos a X^* se cumple que C es la unión de los U_n que cumplen que son a lo más numerables. Notamos que P es cerrado pues los puntos límite de X^* son puntos de condensación de X. Veamos que P es un conjunto Perfecto, sea $x \in P$ y U una vecindad abierta de x en X, entonces U es una vecindad no numerable de x y de esto se sigue que U tiene una cantidad no numerable de puntos de condensación de X por lo tanto $U \cap P$ es no numerable y así, P es perfecto.
Para probar la unicidad, sean P_1 un conjunto perfecto en X y C_1 un subconjunto abierto y numerable de X. Observamos que si Y es un espacio Polaco perfecto entonces $Y^* = Y$ pues si $y \in Y$ y U es una vecindad abierta de y, entonces $U\cap Y$ es un espacio Polaco perfecto y por el Teorema 2.14 contiene una copia del espacio de Cantor y por lo tanto tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Como P_1 es un subconjunto cerrado de un espacio Polaco se cumple que P_1 es un espacio Polaco y además perfecto, entonces $P_1^*=P_1$ y por lo tanto $P_1 \subseteq P$. Ahora, si $x \in C_1$ entonces como C_1 es un conjunto abierto numerable $x \in X \setminus X^*=C$, por lo tanto $C_1 \subseteq C$. De esto se sigue que $P_1=P$ y $C_1=C$. $\square$

Observamos que de los dos resultados anteriores se sigue que cualquier espacio Polaco contiene una copia del conjunto de Cantor.

Definición 2.17. *Un espacio topológico X es cero dimensional si es Hausdorff y tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados.*

Teorema 2.18. *(Brouwer) El espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es el único, salvo homeomorfismo, perfecto, compacto, metrizable , cero dimensional no vacío.*

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{C}$ cumple las propiedades que afirmamos. $\mathcal{C}$ es compacto pues 2 es compacto y de la Proposición 1.45 6) el producto de espacios espacios compactos es compacto. $\mathcal{C}$ es un espacio cero dimensional pues para cada $s \in 2^{<\omega}$ el cono generado por s, $< s >$ es un conjunto cerrado y abierto, y la colección de los conos forma una base para es espacio $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ es metrizable por el Teorema 1.56, el que sea un espacio perfecto también se sigue de que la colección de los conos sea una base y para cada $s \in 2^{<\omega}$ se

cumple que $< s >$ es infinito.
Ahora supongamos que X es un conjunto que cumple las mismas propiedades y sea d una métrica compatible para X. Contruiremos un esquema de Cantor $(C_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ sobre X tal que:

1. $C_\emptyset = X$;
2. para cada $s \in 2^{<\omega}$ se cumple que C_s es un conjunto cerrado y abierto distinto del vacío;
3. para cada $s \in 2^{<\omega}$ se cumple que $C_s = C_{s^\frown} 0 \cup C_{s^\frown 1}$;
4. para cada $x \in \mathcal{C}$ $\text{lím}_{n\to\infty} C_{x|n} = 0$.

Ahora vamos a construir el esquema de Cantor. Como X es cero dimensional existe una base, $\mathfrak{B}$ de conjuntos abiertos y cerrados. Sean $C_\emptyset = X$ y $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ una cubierta para X que consta de elementos de $\mathfrak{B}$ de diámetro menor que $\frac{1}{2}$, como X es un espacio compacto existe $n \in \omega$ y $\{X_1, ..., X_n\} \subseteq \mathfrak{B}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{i=n} X_i$ y para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$ se cumple que si $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j = \emptyset$. Si $n \in \omega$ denotaremos por 0^n a la sucesión de tamaño n que consta solamente de 0. Si $i \in \{0, ..., n-2\}$ definimos $C_{0^{i\frown}1} = X_{i+1}$, $C_{0^{n-1}} = X_n$ y $C_{0^i} = X_{i+1} \cup ... \cup X_n$. Por la Proposición 1.45 se cumple que los subespacios cerrados de un espacio compacto son compactos, por lo tanto para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que X_i es un subespacio compacto y podemos repetir el proceso para cada X_i usando una cubierta de conjuntos cerrados y abiertos de diámetro menor que $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente.
Sea $f : \mathcal{C} \to X$ una función tal que para cada $x \in \mathcal{C}$ se cumple que $f(x) \in \bigcap_{n\in\omega} C_{x|n}$, usando argumentos como los que se usaron en la prueba del Teorema 2.14 se prueba que f es homeomorfismo. $\square$

Definición 2.19. *Un esquema de Lusin sobre un conjunto X es una familia $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ de subconjuntos de X tal que*

1. $A_{s^\frown i} \cap A_{s^\frown j} = \emptyset$, *si* $s \in \omega^{<\omega}$, $i \neq j \in \omega$;
2. $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$, *si* $s \in \omega^{<\omega}$, $i \in \omega$.

Definición 2.20. *Si (X, d) es un espacio métrico y $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es un esquema de Lusin sobre X, diremos que $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es de diámetro cero si* $\text{lím}_{n\to\infty} diam(A_{x|n}) = 0$, *para cada* $x \in \mathcal{N}$.

En este caso, si $\mathcal{D}$=$\{x \in \mathcal{N} : \bigcap_n A_{x|_n} \neq \emptyset\}$*, defina* $f : \mathcal{D} \to X$ *como* $\{f(x)\}$=$\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n}$*. Llamaremos a* f *la función asociada.*

Proposición 2.21. *Sea* $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ *un esquema de Lusin sobre un espacio métrico* (X,d) *que tiene diámetro cero. Entonces si* $f : \mathcal{D} \to X$ *es la función asociada, tenemos que*

1. f *es inyectiva y continua.*
2. *Si* (X,d) *es un espacio métrico completo y cada* A_s *es cerrado, entonces* $\mathcal{D}$ *es cerrado.*
3. *Si cada* A_s *es abierto, entonces* f *es un encaje.*

Demostración. 1. Note que f está bien definida pues como $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es de diámetro cero, para cualquier $x \in \mathcal{D}$ $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(A_{x|_n})$=0 y $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} \neq \emptyset$, por lo tanto $| \bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} |$=1.
Ahora veamos que f es inyectiva, sean x, $y \in \mathcal{N}$ tales que $x \neq y$ y sea n el mínimo natural tal que $x(n) \neq y(n)$, entonces $A_{x|_n}$=$A_{y|_n}$, como $x(n) \neq y(n)$, de la primera parte de la definición de esquema de Lusin se sigue que $A_{x|_{n+1}} \cap A_{y|_{n+1}}$=$\emptyset$ y como $f(x) \in A_{x|_{n+1}}$, $f(y) \in A_{y|_{n+1}}$, se sigue que $f(x) \neq f(y)$.
Por lo tanto f es inyectiva.

2. Para verificar la continuidad veamos que para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$, $< s > \cap\mathcal{D} \subseteq f^{-1}[A_s]$. En efecto, sea $x \in < s > \cap\mathcal{D}$ entonces $\exists m \in \omega$ tal que $s = x_m$ y $\bigcap_{n\in\omega} A_{x|_n} \neq \emptyset$ entonces $f(x) \in A_s$

3. Suponga que (X,d) es un espacio métrico completo y cada A_s es cerrado y sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $x_n \to x$. Primero veamos que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en X.
Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_n\mathrm{diam}(A_{x|_n})$=0, existe $N \in \omega$ tal que $\mathrm{diam}(A_{x|_N})$< ϵ, y como $x_n \to x$, existe $M \in \omega$ tal que si $n > M$ $\mathrm{d}(x_n,x)$< 2^{-N-1}, entonces $x_n |_N = x |_N$. Sean $m,n > M$, entonces $x_n |_N = x |_N = x_m |_N$, entonces $A_{x_n|_N} = A_{x|_N} = A_{x_m|_N}$, entonces $f(x_n)$, $f(x_m) \in A_{x|_N}$ y como $\mathrm{diam}(A_{x|N})$< ϵ, se sigue que $d(f(x_n), f_(x_m)) < \epsilon$
Por lo tanto $\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy y como (X,d) es un espacio completo $f(x_n) \to y \in X$
Ahora, sea $n \in \omega$, como $x_n \to x$, existe $M \in \omega$ tal que si $m > M$

$d(x_m, x) < 2^{-n-1}$, entonces $x_m \mid_n = x \mid_n$, entonces $f(x_m) \in A_{x_m|n} = A_{x|n}$ y esto es para cada $m > M$ y como $A_{x|n}$ es cerrado, $y \in A_{x|n}$
Por lo tanto $x \in \mathcal{D}$ y $f(x) = y$, y así $\mathcal{D}$ es cerrado.

4. Suponga que cada A_s es abierto, de 1) ya se tiene que f es continua e inyectiva, para verificar que es un homeomorfismo sobre su imagen resta ver que f^{-1} es continua, o bien, que f manda abiertos en abiertos. Como la colección de los $< s >$ forma una base para $\mathcal{N}$, la colección de los conjuntos $< s > \cap \mathcal{D}$ forman una base para $\mathcal{D}$ y por lo tanto es suficiente verificar que para cada $s \in \omega^{<\omega}$ $f[< s > \cap \mathcal{D}]$ es abierto en $f[D]$.
Afirmación. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $f[< s > \cap \mathcal{D}] = f[\mathcal{D}] \cap A_s$.
$\subseteq]$ Sea $x \in < s > \cap \mathcal{D}$, entonces $s \subseteq x$ y $\bigcap_n A_{x|n} = \{f(x)\}$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $s = x \mid_m$ entonces $f(x) \in A_s$ y como $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in f[\mathcal{D}] \cap A_s$.
$\supseteq]$ Sea $y \in f[\mathcal{D}] \cap A_s$, entonces existe $x \in \mathcal{D}$ tal que $y = f(x)$, si $n = l(s)$, como $f(x) \in A_s$ y por la definición de esquema de Lusin los conjuntos distintos que están a la misma altura son ajenos, se sigue que $A_s = A_{x|n}$, entonces $s = x \mid_n$ y por lo tanto $x \in < s >$. Por lo tanto $y \in f[< s > \cap D]$ y así, $f[< s > \cap \mathcal{D}] = f[\mathcal{D}] \cap A_s$ abierto en $f[\mathcal{D}]$ pues por hipótesis A_s es abierto en X.
Por lo tanto f es un encaje.

□

Teorema 2.22. *(Alexandroff-Urysohn) El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es el único salvo homeomorfismo, Polaco no vacío, cero dimensional, cuyos subconjuntos compactos tienen interior vacío.*

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{N}$ cumple esas propiedades:

1. De la Proposición 2.4 se sigue que $\mathcal{N}$ es Polaco.

2. $\mathcal{N}$ es cero dimensional pues $\{< s >: s \in \omega^{<\omega}\}$ es una base de conjuntos cerrados y abiertos.

3. Sea $K \subseteq \mathcal{N}$ compacto, si K no tiene interior vacío, existe U abierto tal que $U \subseteq K$ y por tanto existe $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $< s > \subset K$, definamos una cubierta abierta $\mathfrak{U}$ tal que tenga a todos los abiertos de la forma $< s\,\hat{}\,(i) >$ donde $i \in \omega$ y para cada punto en $K \setminus < s >$ elegimos

algún básico que no intersecte a los elegidos anteriormente, se puede hacer porque los básicos son cerrados también. Note que $\mathfrak{U}$ no admite subcubiertas finitas pues $\{< s\hat{\ }(i) >: i \in \omega\}$ es una colección infinita de elementos ajenos dos a dos y por lo tanto K no se puede cubrir con una cantidad finita de elementos, lo cual contradice la compacidad.
Por lo tanto K tiene interior vacío.

Ahora, sean (X, τ) un espacio que cumple con las mismas características enunciadas en el teorema y d una métrica compatible con τ tal que $d \leq 1$.
Afirmamos que cada conjunto no vacío $U \subseteq X$ y cualquier $\epsilon > 0$ existe una partición $U = \bigcup_{i\in\omega} U_i$ de conjuntos cerrados y abiertos no vacíos de diámetro menor que ϵ.
Como los conjuntos compactos en X tienen interior vacío, $\bar{U}$ no es compacto, por la Proposición 1.46 $\bar{U}$ no es totalmente acotado, entonces existe ϵ' tal que U no puede ser cubierto con una cantidad finita de bolas de radio menor que ϵ'. Como X es cero dimensional, podemos escribir a $U = \bigcup_{j\in\omega} V_j$ donde los V_j son conjuntos cerrados y abiertos ajenos por pares, entonces tiene que existir una cantidad infinita de V_j no vacíos.
Usando lo anterior se puede construir un esquema de Lusin $(C_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ sobre X tal que

1. $C_\emptyset = X$, $C_s \neq \emptyset$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$;
2. C_s es cerrado y abierto para cada $s \in \omega^{\omega}$;
3. $C_s = \bigcup C_{s\hat{\ }(i)}$;
4. $\mathrm{diam}(C_s) \leq 2^{l(s)}$.

Note que $(C_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es un esquema de Lusin con diámetro cero. Sea $f : D \to X$ la función asociada, sea $x \in \mathcal{N}$, como cada C_s es un conjunto cerrado y abierto, en particular cerrado, por el Teorema 1.18 $\bigcap C_{x|n} \neq \emptyset$ y así $D = \mathcal{N}$, además como en cada nivel los conjuntos cerrados y abiertos se van particionando, $f[D] = X$.
Finalmente, de 2) y la Proposición 2.21 3) se sigue que f es homeomorfismo.
□

Se puede probar que el espacio $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es un espacio Polaco no vacío, cero dimensional, cuyos subconjuntos compactos tienen interior vacío. Por lo tanto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathcal{N}$.

La prueba del siguiente Teorema no se presentará pues se prueba usando la Proposición 2.11 y construyendo un esquema de Lusin como en las pruebas anteriores.

Teorema 2.23. *Cada espacio separable, metrizable, cero dimensional puede ser encajado en $\mathcal{N}$ y $\mathcal{C}$. Cada espacio cero dimensional Polaco es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$ o a un subespacio G_δ de $\mathcal{C}$.*

2.3. El hiperespacio de los conjuntos compactos

Definición 2.24. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ al espacio de todos los subconjuntos compactos de X con la topología de Vietoris, es decir, la topología cuya sub-base consta de conjuntos de la forma $\{K \subseteq X\colon K$ es compacto en X y $K \subseteq U\}$ y $\{K \subseteq X\colon K$ es compacto en X y $K \cap U \neq \emptyset\}$ donde U es un conjunto abierto en X.*

Una base para este espacio consta de los conjuntos de la forma $\{K \subseteq X\colon K \subseteq U_0$, $K \cap U_1 \neq \emptyset$,... $K \cap U_n \neq \emptyset$ y K es compacto en $X\}$. A estos básicos se les denotará por $\langle U_0; U_1, ..., U_n\rangle$.

Definición 2.25. *Sea (X, d) un espacio métrico con $d \leq 1$. Definimos la métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{K}(X)$, la cual denotaremos por d_H, como sigue. Sean K, $L \in \mathcal{K}(X)$*

$$d_H(K,L) = \begin{cases} 0 \text{ si } K = L = \emptyset \\ 1 \text{ si uno y solamente uno de } K \text{ y } L \text{ es el conjunto vacío} \\ \text{máx}\,\{\delta(K,L), \delta(L,K)\} \text{ si } K, L \neq \emptyset \end{cases}$$

donde $\delta(K,L)$=máx$\{d(x,L){:}x \in K\}$.

Proposición 2.26. *Sea (X, d) un espacio métrico, si K, $L \in \mathcal{K}(X)$ y no son vacíos entonces*

$$d_H(K,L) < \epsilon \text{ si y sólo si } K \subseteq B(L,\epsilon) \text{ y } L \subseteq B(K,\epsilon) \tag{2.1}$$

Demostración. $\Rightarrow$] Suponga que $d_H(K,L) < \epsilon$. Como $K \neq \emptyset$ y $L \neq \emptyset$ $d_H(K,L)$=máx$\{\delta(K,L),\delta(L,K)\}$ entonces $\delta(K,L) < \epsilon$ y $\delta(L,K) < \epsilon$.
Veamos que $K \subseteq B(L,\epsilon)$ y $L \subseteq B(K,\epsilon)$. En efecto, sea $x \in K$ entonces $d(x,L) \leq$máx$\{d(y,L){:}y \in K\}= \delta(K,L) < \epsilon$ por lo tanto $d(x,L) < \epsilon$ y así $x \in B(L,\epsilon)$. Ahora sea $x \in L$, entonces $d(x,K) \leq$máx$\{d(y,K){:}y \in L\}=$ $\delta(L,K) < \epsilon$ por lo tanto $d(x,K) < \epsilon$ y así $x \in B(K,\epsilon)$.

$\Leftarrow$] Como $K \subseteq B(L,\epsilon)$ para cualquier $x \in K$ se cumple que $d(x,L) < \epsilon$, entonces $\delta(K,L)$=máx$\{d(y,L){:}y \in K\}< \epsilon$. Y como $L \subseteq B(K,\epsilon)$ para cualquier $x \in L$ se cumple que $d(x,K) < \epsilon$, entonces $\delta(L,K)$=máx$\{d(y,K){:}y \in L\}< \epsilon$. Por lo tanto $d_H(K,L) < \epsilon$

□

Proposición 2.27. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces τ_{d_H}, la topología determinada por la métrica de Hausdorff en $\mathcal{K}(X)$, es equivalente a la topología de Vietoris.*

Demostración. Primero veamos que los abiertos en la topología de Vietoris son abiertos con la métrica de Hausdorff. Sean $K \in K(X)$ y U_0, U_1,...,U_n conjuntos abiertos en X tales que $K \in \langle U_0; U_1,...,U_n\rangle$. Para cada $x \in K$ podemos encontrar ϵ_x tal que si $m \in$\{0,1,...,n\} es tal que $x \in U_m$ entonces $B_{\epsilon_x}(x)$. Note que $K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x) \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{\epsilon_x}(x)$ y como K es un conjunto compacto existen $x_1,...,x_l \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=l} B_{\frac{\epsilon_{x_i}}{2}}(x_i)$. Sea ϵ=mín$\{\epsilon_{x_i}{:}i \in$\{0,1,...,l\}\}, veamos que $B(K,\epsilon) \subseteq \langle U_0; U_1,...,U_n\rangle$. Sea $L \in K(X)$ tal que $d_H(K,L) < \epsilon$ entonces $\delta(K,L) < \epsilon$ y $\delta(L,K) < \epsilon$, de donde $L \subseteq \bigcup_{x\in K} B_\epsilon(x)$ y $K \subseteq \bigcup_{x\in L} B_\epsilon(x)$. Entonces, si $y \in L$ existe $x \in K$ tal que $y \in B_\epsilon(x)$, es decir, $d(x,y) < \epsilon$, como $x \in K$ existe $i \in$\{0,1,...,l\} tal que $x \in B_{\frac{\epsilon_{x_i}}{2}}(x_i)$, de manera que $d(x,x_i) < \frac{\epsilon_{x_i}}{2}$. Entonces $d(x_i,y) \leq d(x_i,x) + d(x,y) < \frac{\epsilon_{x_i}}{2} + \epsilon < \epsilon_{x_i}$, por lo tanto $y \in B_{\frac{\epsilon_{x_i}}{2}}(x_i) \subseteq U_0$ y así, $L \subseteq U_0$.
Veamos ahora que para cada $i \in$\{0,1,...,n\} se cumple que $L \cap U_i \neq \emptyset$. Sea $i \in$\{0,1,...,n\} y $x \in K \cap U_i$, tenemos que $B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x) \subseteq U_i$. Como $K \subseteq \bigcup_{y\in L} B_\epsilon(y)$ existe $y \in L$ tal que $x \in B_\epsilon(y)$, es decir, $d(x,y) < \epsilon \leq \frac{\epsilon_x}{2}$, entonces $y \in B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x) \subseteq U_i$ y así $y \in L \cap U_i$. por lo tanto $L \in \langle U_0; U_1,...,U_n\rangle$ y así, $B(K,\epsilon) \subseteq \langle U_0; U_1,...,U_n\rangle$.
Ahora veamos que los abiertos con la métrica de Hausdorff son abiertos en la topología de Vietoris. Sean $K \in K(X)$ y $\epsilon > 0$, como K es un conjunto compacto en X existen $x_1,x_2,...,x_n \in X$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=n} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x_i)$. Para cada $i \in$\{0,1,...,n\} sea U_i=$B_{\frac{\epsilon}{4}}(x_i)$ y sea U=$\langle \bigcup_{i=0}^{i=n} U_i; U_0,U_1,...,U_n\rangle$. Note

que $K \in U$, veamos que $U \subseteq B(K,\epsilon)$. Sea $L \in U$, entonces $L \subseteq \bigcup_{i=0}^{i=n} U_i \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{\frac{\epsilon}{4}}(x)$, por lo tanto $\delta(K,L) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Si $x \in K$ existe $i \in${0,1,...,n} tal que $x \in U_i$ y como U es vecindad de L existe $y \in L$ con $d(x_i,y) < \frac{\epsilon}{4}$, por lo tanto $d(x,y) < \frac{\epsilon}{2}$, entonces $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$, así $L \subseteq \bigcup_{y\in K} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$ y por tanto $\delta(L,K) \leq \frac{\epsilon}{2}$. De lo anterior se sigue que $d_H(K,L) < \epsilon$ y así, $U \subseteq B(K,\epsilon)$ □

Teorema 2.28. *Si X es un espacio metrizable entonces $\mathcal{K}(X)$ lo es. Si X es separable $\mathcal{K}(X)$ también lo es.*

Demostración. Si X es un espacio metrizable, la métrica del espacio induce la métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{K}(X)$ y por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ es un espacio metrizable.

Suponga que X es separable, entonces existe $D \subseteq X$ subconjunto denso y numerable de X. Sea $K_f(D)$={$K \subseteq D$: K es finito}, note que es numerable y veamos que es denso en $K(X)$. Sean U_0, U_1,...,U_n abiertos en X, como D es denso en X para cada $i \in${1,...,n} se cumple que $(U_0 \cap U_i) \cap D \neq \emptyset$ entonces existe $x_i \in (U_0 \cap U_i) \cap D$, sea K={x_i:$i \in${0,1,...,n}} entonces $K \subseteq U_0$ y para cada $i \in${1,...,n} $K \cap U_i \neq \emptyset$ por lo tanto $K \in K_f(D) \cap \langle U_0; U_1, ..., U_n\rangle$. Entonces $\mathcal{K}_f(D)$ es un conjunto denso en $\mathcal{K}(X)$ y como es numerable se sigue que $\mathcal{K}(X)$ es separable. □

Definición 2.29. *Sean X un espacio topológico y $\{K_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathcal{K}(X)$. Definimos el límite topológico inferior de la sucesión $\{K_n\}_{n\in\omega}$, $T\underline{lím}_{n\to\infty}K_n$ como el conjunto $\{x \in X : \forall V$ vecindad de x $|\{n \in \omega : V \cap K_n \neq \emptyset\}|=\aleph_0\}$ y el límite topológico superior de la sucesión $\{K_n\}_{n\in\omega}$, $T\overline{lím}_{n\to\infty}K_n$ como el conjunto $\{x \in X : \forall V$ vecindad de x $|\{n \in \omega : V \cap K_n = \emptyset\}| < \aleph_0\}$.*

Notamos que $T\underline{\lim}_{n\to\infty}K_n \subseteq T\overline{\lim}_{n\to\infty}K_n$. Cuando ambos límites sean iguales lo llamaremos el límite topológico de la sucesión $\{K_n\}_{n\in\omega}$ y lo denotaremos como $T\lim_{n\to\infty}K_n$. Además, observemos que si X es un espacio metrizable y para cada $n \in \omega$ se cumple que $K_n \neq \emptyset$ entonces el límite topológico superior consiste de los $x \in X$ que cumplen que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en X tal que para cualquier $n \in \omega$, $x_n \in K_n$ y existe una subsucesión $\{x_{ni}\}_{i\in\omega}$ de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\lim_{n\to\infty}x_{ni} = x$y el límite topológico inferior consiste de los $x \in X$ que cumplen que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en X tal que para cualquier $n \in \omega$, $x_n \in K_n$ y $\lim_{n\to\infty}x_n$=x.

Proposición 2.30. *Sea (X,d) un espacio métrico con $d \leq 1$. Si $K \in \mathcal{K}(X)$ es distinto del conjunto vacío y $\{K_n : K_n \neq \emptyset, n \in \omega\}$⊆ $\mathcal{K}(X)$ entonces*

1. *Si* $\lim_{n\to\infty}\delta(K,K_n)=0$, *entonces* $K\subseteq T\underline{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$;
2. *Si* $\lim_{n\to\infty}\delta(K_n,K)=0$, *entonces* $K\supseteq T\bar{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$.

Demostración. 1. Suponga que $\lim_{n\to\infty}\delta(K,K_n)=0$ y veamos que $K\subseteq T\underline{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$. Sean $x\in K$ y $m\in\omega$, como $\lim_{n\to\infty}\delta(K,K_n)=0$ existe $N_m\in\omega$ tal que si $n>N$ entonces $\delta(K,K_n)<\frac{1}{m}$, entonces $d(x,K_n)\leq\delta(K,K_n)\leq\frac{1}{m}$ y como $d(x,K_n)=\inf\{d(x,z):z\in K_n\}<\frac{1}{m}$ existe $y\in K_n$ tal que $d(x,y)<\frac{1}{m}$, sea $x_n=y$. Entonces $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ y $x_n\in K_n$ por lo tanto $x\in T\underline{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$. Por lo tanto $K\subseteq T\underline{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$.

2. Ahora suponga que $\lim_{n\to\infty}\delta(K_n,K)=0$ y veamos que $K\supseteq T\bar{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$. Sea $x\in T\bar{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en X tal que para cualquier $n\in\omega$ $x_n\in K_n$ y para alguna subsucesión $\{x_{ni}\}i\in\omega$ de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ se cumple que $\lim_{i\to\infty}x_{ni}=x$. Sea $m\in\omega$, entonces existe $N_m\in\omega$ tal que si $n_i>N_m$ entonces $\delta(K_{ni},K)<\frac{1}{2m}$ y $d(x_{ni},x)<\frac{1}{2m}$, entonces $d(x_{ni},K)\leq\delta(K_{ni},K)<\frac{1}{2m}$, y como $d(x_{ni},K)=\inf\{d(x_{ni},z):z\in K\}$ existe $y\in K$ tal que $d(x_{ni},y)<\frac{1}{2m}$, sea $y_i=y$ entonces $d(y_i,x)<\frac{1}{m}$ y así, $\lim_{i\to\infty}y_i=x$ y como para cada $i\in\omega$ tenemos que $y_i\in K$ y por ser compacto K es un conjunto cerrado entonces $x\in K$. Por lo tanto $K\supseteq T\bar{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$.

□

Observamos que de esta proposición se sigue que si $\lim_{n\to\infty}d_H(K_n,K)=0$ entonces $K=\text{Tlím}_{n\to\infty}K_n$

Teorema 2.31. *Si* X *un espacio completamente metrizable, entonces* $\mathcal{K}(X)$ *también lo es.*

Demostración. Ya sabemos que si X es un espacio metrizable entonces $\mathcal{K}(X)$ también lo es, por lo tanto resta ver que si X admite una métrica completa entonces $\mathcal{K}(X)$ también. Sean d una métrica completa compatible para X tal que $d\leq 1$ y $\{K_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en $(K(X),\tau_{d_H})$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $n\in\omega$ $K_n\neq\emptyset$ pues si hay elementos de la sucesión que coincidan con el conjunto vacío los podemos quitar y los límites topológicos de la sucesión no cambian.
Sea $K=T\bar{l}\text{ím}_{n\to\infty}K_n$, probaremos que $K\in K(X)$ y $\lim_{n\to\omega}d_H(K_n,K)=0$.
Notamos que $K=\bigcap_{n\in\omega}(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty}K_i})$, por lo tanto K es cerrado y como X es completamente metrizable, por el Teorema 1.18, K no es vacío.
Veamos que K es compacto. Por la Proposición 1.46 es suficiente probar que

K es totalmente acotado, para esto veremos que para cada $n \in \omega$ existe un conjunto finito $F_n \subseteq X$ tal que $K \subseteq \bigcap_{x\in F_n} B(x, 2^{-n-1})$ y que si $L_n{=}\bigcup_{i=n}^{\infty}$ entonces $L_n \subseteq \bigcup_{x\in F_n} B(x, 2^{-n-1})$. Sean n, $i \in \omega$, como K_i es un conjunto compacto es totalmente acotado, por lo tanto existe un conjunto finito F_n^i tal que $K_i \subseteq \bigcup_{x\in F_n^i} B(x, 2^{-n-1})$. Como $\{K_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en $(K(X), \tau_{d_H})$ existe $p \in \omega$ tal que si $p > n$ y si $j, k \in \omega$ cumplen que $j, k > p$, entonces $d_H(K_j, K_k) < 2^{-n-1}$. Sea $F_n{=}\bigcup_{n\leq i\leq p} F_n^i$ y observemos que la colección de los conjuntos F_n cumple lo que queremos. Entonces, como la sucesión $\{\frac{1}{2^{-n-1}}\}_{n\in\omega}$ converge a 0, para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^{-n-1}} < \epsilon$, entonces $K \subseteq \bigcup_{x\in F_n} B(x, 2_{-n-1})$ y por lo tanto K es un conjunto totalmente acotado, y así K es un conjunto compacto.
Ahora veamos que $\text{lím}_{n\to\infty} d_H(K_n, K){=}0$. Sea $\epsilon > 0$, como $\{K_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy existe $N \in \omega$ tal que si $i, j \in \omega$ y $i, j > N$, entonces $d_H(K_i, K_j) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $x \in K$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$ $x_n \in K_n$. Mostraremos que si $n \in \omega$ y $n > N$ entonces $d_H(K_n, K) < \epsilon$

1. Si $x \in K$, entonces existe una sucesión en X, $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tal que para cada $n \in \omega$ $x_n \in K_n$ y existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$, $\{x_{ni}\}_{ni\in\omega}$ tal que $\text{lím}_{i\to\infty} x_{ni}{=}x$, entonces existe $M \in \omega$ tal que si $i \in \omega$ es tal que $n_i > M$, entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$; sea $y_{ni} \in K_{ni}$ tal que $d(x_{ni}, y_{ni}) < \frac{\epsilon}{2}$, entonces $d(x, y_{ni}) < \epsilon$ y por lo tanto $\delta(K, K_n) < \epsilon$.

2. Sean $n \in \omega$ y $y \in K_n$. Definiremos una sucesión de números naturales $n{=}k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tal que si $j \in \omega$ para cualquier $m \geq k_j$ $d(K_{k_j}, K_m) < 2^{-j-1}\epsilon$. Para cada $j \in \omega$ vamos a definir $x_{k_j} \in K_{k_j}$, la definición se hará por inducción, sea $x_{k_1}{=}y$, ahora suponga que para $j \in \omega$ se ha elegido $x_{k_j} \in K_{k_j}$ y sea $x_{k_{j+1}}$ tal que $d(x_{k_{j+1}, x_{k_j}}) < 2^{-j-1}\epsilon$, note que la existencia de $x_{k_{j+1}}$ se sigue de que $\{K_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy. Note que por la forma en la que se construyó $\{x_{k_j}\}_{j\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en X y como X es un espacio completamente metrizable existe $x \in X$ tal que $x{=}\text{lím}_{j\to\infty}\{x_{k_j}\}$. Note que para cada $n \in \omega$ $x \in \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i}$, por lo tanto $x \in \bigcap_{n\in\omega}(\overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i}){=}K$ y $d(y, x) < \epsilon$. Por lo tanto $\delta(K_n, K) < \epsilon$

Como $K \neq \emptyset$ y para cada $n \in \omega$ $K_n \neq \emptyset$ se tiene que $d_H(K_n, K){=}$ $\text{máx}\{\delta(K_n, K), \delta(K, K_n)\}$, entonces $d_H(K_n, K) < \epsilon$ y así $\text{lím}_{n\to\infty} d_H(K_n, K){=}0$ y entonces $\text{lím}_{n\to\infty}$ $\{K_n\}{=}K$ y por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ es un espacio completamente metrizable. $\square$

Proposición 2.32. *Sean X y Y espacios metrizables, entonces la función $\varphi : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(Y) \to \mathcal{K}(X \times Y)$ tal que para cada $(K, L) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(Y)$ $\varphi(K, L)$=$K \times Y$ es continua.*

Demostración. Veamos que φ es una función continua. Sean $\mathcal{U}$ un abierto básico de $\mathcal{K}(X \times Y)$, entonces existen U_0, U_1,..,U_n abiertos en $X \times Y$ tales que $\mathcal{U} = \langle U_0; U_1, ..., U_n\rangle$. Sean $K \in \mathcal{K}(X)$ y $L \in \mathcal{K}(Y)$ tales que $\varphi(K, L) \in \mathcal{U}$, entonces $(K \times L) \subseteq U_0$, $(K \times L) \cap U_1 \neq \emptyset$,...,$(K \times L) \cap U_n \neq \emptyset$ entonces existen V_0, V_1,..., V_n abiertos en X y W_0, W_1,..., W_n abiertos en Y tales que $(K \times L) \subseteq (V_0 \times W_0) \subseteq U_0$, $(K \times L) \cap (V_1 \times W_1) \neq \emptyset$ y $(K \times L) \cap (V_1 \times W_1) \subseteq (K \times L) \cap U_1$,..., $(K \times L) \cap (V_n \times W_n) \neq \emptyset$ y $(K \times L) \cap (V_n \times W_n) \subseteq (K \times L) \cap U_n$. Entonces V=$\langle V_0; V_1, ..., V_n\rangle$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y W=$\langle W_0; W_1, ..., W_n\rangle$ es un abierto en $\mathcal{K}(Y)$ y cumplen que $K \times L \in \varphi[V \times W]$, entonces $(K, L) \in V \times W \subseteq \varphi^{-1}[\mathcal{U}]$ y así, φ es continua. □

Observamos que este resultado se puede extender a una cantidad finita de espacios metrizables.
Denotaremos por $\langle U_0, U_1, ..., U_n\rangle$ al básico $\langle \bigcup_{i=0}^{i=n} U_i; U_0, U_1, ..., U_n\rangle$. Entenderemos por conjunto perfecto un conjunto el cual no tiene puntos aislados, es decir, puntos cuyo singular sea un conjunto abierto. En la Sección 2.2 se definirá de manera más formal este concepto.

Proposición 2.33. *Sea X un espacio metrizable y separable. Entonces $\mathcal{K}_p(X)$ $= \{K \in \mathcal{K}(X) : K$ es perfecto$\}$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{K}(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X y para cada $n \in \omega$ definamos $\mathcal{U}_n = \{B \in \mathcal{B}$:diam$(B) < 2^{-n}\}$. Sea $\mathcal{F} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $\mathcal{F}$ es de la forma $\mathcal{F} = \{B_1, ..., B_k\}$ y además pedimos que para cara $j \in \{1, ..., k\}$ se cumple que $\mid B_j \mid > 1$ entonces existen $p_j, q_j \in B_j$ tales que $p_j \neq q_j$. Sean $\bar{p} = \{p_1, ..., p_k\}$ y $\bar{q} = \{q_1, ..., q_k\}$, definimos $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}^{\bar{p},\bar{q}} = \langle B_1, B_1 \setminus \{p_1\}, B_1 \setminus \{q_1\} ..., B_k, B_k \setminus \{p_k\}, B_k \setminus \{q_k\}\rangle$. Sea $G_n = \bigcup_{\mathcal{F} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}} \bigcup_{\bar{p},\bar{q} \in \bigcup \mathcal{F}} \mathcal{W}_{\mathcal{F}}^{\bar{p},\bar{q}}$. Vamos a probar que $\mathcal{K}_p(X) = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Si $F \in \mathcal{K}_p(X)$ y $n \in \omega$ notamos que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta para F y como F es un conjunto compacto existe una colección finita $\mathcal{F} = \{B_1, ..., B_k\} \subseteq \mathcal{U}_n$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=k} B_i$ y como F es un conjunto perfecto para cada $i \in \{1, ..., k\}$ $\mid F \cap B_i \mid > 1$ entonces existen $p_i, q_i \in F \cap B_i$ tales que $p_i \neq q_i$. Por lo tanto $F \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}^{\bar{p},\bar{q}}$, de esto se sigue que $F \in G_n$ y por lo tanto $F \in \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Ahora suponga que existe $F \in \bigcap_{n\in\omega}$ tal que F no es perfecto, entonces existen $n \in \omega$ y $B \in \mathcal{U}_n$ tales que $\mid F \cap B \mid = 1$. Sea $m > n$, como $F \in G_m$ existen $\mathcal{F} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$

y $\bar{p}, \bar{q} \in \bigcup \mathcal{F}$ tales que $F \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}^{\bar{p},\bar{q}}$, es decir, si $\mathcal{F} = \{B_1, ..., B_k\}$ entonces $F \in \langle B_1, B_1 \setminus \{p_1\}, B_1 \setminus \{q_1\}, ..., B_k, B_k \setminus \{p_k\}, B_k \setminus \{q_k\} \rangle$ lo cual no es posible pues los elementos de $\mathcal{F}$ son de diamétro menor que n y por lo tanto debe existir $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $\mid F \cap B_j \mid = 1$. Por lo tanto $\mathcal{K}_p(X) = \bigcap_{n \in \omega} G_n$ y de esto se sigue que $\mathcal{K}_p(X)$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{K}(X)$. $\square$

2.4. Espacios localmente compactos

Definición 2.34. *Un espacio topológico* (X, τ) *es localmente compacto si cada punto de* X *tiene una vecindad cuya cerradura es compacta*

Recordemos que si X un espacio topológico localmente compacto y T_2, su compactación a un punto $\tilde{X}$ se construye como sigue:
Si X es compacto, $\tilde{X}$=X. De otra forma, sea $p \notin X$ y $\tilde{X}$=$X \cup \{p\}$ y se define la topología sobre $\tilde{X}$ como sigue: los conjuntos abiertos serán los conjuntos abiertos de X y todos los conjuntos de la forma $\tilde{X} \setminus K$ donde $K \in \mathcal{K}(X)$.

Definición 2.35. *Un conjunto* A *en un espacio topológico* X *es* K_σ *si* $A = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ *donde* $K_n \in \mathcal{K}(X)$ *para cada* $n \in \omega$.

Teorema 2.36. *Sea* X *un espacio localmente compacto y* T_2*. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X *es segundo numerable;*
2. X *es metrizable y* K_σ*;*
3. $\tilde{X}$ *es metrizable y compacto;*
4. X *es Polaco;*
5. X *es homeomorfo a un subconjunto abierto de un espacio compacto metrizable.*

Capítulo 3

La propiedad de Baire

3.1. Espacios de Baire

Definición 3.1. *Sea X un espacio topológico, un conjunto $A \subseteq X$ es llamado nunca denso si su cerradura $\bar{A}$ tiene interior vacío.*

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ es nunca denso si y sólo si para cualquier conjunto abierto no vacío U, existe un conjunto abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $V \cap A = \emptyset$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea U un conjunto abierto no vacío, como int$(\bar{A})=\emptyset$ se cumple que $U \nsubseteq \bar{A}$, entonces $V = U \cap (X \setminus \bar{A}) \neq \emptyset$ es abierto y $V \cap A = \emptyset$
$\Leftarrow$] Supongamos que int$(\bar{A}) \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $V \subseteq$int$(\bar{A})$ abierto no vacío tal que $V \cap A = \emptyset$. Como V es una vecindad para cada $x \in V \subseteq$int$(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$, $A \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto int$(\bar{A})=\emptyset$. □

Notamos que un conjunto A es nunca denso si y sólo si $\bar{A}$ es nunca denso y esto es equivalente a que $X \setminus \bar{A}$ es denso.

Definición 3.3. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

1. *A es un conjunto magro si $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nunca denso.*

2. *El complemento de un conjunto magro es llamado comagro o residual.*

Note que E es comagro si y sólo si $E = X \setminus A$ donde $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ donde cada A_n es nunca denso si y sólo si $E = \bigcap_{n\in\omega}(X \setminus A_n) \supseteq \bigcap_{n\in\omega}(X \setminus \bar{A}_n)$ donde cada $X \setminus \bar{A}_n$ es un conjunto denso y abierto. De aquí podemos concluir que los conjuntos comagros se caracterizan por contener una intersección numerable de conjuntos densos y abiertos.

Definición 3.4. *Un ideal sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que tiene al conjunto $\emptyset$ y es cerrada bajo subconjuntos y uniones finitas. Si un ideal es cerrado bajo uniones numerables es llamado σ-ideal.*

Proposición 3.5. *La colección de los conjuntos nunca densos en un espacio topológico es un ideal y la de los conjuntos magros es un σ-ideal.*

Proposición 3.6. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Cada subconjunto abierto no vacío de X no es magro;*
2. *Cada conjunto comagro en X es denso;*
3. *La intersección de una familia numerable de conjuntos densos abiertos en X es denso.*

Demostración.

- 2. $\Rightarrow$ 3.] Sea $E=\bigcap_{n\in\omega} U_n$ donde cada U_n es un conjunto abierto y denso en X, entonces cada $X \setminus U_n$ es nunca denso en X, entonces $X \setminus E=X \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_n=\bigcup_{n\in\omega}(X \setminus U_n)$ es magro en X, entonces E es comagro y, por hipótesis, E es denso.

- 2. $\Rightarrow$ 1.] Sea U un abierto no vacío en X y supongamos que es magro, entonces $X \setminus U$ es comagro y por hipótesis es denso, lo cual es una contradicción pues U es abierto no vacío y $U \cap (X \setminus U)=\emptyset$

- 3. $\Rightarrow$ 2.] Sea $F=X \setminus E$ donde $E=\bigcup_{n\in\omega} E_n$ y cada E_n es nunca denso, entonces $F=\bigcap_{n\in\omega}(X \setminus E_n)\supseteq\bigcap_{n\in\omega}(X \setminus \bar{E}_n)$. Observemos que para cada $n \in \omega$, $X \setminus \bar{E}_n$ es un conjunto abierto y denso así que, por hipótesis, $\bigcap_{n\in\omega}(X \setminus \bar{E}_n)$ es denso. Por lo tanto, F es un conjunto denso.

- 1. $\Rightarrow$ 3.] Sea $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una familia de subconjuntos de X abiertos, no vacíos y densos. Si $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ no fuera un conjunto denso, existiría un conjunto U, abierto no vacío tal que $\bigcap_{n\in\omega} D_n \cap U=\emptyset$, entonces $U \subseteq X \setminus \bigcap_{n\in\omega} D_n=\bigcup_{n\in\omega}(X \setminus D_n)$ que es magro pues cada $X \setminus D_n$ es nunca denso. Como la colección de los conjuntos magros es un ideal, es cerrado bajo subconjuntos y por tanto U es magro, pero por hipótesis ningún conjunto abierto no vacío es magro lo cual lleva a una contradicción. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ es un conjunto denso.

$\square$

Definición 3.7. *Un espacio topológico es llamado espacio de Baire si satisface alguna de las proposiciones equivalentes de la Proposición 3.6.*

Proposición 3.8. *Si X es un espacio de Baire y $U \subseteq X$ un conjunto abierto, entonces U es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una colección de conjuntos densos y abiertos en U, entonces los elementos de esta familia también son conjuntos abiertos en X, entonces para cada $n \in \omega$, $U_n \cup (X \setminus \bar{U})$ es un conjunto denso y abierto en X. Por lo tanto, por la Proposición 3.6.3, $\bigcap_{n\in\omega}(U_n \cup (X \setminus \bar{U}))=\bigcap_{n\in\omega}(U_n) \cup (X \setminus \bar{U})$ es un conjunto denso en X. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega}(U_n)$ es denso en U. $\square$

Teorema 3.9. *(El teorema de la categoría de Baire) Cada espacio completamente metrizable es un espacio de Baire. Cada espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio completamente metrizable, d una métrica compatible con τ, y sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una colección de abiertos densos en X, veremos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso en X.
Sea U un conjunto abierto no vacío de X. Probaremos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \cap U \neq \emptyset$. Como U_0 es denso en X, $U \cap U_0 \neq \emptyset$ y, dado que X es metrizable, es regular, así que para $x_0 \in U \cap U_0$ existe un conjunto abierto V tal que $x_0 \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U \cap U_0$. Como la colección de las bolas abiertas forma una base para el espacio métrico, existe una bola abierta B_0 con centro en x_0 y radio menor que $\frac{1}{2}$ tal que $B_0 \subseteq V$, entonces $\bar{B_0} \subseteq U \cap U_0$; como U_1 es denso en X y B_0 es un conjunto abierto no vacío, $B_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Si $x_1 \in B_0 \cap U_1$ usando argumentos análogos a los usados para $U \cap U_0$ podemos encontrar una bola abierta B_1 de radio menor que $\frac{1}{3}$ con centro en x_1 tal que $\bar{B_1} \subseteq B_0 \cap U_1$. Entonces $\{x_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy y, como el espacio métrico es completamente metrizable, existe $x \in X$ tal que $x_i \to x$, además notemos que si $i \in \omega$, para cada $j \geq i$ $x_j \in \bar{B_i}$ y, por lo tanto $x \in \bar{B_i}$, así, tenemos que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \bar{B_n} = \bigcap_{n\in\omega} B_n \subseteq (\bigcap_{n\in\omega} U_n) \cap U$ y así $(\bigcap_{n\in\omega} U_n) \cap U \neq \emptyset$.
Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto hacemos una construcción similar pero los B_i serán abiertos de tal forma que $\bar{B_i}$ es compacto, entonces los conjuntos $\{\bar{B_i} : i \in \omega\}$ en una colección de conjuntos compactos

que poseen la propiedad de la intersección finita, como $\overline{B_0}$ es un conjunto compacto y Hausdorff, y $\overline{B_0} \supseteq \overline{B_1} \supseteq ...$, por el Teorema 1.43 se cumple que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{B_n} \neq \emptyset$.

□

Proposición 3.10. *Si X es un espacio Polaco perfecto el conjunto $\mathcal{K}_p(X) = \{K \in \mathcal{K}(X) : K$ es perfecto$\}$ es un conjunto G_δ y denso en $\mathcal{K}(X)$.*

Demostración. De la proposición 2.33 se sigue que $\mathcal{K}_p(X)$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{K}(X)$, resta ver que es denso. Sean $\mathcal{U} = \langle U_0, U_1, ..., U_n \langle$ abierto básico en $\mathcal{K}(X)$ y $K \in \mathcal{U}$. Como X es un espacio Polaco es Hausdorff, y como K es un conjunto compacto de lo anterior se sigue que es cerrado, como la popiedad de ser espacio Polaco es hereditario bajo subespacios cerrados se sigue que K es un espacio Polaco perfecto, entonces por el Teorema 2.14 K contiene una copia de $\mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ es un espacio Polaco, perfecto y compacto entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_p(X) \neq \emptyset$ y por lo tanto $\mathcal{K}_p(X)$ es denso en $\mathcal{K}(X)$. □

3.2. Espacios y juegos de Choquet

Desde principios del siglo XX algunos matemáticos habían abordado algunos problemas en términos de *juegos*, es decir, de planteamientos en los que dos o más jugadores realizan por turnos una sucesión de *jugadas* respetando unas *reglasdeljuego* con el objetivo de *ganar* una *partida*. La cuestión principal que plantean este tipo de juegos es el estudio de posibles estrategias ganadoras para alguno de los jugadores. Un análisis de este tipo puede aplicarse a un *juego* propiamente dicho, desde casos triviales como el tres en raya hasta casos matemáticamente inabordables como el ajedrez, o bien puede ser una forma alegórica de abordar determinados problemas o situaciones. Por ejemplo, en 1944 Von Neumann y Morgensten usaron la teoría de juegos para modelar determinados comportamientos de agentes económicos.

En 1953 el matemático y economista David Gale, junto con Frank Stewart, estudió las conexiones con la lógica y la teoría de conjuntos de un juego infinito que llamaron $J_X(A)$, donde X es un conjunto arbitrario. El juego consiste en que dos jugadores I y II juegan por turnos un elemento de X: empieza I jugando x_0, luego II juega un x_1, y así sucesivamente.

En 1962 los matemáticos polacos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus tuvieron la audacia de proponer un axioma alternativo para la teoría de conjuntos al

cual llamaron Axiomas de Determincación.
En esta sección definiremos algunos juegos sobre un espacio topológico, estos juegos serán una herramienta para estudiar a los espacios con la propiedad de Baire y nos permitirán caracterizarlos.

Definición 3.11. *Sea X un espacio topológico no vacío. El juego de Choquet G_X de X se define como sigue: Los jugadores I y II toman turnos jugando con subconjuntos abiertos y no vacíos de X.*
I U_0 U_1 ...
II V_0 V_1 ...
tales que $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq ....$ *Decimos que II gana la partida del juego si* $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$*, el jugador I gana si* $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n = \emptyset$

Una estrategia para I en el juego es una regla que le dice cómo jugar, para cada $n \in \omega$ la estrategia le dice a I cuál debe ser su n-ésimo movimiento, U_n dados los movimientos previos de II V_0, V_1,... Formalmente se define como sigue:

Definición 3.12. *Sean X un espacio topológico no vacío, G_X el juego de Choquet de X y T el árbol de las posiciones legales del juego de Choquet G_X, es decir, T consiste de todas las sucesiones finitas $(W_0, W_1, ..., W_n)$ donde cada W_i es un conjunto abierto no vacío contenido en X y $W_0 \supseteq W_1 \supseteq ... \supseteq W_n$.*
Una estrategia para I en G_X es un subárbol $\sigma \subseteq T$ tal que:

1. *σ es no vacío.*
2. *Si $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_n) \in \sigma$, entonces para cada conjunto abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$ se cumple que $(U_0, V_0, U_1, V_1, ..., U_n, V_n) \in \sigma$.*
3. *Si $(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V_{n-1}) \in \sigma$, entonces existe un único U_n tal que $(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$.*

Intuitivamente, una estrategia σ funciona como sigue: I inicia jugando U_0 tal que $(U_0) \in \sigma$ y es único por 3 de la Definición 3.12, II juega cualquier conjunto abierto no vacío $V_0 \subseteq U_0$ y por 2 de la Definición 3.12, $(U_0, V_0) \in \sigma$; entonces I responde jugando con el único conjunto abierto no vacío $U_1 \subseteq V_0$ tal que $(U_0, V_0, U_1) \in \sigma$,etc.

Definición 3.13. *Sean X un espacio topológico no vacío, G_X el juego de Choquet de X y T el árbol de las posiciones legales de G_X y σ una estrategia para el jugador I. Entonces*

1. *Una posición $(W_0, W_1,...,W_n) \in T$ es compatible con σ si $(W_0, W_1,...,W_n) \in \sigma$.*
2. *Una partida del juego $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...)$ es compatible con σ si $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...) \in [\sigma]$.*
3. *La estrategia σ es una estrategia ganadora para I si él gana cada partida $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...)$ compatible con σ.*

De forma análoga se define una estrategia ganadora para el jugador II.

Teorema 3.14. *(Oxtoby) Un espacio topológico X es un espacio de Baire si y sólo si el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego de Choquet G_X.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que el jugador I tiene una estrategia ganadora σ y sea U_0 el primer movimiento del jugador I de acuerdo a σ.
Probaremos que U_0 no es un espacio de Baire. Para esto, construiremos un subárbol $S \subseteq \sigma$ de la siguiente manera:
Primero $\emptyset \in S$.
Si $(U_0, V_0,...,U_{n-1}, V_{n-1}) \in S$, entonces $(U_0, V_0,...,U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$ donde U_n es el único que cumple que $(U_0, V_0,...,U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$.
Ahora, si $p=(U_0, V_0,...,U_n) \in S$, notemos que para cada conjunto abierto no vacío $V_n \subseteq U_n$, σ garantiza la existencia de U_{n+1}, lo denotaremos por V_n^*. Nos fijamos en una cadena en la familia de las colecciones de V_n que son ajenos por pares. Aplicando el Teorema 1.64 existe un familia maximal de subconjuntos de U_n ajenos por pares $\mathcal{V}_p$. Entonces $\{V_n^* : V_n \in \mathcal{V}_p\}$ es una colección de conjuntos ajenos por pares; los elementos de S serán los $(U_0, V_0,...,U_n, V_n, V_n^*)$. Afirmamos para cada $p=(U_0, V_0,...,U_n) \in S$, si $\mathcal{U}_p=\{U_{n+1} :(U_0, V_0,...,U_n) \in S\}=\{V_n^*:V_n \in \mathcal{V}_p\} \bigcup U_p$ es denso en U_n.
En efecto, si $\bigcup \mathcal{U}_p$ no es denso en U_n, existe $V \subseteq U_n$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_p \cap V=\emptyset$ entonces $\mathcal{V}_p \cup \{V\}$ es una colección de conjuntos ajenos por pares lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{V}_p$.
Para cada $n \in \omega$, $W_n=\bigcup\{U_n:(U_0, V_0,...,U_n) \in S\}$ es un conjunto abierto. Además, si $V \subseteq U_0$ es un conjunto abierto no vacío, hacemos $V_0=V$ y se puede extender a una sucesión $(U_0, V_0,...,U_n) \in S$ y como $U_n \subseteq V$ es un conjunto

no vacío y $U_n \subseteq W_n$, se sigue que $V \cap W_n \neq \emptyset$. Por lo tanto W_n es denso en U_0 para cada $n \in \omega$.
Veamos que $\bigcap_{n\in\omega} W_n$=$\emptyset$.
Supongamos lo contrario y sea $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, entonces existe una rama $(U_0, V_0,...,U_n, V_n,...)$∈ $[S]$ tal que para cada $n \in \omega$, $x \in U_n$; notemos que la rama es única pues para cada n, la colección de los U_n es ajena por pares, entonces $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $(U_0, V_0,...,U_n, V_n,...)$∈ $[\sigma]$ y σ es una estrategia ganadora para el jugador I.
Así, hemos construido una colección numerable de abiertos densos en U_0 cuya intersección no es densa, entonces U_0 no es un espacio de Baire y por la Proposición 3.8 se sigue que X no es un espacio de Baire.

$\Leftarrow$] Probaremos la implicación por contrarrecíproca. Supongamos que X no es un espacio de Baire y sean $\{G_n\}_{n\in\omega}$ una colección de conjuntos densos abiertos en X y U_0 conjunto abierto no vacío tal que $\bigcap_{n\in\omega} G_n \cap U_0$=$\emptyset$.
El jugador I inicia con U_0. Si el jugador II juega con $V_0 \subseteq U_0$, como G_0 es un conjunto denso en X, $V_0 \cap G_0 \neq \emptyset$, entonces el jugador I juega con U_1=$V_0 \cap G_0 \subseteq V_0$, si el jugador II juega con V_1 entonces el jugador II juega con U_2=$V_1 \cap G_1$ y así, recursivamente se define una estrategia para el jugador II.
Note que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G_n \cap U_0$=$\emptyset$, por lo tanto hemos descrito una estrategia ganadora para el jugador I. □

Definición 3.15. *Un espacio topológico X no vacío es un espacio de Choquet si el jugador II tiene una estrategia ganadora en G_X.*

Notemos que como no es posible que ambos jugadores tengan una estrategia ganadora cada espacio de Choquet es un espacio de Baire.

Definición 3.16. *Dado un espacio topológico no vacío X, el juego fuerte de Choquet G_X^s se define como sigue:*
I x_0, U_0 x_1, U_1
... II V_0 V_1 ...
Los jugadores I y II toman turnos con conjuntos abiertos no vacíos de X como en el juego de Choquet, pero además el jugador I tiene que fijar un punto $x_n \in U_n$ y el jugador II debe poner $V_n \subseteq U_n$ tal que $x_n \in V_n$. Entonces $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq$... , $x_n \in U_n$ y $x_n \in V_n$ para cada $n \in \omega$.
El jugador II gana el juego si $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$

Definición 3.17. *Un espacio topológico X no vacío se llama espacio fuerte de Choquet si el jugador II tiene una estrategia ganadora.*

Lema 3.18. *Sean (Y, d) un espacio métrico separable, y $\mathcal{U}$ una colección de conjuntos abiertos no vacíos en Y. Entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento puntualmente finito $\mathcal{V}$, es decir, existe $\mathcal{V}$ familia de conjuntos abiertos no vacíos de Y tal que $\bigcup\mathcal{U}{=}\bigcup\mathcal{V}$, $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists U \in \mathcal{U}\ (V \subseteq U)$ y $\forall y \in Y$ ($\{V \in \mathcal{V} : y \in V\ \}$ es finito). Además, dado $\epsilon > 0$, podemos asumir que diam(V)$< \epsilon$ para cada $V \in \mathcal{V}$.*

Demostración. Como Y es un espacio métrico separable, por el Teorema 1.34 se tiene que X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X (basta tomar todas las bolas de radio racional con centro en cada uno de los puntos del subconjunto denso y numerable de Y).
Sea $\{U_n\}_{n\in\omega}\subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} U_n{=}\bigcup\mathcal{U}$ y $\forall n \in \omega\ \exists U \in \mathcal{U}(U_n \subseteq U)$. Además si $\epsilon > 0$ podemos asumir que diam$(U_n)< \epsilon$.
Para cada $n \in \omega$, sea U_n^0 un conjunto abierto no vacío tal que $\overline{U_n^0} \subseteq U_0$. Como Y es metrizable es normal, entonces existe U_n^1 abierto tal que $\overline{U_n^0} \subseteq U_n^1 \subseteq \overline{U_n^1} \subseteq U_n$. De esta forma se puede construir una sucesión $\{U_n^p\}_{p\in\omega}$ tal que cada U_n^p es un conjunto abierto, $U_n^p \subseteq U_n^{p+1}$, $\bar{U_n^p} \subseteq U_n$ y $U_n{=}\bigcup_{p\in\omega} U_n^p$.
Para cada $m \in \omega$ sea $V_m{=}U_m\setminus\bigcup_{n<m} \bar{U_n^m}$. Probaremos que $\bigcup_{n\in\omega} V_n{=}\bigcup_{n\in\omega} U_n$. En efecto, si $x \in \bigcup_{n\in\omega} U_n$, sea m el mínimo natural tal que $x \in U_m$ entonces $x \in V_m$, de donde $\bigcup_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_n$ y como, por definición $V_n \subseteq U_n$ se sigue la igualdad.
Finalmente, si $x \in U_n$ para algún $n \in \omega$, entonces $x \in U_n^p$ para algún $p \in \omega$, entonces $x \in U_n^m$ para cualquier $m > p$ y así $x \notin V_m$ para cualquier $m > p$.
Por lo tanto, si $\mathcal{V}{=}\{V_n : n \in \omega\}$, entonces $\mathcal{V}$ es un refinamiento puntualmente finito de $\mathcal{U}$. □

Teorema 3.19. *Sea X un espacio separable metrizable no vacío y $\hat{X}$ un espacio Polaco en el cual X es denso. Entonces*

1. *(Oxtoby) X es un espacio de Choquet si y sólo si X es comagro en $\hat{X}$;*

2. *(Choquet) X es un espacio fuerte de Choquet si y sólo si X es G_δ si y sólo si X es Polaco*

Demostración. 1. $\Rightarrow$] Sean σ una estrategia ganadora para el jugador II en G_X y sea d una métrica compatible para $\hat{X}$. Construiremos un árbol bien podado no vacío S que consiste de sucesiones de la forma

$(U_0, \hat{V}_0, ..., U_n)$ o $(U_0, \hat{V}_0, ..., U_n, \hat{V}_n)$ donde cada U_i es un conjunto abierto no vacío en X y cada $\hat{V}_i$ es un abierto no vacío en $\hat{X}$, $\hat{V}_0 \supseteq \hat{V}_1 \supseteq ...$ y si $V_i = X \cap \hat{V}_i$ entonces $(U_0, V_0, ..., U_n)$ o $(U_0, V_0, ..., U_n, V_n)$ son compatibles con σ

Primero, $\emptyset \in S$ y si $(U_0, \hat{V}_0, ..., U_n) \in S$, entonces, como $(U_0, V_0, ..., U_n) \in \sigma$, elegimos un conjunto abierto en X $U \subseteq U_n$ tal que diam$(\bar{U}) < 2^{-n}$; notemos que $(U_0, V_0, ..., U) \in \sigma$ y como σ es una estrategia ganadora para el jugador II existe un conjunto abierto $V_n \subseteq U$ tal que $(U_0, V_0, ..., U, V_n) \in \sigma$, entonces $(U_0, V_0, ..., U_n, V_n) \in \sigma$ y como V_n es un conjunto abierto en X, existe un conjunto abierto en $\hat{X}$ $\hat{V}_n$ tal que $V_n = X \cap \hat{V}_n$ y entonces $(U_0, \hat{V}_0, ..., U_n, \hat{V}_n) \in S$.

Si $p = (U_0, \hat{V}_0, ..., U_{n-1}, \hat{V}_{n-1}) \in S$, entonces $(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V_{n-1}) \in \sigma$ y para cada $U_n \subseteq V_{n-1}$ existe $V_n \subseteq U_n$ tal que $(U_0, V_0, ..., U_n, V_n) \in \sigma$ y como V_n es un conjunto abierto en X existe un conjunto abierto en $\hat{X}$, $\hat{V}_n$ tal que $V_n = X \cap \hat{V}_n$.

Nos fijamos en la familia de colecciones de $\hat{V}_n$ ajenos por pares tales que diam$(\hat{V}_n) < 2^{-n}$. Por el Teorema 1.64 existe un elemento maximal $\hat{\mathcal{V}}_p$, entonces los elementos de S serán de la forma $(U_0, \hat{V}_0, ..., U_n, \hat{V}_n)$ donde $\hat{V}_n \in \hat{\mathcal{V}}_p$.

Las siguientes afirmaciones se prueban de la misma forma que en la prueba del teorema 3.2

a) $\bigcup \hat{\mathcal{V}}_p$ es denso en $\widehat{V_{n-1}}$

b) $W_n = \bigcup \{\hat{V}_n : (U_0, \hat{V}_0, ..., U_n, \hat{V}_n) \in S\}$ es un conjunto denso abierto en $\hat{X}$

Afirmamos que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq X$.

Si $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, existe una única $(U_0, \hat{V}_0, U_1, \hat{V}_1, ...) \in [S]$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \hat{V}_n$ y como para cada $n \in \omega$ diam$(V_n) < 2^{-n}$ tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} \hat{V}_n = \{x\}$. Como sabemos que $(U_0, V_0, U_1, V_1, ...) \in [\sigma]$ y σ es una estrategia ganadora para el jugador II, $\bigcap_{n\in\omega} V_n = \bigcap_{n\in\omega} \hat{V}_n \cap X \neq \emptyset$, entonces $x \in X$ y, por lo tanto X contiene una intersección numerable de densos abiertos y, por tanto, X es magro en $\hat{X}$.

$\Leftarrow$] Como X es comagro en $\hat{X}$, existe una familia de conjuntos densos y abiertos en $\hat{X}$ tal que $X \supseteq \bigcap_{n\in\omega} D_n$

Veamos que el jugador II tiene una estrategia ganadora.

Supongamos que el jugador I inicia con cualquier conjunto abierto no vacío $U_0 \subseteq X$, entonces existe un conjunto abierto en $\hat{X}$, W_0, tal que U_0=$W_0 \cap X$ y como G_0 es abierto y denso en $\hat{X}$, $W_0 \cap G_0 \neq \emptyset$ es abierto en $\hat{X}$ y como X es denso en $\hat{X}$ se cumple que $X \cap W_0 \cap G_0 \neq \emptyset$ y es abierto en X. Sea $x \in X \cap W_0 \cap G_0$; como $\hat{X}$ es regular, del Teorema 1.36 existe un conjunto abierto en $\hat{X}$, V, tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X \cap W_0 \cap G_0$=$U_0 \cap G_0$. Sea V_0= V el movimiento del jugador II, para cualquier conjunto abierto no vacío en X, U_1 tal que $U_1 \subseteq V_0$ existe un conjunto abierto en $\hat{X}$, W_1 tal que U_1=$W_0 \cap X$, como G_1 es un conjunto abierto y denso en X $W_1 \cap G_1 \neq \emptyset$ es un conjunto abierto, y como X es un conjunto denso en $\hat{X}$ $X \cap W_1 \cap G_1 \neq \emptyset$ y es un conjunto abierto en X, sea $x \in X \cap W_1 \cap G_1$, de la regularidad de $\hat{X}$ se sigue que existe W abierto tal que $x \in W \subseteq \bar{W} \subseteq X \cap W_1 \cap G_1$=$U_1 \cap G_1$, de esta manera se define recursivamente una estrategia para el jugador II. Además, notemos que, por el Teorema 1.18, $\bigcap_{n\in\omega} U_n$=$\bigcap_{n\in\omega} \bar{U}_n \neq \emptyset$ así que, por lo tanto es una estrategia ganadora para el jugador II.

2. La equivalencia: X es G_δ en $\hat{X} \Leftrightarrow X$ es Polaco se sigue del Teorema 2.10.
   $\Rightarrow$] En esta parte se hace una contrucción similar a las pruebas de los teoremas anteriores en la que se usa el Lema 3.18 para seleccionar las sucesiones que pertenecerán al árbol.
   $\Leftarrow$] Veremos que el espacio X es fuertemente Choquet, es decir, que el jugador II tiene una estrategia ganadora.
   Suponga que el jugador I inicia el juego con $U_0 \subseteq X$ y $x_0 \in U_0$, como X es regular, por el Teorema 1.36 existe un conjunto abierto no vacío V_0 tal que $x_0 \in V_0 \subseteq \bar{V_0} \subseteq U_0$ y con diam(V_0)$< 2^{-0}$. Para cualquier $U_1 \subseteq V_0$ con $x_1 \in V_1$ existe un conjunto abierto no vacío V_1 tal que $x_1 \in V_1 \subseteq \bar{V_1} \subseteq U_1$ y diam(V_1)$< 2^{-1}$. De esta forma se define recursivamente una estrategia para el jugador II, además $\bigcap_{n\in\omega} V_n$=$\bigcap_{n\in\omega} \bar{V_n} \neq \emptyset$ y, por lo tanto hemos construido una estrategia ganadora para el jugador II.

□

Teorema 3.20. *(Choquet) Un espacio topológico segundo numerable y no vacío es un espacio Polaco si y sólo si es T_1, regular y fuerte de Choquet.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si X es un espacio Polaco, entonces X es un espacio fuerte de Choquet, por el Teorema 3.19.
$\Leftarrow$] Como X es segundo numerable y T_3, del Teorema 1.34 se sigue que X

es metrizable, y como es un espacio fuerte de Choquet, del Teorema 3.19 se sigue que X es un espacio Polaco. □

3.3. Conjuntos con la propiedad de Baire

Definición 3.21. *Sea X un conjunto. Una álgebra sobre X es una colección de subconjuntos de X que es cerrado bajo complementos y uniones finitas y tiene al conjunto vacío como elemento. Si además cumple la propiedad de ser cerrada bajo uniones numerables se llama σ-álgebra.*

Definición 3.22. *Sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal sobre un conjunto X. Si $A, B \subseteq X$ diremos que A, B son iguales módulo $\mathcal{I}$, denotado por $A =_{\mathcal{I}} B$ si la diferencia simétrica $A \bigtriangleup B$=$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{I}$*

En particular, si $\mathcal{I}$ es el σ-ideal de los conjuntos magros de un espacio topológico escribimos $A =^* B$ si A, B son iguales módulo conjuntos magros.

Definición 3.23. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire, que denotaremos por PB, si $A =^* U$ para algún conjunto abierto $U \subseteq X$*

Proposición 3.24. *Sea X un espacio topológico. La clase de los conjuntos que tienen la PB es una σ álgebra sobre X. Es la σ álgebra más pequeña que tiene a todos los conjuntos abiertos y a los magros.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la clase de los conjuntos que cumplen la PB. Notemos que si U es un conjunto abierto, $\bar{U} \setminus U$ es un conjunto cerrado, nunca denso y por lo tanto magro. Si F es un conjunto cerrado, $F\setminus$int(F) es un conjunto cerrado, nunca denso y por lo tanto magro.
Entonces U=$^*\bar{U}$ y F=*int(F), de donde se sigue que los conjuntos abiertos y cerrados tienen la propiedad de Baire.

Ahora, si A tiene la PB, A=$^*U$ para algún conjunto abierto U, entonces $X \setminus A$=$^*X \setminus U$=*int$(X \setminus U)$ que es un conjunto abierto, y así $X \setminus A$ tiene la BP.
Finalmente, si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una colección de conjuntos con la PB, para cada $n \in \omega$ existe un conjunto abierto en X, U_n, tal que A_n=$^*U_n$. Por lo tanto $((\bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} U_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} U_n \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n)) = ((\bigcup_{n\in\omega} A_n \cap X \setminus \bigcup_{n\in\omega} U_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} U_n \cap X \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n)) = \bigcup_{n\in\omega}((A_n \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A_n))$ que es un conjunto

magro pues la colección de los conjuntos magros es un σ ideal. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una σ álgebra.
Además, si M es un conjunto magro entonces $M{=}^*\emptyset$, por tanto $\mathcal{B}$ tiene a todos los conjuntos abiertos y a los conjuntos magros de X.
Si $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra que tiene a todos los conjuntos abiertos y a los magros de X, sea A conjunto con la PB, entonces existe un conjunto abierto en X U, tal que $A{=}^*U$, es decir, $(A\setminus U)\cap(U\setminus A){=}M$ es un conjunto magro, entonces $A{=}(M\setminus U)\cup(U\setminus M)$ y como $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra, $A\in\mathcal{B}'$. Por lo tanto $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}'$ y así, $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra más pequeña que tiene a todos los conjuntos abiertos y a los magros de X

□

Proposición 3.25. *Sean X un espacio topológico y $A\subseteq X$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A tiene la PB.*
2. *$A{=}G\cup M$ donde G es G_δ y M es magro.*
3. *$A{=}F\setminus M$ donde F es F_σ y M es magro.*

Demostración. 2.⇒1.] y 3.⇒1.] se siguen de que la colección de los conjuntos que tienen la PB es una σ álgebra y tiene a todos los conjuntos abiertos y magros.
1.⇒2.] Sea A conjunto con la PB, entonces existe un conjunto abierto U tal que $A\bigtriangleup U{=}N$ es un conjunto magro, entonces $N{=}\bigcup_{n\in\omega}A_n$, donde cada A_n es un conjunto nunca denso, entonces $\bar{A_n}$ es un conjunto nunca denso y $F{=}\bigcup_{n\in\omega}\bar{A_n}$ es un conjunto magro y F_σ que cumple que $A\bigtriangleup U\subseteq F$.
Entonces $G{=}U\setminus F$ es un conjunto G_δ y $G\subseteq A$, $M{=}A\setminus G\subseteq F$ es un conjunto magro porque la colección de los conjuntos magros es un ideal y $A{=}G\cap A\setminus G$
1.⇒3.] Sea A con la PB entonces $X\setminus A$ también tiene la PB y por 1.⇒2.] $X\setminus A{=}G\cup M$ donde G es G_δ y M magro, entonces $A{=}X\setminus(G\cup M){=}(X\setminus G)\cap(X\setminus M)$, si $F{=}X\setminus G$ es F_σ y $A{=}F\setminus M$. □

3.4. El juego de Banach Mazur

Definición 3.26. *Sean X un espacio topológico no vacío y $A\subseteq X$, el juego de Banach-Mazur de A, denotado por $G^{**}(A)$ o $G^{**}(A,X)$ si puede haber*

confusión, se define como sigue:
Los jugadores I y II eligen alternadamente conjuntos abiertos no vacíos $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots$
I U_0 U_1 ...
II V_0 $V_1 \ldots$
El jugador II gana el juego si $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq A$

Teorema 3.27. *(Banach-Mazur, Oxtoby) Sean* X *un espacio topológico no vacío y* $A \subseteq X$*. Entonces*

1. *A es comagro si y sólo si el jugador II tiene una estrategia ganadora en* $G^{**}(A)$*.*

2. *Si X es un espacio de Choquet y existe una métrica d sobre X cuyas bolas abiertas sean abiertos en X, entonces A es magro en un conjunto abierto no vacío si y sólo si el jugador I tiene una estrategia ganadora en* $G^{**}(A)$*.*

Demostración. 1. $\Rightarrow]$ Como A es un conjunto comagro existe una sucesión de conjuntos densos abiertos en X, $\{W_n\}_{n\in\omega}$, tal que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq A$. Para $n \in \omega$, si U_n es el movimiento del jugador I, como W_n es un conjunto abierto y denso en X y U_n es un conjunto abierto no vacío, se cumple que $U_n \cap W_n \neq \emptyset$ y además es abierto, entonces si se define V_n=$U_n \cap W_n$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} W_n \bigcap A$ y, por lo tanto, hemos definido una estrategia ganadora para el jugador II.
$\Leftarrow]$ Supongamos que el jugador II tiene una estrategia ganadora σ en el juego $G^{**}(A)$. Construiremos un árbol $S \subseteq \sigma$ de la misma forma que en la prueba del Teorema 3.19 2) obtenemos una colección $\{W_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos densos y abiertos tal que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} V_n$ y $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq A$ pues σ es una estrategia ganadora para el jugador II, de donde se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq A$ y, por tanto, A es un conjunto comagro.

2. $\Rightarrow]$ Si A es un conjunto magro en un subconjunto de X abierto no vacío U_0, $U_0 \setminus A$ es comagro en él, entonces existe una sucesión de conjuntos abiertos y densos en U_0, $\{W_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq U_0 \setminus A$.
Como la propiedad de ser Choquet es hereditaria bajo subespacios abiertos y X es un espacio de Choquet entonces U_0 es un espacio de Choquet, entonces el jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego G_{U_0}
I U_1 U_2 ...

II V_0 V_1 ...
donde $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq ...$, y para cada $n \in \omega$, U_n y V_n son conjuntos abiertos no vacíos y el jugador I gana si $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.
Sea σ la estrategia ganadora para el jugador I. Describiremos una estrategia ganadora para el jugador I en $G^{**}(A)$
El jugador I inicia con U_0, luego el jugador II juega cualquier $V_0 \subseteq U_0$ abierto no vacío; como W_0 es un conjunto abierto y denso en U_0, $V_0 \cap W_0 \neq \emptyset$ es un conjunto abierto. Sea V_0'=$W_0 \cap V_0$, entonces el jugador I responde con el único conjunto abierto U_1 tal que $(V_0', U_1)$$\in \sigma$.
Si el jugador II juega con cualquier conjunto no vacío $V_1 \subseteq U_1$, sea V_1'=$V_1 \cap W_1$, entonces el jugador I juega con el único conjunto abierto U_2 tal que $(V_0', U_1, V_1', U_2)$$\in \sigma$, y de esta manera se define recursivamente una estrategia para el jugador I.
Como σ es una estrategia ganadora para el jugador I, $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n\in\omega} U_n$=$\bigcap_{n\in\omega} V_n' \subseteq \bigcap_{n\in\omega} W_n$$\subseteq X \setminus A$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} \nsubseteq A$, es decir, hemos descrito una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G^{**}(A)$.
$\Leftarrow$] Sea σ una estrategia ganadora para el jugador I en $G^{**}(A)$. Sea U_0 el primer movimiento del jugador I según σ.
Afirmamos que podemos encontrar una estrategia ganadora σ' para el jugador I que inicie con U_0 y si en el n-ésimo movimiento produce el abierto U_n entonces diam$(U_n)$$< 2^{-n}$ en la métrica d para $n \geq 1$.
Describiremos a σ'. El jugador I inicia el juego con U_0, si el jugador II juega con $V_0 \subseteq U_0$, elegimos una bola abierta $V_0' \subseteq V_0$ tal que diam$(V_0')$$< 2^{-1}$ y $\bar{V_0}' \subseteq V_0$, entonces $(U_0, V_0')$$\in \sigma$ y como es una estrategia ganadora para el jugador I, existe $U_1 \subseteq V_0'$ tal que $(U_0, V_0', U_1)$$\in \sigma$ y diam$(U_1)$$< 2^{-1}$, entonces el jugador I jugará con U_1 en la estrategia σ'.
Si el jugador II juega con $V_1 \subseteq U_1$, elegimos una bola abierta $V_1' \subseteq V_1$ tal que diam$(V_1')$$< 2^{-2}$ y $\bar{V_1}' \subseteq V_1$, entonces $(U_0, V_0', U_1, V_1')$$\in \sigma$ y entonces existe un único $U_2 \subseteq V_1'$ tal que $(U_0, V_0', U_1, V_1', U_2)$$\in \sigma$ y diam$(U_2)$$< 2^{-2}$, entonces el jugador I jugará con U_2 en la estrategia ganadora σ'.
Entonces $\bigcap_{n\in\omega} U_n$=$\bigcap_{n\in\omega} \bar{V_n}'$ que es un singular, como σ es una estrategia ganadora para el jugador I $\bigcap_{n\in\omega} U_n \nsubseteq A$, de estas afirmaciones se sigue que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq X \setminus A$.
Como en la prueba del Teorema 3.19 2) se pueden construir un subárbol $S \subseteq \sigma'$ y una colección de conjuntos abiertos y densos$\{W_n\}_{n\in\omega}$ tales

que $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq X \setminus A$
Por lo tanto $X \setminus A$ es comagro y así A es magro.

$\square$

Definición 3.28. *Un juego es determinado si alguno de los dos jugadores tienen una estrategia ganadora.*

En 1962 los matemáticos polacos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus tuvieron la audacia de proponer un axioma alternativo para la teoría de conjuntos al cual denominamos el Axioma de Determinación, denotado por AD, que dice que cualquier juego está determinado. Decimos que es un axioma alternativo porque contradice al Axioma de Elección ya que con el Axioma de Elección se pueden construir juegos no determinados.
Durante la década de los 70 el estudio del Axioma de Determinación resultó especialmente fértil. La guerra fría afectaba cada vez menos a las comunicaciones internacionales entre matemticos y así, desde Alexander Kechris y Yiannis N. Moschovakis en Grecia hasta Robert Solovay en los Estados Unidos, un amplio abanico de matemáticos fue descubriendo que el Axioma de Determinación implica una teoría de conjuntos exótica y fascinante, como una geometría no euclídea.

3.5. Funciones Baire medibles

Definición 3.29. *Sean X, Y espacios topológicos. Diremos que una función $f : X \to Y$ es Baire medible si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en Y tiene la Propiedad de Baire en X.*

Observamos que si Y es un espacio segundo numerable es suficiente fijarse en la imagen inversa de los elementos de la base numerable para verificar que una función es Baire medible.

Teorema 3.30. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función Baire medible. Si Y es un espacio segundo numerable existe un conjunto $G \subseteq X$ que es la intersección de una cantidad numerable de conjuntos densos y abiertos tal que $f\,|_G$ es continua. En particular, si X es un espacio de Baire entonces f es una función continua en un conjunto G_δ y denso en X.*

Demostración. Como Y es un espacio segundo numerable existe $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ base de Y, como f es una función Baire medible se tiene que para cada

$n \in \omega$ $f^{-1}[B_n]$ es un conjunto con la propiedad de Baire entonces existe un conjunto abierto V_n y un conjunto magro M_n tales que $f^{-1}[B_n] \bigtriangleup V_n = M_n$. Como cada M_n es un conjunto magro es una unión numerable de conjuntos nunca densos, si nos fijamos en la cerradura de los conjuntos nunca densos obetenemos nuevamente conjutnos nunca densos y por lo tanto la unión, a la que denotaremos por F_n es un conjunto magro y cumple que $f^{-1}[B_n] \bigtriangleup V_n \subseteq F_n$. Sea $G_n = X \diagdown F_n$, observamos que G_n es la intersección numerable de conjuntos densos y abiertos, entonces definimos $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Entonces $f^{-1}[B_n] \cap G = V_n \cap G$ que es un conjunto abierto en G. Por lo tanto $f \mid_G$ es continua. □

3.6. Conjuntos de Borel

Recordemos que para un conjunto X una σ-álgebra sobre X, es una colección de subconjuntos de X que es cerrado bajo complementos y uniones numerables y tiene al conjunto vacío como elemento.

Teorema 3.31. *Sean X un conjunto y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces existe la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$, llamada la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$ y denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. También se llama a $\mathcal{E}$ el conjunto de generadores de $\sigma(\mathcal{E})$.*

Demostración. Sea S=$\{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$:$\mathcal{A}$ es una σ-álgebra$\}$, veamos que $\bigcap S$ es una σ-álgebra. Como cada $\mathcal{A} \in S$ es una σ-álgebra $\emptyset \in \mathcal{A}$, entonces $\emptyset \in \bigcap S$.
Si $A \in \bigcap S$, entonces $A \in \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in S$, entonces $X \setminus A$$\in \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in S$ y por lo tanto $X \setminus A$$\in \bigcap S$ y así, $\bigcap S$ es cerrado bajo complementos. Si $\{A_n : n \in \omega\}$$\subseteq \bigcap S$, entonces para cada $n \in \omega$ y $\mathcal{A} \in S$ $A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ para cada $\mathcal{A} \in S$ y por lo tanto $\bigcup A_n \in \bigcap S$ y así $\bigcap S$ es cerrado bajo uniones numerables y por lo tanto es una σ-álgebra, sea $\sigma(\mathcal{E})$=S. □

Si X es un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq P(X)$, denotaremos por $\sim \mathcal{A}$=$\{X \setminus A$:$A \in \mathcal{A}$
$\}$

Teorema 3.32. *Si X es un conjunto y $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ es un conjunto cerrado bajo intersecciones finitas entonces $\sigma(\mathcal{P})$ es la clase más pequeña que contiene a $\mathcal{P}$, tiene a X como elemento y es cerrada bajo complementos y uniones numerables ajenas.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ la clase más pequeña que contiene a $\mathcal{P}$, tiene a X como elemento y es cerrada bajo complementos y uniones numerables ajenas. Probaremos que $\mathcal{L}$ es una σ-álgebra.
Primero note que si tenemos una colección $\{A_n{:}n \in \omega\}\subseteq \mathcal{L}$, $\bigcup_{n\in\omega} A_n{=}\bigcup_{n\in\omega}(A_n\setminus \bigcup_{i<n} A_i)$ que es una unión ajena, por lo tanto $\mathcal{L}$ es una clase cerrada bajo uniones numerables.
Ahora, para cada $A \subseteq X$ sea $\mathcal{L}(A){=}\{B \subseteq X : A\cap B \in \mathcal{L}\}$. Note que si $A \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(A)$ es una clase que tiene a X, cerrada bajo complementos y uniones ajenas numerables. Si $A \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}(A)$ pues $\mathcal{P}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y como $\mathcal{L}$ es la clase más pequeña que contiene a $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(A)$. Además, si $B \in \mathcal{L}$, como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(A)$ se cumple que $B \in \mathcal{L}(A)$, entonces $A\cap B \in \mathcal{L}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{L}(B)$, entonces tenemos que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}(B)$ y como $\mathcal{L}$ es la clase más pequeña que contiene a $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(B)$. Entonces si A, $B \in \mathcal{L}$ se cumple que $A\cap B \in \mathcal{L}$

□

Definición 3.33. *Sea X un espacio metrizable. Sea ω_1 el primer cardinal no numerable, para cada cardinal ξ tal que $1 \leq \xi < \omega_1$ se definen por recursión transfinita las clases $\sum_\xi^0(X)$, $\prod_\xi^0(X)$ de subconjuntos de X como sigue:*
$\sum_1^0(X){=}\{U \subseteq X{:}U$ *es abierto*$\}$
$\prod_\xi^0(X){=}{\sim} \sum_\xi^0(X)$ *donde* $1 \leq \xi < \omega_1$ *y*
$\sum_\xi^0(X){=}\{\bigcup_{n\in\omega} A_n{:}A_n \in \prod_{\xi_n}^0(X),\ \xi_n < \xi,\ n \in \omega\}$, *si* $\xi > 1$
Además, sea $\Delta_\xi^0{=}\sum_\xi^0(X) \cap \prod_\xi^0(X)$ *llamadas clases ambiguas.*

Denotaremos por $G(X)$ a la clase de subconjuntos abiertos de X y $F(X)$ a la clase de los subconjuntos cerrados de X. Además para cualquier $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sean
$\mathcal{E}_\sigma{=}\{\bigcup_{n\in\omega} A_n\colon A_n \in \mathcal{E},\ n \in \omega\}$ y $\mathcal{E}_\delta{=}\{\bigcap_{n\in\omega} A_n\colon A_n \in \mathcal{E},\ n \in \omega\}$
Entonces $\sum_1^0 = G(X)$, $\prod_1^0 = F(X)$, $\sum_2^0 = (F(X))_\sigma = F_\sigma(X)$, $\prod_2^0(X) = (G(X))_\delta = G_\delta(X)$, $\sum_3^0 = (G_\delta(X))_\sigma = G_{\delta\sigma}(X)$, $\prod_3^0 = (F_\sigma(X))_\delta = F_{\sigma\delta}(X)$, $\Delta_1^0 = \{A \subseteq X\colon A$ es un conjunto abierto y cerrado$\}$

Observemos que como en los espacio metrizables los conjuntos abiertos son G_δ, entonces los cerrados son F_σ.

Definición 3.34. *Si X es un espacio metrizable, sea $B(X){=}\bigcup_{\xi<\omega_1} \sum_\xi^0(X){=} \bigcup_{\xi<\omega_1} \prod_\xi^0(X)$. A los elementos de $B(X)$ les llamaremos los conjuntos de Borel.*

Notemos que por la construcción de $\sum_\xi^0(X)$ y $\prod_\xi^0(X)$ se cumple que $B(X)$ es una σ-álgebra.

Definición 3.35. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es de Borel (medible) si la imagen inversa de un conjunto de Borel de Y (equivalentemente abierto o cerrado) es un conjunto de Borel en X.*

Por la forma en que se comportan las funciones con respecto a las uniones y los complementos se cumple que si Y tiene una sub-base numerable $\{V_n\}_{n\in\omega}$, es suficiente pedir que $f^{-1}[V_n]$ sea un conjunto de Borel en X para cada $n \in \omega$.

Definición 3.36. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es un isomorfismo de Borel si es una biyección y f, f^{-1} son funciones de Borel, es decir, para cada $A \subseteq X$ se cumple que $A \in B(X)$ si y sólo si $f[A] \in B(Y)$. Si X=Y f se llamará automorfismo de Borel.*

Definición 3.37. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es Baire medible si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en Y tiene la propiedad de Baire*

Teorema 3.38. *En un espacio topológico cada conjunto de Borel tiene la propiedad de Baire y cada función Borel medible es Baire medible.*

Los conjuntos de Borel tienen la propiedad de Baire porque se forman a partir de aplicar cierta cantidad de veces uniones y complementos a conjuntos abiertos, los conjuntos abiertos son elementos de la σ álgebra que tiene a los conjuntos con la propiedad de Baire y esas operaciones son cerradas en una σ-álgebra.

Notación 3.39. *Si X es un espacio topológico y $r \in \mathbb{R}$, $\bar{r}$ denotará a la función que a cada elemento de X le asigna la constante r.*

Teorema 3.40. *(Lebesgue-Hausdorff) Sea X un espacio metrizable. La clase de las funciones de Borel $f : X \to \mathbb{R}$ es la clase más pequeña de funciones de X en $\mathbb{R}$ que tiene a todas las funciones continuas y es cerrada bajo límites puntuales de sucesiones de funciones.*

Demostración. Sea B la clase más pequeña de funciones de X en $\mathbb{R}$ que contiene a todas las funciones continuas y es cerrada bajo la operación de tomar límites puntuales de sucesiones de funciones. Note que B es un espacio vectorial pues si r, $s \in \mathbb{R}$ y f, $g \in B$ entonces $rf + sg \in B$, la función constante $\bar{0} \in B$ y se cumplen las propiedades distributiva y asociativa.
Si $A \subseteq X$ es un conjunto de Borel, veamos que la función característica

χ_A pertenece a B. Primero veamos que si U es un conjunto abierto en X entonces $\chi_U \in B$. En efecto, como U es abierto es F_σ entonces $U=\bigcap_{n\in\omega} F_n$ donde cada F_n es un conjunto cerrado y para cada $n \in \omega$ $F_n \subseteq F_{n+1}$. Por el Lema de Urysohn para cada conjunto cerrado F_n existe una función continua $f_n : X \to [0,1]$ tal que $f_n[F_n]=\{1\}$ y $f_n[X \setminus U]= \{0\}$. Como para cada $n \in \omega$ $f_n \in B$ y la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ converge puntualmente a χ_U entonces $\chi_U \in B$. Además note que $\chi_{X\setminus A}=\bar{1}$-$\chi_A$ y si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una colección de subconjuntos de X ajenos por pares tal que para cada $n \in \omega$ $\chi_{A_n} \in B$ entonces $\chi_{\bigcup A_n}=\text{lím}_{n\to\infty}(\chi_{A_0} + \chi_{A_1} + ... + \chi_{A_n})$ y por lo tanto $\chi_{\bigcup A_n} \in B$. Sean F a la colección de subconjuntos A de X tales que $\chi_A \in B$ y τ la topología de X entonces $\tau \subseteq F$ y como F cumple las hipótesis del Teorema 3.32 se cumple que $\sigma(\tau) \subseteq F$ y con esto hemos probado que las funciones características de los conjuntos de Borel son elementos de B.
Ahora, sea $f : X \to \mathbb{R}$ es una función de Borel y veamos que $f \in B$. Sean $f^+=\frac{|f|+f}{2}$ y $f^-=\frac{|f|-f}{2}$, note que $|f|$, f^+ y f^- son funciones de Borel. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \omega$ tal que $1 \leq i \leq n2^n$, sean $A_{n,i}=f^{-1}[[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]]$ y $f_n=\sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{A_{n,i}}$. Como cada $A_{n,i}$ es un conjunto de Borel, $\chi_{A_{n,i}} \in B$ y por lo tanto $f_n \in B$. Como la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ converge puntualmente a f se sigue que $f \in B$. Por lo tanto B es la clase de las funciones de Borel. $\square$

Capítulo 4

Topología de Ellentuck

4.1. Teoremas de partición

Recordemos, del Principio de las casillas, que si tenemos una partición de $\mathbb{N}$ en una cantidad finita de partes, entonces una de esas partes no es finita. Frank Plumpton Ramsey probó una extensión de este Principio, el cual se conoce como Teorema de Ramsey y enunciamos a continuación.

Para cualquier $n \in \omega$, para cualquier $r \in \omega$ positivo, para cualquier $S \in [\omega]^\omega$ y para cualquier coloración $\pi : [S]^n \to r$ existe $H \in [S]^\omega$ tal que H es un conjunto homogéneo, es decir $\pi \restriction_{[H]^n}$ es constante.

Haremos la prueba para cuando $n = 2$; por inducción se puede ver que el Teorema se satisface para cualquier $n \in \omega$.

Teorema 4.1. *Para cualesquiera $r \in \omega$ positivo, $S \in [\omega]^\omega$ y para cualquier coloración $\pi : [S]^2 \to r$ existe $H \in [S]^\omega$ tal que H es un conjunto homogéneo, es decir $\pi \restriction_{[H]^2}$ es constante.*

Demostración. Sean $S_0 = S$ y a_0=mín(S_0). Definamos la coloración $\tau_0 : S_0 \setminus \{a_0\} \to r$ de forma que $\tau_0(b)$=$\pi(\{a_0, b\})$. Por el Principio de las casillas existen $S_1 \subseteq S_0 \setminus \{a_0\}$ y $\rho_0 \in r$ tal que para cada $s \in S_1$ se cumple que $\tau_0(s) = \rho_0$. Sea a_1=mín(S_1) y definamos la coloración $\tau_1 : S_1 \setminus \{a_1\} \to r$ dada por $\tau_1(b) = \pi(\{a_1, b\})$, de esta manera definimos recursivamente $\{a_n : n \in \omega\}$ y $\{\rho_n : n \in \omega\} \subseteq r$ tales que $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ Notamos que por construcción se cumple que para cualquier $l \in \omega$ y para cualquier número natural $k > l$

$\pi(\{a_l, a_k\}) = \tau_l(a_k) = \rho_l$. Sea $\tau : \{a_n : n \in \omega\} \to r$ definida por $\tau(a_l) = \rho_l$, por el Principio de las casillas existen $A \in [\{a_n : n \in \omega\}]^\omega$ y $\rho \in r$ tales que $\tau[A] = \{\rho\}$.
Veamos que $\pi \mid_{[A]^2}$ es constante. En efecto, sean x, $y \in A$ entonces existen l, $k \in \omega$ tales que $x = a_l$, $y = a_k$ y $l < k$, entonces $\pi(\{a_l, a_k\}) = \tau_l(a_k) = \rho_l = \tau(a_l) = \rho$. Por lo tanto $\pi \mid_{[A]^2}$ es constante. □

En esta sección revisaremos extensiones del Teorema de Ramsey que involucran espacios Polacos; primero consideraremos teoremas con otro tipo de particiones.

Teorema 4.2. *(Mycielski, Kuratowski) Sean X un espacio metrizable y $U \subseteq X^n$ un conjunto abierto y denso en X^n. Para cualquier conjunto A, sea $(A)^n$=$\{(x_i) \in A^n$: $x_i \neq x_j$ si $i \neq j\}$. Entonces $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^n \subseteq U\}$ es un conjunto denso y G_δ en $\mathcal{K}(X)$. En particular, si para cada $i \in \omega$, $R_i \subseteq X^{n_i}$ es un conjunto comagro, entonces $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$\forall i \in \omega, (K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ es comagro en $\mathcal{K}(X)$. Entonces si X es un espacio Polaco perfecto no vacío existe un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que para cualquier $i \in \omega$, $(C)^{n_i} \subseteq R_i$.*

Demostración. Sea D=$\{(x_1, x_2, ..., x_n)$$\in X^n$: existen $i, j \in \omega$ tales que $i \neq j$ y $x_i = x_j\}$. Observamos que $(K)^n \subseteq U$ si y sólo si $K^n \subseteq U \cup D$. Ahora definimos la función $\varphi : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X^n)$ de forma que para cualquier $K \in \mathcal{K}(X)$ $\varphi(K)$=K^n, por la Proposición 2.32 se cumple que φ es continua y como $U \cup D$ es un conjunto G_δ en X^n tenemos que $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^n \subseteq U\}$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{K}(X)$.
Ahora probaremos que $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^n \subseteq U\}$ es un conjunto denso en $\mathcal{K}(X)$. Primero notamos que si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{K}(X)$ es un abierto no vacío y $\emptyset \notin \mathcal{V}$ entonces existen $m \in \omega$ tal que $m \geq n$ y U_0,..., U_m conjuntos abiertos en X tales que $\langle U_0; U_1, ..., U_n\rangle \subseteq \mathcal{V}$; como U es un conjunto denso y abierto en X para cualesquiera i_1, i_2,..., $i_n < m$, $U_{i_1} \times U_{i_2} \times ... \times U_{i_n} \cap U \neq \emptyset$ y es abierto, entonces existen U'_{i_1}, U'_{i_2},..., U'_{i_n} conjuntos abiertos en X tales que $(U'_{i_1} \times U'_{i_2} \times ... \times U'_{i_n}) \subseteq (U_{i_1} \times U_{i_2} \times ... \times U_{i_n}) \cap U$ y por lo tanto $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^n \subseteq U\}$$\cap\mathcal{V} \neq \emptyset$.
Si para cada $i \in \omega$ $R_i \subseteq X^{n_i}$ es un conjunto comagro en X^{n_i} entonces existe una colección de conjuntos densos y abiertos $\{R_{ij} : j \in \omega\}$ tal que $\bigcap_{j\in\omega} R_{ij} \subseteq R_i$, entonces para cada $i, j \in \omega$ podemos usar lo que acabamos de probar y así, $\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^{n_i} \subseteq R_{ij}\}$ es un conjunto denso y G_δ en $\mathcal{K}(X)$ y $\bigcap_{j\in\omega}\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^{n_i} \subseteq R_{ij}\}$$\subseteq$$\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ por lo tanto es un conjunto comagr;, entonces $\bigcap_{i\in\omega}\{K \in \mathcal{K}(X)$:$(K)^{n_i} \subseteq R_i\}$= $\{K \in$

$\mathcal{K}(X){:}\forall i \in \omega, (K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ y como la colección de los conjuntos magros es un σ-ideal, la intersección de una cantidad numerable de conjuntos comagros es un conjunto comagro y por lo tanto $\{K \in \mathcal{K}(X){:}\forall i \in \omega, (K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ es un conjunto comagro en $\mathcal{K}(X)$.
Ahora, si X es un espacio Polaco perfecto, por la Proposición 3.10, el conjunto $\mathcal{K}_p(X) = \{K \in \mathcal{K}(X) : K \text{ es perfecto}\}$ es un conjunto G_δ y denso en $\mathcal{K}(X)$. Entonces $\mathcal{K}_p(X) \cap \{K \in \mathcal{K}(X){:}\forall i \in \omega, (K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ contiene una intersección numerable de conjuntos densos y abiertos y por el Teorema 3.9 es un conjunto denso y por lo tanto no es vacío. Sea $P \in \mathcal{K}_p(X) \cap \{K \in \mathcal{K}(X){:}\forall i \in \omega, (K)^{n_i} \subseteq R_i\}$ entonces se cumple que es un conjunto perfecto y para cada $i \in \omega$ $(P)^{n_i} \subseteq R_i$. Ahora, como X es un conjunto perfecto existe un conjunto de Cantor $C \subseteq P$ y por lo tanto, para cada $i \in \omega$ $(C)^{n_i} \subseteq R_i$ □

Proposición 4.3. *Sean X un espacio Polaco perfecto no vacío y Y un espacio topológico segundo numerable. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $f_i : X^{n_i} \to Y$ función Baire medible. Entonces existe un conjunto de Cantor $\mathcal{C} \subseteq X$ tal que $f_i \mid_{(C)}$ es continua.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}$; como f_i es una función Baire medible, existe un conjunto $G_i \subseteq X^{n_i}$, que es la intersección de una cantidad numerable de conjuntos densos y abiertos en X^{n_i} tal que $f_i \mid_{G_i}$ es una función continua, como G_i es la intersección de una cantidad numerable de conjuntos densos y abiertos, G_i es un conjunto comagro, entonces por el Teorema 4.2 existe un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $(C)^{n_i} \subseteq G_i$ y por lo tanto $f_i \mid_{(C)^{n_i}}$ es una función continua. □

Teorema 4.4. *(Galvin)Sean X un espacio Polaco perfecto no vacío y $P \subseteq X^n$ tal que tiene la Propiedad de Baire y no es magro, entonces existen conjuntos de Cantor C_1, C_2,...,$C_n \subseteq X$ tales que $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n \subseteq P$. En particular, si $X^n = \bigcup_{i\in\omega} P_i$, donde cada P_i tiene la propiedad de Baire, entonces existen conjuntos de Cantor C_1, C_2,...,C_n y $j \in \omega$ tales que $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n \subseteq P_j$.*

Demostración. Como P tiene la Propiedad de Baire, existe un abierto $\mathcal{U}$ en X^n tal que $P \triangle \mathcal{U} = (P \setminus \mathcal{U}) \bigcup \mathcal{U} \setminus P$ es un conjunto magro en X^n; como P no es magro existen U_1, U_2,...,U_n abiertos no vacíos en X tales que P es un conjunto comagro en $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$. Dado que P es un conjunto comagro en $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$, existe una colección numerable de conjuntos densos y abiertos $\{G_m{:}m \in \omega\}$ tal que $\bigcap_{m\in\omega} G_m \subseteq P$. Entonces, para cualquier $m \in \omega$, si $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$,...,$V_2 \subseteq U_2$ son conjuntos abiertos y no vacíos en X, entonces $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ es un conjunto abierto y no vacío en $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ y por lo tanto $G_m \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_n) \neq \emptyset$ es un conjunto abierto; por lo tanto podemos encontrar conjuntos abiertos y no vacíos en X, V_1', V_2',...,V_n' tales que $V_1' \times V_2' \times ... \times V_n' \subseteq G_m \cap (V_1 \times V_2 \times ... \times V_n)$, entonces $V_1' \times V_2' \times ... \times V_n' \subseteq G_m$. Usando este argumento podemos construir n esquemas de Cantor, $(R^{(i)})_{i \in 2^{<\omega}}$ para cada $i \in${1,...,n} tales que $R_\emptyset^{(i)} = U_i$, para cada $s \in \omega$ R_s^i es un conjunto abierto y no vacío de U_i, para cada $m \in 2^{<\omega}$, $\overline{R_{s\hat{}m}^{(i)}} \subseteq R_s^{(i)}$; notemos que esto se puede pedir porque X es un espacio Polaco y por lo tanto regular, $diam(R_s^{(i)}) < 2^{-l(s)}$ y para cada $m \in \omega$ se cumpla que si s_1, s_2, ...,$s_n \in A^m$ entonces $(R_{s_1}^{(1)} \times ... \times R_{s_n}^{(n)}) \subseteq G_m$. Para cada $i \in \omega$, sea C_i el conjunto de Cantor definido por el esquema de Cantor $(R^{(i)})_{i \in 2^{<\omega}}$, observamos que C_i=$\bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{s \in 2^m} R_s^{(i)}$=$\bigcup_{x \in 2^\omega} \bigcap_{m \in \omega} R_{x|m}^{(i)}$ y por lo tanto $(C_1 \times ... \times C_n) \subseteq \bigcap_{m \in \omega} G_m \subseteq P$.

Ahora, si X^n=$\bigcup_{i \in \omega} P_i$, donde cada P_i tiene la propiedad de Baire observamos que existe $j \in \omega$ tal que P_j no es un conjunto magro, de otra forma X^n sería un conjunto magro, entonces como P_i es un conjunto con la Propiedad de Baire y no es magro existen conjuntos de Cantor C_1, C_2,...,C_n tales que $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n \subseteq P_j$.

□

Recordemos que si tenemos un conjunto Y, una partición de Y es una colección de subconjuntos de Y, $\{P_i : i \in I\}$ tal que $Y = \bigcup_{i \in I} P_i$ y si tomamos índices distintos los respectivos elementos de la colección son ajenos. En este trabajo no necesitamos la última condición por lo que entenderemos por partición una colección de subconjuntos de Y tales que su unión cubre a Y.

Teorema 4.5. *(Galvin) Sean X un espacio Polaco perfecto no vacío, $k \in \omega$ y $\{P_i : i \in \{0, 1, ..., k-1\}\}$ una partición tal que para cada $i \in${0,1,...,k-1} se cumple que P_i^*=$\{(x,y) \in X^2$:$\{x,y\} \in P_i\}$ tiene la Propiedad de Baire en X^2. Entonces existen un conjunto de Cantor $C \subseteq X$ y $j \in${0,1,...,k-1} tales que $[C]^2 \subseteq P_j$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{P_i : i \in \{0, 1, ..., k-1\}\}$ es una colección de conjuntos ajenos por pares, pues si no fuera así podemos definir $P_0' = P_0$ y para cada $j \in${1,...,k-1} P_j'=$P_j \setminus \bigcup_{i<j} P_l'$ y la colección $\{P_i'$:$i \in${0,1,...,k-1}} es una nueva partición para $[X]^2$ que consta de conjuntos ajenos por pares. Definimos la función $f : X^2 \to${0,1,...,k-1} tal

que si $(x,y) \in X^2$ entonces $f(x,y)$=j donde j es tal que $(x,y) \in P_j^*$ si $x \neq y$ y cuando $x = y$, $f(x,y) = 0$. Observamos que si al conjunto {0,1,...,k-1} lo dotamos de la topología discreta, f es una función Baire medible pues la preimagen de cada singular es un conjunto con la Propiedad de Baire; por la Proposición 4.3 existe un conjunto de Cantor $Y \subseteq X$ tal que $f\mid_{(Y)^2}$. Entonces si Q_i=$P_i \cap [Y]^2$ y Q_i^*=$\{(x,y)$∈ Y^2:$\{x,y\}$∈ $Q_i\}$=$\{(x,y)$∈ $(Y)^2$:$f(x,y) = i\}$ como $f\mid_{(Y)^2}$ es una función continua, tenemos que Q_i^* es un conjunto abierto en Y^2. Podemos suponer que $k = 2$ y el resultado se puede generalizar por inducción, entonces $[Y]^2$=$Q_0 \cup Q_1$ y Q_1^*, Q_2^* son conjuntos abiertos en Y^2. Si existe un conjunto abierto no vacío $U \subseteq Y$ tal que $(U)^2 \subseteq Q_0^*$, entonces cualquier conjunto de Cantor $C \subseteq U$ nos sirve. Suponga que para cualquier conjunto abierto en Y, U, se cumple que $(U)^2 \cap Q_1^* \neq \emptyset$; como Q_1^* es un conjunto abierto en Y^2 podemos encontrar dos conjuntos abiertos en Y, no vacíos y ajenos, U' y U'' tales que $(U' \times U'') \subseteq ((U)^2 \cap Q_1^*) \subseteq Q_1^*$. Repitiendo este proceso podemos construir un esquema de Cantor $(G_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ tal que $G_\emptyset$=Y, para cada $s \in 2^{<\omega}$, G_s es un conjunto abierto no vacío en Y, si i ∈{0,1} $\overline{G_{s\hat{\ }i}} \subseteq G_s$, $diam(G_s) \leq 2^{-l(s)}$ y $G_{s\hat{\ }0} \times G_{s\hat{\ }1} \subseteq Q_1^*$. Si C es el conjunto de Cantor definido por ese esquema de Cantor, entonces $[C]^2 \subseteq Q_1 \subseteq P_1$. $\square$

4.2. Algunos invariantes cardinales

Los invariantes cardinales son cardinales característicos del continuo que cumplen que no son numerables, son menores o iguales que $\mathfrak{c}$ y describen propiedades combinatorias o analíticas del continuo. En esta sección definiremos algunos invariantes cardinales y haremos comparaciones que nos servirán en la prueba del Teorema de Ellentuck que realizaremos en la siguiente sección.

Definición 4.6. *Sean X un conjunto y $\mathfrak{J}$ un ideal sobre X, definimos los siguientes cardinales:*

1. *add($\mathfrak{J}$)=mín$\{\mid \mathfrak{I} \mid : \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$ y $\bigcup \mathfrak{I} \notin \mathfrak{J}\}$;*

2. *cov($\mathfrak{J}$)=mín$\{\mid \mathfrak{I} \mid : \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$ y $\bigcup \mathfrak{I}$=$X\}$.*

Notemos que add($\mathfrak{J}$)≤cov($\mathfrak{J}$). En efecto, elegimos una colección $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$ tal que $\mid \mathfrak{I} \mid$=cov($\mathfrak{J}$) y $\bigcup \mathfrak{I}$=X; como $\mathfrak{J}$ es un ideal $X \notin \mathfrak{J}$, entonces $\bigcup \mathfrak{I} \notin \mathfrak{J}$ y por lo tanto $\mathfrak{I} \in \{\mid \mathfrak{I} \mid : \mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}$ y $\bigcup \mathfrak{I} \notin \mathfrak{J}\}$. De esto se sigue que mín$\{\mid \mathfrak{I} \mid : \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$ y $\bigcup \mathfrak{I} \notin \mathfrak{J}\} \leq \mid \mathfrak{I} \mid$=cov($\mathfrak{J}$), por lo tanto add($\mathfrak{J}$)≤cov($\mathfrak{J}$).

Definición 4.7. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$

1. *Diremos que* $\mathcal{A}$ *es una familia casi ajena si satisface que para cualesquiera* A, $B \in \mathcal{A}$ *con* $A \neq B$ *se cumple que* $A \cap B < \aleph_0$.

2. *Diremos que* $\mathcal{A}$ *es una familia maximal casi ajena (mad) si* $\mathcal{A}$ *es una familia casi ajena y es maximal con esta propiedad.*

Proposición 4.8. *Existe una familia maximal casi ajena de cardinalidad* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\{s_i : i \in \omega\}$ una enumeración de $\bigcup_{n\in\omega} \omega^n$, es decir, si tenemos una función $t : n \to \omega$ para algún $n \in \omega$ entonces existe $i \in \omega$ tal que $t = s_i$. Para cada $f \in \omega^\omega$ sea $x_f = \{i \in \omega :$ existe $n \in \omega$ tal que $f \mid_n = s_i\}$. Si $f, g \in \omega^\omega$ y $f \neq g$ existe $n_0 \in \omega$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$ entonces para cualquier $k > n_0$ se cumple que $f \mid_k \neq g \mid_k$ entonces $\mid x_f \cap x_g \mid \leq n_0 + 1$, es decir, $x_f \cap x_g$ es un conjunto finito. Sea $\mathcal{A}_0 = \{x_f : f \in \omega\}$, observamos que $\mathcal{A}_0 \subseteq [\omega]^\omega$ y es una familia casi ajena. Denotaremos por $\mathfrak{B}$ a la colección de las familias casi ajenas que contienen a $\mathcal{A}_0$, observamos que $\mathfrak{B}$ es una familia de caracter finito entonces por el Teorema 1.66 $\mathfrak{B}$ admite un elemento maximal, le llamaremos $\mathcal{A}$, observamos que $\mathcal{A}$ es una familia maximal casi ajena y extiente a $\mathcal{A}_0$ por lo tanto es de cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

Definición 4.9. *Una familia* $\mathfrak{H} = \{\mathcal{A}_\xi : \xi \in \kappa\} \subseteq \mathcal{P}([\omega]^\omega)$ *de familias mad de cardinalidad* $\mathfrak{c}$ *se llama aplastante si para cada* $x \in [\omega]^\omega$ *existe* $\xi \in \kappa$ *tal que* x *tiene intersección infinita con al menos dos miembros distintos de* $\mathcal{A}_\xi$.

En la siguiente sección se verá que el número de aplastamiento $\mathfrak{h}$, que es el cardinal que definiremos a continuación está muy relacionado con la propiedad combinatoria de ser conjunto de Ramsey.

Definición 4.10. *El número de aplastamiento* $\mathfrak{h}$ *es la mínima cardinalidad de una familia aplastante, es decir*
$\mathfrak{h} = \text{mín}\, \{\mid \mathfrak{H} \mid : \mathfrak{H}$ *es una familia aplastante*$\}$.

Dados dos subconjuntos infinitos de ω, digamos x y y, diremos que x está *casi contenido* en y si solamente una cantidad finita de elementos de x no está en y y lo denotaremos por $x \subseteq^* y$. Además, si κ es un cardinal, $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ y $\mathfrak{C} = \{\mathcal{A}_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}([\omega]^\omega)$, diremos que $\mathcal{A}$ refina a $\mathfrak{C}$ si para cada $x \in \mathcal{A}$ y para cada $\xi < \kappa$ existe $y \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $x \subseteq^* y$.

Lema 4.11. *Sea un cardinal $\kappa < \mathfrak{h}$. Para cualquier familia de cardinalidad κ de familias mad de cardinalidad $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{E}$=$\{\mathcal{A}_\xi : \xi < \kappa\}$ existe una familia mad $\mathcal{A}'$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ tal que para cada $\{\xi < \kappa\}$ se cumple que $\mathcal{A}'$ refina a $\mathcal{A}_\xi$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{E}$=$\{\mathcal{A}_\xi : \xi < \kappa\}$ una colección de cardinalidad $\kappa < \mathfrak{h}$ de familias mad de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Para cada $x \in [\omega]^\omega$ existe $x' \in [x]^\omega$ con la propiedad de que para cada $\mathcal{A}_\xi \in \mathfrak{E}$ existe $A \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $x' \subseteq^* A$, pues si no existe tal x' para algún $x \in [\omega]^\omega$ entonces $\mathfrak{E}$ es una familia aplastante de cardinalidad $\kappa < \mathfrak{h}$ lo cual no puede ocurrir. Sea $\mathcal{A} \subseteq \{x' : x \in [\omega]^\omega\}$ una familia casi ajena; notemos que una familia $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia casi ajena si y sólo si cualquier subconjunto finito de $\mathcal{B}$ es una familia casi ajena, así que si tomamos la colección de familias casi ajenas que extienden a $\mathcal{A}$, por el Teorema 1.66, existe una familia maximal casi ajena que extiende a $\mathcal{A}$, llamemosle $\mathcal{A}'$. Entonces $\mathcal{A}'$ es una familia mad de cardinalidad $\mathfrak{c}$ tal que para cada $\xi < \kappa$ se cumple que $\mathcal{A}'$ refina a $\mathcal{A}_\xi$. $\square$

4.3. La topología de Ellentuck

En esta sección introduciremos una nueva topología sobre $[\omega]^\omega$ a la que denominaremos la Topología de Ellentuck. Además diremos cuándo un conjunto cumple ciertas propiedades combinatorias, como la de ser un conjunto de Ramsey; éstas definiciones están motivadas por la Teoría de Ramsey. Posteriormente probaremos el Teorema de Ellentuck que caracteriza dichas propiedades combinatorias en el espacio $[\omega]^\omega$.

En lo sucesivo las letras minúsculas a, b, c,... representarán subconjuntos finitos de ω y las letras mayúsculas A, B, C,... representarán subconjuntos infinitos de ω. Si máx(a) <mín(A) escibiremos $a < A$.
Para cada $a < A$, sea $[a, A]$=$\{s \in [\omega]^\omega$: $a \subseteq s \subseteq a \cup A\}$.
Observamos que $[a, A] \subseteq [b, B]$ si y sólo si $a \supseteq b$, $a \setminus b \subseteq B$ y $A \subseteq B$.
Además, note que $[\emptyset, A]$=$[A]^{\aleph_0}$

Observamos que si A, B, a, b son conjuntos tales que $a < A$ y $b < B$, entonces si $[a, A] \cap [b, B] \neq \emptyset$ entonces $[a, A] \cap [b, B] = [a \cup b, A \cap B]$. En efecto, sea $C \in [a, A] \cap [b, B]$, como $C \in [a, A]$ se cumple que $a \subseteq C$ y $C \subseteq a \cup A$ y como $C \in [b, B]$ se cumple que $b \subseteq C$ y $C \subseteq b \cup B$ por lo tanto $a \cup b \subseteq C$ y $C \subseteq (a \cup b) \cup (A \cap B)$.

Con base en lo anterior podemos dar la siguiente Definición.

Definición 4.12. *Definimos la Topología de Ellentuck sobre $[\omega]^\omega$ como la generada por la base que consta de los conjuntos de la forma $[a, A]$ donde $a < A$.*

La siguiente Definición facilitará los enunciados que siguen.

Definición 4.13. *Si $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$, entonces*

1. *$\mathcal{X}$ es un conjunto de Ramsey si existe A tal que $[\emptyset, A] \subseteq \mathcal{X}$ o $[\emptyset, A] \subseteq \sim \mathcal{X}$,*

2. *$\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey si para cada $a < A$ existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[a, B] \subseteq \sim \mathcal{X}$,*

3. *$\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey nulo si para cada $a < A$ existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.*

Lema 4.14. *Si $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ es un conjunto completamente Ramsey nulo, entonces para cada conjunto $A \subseteq \omega$, existe $B \subseteq A$ tal que $\mathcal{X}$ no tiene conjuntos que estén casi contenidos en B.*

Demostración. Sea $A \subseteq \omega$; como $\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey nulo existe $B_0 \subseteq A$ tal que $[\emptyset, B_0] \cap \mathcal{X} = \emptyset$ y sea $a_0 = \text{mín}(B_0)$. Haremos una construcción por recursión; suponga que para algún número natural n hemos construido una sucesión $A \supseteq B_0 \supseteq ... \supseteq B_n$ y una sucesión creciente de números naturales, $a_0 < a_1 < ... < a_n$ tales que para cada $s \in \mathcal{P}(a_{n-1}+1)$ y para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$ se cumple que $[s, B_k] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.
Sean $h = 2^{a_n+1}$ y $\{s_i : i \in h\}$ una enumeración de $\mathcal{P}(a_n + 1)$ tal que $s_0 = \emptyset$. Sea $D_0 = B_n \diagdown (a_n + 1)$ y para cada $i \in h$ elegimos $D_{i+1} \subseteq D_i$ tal que $[s_{i+1}, D_{i+1}] \cap X = \emptyset$; podemos hacerlo porque $\mathcal{X}$ es completamente Ramsey nulo. Sea $B_{n+1} = D_{h-1}$, entonces para cualquier $s \in \mathcal{P}(a_n+1)$ se cumple que $[s, B_{n+1}] \cap X = \emptyset$.
Sea $B = \{a_i : i \in \omega\}$ y observamos que, por la construcción de B, se cumple que para cada subconjunto finito de ω, s, tal que $\text{máx}(s) \in B$ se cumple que $[s, B \diagdown \text{máx}(s) + 1] \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Entonces para cualquier D tal que $D \subseteq^* B$ se cumple que $[\emptyset, D] \cap \mathcal{X} = \emptyset$, es decir, X no tiene conjuntos que estén casi contenidos en B. $\square$

Denotaremos por $\mathfrak{R}_0$ a la colección de todos los subconjuntos completamente Ramsey nulos de $[\omega]^\omega$, es decir, $\mathfrak{R}_0 = \{\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{X}$ es un conjunto

completamente Ramsey nulo$\}$. Observemos que si $\mathcal{X} \in \mathfrak{R}_0$ y $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X}' \in \mathfrak{R}_0$ pues si un abierto evita a $\mathcal{X}$, entonces también evitará a $\mathcal{X}'$ y si para algún $n \in \omega$ tenemos $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, ..., \mathcal{X}_n \in \mathfrak{R}_0$, entonces para cada $a < A$, como $\mathcal{X}_1$ es un conjunto completamente Ramsey nulo, existe $B_0 \subseteq A$ tal que $[a, B_0] \cap \mathcal{X}_1 = \emptyset$, y como $\mathcal{X}_2$ es un conjunto completamente Ramsey nulo, existe $B_1 \subseteq B_0$ tal que $[a, B_1] \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$; como $\mathcal{X}_2$ también es un conjunto completamente Ramsey nulo existe $B_2 \subseteq B_1$ tal que $[a, B_2] \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$, siguiendo con este procedimiento podemos encontrar $B_n \subseteq A$ tal que $[a, B_n] \cap (\bigcup_{i=0}^{i=n} \mathcal{X}_i)$; por lo tanto $\bigcup_{i=0}^{i=n} \mathcal{X}_i \in \mathfrak{R}_0$. De lo anterior se sigue que $\mathfrak{R}_0$ es un ideal sobre $\mathcal{P}([\omega]^\omega)$.
Observamos que $[\omega]^\omega \notin \mathfrak{R}_0$ pero para cualquier A se cumple que $\{A\} \in \mathfrak{R}_0$ lo cual implica que $[\omega]^\omega$ puede ser cubierto con $\mathfrak{c}$ conjuntos completamente Ramsey nulos y que la unión de $\mathfrak{c}$ conjuntos completamente Ramsey nulos no necesariamente es un conjunto completamente Ramsey nulos. De esto y la comparación que ya se verificó de los invariantes cardinales aditividad y covering se sigue que $\mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{c}$. En seguida veremos que $\mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$ coincide con $\mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0)$ y con $\mathfrak{h}$.

Teorema 4.15. $\mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$=$\mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0)$=$\mathfrak{h}$.

Demostración. Como $\mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0)$ es suficiente probar que $\mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$. Primero probaremos que $\mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{h}$. Sea $\{\mathcal{A}_\xi : \xi \in \mathfrak{h}\}$ una familia aplastante de cardinalidad $\mathfrak{h}$. Para cada $\xi \in \mathfrak{h}$ sean $\mathcal{D}_\xi = \{B \in [\omega]^\omega : \exists A \in \mathcal{A}_\xi : B \subseteq^* A\}$ y $\mathcal{C}_\xi = [\omega]^\omega \diagdown \mathcal{D}_\xi$. Veamos que para cada $\xi \in \mathfrak{h}$ $\mathcal{C}_\xi \in \mathfrak{R}_0$, sean a, A tales que $a < A$, como $\mathcal{A}_\xi$ es una familia mad existe $X \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $X \cap A$ es infinito, entonces $[a, X \cap A] \subseteq \mathcal{D}_\xi$, por lo tanto $[a, X \cap A] \cap \mathcal{C}_\xi = \emptyset$. Ahora veamos que $[\omega]^\omega = \bigcup_{\xi \in \mathfrak{h}} \mathcal{C}_\xi$. En efecto, sea $Y \in [\omega]^\omega$, como $\{\mathcal{A}_\xi : \xi \in \mathfrak{h}\}$ es una familia aplastante existen $\xi \in \mathfrak{h}$ y $X, X' \in \mathcal{A}_\xi$ tales que $Y \cap X$ y $Y \cap X'$ son conjuntos infinitos, entonces $Y \notin \mathcal{D}_\xi$ y por lo tanto $Y \in \mathcal{C}_\xi$. Hemos construido una familia de cardinalidad $\mathfrak{h}$ de elementos de $\mathfrak{R}_0$ que cubre a $[\omega]^\omega$, por lo tanto $\mathfrak{cov}(\mathfrak{R}_0) \leq \mathfrak{h}$.
Ahora veremos que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$. Sean un cardinal $\kappa < \mathfrak{h}$ y $\{\mathcal{C}_\xi : \xi \in \kappa\}$ una familia de conjuntos completamente Ramsey. Probaremos que $\bigcup_{\xi < \kappa} \mathcal{C}_\xi \in \mathfrak{R}_0$. Para cada $\xi \in \kappa$ sea $\mathcal{D}_\xi = \{Y \in [\omega]^\omega :$ para cualquier $Z \in [\omega]^\omega$ se cumple que si $Z \subseteq^* Y$, entonces $[\emptyset, Z] \cap \mathcal{C}_\xi = \emptyset$. Para cada $\xi < \kappa$ sea $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{D}_\xi$ familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$ la cual es maximal con respecto a la inclusión en $\mathcal{D}_\xi$. Entonces, por el Lema 4.14, para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $Y \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $X \cap Y$ es infinito, es decir, $\mathcal{A}_\xi$ es una familia mad de cardinalidad $\mathfrak{c}$. En efecto, si existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que tiene intersección finita con cada elemento

de $\mathcal{A}_\xi$, entonces por el Lema 4.14 existe $Y \in [\omega]^\omega$ tal que $Y \in \mathcal{D}_\xi \diagdown \mathcal{A}_\xi$ lo cual implica que $\mathcal{A}_\xi$ no es maximal. Como $\kappa < \mathfrak{h}$ podemos aplicar el Lema 4.11 y obtener una familia mad $\mathcal{A}'$ tal que para cada $\xi < \kappa$ se cumple que $\mathcal{A}'$ refina a $\mathcal{A}_\xi$. Sean a, A tales que máx(a) <mín(A), como $\mathcal{A}'$ es una familia mad existe $Y' \in \mathcal{A}'$ tal que $A \cap Y'$ es infinito, sea $Z = A \cap Y'$. Sea $\xi \in \kappa$, como $\mathcal{A}'$ refina a $\mathcal{A}_\xi$ existe $Y \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $Y' \subseteq^* Y$, entonces $Z \subseteq^* Y$ y como $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{D}_\xi$, por definción de $\mathcal{D}_\xi$ se cumple que $[\emptyset, a \cup Z] \cap \mathcal{C}_\xi = \emptyset$, en particular $[a, Z] \cap \mathcal{C}_\xi = \emptyset$. Entonces para cada abierto básico $[a, A]$, existe $Z \subseteq A$ tal que para cada $\xi < \kappa$ se cumple que $[a, Z] \cap \mathcal{C}_\xi = \emptyset$, es decir, $[a, Z] \cap (\bigcup_{\xi \in \kappa} \mathcal{C}_\xi) = \emptyset$, entonces $(\bigcup_{\xi \in \kappa} \mathcal{C}_\xi) \in \mathfrak{R}_0$. Por lo tanto, para cualquier cardinal κ se cumple que si $\kappa < \mathfrak{h}$ entonces $\kappa < \mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$; de esto se sigue que $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0)$. $\square$

Lema 4.16. *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $[\omega]^\omega$, entonces $\mathcal{U}$ es un conjunto completamente Ramsey.*

Demostración. Diremos que $[a, A]$ es un conjunto bueno si existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$, de otra manera diremos que es un conjunto malo. Diremos que $[a, A]$ es un conjunto muy malo si es un conjunto malo y para cada $n \in A$ $[a \cup \{n\}, A \diagup n]$ es un conjunto malo, donde $A \diagup n = \{m \in A : m > n\}$. Observamos que si $[a, A]$ es un conjunto malo o muy malo y $B \subseteq A$, entonces $[a, B]$ es un conjunto malo o muy malo, respectivamente.
Vamos a probar que si $[a, A]$ es un conjunto malo entonces existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B]$ es un conjunto muy malo. Supongamos que no es cierto, entonces existe $n_0 \in A$ tal que $[a \cup \{n_0\}, A \diagup n_0]$ es un conjunto bueno, entonces existe $B_0 \subseteq A \diagup n_0$ tal que $[a \cup \{n_0\}, B_0] \subseteq \mathcal{U}$. Como $[a, B_0]$ no es un conjunto muy malo, existe $n_1 \in B_0$ tal que $n_1 > n_0$ y $[a \cup \{n_1\}, B_0 \diagup n_1]$ es un conjunto bueno, entonces existe $B_1 \subseteq B_0 \diagup n_1$ tal que $[a \cup \{n_1\}, B_1] \subseteq \mathcal{U}$, de esta manera se puede construir inductivamente un conjunto $B = \{n_0, n_1, ...\}$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$, lo cual implica que $[a, A]$ es un conjunto bueno lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B]$ es un conjunto muy malo.
Si $[a, A]$ es un conjunto bueno, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{U}$. Si $[a, A]$ es un conjunto malo, probaremos que existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \sim \mathcal{U}$. Como $[a, A]$ es un conjunto malo existe $B_0 \subseteq A$ tal que $[a, B_0]$ es un conjunto muy malo, sea $n_0 = \text{mín} B_0$ entonces $[a \cup \{n_0\}, B_0 \diagup n_0]$ es un conjunto malo y por lo tanto existe $B_1 \subseteq B_0 \diagup n_0$ tal que $[a \cup \{n_0\}, B_1]$ es un conjunto muy malo; sea $n_1 = \text{mín} B_1$, entonces $[a \cup \{n_0, n_1\}, B_1 \diagup n_1]$ es un conjunto malo; de esta forma podemos construir una sucesión decreciente $A \supseteq B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ y una sucesión estrictamente creciente de números naturales

$\{n_i\}_{i\in\omega}$ tal que para cada $i \in \omega$ se cumple que n_i=mínB_i; además para cada $b \subseteq \{n_0, n_1, ..., n_{i-1}\}$ $[a \cup b, B_i]$ es un conjunto malo y entonces $[a \cup b, B_i \diagup n_i]$ es un conjunto muy malo. Si B=$\{n_0, n_1, ...\}$, probaremos que $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{U}$. Supongamos que no es así, como $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto se cumple que $\mathcal{U} \cap [a, B]$ también lo es, entonces, como $\mathcal{U} \cap [a, B] \neq \emptyset$, existe un básico $[a', B'] \subseteq \mathcal{U} \cap [a, B]$. Entonces existen $i \in \omega$ y $b \subseteq \{n_0, n_1, ..., n_i\}$ tales que $a' = a \cup b$ y $B' \diagup n_i \subseteq B_i \diagup n_i$, entonces como $[a \cup b, B' \diagup n_i] \subseteq \mathcal{U}$ se cumple que $[a \cup b, B_i \diagup n_i]$ es un conjunto bueno, pero antes habíamos visto que es un conjunto malo lo cual es una contradicción. Por lo tanto $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{U}$. De esto se sigue que $\mathcal{U}$ es un conjunto completamente Ramsey.

□

Lema 4.17. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto nunca denso en $[\omega]^\omega$ entonces para cualquier $a < A$ existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{X}$.*

Demostración. Por el Lema 4.16 se cumple que $[\omega]^\omega \diagdown \overline{\mathcal{X}}$ es un conjunto completamente Ramsey, entonces $\overline{\mathcal{X}}$ es un conjunto completamente Ramsey por lo tanto para cada $a < A$ existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \overline{\mathcal{X}}$ o $[a, B] \subseteq\sim \overline{\mathcal{X}} \subseteq\sim \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es un conjunto nunca denso se cumple que $\mathrm{int}(\overline{\mathcal{X}}) = \emptyset$ y por lo tanto $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{X}$. □

Lema 4.18. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto magro en $[\omega]^\omega$ entonces para cada $a < A$ existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{X}$.*

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es un conjunto magro existe una colección numerable de conjuntos nunca densos $\{\mathcal{X}_n : n \in \omega\}$ tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{X}_n$. Si $a_0 = a$, por el Lema 4.17, existe $A_0 \subseteq A$ tal que $[a_0, A_0] \subseteq\sim \mathcal{X}_0$, sea n_0=mín(A_0). Sea $a_1 = a_0 \cup \{n_0\}$, como $\mathcal{X}_2$ es un conjunto nunca denso existe $A_1 \subseteq A_0 \diagdown n_0$ tal que $[a \cup \{n_0\}, A_1] \subseteq\sim \mathcal{X}_1$, sea n_1=mínA_1. Sea $a_2 = a_1 \cup n_1$, como $\mathcal{X}_2$ es un conjunto nunca denso existe $A_2 \subseteq A_1 \diagdown n_1$ tal que $[a_2, A_2] \subseteq\sim \mathcal{X}_2$, de esta forma se sigue contruyendo la sucesión. Sea $B = \{n_1, n_2, ..\}$, entonces $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{X}$. □

Teorema 4.19. *(Ellentuck) Para cada $\mathcal{X} \subset [\omega]^\omega$ se cumplen las siguientes proposiciones:*

1. *$\mathcal{X}$ es un conjunto nunca denso si y sólo si es un conjunto completamente Ramsey nulo.*

2. *$\mathcal{X}$ es un conjunto magro si y sólo si es un conjunto nunca denso.*

3. *$\mathcal{X}$ tiene la Propiedad de Baire si y sólo si es un conjunto completamente Ramsey.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$] Veamos por contrarrecíproca. Suponga que $\mathcal{X}$ no es un conjunto completamente Ramsey nulo, entonces existen B, b tales que para cualquier $C \subseteq B$ se cumple que $[b, C] \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, usando los argumentos de la prueba del Lema 4.16 se puede construir un conjunto $D \subseteq B$ tal que para cada c se cumple que si $[c, D] \subseteq [b, D]$, entonces $[c, D] \cap \mathcal{X} = \emptyset$, por lo tanto $\mathcal{X}$ es un conjunto nunca denso.
$\Leftarrow$] Recordemos que para cualquier $\mathcal{Y} \subseteq [\omega]^\omega$ se cumple que $\mathcal{Y}$ es un conjunto nunca denso si y sólo si para cada conjunto abierto no vacío en $[\omega]^\omega$, $\mathcal{U}$, existe un conjunto abierto no vacío $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$. Sea a, A tales que $\text{máx}(a) < \text{mín}(A)$, como $\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ransey nulo existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$. Como cualquier conjunto abierto no vacío tiene contenido un conjunto básico no vacío de la forma $[a, A]$ para algunos conjuntos a, A, se sigue que $\mathcal{X}$ es un conjunto nunca denso.

2. Observemos que, por definición, se cumple que los conjuntos nunca densos son magros. Veamos que si $\mathcal{X}$ es un conjunto magro entonces es un conjunto nunca denso. Como $\mathfrak{add}(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}$ no es numerable entonces la unión de una cantidad numerable de conjuntos completamente Ramsey nulos es un conjunto completamente Ramsey nulo. Como $\mathcal{X}$ es un conjunto magro existe una colección numerable de conjuntos nunca densos, $\{\mathcal{X}_i : i \in \omega\}$, tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{X}_i$; por el inciso anterior se cumple que para cada $i \in \omega$ $\mathcal{X}_i$ es un conjunto completamente Ramsey nulo, entonces $\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey nulo y por lo tanto es un conjunto nunca denso.

3. $\Rightarrow$] Como $\mathcal{X}$ es un conjunto con la PB existen un conjunto abierto $\mathcal{U}$ y un conjunto magro $\mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{U} \bigtriangleup \mathcal{Y}$. Sea $a < A$, como $\mathcal{Y}$ es un conjunto magro existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq\sim \mathcal{Y}$ y como $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto, es completamente Ramsey por lo que existe $C \subseteq B$ tal que $[a, C] \subseteq \mathcal{U}$ o $[a, C] \subseteq\sim \mathcal{U}$. Si $[a, C] \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[a, C] \subseteq \mathcal{X}$ y si $[a, C] \subseteq\sim \mathcal{U}$ entonces $[a, C] \subseteq\sim \mathcal{X}$ y $C \subseteq A$. Por lo tanto $\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey.
$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $\mathcal{X}$ es un conjunto completamente Ramsey, afirmamos que $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \text{int}(\mathcal{X})$ es un conjunto nunca denso. En caso contrario, existe $a < A$ tal que $[a, A] \subseteq \overline{\mathcal{Y}}$, como $\mathcal{X}$ es un conjunto

completamente Ramsey existe $B \subseteq A$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[a, B] \subseteq \sim \mathcal{X}$, como $[a, B] \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ se tiene que cumplir que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$, entonces $[a, B] \subseteq \text{int}(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{Y} \cap [a, B] = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{Y}$ es un conjunto nunca denso, entonces $\mathcal{X}{=}\mathcal{Y} \cup int(\mathcal{X})$ es un conjunto con la Propiedad de Baire.

$\square$

Teorema 4.20. *(Galvin-Prikry) Si* $\{\mathcal{P}_i : i \in \{0, 1, ..., k-1\}\}$ *es una partición de* $[\omega]^\omega$ *tal que para cada* $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ *el conjunto* $\mathcal{P}_i$ *es un conjunto de Borel, entonces existen* $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$*y un conjunto infinito* $H \subseteq \omega$ *tales que* $[H]^\omega \subseteq \mathcal{P}_j$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre k. Si $k = 2$ tenemos que $[\omega]^\omega = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ donde $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$ son conjuntos de Borel; además podemos suponer que $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$ pues si no ocurriera hacemos $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{P}_1$ y este conjunto también es Borel. Como P_0 es un conjunto de Borel en la topología de Ellentuck entonces tiene la propiedad de Baire y por el Teorema 4.19, P_0 es un conjunto completamente Ramsey, entonces para el básico $[\emptyset, \omega]$ existe $H \in [\omega]^\omega$ tal que $[\emptyset, H] \cap \mathcal{P}_0 = \emptyset$, es decir, $[H]^\omega \subseteq P_1$.
Ahora sea un número natural $k > 2$ y supongamos que el teorema se cumple para particiones de tamaño k, vamos a probar que se cumple para particiones de tamaño $k+1$. Sea $\{\mathcal{P}_i : i \in \{0, 1, ..., k+1\}\}$ una partición de $[\omega]^\omega$ tal que para cada $i \in \{0, 1, ..., k+1\}$ el conjunto $\mathcal{P}_i$ es un conjunto de Borel, entonces $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es un conjunto de Borel y $\{\mathcal{P}_i : i \in \{0, 1, ..., k-1\}\} \cup \{\mathcal{P}'\}$ es una partición de $[\omega]^\omega$ de k conjuntos de Borel entonces existe un conjunto infinito $H \subseteq \omega$ tal que $[H]^\omega \subseteq \mathcal{P}'$ o existe $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$ tal que $[H]^\omega \subseteq \mathcal{P}_j$, si ocurre que $[H]^\omega \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ hacemos una biyección entre H y ω y la extendemos a un homeomorfismo entre $[H]^\omega$ y $[\omega]^\omega$ y usamos el caso para $k = 2$.

$\square$

Bibliografía

[1] R. Engelking, *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlín (1989)

[2] L. Graham, J. Kantor, *Naming Infinity*. Harvard Univeristy Press, Cambridge, London (2009)

[3] L. J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory with a gentle introduction to forcing*. Springer (2011)

[4] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos. Una introducción*. Sociedad Matemática Mexicana (2003)

[5] I. L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos*. Limusa (2008)

[6] C. Ivorra, *Teoría Descriptiva de Conjuntos*. Autoedición (2010)

[7] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*. Springer Verlag (1995)

[8] A. Miller, *Infinite Ramsey Theory*. (1996)

[9] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*. Springer (1889)