BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

# "SOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DEL DESCUBRIMIENTO MÉTODO DE GEORGE POLYA"

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**SOCORRO CALLEJA ZARAGOZA**

DIRECTOR DE TESIS:

**LIC. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ**

PUEBLA, PUEBLA.

Diciembre 2012

**AGRADECIMIENTOS**

Son muchas las personas especiales  a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y corazón. Si alguna vez llegan a leer esta dedicatoria quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado.

Quiero expresar mi agradecimiento

A mis padres Vicente e Isabel, hermanos Eli, Roci, Vicen, Neto y a mis abuelitos por brindarme un hogar cálido y enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr objetivos.

Mamá, Papá, gracias por todos sus esfuerzos, su apoyo y por la confianza que depositaron en mi. Gracias porque siempre, aunque lejos, han estado a mi lado, este logro lo quiero compartir con ustedes, gracias por ser mis Padres. Quiero que sepan que ocupan un lugar especial.

A J. Jesús quien desde el inicio de la carrera ha sido una fuente de motivación, por su apoyo incondicional, su cariño, comprensión y constante estímulo. Por enseñarme a luchar por lo que se quiere y pensar siempre positivamente.

A todos mis amigos, en especial a Marisol, Irene, Nantzy, Ivett, J. Manuel, Ángel, Abel, mil gracias por todos los momentos que hemos pasado juntos y porque han estado conmigo siempre. Gracias por ayudarme a estudiar para mis materias cuando lo necesitaba.

A mi Director de Tesis, Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la concreción de este trabajo. A los alumnos de la Secundaria Técnica No. 1 que trabajaron con entusiasmo durante mi servicio social. Y a los alumnos del curso de Didáctica de las matemáticas  otoño 2012 FCFM por su colaboración.

A todos mis profes no solo de la carrera sino de toda la vida, muchas gracias porque de alguna manera forman parte de lo que ahora soy. Especialmente a mis sinodales, Dra. Esperanza Guzmán O., Dr. Agustín Contreras C., Dra. O. Leticia Fuchs G. por estar en este momento conmigo, por sus correcciones y valiosas sugerencias a este trabajo.

Al más especial de todos, a ti Señor porque hiciste realidad este sueño, por todo el amor con el que me rodeas y por bendecirme con la familia y amigos que hoy están conmigo. Esta tesis es para ti.

# Índice

# INTRODUCCIÓN

De acuerdo a mi experiencia con alumnos de Secundaria durante mi servicio social y con los profesores, que asistieron al curso del "Desarrollo de competencias matemáticas basado en la resolución de problemas" 2011-2012 impartido por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, pude notar que ellos quieren saber cómo resolver los problemas matemáticos, quieren alguna metodología que los ayude a resolverlos. Si bien no hay recetas fáciles para enfrentar con éxito la resolución de problemas, los docentes si requieren algunas sugerencias, ya que el enfoque del programa oficial marca la resolución de problemas como un punto medular del trabajo diario, y no hay material de consulta que ellos puedan conseguir con facilidad, esta tesis pretende ser una ayuda en tal sentido. Algunos de los comentarios de los profesores acerca del por qué los alumnos resuelven mal los problemas son: les cuesta leer y entender el problema, no tienen los conocimientos básicos, les cuesta identificar el significado que tiene cada dato, no saben cómo y cuándo utilizar lo que saben, etc. Una forma en que se apoyó a los docentes en el curso de actualización ya mencionado, fue en los rubros de identificar las dificultades y en proponer estrategias didácticas, además de resolver los problemas propuestos en equipo, para luego compartirla con el resto del grupo.

Para la resolución de problemas matemáticos no es necesario seguir ciertas reglas o normas fijas, ya que cada persona crea su propio procedimiento para resolverlo o intenta estrategias diferentes, (éstas dependen de sus conocimientos, experiencia etc.) pero que al discutirlas con otros se enriquecen. Aquí solo daremos sugerencias de cómo abordar los problemas y cómo los docentes pueden enseñar mediante las sugerencias de Polya. Enseñar con base en la resolución de problemas no es fácil. Algún autor comentó que "*Enseñar con base en la resolución de problemas es más un reto que una propuesta*".

El presente trabajo se basa en lo establecido por Polya en su publicación «*Mathematical Discovery on Understaing, Learning, and Teaching Problem Solving*» (1962), el título completo no deja dudas sobre las intenciones del autor, obviamente adaptando los contenidos y redacción a las necesidades de docentes y alumnos dentro del proceso de enseñanza aprendizaje y de la resolución de problemas matemáticos. Mi aportación en este trabajo consiste en proporcionar una sección de ejemplos adicionales en los cuales se apliquen las ideas recién discutidas. El nivel de conocimientos que se requiere para los ejemplos que se presentan permite que sea usado por docentes de secundaria y bachillerato.

Por otro lado, en este trabajo, se reconoce la importancia que tiene la resolución de problemas para la enseñanza de la matemática escolar, en tal sentido es necesario destacar los siguientes puntos:

a) Es importante señalar que trabajar en grupo con frecuencia facilita la solución de problemas, ya que las soluciones alcanzadas en grupo suelen ser mejores que las que se logran al trabajar individualmente.

b) La solución de problemas de forma exitosa puede comprender, en ocasiones, tolerar cierta ambigüedad respecto a la mejor manera de proceder. Rara vez se pueden zanjar problemas siguiendo una secuencia óptima de los pasos. Podemos modificar o incluso evitar o agregar algunos de ellos cuando parezca apropiado.

c) Cómo soluciona el alumno los problemas depende en parte de cómo los entienda. La forma en que se resuelven los problemas puede influir en la forma en la que se debe implementar el ciclo de solución de problemas.

Tipos de problemas: los problemas pueden categorizarse de acuerdo con si sugieren rutas de solución claras o no. Los problemas bien estructurados muestran vías de solución claras. Estos problemas también se conocen como problemas bien definidos. Los problemas mal estructurados carecen de rutas de solución nítidas (Sternberg R.).

Desde la perspectiva de enseñar matemáticas con base en resolver problemas un punto importante que queda pendiente en muchos autores es ¿cómo introducir nuevos conceptos?, ya que es práctica común del docente exponer un tema y al final agregar problemas para que los alumnos los resuelvan como preparación para su examen o como tarea. Polya nos muestra el camino: alentar el descubrimiento (guiado) de los propios alumnos. En el caso de los ciclos previos a la enseñanza universitaria, se propone lo siguiente: cuando un alumno resuelve un problema moviliza todos sus recursos, el docente parte de las soluciones de los alumnos y muestra nuevas formas de resolver el problema o introduce nuevos conceptos, así lo nuevo cae en terreno fértil en la mente del alumno.

Mediante una enseñanza bien orientada basado en el método de Polya el alumno será capaz de redescubrir la solución de algunos problemas que son frecuentes en la matemática escolar. Si por el contrario el profesor subestima la capacidad de sus alumnos para resolver problemas y explica de un sólo golpe sin darles oportunidad para explorar el proceso de solución del problema propuesto estará frenando la iniciativa de sus estudiantes.

Nota: El concepto "problema" se refiere al contexto escolar (Secundaria, Bachillerato). Es decir no consideramos problemas de "investigación".

El profesor puede auxiliarse de geogebra para los problemas geométricos, pues sus amplias facilidades permiten proponer tareas para que el estudiante explore y formulé conjeturas, que posteriormente deberá justificar. Proponemos la metodología de Polya y geogebra para el caso de geometría y el método gráfico (o Singapur) para resolver problemas de álgebra, ver tesis de Adriana Mora Palestina "Desarrollo de competencias algebraicas basado en la resolución de problemas". Existen otras propuestas como alternativa a los pasos que propone Polya, ver Tesis de Guadalupe Muñoz Sánchez "Pensar matemáticamente" donde se discute la propuesta de Mason, Burton y Stacey (ambas de la FCFM – BUAP).

Hay que hacer notar que Polya a recibido algunas críticas, Polya escribió su libro «*How solve it*» en 1945, existe traducción al español que ha sido divulgada por la editorial Trillas. Varios autores critican su esquema de cuatro pasos, al considerarlo muy simple, pero sobre todo, argumentan que la solución de un problema no sigue un progreso lineal como suponen sus cuatro pasos, pero una lectura atenta de su libro nos revela que su propuesta principal es que el docente apoye a los alumnos, a través de la formulación de cuestionamientos que les permitan entender el problema, y resulte más sencillo encontrar varias alternativas de solución trabajando en grupo. Muy probablemente sus críticos no han leído sus siguientes libros entre ellos el «*Mathematical Discovery*», donde da más detalles de cómo aplicar sus sugerencias y proporciona ejemplos de problemas matemáticos resueltos y cómo podemos llevar al alumno a que él mismo haga descubrimientos matemáticos.

José A. Fernández Bravo en su libro "*Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos"* critica duramente los cuatro pasos de Polya: "*La información de estas cuatro fases únicamente nos advierten de las partes del proceso de elaboración, que no podemos confundir con la estrategia que forma parte del proceso creativo. Por un lado, entonces, lo extremo a la realización; por otro, lo intelectual. Supongamos que para andar se deben realizar cuatro fases, a saber: "querer moverse. Estar de pie. Avanzar una pierna… ¿Logra avanzar el que lleva a cabo esas cuatro fases?*

*Analicemos: "Comprender el problema" Es evidente la necesidad de su comprensión para poder llegar a resolverlo 1) Existen alumnos que lo resuelven perfectamente. Es lógico suponer que lo han comprendido 2) Los que no lo resuelven. Algunos de estos: a) No lo comprenden. ¿Qué necesidad, como estrategia de elaboración, tenemos de informar al alumno de que para resolver el problema es necesario comprenderlo? El que lo comprende, lo comprende sin decirle que es obligatorio comprenderlo. El hecho de comprenderlo no implica saber hacer el problema. Y, en el hecho de saber hacer el problema está implícita su comprensión. Los alumnos que no comprenden el problema no lo van a comprender porque les informemos de lo ineludible que es su comprensión. Para leer un libro es necesario abrirlo, y nadie dice: "Abre el libro", "lee"* (y algo parecido con los restantes puntos).

Se observa que dicho autor se fija en la frases que corresponden a cada a paso, no se fija en la sugerencias que acompañan cada paso. No nos parece acertada su crítica toda vez que Polya indica claramente que el docente debe hacer preguntas al alumno en cada fase, para que con la práctica se las pueda hacer el mismo. Es decir, el maestro ayuda a los alumnos (de secundaria y bachillerato, por el tipo de ejemplos que brinda) a tener claro lo que se tiene y lo que se pide en el problema. "*How solve it"* está redactado para los maestros. Como anexo al final de la tesis se incluyen las preguntas que Polya sugiere que el maestro debe formular en relación a los cuatro pasos, y que aparecen en "*How solve it".*


En el diagrama anterior da la impresión de que siguiendo los cuatro pasos de Polya (con redacción ligeramente modificada) podríamos resolver cualquier problema.

Es evidente que el carácter lineal de los modelos utilizados en numerosos libros de texto y profesores no promueve el espíritu de las fases de Polya y su objetivo de enseñar a los estudiantes a pensar. Todos estos modelos tradicionales presentan los siguientes defectos:

1. Representan la solución de problemas como un proceso lineal.

2. Ellos presentan la solución de un problema como la ejecución de una serie de pasos.

3. Dan a entender que la resolución de problemas matemáticos es un procedimiento que se ha memorizado, practicado y el objetivo es repetirlo.

**Resolución de problemas en la escuela secundaria en México:** En el presente trabajo, se ha tomado en cuenta el Programa Oficial 2011 para Secundaria (Matemáticas), en el que se pretende desarrollar habilidades de niños y adolescentes de Educación Básica, de tal manera que:

• Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
• Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
• Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo.

Propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria.
En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas, se espera que los alumnos:
• Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.
• Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones.
• Utilicen el teorema de Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza, las razones trigonométricas y el teorema de Tales, al resolver problemas.

• Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por ellos mismos u otros. Elijan la forma de organización y representación (tabular o gráfica) más adecuada para comunicar información matemática.
• Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, y calculen valores faltantes y porcentajes utilizando números naturales y fraccionarios como factores de proporcionalidad.
Los Estándares Curriculares para el eje 1 son los siguientes. El alumno:
1.1.1. Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.
1.1.2. Resuelve problemas que implican calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor.
1.2.1. Resuelve problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas.
1.3.1. Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas a excepción de la división entre polinomios.
1.4.1. Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión.
1.4.2. Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Lo anterior es cita textual y para más detalles se puede consultar en línea en el portal de SEP Federal, como programa SEP matemáticas 2011.

Como se ve, se da mucho énfasis a la resolución de problemas, pero algunos maestros no trabajan con un esquema de resolución de problemas, particularmente, los alumnos resuelven pocos problemas por clase. **Se predica mucho y se practica poco**.

En resumen nosotros concebimos el método de Polya como un recurso no como una camisa de fuerza, y muchos menos como una receta fácil.

**“El mejor maestro no es aquel que da las mejores respuestas, si no aquel que ayuda encontrarlas”**

# CAPÍTULO I
# EL MODELO DE DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

## 1.1. Construcciones geométricas

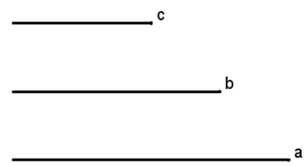
Describir o construir figuras con regla y compás es un tema clásico de la geometría plana. Además tales construcciones son adecuadas para familiarizar a los principiantes con figuras geométricas y sus propiedades básicas; e introducirlo a la idea de resolver problemas geométricos. Es por esta razón que vamos a hablar brevemente de las construcciones geométricas.

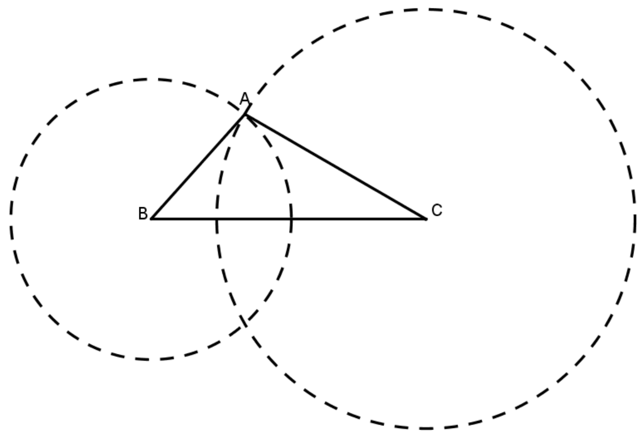
El primer problema en los Elementos de Euclides, la Proposición Uno del Libro Uno, propone "Describir un triángulo equilátero en una línea recta finita dada" y da la solución. Tenemos el siguiente problema más general: **Describir o construir un triángulo dando sus tres lados.** Analicemos este problema.

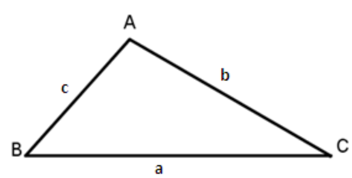
En cualquier problema debe haber una incógnita, si todo se sabe, no hay nada que buscar, nada que hacer. En nuestro problema la incógnita (la cosa deseada o requerida) es una figura geométrica, un triángulo. Sin embargo, en cualquier problema algo debe ser conocido o dado (los datos). En nuestro problema los datos son tres "líneas rectas finitas" o segmentos de línea. Finalmente, en cualquier problema debe haber una condición que especifica cómo la incógnita está vinculada o relacionada con los datos. En nuestro problema, la condición especifica es que los tres segmentos dados deben ser los lados del triángulo.

La condición es una parte esencial del problema. Comparar nuestro problema con el siguiente: "Describir un triángulo dadas sus tres alturas" en los 2 problemas los datos son los mismos (tres segmentos de línea) y la incógnita es una figura geométrica de la misma especie (un triángulo). Sin embargo, la conexión entre la incógnita y los datos es diferente, la condición es diferente, y los problemas de hecho son muy diferentes.

Si $a, b$, y $c$ representan las longitudes de los tres segmentos dados (obviamente deben satisfacer la desigualdad del triángulo, la suma de los segmento debe ser mayor que el tercero $a + b > c$). Dibujamos primero un segmento cualquiera digamos $a$ con extremos $BC$. Dibujar dos círculos, uno con centro $C$ y radio b, el otro con centro $B$ y radio c, sea $A$ uno de sus dos puntos de intersección. A continuación, $ABC$ es el triángulo deseado.




## 1.2. Del ejemplo al patrón

Trazar el segmento $a$, con esto se localizan dos vértices del triángulo pedido, $B$ y $C$, sólo queda un vértice más por encontrar. De hecho, trazando el segmento $a$ hemos transformado el problema propuesto en otro problema equivalente, pero diferente, al problema original. Este es el nuevo problema: la incógnita es un punto (el tercer vértice del triángulo requerido); los datos de dos puntos ($B$ y $C$) y dos longitudes (b y c); la condición requiere que el punto deseado debe estar a la distancia b del punto dado $C$ y a la distancia c del punto dado $B$.

Esta condición consiste en dos partes, una relacionada con b y $C$, y el otro con c y $B$. Mantenga sólo una parte de la condición, olvide la otra parte, ¿cómo esto determina la incógnita?, ¿cómo puede variar? Un punto del plano, que tiene la distancia b desde el punto $C$ dado, no es ni completamente determinado ni completamente libre: se limita a un "lugar", debe pertenecer y también puede moverse a lo largo de la periferia del círculo con centro $C$ y radio b. El punto desconocido pertenece a dos lugares geométricos y se encuentra en su intersección.

Percibimos un patrón (el "patrón de dos lugares geométricos") que podemos imitar con alguna posibilidad de éxito en la solución de problemas de construcción geométrica: en primer lugar, reducir el problema a la construcción de un punto. A continuación, divide la condición en dos partes tal que cada parte conduzca a un lugar geométrico, cada lugar debe ser una línea recta o un círculo.

### 1.3. Ejemplos

Las construcciones geométricas básicas son aplicaciones directas del método de los dos lugares geométricos. Polya nos indica claramente cómo puede proceder el maestro en clase, a veces los libros de texto dan la solución o el procedimiento de una construcción de un solo golpe, sin discusión ¿Cómo podría el estudiante descubrir la solución por sí mismo? ¿En qué forma podría pensar?, ¿En qué forma podría el maestro ayudar a los alumnos?

(1) Circunscribir un círculo entorno a un triángulo dado. Podemos reducir el problema a la construcción del centro del círculo requerido. Así que el problema se reduce a: la incógnita es un punto, digamos X; los datos son los tres puntos A, B y C; la condición consiste en la igualdad de las tres distancias:

XA = XB = XC

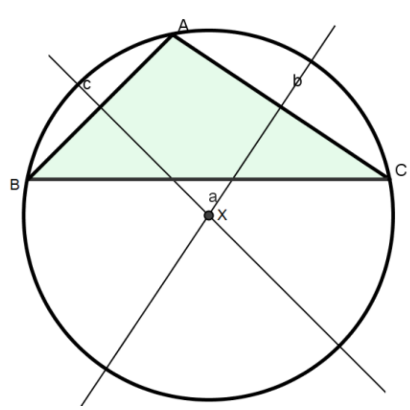
Dividimos la condición en dos partes:

Primera   XA = XB

Segunda  XA = XC

Para cada parte de la condición corresponde un lugar geométrico (locus). El primer lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB, el segundo el de AC. El punto deseado X es la intersección de estas dos líneas rectas.

Podríamos haber dividido la condición de otra manera: en primer lugar, XA = XB, en segundo lugar, XB = XC. Esto produce una construcción diferente. Sin embargo, ¿el resultado puede ser diferente? ¿Por qué no?




(2) Inscribir un círculo en un triángulo dado. Podemos reducir el problema a la construcción del centro del círculo requerido. Así que el problema se reduce a:

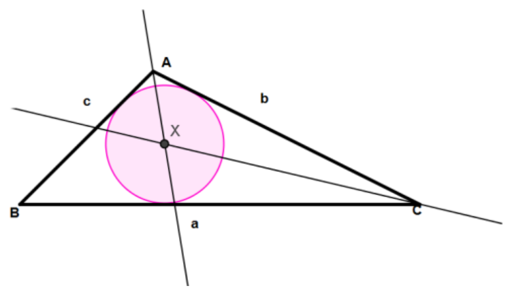
La incógnita es un punto, digamos X; los datos son tres líneas rectas a, b, y c; la condición es que el punto X estará a la misma distancia de las tres líneas dadas.

Dividimos la condición en dos partes:

En primer lugar, X es equidistante de a y b.

En segundo lugar, X es equidistante de a y c.

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera parte de la condición consiste en dos líneas rectas: las bisectrices de los ángulos. El segundo lugar es análogo.




(3) Dadas dos líneas paralelas y un punto entre ellos (P). Dibuja un círculo que es tangente a las dos líneas dadas y pasa por el punto dado. Si visualizamos la figura requerida (ayuda tener papel a la mano) observamos que podemos fácilmente resolver una parte del problema: la distancia de las dos paralelas dadas es, obviamente, el diámetro del círculo requerido y la mitad de esta distancia es el radio.

Podemos reducir el problema a encontrar el centro X del círculo desconocido.

Sabiendo que el radio, es r, dividimos la condición de la siguiente manera:

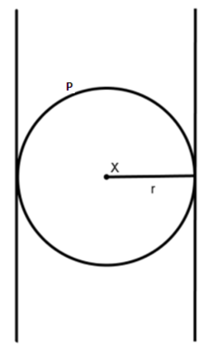
Observar que, X está a una distancia r desde el punto dado (P).

En segundo lugar notar que, X está a una distancia r de las dos líneas dadas.

La primera parte de la condición produce un círculo, la segunda parte una línea recta a la mitad de ellas, y paralela a las dos rectas dadas.

Sin conocer el radio del círculo deseado, podríamos haber dividido la condición de la siguiente manera:

En primer lugar, X está a la misma distancia desde al punto dado y la primera línea dada. En segundo lugar, X está a la misma distancia desde el punto dado y la segunda línea dada.




La división de la condición en estas dos partes es lógicamente inobjetable, sin embargo: los lugares geométricos correspondientes son parábolas, no podemos dibujar con regla y compás, es una parte esencial del esquema que los lugares geométricos obtenidos deben ser circulares o rectilíneos (geometría básica). El punto dado P es el foco, r es la distancia que es igual a la directriz, y a una de las paralelas, así X está en una parábola

Este ejemplo puede contribuir a una mejor comprensión del patrón de dos lugares geométricos. Este modelo ayuda en muchos casos, pero no en todos, es apropiado mostrar ejemplos.

### 1.4. Problema de construcción

*Inscribir un cuadrado en un triángulo dado, tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo.*

¿Cuál es la incógnita? – un cuadrado.

¿Cuáles son los datos? – un triángulo dado.

¿Cuál es la condición del problema? – los cuatro vértices del cuadrado deben hallarse sobre los lados del triángulo, dos sobre la base y los otros dos sobre cada uno de los otros dos lados.

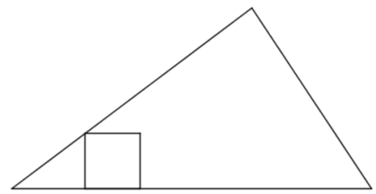
¿Es posible satisfacer la condición? –Creo que sí, pero no estoy seguro. No parece que el problema le resulte muy fácil.

Si no puede resolverlo, trate primero de resolver algún problema relacionado ¿Puede usted satisfacer alguna parte de la condición? - ¿Qué quiere decir por una parte de la condición? Veamos; la condición concierne a todos los vértices del cuadrado.

¿De cuántos vértices se trata? – de cuatro. Una parte de la condición se aplicaría a menos de cuatro vértices.

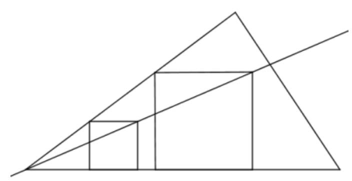
Tome sólo una parte de la condición, deje la otra parte. ¿Qué parte de la condición es fácil de satisfacer? – es fácil trazar un cuadrado con dos de sus vértices sobre el perímetro del triángulo, incluso un cuadrado con tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.

Dibuje una figura



Usted no ha considerado más que una parte de la condición, abandonando la otra. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? – el cuadrado no está determinado si sólo tiene tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.

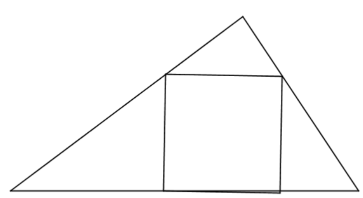
Dibuje otra figura.



-Tal como dice, el cuadrado no queda determinado por la parte de la condición considerada.

¿Cómo puede variar? -……….tres de los vértices de su cuadrado están en el perímetro del triángulo, pero el cuarto no está donde debería estar. Como usted lo ha dicho, el cuadrado no está determinado, puede variar; resulta lo mismo para su cuarto vértice.

¿Cómo puede variar? -…..trátelo experimentalmente si lo desea. Trace otros cuadrados, tres de cuyos vértices se hallen sobre el perímetro del mismo modo que los dos cuadrados ya dibujados en la figura. Dibújelos pequeños y grandes.



## 1.5. Ejemplos

Los siguientes ejemplos se diferencian entre sí en varios aspectos, las diferencias pueden mostrar más claramente el rasgo común que queremos desentrañar.

(I) Dibujar tangentes comunes a dos circunferencias dadas. Dos círculos se dan en cualquier posición. Queremos dibujar líneas rectas tocando ambos círculos. Si los círculos dados no se superponen tienen cuatro tangentes comunes, dos exteriores y dos interiores. Vamos a centrar nuestra atención a las tangentes comunes exteriores, ver fig. 1.1, que existe a menos que uno de los dos círculos dados se encuentre completamente dentro del otro.

Si no se puede resolver el problema propuesto, busque un problema relacionado y apropiado. Hay un problema obvio relacionado (de los cuales el lector debe saber la solución): trazar líneas tangentes a un círculo dado, desde un punto exterior. Este problema es, de hecho, un caso límite o caso extremo del problema propuesto: uno de los dos círculos dados es reducido en un punto. Llegamos a este caso extremo en la forma más natural por la variación de los datos. Ahora podemos variar los datos de muchas formas: disminución de un radio y dejar el otro sin cambios o disminuir un radio y el aumento del otro, o disminuir ambos. Y así podemos dar con la idea de dejar disminuir ambos radios a la misma velocidad, de manera uniforme, de modo que ambos se ven disminuidos por la misma longitud en el mismo tiempo. Visualizar este cambio, podemos observar que cada tangente común está cambiando, pero sigue siendo paralelo a sí mismo mientras se cambia, hasta que finalmente la figura. 1.2 aparece -y aquí está la solución: dibujar tangentes desde el centro del círculo más pequeño dado a un nuevo círculo, que es concéntrico con el círculo más grande dado y cuyo radio es la diferencia de los radios dados.

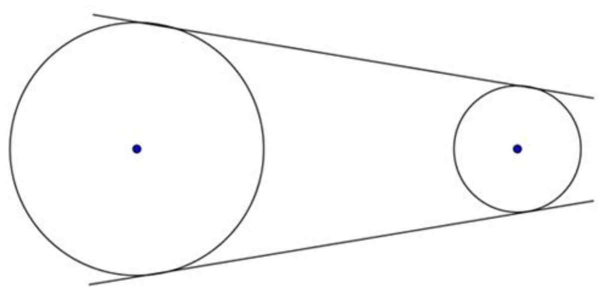


Fig. 1.1. Datos desconocidos, condición.

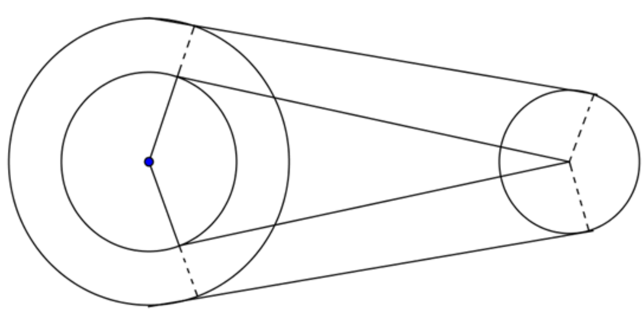


Fig.1.2. Paso clave

Utilice la figura obtenida como un paso: el paso de ella a la figura deseada es fácil (sólo hay dos rectángulos para construir).

(2) Construir un triángulo dadas sus tres medianas. "Tomamos el problema como resuelto", es decir, nos basamos en el triángulo (deseado) en el cual las tres medianas (dadas) están debidamente ensambladas, ver fig. 1.3. Debemos recordar que las tres medianas se encuentran en un punto (el punto M en la fig. 1.3, centro  de gravedad del triángulo) la cual divide cada mediana en proporción 1:2.

Para visualizar este hecho esencial, vamos a marcar el punto medio D del segmento AM, los puntos D y M dividen la  media AE en tres partes iguales, ver fig. 1.4.

El triángulo deseado se divide en seis triángulos pequeños. ¿Podría solucionar parte del problema? Para construir uno de esos pequeños triángulos se necesitan tres datos, de hecho, sabemos dos lados: por un lado es un tercio de una mediana determinada, otra parte es de dos tercios de la otra media, pero dado que no se ve una tercera pieza conocida ¿Cómo podríamos introducir algún otro triángulo con tres datos conocidos? Hay un punto D en la figura 1.4, que es, comprensiblemente, deseoso de más conexiones, si se une a un punto de vecino podemos notar que el Δ MDG de cada lado de la cual es una tercera parte de una mediana, y para que podamos construir, a partir de tres lados conocidos- ¡dimos un salto! El resto es fácil.

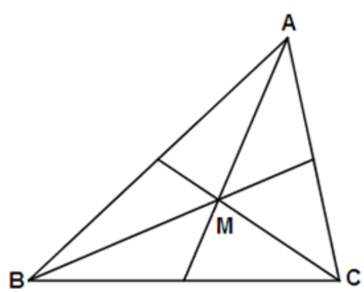



**Fig. 1.3. Datos desconocidos, condición.**

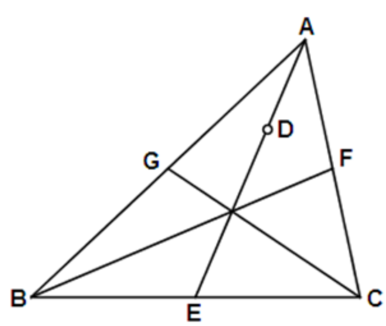
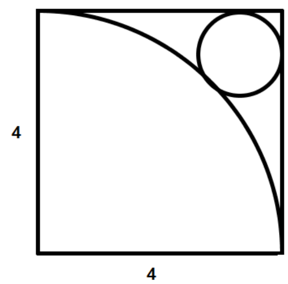



**Fig. 1.4. Un punto deseoso de más conexiones.**

## EJEMPLOS ADICIONALES

En todos los ejemplos proponemos que el maestro guíe la discusión de la solución mediante un dialogo basado en las preguntas de Polya, como en los ejemplos expuestos, por razones de espacio en ocasiones la solución será breve. Los alumnos previamente tratan de resolver el problema, así que en la discusión el maestro usa las ideas de los alumnos, aun si no son correctas del todo

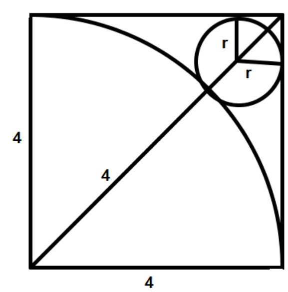
1.- En la siguiente figura un cuarto de círculo está inscrito en un cuadrado de lado 4. ¿Cuánto mide el radio del círculo menor que es tangente al cuarto de círculo y a dos lados del cuadrado?




SOLUCIÓN:

Después de algunos intentos llegamos a la siguiente figura, donde aprovechamos que la recta que une los centros de los círculos también es diagonal en ambos cuadrados

Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal del cualquier cuadrado de lado $a$ mide $a\sqrt{2}$.




Luego, la diagonal del cuadrado grande mide $4\sqrt{2}$. Además esta diagonal es igual a la suma del radio del círculo grande, más el radio del círculo pequeño, más la diagonal del cuadrado pequeño, luego $4\sqrt{2} = 4 + r + r\sqrt{2}$, de donde:

$$r = \frac{4\sqrt{2} - 4}{1 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 4}{1 + \sqrt{2}}\left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 8 - 4 + 4\sqrt{2}}{1 - 2}$$

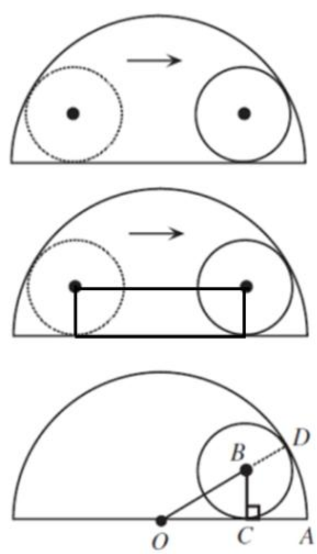
$$= 12 - 8\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el radio del círculo pequeño mide $12 - 8\sqrt{2}$.

2.- Una rueda de radio 8 cm rueda a lo largo del diámetro de un semicírculo de radio 25 hasta que topa con este semicírculo. ¿Cuál es la longitud de la porción del diámetro que no puede ser tocado por la rueda?

SOLUCIÓN:
Después de batallar un poco a cerca de la figura que dibujar, usamos la estrategia de unir los centros de los círculos, por simetría de la figura del problema, usamos la mitad derecha.
Dibujamos el ΔOBC. Donde O es el centro del circulo grande B el centro de la rueda y C el punto de tangencia de la rueda y el diámetro del semicírculo.
BC un radio de la rueda ∟OBC=$90^{o}$ y el ΔOBC está en ángulo recto en C.
Prolongamos OB para satisfacer el semicírculo en D. Tenemos que BD=8 y BD=CA entonces BD=CA=8 ya que ambos son los radios de la rueda.
Ahora como OD=25 y BD=8 tenemos que:
OB=OD-BD=25-8=17
Utilizando el teorema de Pitágoras en el ΔOBC para encontrar OC, tenemos:
$OC^2=OB^2-BC^2$
$OC^2=17^2-8^2$ =289-64 =225 así
OC=$\sqrt{225}$ → OC=15

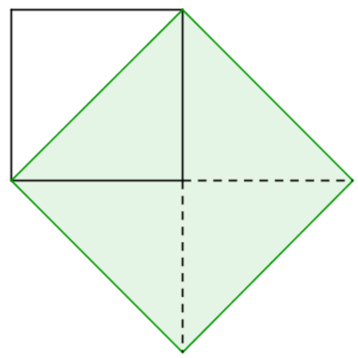
Entonces como OA=25 y OC=15, tenemos que:
CA=OA-OC=25-15=10




Por lo tanto la longitud de la porción del diámetro que no pude ser tocado por la rueda es 20 ó 2AC.

3.- La duplicación del cuadrado.

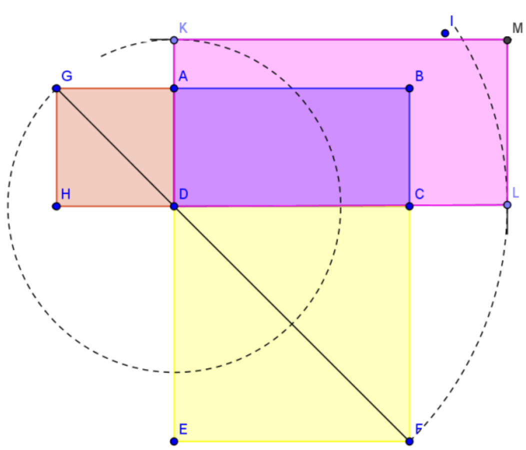
Este es un problema conocido y su solución se remonta a los Diálogos de Platón, y tal forma de trabajar se llama Método Socrático, pero curiosamente cuando se incluye este problema en un examen normalmente un gran porcentaje se equivoca, también se puede formular de la siguiente manera: tenemos un círculo de radio igual a 10 centímetros, ¿Cuál es el radio de un círculo que tenga área doble del anterior? Muchos contestan, sin reflexionar: 20 cm.

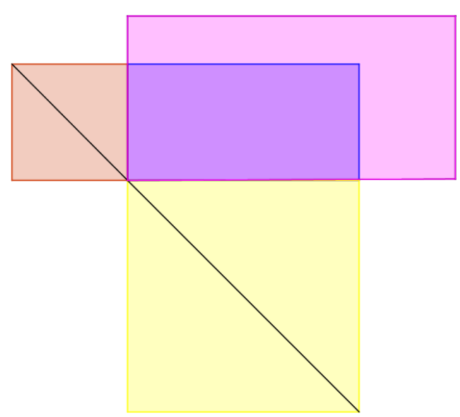


La diagonal del cuadrado original da la longitud del lado que se busca. Recordamos que por Pitágoras la diagonal de un cuadrado de lado $l$ es $D = \sqrt{2}l$ ahora si elevamos al cuadrado el área del nuevo cuadrado es $A = 2l^2$ ver figura.

Proponemos que el maestro explique la solución de este problema usando la metodología anterior, es decir que “vaya discutiendo” y no dar solución de un golpe. Discutir con los alumnos hacerles notar con preguntas si tienen claro lo que se pretende, si tienen claro  cómo se calcula el área de un cuadrado o de un círculo.

Ahora generalizamos para el área de un rectángulo. Hallar la construcción geométrica para duplicar el área de un rectángulo.  KMDL tiene el doble que ABDC



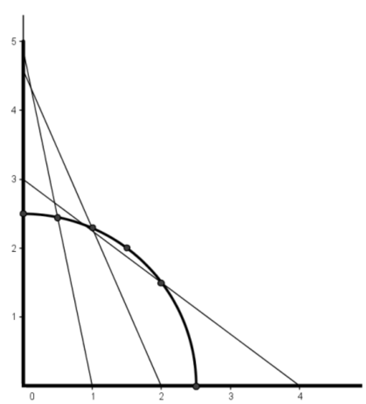



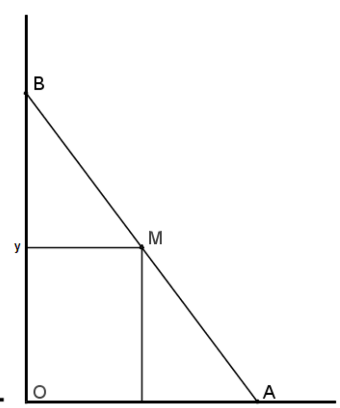
4.- Imagine que tiene una escalera de longitud $l$ y que la apoya contra una pared (o un árbol). ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio sobre la escalera (ahí está un gato), cuando la escalera toma todas las posiciones? (siempre apoyándose sobre el suelo y la pared) Este ejemplo se puede explicar en el tema de lugares geométricos en geometría analítica.

SOLUCIÓN:

Si esto se expone a un grupo de alumnos se insiste en que podemos ir descubriendo paso a paso que partimos de las condiciones de problema y avanzamos al tener presente lo que queremos, es decir, en este problema suponemos dónde está la escalera, su pie en A y que lo conocemos. El alumno puede realizar el dibujo apoyándose en geogebra ya que con un botón traza el punto medio.

Sea $L$ la longitud de la escalera(es conocida). Sea $A$ el pie de la escalera en el eje $X$, y $B$ donde la escalera se apoya en el eje $Y$, la escalera solo se mueve, deslizándose sobre los ejes así




La escalera satisface $(OA)^2 + (OB)^2 = L^2$, sea $M\ (x, y)$ el punto medio de la escalera en cualquier posición intermedia (no cuando la escalera descansa sobre los ejes)

Entonces por triángulos semejantes o usando un poco de analítica que nos da las coordenadas del punto medio tenemos $x\ = \frac{OA}{2}$ $\quad y = \frac{OB}{2}$ . Sustituyendo nos queda

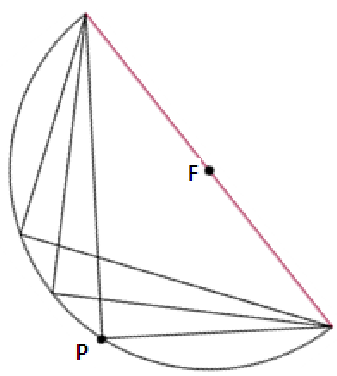
$$\frac{(OA)^2}{4}+\frac{(OB)^2}{4}=\frac{L^2}{4}$$

$$\left(\frac{OA}{2}\right)^2+\left(\frac{OB}{2}\right)^2=\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2=\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

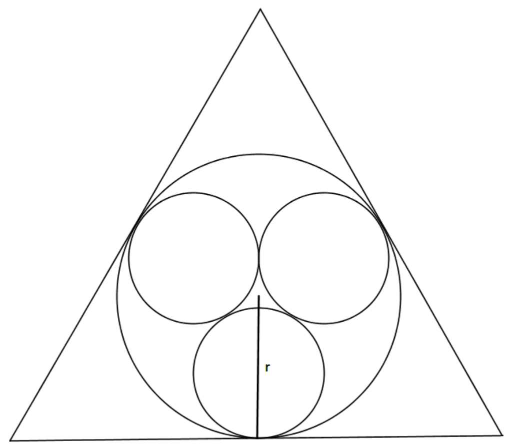
Otra solución, dejamos fija "la escalera" y permitimos que el origen de coordenadas se mueva libremente, pero siempre formando un ángulo recto, por el teorema del ángulo inscrito en un semicircunferencia tenemos que el lugar geométrico buscado es una semicircunferencia.

Puede imaginar que dibuja un segmento de longitud igual a la escalera y en los extremos coloca un clavo, apoya una escuadra contra los clavos el vértice donde está el ángulo recto describirá una circunferencia.

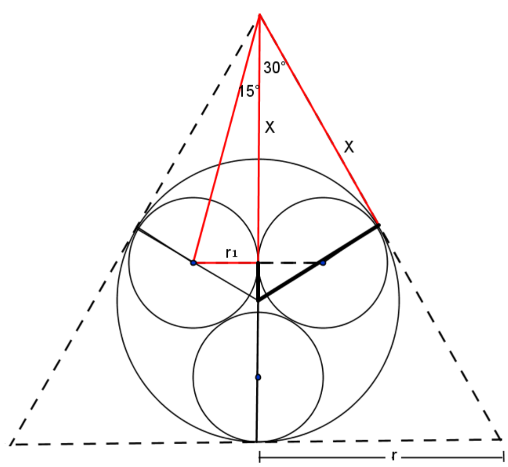


**Problemas sobre círculos, es importante dar una secuencia de problemas relacionados.**

5.- Dado un círculo de radio r se desea inscribir tres círculos iguales que sean mutuamente tangentes entre sí y tangentes al círculo inicial ver figura. Hallar el radio de las circunferencias iguales.




SOLUCIÓN:

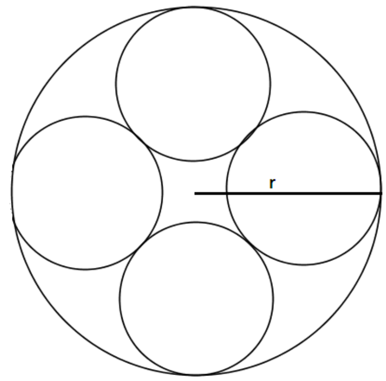



Sea $r_1$ el radio de la circunferencia pequeña inscrita.

$$\frac{r}{x} = tag30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot r$$

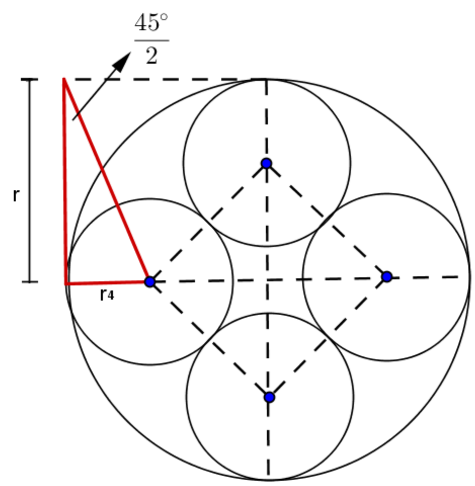
$$\frac{r_1}{x} = tag15° = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow r_1 = (2 \cdot \sqrt{3} - 3) \cdot r$$

6.- Dado un círculo de radio r se desea inscribir cuatro círculos iguales que sean mutuamente tangentes entre sí y tangentes al círculo inicial ver figura. Hallar el radio de las circunferencias iguales.




SOLUCIÓN:

Sea $r_4$ el radio de la circunferencia pequeña inscrita.

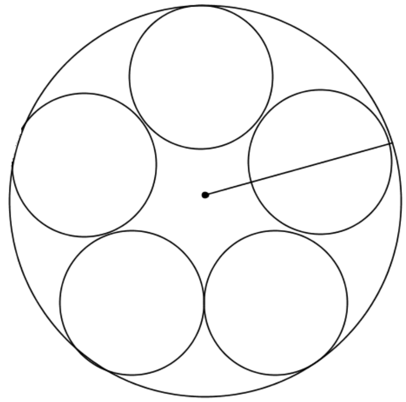



Hay 2 soluciones: aplicar Pitagoras al cuadrado del centro, la otra es explicar porqué el ángulo indicado en el dibujo es $\frac{45}{2}$.

$$r_4 = r \cdot tag\frac{45}{2}$$

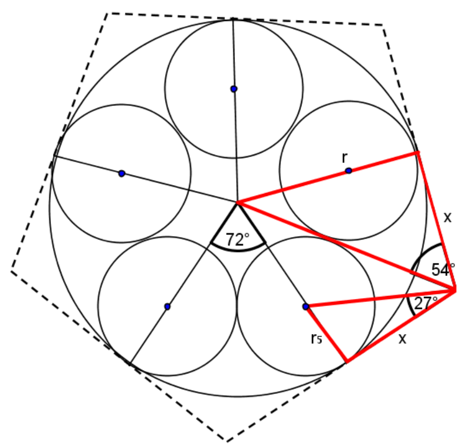
$$= r \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

7.- Dado un círculo de radio r se desea inscribir cinco círculos iguales que sean mutuamente tangentes entre sí y tangentes al círculo inicial ver figura. Hallar el radio de las circunferencias iguales.



SOLUCIÓN:

Sea $r_5$ el radio de la circunferencia pequeña inscrita.

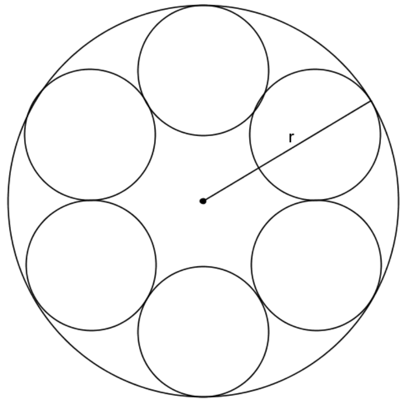



$$\frac{r}{x} = tag54^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{r}{tag54^{\circ}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r_5}{x} = tag27^{\circ}$$

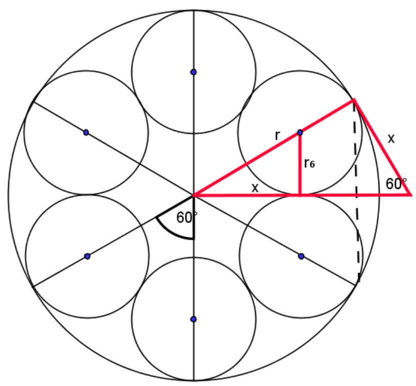
$$\Longrightarrow \quad r_5 = \frac{r}{tag54^{\circ}} \cdot tag27^{\circ}$$

8.- Dado un círculo de radio r se desea inscribir seis círculos iguales que sean mutuamente tangentes entre sí y tangentes al círculo inicial ver figura. Hallar el radio de las circunferencias iguales.




SOLUCIÓN:

Sea $r_6$ el radio de la circunferencia pequeña inscrita.




Radio del círculo inscrito:

$$\frac{r}{x} = tag60^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad r_6 = x.tag30^{\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{r}{3}$$

**Al estilo Polya, ¿Se puede generalizar? Es decir proponemos el siguiente problema, dado un círculo de radio R, inscribir $n$ círculos iguales tangentes entre sí y tangente al círculo exterior, hallar su radio $(r_n)$.**

# CAPÍTULO 2
# EL PATRÓN CARTESIANO

## 2.1. Un pequeño problema

Aquí hay un desafío para la mente que puede divertir a los niños de hoy: un granjero tiene gallinas y conejos. En total hay 50 cabezas y 140 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos tiene el granjero? Consideramos varios enfoques para resolverlo.

(I)Tanteo. Hay 50 animales en total. No todos pueden ser gallinas, porque entonces tendríamos solo 100 patas. No todos pueden ser conejos, porque entonces tendríamos 200 patas. Sin embargo, no debe ser sólo de 140 patas. Si la mitad de los animales eran gallinas y los conejos otra mitad. Vamos a estudiar estos casos haciendo una tabla:

| Gallinas | Conejos | Patas |
|---|---|---|
| 50 | 0 | 100 |
| 0 | 50 | 200 |
| 25 | 25 | 150 |

Si tomamos un número menor de gallinas, hay que tener un mayor número de conejos y esto lleva a más patas. Por el contrario, si se tiene un mayor número de gallinas. . . . Sí, debe haber más de 25 gallinas, vamos a tratar con 30:

| Gallinas | Conejos | Patas |
|---|---|---|
| 30 | 20 | 140 |

¡Ya tenemos la solución!

Sí, de hecho, tenemos la solución, porque los números dados, 50 y 140, son relativamente pequeños y simples. Sin embargo, si el problema, propuesto con la misma redacción, tenía un número más grande o más complicado, necesitamos más ensayos para resolverlo de esta manera.

(2) Idea Brillante (o *"idea feliz"*). Por supuesto, nuestro pequeño problema se puede resolver menos "empíricamente" y más "deductivamente", quiero decir, con menos ensayos, menos conjeturas, y más razonamiento. Aquí hay otra solución.

Supongamos algo extraordinario: Cada gallina está de pie sobre una pata y cada conejo está de pie sobre sus patas traseras.

En esta extraordinaria situación sólo la mitad de las patas se utilizan, es decir, 70 patas. En este número 70 la cabeza de una gallina se cuenta sólo una vez, pero la cabeza de un conejo se cuenta dos veces. Quita de 70 el número de todas las cabezas, que es de 50, sigue habiendo el número de cabezas de conejo, hay

$$70 - 50 = 20$$

20 conejos. Y, por supuesto, 30 gallinas.

Esta solución podría funcionar igual si los números en nuestro pequeño problema (50 y 140) fueran remplazados por números menos simples. Esta solución es genial: se necesita una clara comprensión intuitiva de la situación, un poco de una brillante idea.

(3) Mediante el álgebra. Podemos resolver nuestro problema simple sin tener que depender de la suerte, y resolverlo de forma sistemática, si sabemos un poco de álgebra.

El álgebra es un lenguaje que no consiste de palabras, sino de símbolos.

De este modo, seguimos el precepto del esquema cartesiano: "reducir cualquier tipo de problema a un problema de álgebra." En nuestro caso, la traducción es fácil.

Plantear el Problema

| Lenguaje común | Lenguaje algebraico |
|---|---|
| Un granjero tiene: | |
| un cierto número de gallinas | $x$ |
| y un cierto número de conejos | $y$ |
| Estos animales tienen cincuenta cabezas | $x + y = 50$ |
| y ciento cuarenta patas | $2x + 4y = 140$ |

Hemos traducido la cuestión propuesta en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $x$ y $y$. Muy poco conocimiento de álgebra se necesita para resolver este sistema: volver a escribirlo en la forma

$$x + 2y = 70$$

$$x + y = 50$$

y restando la segunda ecuación de la primera obtenemos $y = 20$

sustituyendo en la segunda ecuación del sistema, que $x = 30$

(4) Generalización. Es aún más ilustrativo para sustituir las letras por los números dados.

Sustituir $h$ por 50 y $f$ por 140 en nuestro problema. Es decir, que $h$ representa el número de cabezas, y $f$ el número de patas, de los animales del granjero. Por esta sustitución, el problema adquiere una nueva apariencia, vamos a considerar también la traducción al lenguaje algebraico.

| | |
|---|---|
| Un granjero tiene: | |
| un cierto número de gallinas | $x$ |
| y un cierto número de conejos | $y$ |

Estos animales tienen $h$ cabezas $\quad x + y = h$

y $f$ patas $\quad 2x + 4y = f$

El sistema de dos ecuaciones que hemos obtenido puede ser reescrito en la forma

$$x + 2y = \frac{f}{2}$$

$$x + y = h$$

y por sustracción,

$$y = \frac{f}{2} - h$$

Vamos a volver a traducir esta fórmula en el lenguaje común: el número de conejos es igual a la mitad del número de patas, menos el número de cabezas". Este es el resultado de la solución imaginaria (2).

Este paso es ciertamente simple, pero es un paso importante de generalización.

(5) Comparación. Puede ser ilustrativo comparar los diferentes enfoques del mismo problema. Mirando hacia atrás en los cuatro enfoques anteriores, podemos observar que cada uno de ellos, incluso la primera, tiene algún mérito, algún interés específico.

El primer procedimiento que hemos caracterizado como "tanteo" se describe generalmente como una solución por ensayo y error.

De hecho, se trata de una serie de pruebas, cada una de las cuales trata de corregir el error cometido por el anterior y, en general, los errores disminuyen a medida que avancemos y los sucesivos ensayos se acercan más y más al resultado final deseado. En cuanto a este aspecto del procedimiento, es posible que desee una mejor caracterización que simplemente "ensayo y error", se puede hablar de "pruebas sucesivas" o "correcciones sucesivas" o "aproximaciones sucesivas".

El término método de aproximaciones sucesivas, naturalmente, se aplica a una amplia variedad de procedimientos en todos los niveles. Por lo tanto, el profesor no debe desanimar a sus alumnos del uso de "prueba y error", por el contrario, debe fomentar el uso inteligente de los métodos fundamentales de las aproximaciones sucesivas. Sin embargo, debe mostrar de manera convincente que para problemas tan simples como el de las gallinas y los conejos, y en muchas más situaciones (y más importantes), el álgebra sencilla es más eficiente que las aproximaciones sucesivas.

## 2.2. La creación de ecuaciones

En la sección anterior, tradujimos un problema propuesto del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. En nuestro ejemplo, la traducción era obvia, sin embargo; hay casos cuando la traducción de este problema en un sistema de ecuaciones demanda más experiencia, o más ingenio, o más trabajo. Polya recuerda las reglas de Descartes contenidas en su libro “Reglas para la Dirección del Espíritu”.

(I) Después de haber comprendido bien el problema, este se reduce a la determinación de ciertas cantidades desconocidas (Reglas XIII-XVI).

Después de haber entendido el problema como un todo, dirigimos nuestra atención a sus partes principales. Debemos ver con mucha claridad ¿Qué tipo de cosas tenemos que encontrar? (la incógnita o incógnitas) ¿Qué cosas se dan? (los datos), es decir ¿Cómo las incógnitas y los datos están conectados entre sí?

Siguiendo a Descartes, ahora nos limitamos a problemas en los que las incógnitas son las cantidades (es decir, números, pero no necesariamente enteros).

(2) Estudie el problema de la manera más natural, tomándolo como resuelto y visualice el orden adecuado de todas las relaciones que debe mantener entre las incógnitas y los datos de acuerdo a la condición (Regla XVII).

Nos imaginamos que las cantidades desconocidas tienen valores que satisfacen plenamente las condiciones del problema: esto significa esencialmente "tomar el problema como resuelto" sección 1.4. En consecuencia, tratamos las incógnitas y las cantidades dadas en plano de igualdad en algunos aspectos, podemos visualizar las conexiones por relaciones como la condición requerida. Esto es lo que a muchas personas les cuesta trabajo imaginar.

(3) Separar una parte de la condición según se pueda expresar la misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Eventualmente, debemos dividir la condición en tantas partes y así obtener un sistema con tantas ecuaciones, como incógnitas haya (regla XIX).

Lo anterior es una traducción libre, de la declaración de la Regla XIX de Descartes.

El objetivo se establece con suficiente claridad: debemos obtener un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas. Se entiende que el cálculo de estas incógnitas debería resolver el problema propuesto. Por lo tanto, con el fin de establecer las $n$ ecuaciones debemos dividir la condición en $n$ partes. Pero, ¿cómo?

Las consideraciones anteriores en (1) y (2) (que describen muy superficialmente las Reglas de Descartes XIII-XVII) dan algunas indicaciones, pero no hay instrucciones precisas. Ciertamente, tenemos que entender el problema, tenemos que ver las incógnitas, los datos, y la condición muy claramente.

Podemos sacar provecho del estudio de las distintas cláusulas de la condición y visualizar las relaciones entre las incógnitas y los datos. Todas estas actividades nos dan la oportunidad de obtener el sistema de ecuaciones que desee, pero no con certeza.

El consejo que estamos considerando (la paráfrasis de la regla XIX) hace hincapié en un punto adicional: a fin de obtener una ecuación tenemos que expresar la misma cantidad de dos maneras diferentes.

En resumen, hay algunas buenas sugerencias, pero no hay ninguna regla infalible para la creación de las ecuaciones. Sin embargo, la práctica puede ayudar.

(4) Reducir el sistema de ecuaciones a una ecuación (regla XXI)

La afirmación de Descartes de la regla XXI que aquí parafraseamos no es seguida por una explicación (de hecho, es la última frase de Descartes en su manuscrito). No vamos a examinar aquí en qué condiciones un sistema de ecuaciones algebraicas se puede reducir a una sola ecuación o cómo tal reducción puede ser realizada, estas cuestiones pertenecen a una teoría puramente matemática, que es más complicada que el consejo breve de Descartes. Muy poco de álgebra será suficiente para llevar a cabo la reducción de los casos sencillos en los cuales se necesite.

### 2.3. Ejemplos de clase

Los "problemas de palabras" de nivel secundaria son triviales para los matemáticos, mas no para los alumnos y maestros. Creo sin embargo; que un maestro que hace un esfuerzo serio para llevar el consejo de Descartes (3) hasta el nivel del aula y lo lleva a la práctica, evitará muchas de las dificultades al resolver dichos problemas.

El estudiante no debe comenzar a hacer un problema antes de que lo haya entendido. Se puede comprobar hasta cierto punto, si el alumno ha comprendido realmente el problema: debe ser capaz de repetir el planteamiento del problema, señalar las incógnitas y los datos y explicar la situación con sus propias palabras. Si puede hacer todo esto bastante bien, se puede proceder a la actividad principal.

Una ecuación expresa una parte de la condición. El estudiante debe ser capaz de encontrar la parte de la condición que se expresa mediante una ecuación que lleva adelante y qué parte no está expresada. Una ecuación expresa la misma cantidad de dos maneras diferentes. El estudiante debe ser capaz de decir qué cantidad ha sido expresada. Por supuesto, el alumno debe poseer el conocimiento pertinente, sin el cual no podrá comprender el problema. En el nivel secundaria los problemas más comunes son "los problemas de razones" (ver los siguientes tres ejemplos). Antes de ser llamado a resolver un problema, el estudiante debe adquirir en alguna forma la idea de "razón", proporcionalidad y cambio uniforme.

(I) Una llave puede llenar de agua un tanque en 15 minutos, otra llave; en 20 minutos, una tercera llave en 30. Con las tres llaves abiertas, ¿cuánto tiempo se tarda en llenar el tanque vacío?

Supongamos que el tanque contiene $g$ galones de agua cuando está lleno.

Entonces la tasa o razón de flujo a través de la primera llave es

$$\frac{g}{15}$$

galones por minuto. Puesto que $cantidad = razón \times tiempo$

la cantidad de agua que fluye a través de la primera llave en cuestión de $t$ minutos es

$$\frac{g}{15}t$$

Si las tres llaves juntas llenan el tanque vacío en cuestión de $t$ minutos, la cantidad de agua en el tanque lleno se puede expresar de dos maneras:

$$\frac{g}{15}t + \frac{g}{20}t + \frac{g}{30}t = g$$

La parte izquierda muestra la contribución de cada llave por separado, la parte derecha el resultado conjunto de estas tres contribuciones. Dividiendo entre $g$ se obtiene la ecuación para el $t$ necesario:

$$\frac{t}{15} + \frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$$

Por supuesto, la derivación de la ecuación puede ser presentada de manera diferente y el problema en sí mismo podría ser generalizado y modificado de varias maneras.

(2) Tomás puede hacer un trabajo en 3 horas, David en 4 horas, y Hugo en 6 horas. Si lo hacen juntos (sin que se estorben entre sí), ¿cuánto tiempo les toma hacer el trabajo?

Tomás puede hacer $\frac{1}{3}$ de todo el trabajo en una hora, también se puede decir que Tomás está trabajando a un ritmo de $\frac{1}{3}$ del trabajo por hora. Por lo tanto, en t horas Tomás hace $t$ / 3 del trabajo. Si los tres chicos trabajan juntos y terminan la obra en $t$ horas, la cantidad total de trabajo se puede expresar de dos maneras:

$$\frac{t}{3} + \frac{t}{4} + \frac{t}{6} = 1$$

de hecho, el que en el lado derecho corresponde a "un trabajo completo."

Este problema es casi idéntico al anterior (I), aunque numéricamente desde

$$15:20:30 = 3:4:6$$

Es ilustrativo formular una generalización común de ambos problemas (usando literales). También es ilustrativo comparar las soluciones y sopesar las ventajas y desventajas de la introducción de $g$ la cantidad en la solución (I).

(3) Un avión que lleva combustible para cuatro horas de vuelo seguro, vuela a una velocidad de 220 millas por hora en aire quieto. Si vuela contra un viento de 20 millas por hora, ¿Qué distancia puede viajar de manera segura (ida y regreso)?

Se entiende que el viento sopla con una intensidad sin cambios durante todo el vuelo, el avión que viaja en línea recta, el tiempo necesario para cambiar de dirección en el punto más alejado es insignificante, y así sucesivamente. Todos los problemas contienen palabras y suposiciones simplificadoras no declaradas, que el solucionador de problemas debe identificar, es un trabajo preliminar de interpretación y abstracción. Esta es una característica esencial de los problemas de palabras que no siempre es trivial, y debe ser traído a la luz, por lo menos de vez en cuando, por ejemplo son clásicos los problemas de cruzar un río con algunas pertenencias (gallina, maíz y un lobo), el solucionador debe suponer que el ancho del río no importa, ni la velocidad de la corriente.

El problema (3) se vuelve más instructivo si en lugar de los números

$$220 \qquad 20 \qquad 4$$

concretos sustituimos por cantidades generales

$$v \qquad w \qquad T$$

que denotan la velocidad del avión en el aire inmóvil, la velocidad del viento, y el tiempo total de vuelo, respectivamente, estas tres cantidades son los datos.

Sea $x$ la distancia recorrida en una sola dirección, $t_1$ la duración del vuelo de salida, $t_2$ la duración del vuelo de regreso, estas tres cantidades son incógnitas. Es útil para mostrar algunas de estas cantidades:

| | Ida | Regreso |
|---|---|---|
| Distancia | $x$ | $x$ |
| Tiempo | $t_1$ | $t_2$ |
| Velocidad | $v-w$ | $v+w$ |

Ahora, como sabemos,

$$Distancia = \ velocidad \ \times \ tiempo$$

Expresamos cada una de las siguientes tres cantidades de dos maneras:

$$x = (v-w)t_1$$

$$x = (v+w)t_2$$

$$t_1 + t_2 = T$$

Aquí tenemos un sistema de tres ecuaciones para las tres incógnitas $x$, $t_1$ y $t_2$. De hecho, sólo $x$ fue requerida por el problema propuesto, $t_1$ y $t_2$ son incógnitas auxiliares que se han introducido con el fin de expresar claramente la condición de todo. Eliminando encontramos $t_1$ y $t_2$

$$\frac{x}{v-w}+\frac{x}{v+w}=T$$

y por lo tanto

$$x=\frac{(v^2-w^2)T}{2v}$$

No hay ninguna dificultad en sustituir los valores numéricos de los datos $v, w$, y $T$.

Si $w = 0$, entonces $2x = vT$.

Si $w = v$, entonces $x = 0$. En contra de un viento con velocidad $v$, el avión no puede ponerse en marcha.

Si aumenta el valor de $w$, $w = 0$ para el valor $w = v$, $x$ disminuye de forma constante, de acuerdo con la fórmula. Y así, una vez más, la fórmula está de acuerdo con lo que podemos prever sin ningún tipo de álgebra, sólo mediante la visualización de la situación.

Trabajar con datos numéricos en lugar de los datos generales (letras) nos habríamos perdido esta discusión instructiva de la fórmula y los controles valiosos de nuestro resultado.

(4) Un comerciante tiene dos tipos de nueces, unas cuestan 90 pesos el kilo, y otras 60 pesos el kilo. Él desea hacer 50 kilos de una mezcla que venderá a 72 pesos el kilo. ¿Cuántos kilos de cada nuez deberá usar?

Esto es típico, un simple "problema de mezclas." Digamos que el comerciante utiliza $x$ kilos de nueces de la primera clase, y $y$ kilos de la segunda clase, $x$ y $y$ son las incógnitas. Podemos estudiar convenientemente las incógnitas y los datos mediante la matriz:

| | Primera Clase | Segunda Clase | Mezcla |
|---|---|---|---|
| Precio por kilo | 90 | 60 | 72 |
| Peso | $x$ | $y$ | 50 |

Expresar de dos maneras el peso total de la mezcla:

$x + y = 50$ (kilos)

Luego expresa de dos maneras el precio total de la mezcla:

$90x + 60y = 72 \cdot 50$ (precio x kilo )

Tenemos aquí un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas $x$ y $y$. Dejamos la solución para el lector, que no debería tener problemas en la búsqueda de los valores.

$$x = 20, \;\; y = 30$$

Otro problema similar sería:

¿Cuántos litros de leche al 1% de grasa se deben mezclar con crema al 15% de grasa para tener 5 litros de una mezcla que tenga 3% de grasa?

### 2.4. Ejemplos de la geometría

Vamos a discutir sólo dos ejemplos.

(1) Un problema de construcción geométrica. Es posible reducir cualquier problema de la construcción geométrica a un problema de álgebra. No podemos tratar aquí la teoría general de tal reducción, pero he aquí un ejemplo.

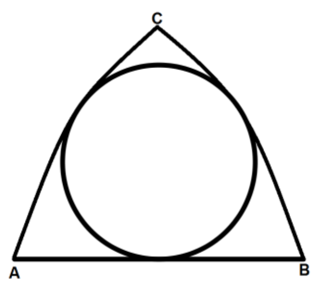



**Fig. 2.1** Desde una ventana gótica

*Una zona triangular está delimitada por una línea recta $AB$ y dos arcos, $AC$ y $BC$. El centro de un círculo es $A$, la de la otra es $B$, y cada círculo pasa por el centro de la otra. Inscribir en esta área triangular un círculo tocando las tres líneas del contorno.*

Obviamente, podemos reducir el problema a la construcción de un punto: el centro del círculo requerido. Un lugar para este punto: La mediatriz del segmento $AB$, que es un eje de simetría de la zona dada triangular. Y lo que queda por encontrar es otro lugar geométrico.

Mantenga sólo una parte de la condición, y elimine la otra parte (momentáneamente). Consideramos un círculo (variable) tocando sólo dos líneas de la frontera: la línea recta $AB$ y $AC$ arco, ver fig. 2.2. Con el fin de encontrar el lugar del centro de este círculo, se utiliza la geometría analítica. Dejemos que el origen de nuestro sistema de coordenadas rectangulares coincida con el punto $A$, y que el eje $x$ pase por el punto $B$, ver fig. 2.2. Si $x$ y $y$ denotan las coordenadas del centro del círculo. Unimos este centro a los dos puntos esenciales de contacto, uno con la línea recta $AB$, y el otro con el arco $BC$, ver fig. 2.2. Los dos radios tienen la misma longitud, por tanto, se puede expresar de dos maneras diferentes (sea $AB = a$):

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al deshacerse la raíz cuadrada, podemos transformar esta ecuación en

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

Y así, el lugar geométrico del centro del círculo es una parábola.

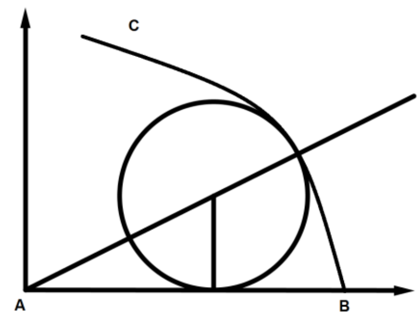



Fig. 2.2. Hemos dejado una parte de la condición.

Sin embargo, el lugar mencionado al principio, la mediatriz de $AB$, tiene la ecuación

$$x = \frac{a}{2}$$

que, junto con la ecuación de la parábola, los rendimientos de la ordenada del centro del círculo deseado.

$$y = \frac{3a}{8}$$

y esta ordenada es fácil de construir a partir de la longitud dada $a = AB$.

(2) El análogo del teorema de Pitágoras en geometría sólida. La analogía no es única. Hay varios hechos de la geometría sólida, que pueden ser consideradas adecuadamente como el análogo a la proposición de Pitágoras.

Si consideramos un cubo como el análogo al cuadrado y un tetraedro que se obtiene al cortar una esquina del cubo por un plano oblicuo como análogo a un triángulo rectángulo (que se obtiene al cortar una esquina de un cuadrado por una línea recta oblicua). El vértice con el ángulo recto corresponde al vértice del tetraedro que vamos a llamar un vértice trirectangular. De hecho, las tres aristas del tetraedro a partir de este vértice son perpendiculares entre sí, formando tres ángulos rectos.

El teorema de Pitágoras resuelve el problema siguiente: En un triángulo rectangular que tiene un vértice $O$, se dan las longitudes $a$ y $b$ de las dos partes que se encuentran en $O$. Encontrar la longitud $c$ al lado opuesto $O$, es decir

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Polya propone el siguiente problema: En un tetraedro que posee un vértice trirectangular $O$, son dadas las áreas $A, B$ y $C$ de tres caras que se reúnen en $O$. Encuentre el área $D$ de la cara opuesta $O$. Estamos obligados a expresar $D$ en términos de $A, B$ y $C$. Es natural esperar una fórmula análoga al del teorema de Pitágoras. Un alumno puede conjeturar (adivinar) que:

$$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$$

Esta es una conjetura inteligente, el cambio en el exponente corresponde perfectamente a la transición de 2 a 3 dimensiones.

(3) ¿Cuál es la incógnita? -El área de un triángulo, $D$.

¿Cómo se puede encontrar tal incógnita? ¿Cómo puede obtener este tipo de cosas? -El área de un triángulo se puede calcular si los tres lados son conocidos, por la fórmula de Herón. El área de nuestro triángulo es $D$. Sean $a, b$, y $c$ denotan las longitudes de los lados,

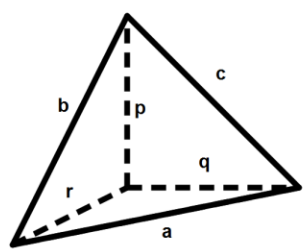



Fig. 2.3. Pitágoras en el espacio.

y sea $s = (a + b + c) / 2$, entonces

$$D^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

(Esta es conocida como la fórmula de Herón) Vamos a etiquetar los lados de $D$ en la fig. 2.3.

¡Muy bien! ¿Pero los lados $a, b$ y $c$ son conocidos? -No, pero están en triángulos rectángulos, y si los catetos en estos triángulos rectángulos se conocen (con la etiqueta $p, q, r$ en la Fig. 2.3.), podemos expresar $a, b, c$:

$$a^2 = q^2 + r^2, \quad b^2 = r^2 + p^2, \quad c^2 = p^2 + q^2$$

Eso es bueno, pero ¿son $p$, $q$ y $r$ conocidos? - No, pero están conectados con los datos, las áreas $A, B$ y $C$:

$\frac{1}{2}qr = A, \qquad \frac{1}{2}rp = B, \qquad \frac{1}{2}pq = C$ (Áreas)

Esto es correcto, pero ¿lograste algo útil? -Creo que sí. Ahora tiene 7 incógnitas

$$D$$

$$a, \ b \ \ c$$

$$p, \ q, \ r$$

también un sistema de 7 ecuaciones para determinarlas.

(4) No hay nada malo con nuestro razonamiento anterior, en virtud de (3).

Hemos alcanzado el objetivo establecido por la Regla de Descartes. Hemos obtenido un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. Hay sólo una cosa: el número 7 puede parecer muy alto, para resolver ecuaciones con siete incógnitas puede parecer demasiado complicado.

Y la fórmula de Herón no parece demasiado atractiva en este caso. Si nos sentimos así, pueden preferir un nuevo comienzo. ¿Cuál es la incógnita? -El área de un triángulo, $D$.

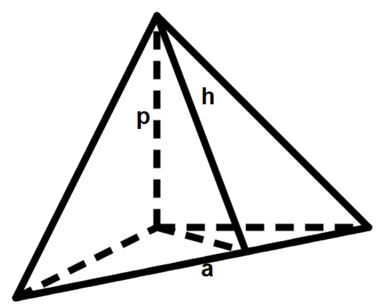



**Fig. 2.4. Un nuevo punto de partida.**

¿Cómo se puede encontrar esta clase de incógnita? ¿Cómo puede obtener este tipo de cosas? - La forma más familiar para calcular el área de un triángulo es

$$D = \frac{ah}{2}$$

donde $a$ es la base y la altura $h$, del triángulo con el área $D$, vamos a introducir $h$ en la figura. Ver fig. 2.4.

Sí, hemos visto $a$ antes, pero ¿qué pasa con $h$? -La altura $h$ del triángulo con el área $D$ se puede calcular a partir de un triángulo adecuado, eso espero. De hecho, se cruza el tetraedro con un plano que pasa a través de $h$ y del vértice trirectangular. La intersección es un ángulo recto, la hipotenusa es $h$, uno de sus catetos es p como vimos antes, y el otro cateto digamos $k$, es la altura perpendicular a un lado $a$ en el triángulo con el área $A$.

Por lo tanto,

$$h^2 = k^2 + p^2$$

¡Muy bien! Sin embargo ¿qué pasa con $k$? -La podemos conseguir de alguna manera. De hecho, expresar el área del triángulo en el que, como acabo de decir, $k$ es una altura de dos maneras diferentes:

$$\frac{1}{2}ak = A$$

Permítanme combinar lo que está delante de mí:

$$\begin{aligned} 4D^2 &= a^2h^2 \\ &= a^2(k^2 + p^2) \\ &= 4A^2 + a^2p^2 \\ &= 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 \\ &= 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2 \\ &= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 \end{aligned}$$

Unamos el principio y el fin y eliminemos el factor cuatro. Aquí está:

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Este resultado es, de hecho, muy cercano al teorema de Pitágoras. Supongo que con el exponente 3 era inteligente - que resultó mal, pero esto no es sorprendente. Lo que es sorprendente es que la conjetura se acercó tanto a la verdad.

Puede ser muy ilustrativo comparar los dos métodos anteriores para el mismo problema, ellos difieren en varios aspectos.

## 2.5. Ejemplo de un rompecabezas

¿Cómo puede usted hacer dos cuadrados de cinco? Fig. 2.5 muestra una hoja de papel que tiene la forma de una cruz, que está formada por cinco cuadrados iguales.

Cortar esta hoja a lo largo de una línea recta en dos partes, a continuación, cortar una de las piezas a lo largo de otra línea recta de nuevo en dos, de modo que las resultantes tres piezas, equipadas convenientemente juntas, forman dos cuadrados yuxtapuestos.

La cruz de la figura 2.5 es altamente simétrica (que tiene un centro de simetría y cuatro líneas de simetría). Los dos cuadrados yuxtapuestos formando un rectángulo cuya longitud es el doble del ancho. Se entiende que las tres piezas en las que se divide la cruz debe llenar este rectángulo sin superponerse.

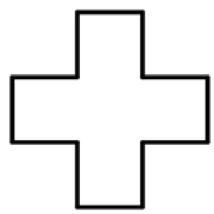


Fig. 2.5. ¿Dos de cinco?

¿Podría solucionar parte del problema? El área del rectángulo deseado es igual a la superficie de la cruz dada y por lo que es igual a $5a^2$ si $a$ denota el lado de uno de los cinco cuadrados que forman la cruz. Sin embargo, después de haber obtenido su área, también podemos encontrar los lados del rectángulo. Sea $x$ el largo del rectángulo, a continuación, su ancho es $x/2$. Expresar el área del rectángulo en dos formas diferentes, obtenemos

$$x \cdot \frac{x}{2} = 5a^2$$

ó

$$x^2 = 10a^2$$

de la que podemos encontrar ambos lados del rectángulo.

Ahora tenemos suficiente información sobre el rectángulo, su forma y tamaño, pero el enigma propuesto todavía no está resuelto: todavía tenemos que encontrar los dos cortes en la cruz. Sin embargo, la expresión de $x$ obtenido anteriormente puede dar una pista, sobre todo si lo escribimos en esta forma:

$$x^2 = 9a^2 + a^2$$

Con esta indicación, dejo la solución para el lector.

Podemos derivar algunas sugerencias útiles del tratamiento anterior del rompecabezas. Primero, muestra que el álgebra puede ser útil incluso cuando no se puede resolver el problema por completo: se puede resolver una parte del problema y la solución de esa parte puede facilitar el trabajo restante.

En segundo lugar, el procedimiento que hemos empleado nos puede impresionar con su peculiar patrón de expansión. En primer lugar, hemos obtenido sólo una pequeña parte de la solución: el área del rectángulo deseado. Ahora, estamos tratando de utilizar la parte más grande para obtener una parte aún más grande que podemos usar después, así lo esperamos, para obtener la solución completa.

### 2.6. Ejemplos desconcertantes

Los problemas que hemos visto hasta ahora en este capítulo son "razonables". Nos inclinamos a considerar un problema como razonable si su solución es determinada de manera única. Si estamos seriamente preocupados con nuestro problema, queremos saber (o adivinar) lo más pronto posible si es razonable o no. Y así, desde el principio, nos podemos preguntar: ¿Es posible cumplir la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

(I) Un hombre caminó cinco horas, primero a lo largo de un camino llano, y luego subió una colina, y luego dio media vuelta y regresó a su punto de partida por el mismo camino.

Él camino a 4 millas por hora a nivel, 3 millas por hora colina arriba y 6 millas por hora colina abajo. Encontrar la distancia recorrida.
¿Es un problema razonable? ¿Son los datos suficientes para determinar la incógnita?

Los datos parecen ser insuficientes: alguna información acerca de la extensión de la ruta a desnivel parece ser vaga. Si supiéramos cuánto tiempo el hombre pasaba caminando cuesta arriba, o cuesta abajo, no habría ninguna dificultad. Sin embargo, sin esa información el problema parece indeterminado.

Sin embargo, vamos a tratar. Sea $x$ la distancia total recorrida, $y$ la longitud de la caminata cuesta arriba. La caminata de cuatro fases diferentes: a nivel, cuesta arriba, cuesta abajo, a nivel.

Ahora es fácil expresar el tiempo total empleado en caminar en dos formas diferentes:

$$\frac{{}^{x}/{2} - y}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{{}^{x}/{2} - y}{4} = 5$$

Sólo una ecuación entre dos incógnitas, no es suficiente. Sin embargo, el momento de recoger los términos, el coeficiente de $y$ resulta ser 0, y permanece allí

$$\frac{x}{4} = 5$$

$$x = 20$$

Y que los datos son suficientes para determinar $x$, la incógnita sólo requiere la declaración del problema. Por lo tanto, después de todo, el problema no es indeterminado: nos equivocamos.

(2) Nos equivocamos, no se puede negar, pero sospechamos que el autor del problema se esforzó por engañarnos por una decisión difícil de los números 3, 6, y 4. Para llegar a la parte inferior de su truco, vamos a sustituir a los números

$$3, \qquad 6, \qquad 4$$

las letras

$$u, \qquad v, \qquad w$$

representan el ritmo de la caminata

cuesta arriba, cuesta abajo, a nivel,

respectivamente. Tenemos que volver a leer el problema, con las literales indicadas, y luego representamos el tiempo total empleado en caminar en dos formas diferentes, usando las letras apropiadas:

$$\frac{x/2 - y}{w} + \frac{y}{u} + \frac{y}{v} + \frac{x/2 - y}{w} = 5$$

ó

$$\frac{x}{y} + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{w}\right) y = 5$$

No podemos determinar $x$ en esta ecuación, a menos que el coeficiente de $y$ se desvanezca. Y así, el problema es indeterminado, a menos que

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)$$

Sin embargo, si los tres tipos de caminata son elegidos al azar, que no se ajusten a esta relación, por lo que el problema es indeterminado.

(Podemos expresar la relación crítica también por la fórmula

$$w = \frac{2uv}{u + v}$$

o diciendo que el ritmo en el nivel de la media armónica es el ritmo ascendente y el ritmo descendente).

*(3) Dos círculos más pequeños son exteriores uno al otro, pero interiores al tercer círculo, más grande. Cada uno de estos tres círculos es tangente a los otros dos y sus centros están en la misma línea recta. Dado $r$, el radio del círculo mayor, y $T$, parte de la tangente a los dos círculos más pequeños en su punto en común que se encuentra dentro del círculo mayor. Encuentra el área que está dentro del círculo más grande, pero fuera de los dos círculos más pequeños. Ver fig. 2.6.*

*¿Es un problema razonable? ¿Son los datos suficientes para determinar la incógnita? ¿O no son suficientes? ¿O redundante?*

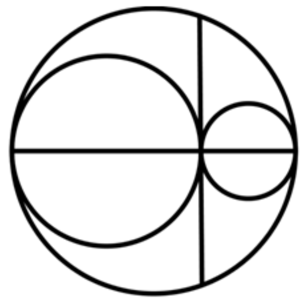


Fig. 2.6. Dos datos

El problema parece perfectamente razonable. Para determinar la configuración de los tres círculos, es a la vez necesaria y suficiente para conocer los radios de los dos círculos más pequeños, y dos datos independientes será igual de bueno. Ahora bien, dado $r$ y $t$ son obviamente independientes: se puede variar sin cambiar una por otra (a excepción de la desigualdad $t \leq 2r$ que podemos dar por satisfecha). Sí, los dos datos $r$ y $t$ parecen ser justo lo suficiente.

Por lo tanto, vamos a colocar manos a la obra. Deje el soporte $A$ para el área requerida, $x$ y $y$ para los radios de los dos círculos más pequeños. Visiblemente

$$A = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2$$

$$2r = 2x + 2y$$

Aquí tenemos dos ecuaciones correspondientes a las tres incógnitas, A, $x$ y $y$. Con el fin de obtener una tercera ecuación, considere el triángulo rectángulo inscrito en el círculo más grande, la base de lo que pasa a través de los tres centros y el vértice opuesto, que es uno de los extremos del segmento $t$. La altura de este triángulo, elaborado desde el vértice del ángulo recto, es $t/2$; esta altura es una media proporcional (Euclides VI 13):

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2x \cdot 2y$$

Ahora tenemos tres ecuaciones. Reescribimos las dos últimas:

$$(x + y)^2 = r^2$$

$$2xy = \frac{t^2}{8}$$

La sustracción produce $x^2 + y^2$, y la sustitución en la ecuación primera

$$A = \frac{\pi t^2}{8}$$

Los datos resultaron ser redundantes: de los dos datos, $t$ y $r$, sólo el primero es el que realmente se necesita, el segundo no. Nos equivocamos otra vez. La curiosa relación del ejemplo que acabamos de mencionar fue observado por Arquímedes, ver sus obras editadas por T. L. Heath. Ver Nelsen Visual Proofs, donde presenta una demostración diferente a la anterior.

## EJEMPLOS ADICIONALES

1.- **NÚMEROS Y DÍGITOS:** Hallar todos los números de dos cifras tales que el número sea igual a la suma de sus dígitos mas el producto de sus dígitos.

SOLUCIÓN:

Supongamos que de entrada el alumno no entiende claramente el enunciado

¿Cuáles son los datos?
¿Cuál es la condición?
¿Qué es lo que quiero? Números de 2 dígitos que cumplan cierta condición en base a sus dígitos.

Tome algunos ejemplos

25 = 2+5+ (2*5) no se cumple la igualdad porque el lado derecho es 17

24= 2+4+ (2*4) no se cumple la igualdad, el lado derecho es 14

$24_{b10}$ = 20 +4
El maestro puede recordar al alumno que al hablar de dígitos se entiende que son en base 10, por ejemplo 1987=1000+900+80+7 en nuestro caso, un número de dos dígitos
$ab = 10a + b$

Por ensayo y error encontramos 19 = 1+9 + (1x9) Si… también el 29

Son los números terminados en 9 (ya encontró el patrón)

Entonces la condición la puedo expresar como $ab = 10a + b = a + b + (a * b)$
Con $a, b$ dígitos es decir $a, b \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Esto me lleva a la solución
$ab = 10a + b = a + b + (a * b)$ Simplificando

$$10a + b = a + b + (a * b)$$
$$= 10a = a + (a * b)$$

Es decir $9a = a * b$ podemos escribir $9a - a * b = 0$
Finalmente $a\,(9 - a) = 0$ observar que $a$ no puede ser cero, por que entonces $ab$ no seria de dos dígitos, entonces sólo queda $9 - b = 0$, es decir la solución son todos los números de dos dígitos que terminan en 9.
Hay otros problemas semejantes, los podemos llamar “alteración de dígitos”, este nos puede servir de modelo, aunque tengo dos variables, $a, b$ no puedo despejar, pero tengo siempre que condición cumplir $a$ y $b$ son dígitos.

2.- **EL METRO TRAMPOSO:** Un vendedor de Telas gana un 50% sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 55% ¿Cuánto mide en realidad el metro defectuoso? Es decir gana un 5% extra haciendo trampa.

SOLUCIÓN:

Supongamos y sin pérdida de generalidad que a cada metro le asignamos una unidad ($), es decir, si el comerciante vende $100m$ de tela va a tener una ganancia de 100 unidades de dinero ($). Es como si tuviera

$100m + 50m = 150$ --------- (1)  esto es cuando el metro es justo.

Ahora bien, si ocupa su otro metro "defectuoso" para los mismos $100m$, entonces tendríamos que su ganancia son 55 unidades ($) y se tiene que

$100m + 55m' = 155m'$--------- (2)

Como asignamos un valor ($) a cada metro, tenemos de (1) y (2)

$$150m = 155m'$$

por lo tanto
$$m' = \frac{150m}{155}$$

$$m' = .9677m$$

$$m' = 96.77cm$$

3.- ¿Cuántos litros de leche con 1% de grasa se deben de mezclar con crema al 15% de grasa para tener 5 litros de leche que tenga 3% de grasa?

SOLUCIÓN:

Sea $L$ los litros de leche y $C$ los litros de crema

$$i)\ L + C = 5 \ \Rightarrow \ L = 5 - C$$

$$ii)\ .01L + .15C = 5(.03) = 0.15$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$.01L + .15C = 0.15$$

$$.01(5 - C) + .15C = 0.15$$

$$\Rightarrow .05 - .01C + .15C = 0.15$$

$$\Rightarrow .14C = 0.15 - .05$$

$$\Rightarrow .14C = 0.15 - .05$$

$$\Rightarrow C = \frac{.1}{.14}$$

$$\Rightarrow C = 0.714285714$$

Sustituyendo en $i)$ $L = 5 - C$ obtenemos

$$L = 5 - 0.714285714$$

$$\Rightarrow L = 4.28571428$$

$\therefore$ se necesitan $4.28571428$ litros de leche para obtener una mezcla que tenga 3% de grasa.

4.- **LAS VACAS**: En cinco días cuatro vacas negras y tres cafés dan tanta leche como tres vacas negras y cinco cafés dan en cinco días. ¿Cuáles vacas dan más leche, las negras o las cafés?

SOLUCIÓN:

Llamemos $x$ y $y$ a las cantidades diarias de leche que dan las vacas negras y cafés respectivamente.

Tenemos entonces que:

$$5(4x + 3y) = 4(3x + 5y)$$

$$20x + 15y = 12x + 20y$$

$$8x = 5y$$

Es decir, 8 vacas negras dan la misma cantidad de leche por día, que 5 vacas cafés. Por lo tanto, dan más leche las vacas cafés, observemos que no necesitamos valores para $x$ y $y$, solo suponemos que son positivos.

5.- **LOS DOS BEBEDORES**. Un inglés y un alemán beben de un barril de cerveza por espacio de dos horas, al cabo de las cuales el inglés se queda dormido y el alemán se bebe lo que resta en 2 horas y 48 minutos; pero si el alemán se hubiera dormido en vez del inglés y éste hubiese continuado bebiendo, habría tardado en vaciar el barril 4 horas y 40 minutos. ¿En cuánto tiempo se lo hubiera bebido cada uno?

SOLUCIÓN 1): Alumno Jorge Antonio G. M. (estrategia: variable auxiliar)

Denotemos por $I$ lo que bebe el ingles por hora y por A lo que bebe el alemán por hora. Por espacio de dos horas el inglés y el alemán beben P del barril, donde $0 < P < 1$. Es decir, $2I + 2A = P$--------- (1)

Como el inglés se queda dormido el alemán bebe lo que resta en 2 horas 48min (convertido a fracción de hora es 14/5)

$\frac{14}{5}A = 1 - P$ es decir $A = \frac{5}{14}(1 - P)$---------(2)

$(1 - P)$ es lo que sobra del barril

Si el inglés hubiera seguido bebiendo y el alemán se quedara dormido habría tardado en vaciar el barril 4 horas 40 min (que en fracción de hora es $\frac{14}{3}$). Es decir, $\frac{14}{3}I = 1 - P$ entonces

$I = \frac{3}{14}(1 - P)$ ------------- (3)

Sustituyendo en (1) nos queda

$$2\left(\frac{3}{14}(1-P)\right) + 2\left(\frac{5}{14}(1-P)\right) = P$$

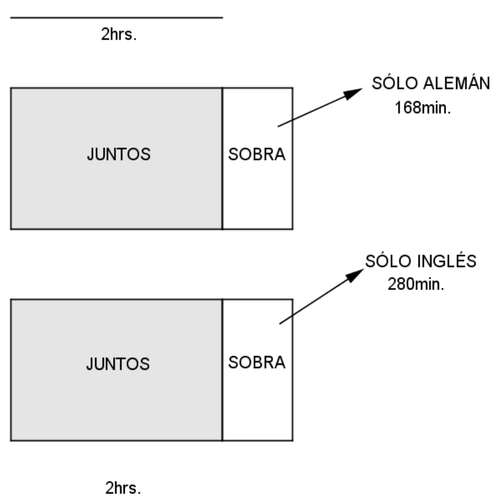
Simplificando y despejando obtenemos $P = \frac{8}{15}$, es decir, juntos tomaron $\frac{8}{15}$ del barril en las dos horas. Sustituyendo P en (2)

$A = \frac{5}{14} - \frac{5}{14}P = \frac{5}{14} - \frac{5}{14}\left(\frac{8}{15}\right)$ Simplificando $A = \frac{1}{6}$

Por lo tanto el alemán toma $\frac{1}{6}$ de barril en una hora, esto es que tardaría 6hrs en tomarse toda la cerveza él solo.

De igual manera si sustituimos $P$ en (3) obtenemos $I = \frac{1}{10}$ esto es que el inglés toma $\frac{1}{10}$ de barril en una hora. Por lo que tarda 10hrs en tomarse toda la cerveza el solo.

SOLUCIÓN 2): Auxiliándonos de un grafico para representar el problema.



Sea $x$ el volumen de cerveza que toma el alemán por minuto, y $y$ el volumen de cerveza que toma el inglés por minuto.

el volumen que sobra el alemán se lo toma en $168x$

el volumen que sobra el inglés se lo toma en $280y$

es decir $168x = 280y$

simplificando nos queda $3x = 5y$ es decir $x = \frac{5}{3}y$

veamos en que tiempo se lo toma el alemán solo,  para lo cúal escribimos

$2x + 2y + (alemán\ solo) = TODO$ sustituyendo y convirtiendo a minutos

$$120x + 120y + 168x = TODO$$

$120x + 120\left(\frac{3}{5}\right) + 168x = TODO$ simplificando nos da

$$360x = TODO$$

Es decir se tardaria 360 minutos en tomarse toda la cerveza el sólo.

Igualmente con el ingles obtenemos que tardaria 600 minutos en tomarse toda la cerveza el sólo.
No importan los valores concreto de $x, y$, solo importa $3x = 5y$ (el aleman bebe más rapido)

SOLUCION 3): Ecuaciones

Sean "$x$" las horas que tarda el inglés en beber todo el barril, "$y$" las horas que tarda el alemán.

Los dos juntos en dos horas habrán bebido 2 $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ parte del barril

En 2 horas y 48 minutos el alemán bebe: $(2 + \frac{4}{5})\ \frac{1}{y}$

En 4 horas y 40 minutos el inglés bebe: $(4 + \frac{2}{3})\ \frac{1}{y}$

$$2\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})\ +\ (2 + \frac{4}{4})\ \frac{1}{y}\ =\ 1$$

$$2\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})\ +\ (4 + \frac{2}{3})\ \frac{1}{x}\ =\ 1$$

Sistema que se resuelve fácilmente tomando como incógnitas $\frac{1}{x} = u$ y $\frac{1}{y} = v$,

$2(u + v) + (2 + \frac{4}{5})v\ =\ 1$

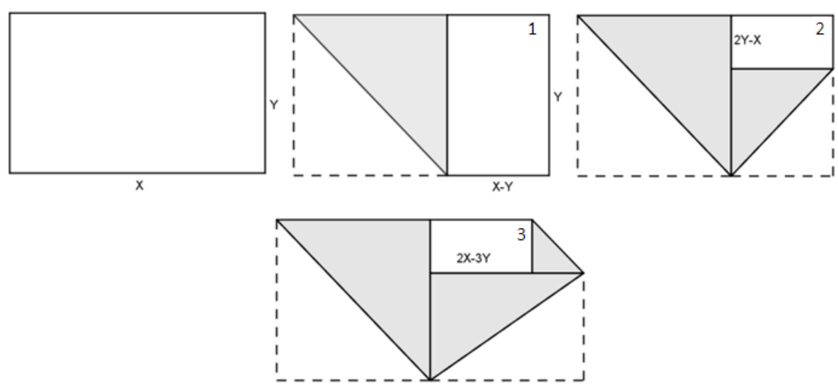
$2(u + v) + (4 + \frac{2}{3})u\ =\ 1$ igualando

$2(u+v)+\left(4+\frac{2}{3}\right)u = 2(u+v)+\left(2+\frac{4}{5}\right)v$ entonces $\left(4+\frac{2}{3}\right)u \ = \ \left(2+\frac{4}{5}\right)v$

de donde $x = 10, y = 6$.
Es decir, el alemán se bebería el barril en 6 horas y el inglés en 10 horas.

**NOTA:** El anterior problema se propuso a estudiantes de tercero de secundaria y nadie lo resolvió correctamente, y nadie aporto alguna idea que pudiera llevar a una solución; por lo tanto no es recomendable para este nivel. El maestro debe buscar problemas con una dificultad adecuada, ni muy fácil ni muy difícil.

6.- **ALGEBRA DOBLANDO PAPEL**: Una hoja rectangular de papel fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:




(Ensaye con una hoja oficio) El rectángulo 1, que quedó de color blanco luego del primer doblez, tiene 20 *cm* más de perímetro que el rectángulo 2, que quedó blanco luego del segundo doblez, y éste a su vez tiene 16 *cm* más de perímetro que el rectángulo 3, que quedó blanco luego del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

SOLUCIÓN:

Perímetro del rectángulo 1

$$P_1 = 2(x-y)+2y$$

$$= 2x$$

Perímetro del rectángulo 2

$$P_2 = 2(2y-x+x-y)$$

$$= 4y-2x+2x-2y)$$

$$= 2y$$

Perímetro del rectángulo 3 $P_3 = 2(2x - 3y + 2y - x)$

$$= 4x - 6y + 4y - 2x)$$

$$= 2x - 2y$$

De esto obtenemos que: $2y + 20 = 2x \;---(1)$

$$2x - 2y = 2y --- (2)$$

Haciendo las operaciones correspondientes tenemos que $x = 28$, $y = 18$.

Sabemos que la fórmula para el área de un rectángulo es $A = b \times h$ .

Entonces sustituyendo los valores de $x$ y $y$ (base y altura respectivamente) en la fórmula tenemos:

$$A = 28 \times 18$$

$$= 504$$

Por lo tanto, el área del rectángulo es $504cm^2$.

7.- JUGANDO A LAS CARTAS: Alberto, Benito, Carlos y Daniel juegan a las cartas con las siguientes reglas: Hay un sólo perdedor en cada juego, el perdedor paga a los demás jugadores una cantidad igual a la que cada uno tiene en ese momento. Primero pierde A, luego B, luego C y finalmente D en esos momentos todos tienen 64 Euros. ¿Cuánto tenia cada uno al inicio?

Hay dos formas de resolver este problema algebraicamente o aritméticamente.

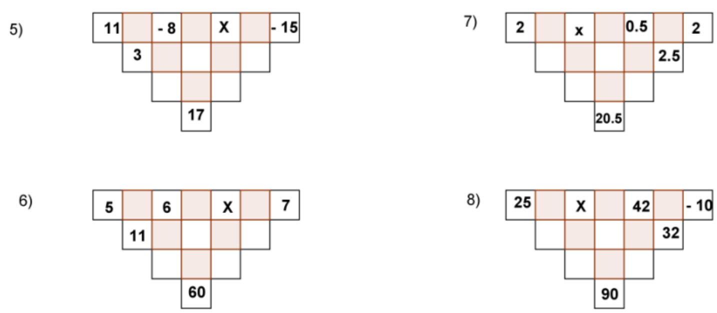
El docente debe conducir la discusión de cómo resolver este problema hacia la estrategia de "trabajando hacia atrás"

La solución algebraica es muy laboriosa porque parte de cuatro cantidades desconocidas.

Con la solución aritmética se empieza por lo que se conoce, todas las cantidades son iguales al final. ¿Qué paso en la etapa anterior? La tabla se elabora partiendo del final y se van aplicando las condiciones para el siguiente renglón:

| Jugadores | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Fin 4º juego | 64 | 64 | 64 | 64 |
| Fin 3º juego | 32 | 32 | 32 | 160 |
| Fin 2º juego | 16 | 16 | 144 | 80 |
| Fin 1º juego | 8 | 136 | 72 | 40 |
| | 132 | 68 | 36 | 20 |

Hay muchos problemas y actividades para enseñar algebra, dejando atrás la mecanización, hallar el valor en cada una de las figuras.




El maestro puede buscar problemas que motiven a los alumnos, en ocasiones los problemas de álgebra (con enunciado) resultan muy áridos para los alumnos, el siguiente es un buen ejemplo, (está claro que los animales no hablan, pero la forma de este enunciado gusta a casi todos los alumnos)


8.- De acuerdo al dibujo, el burro lleva un barril que pesa $x$, el caballo café lleva un bulto o fardo que pesa $x + 15$, el tercer caballo lleva un barril (igual al del burro), un bulto y su carga es de 135 ¿Cuánto pesa el barril y el bulto?

SOLUCIÓN:

Sea $x$ el barril, de acuerdo al dibujo tenemos la ecuación

$$x + (x + 15) = 135$$

$$\Longrightarrow \quad 2x + 15 = 135$$

$$\Longrightarrow \quad 2x = 135 - 15$$

$$\Longrightarrow \quad 2x = 120$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{120}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 60$$

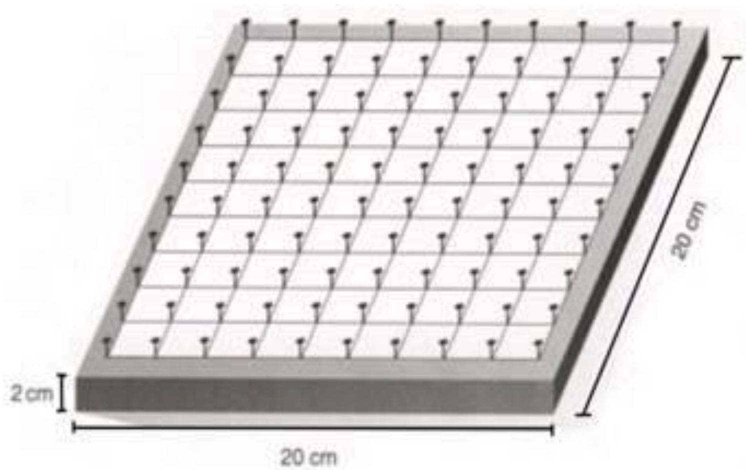
Sabemos que la carga del tercer caballo es de 135 ya que lleva un barril $(x)$ y un bulto $(y)$, entonces tenemos que $x + y = 135$ sustituyendo el valor de $x$ y haciendo las operaciones correspondientes obtenemos el peso del bulto $y = 75$.

Imagen tomada de:
http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/iestegueste/departamentos/matematicas/solucion/2e06.pdf

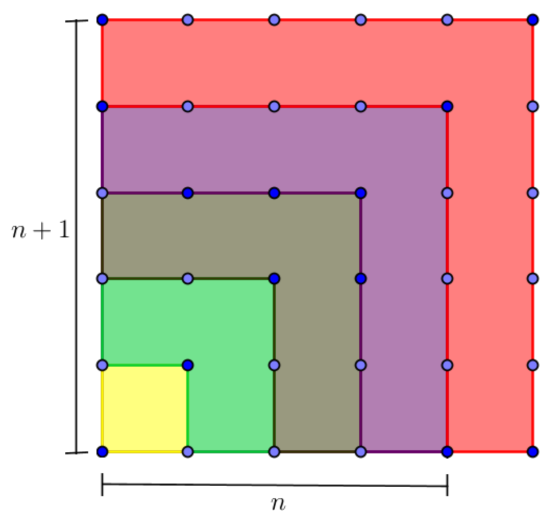
# CAPÍTULO 3
# RECURSIÓN

Necesitamos un pequeño recordatorio sobre binomios al cuadrado y al cubo.

El programa oficial SEP 2011 para secundaria marca ver sucesiones numéricas. Pero el docente no siempre sabe cómo sacar el máximo provecho pues debe tratar de avanzar en los 3 ejes que marca el programa, el siguiente es un buen ejemplo. Nos auxiliamos del geoplano, con ligas marcamos varios cuadrados a partir de un vértice común.




A partir del vértice inferior izquierdo marcamos un cuadrado de lado 1, sobre el mismo vértice marcamos cuadrados de lados 2, 3, 4, 5.




Con base en el geoplano se pide a los alumnos que "generalicen" y hallen el número de cuadrados necesarios para pasar de $n^2$ al siguiente cuadrado, el maestro los guía para que observen que tomando como base el vértice superior derecho del cuadrado marcado con ligas, al formar el siguiente cuadrado necesitamos agregar una L invertida, que contiene $2n+1$ cuadrados, "Si partimos de $n^2$ para completar el siguiente cuadrado necesitamos $2n+1$ cuadritos nuevos". Es decir $n^2+2n+1=(n+1)^2$.

El objetivo de usar el geoplano como auxiliar es utilizar un recurso visual y no álgebra para llegar a la fórmula de un binomio al cuadrado, en este caso al desarrollo de $(n+1)^2$ , que necesitamos en el siguiente apartado como $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ .

También podemos generalizar y trabajar con cubos, pero ahora usamos cubitos de madera, Partiendo de un cubo de lado $n^3$ necesito 3 capas de $n^2$ más tres tiras de longitud $n$, más 1 cubito.

Es decir $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Podemos escribir

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Obtenemos la sucesión $3n^2 + 3n + 1$ que nos da el número de cubos que necesitamos para pasar de $n^3$ a $(n+1)^3$.

### 3.1. La historia de un pequeño descubrimiento

En este apartado Polya comenta la anécdota que se cuenta de Gauss cuando aún era pequeño e iba a la escuela. Obtiene la fórmula conocida como "suma de Gauss". Brevemente el problema es: encontrar la suma $S$ de los primeros $n$ enteros positivos, es decir $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

La idea es hacer parejas de términos: un término que está a una distancia determinada desde el principio se empareja con otro término a la misma distancia desde el extremo.

Por comodidad se escribe la suma dos veces, la segunda vez invirtiendo los términos:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esta es la fórmula general.

Ahora un problema similar: Hallar la suma de los cuadrados de los primeros $n$ números.

Si $S$ representa la suma requerida

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2$$

Intentamos repetir el procedimiento anterior, se puede intentar escribir la suma dos veces, invirtiendo el orden en la segunda:

$$S = 1 + 4 + 9 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2$$

$$S = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 9 + 4 + 1$$

La adición de estas dos ecuaciones, no tiene tanto éxito como en el caso anterior, nuestro intento fallo. Sin embargo, incluso ese juicio erróneo no debe ser inútil, sino que nos puede llevar a una evaluación más adecuada del problema propuesto: sí, parece ser más difícil que el problema en el apartado anterior. Para hallar la suma de los cuadrados necesitamos recordar la propiedad telescópica de la suma y lo que se comentó al inicio de este capítulo.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_n - a_1$$

Partimos de

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Esto es válido para cualquier valor de $n$, escribamos sucesivamente para $n = 1,2,3, \ldots, n$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

¿Qué hacemos con estas $n$ igualdades? ¡Sumarlas!

Gracias a las cancelaciones a la izquierda (en diagonal de izquierda $2^3$ a derecha $-2^3$), el lado izquierdo resulta ser muy simple. En el lado derecho hay que sumar tres columnas. La primera columna nos lleva a $S$, la suma de los cuadrados que deseamos. La última columna se compone de $n$ unidades, esto es fácil. La columna en el centro trae la suma de los $n$ primeros números, pero sabemos que esta suma se obtiene de la sección anterior. Obtenemos

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

y en esta ecuación todo es conocido (es decir, expresado en términos de $n$ ) excepto $S$, y así podemos despejar $S$ de la ultima igualdad. De hecho, nos encontramos con el cálculo algebraico sencillo

$$2(n^3 + 3n^2 + 3n) = 6S + 3(n^2 + n) + 2n$$

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

o, finalmente,

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esta solución es eficiente, clara y corta como para intentar generalizar, hemos descubierto un método para generalizar este tipo de sumatorias y esto es de hacerse notar en clase.

### 3.2. “No podemos dejar esto sin aplicación”

Lo anterior se presta a generalizar. Considerando la suma de las $k$ - ésimas potencias de los $n$ primeros números naturales

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

Hemos encontrado en el apartado anterior

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

y antes de que

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$S_1$ también se puede obtener por la propiedad de la suma telescópica usando **$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$**

Observamos que como caso extremo tenemos

$$S_0 = n$$

A partir de $S_0, S_1, S_2$ podemos plantear el problema general: expresar $S_k$ de manera similar. Estudiando esos casos particulares, incluso podemos suponer que $S_k$ se puede expresar como un polinomio de grado $k + 1$ en $n$.

Vamos a examinar el siguiente caso particular, $k = 3$.

De hecho, se inicia mediante la aplicación de la fórmula del binomio con el exponente $n = 4$:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

de la cual sigue

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

Esto es válido para cualquier valor de $n$, escríbalo sucesivamente por $n = 1,2,3, \dots, n$:

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

Como antes, sumamos estas $n$ igualdades. Hay cancelaciones visibles en el lado izquierdo. En el lado derecho, hay cuatro columnas para sumar, y cada columna implica una suma de potencias de los primeros $n$ enteros, de hecho, cada columna introduce otro caso particular de $S_k$:

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0$$

Sin embargo podemos expresar $S_2$,$S_1$, y $S_0$ en términos de $n$. Usando esas expresiones, podemos transformar nuestra ecuación en

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

y en esta ecuación todo se expresa en términos de $n$ excepto $S_3$.

Lo que se necesita ahora para determinar $S_3$ es decir “despejarla”:

$$4S_3 = (n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)$$

$$= (n+1)[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n - n(2n+1)]$$

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Hemos llegado al resultado deseado, e incluso la ruta parece instructiva: al haber usado el truco por segunda vez, se puede prever un esquema general.

Recuerde: "Un método es un truco que se utiliza dos veces."

### 3.3. Recursión

¿Cuál fue la característica más destacada de nuestro trabajo en la sección anterior 3.2? A fin de obtener $S_3$, volvimos a lo previamente determinado $S_2$, $S_1$ y $S_0$. Se obtuvo $S_2$ recurriendo a lo anterior $S_1$ y $S_0$.

De hecho, se podría utilizar el mismo esquema para derivar $S_1$ que obtuvimos en la sección. 3.1 mediante un método bastante diferente al tradicional (escribir la suma dos veces, una en orden creciente y la otra en forma decreciente). Como vimos al principio de este capítulo tenemos

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Tenemos una lista de casos particulares:

$$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Mediante la adición se obtiene

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0$$

Por supuesto, $S_0 = n$ y así

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

que es el resultado final de la sección. 3.1.

Después de haber trabajado el esquema en los casos particulares $k = 1,2,$ y $3$, se aplicará sin dudarlo a la suma general $S_K$. Ahora si recordamos la fórmula binomial con el exponente $k + 1$:

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1$$

Tenemos una lista de casos particulares:

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = (k+1)1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \cdots + 1$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = (k+1)2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \cdots + 1$$

$$4^{k+1} - 3^{k+1} = (k+1)3^k + \binom{k+1}{2} 3^{k-1} + \cdots + 1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1$$

Mediante la adición se obtiene

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + S_0$$

De esta ecuación podemos determinar (expresar en términos de $n$) $S_k$ con la condición que se haya determinado previamente $S_{k-1}, S_{k-2}, \dots\dots, S_1$ y $S_0$. Por ejemplo, como hemos obtenido en las expresiones anteriores de $S_0, S_1, S_2$ y $S_3$ se podría derivar una expresión para $S_4$ con álgebra sencilla.

Después de haber obtenido $S_4$ podríamos proceder a $S_5$ , y así sucesivamente. Así, siguiendo el "truco" de la secc. 3.1, que apareció "de la nada," hemos llegado a un modelo que merece ser formulado y recordado para futuras aplicaciones. Cuando nos encontramos ante una secuencia bien ordenada (como así $S_0$ , $S_1, S_2, S, \ldots, S_k, \ldots$ ) existe la posibilidad de evaluar los términos de la secuencia de uno a la vez. Necesitamos dos cosas.

En primer lugar, el término inicial de la secuencia debe ser conocido de alguna manera. En segundo lugar, debe haber alguna relación que una el término general de la secuencia de los términos anteriores ($s_k$ está vinculada a $S_0$, $S_1, S_2, S, \ldots, S_{k-1}$ por la ecuación final de la presente sección, anunciada por el" truco "de la secc.3.1).

Entonces, podemos encontrar un término tras otro, sucesivamente, de forma recursiva, yendo hacia atrás o recurriendo cada vez a los términos anteriores. Este es el patrón importante de la recursividad.

### 3.4. Abracadabra

La palabra "abracadabra" significa algo así como " complicado, sin sentido”.

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra "abracadabra" en la figura. 3.1? Se entiende que comenzamos con la $A$ en la parte superior (esquina norte) y se lee hacia abajo, cada vez que pasa a la siguiente letra (sureste o suroeste) hasta llegar a la última $A$. (En la esquina sur)

La pregunta es curiosa. Sin embargo, su interés puede ser incitado si usted nota que hay algo familiar detrás de ella. Se puede recordar al caminar o conducir en una ciudad (como Puebla). Piense en una ciudad que se compone de bloques perfectamente cuadrados, donde la mitad de las calles corren de noroeste a sureste y en las calles o avenidas que cruzan la carrera anterior de noreste a suroeste. La lectura de la palabra mágica de la figura. 3.1 corresponde a una trayectoria en zigzag en la red de dichas calles. Cuando usted camina por el sendero en zigzag en la figura. 3.2, se puede caminar diez cuadras del punto inicial $A$ al punto final $A$. Hay varios otros caminos que son diez cuadras de largo entre estos dos extremos en esta red de calles, pero no hay un camino que sea más corto. Encontrar el número de los diferentes caminos más cortos de la red, este es el problema detrás del problema de abracadabra (figura. 3.1).


**Fig.3.1. Una palabra mágica**

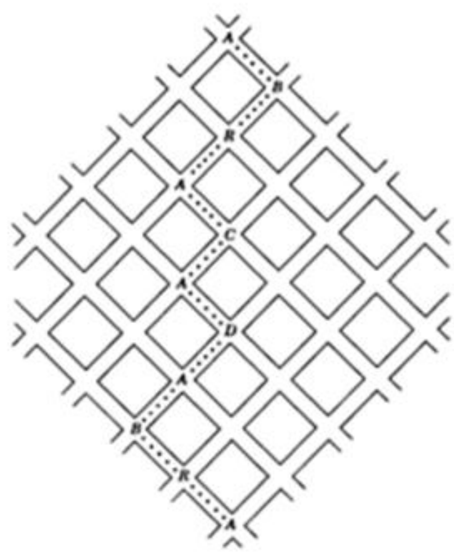


**Fig.3.2. El sendero en zigzag es el más corto**

Una formulación general puede tener varias ventajas. A veces sugiere una aproximación a la solución, y esto ocurre en nuestro caso. Si no puede resolver el problema propuesto acerca de la figura. 3.1 puede intentar primero resolver un problema relacionado, más simple. En este punto, la formulación general puede ser útil: se sugiere tratar los casos más sencillos que se encuentran debajo de ella.

De hecho, si las dos esquinas dadas son lo suficientemente cerca el uno al otro en la red es fácil de contar los diferentes caminos en zigzag entre los dos: se puede dibujar cada uno después del otro y examinar todos ellos. Escuchar esta sugerencia y llevarlo a cabo de forma sistemática. Comience desde el punto $A$ y vaya hacia abajo. Consideremos en primer lugar los puntos a los que se puede llegar caminando a una cuadra, y luego aquellos a los que hay que caminar dos cuadras, y luego los que son tres o cuatro o más cuadras de distancia. Estudia y recuenta cada punto de las rutas más cortas en zigzag que lo conecta con $A$.

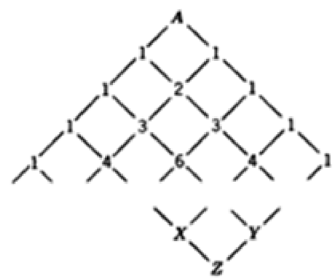



**Fig.3. 3. Cuente el número de los caminos más cortos en zigzag**

En la fig. 3.3 están marcados unos cuantos números obtenidos al contar los caminos, obtenga y anote algunos números más. ¿Nota algo?

Si usted tiene suficiente conocimiento previo puede observar muchas cosas.

Usted puede notar una interesante relación. Por ejemplo,

$$4 = 1 + 3,$$

$$6 = 3 + 3$$

Consideremos tres esquinas de la red, los puntos $X, Y$ y $Z$, la posición relativa de los cuales se muestra en la figura. 3.3: $X$ es el vecino del noroeste y noreste Y el vecino de $Z$. Si queremos llegar a la $Z$ viene de la $A$ a lo largo de un camino más corto en la red, tenemos que pasar a través de $X$ o a través de $Y$. Una vez que hemos llegado a $X$, podemos por lo tanto, proceder a la $Z$ en un solo camino, y lo mismo es cierto para proceder de $Y$ a $Z$. Por lo tanto, el número total de caminos más cortos de la $A$ a la $Z$ es una suma de dos términos: es igual a la cantidad de caminos más cortos de la $A$ a $X$ sumados al número de los de la $A$ a $Y$. Esto explica plenamente nuestra observación y prueba la ley general.

Una vez aclarado este punto básico, podemos extender la serie de números en la figura. 3.3 por adiciones simples hasta obtener la matriz más grande en la figura. 3.4, en la esquina sur se obtiene la respuesta deseada: se puede leer la palabra mágica en la figura. 3.1 en exactamente 252 maneras diferentes.

### 3.5. El triángulo de Pascal

Los números en la figura. 3.3 son los coeficientes binomiales y su disposición triangular generalmente se llama el triángulo de Pascal (el mismo Pascal lo llamó el "triángulo aritmético"). Líneas adicionales se pueden agregar al triángulo de la figura.3.3 y, de hecho, puede prolongarse indefinidamente. La matriz de la figura. 3.4 es un pedazo cuadrado cortado de un triángulo más grande.

(I) Tenemos que introducir una notación adecuada para los números que figuran en el triángulo de Pascal, lo que es un paso de gran importancia. Para nosotros cada número conectado a un punto de este triángulo tiene un significado geométrico: indica el número de diferentes trayectorias más cortas en zigzag desde el vértice del triángulo a ese punto. Cada una de estas rutas pasa por el mismo número de bloques, digamos $n$ bloques. Además, todos estos caminos de acuerdo en el número de bloques descritos en la dirección suroeste y en el número de aquellos en la dirección sureste. Sea $l$ y $R$ representan estos números, respectivamente ( $l$ a la izquierda y $R$ para la derecha por supuesto, hacia abajo en ambos casos). Notoriamente

$$n = l + r$$

Si le damos dos de los tres números $n, l, r,$ la tercera está completamente determinada por lo que es el punto al que se refieren. (De hecho, $l$ y $r$ son las coordenadas rectangulares del punto con respecto a un sistema cuyo origen es el vértice del triángulo de Pascal; uno de estos ejes).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

**Fig. 3.4. Triángulo de Pascal**

Por ejemplo, para la última $A$ de la trayectoria mostrada en la figura. 3.2.

$$l = 5, \quad r = 5, \quad n = 10$$

y para el segundo $B$ de la misma trayectoria

$$l = 5, \quad r = 5, \; n = 8$$

Nosotros designaremos por $\binom{n}{r}$ (esta notación se debe a Euler) el número de rutas más cortas en zigzag desde el vértice del triángulo de Pascal en el punto especificado por $n$ (número total de bloques) y $r$ (cuadras a la derecha hacia abajo). Por ejemplo, véase la fig. 3.4.

$$\binom{8}{3} = 56, \qquad \binom{10}{5} = 252$$

Los símbolos para los números que figuran en la figura. 3.3 son ensamblados en la figura. 3.5. Los símbolos con el mismo número de arriba (el mismo $n$ ) están alineados horizontalmente(a lo largo de la $n$ ésima "base" la base de un triángulo rectángulo).

Los símbolos de abajo con el mismo número (el mismo $r$) están alineados oblicuamente (a lo largo de la $r$ ésima "avenida"). La quinta avenida forma uno de los lados del cuadrado en la figura.3.4.

(2) Además del aspecto geométrico, el triángulo de Pascal también tiene un aspecto computacional. Todos los números a lo largo de la frontera (calle cero, avenida cero, y su punto de partida común) son iguales a 1 (es obvio que sólo hay un camino más corto para estas esquinas de las calles desde el punto de partida).

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

$$\binom{n}{r-1} \qquad \binom{n}{r}$$

$$\binom{n+1}{r}$$

**Fig. 3.5. Simbólico triángulo de Pascal.**

Por lo tanto,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Es apropiado llamar a esta relación la condición de frontera del triángulo de Pascal. Cualquier número dentro del triángulo de Pascal está situado en una cierta línea horizontal, o la base. Calculamos un número de la base o $(n + 1)$ yendo hacia atrás, o que se repiten, a dos números vecinos de la base $n$-ésima:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

Véase la fig. 3.5 es apropiado llamar a esta ecuación la fórmula de recurrencia del triángulo de Pascal.

Desde el punto de vista del cálculo los números $\binom{n}{r}$ se determinan (o definidos, si lo desea) por la fórmula de recurrencia y de la condición de frontera del triángulo de Pascal.

### 3.6. La inducción matemática

Cuando se calcula un número en el triángulo de Pascal mediante el uso de la fórmula de recurrencia, tenemos que confiar en el conocimiento previo de dos números de la base anterior. Sería deseable disponer de un esquema de cálculo independiente de tal conocimiento previo. Hay una fórmula muy conocida, que llamaremos la fórmula explícita para los coeficientes binomiales, que da un cálculo independiente:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots\cdots r}$$

El tratado de Pascal contiene la fórmula explícita (expresado en palabras, no en nuestra notación moderna). Pascal ofrece una prueba notable de la fórmula explícita y queremos dedicar nuestra atención a su método de prueba.

Necesitamos una observación preliminar. La fórmula explícita no se aplica, tal y como está, para el caso $r = 0$. Sin embargo, establezcamos en la regla que, si $r = 0$, debe ser interpretado como

$$\binom{n}{o} = 1$$

La fórmula explícita se aplica al caso $r = n$ y producen el resultado correcto.

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots\cdots\cdots(n-1)n} = 1$$

Por lo tanto, tenemos que probar la fórmula explícita sólo para $0 < r < n$, es decir, en el interior del triángulo de Pascal, donde podemos utilizar la fórmula de recurrencia. Ahora, citamos Pascal, con las modificaciones no esenciales algunos de los cuales se incluirán entre corchetes [].

A pesar de esta propuesta [la fórmula explícita] contiene un número infinito de casos, daré por ella una breve prueba, suponiendo dos lemas.

El primer lema afirma que la proposición es válida para la primera base, lo cual es obvio. [La fórmula explícita es válida para $n = 1$, porque, en este caso, todos los valores posibles de $r$, $r = 0$ y $r = 1$, caen bajo la observación preliminar.]

El segundo lema afirma lo siguiente: si la proposición pasa a ser válido para cualquier base [para cualquier valor $n$ ] es necesariamente válida para la siguiente base [para $n + 1$ ]. Vemos por lo tanto, que la proposición se cumple necesariamente para todos los valores de $n$.

Para que sea válido para $n = 1$ en virtud de el primer lema, por lo tanto, para $n = 2$ en virtud de el segundo lema, por lo tanto, para $n = 3$, en virtud de la misma, y así hasta el infinito.

Y así no queda más que probar el segundo lema.

De acuerdo con la instrucción del segundo lema, se supone que la fórmula explícita es válida para la base $n$ -ésima, es decir, para un determinado valor de $n$, y todos los valores de $r$ (compatibles para $r = 0, 1, 2, \ldots, n$). En particular, junto con

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)\cdot r}$$

tenemos también $(si\ r \geq 1)$

$$\binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}$$

La adición de estas dos ecuaciones y utilizando la fórmula de recurrencia, se deriva como consecuencia necesaria

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r}+1\right]$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\cdot\frac{n+1}{r}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

Es decir, la validez de la fórmula explícita para un determinado valor de $n$ implica su validez para $n + 1$. Esto es precisamente lo que el segundo axioma afirma, lo hemos demostrado. Las palabras de Pascal, que hemos citado son de gran importancia histórica debido a que su prueba es el primer ejemplo de un patrón fundamental de razonamiento que normalmente se llama inducción matemática.

Este patrón de razonamiento merece más estudio. Si por descuido introdujo, el razonamiento por inducción matemática puede confundir a los principiantes. Sin embargo, el segundo lema de Pascal hace exactamente esto: al admitir el primer lema, caso de $n = 1$. Sin embargo, a continuación, el segundo lema (el caso $n = 2$), entonces $(n = 3)$, luego el cuarto, y así sucesivamente, incluso si le sucede que tiene un número infinito.

### 3.7. Próximos Descubrimientos

Después del trabajo en los tres apartados anteriores, ahora tenemos tres enfoques diferentes de los números en el triángulo de Pascal, los coeficientes binomiales.

(1) Enfoque geométrico. Un coeficiente binomial es el número de los diferentes caminos más cortos en zigzag entre dos esquinas dadas en una red de calles.

(2) Enfoque computacional. Los coeficientes binomiales se pueden definir por su fórmula de recurrencia y su condición de frontera.

(3) La fórmula explícita. Lo hemos demostrado, por el método de Pascal, en la secc. 3.7. El nombre de los números considerados nos recuerda a otro enfoque.

(4) Teorema del binomio. Para indeterminado (o variables) $x$, y cualquier número entero no negativo $n$ tenemos la identidad

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdot \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Hay todavía otros enfoques para los números en el triángulo de Pascal, que desempeñan, de hecho, un gran papel en preguntas interesantes y poseen muchas propiedades interesantes. "Esta tabla de números tiene propiedades eminentes y admirables", escribió Jacob Bernoulli en su *Ars Conjectandi* (Basilea 1713, véase la segunda parte, capítulo III, p 88.). Por otra parte, nos hemos encontrado con dos patrones generales importantes (la recursividad y la inducción matemática) que todavía se deben aplicar a más ejemplos si queremos entenderlas bien. Y así, las perspectivas son aún más próximas.

### 3.8. Observar, generalizar, demostrar, y demostrar una vez más

Volvamos a nuestro punto de partida y demos otra mirada en ella.

(1)Partimos de la palabra mágica de la figura. 3.1 y la fig. 3.2, o más bien de un problema relacionado con esa palabra. ¿Cuál era la incógnita? El número de trayectorias más cortas en zigzag en que la red de calles de la primera $A$ a la última $A$, es decir, desde la esquina norte de la plaza a su esquina sur.

Este sendero en zigzag debe cruzar en algún lugar de la diagonal horizontal de la plaza. Hay seis posibles puntos de cruce (las esquinas, $A$'s) a lo largo de la horizontal en diagonal. Hay, por tanto, seis diferentes tipos de caminos en zigzag en nuestro problema, ¿Cuántos caminos hay de cada tipo? Tenemos aquí un nuevo problema.

Seamos concretos. Toma un punto definido en el cruce de la diagonal, por ejemplo, el tercer punto de la izquierda ($l = 3, r = 2$, $n = 5$ en la notación de la secc. 3.5). Un sendero en zigzag cruzando este punto elegido se compone de dos secciones: la sección superior se inicia desde la esquina norte de la plaza y termina en el punto elegido, la sección inferior se inicia desde el punto elegido y termina en la esquina sur, ver fig. 3.2. Hemos encontrado antes (véase la Fig. 3.4.) el número de las diferentes secciones superiores, es

$$\binom{5}{2} = 10$$

El número de las diferentes secciones inferiores es el mismo. Ahora cualquier sección superior se puede combinar con cualquier sección inferior para formar una ruta completa [tal como se sugiere en la figura. 3.6 (I)]. Por lo tanto, el número de tales caminos es

$$\binom{5}{2}^2 = 100$$

Por supuesto, el número de caminos en zigzag que cruzan la horizontal diagonal en cualquier otro punto dado puede ser similarmente calculado. Por lo tanto nos encontramos con una nueva solución de nuestro problema original: se puede leer la palabra mágica de la figura. 3.1 exactamente de

$$1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1$$

diferentes maneras. Esta suma debe coincidir con el resultado que se obtiene al final de la secc. 3.5; de hecho, es igual a 252.

(2) Generalización. Un lado de la plaza considerada en la figura.3.2 consta de cinco cuadras. En la generalización (que pasa de 5 a $n$) nos encontramos con que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

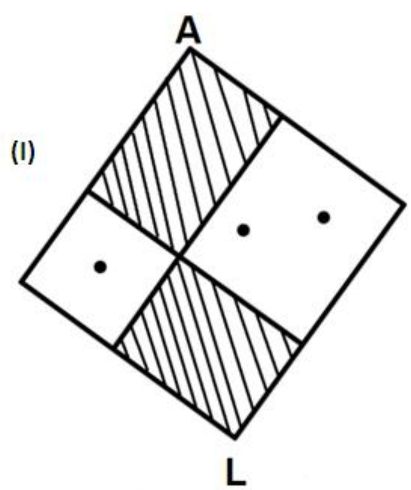



**Fig.3.6. Sugerencia**

"La suma de los cuadrados de los números en la base $n$-ésima del triángulo de Pascal es igual al número en el centro de la base $2nth$". Es cierto, hemos considerado el caso particular $n = 5$ (incluso hemos considerado como un punto especial de la quinta base), pero no hay ninguna virtud en particular (y ninguna peculiaridad engañosa) en el caso particular considerado. Y por lo que nuestro razonamiento es válido en general. Sin embargo, puede ser un ejercicio útil para el lector a repetir el razonamiento con especial atención a su generalidad -que tiene que decir $n$ en lugar de 5-.

(3) Otro enfoque. Aun así, el resultado es sorprendente. Nos entendemos mejor si pudiéramos conseguirlo de otro lado.

Analizando los diversos enfoques que figuran en la secc. 3.8, podemos tratar de vincular nuestro resultado con la fórmula del binomio. Hay, de hecho, una conexión:

$$(1+x)^{2n} = \cdots + \binom{2n}{n} x^n + \cdots$$

$$= (1+x)^n (1+x)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n\right] \cdot \left[\binom{n}{n} + \cdots + \binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{0} x^n\right]$$

Centrémonos en el coeficiente de $x^n$. En el lado derecho de la primera línea del coeficiente de $x^n$ es el lado derecho de la ecuación general dada en (2) del que están buscando una segunda prueba. Pasemos ahora al producto de los dos factores que se muestran en las dos últimas líneas, por escrito, que hizo uso de la simetría de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Ahora, en este producto, el coeficiente de $x^n$ es obviamente el lado izquierdo de la ecuación en (2) que están a punto de probar. Y aquí está la prueba: el coeficiente de $x^n$ debe ser el mismo en ambos casos, ya que aquí tenemos una identidad en $x$.

## EJEMPLOS ADICIONALES

1.- **Observe el siguiente triangulo**

1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1
1 6 21 50 90 126 141 126 90 50 21 6 1
1 7 28 77 161 266 357 393 357 266 161 77 28 7 1
1 8 35 112 266 504 784 1016 1107 1016 784 504 266 112 35 8 1
1 9 44 155 413 882 1554 2304 2907 3139 2907 2304 1554 882 413 155 44 9 1
1 10 54 208 612 1450 2849 4740 6765 8350 8953 8350 6765 4740 2849 1450 612 208 54 10 1

El triángulo anterior esta generado por $(1 + x + x^2)^N$

Observar que la suma de los números en cada renglón es $3^n$

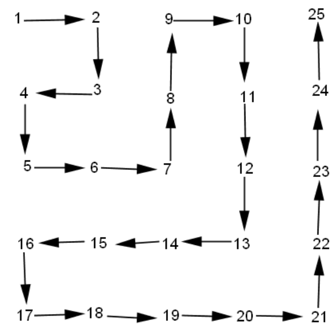
2.- En un tablero de ajedrez de 8 x 8, el rey se encuentra en el cuadro que está en la esquina inferior izquierda. ¿De cuántas formas puede llegar a la esquina superior izquierda en exactamente 7 movimientos? (Recuerde que el rey se mueve de uno en uno.)

SOLUCIÓN:

Marcamos con ℝ la posición inicial del rey y con F la posición final. Pondremos en cada cuadrito el número de formas posibles de llegar a él, pensando siempre que tenemos únicamente 7 movimientos para llegar a la esquina superior izquierda.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 127 | | | | | | | |
| | 51 | 76 | | | | | | |
| | 21 | 30 | 25 | | | | | |
| | 9 | 12 | 9 | 4 | | | | |
| | 4 | 5 | 3 | 1 | | | | |
| | 2 | 2 | 1 | | | | | |
| | 1 | 1 | | | | | | |
| | ℝ | | | | | | | |

3.- ¿En que posición se encuentra el número 2003? (Las columnas se enumeran de izquierda a derecha y los renglones se enumeran de arriba hacia abajo).




SOLUCIÓN:
Veamos primero que los números del primer renglón son de la forma $(2n+1)^2$ o $(2n+1)^2+1$ y los números de la primera columna son de la forma $(2n)^2$ o $(2n)^2+1$.
El $45^2 = 2025$ es el cuadrado más pequeño mayor a 2003, y se encuentra en la columna 45.
Para obtener el renglón en el que se encuentra el número 2003 observamos que nos encontramos en una columna impar y en ésta la dirección es ascendente, por lo tanto a $45^2$ le restamos 2003 y obtenemos el número del reglón en el que se encuentra este número, es decir, 2025-2003=22.
Por lo tanto, el número 2003 se encuentra en la columna 45, renglón 22.

4.- ¿Cuánto vale la siguiente suma $\frac{25}{8\cdot 9}+\frac{25}{9\cdot 10}+\frac{25}{10\cdot 11}+\cdots+\frac{25}{99\cdot 100}$?

SOLUCIÓN:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Entonces

$$\frac{25}{8\cdot 9}+\frac{25}{9\cdot 10}+\cdots+\frac{25}{99\cdot 100}=25\left[\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\right]$$

$$=25\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=25\left(\frac{25-2}{200}\right)$$

$$=\frac{23}{8}$$

5.- ¿A cuánto es igual $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{99}{100!}$? $(\mathrm{n}! = 1\times 2\times \ldots \times \mathrm{n}.)$

SOLUCIÓN:

Esta es una aplicación típica de la propiedad telescópica de las sumatorias, la idea es expresar el término "$n$- esimo" de nuestra sumatoria como diferencia:

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{(k+1)! - k!}{k!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{k!\,[(k+1) - 1]}{k!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{k}{(k+1)!}$$

Luego:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{100!}$$

6.- Sea $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10^n$. ¿Cuántas veces aparece el 2 como factor en la descomposición en primos de $S$?

SOLUCIÓN:

Aplicando la fórmula de Gauss a $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10^n$ tenemos,

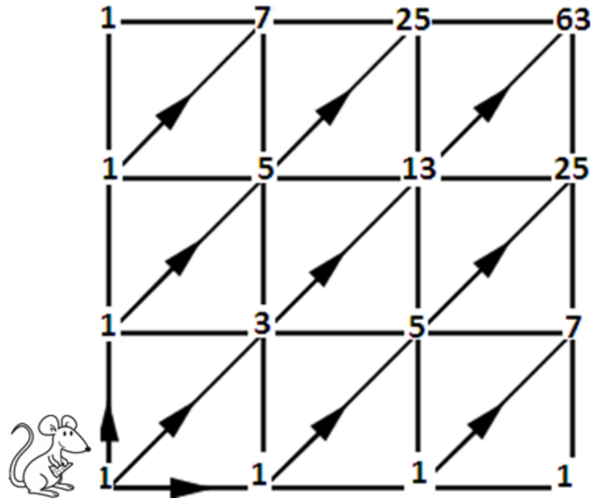
$$S = \frac{10^n(10^n + 1)}{2}$$

$$= 5(10^{n-1})(10^n + 1)$$

Luego 2 divide a $S, (n-1)$ veces. Por lo tanto, 2 aparece $n - 1$ veces como factor en la descomposición en primos de $S$.

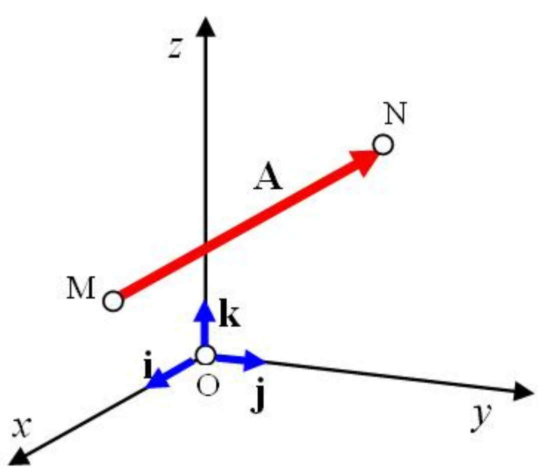
**Problemas para el alumno**

a) Siguiendo la sugerencia de Polya de generalizar, podemos pedir a los alumnos hallar el número de caminos en una cuadricula, pero ahora en cada vértice tenemos tres opciones: derecha, arriba y diagonal, ver dibujo.




Concretamente pedimos: El ratón quiere llegar al queso que está en el vértice opuesto de una cuadricula 3×3 y se puede desplazar a la derecha, hacia arriba y en forma diagonal ¿Cuántos caminos hay? Se da la solución en el diagrama.

b) El análogo tridimensional a los caminos entre los dos vértices de una cuadricula lo podemos visualizar como encontrar el número de caminos (para el hombre araña) del origen al punto $(x, y, z)$ donde $x, y, z$ positivos. Y los movimientos permitidos son $(x, y, z) \rightarrow (x + 1, y, z)$, $(x, y, z) \rightarrow (x, y + 1, z)$, $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1)$




¿De cuántas maneras podemos ir del punto M al punto N de acuerdo a los movimientos permitidos? M y N tienen coordenadas positivas, por ejemplo ¿Cuántos camino hay de M (1, 2, 3) al punto N (3, 5, 7)?

Con un poco de reflexión nos damos cuenta que son permutaciones con objetos repetidos. En la siguiente explicación suponemos que el lector recuerda la combinatoria básica.

c) En la parte i) de la figura de abajo, tenemos las primeras seis filas del triángulo de Pascal, en los que aparece un hexágono centrado en 4, en las últimas tres filas. Si consideramos los seis números (que rodean a 4) como los vértices del hexágono, tenemos que las dos ternas alternadas (3, 1,10 y 1, 5,6) satisfacen que 3·1·10=30=1·5·6. La parte ii) de la figura contiene las filas 4 a 7 del mismo triángulo, donde vemos un hexágono cuyo centro está en 10; las ternas alternadas de los vértices (4, 10,15 y 6, 20,5) satisfacen 4·10·15=600=6·20·5.

i) Conjeture el resultado general al que apuntan estos dos ejemplos

ii) Verifique la conjetura de la parte a)

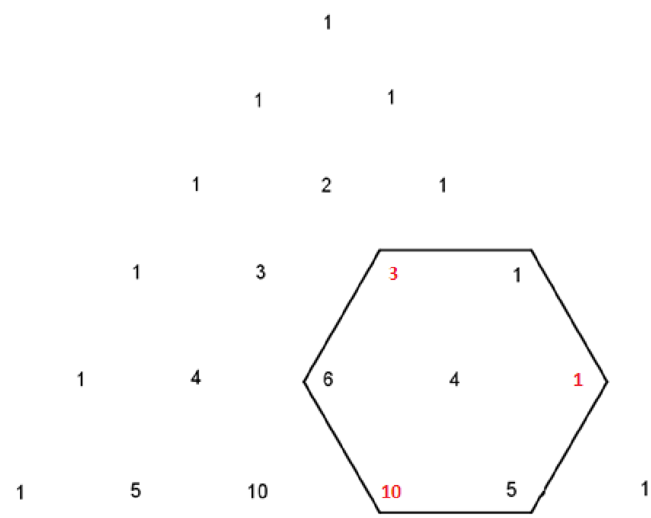


Figura i)

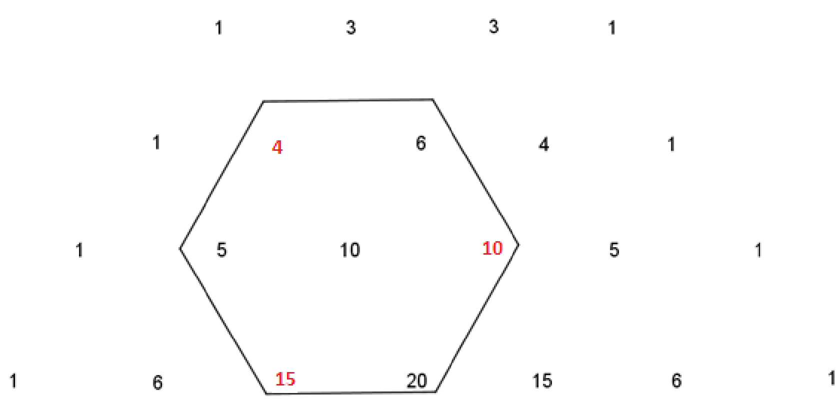


Figura ii)

d)Supongamos que cada número tiene “3 hijos”, se colocan los números sucesivamente, para ilustrar la idea escribimos

1

2 3 4

5 6 7 8 9 10 11 12 13

14,15, 16 …… y así sucesivamente

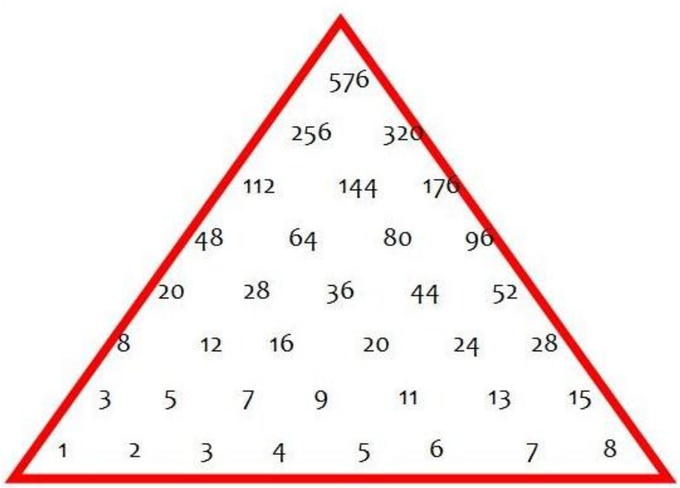
i) ¿Quién es el papá de 2007?

ii) Sumar los elementos de los primeros 10 renglones

iii) Puedes hallar una fórmula general para la suma de cualquier renglón

e)Jugando con los números

Siguiendo la idea del triangulo de Pascal podemos hacer el siguiente triangulo de números, en la base colocamos del 1 al 8, a partir de la segunda fila sumamos dos números consecutivos y podemos de aquí formular varias preguntas.



# CAPÍTULO 4
# SUPERPOSICIÓN

## 4.1. Interpolación

Necesitamos varios pasos para llegar a la formulación final de nuestro siguiente problema. (1) Se nos ha dado $n$ abscisas diferentes

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots, \quad x_n$$

y $n$ ordenadas correspondientes

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \dots, \quad y_n$$

y así se nos ha dado $n$ puntos diferentes

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad \dots, (x_n, y_n)$$

Estamos obligados a encontrar una función $f\ (x)$ los valores que en las abscisas dadas son las ordenadas correspondientes:

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3, \dots, f(x_n) = y_n$$

En otras palabras, se nos requiere encontrar una curva, con la ecuación $y = f(x)$, que pasa por los $n$ puntos dados; véase la fig. 4.1. Este es el problema de interpolación.

(2) El problema de interpolación puede surgir siempre que consideremos que una cantidad $y$ en función de otra cantidad $x$. Tomemos un caso más concreto: sea $x$ y $y$ la temperatura de la longitud de una varilla homogénea, mantenida bajo presión constante. Para cada $x$ corresponde una temperatura $y$ cierta longitud de la varilla, que es lo que expresamos diciendo que $y$ depende de $x$, o $y$ es una función de $x$, o escribiendo $y = f(x)$.

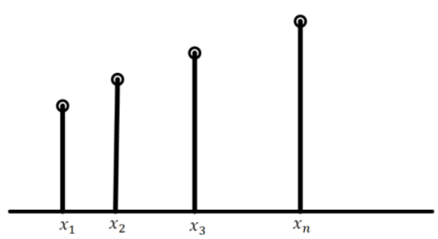



Fig. 4.1. Interpolación

Un físico, en la investigación experimental de la dependencia de $y$ sobre $x$, sujeta la varilla a diferentes temperaturas

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots, \quad x_n$$

y, midiendo la longitud de la varilla en cada una de estas temperaturas, se encuentra con los valores

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \dots, \quad y_n$$

respectivamente.

Al físico, por supuesto, le gustaría saber la longitud y también alguna $x$ temperatura, tales como que no ha tenido todavía la oportunidad de observar. Es decir, el físico quiere saber, sobre la base de sus $n$ observaciones, la función $y = f(x)$ en toda su extensión, para toda la gama de la variable independiente $x$ y por eso plantea el problema de la interpolación.

(3) Observemos entre paréntesis el problema del físico es, de hecho, más complicado. Sus valores

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$$

no son los "verdaderos valores" de las magnitudes medidas, pero se ven afectadas por los errores inevitables de medición. Por lo tanto, su curva no necesita pasar a través, sólo debe pasar cerca de los puntos dados.

Por otra parte, es habitual distinguir dos casos: hasta entonces la inadvertida abscisa $x$, a la que el físico quiere encontrar la ordenada correspondiente, puede estar en el intervalo entre los valores extremos observados $x_1$ y $x_n$ en la Fig. 4.1.). O puede que se encuentren fuera de este intervalo: en el primer caso se acostumbra a hablar de interpolación y en el segundo de extrapolación. (Es habitual considerar la interpolación como más fiable que la extrapolación).

Sin embargo, vamos a pasar por alto esta distinción, y los otros comentarios de este inciso, por el momento, vamos a cerrar el paréntesis y volver al punto de vista de las subsecciones (1) y (2).

(4) El problema planteado en el inciso (1) es absolutamente indeterminado: existe una inagotable variedad de curvas que pasan por los $n$ puntos dados.

Sus $n$ observaciones, por sí solas, no dan derecho al físico a preferir una de esas curvas a las demás. Si el físico decide dibujar una curva, se debe tener alguna razón de su elección fuera de sus $n$ observaciones, ¿qué razón?

Así, el problema de la interpolación aumenta a una pregunta general: ¿Qué sugiere, o que justifica, la transición a una formulación matemática de las observaciones dadas y un fondo mental dado? Esta es una gran pregunta filosófica, sin embargo, ya que es poco probable que las grandes cuestiones filosóficas puedan ser una respuesta satisfactoria, nos volvemos a otro aspecto del problema de interpolación.

(5) Sería natural para modificar el problema planteado en el inciso (1) pidiendo la curva más simple que pase por los $n$ puntos dados. Esta modificación, sin embargo, deja el problema

indeterminado, aunque vago, ya que "la simplicidad" no es una cualidad objetiva: la simplicidad podemos juzgarla de acuerdo a nuestro gusto personal o hábitos mentales.

Sin embargo, en el caso de nuestro problema, se puede dar una interpretación al término "simple" que se ve aceptable y conduce a una formulación determinada y útil. En primer lugar, consideremos la suma, resta y multiplicación de las operaciones más sencillas de cálculo. Entonces, vamos a considerar que las funciones de los valores más simples de los cuales se puede calcular por las operaciones más simples de cálculo. La aceptación de los dos puntos, tenemos que considerar a los polinomios como las funciones más simples, es un polinomio de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Su valor puede ser calculado por las tres operaciones simples de cálculo de la forma numérica dada, los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ y el valor de la variable independiente $x$. Si suponemos que $a_n \neq 0$, el grado del polinomio es $n$.

Por último, se dan dos polinomios de grado diferente, vamos a considerar uno con el grado más bajo, el más simple. Si aceptamos este punto también, el problema de pasar la curva más sencilla posible a través de $n$ puntos se convierte en un problema determinado, el problema de la interpolación polinómica, que se formula como sigue:

*Al ser dado $n$ números diferentes $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ y $n$ números más $y_1$, $y_2$, $y_3$, ..., $y_n$ determine el polinomio $f(x)$ del grado más bajo posible, que cumplan las $n$ condiciones*

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3, \dots, f(x_n) = y_n$$

### 4.2. Una situación especial

Si no vemos otra solución al problema propuesto, es posible que trate de variar los datos. Por ejemplo, podemos mantener una ordenada fija concreta y la disminución de los demás, para que podamos dar con una situación especial que parezca más accesible. No tenemos que tocar las abscisas dadas, aceptamos cualquier $n$ número diferente

$$x_1, \qquad x_2, \qquad x_3, \qquad \dots, \quad x_n$$

pero elegimos un sistema particularmente simple de coordenadas:

$$0, 1, 0, \dots, 0$$

respectivamente. (Todas las coordenadas dadas desaparecen, excepto la correspondiente a la abscisa $x_2$ ; ver Fig. 4.2).

Hay un dato interesante: el polinomio de asumir estos valores se anula en $n-1$ puntos dados, tiene $n-1$ raíces diferentes $x_1$, $x_3$, $x_4$, ..., $x_n$ y, por lo tanto, debe ser divisible por cada uno de los siguientes $n-1$ factores:

$$x-x_1, \quad x-x_3, \quad x-x_4, \quad \ldots, \quad x-x_n$$

Por lo tanto, debe ser divisible por el producto de estos factores $n-1$, y que es al menos de grado $n-1$. Si el polinomio alcanza este grado más bajo posible $n-1$, debe ser de la forma

$$f(x)=C(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)$$

donde $C$ es una constante.

¿Hemos utilizado todos los datos? Queda la ordenada correspondiente a la abscisa $x_2$ que debe tenerse en cuenta:

$$f(x_2)=C(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)=1$$

Calculamos $C$ de esta ecuación, sustituya el valor calculado para $C$ en la expresión de $f\,(x)$, y con ello,

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)}$$

Claramente, este polinomio $f\,(x)$ toma los valores requeridos para todas las abscisas dadas. Hemos tenido éxito en resolver el problema de interpolación polinómica en un caso particular, en una situación especial.

### 4.3. Combinando los casos particulares para resolver el caso general

Tuvimos la suerte de ver un caso tan particular, especialmente accesible.

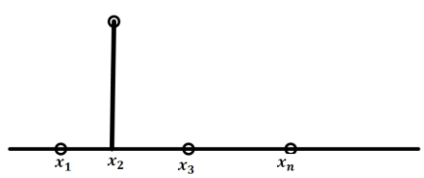


Fig. 4.2. Una situación especial

Debemos tratar ahora de hacer un buen uso de la solución obtenida.

Al modificar un poco la solución obtenida, podemos manejar un caso particular más extenso: a las abscisas dadas

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n$$

dejamos que correspondan las ordenadas

$$0,\ y_2, 0, \ldots, 0$$

respectivamente. Obtenemos el polinomio que asume estos valores multiplicando la expresión obtenida en la secc. 4.2 por un factor evidente:

$$y_2 \frac{(x-x_1)(x-\ x_3)(\ x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-\ x_3)(\ x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)}$$

En esta expresión, el eje de abscisas $x_2$ desempeña un papel especial, distinto de la función común que corresponde a las otras abscisas. Sin embargo, no hay virtud peculiar en el eje de abscisas $x_2$: podemos dejar que cualquier otro eje dado de abscisas desempeñan ese papel especial. Y así, si a las abscisas

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

dejamos que correspondan a los valores mostrados en cualquiera de las siguientes $n$ líneas

$$y_1, 0,0, \dots ,0$$

$$0, y_2, 0, \dots ,0$$

$$0,0, y_3, \dots ,0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0,0,0, \dots , y_n$$

escribir una expresión para el polinomio de grado $n-1$, que asume los valores en las abscisas correspondientes. Tenemos aquí indicada la solución en $n$ casos particulares diferentes de nuestro problema. ¿Puede combinarlo para obtener la solución general? Por supuesto, podemos sumar $n$ expresiones indicadas:

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\dots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)}$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_3-x_n)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Es un polinomio de grado no excediendo a $n-1$ que satisface la condición

$$f(x_i) = y_i \qquad\qquad para\ i = 1,2,3, \dots n$$

como podemos ver a simple vista si nos damos cuenta de la estructura de su expresión.

## 4.4. El patrón

La solución del problema anterior de interpolación, que es debido a Lagrange, tiene un plan general muy sugerente.

(1) Es probable que el lector esté familiarizado con la prueba usual de un conocido teorema de la geometría plana:

"El ángulo en el centro de un círculo es el doble del ángulo en la circunferencia sobre la misma base, es decir, en el mismo arco."(El arco se destaca por una doble línea en las figuras 4.3 y 4.4.).La prueba se basa en dos observaciones, y procede en dos pasos: cf. Euclides III 20. (2) hay una situación especial más accesible: Si uno de los lados del ángulo en la circunferencia es un diámetro, véase la fig.4.3, el ángulo en el centro $\alpha$ es, obviamente, la suma de dos ángulos de un triángulo isósceles; estos dos ángulos son iguales entre sí, y uno de ellos es el ángulo en la circunferencia, $\beta$. Esto demuestra la ecuación deseada

$$\alpha = 2\beta$$

para la situación particular de la figura. 4.3.

(3) Ahora, no tenemos más la situación especial de la figura. 4.3.

Podemos, sin embargo, dibujar un diámetro (línea punteada en la figura. 4.4) a través del vértice del ángulo en la circunferencia y, a continuación la situación especial surge dos veces en la figura. Que las ecuaciones $\alpha' = 2\beta'$, $\alpha'' = 2\beta''$ se refieren a estas situaciones especiales (ver fig. 4.3).

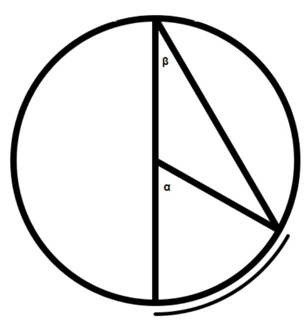



Fig. 4.3 Una situación especial

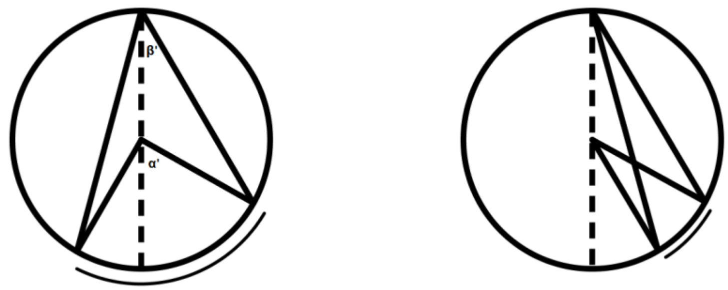



Fig. 4.4. El caso general

Estas ecuaciones se han establecido firmemente por las consideraciones de la subsección (2). La ángulos $\alpha$ y $\beta$, en el centro y en la circunferencia, respectivamente, con la que el teorema deseado se obtiene, puede ser exhibido como suma o como diferencia, según se tienen uno o el otro caso representado en la figura. 4.4 frente a nosotros:

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \beta = \beta' + \beta'' \quad \text{ó} \quad \alpha = \alpha' - \alpha'', \beta = \beta' - \beta''$$

Ahora, mediante la adición y sustracción nuestras dos ecuaciones ya establecidas, se obtiene

$$\alpha' + \alpha'' = 2(\beta' + \beta''), \alpha' - \alpha'' = 2(\beta' - \beta'')$$

respectivamente, y esto demuestra el teorema deseado

$$\alpha = 2\beta$$

en toda su generalidad.

(4) Ahora, vamos a comparar los dos problemas que se describen en este capítulo: el problema de encontrar la curva que pasa por $n$ puntos (secciones. 4.1, 4.2, y 4.3), y el problema de probar, a partir de la geometría plana, se trató en las subsecciones (1), (2), y (3) de la presente sección. A pesar de que estos problemas difieren en varios aspectos, sus soluciones muestran el mismo patrón. En ambos ejemplos, el resultado se obtuvo en dos pasos.

En primer lugar, tuvimos la suerte de ver un caso particularmente accesible, una situación especial, y le dio una solución bien adaptada, pero restringida, a esta situación especial, véase la sección. 4.2 y el inciso (2), la figura. 4.2 y la fig. 4.3.

Luego, mediante la combinación de casos particulares a las que la solución restringida, se obtuvo la solución completa, sin restricciones, aplicable al caso general, véase la sección. 4.3 y el inciso (3).

Vamos a presentar dos términos que ponen de relieve algunas características de este modelo.

El primer paso trata con un caso particular que no sólo es especialmente accesible, pero también es útil en particular; esta situación se podría llamar un caso particular de liderazgo: **se abre el camino a la solución general.**

El segundo paso combina casos particulares por una operación algebraica específica. En la secc. 4.3 $n$ soluciones particulares, después de ser multiplicada por constantes dadas, se agregan para formar la solución general. En la subsección (3), sumamos y restamos las ecuaciones que se ocupan de la situación especial para obtener la prueba general. Vamos a llamar a la operación algebraica empleada en la secc. 4.3 [hay más generalidad allí que en el inciso (3)] combinación lineal o superposición.

Podemos utilizar los términos introducidos para delinear nuestro patrón: A partir de una situación de liderazgo especial que alcanzar la solución general por superposición de los casos particulares.

# CAPÍTULO 5
# PROBLEMAS

## 5.1. ¿Qué es un problema?

En este capítulo, la palabra "problema" toma un sentido muy amplio. Nuestra primera tarea es describir este significado. Tener un problema significa: buscar conscientemente alguna acción apropiada y claramente concebida pero no inmediatamente alcanzable. Un problema es un "gran" problema si es muy difícil, es sólo un "pequeño" problema si es poco difícil. La mayor parte de nuestro pensamiento consciente se ocupa de los problemas. Resolver los problemas es la realización concreta de la inteligencia y la inteligencia es el don específico del hombre.

Ahora vamos a tratar de ascender a una mayor generalidad, tratando de abarcar, en la medida de lo posible, también los problemas no matemáticos. Para aspirar a un método general aplicable a todo tipo de problemas pueden parecer demasiado ambicioso, pero es muy natural: a pesar de que la variedad de problemas que podemos enfrentar es infinito, cada uno de nosotros tiene una sola cabeza para resolverlos, por lo que deseamos, naturalmente, sólo un método para resolverlos.

## 5.2. Clasificación de los problemas

Un estudiante se prepara para un examen escrito de matemáticas, él es un estudiante promedio. Después de haber leído un problema propuesto, puede preguntarse a sí mismo:

"¿Qué clase de problema es este?" De hecho, podría ser bueno hacerse esta pregunta: si es capaz de clasificar su problema, reconocer su tipo, si lo coloca en tal o cual capítulo de su libro de texto, él ha hecho algunos avances: ahora puede recordar el método que ha aprendido para resolver este tipo de problema.

Lo mismo puede decirse, en un sentido, para todos los niveles de resolución de problemas. La pregunta "¿Qué clase de problema es este?" conduce a la siguiente pregunta" ¿Qué se puede hacer con este tipo de problemas?" y estas preguntas pueden producir beneficios, incluso en la investigación mucho mas avanzada.

Puede ser útil para clasificar los problemas, para distinguir problemas de varios tipos. Una buena clasificación debería introducir algunos tipos de tal manera que el tipo de problema puede sugerir el método de solución. No vamos a entrar ahora en detalle, o intentar una clasificación perfecta.

Los Elementos de Euclides contienen axiomas, definiciones y “proposiciones “. Sus comentaristas y algunos de sus traductores distinguen dos clases de "proposiciones": el objetivo de la primera clase (en latín es "problema") es la construcción de una figura, el objetivo del segundo tipo (el nombre en latín es "teorema") es para probar un teorema. Al extender esta distinción, vamos a considerar dos tipos de problemas, los problemas "por encontrar" y problemas "por demostrar". El objetivo de un problema de encontrar es hallar (construir, producir, obtener, identificar,....) un determinado objeto, la incógnita del problema. El objetivo de un problema de probar es decidir si una afirmación determinada es verdadera o falsa, para probar o refutar la misma.

## 5.3. Los problemas por encontrar

El objetivo de un *problema de encontrar* es hallar un determinado objeto, lo desconocido del problema, que satisface la condición del problema, que relaciona lo desconocido con los datos del problema. Veamos dos ejemplos.

"Al ser dadas dos líneas - segmentos $a$ y $b$, y el ángulo γ, construir el paralelogramo de las cuáles las líneas dadas son lados adyacentes, incluyendo el ángulo $\gamma$."

"Al ser dadas dos líneas, segmentos $a$ y $b$, y el ángulo $\gamma$, construir el paralelogramo de las cuales las líneas dadas como segmentos son las diagonales como el ángulo $\gamma$."

En ambos problemas, los datos son los mismos: los segmentos de recta $a$ y $b$, y el ángulo de $\gamma$. En ambos problemas, la incógnita es un paralelogramo y así los problemas no son distinguibles a priori por la naturaleza de lo desconocido (incógnita).

La diferencia entre los dos problemas es la condición, la relación necesaria entre lo desconocido y los datos: por supuesto, la relación del paralelogramo a sus lados difiere de su relación con sus diagonales.

Lo desconocido puede ser de todas las categorías imaginables. En un problema de construcción geométrica de lo desconocido es una figura, por ejemplo un triángulo.

Cuando nos preguntamos "¿Qué dice?" lo desconocido puede ser una palabra o una secuencia de palabras, una frase, o una secuencia de oraciones, un discurso. Un problema que claramente debe especificar la categoría (el conjunto) a la que pertenece lo desconocido, tenemos que saber desde el principio qué tipo de origen desconocido se supone que encontramos: un triángulo, o un número, o una palabra,. . . etc.

Un problema claramente debe especificar la condición que la incógnita tiene que satisfacer. En el conjunto de objetos especificados por el problema de que lo desconocido debe pertenecer, no es el subconjunto de los objetos que satisfacen la condición, y cualquier objeto que pertenece a este subgrupo se llama una solución.

Este subconjunto puede contener sólo un objeto: entonces la solución es única. Este subconjunto puede estar vacío: entonces no hay solución. A veces es suficiente para decidir la existencia de una solución, es decir, para decidir si el conjunto de soluciones está vacío o no.

Cuando se trata de problemas matemáticos (a menos que el contexto sugiere lo contrario) vamos a usar la frase "los datos" para referirse a todos los objetos dados (conocido, es cierto,...) (o su serie completa) conectado con lo desconocido por la condición. Si el problema es construir un triángulo de sus lados $a, b$, y $c$, los datos son los tres segmentos de línea $a, b$, y $c$. Si el problema es resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 + ax + b = 0$$

los datos son los dos números dados $a$ y $b$. Un problema puede tener sólo un dato, o ninguna información en absoluto. Aquí es un ejemplo: "Encontrar la razón del área de un círculo al área de un cuadrado circunscrito." La razón requerida es independiente del tamaño de la figura y por lo tanto es innecesario dar la longitud del radio o algún otro dato de este tipo. Vamos a llamar a lo desconocido, la condición, y los datos de las partes principales de un problema a encontrar. De hecho, no podemos esperar resolver un problema que no entendemos. Sin embargo, para entender un problema, debemos saber, y saber muy bien, ¿qué es lo desconocido?, ¿cuáles son los datos, y cuál es la condición? Y lo que es aconsejable cuando estamos trabajando en un problema aprestar especial atención a sus partes principales.

### 5.4. Problemas "por probar"

Cuando tenemos un "*problema matemático por probar*", debemos aclarar la duda acerca de si se trata de una afirmación $A$, que se debe probar o debemos refutar $A$. Un problema sin resolver célebre de este tipo es para probar o refutar la conjetura de Goldbach: Si el entero $n$ es par y $n > 4$, entonces $n$ es la suma de dos números primos impares. La afirmación de Goldbach (se trata de una mera afirmación, no sabemos todavía si es verdadera o falsa) se expresa aquí en la forma más habitual de las proposiciones matemáticas: se trata de la hipótesis y la conclusión, la primera parte comienza con "Si", es la hipótesis, la segunda parte comienza con "entonces", es la conclusión.

Cuando tenemos que probar o refutar una proposición matemática se indica en la forma más habitual, con la hipótesis y la conclusión de la proposición se denominan correctamente las partes principales de nuestro problema. De hecho, estas partes principales merecen nuestra especial atención. Para probar la tesis de que debemos descubrir un vínculo de unión lógica entre las partes principales, la hipótesis y la conclusión, para refutar la tesis que debe mostrar (por un contra-ejemplo, si es posible) una de las partes principales, la hipótesis, no implica la otra, la conclusión.

### 5.5. Los componentes de lo desconocido, las cláusulas de la condición

Si nuestro problema es la construcción de un círculo, tenemos que encontrar, dos cosas: el centro de la circunferencia y su radio. Puede ser ventajoso dividir nuestra tarea: dos cosas buscadas, el centro y el radio, podemos tratar de encontrar una primero y luego la otra. Si nuestro problema es encontrar un punto en el espacio y utilizamos la geometría analítica, tenemos que encontrar, de hecho, tres números: tres coordenadas $x$, $y, z$ de cada punto.

De acuerdo con el punto de vista que nosotros preferimos, podemos decir que, en nuestro primer ejemplo, hay dos incógnitas, o simplemente desconocemos una y, en nuestro segundo ejemplo, hay tres incógnitas o sólo una. Sin embargo, hay otro punto de vista que a menudo es ventajoso: se puede decir que, en ambos ejemplos, sólo hay una incógnita, pero lo es, en cierto sentido. Por lo tanto, en nuestro primer ejemplo, el círculo es lo desconocido, pero es bipartita o una incógnita de dos componentes, sus componentes son su centro y su radio del mismo modo, en nuestro segundo ejemplo, el punto es un incógnita tripartita o tres componentes; sus componentes son sus tres coordenadas $x$, $y, z$. En general, podemos considerar una incógnita $x$ de varios componentes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Una de las ventajas de la terminología que hemos introducido es que, en ciertos debates generales, no es necesario distinguir entre los problemas con una incógnita y los problemas con varias incógnitas: de hecho, podemos reducir este último caso a la primera teniendo en cuenta varias incógnitas como componentes de una desconocida. Por ejemplo, lo que hemos dicho en la sec.5.3 se aplica fundamentalmente también a los problemas en los que tenemos que encontrar varias incógnitas, aunque este caso no ha sido explícitamente mencionado en la sec. 5.3.

Si nuestro problema es un problema por encontrar, puede haber ventaja en la subdivisión del problema en varias partes o cláusulas, como hemos tenido oportunidad de observar. En la resolución de un problema de construcción geométrica, podemos dividir la condición en dos partes de manera que en cada parte se obtenga un lugar geométrico para el punto desconocido (capítulo 1). Al resolver un "problema de las palabras" por el álgebra, separamos la condición en partes, tantas como incógnitas, de modo que cada parte obtiene una ecuación (capítulo 2). Si nuestro problema es un problema de probar, puede haber ventaja en la subdivisión de la hipótesis, o la conclusión, o ambos, en partes o cláusulas apropiadas.

### 5.6. Se busca: un procedimiento

En la construcción de una figura al estilo de los Elementos de Euclides, no somos libres de elegir nuestras herramientas o instrumentos: se supone que debemos construir la figura con regla y compás. Así, la solución del problema consiste, en una secuencia de operaciones geométricas bien coordinadas que parten de los datos y terminan en la figura requerida: nuestras operaciones son dibujos de líneas rectas y círculos, y la determinación de sus puntos de intersección.

En este, podemos percibir que la solución de muchos problemas consiste esencialmente en un procedimiento, un curso de acción, un esquema de operaciones bien relacionadas entre sí, un modus operandi.

Tome el problema de resolver una ecuación de segundo (o tercer, o cuarto) grado. La solución consiste en un esquema bien coordinado de las operaciones algebraicas que parten de los datos, dados los coeficientes de la ecuación, y acaban con las raíces necesarias: las operaciones son suma, resta, multiplicación o división determinada, u obtenidos con anterioridad, las cantidades o extracción de las raíces de dichas cantidades.

Consideremos un problema "para probar". La solución del problema, el resultado de nuestros esfuerzos, es una prueba, es decir, una secuencia de operaciones lógicas bien coordinadas, de pasos que parten de la hipótesis y terminan en la conclusión deseada del teorema: cada paso infiere algún nuevo punto de las partes debidamente elegidas de la hipótesis, a partir de hechos conocidos, o de puntos previamente inferidos. Los problemas no matemáticos presentan un aspecto similar.

El objeto de nuestra búsqueda puede ser una incógnita, de cualquier naturaleza o el descubrimiento de la verdad sobre cualquier tipo de pregunta, nuestro problema puede ser teórico o práctico, grave o trivial. Para resolver nuestro problema, tenemos que idear un bien concebido, un esquema coherente de las operaciones, lógicas y matemáticas, o materiales procedentes de la hipótesis a la conclusión, a partir de los datos a lo desconocido, de las cosas que tenemos a las cosas que queremos.

## CAPÍTULO 6
## Representación geométrica de los avances hacia la solución

*"Es muy útil representar las cosas de esta manera ya que nada entra en la mente con más facilidad que las figuras geométricas".*

DESCARTES: Euvres, vol. X, p. 413, Reglas para la dirección de la mente, el Artículo XII

### 6.1. Metáforas

Tratando de ver intuitivamente el progreso natural de la solución de un problema y la concatenación de las ideas esenciales involucradas, llegué finalmente a una representación geométrica del proceso de resolución de problemas. Este fue mi primer descubrimiento, y el inicio de mi interés de toda la vida, en la resolución de problemas. Fui guiada a la imagen geométrica que finalmente surgió de un grupo de expresiones metafóricas. Se ha observado con bastante frecuencia que el lenguaje está lleno de metáforas. No sé si también se ha observado que muchas de estas metáforas son interdependientes y se conectan, se asocian, forman grupos. En cualquier caso, hay una extensa familia de expresiones metafóricas, que tienen dos cosas en común: todos ellas conciernen con la actividad humana básica de la solución de problemas y todas ellas sugieren las mismas configuraciones geométricas. El descubrimiento de la solución es encontrar una conexión entre las cosas antes separadas o ideas (las cosas que tenemos y las cosas que queremos, los datos y lo desconocido (incógnita), la hipótesis y la conclusión). A veces vemos la conexión como un puente: un gran descubrimiento nos parece un puente sobre un profundo abismo entre dos ideas muy distantes entre sí. A menudo vemos la conexión realizada por una cadena: una prueba aparece como una concatenación de argumentos, como una cadena, tal vez una larga cadena, de conclusiones.

### 6.2. ¿Qué es un problema?

Necesitamos un ejemplo, y elijo un problema muy simple de la geometría sólida: Encontrar el volumen $F$ del tronco de la pirámide con base cuadrada de la derecha. Teniendo en cuenta la altura $h$ del tronco, la longitud de uno de sus lados de la base superior, y $b$ longitud de un lado de su base inferior. (Pirámide truncada)

(Una pirámide con base cuadrada es una "*pirámide recta"* si la altura coincide con el centro de la base, una pirámide truncada es la porción de la pirámide entre su base y un plano paralelo a su base. Este plano paralelo contiene una cara del tronco de la pirámide que se llama la base superior del tronco, su base inferior es la base de la pirámide original completa, su altitud es la distancia perpendicular entre sus bases).

El primer paso para resolver el problema consiste en concentrarse en el objetivo. ¿Qué queremos? nos preguntamos y nos representamos tan marcadamente la forma en la que queremos encontrar el volumen $F$. La situación mental es una representación adecuada por un solo punto, $F$ etiquetado, en la que debe ser el centro toda nuestra atención.

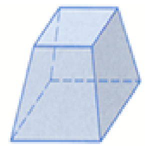


Fig.6.1. Concentrece en un punto: el objetivo

Sin embargo, no podemos encontrar la incógnita F si no se da. ¿Cuáles son los datos? nos preguntamos, ¿Que tenemos? y nuestra atención enfatiza aquellas líneas de la figura de la cual su longitud es dada $a$, $b$, y $h$, ver figura. 6.2. (El cuadrado de lado $a$ y el cuadrado del lado $b$ de el sólido considerado). Tres puntos surgen, con la etiqueta $a$, $h$ y $b$, que representan los datos y separada de la F que es la incógnita, un espacio abierto en la figura. 6.2. Este espacio abierto simboliza la pregunta abierta, nuestro problema principal tiene como objetivo conectar la incógnita F con los datos $a$, $h$, y $b$, tenemos que cerrar la brecha.

### 6.3. ¡Ahí está la idea!

Empezamos a trabajar en nuestro problema mediante la visualización de su objetivo, su incógnita, sus datos. Esta fase inicial de nuestro trabajo está debidamente representada en las figuras. 6.1 y 6.2. Sin embargo, ¿cómo debemos proceder de aquí, que curso deberemos adoptar? Si no puede resolver el problema propuesto, busque un problema relacionado. En nuestro caso, no tenemos que mirar muy lejos. De hecho, ¿cuál es la incógnita? El volumen del tronco de la pirámide. Y ¿que es una pirámide? ¿Cómo se define? Como parte de una pirámide completa. ¿Qué parte? vamos a expresarlo de otra manera; REFORMULAR EL PROBLEMA:

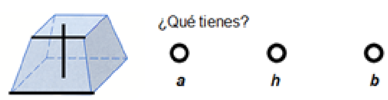



Fig. 6.2. Una pregunta abierta

El tronco es la porción que resta cuando cortamos la pirámide completa por un plano paralelo a la base. En nuestro caso ver fig. 6.3, la base de la pirámide grande (llena) es un cuadrado de área $b^2$. Si conocemos el volumen de estas dos pirámides digamos $B$ y $A$ respectivamente, encontraremos el volumen de la pirámide truncada.

$$F = B - A$$

Encontremos los volúmenes de $A$ y $B$.

Entonces hemos reducido nuestro problema original de encontrar F, a dos problemas auxiliares apropiados, encontrar $A$ y $B$. Para expresar esta reducción gráficamente introducimos dos nuevos puntos etiquetados con $A$ y $B$ en el espacio entre los datos $a$, $h$, $b$ y la incógnita $F$. Juntamos $A$ y $B$ a $F$ líneas oblicuas y así indicamos la relación esencial entre estas tres cantidades: empezando de $A$ y $B$ podemos llegar a $F$:

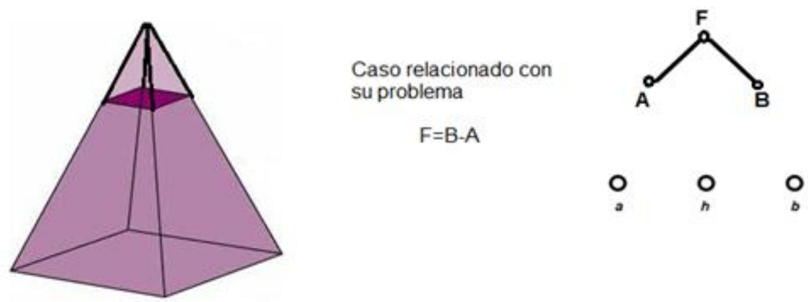



**Fig. 6.3. Si no puede resolver el problema propuesto, mire alrededor.**

Nuestro trabajo no ha terminado aún, tenemos dos nuevas incógnitas para encontrar, $A$ y $B$, hay dos puntos independientes separados de los datos por una laguna en la figura. 6.3. La situación parece optimista, sin embargo, la pirámide es una figura más familiar que la pirámide truncada, y aunque tenemos dos incógnitas, $A$ y $B$, en lugar de encontrar solo una, $F$, ahora tenemos dos (pero más fáciles) son de naturaleza similar y del mismo modo en relación con los datos de $a$ y $b$, respectivamente. En consecuencia, la representación gráfica de la situación mental de la figura 6.3 es simétrica. La $FA$ es la línea inclinada hacia el dato $a$,$FB$, hacia el dato $b$. Hemos empezado a cerrar el espacio abierto entre la incógnita original y los datos, la diferencia restante es menor.

## 6.4. Desarrollando la idea

¿Dónde estamos ahora? ¿Qué queremos? Queremos encontrar las incógnitas $A$ y $B$. ¿Cuál es la incógnita? El volumen de una pirámide. ¿Cómo podemos obtener este tipo de cosas? ¿Cómo se pueden encontrar este tipo de incógnitas? ¿A partir de qué datos se pueden obtener este tipo de incógnitas? El volumen de la pirámide se puede calcular si tenemos dos datos, el área de la base y la altura de la pirámide, el volumen es, el producto de estas dos cantidades dividido por 3. La altura no se da, pero aun así la podemos considerar. Llamémosle $x$. Entonces

$$A = \frac{a^2 x}{3}$$

En el lado izquierdo de la figura. 6.4 de la pequeña pirámide sobre el tronco aparece con más detalle, y su altura es $x$ esta enfatizado. La etapa actual de nuestro trabajo se representa gráficamente en la parte derecha de la figura. 6.4, un nuevo punto $x$ aparece por encima de los datos, y las líneas oblicuas al unirse de $A$ a $x$ y $a$, indicando que $A$ puede llegar a partir de $x$ y $a$, que $A$ puede ser expresado en términos de $x$ y $a$.

Aunque todavía quedan dos incógnitas por encontrar (todavía hay cabos sueltos en la Fig. 6.4.) hemos progresado con éxito al conectar $F$ con al menos alguno de los datos, con $a$.

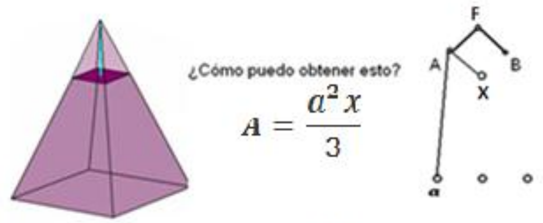



**Fig. 6 .4. Una primera conexión con los datos, pero aún quedan cabos sueltos**

En todo caso, el siguiente paso es obvio. Las incógnitas $A$ y $B$ son de naturaleza similar (están simétricamente representadas en la figura 6.3.), hemos expresado el volumen en términos de base y altura, y podemos expresar el volumen $B$ de forma análoga:

$$B = \frac{b^2\,(x+h)}{3}$$

En la parte izquierda de la figura. 6.5, la gran pirámide que contiene el tronco aparece con más detalle, su altura $x + h$ se pone de relieve. En la parte derecha de la figura. 6.5 tres nuevas líneas inclinadas aparecen, uniéndose $B$ a $b$, $h$, y $x$. Estas líneas indican que $B$ puede ser alcanzada desde $b$, $h$, y $x$, $B$ se puede expresar en términos de $b$, $h$, y $x$. Y por lo que sólo el punto $x$ queda pendiente, sigue sin estar conectado con los datos.

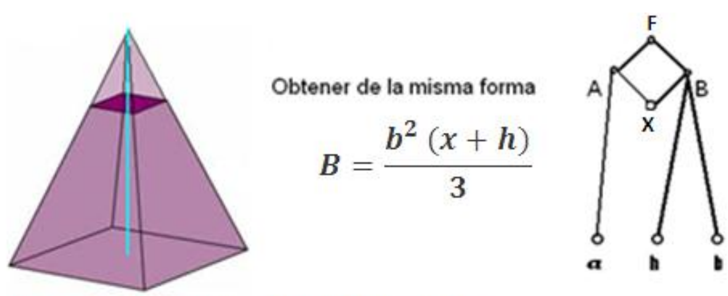



**Fig.6.5. Sólo queda una pregunta pendiente**

La brecha se está estrechando, ahora está entre $x$ y los datos.

¿Cuál es la incógnita restante? Es $x$, la longitud de una línea. ¿Cómo se puede encontrar este tipo de incógnitas? ¿Cómo puede obtener este tipo de cosas? Lo más usual es obtener la longitud de una línea de un triángulo o de un triángulo rectángulo, si es posible, o de un par de triángulos semejantes.
Sin embargo, no hay triángulo utilizable en la figura, y debe haber un lado con una $x$ un triángulo que se encuentra en un plano que pasa por la altura de la pirámide pequeña con el volumen $A$; este plano también se pasa a través de la altura de la gran pirámide con el volumen $B$, que es similar a la pequeña. Sí, triángulos semejantes en un plano que pasa por la altura y en paralelo a un lado dado de la base de una de estas pirámides. ¡Eso es todo! ¡Hemos terminado!

Un par de triángulos semejantes, aparece en la figura. 6.6 de $x$ que puede ser convenientemente calculado

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+h}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Pero los detalles no son importantes en esta etapa, sin embargo; es más importante ahora que $x$ se puede expresar en términos de los tres datos de $a$, $h$ y $b$. Las tres nuevas líneas oblicuas que surgen en la parte derecha de la figura. 6.6 indican sólo que al unirse a una $x$ a $h$, y $b$.

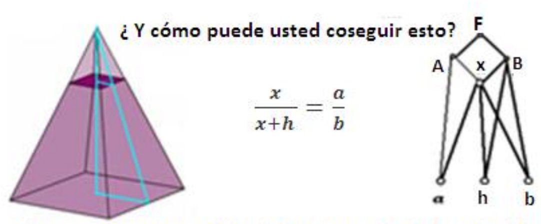


**Fig.6.6. Hemos tenido éxito en reducir la solución**

¡Hecho! Hemos tenido éxito en la reducción de la solución, en el establecimiento de una conexión interrumpida entre la incógnita $F$ y los datos $a$, $h$, y $b$ a través de los intermediarios (incógnitas auxiliares) $A$, $B$, y $x$.

## 6.5. Llevarlo a cabo

¿Se solucionó el problema? Todavía no, no del todo. Tenemos la obligación de expresar el volumen $F$ del tronco en función de los datos $a$,$h$ y $b$, esto no ha terminado todavía. Sin embargo, la primera parte más importante y más emocionante de nuestro trabajo está detrás de nosotros, la tarea pendiente es un asunto mucho más tranquilo, mucho más sencillo.

En cada etapa, se espera que el próximo paso nos acerque a nuestro objetivo, para cerrar la solución. Sí, lo esperábamos, pero no estábamos seguros, en cada etapa hemos tenido que inventar, el riesgo, el siguiente paso. Pero ahora no hay invención más o riesgo que se necesite, nosotros prevemos que pueden llegar al $F$ desconocido de los datos $a$, $h$ y $b$ con sólo seguir los hilos de la conexión sin interrupciones representada en la figura. 6.6.

Comenzamos la segunda parte de nuestro trabajo ya que hemos terminado la primera parte. Abordamos primero el auxiliar desconocido $x$, a partir de la última ecuación de la secc. 6.4 se obtiene

$$x = \frac{ah}{b-a}$$

Entonces sustituimos este valor de $x$ en las dos ecuaciones anteriores de la secc. 6.4, obteniendo

$$A = \frac{a^3\ h}{3(b-a)}, B = \frac{b^3\ h}{3(b-a)}$$

Utilizamos la última ecuación que se obtuvo por primera vez, en la secc.6.3:

$$F = B - A = \frac{b^3\ - a^3}{b - a}\frac{h}{3}$$

$$F = \frac{a^2\, ab + b^2}{3}h$$

Esta es la expresión deseada.

El trabajo de esta sección esta simbolizada adecuadamente por la figura. 6.7, donde cada línea de conexión lleva una flecha que indica la dirección en la que acabamos de utilizarla. Comenzamos a partir de los datos $a$,$h$, y $b$, y por lo tanto, procedió a través de las incógnitas auxiliares intermedias $x$, $A$, y $B$ del original, incógnita principal $F$, que expresan estas cantidades, una tras otra en función de los datos.

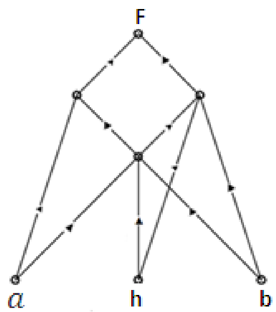
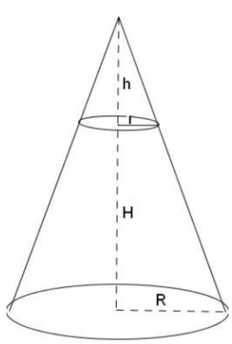



**Fig.6.7. Trabajando a apartir de los datos a la incógnita**

Las figuras 6.1 a 6.7 muestran las sucesivas etapas de la solución.

**EJEMPLOS ADICIONALES**

1.-Hallar el volumen del cono truncado

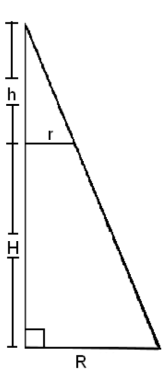



$$V_{Cono\ completo} = \frac{1}{3}\pi R^2(H + h)$$

$$V_{Cono\ pequeño} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{Cono\ truncado} = \frac{1}{3}\pi R^2(H + h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi[R^2(H + h) - r^2 h]$$




SOLUCIÓN:

$$\frac{R}{r} = \frac{H+h}{h} \quad \rightarrow \quad Rh = r(H + h) = rH + rh$$

$$\rightarrow Rh - rh = rH \qquad factorizamos$$

$$\rightarrow h(R - r) = rH \quad \rightarrow \quad h = \frac{rH}{R - r}$$

Sustituyendo en el volumen del cono truncado, tenemos:

$$V_{Cono\ truncado} = \frac{\pi}{3}R^2\left(H + \frac{rH}{R-r}\right) - r^2\left(\frac{rH}{R-r}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{(R-r)R^2H + R^2Hr - Hr^3}{(R-r)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{R^3H - R^2rH + R^2rH - Hr^3}{(R-r)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{R^3H - Hr^3}{(R-r)}\right]$$

$$= \frac{\pi H}{3}\left[\frac{R^3 - r^3}{(R-r)}\right]$$

$$= \frac{\pi H}{3}\left[\frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{(R-r)}\right]$$

$$= \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

2.- Si el radio de un cilindro circular se aumenta en un 50% y su altura se disminuye en un 20%, ¿en qué porcentaje cambia su volumen?

SOLUCIÓN:

Tenemos que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

Sean $r$ el radio de la base circular y $h$ la altura del cilindro original.

Denotemos por $V_1$ el volumen del primer cilindro y por $V_2$ el volumen del segundo cilindro, entonces

$$V_2 = \pi(1.5r)^2(0.8h)$$

$$= (2.25)(0.8)\pi r^2 h$$

$$= 1.8(\pi r^2 h)$$

$$= 1.8V_1$$

Por lo tanto, el volumen aumentó en un 80%.

# CAPÍTULO 7
# PLANES Y PROGRAMAS

*Del deseo surge el pensamiento de algunos medios que hemos visto producir efectos análogos a aquellos que perseguimos; del pensamiento de estos efectos brota la idea de los medios conducentes a ese fin, y así sucesivamente hasta que llegamos a algún comienzo que está dentro de nuestras posibilidades.*

Thomas Hobbes: Leviatán, capítulo III.

## 7.1. Un modelo de planificación

En este capítulo se describe un patrón, el patrón, básicamente importante de un procedimiento de resolución de problemas con concisión y precisión admirable. Vamos a leer entre líneas, vamos a tratar de ver el alcance del procedimiento, la variedad de los casos en que sea aplicable.

Tenemos un problema. Es decir, tenemos un objetivo $A$, que no se puede alcanzar de inmediato y estamos en busca de una acción apropiada para alcanzar dicho objetivo. Este objetivo puede ser $A$ práctico o teórico, tal vez matemático - un objeto matemático (número, triángulo,...) que deseamos encontrar (calcular, construir,...) o una proposición que queremos demostrar. En cualquier caso, queremos alcanzar nuestro objetivo $A$.

"**Del deseo resplandeció el pensamiento de algunos medios**", esto es así observar el comportamiento mental. El fin, sugiere los medios, el deseo suele ser seguido rápidamente por la idea de alguna acción que pudiera llevar a su satisfacción.

Sin embargo, volvamos al texto de Hobbes: "Del deseo se levante el pensamiento de algunos medios" $B$ podría producir la deseada $A$. Esta idea probablemente se origina en una experiencia anterior: "Hemos visto B que produce $A$ que es nuestro objetivo. "En cualquier caso, pensamos que podríamos obtener $A$ si tuviéramos $B$. "Y a partir de la idea de $B$ surge el pensamiento de algunos medios, por ejemplo $C$, para decir $B$", que podríamos obtener B si tuviéramos $C$. "Y asi continuamente "-que podríamos obtener $C$ si tuviéramos $D$- "hasta que lleguemos a algún principio dentro de nuestro propio poder", que podríamos obtener $D$ si tuviéramos $E$ ¡pero tenemos $E$! Este $E$ termina nuestra línea de pensamiento, $E$ está en nuestro poder, se da, se sabe.

De hecho, hemos considerado

$A$ si $B$, $B$ si $C$, $C$ si $D$, $D$ si $E$

Y nos han dejado en $E$ ya que tenemos $E$ incondicionalmente, sin más, sí.

Lo anterior fue la planificación. Debe ser seguido, por supuesto, por la ejecución del plan. A partir de $E$, que es un "principio dentro de nuestro propio poder" debe obtener $D$, habiendo obtenido $D$, se debe proceder a la $C$, de $C$ a $C$, y, finalmente, de $B$ a $A$. Observe que la planificación y ejecución de proceder en direcciones opuestas. En la planificación, se partió de $A$ (el objetivo, lo desconocido, la conclusión) y que terminó por llegar a $E$ (las cosas que tenemos, los datos, la hipótesis.) Sin embargo, en la ejecución del plan se trabajó de $E$ a $A$ para que $A$, el objetivo, es lo primero que pensamos y lo último que echamos mano. Si consideramos el movimiento hacia la meta como un progreso, debemos considerar la dirección que en nuestra planificación se ha movido un retroceso. Así, el patrón importante de la solución de problemas descrito por Hobbes puede ser llamado con la planificación regresiva, o yendo hacia atrás, los geómetras griegos llamaron el análisis de lo que significa "solución hacia atrás".

El lector debe visualizar esto hacia atrás trabajando en la planificación y continuando hacia adelante en la ejecución del plan en un claro ejemplo. Espero que el lector tenga éxito en la elaboración de un plan ordenado, y no se reúna con las decepciones en la realización de él.

### 7.2. Un patrón más general

Vamos a enfrentar el modelo desarrollado en el apartado anterior con el ejemplo analizado cuidadosamente en el capítulo 6.

El ejemplo muestra sin lugar a dudas la tendencia general del patrón: "trabajando hacia atrás desde lo desconocido a los datos en la fase de planificación, pero trabajando hacia adelante de los datos a lo desconocido en la ejecución del plan. Sin embargo, los detalles del ejemplo no se incluyen en el modelo. Veamos el primer paso. En el patrón de la sec. 7.1, $A$ se reduce a $B$, el objetivo principal se reduce a un objetivo secundario, lograr $A$ depende de lograr $B$. Sin embargo, el cálculo de lo desconocido (el volumen del tronco) se reduce al cálculo de dos nuevas incógnitas (dos volúmenes); no es sólo un objetivo secundario, pero hay dos de tales objetivos.

Nuestro objetivo es $A$. No podemos alcanzar $A$ inmediatamente, pero nos damos cuenta de que podríamos alcanzar varias cosas si tenemos, $B'$,$B''$, $B'''$,. . .. Bueno, no tenemos estas cosas, pero empezamos a pensar cómo podríamos obtenerlas, es decir, hemos creado $B'$,$B''$, $B'''$,. .. como nuestros objetivos secundarios. Podemos percibir después de una reflexión que podríamos alcanzar todos nuestros objetivos secundarios $B'$,$B''$, $B'''$,.... si tuviéramos varias otras cosas $C', C'', C''', \dots$ De hecho, no tenemos estas cosas ($C', C'', C''', \dots$), pero podemos tratar de obtenerlas; las concebimos como nuestros objetivos terciarios, y así sucesivamente estamos girando la red de nuestro plan, podemos estar obligados a decir varias veces "Podríamos tener esto, si tuviéramos que.. " hasta que finalmente llegan a tierra firme, las cosas que realmente tenemos. La red de nuestro plan consiste en objetivos, accesorios, todos subordinados a nuestro objetivo principal, y de sus interconexiones. Hay muchos objetivos subordinados, y los detalles de la red pueden ser demasiado complejos para decirlo en palabras, pero pueden ser adecuadamente representados por los puntos y las líneas de un diagrama del tipo que hemos desarrollado en el capítulo 6. (Por ejemplo, en el sec. 2.5 (3) nuestro principal objetivo era D, nuestros objetivos secundarios son $a$, $b$, y $c$, nuestro objetivo terciario $p$, $q$, y $r$. Véase también sec. 6.2.)

Creo que lo anterior indica con suficiente claridad un patrón general que contiene el modelo descrito en la secc. 7.1 como un caso particular, y que llamaremos el modelo de trabajo hacia atrás. Se trata de un modelo de planificación, la planificación se inicia desde el objetivo (lo que queremos, lo desconocido, la conclusión), y trabaja hacia atrás, hacia las cosas "dentro de nuestro poder" (las cosas que tenemos, los datos, la hipótesis.) es parte del plan que cuando se han alcanzado las cosas "dentro de nuestro poder" vamos a utilizarlo como un "principio", y por volver sobre nuestros pasos vamos a trabajar hacia adelante, hacia el objetivo.

### 7.3. Un programa

¿Son los dos números $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ y $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ iguales? Si no es así, ¿cuál es mayor? (Se entiende que todas las raíces cuadradas que surgen se toman con el signo positivo.)

Con un poco de experiencia en la manipulación algebraica, fácilmente puede concebir un plan para manejar esta cuestión, que incluso puede concebir un plan tan claro y determinado que se merece un término especial y se puede llamar un programa.

Los dos números propuestos son iguales, o el primero es mayor, o el segundo es mayor. Hay tres relaciones elegibles entre los dos números, expresados por los signos =,> y <, pero sólo una de estas tres relaciones es realmente válida-no se sabe por el momento cual, aunque esperamos saberlo pronto. Vamos a denotar y a escribir las tres relaciones

$$\sqrt{3} + \sqrt{11} \quad ? \quad \sqrt{5} + \sqrt{8}$$

¿Es realmente válido? Cualquiera de los tres tipos de relaciones puede ser realmente válido, se pueden realizar ciertas operaciones algebraicas igualmente aplicables a los tres. Para empezar, podemos elevar al cuadrado ambos lados y luego la misma relación se mantendrá entre los cuadrados:

$$3 + 2\sqrt{33} + 11 \ ? \quad 5 + 2\sqrt{40} + 8$$

Con esta operación hemos disminuido el número de raíces cuadradas, desde el principio se tenían cuatro, y ahora tenemos sólo dos. Por operaciones posteriores nos desharemos de las raíces cuadradas restantes y, a continuación, veremos que una de las tres relaciones posibles es representado por el signo “?”.

El lector no tiene que prever las actuaciones anunciadas en cada detalle, pero debe darse cuenta de que puede llevarse a cabo sin titubeos y están obligados a llevar a la decisión esperada. Luego, podrán convenir en que la situación merece un término especial y que ese plan definitivo debería ser llamado un programa, (véase la sección. 7.5).

Con estas observaciones que tenemos, alcanzado el objetivo de la presente sección y no hay necesidad de llevar a cabo los pasos programados. Sin embargo, vamos a llevarlas a cabo:

$$1 + 2\sqrt{33} \ ? \ 2\sqrt{40}$$

$$1 + 4\sqrt{33} + 132 \quad ? \quad 160$$

$$4\sqrt{33} \quad ? \quad 27$$

$$528 \ ? \ 729$$

No hay duda aquí, sabemos qué lado es más grande, y al volver sobre nuestros pasos nos encontramos con que

$$\sqrt{3} + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{8}$$

## 7.4. A elegir entre varios planes

A cada lado de un determinado triángulo (arbitrario) describir un triángulo equilátero exterior al triángulo dado, y unirse a los centros de los tres triángulos equiláteros. Demostrar que el triángulo obtenido es equilátero.

En la figura. 7.1, $\Delta ABC$ es el triángulo dado $A'$, $B'$ y $C'$son los centros de los triángulos equiláteros se describe en $BC$ , $CA$ y $AB$, respectivamente. Estamos obligados a demostrar que $\Delta\, A'B'C'$ es equilátero, pero parece extraño, casi increíble, que este triángulo sea equilátero siempre, la forma final producida por la construcción es independiente de la forma inicial arbitraria. Tenemos la sospecha de que la prueba no puede ser fácil.

En cualquier caso no nos gustan los puntos $A'$, $B'$ y $C'$ que aparecen tan aislados del resto de la figura. 7.1. Este defecto, sin embargo, no es grave. Como se ve fácilmente, $\Delta\, BA'C$es isósceles, $A'B$= $A'C$ y $< BA'C = 120°$. Se introduce este triángulo y dos triángulos análogos en la figura y así obtener la "más coherente "fig. 7.2.

Sin embargo, aún no sabemos cómo acercarse a la meta. ¿Cómo podemos probar esa conclusión? ¿A la manera de Euclides? ¿Por geometría analítica? ¿Por trigonometría?

(I) ¿Cómo podemos probar en forma de Euclides que $A'B'$= $A'C'$? Al mostrar que $A'B'$y $A'C'$ son los lados correspondientes de triángulos congruentes. Sin embargo, no hay triángulos que puedan utilizarse en la figura, y no veo cómo podríamos introducir triángulos utilizables. Esto es desalentador, vamos a probar con otro enfoque.

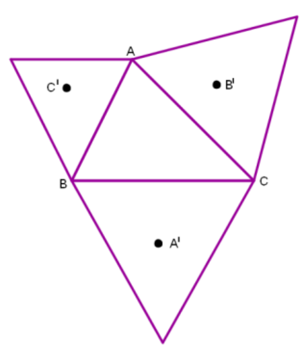



**Fig. 7.1. Tres puntos aislados**

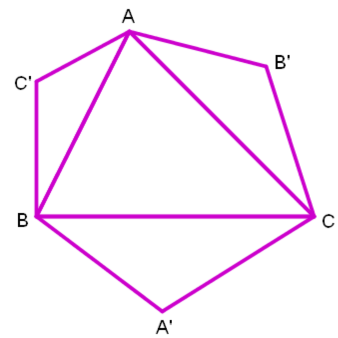



**Fig. 7.2. Más coherente**

(2)¿Cómo se puede probar por la geometría analítica que $A'B'$= $A'C'$? Debemos considerar las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $C$ cantidades dadas y las coordenadas de los puntos $A'$, $B'$ y $C'$ como incógnitas.

Después de haber expresado estas incógnitas en términos de los datos, se pueden expresar también las distancias en cuestión en términos de los datos y examinar si son iguales o no. Es un plan muy claro, pero hay que manejar seis incógnitas y seis datos, no, no es demasiado atractivo, vamos a tratar el tercer enfoque.

(3) ¿Cómo se puede probar por trigonometría que $A'B'$= $A'C'$? Debemos considerar los lados $a$, $b$, y $c$ del $\Delta\ ABC$ como cantidades determinadas, y las tres distancias

$B'C' = x, \quad C'A' = y, \quad A'B' = z$

como incógnitas. Después de haber calculado las incógnitas, debemos examinar si en realidad $x = y = z$. Esto se ve mejor que (2), sólo tenemos tres incógnitas y tres datos.

(4) No tenemos que calcular tres incógnitas, dos son suficientes: si $y = z$, cualquiera de los dos lados son iguales y suficientes.

(5) Ni siquiera es necesario calcular dos incógnitas, una es suficiente si seguimos de manera más sutil, es suficiente para expresar la $x$ en términos de $a$, $b$, $c$, y siempre que nos las arreglamos para conseguir una expresión simétrica en $a$, $b$, y $c$. (Una expresión es simétrica en $a$, $b$, $c$, y si no se modifica cuando se intercambian $a$, $b$, y $c$. Si esta expresión es válida para $x$ debe ser válido igualmente para $y$, $z$.)

Este plan, aunque depende de la ingenuidad del resolvedor de problemas y en la llegada de una pequeña idea, parece bastante atractivo, el lector debe tratar de llevarlo a cabo (ver fig. 7.3, ej. 7.3).

(6) ¿Tiene nuestra historia una moraleja? Yo pienso que si.

Si usted ve varios planes, ninguno de ellos es muy seguro, si hay varios caminos divergentes desde el punto donde se encuentre, explorar un poco de cada camino antes de que tú te aventures demasiado lejos a lo largo de cualquier persona, cualquier persona podría llegar a un callejón sin salida.

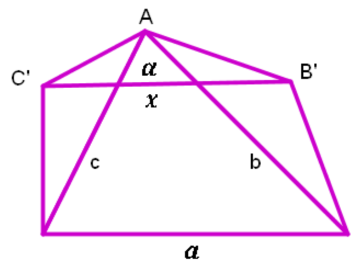



**Fig. 7.3. Concentrarse en un lado**

### 7.5. Planes y programas

Podemos considerar nuestro plan como un camino por el que tenemos la intención de viajar. Sin embargo, hay planes y planes. Nos gustaría contar con un plan de alguna acción que nos lleve derecho a la meta, pero, por desgracia, no siempre tienen éxito en la elaboración de un plan completo, y también menos acciones de largo alcance necesita un poco de planificación. Podemos ver un poco del camino, podemos ver un largo tramo de la misma, o podemos ver la dimensión de nuestro camino derecho de la meta. Entonces, podemos ver nuestro camino vagamente o con claridad. Una vez más, podemos esperar, y prepararnos para las distintas eventualidades a lo largo de la porción de la carretera que no se ve bien o no vemos en absoluto. Una eventualidad deseable, la esperanza de que nunca nos deja del todo, es tener una idea brillante que inmediato aclarará todo.

Contamos a lo mucho con ideas que pueden ser consideradas como la más importante distinción entre los planes y proyectos. Si no depende en absoluto de ideas nuevas, pero confiamos en que las medidas ya meditadas y previstas en el plan son suficientes para alcanzar nuestro objetivo, tenemos un plan claro y la determinación suficiente para ser llamado un programa. Podemos pasar mucho tiempo trabajando en los diversos planes imperfectos hasta que tenga éxito en el desarrollo de uno de ellos en un programa.

### 7.6. Los patrones y los planes

Bajo las circunstancias apropiadas, cada patrón que hemos estudiado anteriormente sugiere un plan, pero no inmediatamente produce un plan definido, un programa.
Por ejemplo, tenemos un problema de construcción geométrica. Podemos tratar de resolverlo siguiendo el modelo de dos lugares. Este es un plan, pero de hecho se necesitan más ideas para encontrar un punto adecuado para la construcción de lo que puede ser el problema reducido, y para separar la condición adecuada para que podamos obtener dos lugares en ese punto.
O bien, nos decidimos a resolver un problema geométrico al reducirlo a ecuaciones, siguiendo el modelo cartesiano. Este es un plan, aunque, se necesitan más ideas para establecer tantas ecuaciones como incógnitas y nuevas ideas para resolver el sistema de ecuaciones.
Trabajando hacia atrás es un patrón muy general y útil de planificación, necesitamos un poco de las ideas de la materia a trabajar a través de la brecha de lo desconocido a los datos. Cuando la

planificación regresiva ha tenido éxito y la red lógica que abarca la brecha se ha perfeccionado, la situación es muy diferente. Luego tenemos un programa de trabajo prólogo de los datos a lo desconocido.

## CAPÍTULO 8
## PROBLEMAS DENTRO DE PROBLEMAS

*"Cuando, en alguna construcción o demostración, se asume todo lo que no se ha demostrado, pero requiere un argumento, entonces consideramos que lo que se ha asumido como dudoso en sí mismo es digno de investigación, y lo llámanos lema"****.***

Proclo: Comentario a Euclides, a la Proposición I del Libro I.

*"Cuando surge un problema deberíamos ser capaces de ver pronto si será provechoso examinar algunos otros problemas primero, cuales y en que orden".*

DESCARTES: Reglas para la dirección de la mente. Regla VI.

### 8.1. Problemas auxiliares: medio para un fin

Algunas observaciones en monos de Wolfgang Kohler tienen gran interés para nosotros. Vamos a describir, de forma esquemática, uno de sus experimentos. Dentro de la jaula esta un mono que tiene hambre. Fuera de la jaula en el suelo se encuentra un plátano. El mono puede pasar los brazos entre los barrotes de su jaula, pero el plátano está más allá de su alcance. El mono se ha esforzado por llegar al plátano, pero sin éxito. También en el exterior de su jaula, y dentro de su alcance, se encuentra un palo, pero parece que no presta atención a ello. De repente, toma el palo, torpemente jala el plátano hasta que puede llegar a él, y luego lo agarra y se lo come.

Este chimpancé ha resuelto dos problemas:

A. Para conseguir el plátano.
B. Para agarrar el palo.

El problema A surgió primero. Originalmente, el mono no muestra el menor interés en el palo, ya que no se lo puede comer, sin embargo, resolvió B en primer lugar. La solución del problema B sirvió para la solución de su problema original A. El mono tenía un interés directo en A y sólo un interés indirecto en B, A es extremo, B no significaba nada para él; A era su principal y original problema, B sólo un problema auxiliar.

Un problema auxiliar es un problema en el que pasamos la atención al trabajo no por su propio bien, sino porque tenemos la esperanza de que tal atención en el trabajo nos puede ayudar a resolver otro problema, nuestro problema original. Un problema auxiliar es un medio para un fin, debe dar acceso a la meta, el problema original es el fin y la meta.

Acceder a la solución de un problema aparentemente inaccesible por idear y resolver primero un problema auxiliar adecuado es el rasgo más característico de la acción inteligente. Casi no puede negarse a considerar el rendimiento del mono como un acto de inteligencia. Vamos a clasificar los problemas auxiliares, a partir de ejemplos matemáticos.

## 8.2. Problemas equivalentes

Comenzamos con un ejemplo. Nuestra tarea consiste en resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(A)\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y+z=5 \\ x+y-z=31 \end{cases}$$

Del sistema $(A)$ se deriva otro sistema $(B)$:

(1) Dejamos a la primera ecuación de $(A)$sin cambios;

(2) Sumamos la segunda y tercera ecuación de $(A)$;

(3) Se resta de la segunda ecuación de $(A)$ su tercera ecuación y así obtenemos las tres ecuaciones de un nuevo sistema:

$$(B)\begin{cases} x-y=-4 \\ 2(x+y)=36 \\ 2z=-26 \end{cases}$$

La derivación de $(B)$ muestra que los números $x, y, z$ que satisfacen $(A)$ deben, necesariamente, satisfacer $(B)$. Lo contrario también es cierto: si los números $x, y, z$ satisfacen $(B)$ deben satisfacer $(A)$. Esto parece posible, pero también podemos probarlo de varias maneras, por ejemplo, de la siguiente manera. Al dividir las dos últimas ecuaciones de (B) por 2, obtenemos

$$(C)\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=18 \\ z=-13 \end{cases}$$

y de $(C)$ podemos volver a $(A)$ salir de la primera ecuación de $(C)$sin cambios y añadiendo primero, y luego restando, las dos últimas. En resumen, si tres números $x, y, z$ satisfacen uno de los dos sistemas $(A)$ y $(B)$, deben de satisfacer el otro.

Los sistemas $(A)$y $(B)$no son idénticos, no consisten de las mismas ecuaciones. Sin embargo, se puede decir que estos dos problemas son equivalentes. Esta es la definición general del uso de este término: dos problemas son equivalentes para nosotros si sabemos que la solución de cada uno implica la solución del otro.

La transición de un problema a un problema equivalente se llama reducción bilateral (o reversible, o convertible, o equivalentes). Por ejemplo, la transición de nuestro problema original, consistía en resolver $(A)$ para resolver el problema $(B)$ es una reducción bilateral. Es una reducción muy útil, el sistema (B) está más cerca de la solución que el sistema $(A)$. De hecho, $(B)$ está más cerca de $(C)$ que $(A)$ y $(C)$ está casi al final de nuestra tarea, ya existe el valor de $z$, y poco queda por hacer para que también existan los valores de $x$ e $y$.

### 8.3. Cadenas de problemas equivalentes

Volvamos al sistema $(C)$ en la secc. 8.2, por suma y resta, se obtiene el sistema

$$(D)\begin{cases}2x = 14\\2y = 22\\z = -13\end{cases}$$

y por lo tanto

$$(E)\begin{cases}x = 7\\y = 11\\z = -13\end{cases}$$

Tenemos aquí una secuencia de cinco sistemas (cada uno es un sistema de tres ecuaciones) $(A)$, $(B)$, $(C)$, $(D)$, $(E)$

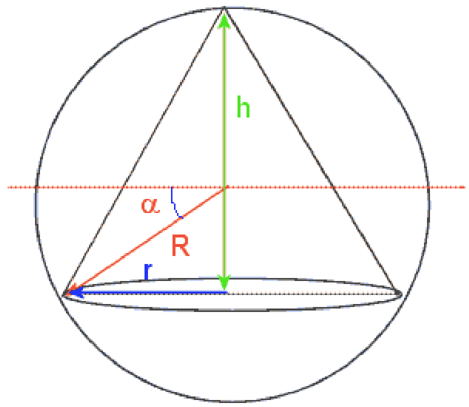
Hay un problema asociado a cada uno: encontrar los valores de $x, y, z$ que satisfacen el sistema. [El "problema" está totalmente resuelto, por lo que el término "problema" no se utiliza adecuadamente, es decir, en el caso del sistema (E).] Cada uno de estos problemas es equivalente al anterior problema (y también para los siguientes), ya que cada eslabón de una cadena se une al siguiente, tenemos aquí una cadena de problemas equivalentes.

En nuestra cadena $(A)$, es el principio y $(E)$ es el final; $(A)$ es el sistema de ecuaciones propuesta originalmente y $(E)$ presenta la solución. Tenemos aquí una forma ideal para llegar a la solución. A partir del problema propuesto, crear una secuencia de problemas, cada problema es equivalente, y más cercano a la solución del problema original. Empezando por el problema propuesto ideamos una secuencia de problema; cada problema es equivalente y más cercano a la solución que el problema original, procediendo de esta forma obtenemos como paso final la solución en sí misma.

Sin embargo, incluso en las matemáticas, en la búsqueda de lo desconocido y en la lucha por la prueba, a menudo tienen que conformarse con algo menos que la perfección. Y así volvemos al estudio de nuevos problemas auxiliares.

Por ejemplo:

Hallar el volumen máximo del cono inscrito en una esfera.




Este problema se puede reducir a un problema de dos dimensiones, para este caso equivale a hallar las dimensiones del triángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo dado.

# CAPÍTULO 9
# LA LLEGADA DE LA IDEA

*"Mi mente fue golpeada por un relámpago en la que se cumplió mi deseo".*

Dante: Paradiso, Canto XXXIII.

## 9.1. Viendo la luz

La solución de un problema se nos puede ocurrir de una forma muy abrupta. Después meditando sobre el problema durante mucho tiempo sin aparente progreso, de repente concebimos una idea brillante, vemos la luz del día, tenemos un momento de inspiración.

Tal experiencia de resolver un problema, es una clarificación repentina que trae la luz, orden, conexión, propósito y los detalles que antes parecían oscuros, confusos, dispersos y difíciles de alcanzar.

En estas materias, sin embargo, un grano de experiencia es mucho más valioso que kilos de descripciones. Para que sea más cercana a la experiencia personal usted debe trabajar un ejemplo concreto. Ejemplos matemáticos muy elementales pueden ser la mejor manera de llevarnos al trabajo, el suspenso y el placer del descubrimiento y "*acostumbrar a nuestros ojos a ver la verdad claramente y distintamente*" (Descartes).

## 9.2. Ejemplo

Nos tomamos la libertad de intentar un pequeño experimento con el lector. Expondré un teorema sencillo, pero no demasiado común de la geometría, y luego voy a tratar de reconstruir la secuencia de ideas que llevaron a su prueba. Voy a proceder lentamente, muy lentamente, dejando al descubierto una pista tras otra, y cada pista revela poco a poco. Pienso que antes de que haya terminado toda la historia, el lector podrá tomar la idea principal (a menos que exista alguna circunstancia especial que obstaculice). Pero esta idea es bastante inesperada, por lo que el lector puede experimentar el placer de un pequeño descubrimiento.

A. Si hay tres círculos que tienen el mismo radio y pasan a través de un punto, el círculo a través de sus otros tres puntos de intersección también tiene el mismo radio.

Este es el teorema que tenemos que probar. La afirmación es breve y clara, pero no muestra los detalles con claridad suficiente. Si dibujamos una figura (Fig.9.1) e introducimos la notación adecuada, llegamos a la siguiente afirmación más explícita:

B. Tres círculos $k, l, m$ tiene el mismo radio $r$ y pasan por el mismo punto $O$. Mas aún, $l$ y $m$ se intersectan en el punto $A$, $m$ y $k$ se intersectan en $B$, $k$ y $l$ se intersectan en $C$. Entonces el círculo $e$ a través de $A$, $B$, $C$ también tiene radio $r$.

La figura 9.1 muestra los cuatro círculos $k, l, m,$ y $e$ (círculo punteado) y sus cuatro puntos de intersección $A, B, C$ y $O$. La figura tiende a ser insatisfactoria, sin embargo, no es simple, y es aún incompleta, hay algo que parece faltar.

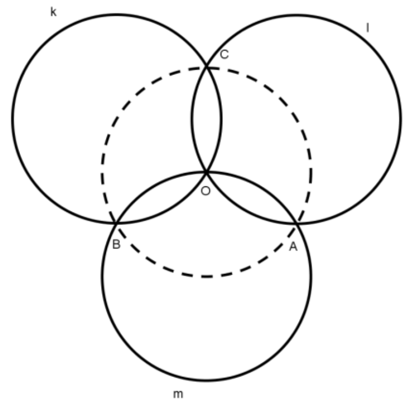



**Fig.9.1. Tres círculos a través de un punto.**

Estamos tratando con círculos. ¿Qué es un círculo? Un círculo se determina por el centro y el radio, todos sus puntos tienen la misma distancia, medida por la longitud del radio, desde el centro. No fue posible introducir el radio común $r$, hemos fallado en tomar en cuenta una parte esencial de la hipótesis. Por lo tanto, introduzcamos los centros, $K$ de $k$, $L$de $l$ y $M$ de $m$. ¿Dónde debemos exhibir el radio $r$? No parece haber ninguna razón para tratar a cualquiera de los tres círculos dado $k, l, m$, o cualquiera de los tres puntos de intersección $A, B, C$ mejor que los demás. Sentimos la necesidad de conectar los tres centros con todos los puntos de intersección del círculo correspondiente: $K$ con $B, C$, y $O$, y así sucesivamente.

La figura resultante (Fig. 9.2) esta desconcertantemente “llena”. Hay tantas líneas, rectas y círculos, que tenemos mucho problema en "ver" la figura de manera satisfactoria. El dibujo es ambiguo a propósito, presenta una figura determinada, si usted lo mira en la forma usual, pero si usted le da vuelta a una posición determinada y mira de una manera peculiar , de repente otra figura aparece repentinamente, lo que sugiere algún comentario más o menos ingenioso de la primera. ¿Se puede reconocer en nuestra figura enigmática, sobrecargado con líneas rectas y círculos, una figura que tiene sentido?

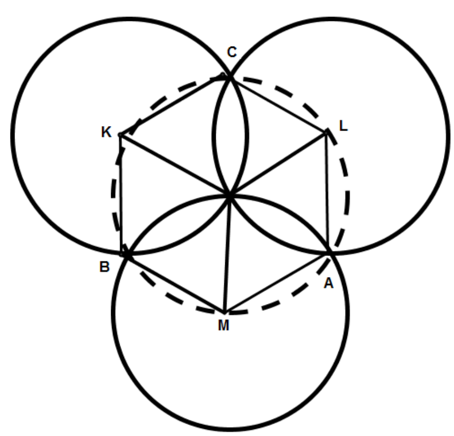



**Fig. 9.2. Demasiado lleno.**

Podemos ser conducidos al esfuerzo para resolver el problema propuesto, o por alguna circunstancia secundaria, no esencial. Por ejemplo, cuando estamos a punto de volver a dibujar nuestra figura insatisfactoria, podemos observar que toda la figura está determinada por su parte rectilínea (Fig. 9.3).

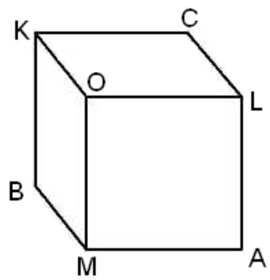



**Fig. 9.3. Te recuerda - ¿A qué?**

Esta observación parece ser importante. Sin duda, simplifica la imagen geométrica, y posiblemente mejore la situación lógica. Nos lleva a replantear nuestro teorema de la siguiente forma.

A. Si los nueve segmentos

$$KO, KC, KB,$$

$$LC, LO, LA,$$

$$MB, MA, MO,$$

son todos iguales a $r$, existe un punto $E$ tal que los tres segmentos

$$EA, EB, EC$$

también son iguales a $r$.

Esta afirmación dirige nuestra atención a la figura. 9.3. Esta figura es atractiva-, nos recuerda algo familiar. (¿A qué?)

Por supuesto, algunos cuadriláteros de la Figura. 9.3, como $OLAM$, tienen por Hipótesis, los cuatro lados iguales, son rombos. Un rombo es un objeto familiar, habiéndolo reconocido, podemos "ver" mejor la Figura. (¿Qué nos recuerda la figura entera?)

Los Lados opuestos de un rombo son paralelos. Insistiendo en esta observación, nos damos cuenta de que los 9 segmentos de la fig. 9.3 son de tres tipos; segmentos de la misma clase, como $AL$, $MO$, y $BK$, son paralelas entre sí. (¿En que consiste la figura ahora?)

No debemos olvidar la conclusión que estamos obligados a alcanzar.

Vamos a suponer que la conclusión es verdadera. Introducir en la figura el centro $E$ del círculo $e$, y los tres radios que terminan en $A, B$ y $C$, obtenemos (supuestamente) algo más que rombos, algo más que segmentos paralelos, ver fig. 9.4. (¿Qué nos recuerda la figura ahora?)

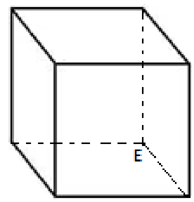



**Fig. 9.4. ¡Por supuesto!**

Por supuesto, la figura 9.4.es la proyección de las 12 aristas de un paralelepípedo que tiene la particularidad de que las proyecciones de todas las aristas son de igual longitud.

La figura 9.3 es la proyección de un paralelepípedo "no transparente", vemos sólo 3 caras, 7 vértices, 9 aristas; tres caras, un vértices y tres aristas son invisibles en esta figura. La figura 9.3 es sólo una parte de la figura 9.4, pero esta parte define la figura entera. Si el paralelepípedo y la dirección de la proyecciones se elegirán de manera que las proyecciones de las nueve aristas representadas en la fig.9.3 son todas iguales a $r$ (como debe ser, por hipótesis), las proyecciones de las tres aristas restantes deben ser iguales a $r$.

Estas tres líneas de longitud $r$ se emiten desde la proyección de la octava, el vértice invisible, y esta proyección $E$ es el centro de un círculo que pasa por los puntos $A, B$ y $C$, cuyo radio es $r$.

Nuestro teorema está demostrado y probado por una concepción sorprendente, artística de una figura plana como la proyección de un sólido.

(La prueba utiliza las nociones de geometría sólida. Espero que esto no sea un gran error, pero si es así, es fácil de corregir. Ahora que podemos caracterizar la situación del centro simple $E$, es fácil para examinar la longitud de $EA, EB$ y $EC$, independientemente de cualquier geometría sólida. Sin embargo, no se insiste aquí en este punto.)

# CAPÍTULO 10
# EL TRABAJO DE LA MENTE

*"Mariotte dice que la mente humana es como una bolsa: cuando usted está pensando, usted está agitando la bolsa hasta que algo salga de ella. Por lo tanto, no hay duda de que el resultado del pensamiento depende en cierta medida del azar. Yo añadiría que la mente humana es más como un colador: cuando usted está pensando usted está sacudiendo el tamiz hasta que algunas cosas pasan (después de varios minutos). Cuando pasan, le llaman la atención lo que parece pertinente o importante. De nuevo, es algo como esto: atrapar a un ladrón, el comandante de la ciudad da una orden a toda la población: pasar a través de una cierta puerta donde el hombre que fue robado está vigilando. Mas aun para salvar algo de tiempo y problemas algún método de exclusión puede ser utilizado. Si el hombre que fue robado dice que el ladrón fue un hombre, no una mujer, un adulto, no un joven o un niño, no todos están obligados a pasar la puerta".*

LEIBNITZ: Opuscules et fragments, p. 170.

## 10.1. Nuestra forma de pensar

Un solucionador de problemas debe conocer su mente y un atleta debe conocer su cuerpo, en aproximadamente la misma forma que un jinete conoce a sus caballos.

Lo que empieza a leer ahora no es un capítulo de un libro de texto de psicología, no es exactamente una conversación entre solucionadores de problemas que hablan de las costumbres de sus mentes, sin embargo, es más como una conversación de una presentación formal.

**Tiene un problema**

**Un ingrediente esencial del problema es el deseo**, la voluntad, y la determinación para resolverlo. Un problema que se supone que debe resolver y que usted lo ha entendido muy bien, todavía no es su problema. Se convierte en su problema, cuando se decide realmente a hacerlo, cuando desea resolverlo. El deseo de resolver su problema es un deseo productivo: puede llegar a producir la solución, ciertamente produce un cambio en su mente.

**Pertinencia**

Es posible que haya un problema tan preocupante, que no puede deshacerse de él, le sigue a todas partes. Un hombre con un problema puede estar obsesionado por él. Él parece distraído, él no se da cuenta de cosas que parecen obvias para los demás, y se olvida de las cosas que ninguno de sus vecinos se olvida. Newton, trabajando intensamente en sus problemas, a menudo se olvidaba de comer sus alimentos. Si, la atención del resolvedor de problemas es selectiva, rehúsa poner atención a cosas que aparecen irrelevantes para su problema.

**Proximidad**

Un estudiante presentará un examen escrito en matemáticas. No está obligado a hacer todos los problemas propuestos, pero debe hacer el mayor número posible. En esta situación, su mejor estrategia puede ser empezar a ver todos los problemas a un ritmo adecuado y elegir aquellos que probablemente dómine.

Observe que esto supone que el solucionador de problemas es capaz de evaluar, en cierta medida la dificultad de sus problemas, puede estimar en un grado su "distancia psicológica" de la solución a su problema. De hecho, alguien seriamente preocupado por su problema tiene un vívido sentimiento de la proximidad de la solución y por el ritmo de su progreso hacia la solución. Él no puede usar palabras: "Va bien, la solución puede estar a la vuelta de la esquina" o "Va muy despacio y la solución todavía está muy lejos", o "me quedé atrapado, no hay progreso en absoluto ", o" estoy a la deriva lejos de la solución”.

## 10.2. Previsión

Tan pronto como estamos seriamente preocupados con nuestro problema, tratamos de prever, tratamos de adivinar, esperamos algo, prevemos un esbozo de la forma de la solución. Este esquema puede ser más o menos definido y, por supuesto, puede ser más o menos mal esbozado.

Un hombre primitivo sólo se sienta allí con su problema, rascándose la cabeza o masticando su lápiz, en espera de una idea brillante, y haciendo muy poco o nada que lo pueda llevar cerca de esa idea brillante. Y cuando la idea deseada finalmente aparece y trae una conjetura plausible, simplemente acepta la conjetura, considerándola como la solución poco o nada crítica.

Un solucionador de problemas formula sus conjeturas más complejas con más escepticismo. Su primera aproximación puede ser: "Hay 25" o "yo le digo esto y lo otro." Sin embargo, luego comprueba su conjetura y puede cambiar: " No, no hay 25. Sin embargo, voy a tratar de 30" o "No, no sirve de nada decirle, al no poder responder a esto y lo otro. Sin embargo, yo podría decirle que… "Y, finalmente, por "ensayo y error", por aproximaciones sucesivas, el solucionador de problemas puede llegar a la respuesta correcta, con un plan adecuado.

Un solucionador de problemas mucho más sofisticado y con más experiencia, cuando no logra adivinar la respuesta general, trata de adivinar una parte de la respuesta, alguna característica de la solución, alguna aproximación a la solución, o alguna otra característica de un acercamiento a la solución. Luego, busca ampliar su conjetura, también busca oportunidades para comprobar su conjetura, y lo que busca es adaptarse a ella con la mejor información que pueda obtener en ese momento.

Por supuesto, tanto a los sofisticados y a los no sofisticados les gustaría tener una estimación muy buena, una idea brillante.

Sin embargo, muchas veces, el solucionador de problemas tiene una sensación definitiva sobre las perspectivas de su conjetura. Los pueblos primitivos que ni siquiera saben lo que es una prueba pueden tener los sentimientos más fuertes sobre sus conjeturas, las personas sofisticadas pueden distinguir matices de sentimientos, pero cualquiera que haya concebido una conjetura tiene algún sentimiento sobre el destino probable de su conjetura.

Y así nos damos cuenta todavía de otro tipo de sentimiento, además de los sentimientos de relevancia y proximidad, en la mente del solucionador de problemas. ¿Es esté es el punto relevante? ¿Qué tan lejos está la solución? ¿Qué tan buena es esta conjetura? Este tipo de preguntas acompañan cada movimiento del solucionador de problemas.

### 10.3. Región de búsqueda

David Perkins en su libro "La bañera de Arquímedes y otras historias del descubrimiento científico. El arte del pensamiento creativo" (original en inglés año 2000) explica el proceso creativo como un "salto mental" he indica que hay al menos 4 aspectos que se aplican

1.- Un paramo de posibilidades

2.- Una meseta sin indicios

3.- Un angosto cañón de exploración

4.- Oasis de falsas promesas

Resolver un problema, seria como buscar oro: hay poco oro en muchísimo espacio. Aunque el buscador dispone de numerosos sitios en donde mirar, sólo unos pocos premiarán su esfuerzo. Ha de esforzarse y persistir frente a la enorme magnitud de la tarea y la realidad de que sólo cabe explorar unos cuantos puntos. De manera semejante, en los problemas de salto de pensamiento aparecen con frecuencia muchas direcciones tentadoras, pero escasean las auténticas soluciones. Esto ilustra el punto 1.

En los problemas típicos, el avance del pensamiento se topa con la dificultad de que no existen indicios evidentes que apunten en la dirección de una solución. Esto explica el punto 2.

A veces nos vemos atrapados por nuestras ideas que a la larga resultan poco productivas, el problema es que no lo sabemos de momento. Los problemas de salto de pensamiento atrapan a menudo a quien trata de resolverlos basándose en un supuesto aceptado de antemano, una idea limitada de la cuestión o una concentración en una pauta normal de reflexión. El individuo busca vigorosamente una solución, pero dentro de las fronteras de lo que no la contiene. Este es el punto 3.

Los problemas de salto de pensamiento tientan con frecuencia a quienes pretenden resolverlos con respuestas casi suficientemente buenas, aunque no por completo. Es difícil alejarse de estas, es decir es difícil abandonar un oasis de falsas promesas de "solución"

Y propone algunos problemas conocidos para ilustrar, como

a) "Dados 9 puntos alineados en un cuadrado 3 x 3 trazar cuatro líneas que pasen por los nueve puntos del dibujo sin alzar el lápiz del papel".

b) El problema del cruce de un rio de 3 caníbales y 3 misioneros, la canoa solo admite dos personas, si los caníbales llegan a superar a los misioneros en algún lado del rio, estos se convertirán en su cena.

Propone cuatro operaciones: exploración, detección, reconsideración y desenfoque.

La exploración supone examinar ampliamente las posibilidades, ensayando ésta y aquella. La exploración implica asimismo con frecuencia un estudio sistemático de todas las posibilidades.

Detección de pistas: es común que haya ausencia de indicios, ninguno de los enfoque funciona y no está clara la dirección en la que hay que buscar. Detección significa esforzarse más por hallar indicios que apunten hacia la solución.

Reconsideración: es probable que tras un periodo de búsqueda infructuosa en el problema se advierta que intentando las mismas cosas una y otra vez no se avanza en absoluto. Tal vez sea bueno preguntarse ¿Qué limitaciones doy por supuestas? Y abandone el marco dentro del cual ha estado trabajando para sustituirlo por otro más amplio.

El desenfoque significa alejarse de enfoques seductores que en realidad no funcionan.

Volviendo a Polya, en nuestro caso la región de búsqueda corresponde al "paramo de posibilidades". Tan pronto como estamos seriamente preocupados con nuestro problema, nosotros anticipamos un esbozo de su solución. Este esquema puede ser vago, puede ser apenas consciente, pero que se manifiesta en nuestra conducta. Podemos intentar varias soluciones, pero son todas iguales, pero quizás no recibidas de manera consciente-preconsciente, percibimos un esquema. Cuando ninguna de las soluciones probadas se ajusta al problema, nos sentimos perdidos, nada viene a la mente, no podemos salir de ese esquema preconcebido. No hay que buscar una solución justa en cualquier parte del mundo, sino una solución dentro de una determinada **región limitada de búsqueda**.

Para iniciar la búsqueda dentro de una región limitada probablemente puede ser razonable. Es bastante razonable comenzar la búsqueda de lo desconocido dentro de la región limitada, pero no es razonable a perseverar en la búsqueda de lo que incluso se hace más y más claro que no está allí.

### 10.4. Decisiones

La resolución de problemas puede ser un proceso contemplativo, que puede ser inquietante y confuso. O puede ser un largo y arduo camino, si voy a la solución, cada giro se caracteriza por una decisión. Tales decisiones son acompañadas por sentimientos de relevancia y proximidad, o simple esperanza. Decisiones y sentimientos rara vez se expresan en palabras, pero puede suceder de vez en cuando:

"Ahora lo veo."

"No, no hay mucho que buscar ahí. Déjame ver."

"No hay mucho que ver aquí tampoco, pero hay algo en el aire. Deja mirar un poco más."

Un tipo importante de la decisión es ampliar la zona de búsqueda, para descartar una limitación que estrecha la búsqueda la cual comienza dándonos una sensación de opresión.

### 10.5. Movilización y organización

La actividad mental del resolutor de problemas es muy poco conocida y su complejidad puede ser indescifrable. Sin embargo, uno de los resultados de esta actividad es perfectamente obvia: a medida que avanza el resolutor de problemas, recoge más y más material. Vamos a comparar la concepción del resolutor de problemas de un matemático al principio y al final de su trabajo. Cuando surge el problema, hay una imagen simple: el resolutor ve su problema como un todo indivisible, sin detalles, o con muy pocos detalles, por ejemplo, se pueden ver sólo las partes principales, incógnitas, datos y condiciones, o una hipótesis y la conclusión. Sin embargo, la imagen final es muy diferente: es complejo, lleno de detalles y material relevante que el resolvedor de problemas difícilmente podría haber sospechado desde el principio.

Hay líneas auxiliares en la figura geométrica, originalmente hay incógnitas auxiliares, hay materiales de los conocimientos anteriormente adquiridos por el resolutor, especialmente los teoremas aplicados al problema.

¿De dónde vinieron todos estos materiales, elementos auxiliares, teoremas, etc.? El resolutor los ha recogido, él los tuvo que extraer de su memoria con el objetivo de conectarlos con su problema. Llamaremos tal recopilación movilización y tal conexión organización.

Resolver un problema es similar a la construcción de una casa. Debemos recoger el material adecuado, pero la recopilación del material no es suficiente, un montón de piedras no es todavía una casa. Para la construcción de la casa o la solución, tenemos que juntar las piezas y organizar un conjunto con un propósito. Movilización y organización no pueden ser separados, son aspectos complementarios del mismo proceso de nuestro complejo trabajo dirigido a la solución. Este tipo de trabajo, cuando es intensivo, trae a juego todos nuestros recursos psíquicos, requiere toda la gama de nuestras actividades mentales, y presenta una inagotable variedad de aspectos. Podemos estar tentados a distinguir algunas de las operaciones múltiples mentales envueltas y describirlas en términos tales como el aislamiento y combinación, reconociendo y recordando, reagrupando y completando.

Las siguientes líneas intentan describir estas actividades. Por supuesto, el lector no debe esperar, distinciones o definiciones rígidas y exhaustivas.

### 10.6. Reconociendo y recordando

En el examen de nuestro problema nos animamos cuando reconocemos algún rasgo familiar. Por lo tanto, al examinar una figura geométrica, podemos reconocer con placer un triángulo no visto antes, o un par de triángulos semejantes, o alguna otra configuración conocida. Examinando una fórmula algebraica tal vez podamos reconocer y completar un binomio al cuadrado, u otra combinación familiar. Por supuesto, también podemos reconocer, alguna situación más compleja a la que todavía no podemos asociar un nombre y para los que no tienen aún una definición formal, pero que nos parece tan familiar e importante. Tenemos buenas razones para estar satisfechos cuando hemos reconocido un triángulo en la figura propuesta. De hecho, sabemos varios teoremas y hemos resuelto varios problemas sobre triángulos, uno u otro de estos teoremas conocidos o soluciones anteriores pueden ser aplicables a nuestro problema presente. Mediante el reconocimiento de un triángulo, se establece contacto con una extensa capa de nuestros conocimientos adquiridos anteriormente, como algo que pueda ser útil ahora. Así, en general, el reconocimiento puede llevarnos a recordar algo útil, a la movilización de los conocimientos relevantes.

### 10.7. Complementando y reagrupando

Hemos reconocido un triángulo en la figura y han tenido éxito en recordar un teorema sobre los triángulos que tiene alguna posibilidad de ser aplicable a la situación actual. Sin embargo, para aplicar efectivamente el teorema hay que añadir alguna línea auxiliar a nuestro triángulo, por ejemplo, una altura. Así, en general, los posibles elementos útiles en perspectiva se movilizaron se agregaron a nuestra concepción del problema para enriquecerla, para hacerlo más completo, para rellenar los huecos, para abastecer sus deficiencias, en una palabra, para complementarlo. Completando introduce nuevos materiales en nuestra concepción del problema y es un paso importante en su organización. Sin embargo, a veces podemos hacer un avance importante en la organización sin introducir ningún nuevo material, con sólo cambiar la disposición de los elementos ya presentes, al concebirlos en nuevas relaciones, reordenando o agrupando. La reagrupación de sus elementos, puede cambiar la "estructura" de la concepción de nuestro problema. Así reagrupamiento significa restructuración.

El paso decisivo en la solución de un problema geométrico puede ser la introducción de una línea auxiliar apropiada. Aunque a veces podemos tomar el paso decisivo, sin introducir nuevas líneas, solo por concebir las líneas ya existentes de una nueva forma. Por ejemplo, podemos notar que ciertas líneas forman un par de triángulos semejantes. Notando esta configuración familiar, reconocemos ciertas relaciones no observadas entre los elementos de la figura, vemos que los elementos están agrupados diferentemente, vemos una nueva estructura, vemos la figura mejor organizada, más armoniosa, más prometedora hemos reestructurado el material del problema. Reagrupar puede involucrar un cambio en el énfasis.

## 10.8. El aislamiento y la combinación

Cuando estamos examinando un todo complejo, nuestra atención puede ser atraída ahora por este detalle y luego por otro. Nos concentramos en un determinado detalle, nos centramos en él, lo distinguimos de sus alrededores, en una palabra, lo aislamos. A continuación, el centro de atención se desplaza a otro detalle, aislar otro detalle, y así sucesivamente. Después de examinar los diversos detalles y revaluar algunos de ellos, podemos sentir la necesidad de visualizar otra vez la situación como un todo. De hecho, después de la revalorización de algunos detalles, la apariencia de la totalidad, la "información general", la "forma" pueden haber cambiado. El efecto combinado de nuestra reevaluación de ciertos detalles puede dar lugar a una nueva imagen mental de toda la situación, en una combinación nueva y más armoniosa combinación de todos los detalles. El aislamiento y la combinación pueden avanzar en la solución, se complementan una a la otra. El aislamiento conduce a la descomposición del todo en sus partes, una combinación posterior vuelve a montar las piezas en un todo más o menos diferente. Descomponer y recombinar, descomponer de nuevo y se recombinan de nuevo, nuestro punto de vista de que el problema puede evolucionar hacia un panorama más prometedor.

## 10.9. Un diagrama

Un resumen esquemático de los apartados anteriores se ofrece en la figura. 10.1, del cual el lector debe tomar lo que vale la pena. Nueve son los **término**s dispuestos en un cuadrado, uno ocupa el centro del cuadrado, otros cuatro los vértices, y los cuatro términos restantes están escritos a lo largo de los lados.

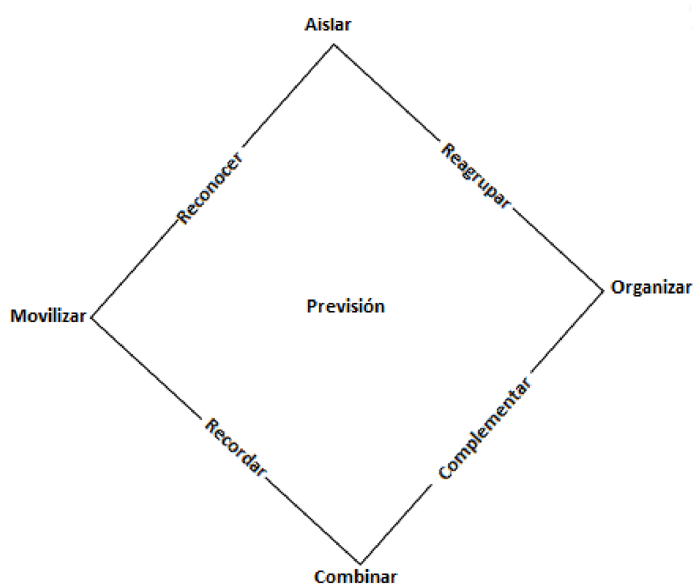



**Fig.10.1. Cómo pensamos.**

Movilización y organización están representadas por los extremos opuestos de la diagonal horizontal del cuadrado. De hecho, estas son actividades complementarias. La movilización es la extracción de los elementos relevantes de nuestra memoria, la organización es conectar estos detalles a propósito.

Aislamiento y combinación están representados por los extremos opuestos de la diagonal vertical. De hecho, estas son actividades complementarias. El aislamiento es la selección de un detalle en particular de todo el entorno, la combinación es ensamblar detalles dispersos en un todo significativo.

Los lados adyacentes de la esquina asignado a la movilización se etiquetan reconocer y recordar. De hecho, la movilización de detalles relacionados con el problema a menudo comienza en el reconocimiento de un elemento dado con el problema y consiste en recordar los elementos conectados.

Los lados adyacentes de la esquina asignada a la organización están etiquetados con complementar y reagruparse. De hecho, la organización significa completar la concepción del problema, por lo que es más completo, añadiendo nuevos detalles y llenar los vacíos, y también significa reagrupar toda la concepción.

Al leer los términos a lo largo de los lados del cuadrado, de izquierda a derecha, se procede de los detalles movilizados a la organización de un todo, un detalle justamente reconocido, cuidadosamente aislado y enfocado, puede inducir a un reagrupamiento de toda la concepción. Además, un detalle recordado entra en combinación adecuada, añadido a la concepción y complemento del conjunto.

Previsión es el centro de nuestra actividad dirigida a la solución, ya que el punto correspondiente es el centro de nuestro cuadrado simbólico. Seguimos la movilización y organización, el aislamiento y la recombinación, reconocer y recordar todo tipo de elementos, reagrupar y complementar nuestra concepción del problema, sólo de prever la solución, o alguna otra característica de la solución, o un poco de la ruta que conduce a ella. Si la previsión viene a nosotros abruptamente, en un instante, lo llamamos inspiración, o una idea iluminadora, nuestro deseo principal es tener una idea. Las operaciones mentales ilustradas en la fig. 10.1 adoptan formas más específicas cuando se aplica a un material específico (especial). Por lo tanto, correspondientemente a los cuatro lados del cuadrado, una lista de cuatro operaciones mentales importantes en la solución de problemas matemáticos:

| | |
|---|---|
| Reconocer:<br>uso de definiciones | Reagrupar:<br>transformar el problema |
| Recordar:<br>teoremas y problemas conocidos | Complementar:<br>introducir elementos auxiliares |

Hay otro punto. El resolutor se mueve estando acompañado de sentimientos de relevancia y proximidad, los sentimientos que miden lo bueno de sus conjeturas. Nos animamos cuando nuestra concepción del problema parece estar bien equilibrado y coherente, completo con todos los detalles, y todos los detalles son familiares. Si tenemos detalles diferentes en un todo armónico, la idea de la solución está cerca. Nuestra concepción del problema parece estar bien equilibrado cuando no sentimos la necesidad de reagrupar, y aparece como coherente, cuando no tenemos problemas en recordar sus detalles, pero ningún detalle recuerda fácilmente a los demás. Cuando no hay necesidad de completar, la concepción aparece como completa, y parece tan familiar, cuando todos los detalles han sido reconocidos. La distinción de los detalles viene del aislamiento anterior, y la concentración en, cada detalle, y la armonía de los resultados de toda la concepción de la exitosa combinación de los detalles. Podemos decir que la idea está cerca cuando sentimos que estamos progresando bien hacia una previsión completa. Que deseen organizar estos signos favorables de nuestros progresos de manera sistemática, los colocamos de manera que sus posiciones relativas son las mismas que las de los términos correspondientes en el cuadrado de la figura. 10.1. Por lo tanto, organizar siete términos para los cuatro lados del cuadrado y los tres puntos importantes en su diagonal vertical se disponen. Ver el esquema:

Bien aislado:

detalles distintos

Bien conocido:

familiar

Así agrupados:

bien equilibrado

Previsión prometedora:

Idea cerca

Bien Recordado:

coherente

Bien complementados:

completo

Bien combinados:

todo armónico

En otras palabras reestructure sus ideas, su enfoque cuando este atascado.

# CAPÍTULO 11
# SOBRE EL APRENDIZAJE, ENSEÑANZA Y APRENDIENDO A ENSEÑAR

*"Lo que usted se ha visto obligado a descubrir por si mismo deja un camino en su mente que se puede utilizar de nuevo cuando sea necesario".*

*G. C. Lichtenberg: Aphorismen.*

*"Así, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, procede de allí a las concepciones, y termina con ideas".*

*I. Kant: Crítica de la Razón Pura.*

*"Escribir para que el alumno siempre pueda ver el suelo interior de las cosas que aprende, así es que la fuente de la invención puede aparecer, y por lo tanto, de tal manera que el alumno puede entender todo como si lo hubiera inventado por sí mismo".*

*G. W. VON Leibnitz: Mathematische Schriften,*

## 11.1. El objetivo de la enseñanza

No podemos juzgar el desempeño del maestro, si no sabemos su meta. No se puede hablar de forma significativa de la enseñanza, si no estamos de acuerdo hasta cierto punto sobre el objetivo de la enseñanza.

En primer lugar, se debe enseñar a los jóvenes a pensar. Si usted no considera "enseñar a pensar" como un objetivo principal, es posible que lo consideren como un objetivo secundario, de cualquier manera tenemos suficiente terreno común para la discusión siguiente.

"Enseñar a pensar" significa que el profesor de matemáticas no debe limitarse a transmitir información, sino que debe tratar también de desarrollar la capacidad de los estudiantes a utilizar la información impartida: se debe hacer hincapié en los conocimientos técnicos, útiles, hábitos deseables de la mente. Este objetivo puede necesitar una explicación más completa, pero aquí será suficiente para subrayar sólo dos puntos.

En primer lugar, el pensamiento como el que nos interesa aquí no es soñar despierto, sino "pensar con un propósito" o "pensamiento voluntario" (William James) o "pensamiento productivo" (Max Wertheimer). El "pensamiento" se puede identificar aquí, al menos en primera aproximación, con "la resolución de problemas." En cualquier caso, en mi opinión, uno de los principales objetivos de la escuela secundaria es el desarrollo de la capacidad del alumno para resolver problemas.

En segundo lugar, el pensamiento matemático no es puramente "formal", no sólo se refiere a los axiomas, definiciones y pruebas rigurosas, sino muchas otras cosas se pueden asociar: la generalización de los casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía, el reconocimiento de un concepto matemático, o la extracción de una situación concreta. El profesor de matemáticas tiene una excelente oportunidad para dar a conocer a sus estudiantes esos procesos de gran importancia "informal", me refiero a que debe aprovechar esta oportunidad mejor, y mucho mejor de lo que hace hoy en día. Dicho de forma incompleta pero concisa: vamos a enseñar a demostrar por todos los medios, pero también debemos enseñar a conjeturar.

### 11.2. La enseñanza es un arte

Polya sugiere que el maestro recuerde algo del arte teatral. Por ejemplo, si el docente tiene que presentar a su clase una prueba que ya ha presentado muchas veces en cursos anteriores. El docente puede no estar emocionado por exponer una vez mas la prueba, pero, por favor, que no lo demuestre a su clase, si parece aburrido, los alumnos lo percibirán y se aburrirán. El docente debe mostrar entusiasmo con la prueba cuando inicia, pretender tener ideas brillantes cuando proceda, mostrarse sorprendido y encantado cuando la prueba termina. El docente debe hacer un poco de actuación por el bien de sus alumnos, de vez en cuando, los alumnos a veces aprenden más por sus actitudes que por el tema.

Si el docente tiene que repetir las cosas dos o más veces, Polya sugiere que se cambie el tono para no ser terriblemente aburrido. Bueno, usted puede aprender de los compositores de cómo hacerlo mejor. Una de las principales formas de arte de la música es "aire con variaciones." La transposición de esta forma de arte de la música en la enseñanza de comenzar diciendo su frase en su forma más simple, entonces usted lo repite con un pequeño cambio, y luego se la repite una vez más con el color un poco más, y así sucesivamente, puede terminar por volver a la simple formulación original.

### 11.3. Tres principios de aprendizaje

La docencia es un oficio que tiene innumerables pequeños trucos. Cada maestro tiene sus buenos trucos al enseñar y cada buen profesor es diferente de cualquier otro buen maestro.

Cualquier recurso de la enseñanza eficaz debe estar correlacionado de alguna manera con la naturaleza del proceso de aprendizaje. No sabemos mucho sobre el proceso de aprendizaje, pero incluso un esbozo de algunas de sus características más evidentes que pueden arrojar algo de luz. Permítanme hacer un esbozo en forma de tres "principios" de aprendizaje. Su formulación y su combinación es de mi elección, pero los "principios" a sí mismos no son nuevos, sino que se han afirmado y reafirmado en diversas formas, que se derivan de la experiencia de los siglos, acreditada por el juicio de grandes hombres, y también sugerido por el estudio psicológico de aprendizaje.

Estos "principios del aprendizaje", también se puede dar por "principios de la enseñanza", y esta es la razón principal para considerar aquí.

(I) **El aprendizaje activo**. Se ha dicho por muchas personas y de muchas maneras que el aprendizaje debe ser activo, no meramente pasivo o receptivo. Meramente leyendo libros o escuchando conferencias o viendo películas, sin necesidad de añadir algún tipo de acción de tu mente difícilmente podrás aprender algo y, ciertamente, no aprenderás mucho.

Hay otra opinión frecuentemente expresada: La mejor manera de aprender algo es descubrirlo por ti mismo. Lichtenberg (un físico alemán del siglo XVIII, más conocido como escritor de aforismos), añade un punto interesante: se han visto obligados a descubrir por si mismos un camino en su mente que se puede utilizar de nuevo cuando sea necesario. Menos colorido, pero tal vez más ampliamente aplicable, es la siguiente: para un aprendizaje eficaz, el alumno debe descubrir por sí mismo una fracción tan grande del material por aprender como sea posible, bajo las circunstancias dadas.

Este es el principio de aprendizaje activo. Es un principio muy antiguo: es la base de la idea del "método socrático".

(2) **Mejor motivación.** El aprendizaje debe ser activo, como hemos dicho. Sin embargo, el alumno no actuará si no tiene ningún motivo para actuar. Él debe ser inducido a actuar por algún estímulo, por la esperanza de una recompensa, por ejemplo. El interés del material a ser aprendido debe ser el mejor estímulo para el aprendizaje y el placer de la actividad mental intensa debe ser la mejor recompensa para tal actividad. Sin embargo, en la que no puede obtener lo mejor de nosotros debe tratar de conseguir el segundo mejor, o el tercer mejor, y menos los motivos intrínsecos de aprendizaje no debe ser olvidado.

Para un aprendizaje eficaz, el alumno debe estar interesado en el material que hay que aprender y encontrar placer en la actividad de aprendizaje. Sin embargo, al lado de los motivos de estos para el aprendizaje, hay otros motivos también, algunos de ellos deseables. (Sanción por no aprender puede ser el motivo menos deseable.)

Llamemos a esta declaración, el principio de la mejor motivación.

(3) **Fases consecutivas**. Partamos de una frase a menudo citada de Kant: …todo conocimiento humano comienza con intuiciones, procede de allí a los conceptos, y termina con ideas. La traducción al inglés utiliza los términos "conocimiento, la intuición, la idea". Yo no soy capaz para decirle en qué sentido exactamente es la intención de Kant de utilizar estos términos. Sin embargo, pido su permiso para presentar mi lectura de la sentencia de Kant:

El aprendizaje comienza con la acción y la percepción, procede de allí a las palabras y conceptos, y debe terminar en los hábitos mentales deseables. Para empezar, por favor, tome los términos de esta frase en un sentido que se puede ilustrar concretamente sobre la base de su propia experiencia.

(Para inducir a pensar acerca de su experiencia personal es uno de los efectos deseados.) "Aprendizaje" debe recordarle de una clase con uno mismo en él como estudiante o profesor. "La acción y la percepción" que sugieren la manipulación y ver las cosas concretas, como piedras o manzanas, o regla y compás, o instrumentos en un laboratorio, y así sucesivamente.

Dicha interpretación concreta de los términos puede llegar con más facilidad y, naturalmente, más cuando pensamos en un material elemental simple. Sin embargo, después de un tiempo podemos percibir fases similares en el trabajo invertido en el dominio más complejo, materiales más avanzados. Vamos a distinguir tres fases: la fase de exploración, la formalización y la asimilación.

Una primera fase exploratoria se acerca más a la acción y la percepción y se mueve en una más intuitiva, el nivel más heurístico.

En una segunda fase la formalización asciende a un nivel más conceptual, introduciendo, terminología, definiciones, pruebas.

La fase de asimilación viene al final: debe haber un intento de percibir el "terreno interno" de las cosas, el material aprendido debe estar mentalmente digerido, absorbido por el sistema de conocimiento, en toda la perspectiva mental de los estudiantes; esta fase allana el camino a las aplicaciones, por un lado, a una mayor generalización por el otro.

Resumamos: para un aprendizaje eficaz, una fase exploratoria debe preceder a la fase de verbalización y la formación de conceptos y, finalmente, el material aprendido debería fusionarse y contribuir a la actitud mental, integral del alumno.

*Este es el principio de las fases consecutivas.*

### 11.4. Tres principios de la enseñanza

El maestro debe saber acerca de las formas de aprendizaje. Se debe evitar formas ineficientes y aprovechar las formas más eficientes de aprendizaje. Así, se puede hacer un buen uso de los tres principios que acabamos de revisar, el principio de aprendizaje activo, el principio de la mejor motivación y el principio de fases consecutivas, las cuales los principios del aprendizaje son también principios de la enseñanza. Hay, sin embargo, una condición: acogerse a ese principio, el profesor no sólo debe conocer de oídas, pero él debe entender íntimamente sobre la base de su propia experiencia bien considerados como personales.

(1) El aprendizaje activo. Lo que dice el profesor en el aula no es importante, lo que piensan los estudiantes es mil veces más importante (aunque sus ideas no sean correctas del todo). Las ideas de los estudiantes deben ser tenidas en cuenta y el profesor debe actuar sólo como partero.

Por desgracia, incluso en la escuela secundaria, el tiempo es limitado y hay un material prescrito para cubrir de manera que todos los temas no pueden ser tratados en forma de diálogo. Sin embargo, el principio es: dejar que los alumnos descubran (la solución) por sí mismos tanto como sea posible bajo las circunstancias dadas.

Permítame recomendarle a usted aquí sólo un truco práctico: dejar que los estudiantes contribuyan activamente a la formulación del problema que tienen que resolver después.

El trabajo del científico, la formulación del problema puede ser la mejor parte de un descubrimiento, la solución a menudo tiene menos conocimiento y la originalidad de la formulación. Por lo tanto, dejar que sus alumnos sigan una participación en la formulación, no sólo motiva a trabajar más duro, pero se les enseña una actitud deseable de la mente.

(2) Mejor motivación. El maestro debe considerarse a sí mismo como un vendedor: él quiere vender algo de matemáticas a los jóvenes. Ahora bien, si el vendedor conoce la resistencia a las

ventas y sus clientes potenciales se niegan a comprar, no debe echarle la culpa. Recuerde, el cliente siempre tiene la razón, en principio, y a veces en la práctica. El muchacho que se niega a aprender matemáticas puede tener razón, no es que sea perezoso o estúpido, sólo más interesado en otra cosa, hay tantas cosas interesantes en el mundo que nos rodea. Es su deber como maestro, como un vendedor de conocimiento, para convencer a los estudiantes que las matemáticas son interesantes, que el punto justo en discusión es interesante, que el problema que tiene que hacer es digno de su esfuerzo.

Por lo tanto, el profesor debe prestar atención a la elección, la formulación, y una presentación adecuada del problema que él propone. El problema debería aparecer como significativo y relevante desde el punto de vista del estudiante, sino que debe estar relacionada, si es posible, con la experiencia cotidiana de los estudiantes, y debe ser introducido, si es posible, por una pequeña broma o una paradoja. O el problema debe partir de un conocimiento muy familiar, debe tener, si es posible, algún punto de interés general o de uso práctico final. Si se quiere estimular al estudiante a un verdadero esfuerzo, tenemos que darle alguna razón para sospechar que su tarea merece su esfuerzo.

La mejor motivación es el interés del alumno en su tarea. Sin embargo, hay otras motivaciones que no deben ser descuidadas. Permítanme recomendar aquí sólo un truco práctico. Antes de que los estudiantes hagan un problema, déjalos que conjeturen (adivinar) el resultado, o una parte del resultado. El niño que expresa una opinión se compromete, su prestigio y la autoestima depende un poco en el resultado, está impaciente por saber si su conjetura saldrá bien o no, y por eso se interesó activamente en su tarea y en el trabajo de la clase, no se quedará dormido o se portara mal.

De hecho, en el trabajo del científico, la conjetura casi siempre precede a la prueba. Por lo tanto, al dejar a sus estudiantes adivinar el resultado, no sólo motiva a trabajar más duro, pero se les enseña una actitud deseable de la mente.

(3) Fases consecutivas. El problema con el material habitual de los libros de texto de secundaria es que contienen ejemplos casi exclusivamente mera rutina. Un ejemplo de rutina es un ejemplo de corto alcance, que ilustra, y ofrece la práctica en la aplicación de, solamente una regla aislada. Ejemplos de este tipo de rutina pueden ser útil e incluso necesarias, yo no lo niego, pero se pierden dos fases importantes: la fase exploratoria y la fase de asimilación. Ambas fases tratan de conectar el problema de la mano con el mundo que nos rodea y con otros conocimientos, la primera antes, la última: la solución formal. Sin embargo, el problema de la rutina es, obviamente, relacionada con la regla que ilustra y es apenas conectada con cualquier otra cosa, así que hay poco beneficio en la búsqueda de nuevas conexiones. En contraste con los problemas de rutina, tales, la escuela secundaria debe presentar los problemas más difíciles por lo menos de vez en cuando, los problemas con un rico fondo que merecen más exploración, y los problemas que puede dar un anticipo del trabajo del científico.

Aquí está una sugerencia práctica: si el problema que quiere discutir con su clase es la adecuada, deje a sus estudiantes hacer una exploración preliminar: se puede ir abriendo el apetito para la solución formal. Y reservar algo de tiempo para una discusión retrospectiva de la solución final, ya que puede ayudar en la solución de problemas más adelante.

Después de esta discusión demasiado incompleta, debe dejar de explicar los tres principios del aprendizaje activo, la mejor motivación y fases consecutivas. Creo que estos principios pueden penetrar en los detalles del trabajo cotidiano del maestro y hacer de él un mejor profesor. Creo también que estos principios también deben penetrar en la planificación de todo el currículo, la planificación de cada curso del plan de estudios y la planificación de cada capítulo de cada curso.

Sin embargo, está lejos de mí decir que usted debe aceptar estos principios. Estos principios provienen de una visión general de algunos, a partir de una cierta filosofía, y usted puede tener una filosofía diferente.

### 11.5. Los diez mandamientos para profesores

1. Estar interesado en su tema.

2. Conozca su tema.

3. Saber sobre las formas de aprendizaje: La mejor manera de aprender algo es descubrirlo por ti mismo.

4. Trate de leer las caras de los estudiantes, tratar de ver sus expectativas y dificultades, póngase en su lugar.

5. Darles no sólo información, sino "saber hacer", las actitudes de la mente, el hábito del trabajo metódico.

6. Vamos a aprender conjeturando.

7. Vamos a aprender a hacer pruebas.

8. Cuidado con estas características del problema en cuestión que puedan ser útil en la solución de los problemas por venir, tratar de conocer el modelo general que está detrás de la situación concreta actual.

9. No revele su secreto, permita a los estudiantes adivinar antes de que lo diga encontrar por sí mismos tanto como sea posible.

10. Sugiera, no los fuerce.

¿Con qué autoridad se fundan estos mandamientos? Estimado maestro, no aceptamos ninguna autoridad sino la de su propia experiencia bien digerida y su propio juicio bien considerado. Trate de ver claramente lo que significa el consejo en su situación particular.

Consideremos ahora las diez reglas una por una, con especial atención a la tarea del profesor de matemáticas.

(1) No es sólo un método de enseñanza infalible: si el maestro se aburre con su tema, su clase entera será infaliblemente aburrida.

Esto debería ser suficiente para hacer evidente el primer mandamiento y el más importante para los profesores: estar interesados en su tema.

(2) Si la materia no tiene ningún interés para usted, no lo enseñe, porque no va a ser capaz de enseñar de manera aceptable. El interés es una condición *sine qua non*, una condición absolutamente indispensable, pero, en sí misma, no es una condición suficiente. Ninguna cantidad de intereses, o los métodos de enseñanza, o cualquier otra cosa que le permitirá explicar con claridad un punto a sus estudiantes que no entiende con claridad a si mismo.

Esto debería ser suficiente para hacer evidente que el segundo mandamiento para los maestros: Conozca su tema.

Tanto interés y conocimiento de la materia son necesarios para el profesor. Puse interés en primer lugar, porque con verdadero interés se tiene una buena oportunidad para adquirir los conocimientos necesarios, mientras que un poco de conocimiento junto con la falta de interés puede hacer un profesor excepcionalmente malo.

(3) Usted puede beneficiarse mucho de leer un buen libro o escuchar una buena conferencia sobre la psicología del aprendizaje. Sin embargo, leer y escuchar no son absolutamente necesarias, y no son de ninguna manera suficiente, así que debería conocer las formas de aprendizaje, usted debe estar íntimamente familiarizado con el proceso de aprendizaje de la experiencia de sus propios estudios y de la observación de sus estudiantes.

Hay un principio de aprendizaje que usted debe darse cuenta con seriedad: el principio de aprendizaje activo. **La mejor manera de aprender algo es descubrirlo por uno mismo**.

(4) Incluso con un poco de conocimiento e interés genuinos y una cierta comprensión del proceso de aprendizaje se puede ser un mal profesor. El caso es raro, lo admito, pero algunos de nosotros nos hemos encontrado con un profesor muy competente, que no ha podido establecer "contacto" con su clase. Con el fin de que la enseñanza de uno de dar lugar al aprendizaje por el otro, debe haber algún tipo de contacto o relación entre profesor y alumno: el profesor debe ser capaz de ver la posición del estudiante, debe ser capaz de abrazar la causa de los estudiantes. Por lo tanto el siguiente mandamiento: Trate de leer las caras de los estudiantes, tratar de ver sus expectativas y dificultades, póngase en su lugar.

La respuesta de los estudiantes para su enseñanza depende de sus antecedentes, sus perspectivas y sus intereses. Por lo tanto, tenga en cuenta y tener en cuenta lo que saben y lo que no saben, lo que les gustaría saber y lo que no les importa saber, lo que debe saber y lo que es menos importante para ellos saber.

(5) Las cuatro reglas anteriores contienen los elementos esenciales de una buena enseñanza.

Forman en conjunto una especie de condición necesaria y suficiente: si usted tiene interés en el conocimiento de la materia y si, además, se puede ver el caso del estudiante y lo que ayuda o dificulta su aprendizaje, ya eres un buen maestro o que pronto se convertirá en uno, es posible que tenga sólo un poco de experiencia.

Queda por explicar algunas de las consecuencias de las reglas anteriores, en especial las consecuencias como la preocupación del profesor de matemáticas en la escuela secundaria.

El conocimiento consiste en parte de la "información" y en parte de "saber hacer". Saber - como es la habilidad, es la capacidad de manejar la información, para usarlo con un fin determinado, saber - como puede ser descrito como un montón de actitud mental adecuada, saber - como es en última instancia la capacidad para trabajar metódicamente.

En matemáticas, saber-como es la habilidad para resolver problemas, para construir demostraciones y para examinar críticamente las soluciones y demostraciones. Y, en matemáticas, saber-como es mucho más importante que la mera posesión de la información. Por lo tanto, el mandamiento que sigue es de especial importancia para el profesor de matemáticas:

Dar a los estudiantes no sólo información, sino saber hacer, las actitudes de la mente, el hábito del trabajo metódico.

Desde el saber-como es más importante en las matemáticas de la información, puede ser más importante en la clase de matemáticas cómo enseñar lo que usted enseña.

(6) Primera aproximación, a continuación, probar, también hace el descubrimiento proceder en la mayoría de los casos. Usted debe saber esto (de su propia experiencia, si es posible), que el profesor de matemáticas tiene una excelente oportunidad para mostrar el papel de adivinar en el descubrimiento y por lo tanto para inculcar a sus alumnos una actitud de fundamental importancia de la mente.

Este último punto no es tan conocido como debería ser y, sólo por esta razón, merece una atención particular. Me gustaría que no descuide a sus alumnos a este respecto: Vamos a aprender adivinanzas.

Estudiantes ignorantes y descuidados son susceptibles de presentar "salvajes" conjeturas. Lo que tenemos que enseñar es, por supuesto, no adivinar salvajemente, pero si "educadamente", "adivinar razonablemente". Adivinar razonablemente se basa en el uso juicioso de la evidencia inductiva y la analogía y, finalmente, abarca todos los procedimientos de razonamiento plausible que desempeñan un papel en "método científico".

(7) "Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento plausible." Esta declaración resume la opinión que subyacen a la regla anterior, suena poco familiar y es de origen muy reciente.

"Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento demostrativo". Esta afirmación suena muy familiar, alguna forma de que es, probablemente, casi tan antigua como las propias matemáticas. De hecho, mucho más es cierto: las matemática son co-extensivas con el razonamiento demostrativo, que domina las ciencias sólo en cuanto a sus conceptos se elevan suficientemente abstracto y definido, nivel lógico matemático. Bajo este alto nivel no hay lugar para el razonamiento verdaderamente demostrativo (que está fuera de lugar, por ejemplo, en la vida cotidiana). Sin embargo (no hace falta discutir tal punto ampliamente aceptada), el profesor de matemáticas debe informar a todos sus alumnos más allá de los grados más elementales de razonamiento demostrativo: Vamos a aprender de pruebas.

(8) El saber hacer es la parte más valiosa del conocimiento matemático, mucho más valioso que la mera posesión de la información. Pero, ¿cómo debemos enseñar conocimientos? Los estudiantes pueden aprender sólo por imitación y la práctica.

Cuando se presente la solución de un problema, enfatizan adecuadamente las funciones instructivas de la solución. Una característica es instructiva si merece la imitación, es decir, si puede ser utilizado no sólo en la solución del problema actual, sino también en la solución de otros problemas, la más frecuente, la más instructiva. Énfasis en las características instructivas no sólo elogiando a ellos (lo que podría tener el efecto contrario con algunos estudiantes), sino por su comportamiento (un poco de la actuación es muy buena si usted tiene un poco de talento teatral). La regla: *Busque aquellos rasgos del problema en mano que puedan ser útiles en la resolución de problemas nuevos, trate de conocer el modelo general que está detrás de la situación concreta actual.*

(9) Me gustaría indicar aquí un pequeño truco en el aula que es fácil de aprender y que cada maestro debe saber. Al comenzar a discutir un problema, deje que sus estudiantes adivinen la solución. El estudiante que ha concebido una conjetura, o incluso ha declarado su conjetura, se compromete: se tiene que seguir el desarrollo de la solución para ver si su conjetura se cumple o no-y por lo tanto no pueden permanecer atentos.

Esto es sólo un caso muy especial de la siguiente regla: No revele su secreto a la vez, permita a los estudiantes adivinar antes de decirles, que encuentren por sí mismos como sea posible.

De hecho, el crédito de esta norma se debe a Voltaire, quien lo expresó más ingeniosamente: *"El arte de ser un aburrido consiste en contarlo todo."*

(10) Un estudiante presenta un cálculo largo que tiene varias líneas. En cuanto a la última línea, veo que el cálculo está mal, pero me abstengo de decirlo. Prefiero ir a través de la computación con el estudiante, línea por línea: "Usted comenzó a salir bien, su primera línea es correcta su próxima línea es correcta también, que hizo esto y aquello.

La siguiente línea es buena. Ahora, ¿qué piensa usted de esta línea? "El error está en esa línea y si el estudiante descubre por sí mismo, tiene la oportunidad de aprender algo. Si, sin embargo, a la vez decir" esto está mal ", el estudiante puede sentirse ofendido y no va a escuchar nada de lo que puede decir después y si digo "Esto está mal" con demasiada frecuencia, el estudiante odia y las matemáticas y todos mis esfuerzos se perderán lo que a él se refiere.

Estimado compañero maestro, evite decir "Usted está equivocado." Decir más bien, si es posible: "Tiene usted razón, pero...". Si continúa así, no es hipócrita. Que se debe proceder así, está implícitamente contenido en la regla 3. Sin embargo, podemos hacer que el consejo más explícito: *Sugerir, no forcé apretando su garganta*.

Nuestras dos últimas normas, 9 y 10, tienden en la misma dirección. Lo que en conjunto sugieren es dejar a los estudiantes tanta libertad e iniciativa como sea posible bajo las condiciones de enseñanza existentes. Presionado por el tiempo, el profesor de matemáticas a menudo cae en la tentación de pecar contra el espíritu de estas normas, el principio del aprendizaje activo. Es posible que toda prisa de la solución de un problema sin dejar tiempo suficiente para que los estudiantes trabajen el problema en serio. Es posible que el maestro nombre un concepto o formulé una regla demasiado pronto, sin preparación suficiente de material adecuado, antes de que los estudiantes puedan sentir la necesidad de un concepto o una regla. Que pueda cometer el error famoso de *deus ex machina*: se puede introducir algún dispositivo (por ejemplo, una línea difícil de auxiliar en una prueba geométrica), que conduce a un resultado bien, pero los estudiantes no pueden ver por su vida como era humanamente posible para descubrir un truco que apareció de la nada.

Hay demasiadas tentaciones de violar el principio. Hagamos, pues, destacar algunas más de sus facetas.

Deje a sus alumnos las preguntas, o preguntas que puedan resolver por sí mismos.

Deje que sus alumnos den las respuestas, o dar respuestas, como pueden dar por sí mismos.

En todo caso, evitar responder a preguntas que nadie ha pedido, ni siquiera a si mismo.

# CAPÍTULO 12
# POLYA EN EL SALÓN DE CLASES

**Como se indico en la introducción, en el programa oficial de matemáticas para secundaria se hace énfasis en la resolución de problemas desde la reforma de 1993, por lo tanto conviene comentar sobre como se puede implementar un curso basado en la solución de problemas. Haremos observaciones sobre varios puntos importantes, no se pretende cubrir todos.**

El punto más importante es crear un ambiente apropiado para trabajar en clase con base en la resolución de problemas, debe prevalecer el respeto a la opinión de los demás.

- Ofrecer variedad de problemas que representen un reto razonable para los estudiantes de acuerdo a sus capacidades.
- Enseñar a los estudiantes a leer los problemas ayudándolos a expresarlos en sus propias palabras, la compresión no es inmediata.
- Permitir que los estudiantes trabajen en parejas o en pequeños grupos.
- Promover en los estudiantes el uso de estrategias alternativas a las del maestro
- Hacer preguntas mientras los estudiantes están en el proceso de solución del problema, para saber si han comprendido el problema, no tiene caso responder algo que no se entiende.
- Pedir a los estudiantes que expliquen sus respuestas lo más claramente posible.
- Hacer que los estudiantes representen mediante **diagramas** sus propios procedimientos para resolver problemas.
- La adquisición de habilidades ocurre en forma progresiva, es decir solo la práctica logra que se mejore el desempeño.
- El alumno puede llegar a ser flexible en el uso de diversos procedimientos, solo practicando constantemente.

Al resolver problemas los alumnos exploran la matemática como una disciplina de razonamiento en la que las convenciones y la terminología tienen sentido porque funcionan. El fundamento a la solución de un problema proviene de argumentos y no del docente o de un libro.

## 12.1. Los problemas

El término problema es frecuente en profesiones y disciplinas diferentes y con diferentes significados (localización de averías mecánicas y eléctricas), crear nuevas ideas o inventar nuevos productos o técnicas de fabricación son ejemplos de la industria y publicidad, la resolución de problemas en Matemáticas es algo más especifico, pero aun hay diferentes interpretaciones, que incluyen problemas simples con enunciado que son frecuentes en los libros de texto, problemas no rutinarios o "recreativos", aplicaciones matemáticas a los problemas de la "vida real", y la creación de conjeturas matemáticas y su prueba en muchos campos y a veces en nuevos campos de estudio.

Así la resolución de problemas es un termino que engloba y significa algo diferente para diferentes personas y a la vez para una misma persona significa diferentes cosas en tiempos diferentes . Las interpretaciones más comunes son

1.- Como un objetivo o propósito

2.- Como un proceso

3.- Como una habilidad básica

Un profesor de matemáticas podría reflexionar sobre el enfoque basado en resolución de problemas ¿Por qué enseño matemáticas? ¿Cuáles son los objetivos de la instrucción matemática? Educadores y matemáticos, frecuentemente citan la solución de problemas como un objetivo (pero no el único) del aprendizaje. De la resolución de problemas se ha dicho que es el corazón de las matemáticas, cuando es considerado como un objetivo es independientemente de los problemas específicos, procedimientos o métodos y del contenido matemático. La consideración importante es que el aprendizaje de cómo resolver problemas es la razón primordial para estudiar matemáticas.

Es el proceso de aplicar conocimientos previamente adquiridos a nuevas y no familiares situaciones, esta interpretación es la que tal vez mejor ve la diferencia entre las respuestas que dan los estudiantes a los problemas y los procedimientos o pasos que ellos usan para llegar a la respuesta, así lo importante son los métodos, procedimientos, estrategias y la heurística que los estudiantes usan.

Diferentes tipos de problemas matemáticos

Cuando un profesor tiene que cubrir un programa concreto se ve en el conflicto de que aspectos deben ser prioritarios enseñar para que los alumnos dominen algunos conceptos o favorecer las habilidades que se requieren para resolver problemas. Algunos autores sugieren tener en cuenta que existen diferentes tipos de problemas (secundaria y bachillerato)

Dividimos los diferentes tipos de problemas en 5 tipos:

1.- Problemas de reconocimiento

2.- Ejercicios algoritmos (cálculos, o problemas sencillos con operaciones aritméticas, resolución de ecuaciones)

3.- Problemas de aplicación

4.- Problemas abiertos

5.- Situaciones problemáticas

¿Por qué algunos alumnos son mejores que otros para la resolución de problemas?

Características de los resolvedores de problemas:

1.- La habilidad de entender conceptos matemáticos y términos

2.- La habilidad para notar semejanzas, diferencias y analogías

3.- La habilidad para identificar elementos críticos y seleccionar procedimientos correctos y datos.

4.- La habilidad para notar datos irrelevantes.

5.- La habilidad para estimar y analizar.

6.- La habilidad para visualizar e interpretar cuantitativamente hechos espaciales y relaciones.

7.- La habilidad para generalizar sobre la base de pocos ejemplos.

8.- No ser ansioso.

9.- La habilidad para cambiar de métodos rápidamente.

Pistas para enseñar en base a la resolución de problemas

1.- Use un término (por ejemplo igualdad) que haga claro su sentido matemático (y luego su sentido usual).

2.- Clasifique problemas.

3.- Cite sólo aquellos aspectos de un problema sin los cuáles no seria problema.

4.- Tache ("cross out") irrelevancias en un problema oral, un problema de dibujo o un problema escrito.

5.- Haga estimaciones de las respuestas y analice las rutas tomadas.

6.- Describa ideas numéricas y espaciales no solo en palabras, sino también dibujando, usando modelos físicos y construyéndolos.

7.- **Haga conjeturas explorando algunos casos** y entonces busque la forma de verificar la conjetura.

8.- Use variedad de métodos.

Los buenos resolvedores de problemas además de la habilidad para generalizar sobre la base de pocos ejemplos, y de la habilidad de cambiar de métodos rápidamente, ellos se saltan algunos pasos y tienen un sentimiento para soluciones elegantes (usar el mínimo de pasos necesarios para llegar a la solución del problema) y de revertir pasos fácilmente, ellos tienden a olvidar los detalles de un problema y recordar los detalles estructurales .

Enseñe a los niños una variedad de estrategias que ellos pueden aplicar en diferentes situaciones problemáticas, además de un plan total de cómo ir a la solución.

¿COMO AYUDAR A LOS NIÑOS A ENFOCARSE EN LOS DETALLES?

Permita a los niños tiempo suficiente para resolver problemas, no todos los problemas pueden resolverse dentro de los confines del salón y de la clase, algunos necesitan mayores periodos de tiempo.

Para la mayoría de los estudiantes la pericia en la resolución de problemas no es algo que se adquiere solamente con estar en el salón de clase, todos los estudiantes de matemáticas a pesar de su nivel de habilidad merecen que se les ayude a desarrollar su habilidad e iniciativa en la resolución de problemas en cada curso.

Resolver problemas es un proceso largo, no puede ser aprendido en un curso. Es el resultado de una combinación de una instrucción cuidadosamente planeada y la experiencia en la solución de variedad de problemas. Hay al menos 2 componentes esenciales de la resolución exitosa de problemas:

- saber algo de matemáticas relevantes
- saber qué hacer con lo que sabemos.

Es importante que los estudiantes tengan habilidades matemáticas más allá de las meramente computacionales (operaciones), por ejemplo reconocer: $n^2, n^{3,}$ divisibilidad, números primos, resolución de problemas con áreas de figuras conocidas.

## 12.2. Etapas o niveles en el desarrollo de la Resolución de problemas

1º. Alumnos. Los estudiantes tienen poco o ningún entendimiento (o comprensión) de lo que es resolver un problema, o del significado de estrategia, o de la estructura matemática del problema. Muchos estudiantes en este nivel no saben dónde empezar a resolver un problema no rutinario.

2ª. Maestro: Asume el papel o rol de modelo.

Los estudiantes entienden el significado de estrategia y la RP y tienen idea de lo que es la estructura matemática de un problema.

Ellos son capaces de seguir a alguien en su solución y pueden sugerir estrategias para intentar problemas similares a aquellos que han visto antes. Aunque ellos participan, muchos todavía se sienten inseguros en la Resolución independiente de problemas.

3ª. El maestro actúa como apoyo

Los alumnos empiezan a sentirse bien con los problemas, ellos sugieren estrategias diferentes de aquellas que han usado.

Ellos entienden y aprecian que los problemas pueden tener soluciones múltiples, y que una solución puede perfeccionarse a una buena solución.

4ª. El maestro viene a ser un proveedor de problemas.

Los estudiantes son capaces de seleccionar estrategias apropiadas para la mayoría de los problemas encontrados y tienen éxito en encontrar soluciones en no mucho tiempo. Ellos muestran interés por la elegancia y eficiencia de una solución y en encontrar soluciones alternativas.

Ellos sugieren variaciones a viejos problemas y están buscando constantemente problemas novedosos como desafío para ellos mismos y para otros.

Dificultades de los estudiantes al resolver problemas.

- Poco dominio de procedimientos heurísticos (informales), generales y específicos, para resolver problemas.

- Bajo nivel de análisis o análisis superficial de la situación problemática planteada en el enunciado del problema.
- Dificultad para planificar el proceso de resolución del problema: **representación** mental del enunciado del problema, aislamiento de la información relevante, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados, verificación de la solución, revisión y supervisión de todo el proceso de resolución.
- Ausencia de conocimiento metacognoscitivo, lo cual les impide tener conciencia de los procesos y estrategias que utiliza para la resolución del problema y corregirlos en caso de ser necesario.
- Tendencia a operar directamente sobre los datos explicitados en el enunciado del problema (sin mediar un análisis cuidadoso del enunciado).
- Dificultad para encontrar los datos intermedios, no explícitos en el enunciado del problema.
- Tendencia a mantenerse dentro de lo que exige el problema, sin ir más allá de su planteamiento.
- Bajos niveles afectivos y motivacionales hacia la matemática y hacia la resolución de problemas.
- Desconocimiento acerca de los tipos de conocimiento involucrados en la resolución de un problema.
- Desconocimiento de las etapas y de los pasos generales que se pueden seguir para resolver un problema.

Estos hallazgos han constituido el centro de la preocupación por parte de todos aquellos involucrados en la enseñanza de la matemática y se ha concluido que ellos son la causa, en primer lugar, del fracaso consistente y generalizado por parte de los estudiantes en la adquisición de las habilidades matemáticas requeridas en los diferentes niveles del sistema educativo; en segundo lugar, de la dificultad evidente para realizar todas aquellas actividades que impliquen procesos de naturaleza matemática y/o algebraica; en tercer lugar, del desconocimiento de la importancia de la matemática para la vida cotidiana y otras disciplinas; y finalmente, del desconocimiento de que la matemática no sólo constituye un área específica del conocimiento sino que está vinculada con la estructura de pensamiento de los individuos.

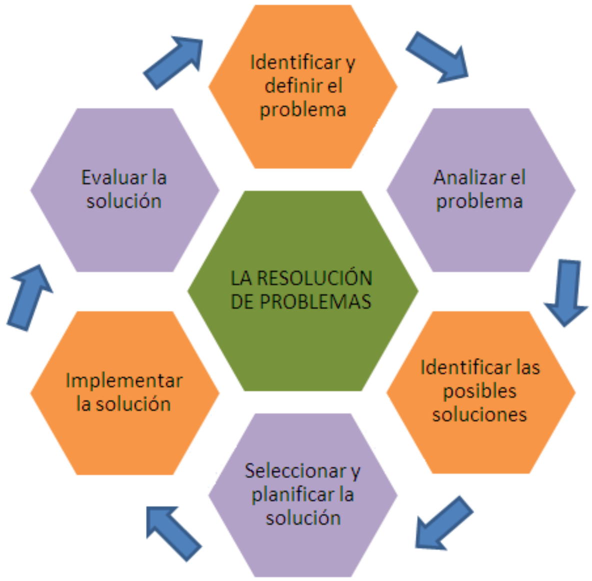
PERCEPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Es ampliamente aceptado que muchos estudiantes tienen dificultades para ver “la estructura de un problema” , especialmente problemas verbales , Kruteski encontró que los solucionadores de problemas excepcionalmente buenos son capaces de captar la estructura de un problema instantáneamente , mientras que los alumnos poco capaces raramente lo hacen, pero este no es un asunto “de todo o nada” . Tal vez más atención específica de la instrucción debe darse a este aspecto de la resolución de problemas.

Sugerencias para resolver problemas de manera exitosa

- Acepta el desafió de resolver un problema, esto es algo interno, pero el maestro se da cuenta cuando un alumno no acepta el reto, porque pregunta ¿Cómo se hace? ¿Qué fórmula aplico?
- Expresa el problema en tus propias palabras.
- Toma tu tiempo para explorar, reflexionar, pensar, imaginar etc.
- Habla contigo mismo, hazte muchas preguntas.
- Si es apropiado trata el problema usando números sencillos (%).
- Muchos problemas requieren un problema de “incubación”, si esta frustrado, tomate un descanso, tu subconsciente puede seguir trabajando, pero retorna al trabajo.
- Ve el problema de diversos modos (puntos de vista).
- Consulta tu lista de estrategias para ver si alguna (o varias) puede ayudarte a iniciar (que es el paso más difícil).
- Muchos problemas pueden ser resueltos de varios modos (maneras) tú sólo necesitas encontrar una solución para ser exitoso.
- No tengas miedo de cambiar tu estrategia de aproximación (vía de solución) continua.
- La organización puede ser de utilidad en la solución de problemas, usa el método de Polya de los 4 pasos en combinación con varias estrategias.
- La experiencia en la resolución de problemas es muy importante (valiosa) trabaja un paquete de problemas, tu habilidad aumentara.
- Si no estás haciendo mucho progreso, no te desesperes, regresa al principio y ve si realmente entiendes el problema, este proceso de revisión puede repetirse 2 o 3 veces en un problema puesto que la comprensión usualmente crece con tu trabajo.
- Siempre ve hacia atrás, trata de ver precisamente cual fue el paso clave en tu solución
- Has problemas para ti mismo (tu propia satisfacción), diviértete.
- Trata de escribir claramente tus problemas.

También nos podemos apoyar en el siguiente diagrama




## 12.3. Desarrollo de problemas por estudiantes

**Desarrollo de problemas por estudiantes de secundaria**

Se propuso el siguiente problema

*-De un mismo material se fabrican 4 cubos macizos de aristas distintas, a saber: 6cm, 8cm, 10cm, 12cm. Hay que colocar los cubos en los platillos de una balanza de modo que la balanza quede en equilibrio. ¿Qué cubos ponemos en cada platillo?*

El 99% de los niños responden que en uno de los platillos se colocan el cubo de 6cm y el de 12cm, en el otro platillo el de 8cm y 10cm, argumentando que 12+6=8+10

Sólo una niña resolvió correctamente, esto muestra que Polya tiene razón, muchos problemas son resueltos erróneamente por los alumnos, porque contestan sin haber comprendido bien el problema, en este caso suman las longitudes de las aristas, sin tomar en cuenta que deben calcular volúmenes. Es decir, los alumnos se equivocan en el primer paso del método de Polya.

*El profesor Matrix pregunta a sus alumnos en que cifra termina el producto* $2^a \times 6^b \times 9^c \times 11^d$*. Ha dicho que a=2009, b=al numero de zapato que calza (entero), c=año de nacimiento de su novia (1985) d= Año de su nacimiento ¿En qué cifra acaba dicho producto?*

Este es un buen ejemplo para explicar la sugerencia de Polya: Satisfacer una condición a la vez.

Este problema fue puesto en clase y los alumnos no entendían y se les platicó algunas estrategias de Polya, en este caso dijimos que viéramos las condiciones una por una. Por ejemplo $6^b$ se hace notar que $6^2 = 36, 6^3 = 216, \ldots$ es decir el digito de las unidades de cualquier potencia de 6 es 6. Se hace el mismo análisis con las demás, es decir, se busca un patrón: $9^2 = 81, 9^3 = 729$,el digito de las unidades de $9^c$ se repite 1, 9, 1, 9,…de la misma manera se busca el patrón de $2^a$ y $11^d$. Finalmente se toman en cuenta todas las condiciones que pide el problema.

Para saber de que forma los estudiantes abordan un problema se aplicó el siguiente problema a estudiantes de tercer grado de secundaria.

*-En un rancho hay 20 vacas, su dueño tiene alimento para 30 días, vende 5 vacas ¿Para cuántos días le alcanza ahora el alimento?*

Este problema se aplicó a 77 alumnos de los cuales sólo 3 obtuvieron la repuesta correcta, pero su procedimiento es incorrecto (cometen un error). Se observa claramente que este problema fue difícil para los alumnos, ¿Cómo el docente puede ayudar a sus alumnos a resolver este problema?

Respuesta: Utilizar las sugerencias de Polya, además de que el maestro debe tener cuidado de no "imponer sus ideas", sino que a través del dialogo (el docente hace preguntas) los alumnos "lleguen" a ver la solución.

Profesor: A ver niños recuerden *"entre menos burros más olotes"*… ¿Qué pasa si el dueño del rancho se queda con 10 vacas? ¿Para cuantos días le alcanza? (alumnos) **Le alcanzara para 60 días.**

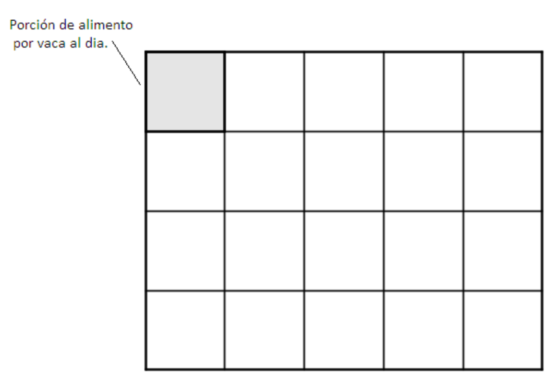
Profesor: Muy bien niños, si las vacas las reducimos a la mitad, el número de días que alcanza el alimento aumenta el doble. ¿En qué factor cambian las vacas de 20 a 15? En el factor inverso multiplicamos los días.

DIFERENTES FORMAS DE LLEGAR A LA SOLUCIÓN

PRIMERA

Imaginemos que le damos una porción de alimento por día ¿cuántas porciones tengo, con 20 vacas y 30 días?

Profesor: niños que tal si hacemos un dibujo




Los alumnos deben darse cuenta que el alimento alcanza para 600 porciones…

SEGUNDA

Recordar que si $x, y$ son cantidades que varían en forma inversa entonces $xy = k$

Entonces debemos hallar el producto

$$20 \times 30 = 600$$

Entonces $600 \div 15 = 40$ el alimento alcanza para 40 días.

TERCERA

Hacer una tabla

Se reproduce la tabla hecha por una alumna Karla E. E.

**V** =Núm. de vacas **A** =Alimento

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **V** | **20** | **15** | **10** | **5** |
| **A** | **30** | **40** | **50** | **60** |

Da como respuesta 40 días, pero como se ve, la tabla es incorrecta, con la mitad de las vacas (10) el alimento alcanza para el doble de días a partir de ahí el maestro explica que es una buena idea para llegar a la solución (sólo hay que corregir el error).

La tabla correcta es:

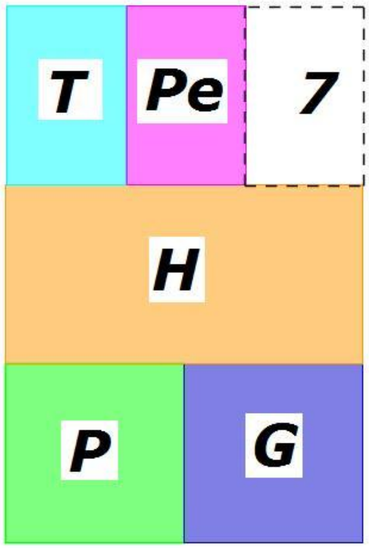
**V** =Núm. de vacas **A** =Alimento

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **V** | **20** | **15** | **10** | **5** |
| **A** | **30** | **40** | **60** | **70** |

EL MAESTRO DEBE ESTAR PREPARADO PARA LAS RESPUESTAS CREATIVAS DE LOS ALUMNOS, AUN CUANDO NO SEAN LAS ESPERADAS, O CON LA HERRAMIENTA QUE SE PIENSA ENSEÑAR.

-Pablo tiene 39 mascotas entre perros, gatos, hamsters, tortugas y periquitos. Tiene tantos perros como gatos, el doble de perros son hamsters, la tercera parte de hamsters son tortugas y 7 periquitos más que tortugas. ¿Cuántos periquitos tiene?

Solución de Roy alumno de tercero de secundaria, tomó como referencia a los perros (P) e hizo el problema gráficamente:




Cada letra simboliza los animales que hay. Primero se fija que de 39 puede quitar 7 y le quedan 32.

Este 32 lo divide entre 8 partes, ya que al quitar el 7 quedan 8 partes iguales a T ó Pe. Entonces:

P + G = 12, P= 6, G = 6

H = 12

T = 4

Pe = 4 + 7 (los que se quitaron)

Así que hay 11 Periquitos.

Queda claro que esta solución solo la obtuvo él, pero el maestro puede utilizar esta idea para desarrollar la clase, en particular explicar la solución con álgebra. Es decir, el maestro parte de las ideas de los alumnos para explicar, aun en el caso de que nadie obtenga la solución correcta, algún alumno propone una idea útil, aunque sea incompleta, el maestro debe tratar de usarla, para mostrar a los alumnos que lo importante es generar ideas. (No necesariamente resolvemos un problema al primer intento)

En el curso BUAP- SEP para profesores se detectaron que algunos problemas de proporción causan dificultades a los docentes, veamos unos ejemplos.

Problema 87 de la prueba ENLACE 2011
**En una carrera atlética se van a repartir 120 puntos, el que haga menos tiempo obtiene más puntos; es decir, hay una relación inversamente proporcional. Si Martha hizo 6 minutos y María 4, ¿cuántos puntos hizo María?**
**A) 40 B) 48**
**C) 60 D) 72**

Varios maestros tuvieron dificultad para explicar cómo se obtiene la respuesta correcta.

**Ejemplo:** Nueve gallinas ponen 12 huevos en 4 días ¿Cuántos huevos pondrán 4 gallinas en 9 días?

El método consiste en una tabla, mantener una columna constante y variar las otras 2 en forma proporcional y se busca el unitario, por ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| 9 gallinas | 12 huevos | 4 días |
| 9 gallinas | 24 huevos | 8 días |
| 4 gallinas | ¿? | 9 días |

El doble

| | | |
|---|---|---|
| 9 gallinas | 12 huevos | 4 días |
| 1 gallina | $\frac{12}{9}$ de huevo | 4 días |
| 4 gallinas | $\left(\frac{12}{9}\right)(4)$ | 4 días |
| 4 gallinas | $\left(\frac{12}{9}\right)(4)\left(\frac{9}{4}\right)$= 12 | 9 días |

**La sugerencia es trabajar a lo largo de ciclo escolar cambiando ligeramente el contexto y la dificultad, por ejemplo:**

En una granja avícola hay 300 gallinas, tienen alimento en grano que alcanza para 20 días. Si se compran 100 gallinas más ¿Para cuánto tiempo les alcanzara la misma cantidad de grano?

-Para hacer 72 m de pared en 12 días, se necesitan 3 albañiles; ¿cuántos albañiles se necesitarán para hacer 90 m de la misma pared en 9 días?

Datos: 3 albañiles hacen 72 m de pared en 12 días.

***Pregunta***: *x* albañiles hacen 90 m de pared en 9 días.

La razón de los valores de la incógnita es $\frac{3}{x}$, entonces:

$$\frac{72}{90}, \frac{12}{9}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{72}{90} \times \frac{9}{12}$$

$$= \frac{72 \times 9}{90 \times 12};$$

$$x = \frac{3 \times 90 \times 12}{72 \times 9} = 5\ albañiles$$

Un problema complicado con proporciones.

15 hombres tienen que terminar una obra en 14 días, pero a los 9 días llevan 3/7 de la obra. ¿Cuántos hombres extras se requieren para terminar la obra en 14 días?

Solución: Dicho de otra manera aunque el objetivo es completar una obra en 14 días con 15 trabajadores, a los 9 días se dan cuenta que no podrán, 3/7 marca el avance y con este dato hallamos la parte proporcional que aporta cada trabajador. Saber la cantidad de trabajo que aportan 15 hombres en los 5 días que faltan y también saber qué cantidad de trabajo aporta un hombre en 5 días para hallar cuántos más se necesitan:

| Hombres | Días | Fracción de la obra |
|---|---|---|
| 15 hombres | 9 días | $\frac{3}{7}$ de la obra "dato real" |
| 5 hombres | 9 días | $\frac{1}{7}$ de la obra |
| 1 hombre | 9 días | $\frac{1}{(7\times5)}$ |
| 1 hombre | 1 día | $\frac{1}{(7\times5\times9)}$ |
| **1 hombre** | **5 días** | $\boldsymbol{\frac{1}{(7\times9)}=\frac{1}{63}}$ |
| 15 hombres | 1 día | $\frac{15}{(7\times5\times9)}=\frac{1}{21}$ |
| 15 hombres | 5 días | $\frac{(15\times5)}{(7\times5\times9)}=\frac{5}{21}$ |
| 15 hombres | **Trabajo en 14 días**<br>$\frac{3}{7}+\frac{5}{21}=\frac{14}{21}$ (Faltan $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$) del trabajo que debe hacer en 5 días. | Por eso necesito más trabajadores |
| Faltan 5 días, hombres que necesitan para terminar : | De la sexta columna, un hombre hace en 5 días $\frac{1}{63}$ "$x$ hombres harán el resto"<br>$\frac{x}{63}=\frac{1}{3}$ $x = 21$ | Se necesitan 21 hombres adicionales para terminar el trabajo en 15 días |

Es decir, necesitamos contratar 21 trabajadores que sólo trabajaran 5 días para terminar el trabajo junto con los demás.

No es difícil solo se necesita trabajar con paciencia y mantener una columna constante, y en este caso lo que se quiere hallar es la cantidad de trabajo que falta. (No confundir 14 con 15)

**Solución de problemas por estudiantes de la FCFM-BUAP.**

Los siguientes problemas se aplicaron a alumnos de distintos semestres.

Un ciclista y un motociclista parten simultáneamente del mismo punto, el ciclista va a una velocidad de 20Km/hr y el motociclista a una velocidad de 30 Km/hr, ambos hacen el mismo recorrido pero el motociclista llega una hora antes. ¿Cuál es la distancia que recorren?

En problemas como este, es muy posible que los alumnos den diferentes formas de solución, la razón es que la velocidad es constante y permite abordarlo desde diferentes estrategias mentales.

1.- Elaborar una tabla

2.- Usando algebra, se observan diferentes formas de escribir las ecuaciones.

Ambos recorren la misma distancia D= $v_1$ $t_1$ = $v_2$ $t_2$ sea $v_1$ = 30 km/hr $v_2$ = 20 km/hr entonces

$30t_1 = 20(t_1 + 1)$

$30t_1 = 20t_1 +20$ despejando $t_1$ = 2 horas

DIFERENTES FORMAS DE LLEGAR A LA SOLUCIÓN

SOLUCIÓN 1): Jorge Antonio G.

Denotemos por $d$ a la distancia total del recorrido, tenemos que:

$$d = 20h_1$$

$$\text{y} \quad d = 30h_2$$

donde $h_1$ y $h_2$ denotan el tiempo que les tomo al ciclista y al motociclista recorrerlo respectivamente. Sabemos que el motociclista llega una hora antes que el ciclista, es decir

$$h_2 = h_1 - 1$$

Sustituyendo en el sistema (1) tenemos que:

$$d = 20h_1$$

$$d = 30(h_1 - 1) = 30h_1 - 30$$

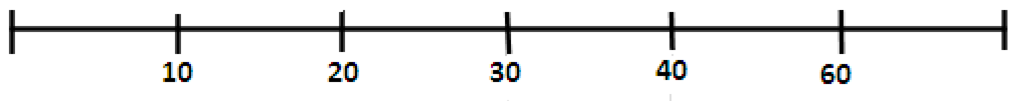
$$\Leftrightarrow 20h_1 = 30h_1 - 30$$

$$\Leftrightarrow 30 = 10h_1$$

$$\Leftrightarrow h_1 = 3$$

Y sustituyendo $h_1 = 3$ en la primera ecuación del sistema (1) tenemos que la distancia total del recorrido es 60km.

SOLUCIÓN 2): Ciria Ruth B.




La distancia recorrida es 60km. Pues el motociclista tarda 2hrs en llegar, mientras que el ciclista tarda 3hrs, lo cuál nos da una hora de diferencia.

$x$ es la distancia en km.

$t_c$ tiempo del ciclista $v_c$ 20km/hr

$t_m$ tiempo del motociclista $v_m$ 30km/hr

Sabemos que $t_c - t_m = 1hr$

El ciclista tarda en recorrer la distancia $x$

$$t_c = \frac{x}{v_c} = \frac{x}{20}hr$$

Y el motociclista tarda

$$t_m = \frac{x}{v_m} = \frac{x}{30}hr$$

$\Rightarrow \frac{x}{20} - \frac{x}{30} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x\left(\frac{3-2}{6}\right) = 1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{6}\right) = 10 \Rightarrow x = 60km.$

**Un problema de piratas**

Un grupo de piratas tiene un cierto número de monedas de oro, si las reparten de 4 en 4 un pirata se queda sin monedas, si reparten de 3 en 3 sobra una moneda ¿cuántas monedas tienen y cuántos piratas son?

La mayoría de los alumnos lo resolvió por ensayo y error, finalmente se dieron cuenta que era muy fácil. Transcribimos algunas soluciones.

SOLUCIÓN 1): Marco A.

Son 5 piratas y 16 monedas.

Se tiene que pensar en un múltiplo de 4 y que no sea múltiplo de 3. Pero además el múltiplo de 4 solo tiene que ser mayor por una unidad que el múltiplo de 3 y el primero que lo cumple es el 16. Luego se piensa en los piratas, si son 5 piratas repartiendo las monedas sobra 1, pues el 15 es múltiplo de 3 y 5, pero el 16 sólo es múltiplo de 4 y esto es lo que pide el problema.

SOLUCIÓN 2): Danae G.

| Piratas | Monedas (4 en 4) | Monedas (3 en 3) |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 3 |
| | 16 monedas | 15 monedas |

Por lo que la solución es 5 piratas y 16 monedas.

SOLUCIÓN 3): Lázaro F.

$x$ Número de monedas

$y$ Número de piratas

$$\frac{x}{4} = y - 1 \implies \frac{x}{4} + 1 = y \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3} = y \implies \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = y$$

$$\implies \frac{x}{4} + 1 = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \implies \frac{x}{4} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3} - 1$$

$$\implies \frac{3x-4x}{12} = \frac{-4}{3} \implies \frac{-x}{12} = \frac{-4}{3} \implies x = 16$$

Y haciendo las operaciones correspondientes obtenemos que $y = 5$.

Por lo tanto hay 16 monedas y son 5 piratas.

-En el salón de clases de la maestra Lupita todos los alumnos cooperaron para comprar un pastel de 126 pesos. Para reunir la cantidad, cada uno aportó un peso por cada integrante del salón y 15 pesos más ¿Cuántos alumnos hay en el salón?

SOLUCIÓN 1): Antonio P.

La ecuación que me representa es $n(n+15) = 126 \implies n^2 + 15n - 126 = 0$, resolviendo esta ecuación nos da $n = 6$. Es decir, hay 6 alumnos.

SOLUCIÓN 2): Marco A.

Dividí los 126 entre 15 y el entero encontrado fue 8, después hice cuentas agregando cada peso por alumno, hasta que llegue al resultado de 6 alumnos.

Les costó trabajo entender el enunciado, la mayoría la resolvió por ensayo y error, NO USARON ALGEBRA.

-Un grupo de turistas rento un bote de vela por 2400 pesos. Si dos de ellos al final no quisieron subirse, esto hizo que cada uno de los demás tuviera que pagar 100 pesos más ¿cuántos turistas había en el grupo?

SOLUCIÓN 1): Marco A.

Busque un par de múltiplos de 24 que sólo fuera uno mayor que el otro por 2 unidades y resulta que 6 y 8 son dichos números. Y a la hora de dividir estos números con 2400 el único que cumple lo que queremos es el 8. Por lo tanto, había 8 turistas.

SOLUCIÓN 2): Ángeles C.

Sea $n = \ número\ de\ turistas$

$x = \ la\ cantidad\ que\ paga\ cada\ turista$

Entonces $n \cdot x = 2400 \ldots\ldots\ldots (1)$

Como 2 de ellos no quieren subirse quedan $n - 2$ turistas y cada uno de estos restantes ahora debe pagar $x + 100$. Por lo tanto tenemos que

$$(n-2)(x+100) = 2400 \implies n \cdot x + 100n - 2x - 200 = 2400$$

Pero de (1) $n \cdot x = 2400 \implies 100n - 2x - 200 = 0$, también de (1) se tiene que $x = \frac{2400}{n}$ pues $n \neq 0$.

$$\implies 100n - 2\left(\frac{2400}{n}\right) - 200 = 0$$

$$\iff 100n^2 - 4800 - 200n = 0$$

$$\iff n^2 - 2n - 48 = 0$$

Resolviendo esta ecuación encontramos que $n = 8$ o $n = -6$ de donde concluimos que $n = 8$.

Por lo tanto, había 8 turistas.

**Cuadrado anti mágico:** Hay que colocar los números 1, 2, 3, 4, 5,6,7, 8, 9 en los cuadros vacíos de tal forma que la suma de los números en los renglones, columnas y en las diagonales sean diferentes

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 8 | 9 | 4 |
| 7 | 6 | 5 |

Puede ser un poco laborioso para algunos, es decir al intentarlo les toma tiempo, hay varias soluciones la que se muestra es fácil de recordar por el patrón en espiral.

## CONCLUSIÓN

El punto de vista general es que “los problemas son el clavo en el zapato”, por ello suelen suscitar reacciones negativas entre los alumnos, pero también son la “sal de la vida”. La mayoría de las profesiones y oficios se encaminan a resolver problemas. El propósito de la solución de problemas como forma de trabajo diaria en el aula es que la enseñanza no debe limitarse a los cálculos aritméticos y demás tareas mecánicas apegadas a reglas, sino permitir a los educandos utilizar los conocimientos que poseen y reorganizarlos, con la posibilidad de transitar de estrategias de solución informales, largas y poco sistemáticas hacia estrategias convencionales pero más eficaces.

Este caminar de lo informal a lo formal, desde una secuencia de problemas pertinentes y seleccionados con niveles de dificultad lógica, permite dinamizar la forma de pensar y adquirir conocimientos cada vez más formales.

La solución de problemas por los alumnos permite entonces la construcción de conocimientos más significativos. Para los adolescentes los conocimientos matemáticos tienen sentido si se presentan en un contexto que les de significado. Tal contexto se vuelve interesante si se les presenta como un reto intelectual (entre otros factores).

La solución de problemas también es un detonador en el profesor, ya que genera la necesidad de dejar de lado la explicación de algoritmos convencionales, asociados a un determinado contenido matemático. En este sentido Polya hace un buen aporte al proponer, como hemos visto, al proponer al maestro la tarea de guiar al alumno en el difícil camino de resolver problemas de manera autónoma, y sobre todo al insistir en el descubrimiento individual mediante conjeturas que los alumnos deben proponer en base a ejemplos concretos en algún tema específico.

El conocimiento matemático significa enseñar y aprender, que tanto docente como alumno analicen y propongan problemas interesantes que les ayude aprovechar lo que ya saben y avanzar para construir sus conocimientos, y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje.

La resolución de problemas y las diferentes formas de hacerlo ayuda a que el alumno busque por si sólo como resolverlo, esto lo beneficiaria ya que será capaz de leer y analizar con detalle su problema y trabaje de manera autónoma.

Para el maestro debe ser más importante entender el camino que ha tomado el alumno para llegar a la solución y a la justificación de sus pasos que simplemente verificar si su respuesta es correcta o no. Equivocarse, pero rectificar a tiempo, puede enseñar más que el hecho de dar con la respuesta.

La actividad de resolver problemas en la escuela, la casa, el trabajo y la comunidad debe ser parte integral de la formación del alumno, no sólo es una materia, es parte de la vida misma.

Finalmente damos 10 sugerencias para la solución de problemas y creatividad.

1.- Pensar en todos los aspectos del problema

2.- Seleccionar los subproblemas que se van a atacar

3.- Recabar (recordar) la información que pudiera ser útil (escríbalas)

4.- Seleccionar las fuentes de datos más apropiados

5.- Imaginar todas las ideas posibles para la solución de problemas

6.- Seleccionar las ideas que conduzcan más adecuadamente a la solución

7. - Pensar en todos los sistemas posibles de hacer pruebas

8.- Hacer las pruebas

9.- Imaginar todas las contingencias posibles

10.- Decidir la respuesta final

En nuestra opinión profesor que pretende trabajar con base a la solución de problemas debe:

- Planear su clase a base de problemas que permiten que todos los estudiantes puedan aportar una solución o una idea.
- Pedir a los estudiantes reflexionen antes de contestar.
- Ofrecer problemas que tienen varias formas de resolverse.
- Utilizar situaciones reales siempre que sea posible y pertinente.
- Desarrollar conceptos matemáticos, ideas a partir de las ideas de sus alumnos, llevándolos gradualmente hacia la abstracción.
- Tomar en los conocimientos y las experiencias previas de los alumnos.
- Pedir a sus estudiantes argumentar de manera clara sus respuestas respetando su proceso, pues argumentar no se aprende en poco tiempo.
- Y proponer tareas para reforzar lo que han aprendido los alumnos.

## ANEXO 1

**PARA RESOLVER UN PROBLEMA SE NECESITA**

**Comprender el problema**

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

**Concebir un plan**

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? O ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que sea la misma insignita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿un problema más general? ¿un problema más particular? ¿un problema más análogo? ¿puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y os datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

**Ejecución del plan**

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

**Visión retrospectiva**

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

## ANEXO 2

**Sobre el Método Singapur (MS) para resolver problemas**

La enseñanza de las matemáticas es más efectiva, interesante y más dinámica a través de la resolución de problemas variados. Sin conocer el método percibí que los niños elaboraban dibujos para resolver problemas. Al principio pensé que era un "retroceso" a la primaria, o algo así como que los niños todavía no asimilaban su tránsito a la secundaria. Pero mantuve tolerancia a esta "desviación" por dos razones: 1) para tomar en cuenta los procedimientos de los niños en la resolución de problemas y 2) ser tolerante y paciente a que estos pequeños asimilaran el cambio de dejar la primaria y entrar a la complicada etapa adolescente en la secundaria.

Conforme avanzábamos en las clases y resolvíamos problemas, observaba las soluciones de los niños, una gran dificultad que se tiene en primer grado es que los niños no saben explicar su respuesta, la obtienen y te la muestran. Me esforzaba por entenderles y ellos por explicarme aunque en varias ocasiones ellos o yo desistíamos. Buscaba motivarlos a que resolvieran los planteamientos como ellos pudieran, así los obligas a poner en acción todos los recursos matemáticos con los que ellos cuentan, además de que permite ver otras habilidades y también deficiencias que hay que superar.. La motivación consiste en hacerles preguntas que los "guíen" a una respuesta más correcta. Los estudiantes a veces se traban en conceptos matemáticos por no recordar cómo se saca área o perímetro de figuras básicas o bien en operaciones aritméticas básicas (sobre todo con fracciones), en malentender o de plano NO entender el planteamiento del problema y por eso no saben qué hacer. Si cometen errores ayudarles a que vean donde está y que ellos mismos lleguen a una respuesta correcta.

Con la confianza ganada de los niños, ya que sus soluciones son tomadas en cuenta, insistiendo que se valía hacer de todo con tal de resolverlos, me di cuenta que algunos de ellos "dibujaban" el problema y así era más entendible para ellos, me lo podían explicar de una manera más fácil y también resultaba más fácil explicarlo a sus compañeros. Así que retomé sus "dibujos" para dar la explicación en otros grupos. Ellos me preguntaban si esto era válido, porque en la primaria como eran los mayores ya no se veía muy bien que hicieran dibujos. Yo les dije que sí, porque así lo entendían mejor. Pero tenía mis dudas al respecto. Quiero aclarar que cuando hablo de dibujos me refiero a una representación con bloques rectangulares, cuadrados, tal vez circulares. No a dibujos propiamente de animales, lugares etc. (que también es común)

Posteriormente me di cuenta que la manera como estaban trabajando varios de mis niños era el MS (o método gráfico), para mí desconocido hasta entonces. Y que era una alternativa muy buena para desarrollar diversas habilidades. Al principio, algunos de los niños no se sentían cómodos en hacer sus dibujos porque seguían viendo como que hacían trampa. Alenté a que los hicieran, a que desataran su creatividad y a que vieran que era un muy buen método e insistí en que lo utilizaran. Y poco a poco más niños lo intentaban utilizar porque lo entendían a través de sus compañeros.

Así que a través de esta experiencia puedo decir que el MS tiene ventajas muy valiosas:

Para los estudiantes:

1) El dibujo permite ver si el adolescente ha entendido o no el planteamiento del problema. Ya que logra una abstracción al depurar la información y quedarse sólo con la información necesaria.
2) Al tener un dibujo, el adolescente puede explicar mejor su procedimiento. Y esto es muy valioso porque se fortalece una confianza en sí mismo de que si puede con las matemáticas.
3) Al explicarlo al grupo se logra una comprensión más amplia de todos porque es un adolescente explicando a otros y entre ellos se entienden mejor.

Para el docente

1) El Método grafico logra que niños con dificultad para aprender o comprender situaciones problema vean que no es tan difícil y entonces se motivan y se animan a seguir intentándolo.
2) Algunos problemas son mucho más entendibles por el método gráfico que por otros, como una solución algebraica o sólo aritmética. Padres de familia me han enviado recados que tal o cual problema es muy difícil y que ellos mismos no lo pudieron resolver, cuando sus hijos se los explican por este método, me mandan comentarios de que estaba muy sencillo y no se les ocurrió esa idea. O como el caso de una niña que explicó el problema de las llaves de agua que llenan un tanque a su hermana de preparatoria y a ambas les quedó claro.
3) Hay soluciones gráficas muy ingeniosas y veo belleza en sus respuestas. Así fomentas su creatividad y elevas su autoestima. Una respuesta ingeniosa la promuevo entre mis otros grupos y entre ellos mismos se felicitan.
4) Funciona con grupos numerosos, ya que el problema en las escuelas públicas es que tenemos arriba de 50 niños y prestarles atención a cada uno es difícil. Pero este método te da la ventaja de una explicación para todos.
5) Este método permite que el niño desarrolle de una manera más natural y no forzada su argumentación. Le da más seguridad en expresar sus ideas y de una manera más ordenada y clara. Lo haces PENSAR, si se equivoca, como ha pasado, el niño comienza de nuevo su explicación partiendo de ver su gráfico y seguro de sí mismo porque él fue el autor intelectual de esa respuesta y nadie más. Y si aun así se traba, a veces algunos de sus compañeros salen al rescate porque trabajan en pareja o tríos y ya captaron la solución. Ahora que los tengo en segundo a varios de ellos no se les olvida como resolvieron X ó Y problema y tienen presente su solución gráfica.
6) El método gráfico es muy bueno para entender el concepto de fracciones, fracciones equivalentes, fracciones como porcentaje y acciones de reparto, y de reparto del resto. Tema muy importante y talón de Aquiles en las matemáticas de educación básica.
7) Las soluciones ingeniosas no siempre provienen de quien tú esperas. Me he llevado sorpresas muy gratas con niñ@s que hasta ese momento habían pasado desapercibidos para mí en el salón de clase. Hay riqueza de pensamiento, creatividad y habilidad en el salón que a veces pasamos desapercibida, porque no sabemos cómo buscarla y como potenciarla. El método grafico te ayuda en esta parte.
8) El método grafico es un recurso didáctico muy bueno para pasar al siguiente nivel que es el manejo de símbolos (álgebra).
9) Logras a fin de cuentas desarrollar habilidad, creatividad, enriquecimiento del lenguaje y mejor comunicación.

Limitaciones:

a) Hay que saber elegir problemas que se puedan resolver por este método. Problemas variados y con vocabulario diverso para que el niño amplíe su vocabulario (en matemáticas y en el idioma). Generalmente ligados a las ciencias exactas, pero también para fomentar su conocimiento respecto a su entorno cultural, social y del mundo en que vivimos.

b) No todos los problemas se pueden resolver por este método.

c) Persuadir a los niños de pasar al siguiente nivel que es el álgebra es un proceso de mucha paciencia y ya que este método es muy visual y sencillo y menos complicado para ellos que el álgebra. Me dicen “para que me complico con el álgebra si con dibujo ya entendí”

d) Si no te ganas su confianza, y no generas un ambiente de respeto en el grupo difícilmente vas a lograr una actitud de trabajar. En general es un método que recomiendo ampliamente.

Laura Ortega Xochicale

Secundaria Técnica No. 1

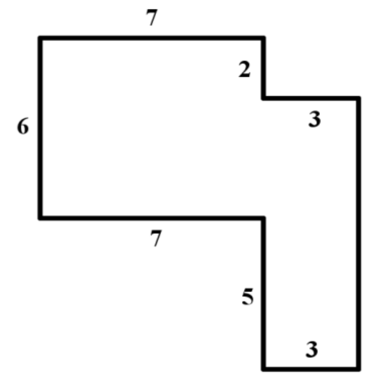
## ANEXO 3

Experiencias de mi servicio social

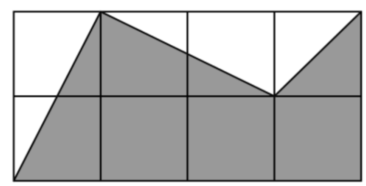
Asistían alumnos de la secundaria técnica No. 1, sábados de 9 a 11 horas

Algunos  problemas propuestos

1.- En la figura adjunta, todos los ángulos son rectos y todas las medidas vienen en metros. ¿Cuál es, en $m^2$ , el área de la figura?




2.- ¿Qué fracción del rectángulo grande está sombreada? (Los  polígonos interiores son cuadrados)



3.- La suma de tres números D,  E,  F es 51. Si E es el doble que F y D es 15 unidades mayor que F ¿cuáles son esos números?

4.- Ana y Sara fueron una vez igual de altas. Desde entonces, Sara ha crecido el 20% mientras que Ana ha crecido la mitad de centímetros que Sara. Si Sara tiene ahora 156 cm de altura, ¿cuántos cm mide Ana actualmente?

5.- En un refugio para animales, entre perros y gatos hay 12, hay poca comida.  Cada perro recibe seis galletas y cada gato cinco. En total se repartieron 67  galletas ¿Cuántos perros y cuántos gatos hay?

6. Pinocho tiene una nariz de 3 cm. Cada vez que dice una mentira la longitud de su nariz se duplica, después de mentir nueve veces, ¿cuánto medirá su nariz?

7.- La fortuna de una persona al morir era de $ 600 000.00 y su testamento decía “Dejo a mi esposa las dos quintas partes de mi fortuna y el resto a mis 4 hijos por partes iguales”  ¿Qué parte de la fortuna recibió cada hijo? ¿Cuánto recibió la esposa?

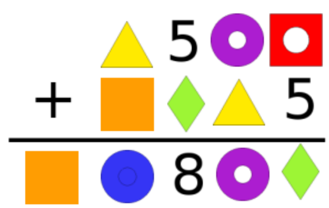
8.- En una barata, los balones se ofrecen a $\frac{2}{3}$ de su precio original. Si un balón se vende ya con el descuento en $ 160.00 ¿Cuál es el precio original? ¿Cuánto se ahorra por balón en la barata?

9.- Para preparar un pastel, se necesita: $\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 g de azúcar, $\frac{3}{4}$ de un paquete de harina de kilo, $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 200 g.
Halla, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.

10.- Alicia cuenta con $300 para compras. El jueves gastó $\frac{2}{5}$ de esa cantidad y el sábado los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Cuánto gastó cada día y cuánto le quedó al final?

11.- Pedro va al club todos los días, Carlos va cada dos días, Claudia cada 3 días, Sofía cada 4 días y Pablo cada 5 días. Hoy se encontraron todos en el club. ¿Cuándo se volverán a encontrar todos nuevamente?

## Problemas recreativos que a los niños les gustan:

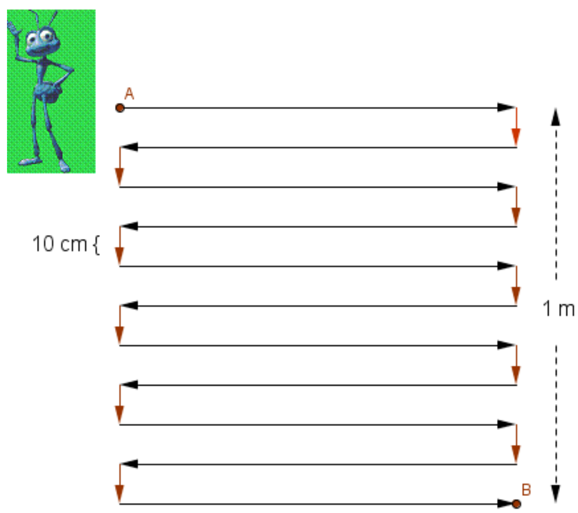



1.- Hallar que dígito representa cada figura

2. Un profesor de matemáticas dice a sus alumnos “Hoy tengo 50 años, 50 meses, 50 semanas, 50 días ¿cuántos años tengo?

3.


4.




RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

De las siguientes situaciones indica, ¿cuáles relacionan cantidades proporcionales y cuáles no? Resuelve en caso necesario

1.- Un coche gasta 7.2 litros de gasolina en 100 Km. de recorrido ¿cuánto gastara si recorre 50 Km?

2.- Mi madre tiene 33 años y mi hermano 11 ¿qué edad tendrá mi madre cuando mi hermano tenga 22?

3.- Un niño de 2 años peso 18Kg ¿Cuánto pesara a los 10 años?

4.- Para hacer un pastel de queso para 6 personas hacen falta 400 gramos de harina ¿para hacer un pastel de 18 raciones cuanto debemos comprar de queso?

5.-Para comprar 6 litros de leche se necesitan 72 pesos, ¿Cuánto dinero necesita gastar una familia si consumen 10 litros a la semana?

6.- Para hacer una receta para 4 personas hace falta 6 huevos y 250 gramos de papas ¿Qué cantidad de huevos y papas necesitamos para hacer 7 recetas iguales? (una para cada día de la semana)

7.- Una empresa constructora dispone de un terreno para construir 10 casas de 90 metros cuadrados (una planta) ¿Cuántas casas se podrán construir si las queremos hacer de 100 metros cuadrados cada una?

8.- Un barril de 32 litros está lleno al 60% de su capacidad ¿Cuánto hay que agregarle para que este al 80% de su capacidad?

9.- Después de haber gastado el 25% de su capacidad a un coche le quedan 30 litros de gasolina ¿cuál es la capacidad del tanque de gasolina?

10. Un pantalón de mezclilla talla 28 cuesto 280 pesos ¿Cuánto costara un pantalón de talla 32?

## DIFICULTADES

El último "problema" causo mucha polémica, sin embargo se pide que recuerden como es la costumbre en el comercio, hasta los papás se quejaron con la maestra: pidieron que no propongan problemas sin respuesta, o que confundan a los alumnos.

Pinocho tiene una nariz de 3 cm. Cada vez que dice una mentira la longitud de su nariz se duplica, después de mentir nueve veces, ¿cuánto medirá su nariz?

En este problema muchos niños se equivocan, simplemente multiplican 3x9, parece que no se fijan en que el enunciado indica "se duplica". Se explica la solución, y continuamos, los niños se motivan cuando un compañero pasa a explicar la solución.

**Lo importante es que los alumnos movilicen sus recursos con enunciados no rutinarios, es importante que lo vean como un pasatiempo, un reto interesante, no como una carga o una obligación. Algo que les pique su curiosidad.**

El desarrollo de habilidades ocurre en forma progresiva, es decir solo la práctica logra que se mejore el desempeño. Los niños que asistían a asesorías varios de ellos participaron durante 3 años (de primero a tercero de secundaria) al final se vieron los progresos, según comentarios de su maestra.

El alumno puede llegar ser flexible en el uso de diversas estrategias, solo practicando constantemente. Para lograr que el alumno posea un rango amplio y variado de procedimientos en cada sesión se proponían enunciados diferentes

En las diferentes sesiones era ir aumentando la dificultad en la redacción de los problemas, e incluir variedad de enunciados, para que los chicos fueran ampliando su vocabulario pero sobre todo las situaciones

Es importante situarse claramente en el contexto escolar, pues no es lo mismo secundaria que bachillerato, es decir a la hora de dar sugerencias para impartir un curso particular en base a la resolución de problemas debemos indicar claramente el nivel, ya que no es posible dar sugerencias generales, por ejemplo Carmen Chamorro indica que los pasos de Polya no son adecuados para niños de primaria. Sin embargo es necesario resolver muchos “problemas” para que posteriormente podamos hacer uso de la sugerencia “conoce algún problema parecido”.

Al resolver problemas los alumnos comprueban que los términos matemáticos tienen sentido porque funcionan. El fundamento a la solución de un problema proviene de sus argumentos y no del docente o de un libro, y sobre todo adquieren confianza y gusto por las matemáticas.

El maestro necesita recurso de los cuales echar mano, no recetas pues las condiciones cambian constantemente, un grupo nunca es igual a otro.

En el enfoque por competencias se planea buscando el desarrollo de las habilidades para resolver problemas, el programa pasa a segundo término, por ello escogemos primero los problemas y luego vemos que temas se puede tocar significativamente a partir de las soluciones de los alumnos, es el punto de partida para el desarrollo de cada tema del curso (Polya nos ganó pág. 125).

- Un error común: **tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se hace sin referencia a lo que los alumnos ya saben, tratamos a nuestros alumnos como si nada supiesen sobre tópicos todavía no enseñados, nosotros tratamos de averiguar lo que si pueden. No nos quejamos por lo que no saben, tratamos de ubicarnos y aprovechar lo que si pueden hacer, tal vez con un poco de ayuda.**

- Para usar el conocimiento previo de los alumnos debemos poner actividades y problemas, la idea es que los alumnos se involucren, y así trabajaran sin darse cuenta, olvidando el tedio de la clase tradicional.

- Carraher y Terezinha nos previenen de no confundir la dificultad de un problema con la dificultad aritmética, esto lo tuvimos en cuenta principalmente al proponer problemas con fracciones.

García Madruga indica que para la resolución de un problema el sujeto debe comprender adecuadamente el mismo y activar, por tanto los esquemas de conocimiento pertinentes, lo que lleva a decir que “comprender un problema y resolverlo es prácticamente los mismo”. Nosotros estamos de acuerdo con esta observación para problemas aritméticos y geométricos sencillos en el nivel  de 12-15 años.

## BIBLIOGRAFÍA.


Fernández, Bravo, J., Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos, segunda edición 2007. España.

Fomin, D., Genkin, S., Mathematical Circles, American Mathematical Society, 1996.

García Madruga, J., Lectura y Conocimiento, Paidós, 2006.

Marvan, Luz María Hacer matemáticas editorial Santillana México 2001.

NCTM, Problem solving in school mathematics, Yearbook 1980.

Polya, G. Mathematical Discovery on Understaing, Learning, and Teaching Problem Solving, John Wiley & Sons, USA 1981.

Polya, G., Como Plantear y Resolver Problemas, Trillas, México reimpresión 2010.

Wood, Larry E. Estrategias de pensamiento, Ejercicios de agilidad mental, Editorial Labor, España 1987.