BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS

FÍSICO MATEMÁTICAS

“RETRACCIONES, CONTRACTIBILIDAD Y PUNTOS FIJOS EN ESPACIOS DE DIMENSIÓN INFINITA”

TESIS PROFESIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Silvia Varinia Flores Guarneros

ASESORES:

Dr. Guillermo Romero Meléndez

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue.

Primavera 2011.

Título: Retracciones, Contractibilidad y Puntos Fijos en Espacios de Dimensión Infinita
Estudiante: Silvia Varinia Flores Guarneros

ASESORES

Dr. Guillermo Romero Meléndez

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

JURADO

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Presidente

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar
Secretario

M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez
Vocal

Índice general

Agradecimientos

Por sembrar su confianza y dejarme junto al mundo derrotando imposibles segura sin seguro, por dejar descifrarme sola sin mi pregunta a ciegas, sin mi respuesta rota.
A Cesar y Silvia.
Mis padres.

Por acompañarme en la red de mis sueños y ser socios en la empresa de la alegría y la tristeza que de la vida misma procede.
A Cesar y Hugo.
Mis hermanos.

A la estrella de mi tiempo y mi espacio, eje de mi vida.
A Rashid Varick.
Mi hijo.

A la preceptora de las buenas ideas en toda la experiencia de la vida, por sus afables consejos en las distintas etapas de este proceso.
A Irma.
Mi tía.

A Ezequiel Contreras Hernández, por brindarme su apoyo y sobre todas las cosas por su amistad.
Mi amigo.

A la Dra. Reyla Arelí Navarro Cruz y al Dr. Alfonso Rosado Sánchez, con especial cariño por su apoyo, generosidad, valiosas enseñanzas y gran calidad humana.

Al Dr. Guillermo Romero Meléndez por esta grata experiencia al haber producido a su lado, por su paciencia y dedicación, por permitirme aprender de su profesionalismo y por sus valiosas observaciones .

Al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres por aceptar asesorarme y apoyarme con sus buenas ideas para hacer las modificaciones y correcciones pertinentes.
Mis asesores.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, al M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, por leer mi tesis, por sus preguntas y sugerencias para desarrollar una mejor estructura.
Mis sinodales.

Muchas gracias.

Introducción

En el espacio euclidiano de dimensión finita se cumplen y son equivalentes los siguientes enunciados. (Ver Dugundji, XVI, 2.1 y 2.2):

i) La función identidad de la esfera S^n no es homotópica a una constante, en donde S^n es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ con centro en el origen.

ii) No existe una retracción continua del disco unitario V^{n+1} en S^n.

iii) Todo mapeo f de V^{n+1} en V^{n+1} tiene un punto fijo.

Por otra parte, en espacios de dimensión infinita los enunciados anteriores no se cumplen. Sin embargo, haciendo cambios en las hipótesis, se obtienen resultados positivos.

Por ejemplo, si K es un subconjunto cerrado, acotado y convexo en un espacio de Banach, entonces todo mapeo no expansivo $f : K \to K$ tiene un punto fijo aproximativo, es decir, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\| f(x_n) - x_n \| \to 0$. (Ver Benjamini, Lindenstrauss, proposición 3.6 i)). Para espacios más generales, el resultado anterior se puede extender a una clase de espacios métricos que incluye al hiperespacio $H(R^n)$ de subconjuntos compactos no vacíos de R^n.(Ver Ramiro-Fernández).

En cuanto a los enunciados equivalentes a los puntos i) y ii) anteriores, en espacios de Banach de dimensión infinita se sabe que:

a) Existe una retracción Lipschitz de la bola unitaria sobre la esfera unitaria.
b) La esfera unitaria es Lipschitz contraíble. (Ver Benjamini, Lindenstrauss, corolario 3.5).

Los resultados principales de este trabajo son los siguientes:

1. Se define el concepto de espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

2. Se demuestra que si X es un subconjunto convexo y acotado de un espacio de Banach, entonces X es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

3. Se prueba que si P es un subconjunto de R^n compacto y convexo, entonces el espacio de fractales $H(P)$ es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

4. Se demuestra también que todo espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada es Lipschitz contraíble.

5. Se prueba el siguiente resultado para espacios con la propiedad de la desigualdad acotada: Si existe una retracción Lipschitz de una bola unitaria sobre su esfera unitaria correspondiente, entonces la esfera unitaria es Lipschitz contraible. Este teorema extiende el resultado correspondiente para espacios de Banach y nos brinda una nueva perspectiva para estudiar los espacios de fractales H(P).

En el primer capítulo revisamos definiciones referentes a los Espacios métricos como la Compacidad, la Convexidad y la Contractibilidad, mismos que servirán como preliminares para la exposición de los capítulos posteriores. En el segundo capítulo se repasa el Teorema del Punto Fijo según Brouwer, Schauder y Banach. El espacio de fractales y sus propiedades son tratados en el tercer capítulo. Finalmente en el capítulo cuarto desarrollamos las aplicaciones a los espacios métricos que tienen la propiedad de la desigualdad convexa acotada y se prueban los resultados 1-5 mencionados anteriormente.

Capítulo 1

Espacios métricos.

En este capítulo se repasan los resultados referentes a los espacios métricos, es preciso acudir a los métodos generales de la Topología en los espacios métricos. Un espacio métrico es un tipo particular de espacio topológico donde una distancia entre puntos está definida, corresponde al caso muy común en que se dispone de una noción de distancia sobre el espacio. Revisaremos también el concepto de sucesión de Cauchy que depende de la definición de distancia, de igual manera se trabajará con las principales definiciones referentes a los espacios métricos que servirán como base para la introducción de nuevas definiciones en el desarrollo de la presente tesis.

Definición 1.1. Un espacio métrico es un conjunto X, no vacío, de objetos (que llamaremos puntos) dotado de una función d definida sobre el conjunto $X \times X$ en $\mathbb{R}$(que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las cuatro propiedades siguientes, cualesquiera que sean los puntos x, y, z de X :

1) $d(x, x) = 0$
2) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$
3) $d(x, y) = d(y, x)$
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 1.2. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (X, d). S es un conjunto *abierto* si para todo $x \in S$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que: $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subset S$.

Definición 1.3. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (X, d). S es *acotado* si para todo punto $a \in X$ y cualquier número $R > 0$ tenemos que $d(a, x) < R$ para cualquier x en S.

Definición 1.4. S es un subconjunto *convexo* de R^n , si para cualesquiera a y b en S, se cumple que $\{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\} \subset$ S.

1.1. Función de Lipschitz

Definición 1.5. Una función $f : X \to Y$, donde X, Y son espacios métricos, es una *función de Lipschitz* si existe una constante $k \geq 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para cualesquiera x, y en X. En este caso, la más pequeña de las constantes k es llamada la constante de Lipschitz de la función y la denotaremos como $C_{f.}$

Definición 1.6. Una función de Lipschitz con la constante k en el intervalo $[0, 1]$ es una *función no expansiva.*

Definición 1.7. Una función de Lipschitz con la constante k en el intervalo $[0, 1)$ es una *función contractiva.*

1.2. Desigualdad Convexa

Definición 1.8. Un espacio métrico se dice que es *métricamente convexo,* si para cualesquiera sean $x_0, x_1 \in X$ y para cada $0 < t < 1$, existe un punto $x_t \in X$, tal que $d(x_{0,}x_t) = td(x_0, x_1)$ y $d(x_1, x_t) = (1-t)d(x_0, x_1)$.

Definición 1.9. Sean (X, d) un espacio métrico y F_d la función definida sobre el conjunto $X \times X \times [0, 1]$ en X que se denota como, $F_d(x_0, x_1, t) = tx_0 + (1-t)x_1$. Diremos que (X, d) es un *espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa* si:

$$d(F_d(x_0, x_1, t), F_d(y_0, y_1, t)) \leq td(x_0, y_0) + (1-t)d(x_1, y_1) \tag{1.1}$$

para todo $(x_0, x_1, t), (y_0, y_1, t)$ en $X \times X \times [0, 1]$.

$$F_d(x_0, x_1, 0) = x_1, F_d(x_0, x_1, 1) = x_0, F_d(x_0, x_0, t) = x_0 \tag{1.2}$$

para todo (x_0, x_1) en X y t en $[0, 1]$.

Proposición 1.10. Sea (X, d) un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa. Entonces (X, d) es métricamente convexo.

Queremos mostrar que para cualesquiera $x, y \in X$ y $t \in (0, 1)$, existe $w_t \in X$ de tal forma que:

$$d(x, w_t) = td(x, y)$$

y

$$d(y, w_t) = (1 - t)d(x, y)$$

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $t \in (0, 1)$. Tomemos a $w_t = (1 - t)x + ty$. Como:

$$d(x, w_t) = d((1 - t)x + tx, (1 - t)x + ty) \leq td(x, y),$$

se sigue que:

$$d(x, w_t) \leq td(x, y) \tag{1.3}$$

Por otra parte tenemos que:

$$d(x, y) \leq d(x, w_t) + d(w_t, y)$$

y

$$d(w_t, y) = d((1 - t)x + ty, (1 - t)y + ty) \leq (1 - t)d(x, y).$$

Por lo tanto:

$$d(w_t, y) \leq (1 - t)d(x, y) \tag{1.4}$$

Por (1.4), tenemos que:

$$d(x, y) \leq d(x, w_t) + d(w_t, y) \leq d(x, w_t) + (1 - t)d(x, y)$$

Luego:

$$d(x, y) \leq d(x, w_t) + d(x, y) - td(x, y)$$

y

$$td(x,y) \leq d(x,w_t) \tag{1.5}$$

Por (1.3) y (1.5), tenemos que:

$$d(x,w_t) = td(x,y).$$

Por otra parte,

$$d(y,x) \leq d(y,w_t) + d(w_t,x) \leq d(y,w_t) + td(x,y)$$

Por lo tanto:

$$(1-t)d(x,y) \leq d(y,w_t) \tag{1.6}$$

Por (1.4) y (1.6), tenemos finalmente que

$$d(y,w_t) = (1-t)d(x,y).$$

1.3. Compacidad

Definición 1.11. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de un espacio métrico (X,d) se dice que *converge a un punto* $x \in X$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un entero $N > 0$ tal que $d(x_n, y) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Definición 1.12. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (X,d). S es *compacto* si, toda sucesión infinita $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en S contiene una subsucesión la cual tiene un límite en S.

1.4. Espacios Normados

En matemáticas un espacio vectorial se dice que es *normado* si en él se puede definir una norma vectorial. Podemos señalar los siguientes hechos que ayudan a comprender la importancia del concepto de espacio normado:

- En un espacio euclídeo, la norma coincide precisamente con la longitud del vector.
- Todo espacio vectorial normado es un espacio métrico con la distancia inducida por la norma.

- Si el espacio vectorial es además *completo* se dice que es un espacio de Banach.

Definición 1.13. Sea E un espacio vectorial. Una *norma* en E es una función $v \rightarrow\mid v \mid$ de E en $\mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:

- Tenemos que $\mid v \mid\geq 0$ y $\mid v \mid= 0$ si y sólo si, $v = 0$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ y $v \in E$, entonces $\mid av \mid = \mid a \mid \mid v \mid$.
- Para todo $v, w \in E$ tenemos que $\mid v + w \mid\leq\mid v \mid + \mid w \mid$.

Definición 1.14. Un espacio vectorial junto con una norma se llama *espacio vectorial normado.*

Definición 1.15. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio vectorial normado se llama *sucesión de Cauchy* si, dado ε, existe un entero positivo N tal que, para todo $n, m \geq N$, tenemos:

$$\mid x_m - x_n \mid< \epsilon.$$

Definición 1.16. Un espacio vectorial normado en el que toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tiene límite, se llama *completo* o también *espacio de Banach.*

1.5. Retracciones

Definición 1.17. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es un retracto de X si y sólo si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para todo a en A.

(En este caso la función identidad en A se dice que tiene una extensión continua r, la cual es llamada función retracción)

Definición 1.18. Sea X un espacio métrico y sea S un subconjunto de X. Una función de Lipschitz $r : X \rightarrow S$ es llamada *retracción de Lipschitz* si su restricción a S es la función identidad de S.

1.6. Espacio Contraíble

Definición 1.19. Sean X, Y dos espacios, e I el intervalo unitario $\{t : 0 \leq t \leq 1\}$. Dos mapeos $f, g : X \to Y$ son llamados *homotópicos* ($f \simeq g$) si existe una función continua $\Phi : X \times I \to Y$ tal que $\Phi(x, 0) = f(x)$ y $\Phi(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A la función Φ se le llama homotopía de f en g.

Definición 1.20. Un espacio topológico X es *contraíble*, si existen una función continua $H : X \times [0, 1] \to X$ y un punto $\widetilde{x} \in X$; tal que para todo $x \in X$, tenemos que:

- $H(x, 0) = x$
- $H(x, 1) = \widetilde{x}$.

En este caso decimos que Id_x es homotópica a una constante,es decir, podemos deformar de manera continua el espacio X al punto $\widetilde{x} \in X$, sin salirnos del espacio X.

Definición 1.21. Diremos que un espacio topológico X es *Lipschitz contraíble*, si se cumplen las condiciones de la definición anterior para una función H de Lipschitz, se considera a $X \times [0, 1]$ como espacio métrico con la métrica: $d((x, t), (x', t')) = d_X(x, x') + \mid t - t' \mid$

Capítulo 2

Teoremas de punto fijo

En análisis matemático y en topología el teorema del punto fijo de Banach (también llamado teorema de la aplicación contractiva) y el teorema de punto fijo de Brouwer son herramientas muy importantes para demostrar la existencia de soluciones de numerosos problemas matemáticos. El teorema de Banch garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de ciertas funciones definidas sobre espacios métricos y proporciona un método para encontrarlos. Debe su nombre a Stefan Banach (1892–1945), quien fue el primero en enunciarlo en 1922. Revisaremos estos teoremas y algunos resultados relacionados.

Definición 2.1. Un *punto fijo de una función* $f : X \to X$ es un punto $x \in X$ con la propiedad de que $f(x) = x$.

Definición 2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ tiene un *punto fijo aproximativo* si existe una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio (X, d) con la propiedad de que $d(f(x_n), x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En los espacios euclidianos de dimensión finita encontramos el siguiente teorema:

Teorema 2.3. [Brouwer, 1912]**.** Sea K un subconjunto convexo compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces todo mapeo continuo de K en sí mismo tiene un punto fijo.

El siguiente teorema es válido para espacios de dimensión infinita:

Teorema 2.4. [Banach, 1922]**.** Sea X un espacio métrico completo y supongamos que $f : X \to X$ es una función de Lipschitz cuya constante de Lipschitz es estrictamente menor que 1. Luego f tiene un único punto fijo.

Otro importante teorema del punto fijo es:

Teorema 2.5. [Schauder, 1930]**.** Sea E un espacio normado, $A \subset E$ convexo y no vacío, y $C \subset A$ compacto. Luego toda función continua $T : A \to C$ tiene al menos un punto fijo.

2.1. Punto Fijo en Espacios de Dimensión finita e Infinita

A continuación revisaremos varios teoremas de punto fijo en dimensión finita e infinita y daremos algunas demostraciones.

Para $S^n = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \| \overrightarrow{x} \| = 1\}$ y $V^{n+1} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \| \overrightarrow{x} \| \leq 1\}$ se cumple:

Proposición 2.6. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función $Id : S^n \to S^n$ no es homotópica a una constante.
2. No existe $r : V^{n+1} \to S^n$ retracción continua.
3. Todo mapeo $f : V^{n+1} \to V^{n+1}$ tiene un punto fijo.

Demostración.
1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que existe $r : V^{n+1} \to S^n$ retracción continua. Esto es, r es continua y $r(x) = x$ para cualquier $x \in S^n$. Sea :

$$H : S^n \times [0,1] \to S^n$$

definida como:

$$H(x,t) = r(tx)$$

H está bien definida porque $t \in [0,1]$ y $x \in S^n$, por tanto $tx \in V^{n+1}$ y $r(tx) \in S^n$.Luego:

$$H(x,0) = r(0) = c.$$
$$H(x,1) = r(x) = x = Id_{S^n}(x).$$

Por lo tanto: $Id \simeq c$.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que existe $f : V^{n+1} \to V^{n+1}$ sin punto fijo.

Sea $F : V^{n+1} \to S^n$ tal que $F(x) =$ el punto de S^n que está en el rayo dirigido $\overrightarrow{xf(x)}$. $F(x)$ es continua y es retracción. Esto contradice a 2.

3. $\Rightarrow$ 1. Si $Id \in S^n$ es homotópica a una constante, se puede extender a V^{n+1}.

$$F : V^{n+1} \to S^n$$

$$F\mid_{S^n} = Id_{S^n}$$

Entonces la función:

$$G : V^{n+1} \to V^{n+1}$$

$$x \longmapsto -F(x)$$

no tiene puntos fijos.

Es decir, $G(x) \neq x$, para cualquier $x \in V^{n+1}$: Si $x \notin S^n$, como $-F(x) \in S^n$, entonces $x \neq -F(x) = G(x)$. Si $x \in S^n$, entonces $G(x) = -F(x) = -x$. Y como $x \neq -x$, $G(x) \neq x$

Las demostraciones de los teoremas 2.7 y 2.8 se pueden hallar en la referencia bibliográfica [3] Y. Benjamini y J. Lindenstrauss, p.62.

Teorema 2.7. Sea K un subconjunto cerrado, convexo no compacto de un espacio de Banach. Entonces existe una función continua de K en sí mismo sin puntos fijos.

Teorema 2.8. Sea K subconjunto convexo cerrado, no compacto de un espacio de Banach. Entonces existe una función Lipschitz $f : K \to K$ sin puntos fijos aproximativos; es decir, existe un $\partial > 0$ tal que: $\| f(x) - x \| > \partial$; para cualquier $x \in K$.

Notación. Dado un espacio normado E, denotamos como $B(E)$ la bola unitaria centrada en el origen y $S(E)$ la esfera unitaria con centro también en el origen.Si $\alpha > 0$; $\alpha B(E)$ y $\alpha S(E)$ serán las bolas y esfera, respectivamente de radio α centradas en el origen.

Lema 2.9. Sea E un espacio de Banach. Entonces todo mapeo de Lipschitz $f : B(E) \to B(E)$ sin puntos fijos aproximativos, tiene una extensión $\widetilde{f} : 2B(E) \to B(E)$ sin puntos fijos aproximativos.

Demostración. Definimos

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} (2-\|x\|)f(\frac{x}{\|x\|}) + (\|x\|-1)\frac{x}{\|x\|} & \text{si } 1 \leq \|x\| \leq 2 \\ f(x) & \text{si } \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Mostremos que $\widetilde{f}(x)$ es Lipschitz. Sean $x, y \in 2B(E)$, tenemos los siguientes casos:

Caso1. Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$, entonces:

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq C_f\|x - y\|.$$

*Caso2***.** Si $\|y\| \leq 1 \leq \|x\|$, entonces:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= (2-\|x\|)f(\frac{x}{\|x\|}) + (\|x\|-1)\frac{x}{\|x\|} \\ \widetilde{f}(y) &= f(y) = (2-\|x\|)f(y) + (\|x\|-1)f(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| &= \left\|(2-\|x\|)(f(\frac{x}{\|x\|}) - f(y)) + (\|x\|-1)(\frac{x}{\|x\|} - f(y))\right\| \\ &\leq (2-\|x\|)\left\|f(\frac{x}{\|x\|}) - f(y)\right\| + (\|x\|-1)\left\|\frac{x}{\|x\|} - f(y)\right\| \\ &\leq 2C_f\left\|\frac{x}{\|x\|} - y\right\| + 2(\|x\|-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\|x\|}C_f \,\|x - \|x\|y\| + 2(\|x\| - \|y\|) \\
&\leq 2C_f \,\|x - \|x\|y\| + 2(\|x\| - \|y\|) \\
&\leq 2C_f\|x - y\| + (1 - \|x\|)y\| + 2\|x - y\| \\
&\leq 2C_f(\|x - y\| + \|y\|(1 - \|x\|)) + 2\|x - y\| \\
&\leq 2C_f\|x - y\| + 2C_f(\|x\| - \|y\|) + 2\|x - y\| \\
&\leq 2C_f\|x - y\| + 2C_f(\|x - y\|) + 2\|x - y\| \\
&= (4C_f + 2)\|x - y\|
\end{aligned}$$

Caso3. Si $\|x\|, \|y\| \geq 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| &= \|[(2 - \|x\|)f(\frac{x}{\|x\|}) + (\|x\| - 1)\frac{x}{\|x\|}] \\
&- [(2 - \|y\|)f(\frac{y}{\|y\|}) + (\|y\| - 1)\frac{y}{\|y\|}]\|. \\
&= \|2[f(\frac{x}{\|x\|}) - f(\frac{y}{\|y\|})] + (x - y) + (\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}) \\
&+ \|y\|f(\frac{y}{\|y\|}) - \|x\|f(\frac{x}{\|x\|})\|.
\end{aligned}$$

$$\leq 2\left\|f(\frac{x}{\|x\|}) - f(\frac{y}{\|y\|})\right\| \tag{2.1}$$

$$+ \|x - y\| \tag{2.2}$$

$$+ \left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| \tag{2.3}$$

$$+ \left\|\|y\|f(\frac{y}{\|y\|}) - \|x\|f(\frac{x}{\|x\|})\right\|. \tag{2.4}$$

Observemos que en (2.3):

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| &= \left\| \frac{\|x\|y - \|y\|x}{\|y\|\|x\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|y\|\|x\|} \|\|x\|y - \|y\|x\| \\
&\leq \|\|x\|y - \|y\|x\| \\
&= \|(\|x\|y - \|x\|x) + (\|x\|x) - \|y\|x\| \\
&\leq \|x\|\|y - x\| + \|(\|x\| - \|y\|)x\| \\
&\leq \|x\|\|y - x\| + |\|x\| - \|y\|| \, \|x\| \\
&\leq \|x\|\|y - x\| + \|x - y\|\|x\| \\
&= 2\|x\|\|x - y\| \\
&\leq 4\|x - y\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 4\|x - y\|$$

Observemos que en (2.1):

$$\begin{aligned}
2\left\| f(\frac{x}{\|x\|}) - f(\frac{y}{\|y\|}) \right\| &\leq 2C_f \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&\leq 8C_f\|x - y\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2\left\| f(\frac{x}{\|x\|}) - f(\frac{y}{\|y\|}) \right\| \leq 8C_f\|x - y\|$$

Observemos que en (2.4):

$$\begin{aligned}
\left\| \|y\|f(\frac{y}{\|y\|}) - \|x\|f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| &\leq \left\| \|y\|f(\frac{y}{\|y\|}) - \|y\|f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| \\
&+ \left\| \|y\|f(\frac{x}{\|x\|}) - \|x\|f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| \\
&\leq \|y\|C_f \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| + |\|y\| - \|x\|| \left\| f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| \\
&\leq 8C_f\|y - x\| + \|y - x\| \\
&= (8C_f + 1)\|x - y\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\| \|y\|f(\frac{y}{\|y\|}) - \|x\|f(\frac{x}{\|x\|}) \right\| \leq (8C_f + 1)\|x - y\|$$

Por último, asociando lo obtenido en (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) tenemos que:

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| \leq (16C_f + 6)\|x - y\|$$

Caso4. Si $\|x\| \leq 1 \leq \|y\|$, se procede análogamente al *Caso2.*

Resta probar que $\widetilde{f}$ no tiene puntos fijos aproximativos.
Supongamos que existe un punto fijo aproximativo $\{x_n\}$ de $\widetilde{f}$, luego:

$$d(\widetilde{f}(x_n), x_n)) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

pero sabemos de la parte anterior que $\widetilde{f}$ es una función de Lipschitz, lo cual implica que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(\widetilde{f}(\widetilde{f}(x_n)), \widetilde{f}(x_n)) \\ &\leq C_{\widetilde{f}} d(\widetilde{f}(x_n), x_n) \to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(\widetilde{f}(\widetilde{f}(x_n)), \widetilde{f}(x_n)) \to 0$$

Pero $\widetilde{f}(x_n)$ está en $B(E)$, lo cual implica que

$$\widetilde{f}(\widetilde{f}(x_n)) = f(\widetilde{f}(x_n))$$

Luego

$$d(f(\widetilde{f}(x_n)), \widetilde{f}(x_n)) \to 0$$

Por lo tanto $\{\widetilde{f}(x_n)\}$ es punto fijo aproximativo de f, lo cual es una contradicción.

Teorema 2.10. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe una retracción Lipschitz de la bola unitaria $B(E)$ de E sobre la esfera unitaria $S(E)$.

Demostración. Por el **Teorema 2.8,** existe un mapeo de Lipschitz f : $B(E) \to B(E)$ sin puntos fijos aproximativos y por el **Lema 2.9**, existe una extensión $\widetilde{f}$ de f tal que:

$$\widetilde{f} : 2B(E) \to B(E),\ \widetilde{f} \text{ es Lipschitz},$$

$\widetilde{f}$ no tiene puntos fijos aproximativos y $\widetilde{f}$ está dada por:

$$\widetilde{f}(x) = (2 - \|x\|)f(\frac{x}{\|x\|}) + (\|x\| - 1)\frac{x}{\|x\|},\ \text{si } 1 \leq \|x\| \leq 2.$$

Observemos que si $\|x\| = 2$, $\widetilde{f}(x) = \frac{x}{2}$. Como $\widetilde{f}$ no tiene puntos fijos aproximativos, entonces:

$$\delta = Inf\{\|\widetilde{f}(x) - x\| : x \in 2B(E)\} > 0$$

puesto que $\delta = 0$ implica que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in 2B(E)$, tal que $\| \widetilde{f}(x_n) - x_n \| < \frac{1}{n}$ y $\{x_n\}$ sería un punto fijo aproximativo de $\widetilde{f}$.

Sea $r : 2B(E) \to 2S(E)$, definida como

$$r(x) = 2\frac{x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta}{\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta\|}$$

Probemos que r es una retracción Lipschitz, pero antes verifiquemos:
i) r **está bien definida**, basta probar que:

$$\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta\| \neq 0.$$

Se cumple:

$$\delta \leq \left\|x - \widetilde{f}(x)\right\| \text{ para cualquier } x \in 2B(E)$$

Lo cual implica que:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left\|x - \widetilde{f}(x)\right\| /\delta, \\ 3 &\leq 3\left\|x - \widetilde{f}(x)\right\| /\delta = \left\|(x + 3(x - \widetilde{f}(x)/\delta)) - x\right\| \\ &\leq \left\|(x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\| + \|x\| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$1 = 3 - 2 \leq 3 - \|x\| \leq \left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|$$

Podemos concluir que:

$$1 \leq \left\| x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta) \right\|$$

ii) r **es un mapeo Lipschitz**:

$$\begin{aligned}
d(r(x), r(x')) &= \|r(x) - r(x')\|\,,\\
d(r(x), r(x')) &= 2\left\| \frac{x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} - \frac{x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|} \right\|,\\
d(r(x), r(x')) &\leq 2\left\| \frac{x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} - \frac{x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} \right\| \qquad (2.5)\\
&\quad + 2\left\| \frac{x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} - \frac{x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|} \right\|. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

En (2.5) tenemos que:

$$\begin{aligned}
&2\left\| \frac{x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} - \frac{x' + 3(x' - \widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} \right\|\\
&= \frac{2}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} \left\| (x - x') + \frac{3}{\delta}(x - x') + \frac{3}{\delta}(\widetilde{f}(x') - \widetilde{f}(x)) \right\|\\
&\leq \frac{2}{\left\|x + 3(x - \widetilde{f}(x))/\delta)\right\|} \left[\|x - x'\| + \frac{3}{\delta}\|x - x'\| + \frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}}\|x - x'\| \right]\\
&\leq 2\left[\|x - x'\| + \frac{3}{\delta}\|x - x'\| + \frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}}\|x - x'\| \right]\\
&= 2(1 + \frac{3}{\delta} + \frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}})\|x - x'\|\,.
\end{aligned}$$

En (2.6) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&2\left\|\frac{x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta)\right\|}-\frac{x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)}{\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|}\right\| \\
&= 2\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|\left|\frac{1}{\left\|x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta)\right\|}-\frac{1}{\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|}\right| \\
&\leq 2(\|x'\|+\frac{3}{\delta}\|x'\|+\frac{3}{\delta}\left\|\widetilde{f}(x')\right\|)\frac{\left|\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|-\left\|x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta)\right\|\right|}{\left\|x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta)\right\|\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)\right\|} \\
&\leq 2(2+\frac{3}{\delta}(3))\left\|x'+3(x'-\widetilde{f}(x'))/\delta)-[x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta)]\right\| \\
&\leq 2(2+\frac{9}{\delta})[\|x-x'\|+\frac{3}{\delta}\|x-x'\|+\frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}}\|x-x'\|] \\
&= 2(2+\frac{9}{\delta})(1+\frac{3}{\delta}+\frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}})\|x-x'\|.
\end{aligned}
$$

De las estimaciones anteriores (2.5) y (2.6) obtenemos:

$$
d(r(x),r(x'))\leq 2(1+\frac{3}{\delta}+\frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}})\|x-x'\|+2(1+\frac{3}{\delta}+\frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}})(2+\frac{9}{\delta})\|x-x'\|
$$

Por lo tanto:

$$
d(r(x),r(x'))\leq 6(1+\frac{3}{\delta}+\frac{3}{\delta}C_{\widetilde{f}})(1+\frac{3}{\delta})d(x,x').
$$

iii) r **es una retracción**: Si $\|x\|=2$, entonces $\widetilde{f}(x)=\frac{x}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
r(x) &= 2\frac{x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta}{\|x+3(x-\widetilde{f}(x))/\delta\|} \\
&= 2\frac{x+\frac{3x}{2\delta}}{\left\|x+\frac{3x}{2\delta}\right\|}=\frac{2x(1+\frac{3}{2\delta})}{\|x\|(1+\frac{3}{2\delta})}=\frac{2x}{2}=x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $r(x)=x$ y r es retracción.

iv) Sea $\widehat{r}:B(E)\to S(E)$ definida por:
$\widehat{r}(x)=\frac{1}{2}r(2x)$.

$\widehat{r}$ **está bien definida:**
Si $x \in B(E)$, entonces $2x \in 2B(E)$.

$$\begin{aligned}\|\widehat{r}(x)\| &= \left\|\frac{1}{2}r(2x)\right\| \\ &\leq \frac{1}{2} * 2 = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{r}(x) \in S(E)$.

$\widehat{r}$ **es Lipschitz:**

$$\begin{aligned}d(\widehat{r}\ (x), \widehat{r}\ (x')) &= \left\|\frac{1}{2}r(2x) - \frac{1}{2}r(2x')\right\|, \\ &\leq \frac{1}{2}C_r \left\|2x - 2x'\right\| = \frac{1}{2}C_r 2d(x, x')\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(\widehat{r}\ (x), \widehat{r}\ (x')) \leq C_r d(x, x').$$

$\widehat{r}$ **es una retracción:**
Si $\|x\| = 1$, entonces $\|2x\| = 2\|x\| = 2 * 1 = 2$, lo cual implica que:

$$\begin{aligned}2x &\in 2S(E) \\ r(2x) &= 2x \\ \widehat{r}(x) &= \frac{1}{2}r(2x) = \frac{1}{2} * 2x = x.\end{aligned}$$

Corolario 2.11. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces la esfera unitaria $S(E)$ es Lipschitz contraíble.

Demostración. Por el teorema anterior, existe una retracción Lipschitz $r : B(E) \to S(E)$. Sea $x_0 \in S(E)$, definimos $h : S(E) \times I \to S(E)$ como:

$$h(x, t) = r(tx_0 + (1 - t)x).$$

i) h es una homotopía de $Id_{S(E)}$ a un mapeo constante $x_{0:}$

$$\begin{aligned}h_0(x) = h(x, 0) &= r(x) = x = Id(x), \\ h_0 &= Id_{S(E)}. \\ h(x, 1) &= r(x_0) = x_0, \\ h_1 &= x_0\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$Id_{S(E)} \simeq x_0.$$

ii) h es un mapeo Lipschitz:

$$\begin{aligned}
\|h(x,t) - h(x',t')\| &= \|r(tx_0 + (1-t)x), r(t'x_0 + (1-t')x')\| \\
&\leq C_r \|(tx_0 + (1-t)x) - (t'x_0 + (1-t')x')\| \\
&= C_r \|(t-t')x_0 + (x-x') + (t'x' - tx)\| \\
&\leq C_r[|t-t'| \|x_0\| + \|x-x'\| + \|t'x' - t'x + t'x - tx\|] \\
&\leq C_r \|x_0\| |t-t'| + C_r \|x-x'\| + t' \|x-x'\| + \|x\| |t-t'| \\
&\leq C_r |t-t'| + C_r \|x-x'\| + \|x-x'\| + |t-t'| \\
&= (C_r+1)(|t-t'| + \|x-x'\|)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$d_{S(E)}(h(x,t), h(x',t')) \leq (C_r+1) d_{S(E)\times I}((x,t),(x',t'))$$

donde las distancias son:

$$d_{S(E)}(x,x') = \|x-x'\|,$$

$$d_{S(E)\times I}((x,t),(x',t')) = |t-t'| + \|x-x'\|.$$

Capítulo 3

Espacio de fractales

Un fractal es un objeto semigeométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del Latín fractus, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.

Entre los fractales podemos encontrar por ejemplo curvas que llenan todo el plano. En este caso, la dimensión topológica de la curva, que es uno, no nos informa sobre la forma en que esta ocupa el espacio ambiente. De modo general, podríamos preguntarnos si el conjunto ocupa el espacio métrico que lo contiene en forma densa. En este capítulo, estudiaremos la definición del espacio de fractales, su completitud así como también otras propiedades relacionadas con éste y para el desarrollo de nuevos resultados en el capítulo posterior.

Definición 3.1. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Entonces H(X) denota el espacio cuyos elementos son los subconjuntos no vacíos y compactos de X.

Definición 3.2. Sean (X,d) un espacio métrico completo, $x \in X$ y $B \in H(X)$. La distancia del punto x al conjunto B la definimos como $d(x, B) = mín\{d(x, y) : y \in B\}$.

Definición 3.3. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sean $A, B \in H(X)$. La distancia del conjunto A al conjunto B la definimos como $d(A, B) = máx\{d(x, B) : x \in A\}$.

Definición 3.4. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Entonces la distancia de Hausdorff entre los puntos A y B en $H(X)$ se define como el máximo de las distancias $d(A, B)$ y $d(B, A)$:

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A).$$

Nos referimos a (H(X),h) como el espacio de fractales con h la métrica de Hausdorff, deseamos caracterizar sucesiones convergentes en $H(X)$. La demostración del lema 3.6 se encuentra en la referencia [2] M. Barnsley.

Definición 3.5. Sea $S \subset X$ y sea $\Gamma \geq 0$,al conjunto:

$$S + \Gamma = \{y \in X : d(x,y) \leq \Gamma \text{ para algún } x \in S\}.$$

se le llama la *dilatación de S por una bola de radio* Γ.

Lema 3.6. Sean $A, B \in H(X)$, donde (X,d) es un espacio métrico. Sea $\epsilon > 0$. Entonces se cumple:

$$h(A,B) \leq \epsilon \Longleftrightarrow A \subset B + \epsilon \;\wedge\; B \subset A + \epsilon.$$

El siguiente teorema nos dice que si X es completo, entonces H(X) es completo.

Teorema 3.7. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Entonces (H(X),h) es un espacio métrico completo. Más aún, si $\{A_n \in H(X)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$A = lím_{n\to\infty} A_n \in H(X)$$

puede ser caracterizado como sigue:

$$A = \{x \in X \mid \text{existe una sucesión de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ que converge a } x\}.$$

La demostración del teorema 3.7 se encuentra en la referencia [2] M. Barnsley y consta de los siguientes pasos:

1)$A \neq \varnothing$

2)A es cerrado y por tanto completo, pues X es completo;

3) Para $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n \geq N$, $A \subset A_n + \epsilon$;

4) A está totalmente acotado y por tanto, por 2), es compacto;

5) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Capítulo 4

Desigualdad convexa acotada

En este capítulo hacemos uso de todo lo revisado anteriormente para desarrollar la parte original concerniente al presente trabajo, veamos que sucede con espacios más generales.

Recordemos que en los espacios de dimensión finita son equivalentes:
1) La función $I_d : S^n \to S^n$ no es homotópica a una constante. (Teorema de Brower).
2) No existe $r : V^{n+1} \to S^n$ retracción continua.
3) Todo mapeo $f : V^{n+1} \to V^{n+1}$ tiene un punto fijo (Teorema de punto fijo de Brower),
donde $V^{n+1} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n+1} :\| \overrightarrow{x} \|\leq 1\}$ y $S^n = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{n+1} :\| \overrightarrow{x} \|= 1\}$

Y para los espacios de dimensión infinita, tenemos que:
1) Si K es un subconjunto no compacto, cerrado y convexo de un espacio de Banach, entonces existe $f : K \to K$ Lipschitz sin puntos fijos.
2) Existe $r : B(E) \to S(E)$ retracción Lipschitz.
3) $S(E)$ es Lipschitz contraíble, donde $B(E) = \{\overrightarrow{x} \in E :\| \overrightarrow{x} \|\leq 1\}$ y $S(E) = \{\overrightarrow{x} \in E :\| \overrightarrow{x} \|= 1\}$

En el **Capítulo 1** se mencionaron los espacios métricos con la propiedad de la desigualdad convexa, a continuación agregaremos una condición adicional para definir a un tipo de espacios métricos más generales, a los cuales llamaremos espacios métricos con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

Definición 4.1. Un espacio métrico (X, d) tiene *la propiedad de la desigualdad convexa acotada*, si existe una función F_d que va de $X \times X \times [0, 1]$ en X y se denota $F_d(x, y, t) = tx + (1 - t)y$ con las condiciones:

1. $d(F_d(x, y, t), F_d(x', y', t)) \leq td(x, x') + (1 - t)d(y, y')$

2. $F_d(x, y, 0) = y, F_d(x, y, 1) = x, F_d(x, x, t) = x$, para cualquiera sea $t \in [0, 1]$

3. Existe $k \geq 0$ tal que $d(F_d(x, y, t), F_d(x, y, s)) \leq \mid t - s \mid k$.

Lema 4.2. Si X es un subconjunto convexo y acotado de un espacio de Banach, entonces X es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada, donde $d(x, y) = \parallel x - y \parallel$, y $F_d(x_0, x_1, t) = tx_0 + (1 - t)x_1$.

Demostración: Veamos que se cumplen las tres condiciones de la definición previa al lema.

(1)

$$\begin{aligned} d(F_d(x_0, x_1, t), F_d(y_0, y_1, t)) &= d(tx_0 + (1 - t)x_1, ty_0 + (1 - t)y_1) \\ &= \|tx_0 + (1 - t)x_1 - ty_0 - (1 - t)y_1\| \\ &= \|t(x_0 - y_0) + (1 - t)(x_1 - y_1)\| \\ &\leq t\|x_0 - y_0\| + (1 - t)\|x_1 - y_1\| \\ &\leq td(x_0 - y_0) + (1 - t)d(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$d(F_d(x_0, x_1, t), F_d(y_0, y_1, t) \leq td(x_0, y_0) + (1 - t)d(x_1, y_1)$$

(2)

$$\begin{aligned} F_d(x_0, x_1, 0) &= 0 * x_0 + (1 - 0)x_1 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_d(x_0, x_1, 1) &= 1 * x_0 + (1 - 1)x_1 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_d(x_0, x_0, t) &= tx_0 + (1-t)x_0 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

para cualesquiera x_0, x_1 en X y t en el intervalo $[0, 1]$.

(3)

$$\begin{aligned} d(tx + (1-t)y, sx + (1-s)y) &= \| \ y + t(x-y) - (y + s(x-y)) \ \| \\ &= \| \ (t-s)(x-y) \ \| \\ &= \mid t-s \mid \| \ x-y \ \| \end{aligned}$$

Como X es acotado, existe k tal que : $\| \ w \ \| \leq k$, para $w \in X$, por tanto, $\mid t-s \mid (\| \ x-y \ \|) \leq \mid t-s \mid k$.

Lema 4.3. Sea P un subconjunto compacto y convexo de R^n, y sean A_1, B_1, A_2, B_2 elementos de $H(P)$. Entonces se cumple:

$$h(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2\ ) \leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2\ )$$

para todo $t \in [0,1]$, donde h es la métrica de Hausdorff.

Demostración. Por definición:

$$d(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2\ ) =$$

$$máx\{mín\{d(ta_1 + (1-t)b_1, ta_2 + (1-t)b_2 : a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\ \} : a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\} =$$

$$máx\{mín\{\|t(a_1 - a_2) + (1-t)(b_1 - b_2)\| : a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\ \} : a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\}$$

Fijemos $a_1 \in A_1, b_1 \in B_1$. Tenemos que para cualesquiera $a \in A_2$ y $b \in B_2$:

$$\begin{aligned} & mín\{\|t(a_1 - a_2) + (1-t)(b_1 - b_2)\| : a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\ \} \\ & \leq \|t(a_1 - a) + (1-t)(b_1 - b)\| \\ & \leq td(a_1, a) + (1-t)d(b_1, b). \end{aligned}$$

Luego,

$$-(1-t)d(b_1,b)+\textit{mín}\{\|t(a_1-a_2)+(1-t)(b_1-b_2)\| : a_2\in A_2, b_2\in B_2\}$$
$$\le td(a_1,a)$$
$$\text{para cualquier } a\in A_2.$$

De tal forma que:

$$\begin{aligned}
&-(1-t)d(b_1,b)+\textit{mín}\{\|t(a_1-a_2)+(1-t)(b_1-b_2)\| : a_2\in A_2, b_2\in B_2\}\\
&\le \textit{mín}\{td(a_1,a) : a\in A_2\}\\
&= t\ \textit{mín}\{d(a_1,a) : a\in A_2\}\\
&= t\ d(a_1,A_2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$-td(a_1,A_2)+\textit{mín}\{\|t(a_1-a_2)+(1-t)(b_1-b_2)\| : a_2\in A_2, b_2\in B_2\}$$
$$\le (1-t)d(b_1,b)$$
$$\text{para cualquier } b\in B_2$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&-td(a_1,A_2)+\textit{mín}\{\|t(a_1-a_2)+(1-t)(b_1-b_2)\| : a_2\in A_2, b_2\in B_2\}\\
&\le \textit{mín}\{(1-t)d(b_1,b) : b\in B_2\}\\
&= (1-t)d(b_1,B_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\textit{mín}\{\|t(a_1-a_2)+(1-t)(b_1-b_2)\| : a_2\in A_2, b_2\in B_2\}\\
&\le td(a_1,A_2)+(1-t)d(b_1,B_2)\\
&\le t\ \textit{máx}\{d(a_1,A_2) : a_1\in A_1\}+\\
&(1-t)\textit{máx}\{d(b_1,B_2) : b_1\in B_1\}\\
&= td(A_1,A_2)+(1-t)d(B_1,B_2)\\
&\le th(A_1,A_2)+(1-t)h(B_1,B_2)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\text{\textit{mín}}\{\|t(a_1 - a_2) + (1-t)(b_1 - b_2)\| : a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\}\\ &\leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2)\\ &\text{para cualesquiera } a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}&d(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2)\\ &= \text{\textit{máx}}\{\text{\textit{mín}}\{\|t(a_1 - a_2) + (1-t)(b_1 - b_2)\| : a_2 \in A_2, b_2 \in B_2\} : a_1 \in A_1, b_1 \in B_1\}\\ &\leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2)\end{aligned}$$

Así:

$$d(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2) \leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2)$$

De manera análoga:

$$d(tA_2 + (1-t)B_2, tA_1 + (1-t)B_1) \leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}&h(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2)\\ &= d(tA_1 + (1-t)B_1, tA_2 + (1-t)B_2) \vee d(tA_2 + (1-t)B_2, tA_1 + (1-t)B_1)\\ &\leq th(A_1, A_2) + (1-t)h(B_1, B_2)\end{aligned}$$

como se deseaba mostrar.

Lema 4.4. Si P es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, entonces $H(P)$ es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada, donde $d = h$ es la métrica de Hausdorff y $F_h(A_0, A_1, t) = tA_0 + (1-t)A_1$.

Demostración. Veamos que se cumplen las tres condiciones de la definición de *propiedad de la desigualdad convexa acotada.*

(1) Por el **Lema anterior**, tenemos que:

$$\begin{aligned} h(F_h(A_0, A_1, t), F_h(B_0, B_1, t) &= h(tA_0 + (1-t)A_1 + tB_0 + (1-t)B_{1)} \\ &\leq th(A_0, A_1) + (1-t)h(B_0, B_1). \\ &\text{para todo } t \text{ en el intervalo } [0,1] \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} F_h(A_0, A_1, 0) &= 0 * A_0 + (1-0)A_1 \\ &= \{0 * a_0 + (1-0)a_1 : a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\} \\ &= \{a_1 : a_1 \in A_1\} = A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_h(A_0, A_1, 1) &= 1 * A_0 + (1-1)A_1 \\ &= \{1 * a_0 + (1-1)a_1 : a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\} \\ &= \{a_0 : a_0 \in A_0\} = A_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_h(A_0, A_0, t) &= tA_0 + (1-t)A_0 \\ &= \{ta_0 + (1-t)a_0 : a_0 \in A_0\} \\ &= \{a_0 : a_0 \in A_0\} = A_0 \end{aligned}$$

(3) Por demostrar que: Existe $k > 0$ tal que:

$$h(tA_0 + (1-t)A_1, sA_0 + (1-s)A_1) \leq \mid t - s \mid k.$$

Sea k una cota para $d(x, y) = \parallel x - y \parallel$ en P. Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} d(ta_0 + (1-t)a_1, sa_0 + (1-s)a_1) &= \parallel a_1 + t(a_0 - a_1) - [a_1 + s(a_0 - a_1)] \parallel \\ &= \parallel a_1 + t(a_0 - a_1) - [a_1 + s(a_0 - a_1)] \parallel \\ &= \parallel (t-s)(a_0 - a_1) \parallel = \mid t - s \mid \parallel a_0 - a_1 \parallel \\ &= \mid t - s \mid d(a_0, a_1) \leq \mid t - s \mid k. \end{aligned}$$

Luego :

$$mín\{d(ta_0 + (1-t)a_1, sa_0' + (1-s)a_1') : a_0' \in A_0, a_1' \in A_1\} \leq | t-s | k.$$

Así :

$$d(ta_0 + (1-t)a_1, sA_0 + (1-s)A_1) \leq | t-s | k.$$
$$\text{para cualesquiera } a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$$

Por lo tanto:

$$máx\{d(ta_0 + (1-t)a_1, sA_0 + (1-s)A_1) : a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\} \leq | t-s | k.$$

Por lo tanto :

$$d(tA_0 + (1-t)A_1, sA_0 + (1-s)A_1) \leq | t-s | k \tag{4.1}$$

Análogamente se prueba que:

$$d(sA_0 + (1-s)A_1, tA_0 + (1-t)A_1) \leq | t-s | k \tag{4.2}$$

Por (4.1) y (4.2) tenemos entonces que:

$$h(tA_0 + (1-t)A_1, sA_0 + (1-s)A_1 \leq | t-s | k$$

Proposición 4.5. Si (X, d) es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada, entonces X es Lipschitz contraíble.

Demostración. Fijamos $x_0 \in X$ y definimos:

$$\begin{gathered} H : X \times I \to X \\ (x,t) \to tx + (1-t)x_0 \end{gathered}$$

se cumple que:

$$\begin{aligned} H_0(x) = H(x,0) = x_0 \\ H_1(x) = H(x,1) = x \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H_0 = x_0 \qquad y \qquad H_1 = Id_x$$

Basta probar que H es Lipschitz. Sea $c = máx\{1,k\}, d'$ es la métrica en $X \times I$ definida por $d'((x,t),(y,s)) = d(x,y)+ \mid t-s \mid$.

Se cumple que:

$$\begin{aligned} d(H(x,t),H(x',t')) &= d(tx + (1-t)x_0\ , t'x' + (1-t')x_0\ ) \\ &\leq d(tx + (1-t)x_0\ , tx' + (1-t)x_0\ ) \\ &+ d(tx' + (1-t)x_0\ , t'x' + (1-t')x_0\ ) \\ &\leq td(x,x')+ \mid t-t' \mid k \leq d(x,x') + k \mid t-t' \mid \\ &\leq cd(x,x') + c \mid t-t' \mid \leq c(d(x,x')+ \mid t-t' \mid) \\ &\leq cd'((x,t),(x',t')), \end{aligned}$$

en donde k es la constante que cumple:

$$d(F_d(x,y,t),F_d(x,y,s)) \leq \mid t-s \mid k.$$

Por lo anterior H es una homotopía Lipschitz entre el mapeo constante x_0 y Id_x.

Teorema 4.6. Si (X,d) es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada, entonces $F_d : X \times X \times I \to X$ es Lipschitz.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
d(F_d(x,y,t),F_d(x',y',s)) &= d(tx+(1-t)y, sx'+(1-s)y' \\
&\leq d(tx+(1-t)y, tx'+(1-t)y') \\
&+ d(tx'+(1-t)y', sx'+(1-s)y') \\
&\leq td(x,x')+(1-t)d(y,y')+ \mid s-t \mid k \qquad (4.3) \\
&\leq d(x,x')+d(y,y')+k|s-t| \\
&\leq Max\{1,k\}d_*((x,y,t),(x',y',s)) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

en donde d_* es la métrica en $X \times X \times I$ definida por:

$$d_*((x,y,t),(x',y',s)) = d((x,x')+d(y,y')+|t-s|.$$

Teorema 4.7. Sea X un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada. Si existe $r : B(x_0) \to S(x_0)$ una retracción Lipschitz, entonces $S(x_0)$ es Lipschitz contraíble. Donde $B(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq 1\}$ y $S(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) = 1\}$.

Demostración.

Supongamos que existe $r : B(x_0) \to S(x_0)$ una retracción Lipschitz. Fijamos $x_* \in S(x_0)$. Sea h la homotopía:

$$
\begin{aligned}
h : S(x_0) \times I &\to S(x_0); \\
h(x,t) &= r(tx_* + (1-t)x)
\end{aligned}
$$

Debemos mostrar lo siguiente:
1) h está bien definida.
2) h es Lipschitz.
3) $h_0 = Id_{S(x_0)}$ y $h_1 = constante.$

1) h está bien definida:

$$
\begin{aligned}
d(tx_* + (1-t)x, x_0) &= d(tx_* + (1-t)x, tx_0 + (1-t)x_0) \\
&\leq td(x_*, x_0) + (1-t)d(x,x_0) \\
&= t * 1 + (1-t) * 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Luego, $tx_* + (1-t)x \in B(x_0)$.

2) h_t es Lipschitz porque r y F_d son Lipschitz.

3) Finalmente $h_0 = Id_{s(x_0)}$ y $h_1 = constante$

$$h(x,0) = r(0 * x_* + (1-0)x) = r(x) = x$$
$$h(x,1) = r(1 * x_* + (1-1)x) = r(x_*) = x_*.$$

Por tanto, $S(x_0)$ es Lipschitz contractible.

Capítulo 5

Conclusiones

Se obtuvieron resultados que extienden y relacionan las teorías que tratan de los siguientes conceptos: Los Espacios métricos, Los espacios de Banach y los Espacios de Fractales. Lo anterior se logró con los siguientes resultados principales de esta tesis:

1. Se introdujo el concepto de espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

2. Se demostró que si X es un subconjunto convexo y acotado de un espacio de Banach, entonces X es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

3. Se probó que si P es un subconjunto de R^n compacto y convexo, entonces el espacio de fractales $H(P)$ es un espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada.

4. Se demostró también que todo espacio métrico con la propiedad de la desigualdad convexa acotada es Lipschitz contraíble.

5. Se probó el siguiente resultado para espacios con la propiedad de la desigualdad convexa acotada: Si existe una retracción Lipschitz de una bola unitaria sobre su esfera unitaria correspondiente, entonces la esfera unitaria es Lipschitz contraíble. Este teorema extiende el resultado correspondiente para espacios de Banach y nos brinda una nueva perspectiva para estudiar los espacios de fractales H(P).

Bibliografía

[1] L. Ramiro - Fernández: *Puntos fijos aproximativos de mapeos no expansivos*, Tesis de licenciatura en Matemáticas, Universidad de las Américas, Puebla, 2009.

[2] M. Barnsley: Fractals Everywhere, Academia Press. 1993.

[3] Y. Benjamini, J.: *ILindenstrauss. Geometric Non Linear Functional Analysis*, Volume I, American Mathematical Society, 2000.

[4] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.