BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.

# Historia de la trigonometría y su enseñanza.

Tesis para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas.

Presenta:

**ROSALBA MONTALVO ANTOLÍN.**

Director de tesis

Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez.

Puebla Pue.

30 de Agosto 2012.

# *Agradecimientos.*

## Dedico Esta Tesis A:
## La Gran Familia Que Dios Me Dio.

Le agradezco a Dios nuestro señor por cuidarme y protegerme en todo momento, por todas las bendiciones que he recibido de Él, por darme la gran oportunidad de estar en esta etapa tan importante de mi vida, por haber puesto en mi camino a las personas que mucho me apoyaron y alentaron para salir adelante con mis estudios, por brindarme el entendimiento necesario para el desarrollo de este trabajo, compartiendo momentos de alegría y tristeza. Por ayudarme en situaciones difíciles, así como también concluir una meta más, por todo su amor.

> Porque tú eres mi roca y mi castillo, por tu nombre me guiarás y me encaminarás.
> Salmo 31: 3.

**A mis padres:**

**Florina Antolín Zárate.**
**Rafael Montalvo Reyes.**

Por confiar en mí y darme la oportunidad de seguir estudiando, por apoyarme desde el momento que decidí estudiar esta carrera, por su amor, cariño y confianza, por guiarme en la dirección quizás más acertada, por estar a mí lado aunque no fuera físicamente lo cual muchas veces hizo falta y desafortunadamente existía una larga distancia, fue un gran reto y esfuerzo para que todo esto sea hoy posible. Gracias por todo, los amo y quiero mucho.

**A mis abuelitos:**

**Eufemia Zárate Hernández.**
**Felipe Antolín Vázquez.**

Por el gran amor incondicional y sincero que siempre me han brindado, además de su gran apoyo moral hasta el día de hoy, les agradezco que se preocuparan tanto por mí como su hija más pequeña, con sus sabias palabras y consejos me han hecho reflexionar y crecer en muchas ocasiones. Gracias abues, los amo y adoro.

**A la familia Luna Antolín.**

A pesar de no estar muy de acuerdo con mi decisión de estudiar esta carrera me apoyaron demasiado para que su culminación fuera posible, y les agradezco la paciencia al permitirme vivir con ellos, llegando a ser una segunda familia, "la fam. peluche", sus consejos y gratos momentos vividos, no se olvidaran, mis primas Lore y Lupis por hacer mi estancia más agradable amenizando los momentos en los que convivíamos, los quiero.

También agradezco el apoyo que recibí en general de los que integran la familia Antolín Zárate los tíos que me faltan mencionar, pero gracias por siempre tenerme en sus oraciones y por ser una familia.

**A mis hermanos:**

**Martha P. Montalvo Antolín.**
**David R. Montalvo Antolín.**
**Kevin Jovany Montalvo[2].**

Quienes al escucharlos, hacían pasar momentos diferentes con su peculiaridad que les caracteriza a cada uno, porque sé que siempre puedo contar con su apoyo, gracias por estar casi siempre en el tel. escuchándome, los amo.

A mis amigos y compañeros, gracias porque tuve la oportunidad de conocerlos y convivir con ellos a lo largo de mi vida estudiantil, gracias por sus consejos, apoyo en temas que me costaron un poco de trabajo entender, ya que es muy cierto eso de que algunos se nos facilitan unas cosas más que a otros; Altagracia, Elizabeth, Abraham, Josué, Vianey, Yoana, Diana, y a los que conocí a lo largo del camino recorrido y no mencione, claro que los recuerdo.

Al Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez director de esta tesis, agradezco permitirme realizar este trabajo bajo su supervisión y apoyarlo en todo, por sus comentarios, explicaciones, sugerencias, consejos, y sobre todo por el tiempo dedicado para su realización. Gracias porque sin su apoyo, no fuera posible este trabajo.

Agradezco al jurado:

Al Dr. David Herrera Carrasco, por su atención y disponibilidad para la revisión de este trabajo y en todo momento que se le necesito, a lo largo de la carrera estuvo presente. Gracias.

Al Dr. Agustín Contreras Carreto el tiempo invertido en revisar y mejorar este trabajo. Gracias.

Al Dr. José Antonio por la atención prestada al tomar a revisión esta tesis y sus comentarios para ayudar a mejorarla. Gracias.

A los profesores de la FCFM de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por contribuir en mi formación como matemática, además agradezco la amistad que me brindaron algunos de ellos, me llevo un aprendizaje de cada uno.

> Una cosa que he aprendido en una larga vida es que toda nuestra ciencia, comparada con la realidad, es primitiva e infantil, pero es lo más precioso que tenemos.
>
> Albert Einstein.

# Índice.


| | | |
|---|---|---|
| Introducción. | | 6 |
| 1. | Ángulos y cuerdas. | 10 |
| 1.1. | Historia de la medición de ángulos. | 10 |
| 1.2. | Cuerdas. | 15 |
| 1.3. | Veamos cómo pudo proceder Ptolomeo. | 25 |
| 2. | Seis funciones llegan a la mayoría de edad. | 30 |
| 3. | La trigonometría se convierte en analítica. | 34 |
| 4. | Midiendo el cielo y la Tierra. | 38 |
| 5. | Dos teoremas de la geometría. | 53 |
| 6. | Epicicloides e hipocicloides. | 62 |
| 6.1. | Aspectos matemáticos de los epiciclos y deferentes. | 71 |
| 7. | Variaciones sobre un tema de gauss. | 73 |
| 8. | Las paradojas de Zenón y las series. | 77 |
| 9. | Una función especial: $\frac{(sinx)}{x}$ | 85 |
| 10. | Una fórmula notable. | 93 |
| 11. | T$an\ x$. | 98 |
| 12. | El paraíso de los cartógrafos. | 110 |
| 13. | Trigonometría imaginaria. | 123 |

14. Sugerencias didácticas para secundaria. 131

14.1. Matemáticas y comprensión. 131

14.2. Pedagogía de la comprensión. 134

14.3. ¿Los libros de texto de trigonometría ayudan a comprensión? 136

14.4. Experiencias. 138

Conclusiones. 150

Bibliografía. 155

# Introducción.

El presente trabajo se relaciona principalmente con el área de la enseñanza de las Matemáticas en una de sus ramas que parece estar en el olvido, en este caso la enseñanza de la Trigonometría a la luz de su historia. En este trabajo tratamos de recuperar la historia que rara vez se comenta en los libros de texto, tal es el caso de Trigonometría Plana, de Nathan O. Niles y otros. Nos basamos principalmente en el libro "Trigometry Delights" de Ely Maor.

Trigonometría plana elemental hablando a groso modo, conocida como tal por el siglo XVI, se refiere a las relaciones cuantitativas entre los ángulos y segmentos de línea, particularmente en un triángulo, de hecho, la propia palabra "trigonometría" proviene de las palabras griegas trigono= triángulo, y metron= media.

La enseñanza y la historia de las matemáticas tienen una estrecha relación, conocer la historia nos ayuda a entender las matemáticas como una actividad que forma parte de la cultura de los pueblos de manera cambiante de acuerdo a necesidades del momento. No se trata de recrear la historia en detalle,, sino de aquellos que han resultado importante para la génesis de los conceptos

John Fauvel menciona algunas razones para usar la historia en la enseñanza de las matemáticas.

La historia, entre otras materias:

- Ayuda a incrementar la motivación para el aprendizaje.
- Da a la matemática una cara humana.
- Ayuda a desarrollar una visión multicultural de las matemáticas.
- Muestra a los alumnos como los conceptos han tenido un desarrollo que ayuda a su comprensión.
- Cambia la percepción de los alumnos de las matemáticas.
- Comparando técnicas modernas y antiguas establece el valor de las técnicas modernas.
- Los obstáculos del pasado ayudan a explicar por qué los alumnos de hoy encuentran dificultades.
- Ayuda a explicar el rol de las matemáticas en la sociedad.
- Proporciona oportunidades para investigar.

El material de esta tesis está estructurado por 14 capítulos.

En el Capítulo 1 se habla de cómo se originó la división de un círculo en 360 partes que se basa probablemente en la cercanía a la duración del año y en el hecho de que 360 tiene

"muchos divisores. Además explicaremos la importancia de la utilización del gnomon en las civilizaciones antiguas. Sin dejar de mencionar a Ptolomeo con su mayor obra y su tabla de cuerdas, la cual es la primera tabla trigonométrica.

En el capítulo 2 hablaremos de la historia de las funciones trigonométricas, como se fue dando la necesidad de calcularlas con el apoyo de las tablas de cuerdas y como paso a diferentes culturas en distintas traducciones.

En el capítulo 3 se consideraran las aplicaciones de los procesos infinitos en trigonometría. Además veremos porque la trigonometría es importante no sólo para la resolución de triángulos sino también mecánica y otras ciencias (navegación, sonido, óptica).

En el capítulo 4 veremos como la geometría en sus inicios se aplicó a problemas prácticos de medición, los griegos inventaron la trigonometría para estimar el tamaño del universo.

En el capítulo 5 veremos dos corolarios de la Proposición 21 del libro III de Euclides: ángulo inscrito en una circunferencia, la obtención de algunas formulas trigonométricas: ley de los senos, teorema de Ptolomeo, demostración geométrica de dos triángulos inscritos en una circunferencia.

En el capítulo 6 mostraremos las ecuaciones de una epicicloide e hipocicloide; y su aplicación al movimiento planetario.

En el capítulo 7 demostraremos la fórmula

$$\boldsymbol{sen\,\alpha + sen\,2\alpha + sen\,3\alpha + \cdots + sen\,n\alpha = \frac{sen\frac{n\alpha}{2}\,sen\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}.}$$

En el capítulo 8 vamos a demostrar que cada progresión geométrica infinita se puede construir geométricamente, y su suma se encuentra gráficamente, utilizando solamente regla y compás.

En el capítulo 9 consideraremos algunas propiedades de la función $(sen\ x)/x$ .

En el capítulo 10 veremos la fórmula descubierta por Euler $\boldsymbol{sen\,x = x\prod_{n-1}^{\infty}\cos x/2^n}$.

En el capítulo 11 comentaremos la historia de la tangente y consideramos algunas propiedades como, por ejemplo

$$\boldsymbol{tan\,\alpha + tan\,\beta + tan\,\gamma = tan\,\alpha \cdot tan\,\beta \cdot tan\,\gamma.}$$

En el capítulo 12 abordaremos un poco de la historia de la cartografía, así como también de la proyección estereográfica, la proyección cilíndrica y de Mercator.

En el capítulo 13 hablaremos sobre la fórmula $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i sen\,\varphi$ , es decir, la ampliación de las funciones trigonométricas al plano complejo.

En el capítulo 14 daremos algunas sugerencias de actividades para enseñar trigonometría en secundaria y bachillerato. Así como ejemplos concretos de actividades que se pueden realizar en un curso escolar.

# CAPÍTULO 1.

# ÁNGULOS Y CUERDAS.

*La astronomí a es la fuerza que condujo los avances en trigonometría.*

## 1.1. Historia de la medición de ángulos.

La **historia de la trigonometría y de las funciones trigonométricas** podría extenderse por más de 4000 años. Los babilonios determinaron aproximaciones de medidas de ángulos o de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos. Varias tablas grabadas sobre arcilla lo testimonian. Por ejemplo, una tablilla babilonia escrita en cuneiforme, denominada Plimpton 322 (en torno al 1900 a. C.) muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas (ver fig. 1.1); sin embargo, existen varios debates sobre si, en realidad, se trata de una tabla trigonométrica.

**Fig. 1.1.** Plimpton 322.

La unidad común de medida angular, el grado, se cree que se originó con los babilonios. En general se supone que la división de un círculo en 360 partes se basaba en la cercanía de este número a la duración del año, los 365 días.

Hiparco es uno de los grandes astrónomos griegos, la trigonometría tiene aparentemente sus inicios con sus trabajos.

Ciertamente los babilonios, egipcios y los primeros griegos sabían mucha astronomía antes de Hiparco, ellos también determinaron la posición de muchas estrellas en la esfera celeste antes que él, pero Hiparco es a quien se le atribuye la primera tabla de cuerdas.

Debe recordarse que en los días de Hiparco no existía tal cosa como las "razones trigonométricas". Los griegos y, después de ellos, los hindúes y los árabes utilizaron "líneas" trigonométricas. Al principio, éstas tomaron la forma de cuerdas en un círculo y se hizo obligatorio hasta Claudio Ptolomeo asociar valores numéricos (o aproximaciones) con las cuerdas. [Ver sección 1.2] Es probable que la medida de 360 grados procediera de la astronomía, donde el zodíaco había sido dividido en doce "signos" o 36 "decanos". Un ciclo de 360 días podía fácilmente hacerse coincidir con el sistema de los signos zodiacales y decanos al subdividir cada signo en treinta partes y cada decano en diez partes. Nuestro sistema común de medición de ángulos puede provenir de esta correspondencia. Además, dado que el sistema babilónico de posición para fracciones fue obviamente superior a las fracciones de unidad egipcias y a las fracciones comunes griegas, era natural para Claudio Ptolomeo subdividir sus grados en sesenta *partes (minutae primae)*, cada una de estas últimas en sesenta *partes (minutae secundae)* y así sucesivamente. Los traductores han sostenido que las frases latinas usadas en esta conexión han dado origen a nuestras palabras "minuto" y "segundo". Fue sin duda el sistema sexagesimal el que llevó a Ptolomeo a subdividir el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, cada una de ellas a su vez subdividida en sesenta minutos y cada minuto en sesenta segundos.

Los egipcios dividieron a los 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno. (Ver fig. 1.2) Esta división era 2300 años a. C. cada sección de diez grados (llamado decano de la palabra griega diez) contenía una constelación de estrellas, alineadas a lo largo de la eclíptica. Dado que la Tierra realiza una rotación completa en 24 horas, las estrellas en un nuevo decanato se levantarán sobre el horizonte más o menos cada 40 minutos. El sistema de decanos se utilizó para determinar las horas de la noche y las estaciones.

En la siguiente figura (1.2) las divisiones en la parte superior de la tabla representan decanatos. La tabla se lee de derecha a izquierda y las imágenes representan Marte (el barco y el toro), Orión con las tres estrellas como el Sol y la Luna, Sirius, Júpiter, Saturno, Mercurio y Venus. La sección inferior contiene imágenes de dioses de las estrellas o los demonios. Ellos representan a algunos de los días más importantes del año. El cuadro es en gran parte simbólico y funcional, pero no contiene imágenes de algunos grupos importantes de las estrellas.

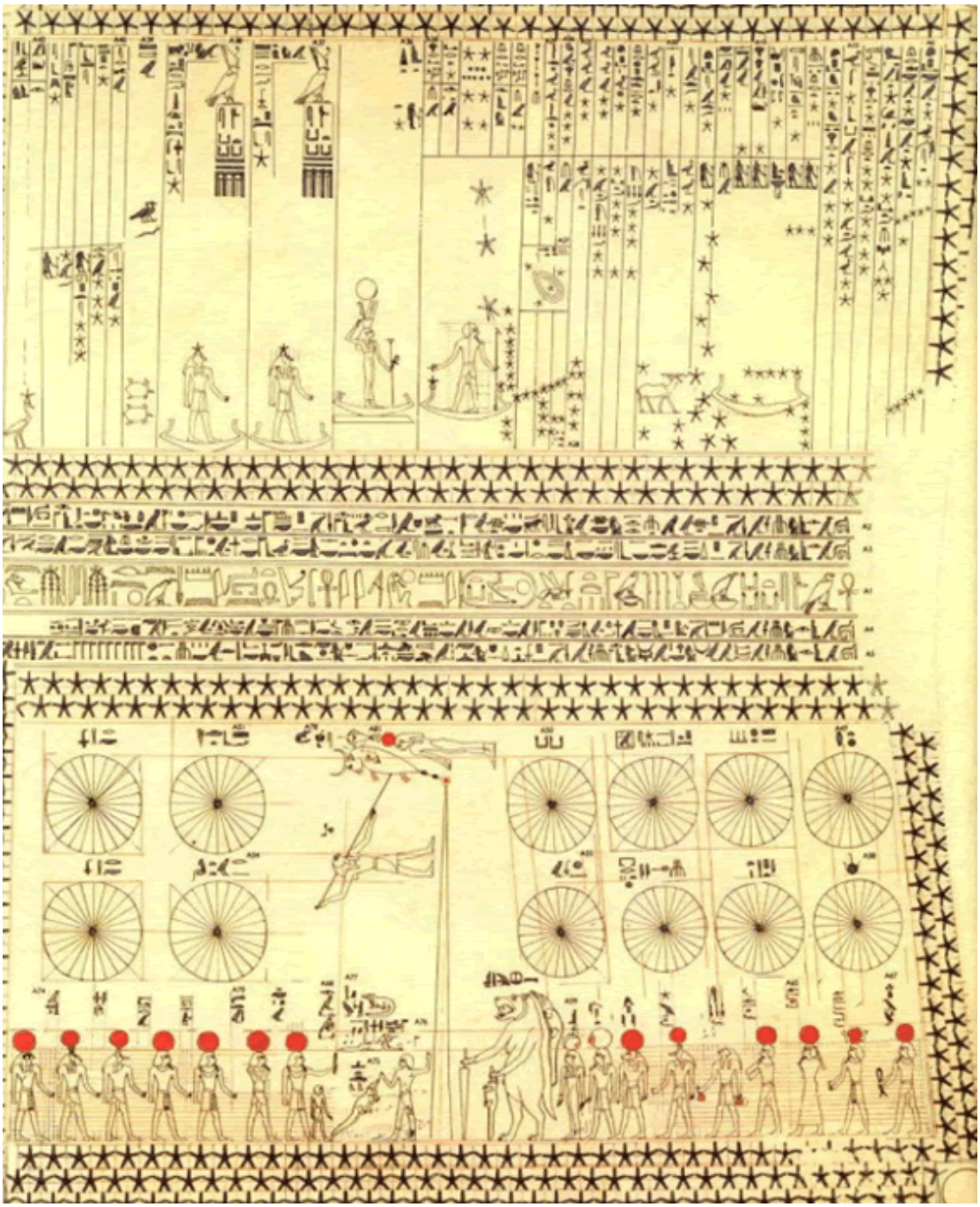


**Fig. 1.2.** División de 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno.

Otra razón puede haber sido el hecho de que un círculo se divide naturalmente en seis partes iguales, cada uno que subtiende una cuerda igual al radio (fig. 1.3). Como sistema de numeración, el sistema sexagesimal es obsoleto, pero la división del círculo en 360 partes ha sobrevivido no sólo en la medida angular, sino también en la división de una hora en 60 minutos y un minuto en 60 segundos.

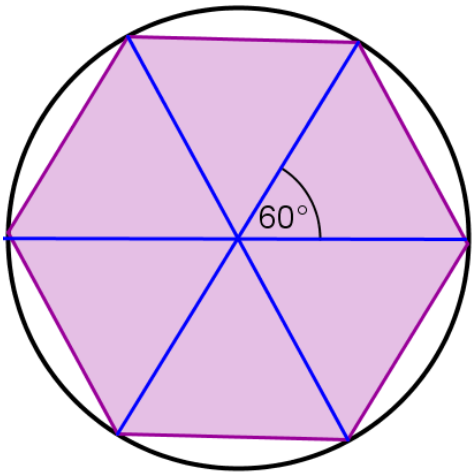



**Fig. 1.3.** Hexágono regular inscrito en una circunferencia.

En tiempos más recientes la medida en radianes se ha adoptado universalmente como la unidad natural de medida angular. Un radián es el ángulo, que abarca una longitud de arco igual a un radio de la circunferencia (fig. 1.4). Dado que un círculo completo incluye dos radios $2\,\pi\,(\approx 6.28)$ a lo largo de la circunferencia, y cada uno de estos radios corresponden a un ángulo central de un radián, tenemos $360^o = 2\pi$ radianes, por lo que 1 radián $= \frac{360^o}{2\pi} \approx 57.29^o$; un radián es una unidad más conveniente que el grado. Una razón para usar radianes es que simplifica muchas fórmulas. Por ejemplo, un arco circular de ángulo $\theta$ (donde $\theta$ está en radianes) subtiende un arco de longitud dada $s = r\theta$; pero si $\theta$ está en grados, la fórmula correspondiente es $s = \pi\ r\ \theta/\ 180$. Del mismo modo, el área de un sector circular de ángulo $\theta$ es un $A = r^2\ \theta/2$ para $\theta$ en radianes y $A = \pi r^2\theta/\ 360$ para $\theta$ en grados. El uso de radianes libera estas fórmulas del "incomodo factor no deseado" $\pi/180$ ó $\pi/360$.

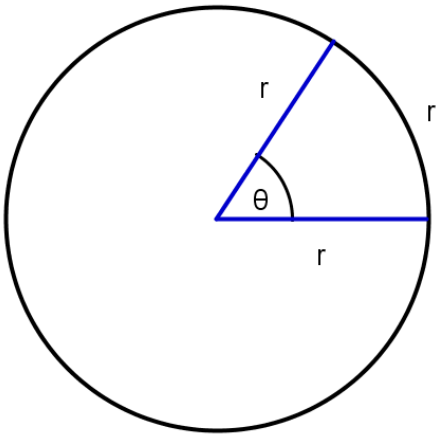



**Fig. 1.4.** Un radián.

Aún más importante, es el hecho de que un ángulo pequeño y su seno son casi iguales numéricamente si el ángulo es pequeño, la aproximación es cierta sólo si el ángulo se mide en radianes. Por ejemplo, usando una calculadora nos encontramos con que el seno de un grado ($sen\ 1^o$) es $0.0174524$; pero si el $1^o$ es convertido a radianes, tenemos $1^o = 2\pi/360^o \approx 0.0174533$, por lo que el ángulo y su seno son iguales dentro de una cienmilésima. Para un ángulo de $0.5^o$ (una vez más se expresa en radianes) el acuerdo es dentro de un millón, y así sucesivamente. Se expresa como $lim_{\theta \to 0}\ (sen\ \theta)/\theta = 1$.

La palabra radián es de moderna cosecha, que fue utilizada en 1871 por James Thomson, hermano del célebre físico Lord Kelvin (William Thomson), apareció por primera vez en la impresión del examen en cuestiones planteadas por él en Queen College de Belfast en 1873. Sugerencias anteriores fueron "rad" y "radial". En trigonometría elemental se siguen usando grados.

## *LOS PRIMEROS ÁNGULOS.*

En la época tan remota, de la construcción de las pirámides los sacerdotes de Egipto y de Sumeria ya estaban bien enterados de dos hechos que se observan en la bóveda celeste. Uno de estos fenómenos consiste en que siempre transcurre el mismo tiempo entre los momentos en que dos estrellas dadas pasan por el meridiano de un mismo lugar, o sea entre los instantes en que cada una de estas estrellas alcanza su más alta posición.

El otro hecho consiste en que, para cada lugar determinado del globo terrestre en el momento de pasar una estrella por el meridiano, el ángulo formado por la visual dirigido a ella y la línea horizontal (ángulo de altura) es siempre el mismo, como lo es el ángulo que dicha visual forma con el cenit (distancia cenital).

Los marinos fenicios también recogían información acerca de los fenómenos del firmamento, se dio un segundo paso de gran trascendencia. Los griegos de litoral ya sabían que la diferencia entre las distancias cenitales meridianas de dos estrellas dadas, cualesquiera es siempre la misma para dos lugares cualesquiera de la Tierra. Así es que en Menfis (Latitud $30^o$ norte) la estrella sirio pasa por el meridiano a la distancia cenital de $46^o 5'$ sur, y la estrella Aldebarán pasa por el meridiano a la distancia aproximada de $14^o$ la diferencia es de $32'5$. Los pueblos marítimos del mundo antiguo comprendieron que esto sucedía debido a que las estrellas guardaban entre sí distancias constantes y a causa de la redondez de la Tierra. Hasta hace unos 250 años a. C. se tenía poco conocimiento de las distancias. Por aquellos tiempos Eratóstenes llevó a cabo sus primeras mediciones del tamaño de la Tierra (ver capítulo 4). A éstas siguió la invención de los mapas, los primeros fueron mapas celestes.

La construcción de mapas celestes proporcionó la base técnica necesaria para las grandes navegaciones y más adelante veremos que esta construcción tuvo la virtud de estimular ulteriores descubrimientos de nuevos recursos matemáticos.

## 1.2. CUERDAS.

*El conocimiento viene de la sombra, y la sombra proviene del gnomon.*

*-De el Chou-Pei Suan-king (c. a. 1105 a. C.), citado en David E. Smith, Historia de las Matemáticas, vol. 2, p. 603.*

Cuando se consideran por separado, segmentos de líneas y ángulos se comportan de una manera simple: la longitud combinada de dos segmentos de línea colocados extremo a extremo a lo largo de la misma línea es la suma de las longitudes, y la medida combinada angular de dos rotaciones sobre el mismo punto en el plano es la suma de las rotaciones individuales. Es sólo cuando tratamos de relacionar los dos conceptos que surgen complicaciones: los peldaños equidistantes de una escalera, cuando se ve desde un punto fijo, no forman ángulos iguales en el ojo del observador (fig. 1.2.1), y por el contrario, los ángulos iguales, cuando se proyecta sobre una línea recta, no intercepta segmentos iguales (fig. 1.2.2). Trigonometría plana elemental hablando a groso modo, conocida en el siglo XVI, se refiere a las relaciones cuantitativas entre los ángulos y segmentos de línea, particularmente en un triángulo, de hecho, la propia palabra "trigonometría" proviene de las palabras griegas trigono= triángulo, y metron= media.

Los egipcios usaban una especie de trigonometría primitiva ya en el segundo milenio a. C. en la construcción de las pirámides. En Mesopotamia, los astrónomos de Babilonia mantuvieron meticulosos registros de la salida y puesta de las estrellas, del movimiento de los planetas y de los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere familiaridad con la distancia angular medida en la esfera celeste. El gnomon, un dispositivo simple para decir la hora a partir de la sombra proyectada por una vara vertical, era conocido a los antiguos griegos, que, según el historiador Heródoto (c. a. 450 a. C.), lo obtuvieron de los babilonios. El gnomon es esencialmente un dispositivo análogo para el cálculo de la función cotangente: Si (vemos fig. 1.2.3) $h$ denota la altura de la vara y $s$ la longitud de su sombra cuando el Sol está una altitud de $\alpha$ grados por encima del horizonte, $s = h\cot\alpha$ por lo que $s$ es proporcional a $\cot\alpha$. Por supuesto, los antiguos no estaban interesados en la función cotangente como tal, sino más bien en usar el dispositivo como un controlador de tiempo, de hecho, midiendo la variación de la longitud diariamente en mediodía, el gnomon también podría ser utilizado para determinar el día del año.

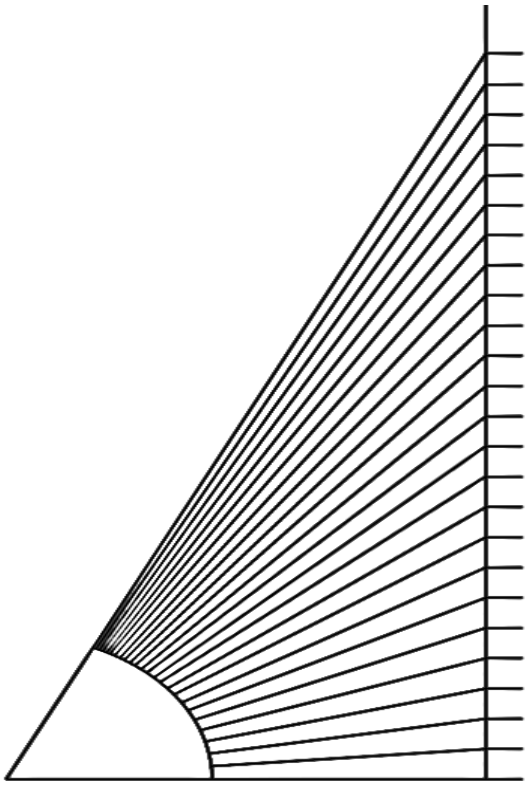


**Fig. 1.2.1.** Incrementos verticales iguales subtienden ángulos desiguales.

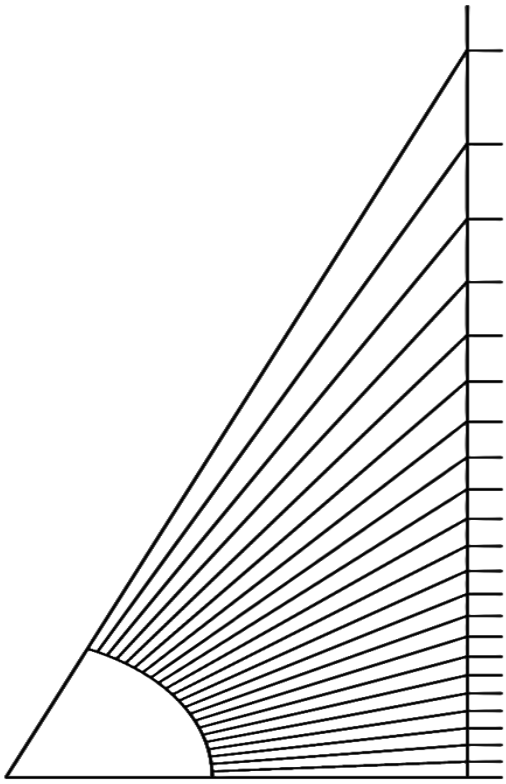


**Fig.1. 2.2.** Ángulos iguales subtienden incrementos verticales desiguales.

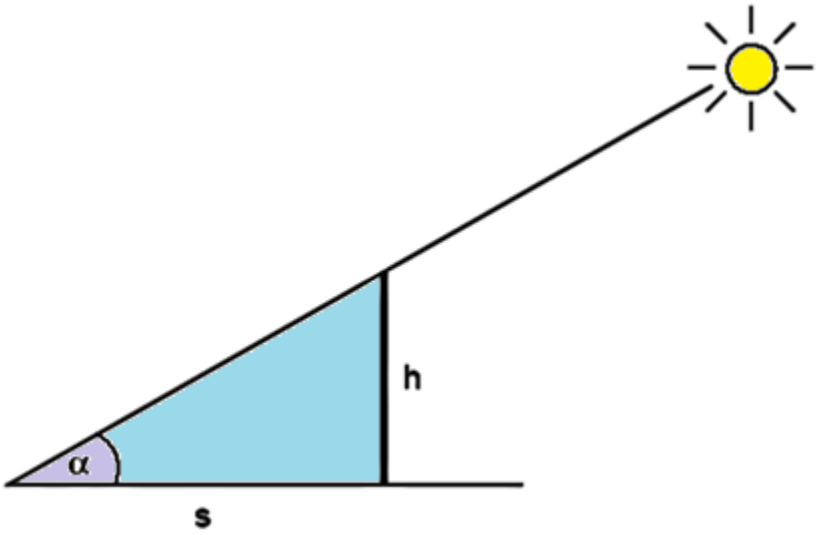



**Fig. 1.2.3.** Gnomon.

Tales de Mileto (c. a. 640-546 a. C.), el primero de la larga línea de los filósofos y matemáticos griegos, se dice que ha medido la altura de una pirámide mediante la comparación de la sombra que proyecta con la de un gnomon.

Una vez más la trigonometría no estuvo directamente involucrada, sólo la similitud de dos triángulos rectángulos. Sin embargo, este tipo de "cálculo de sombras" fue bastante bien conocido por los antiguos y puede decirse que es el precursor adecuado de la trigonometría. Estos métodos simples se aplicaron exitosamente para medir las dimensiones de la Tierra, y más tarde, la distancia a las estrellas (véase el capítulo 4).

La trigonometría en el sentido moderno de la palabra empezó con Hiparco de Nicea (c. a.190-120 a. C.), considerado el gran astrónomo de la antigüedad. Al igual que con muchos de los eruditos griegos, el trabajo de Hiparco es conocido principalmente por medio de referencias por escritores posteriores, en este caso el comentario sobre el Almagesto de Ptolomeo por Teón de Alejandría (c. a. 390 d. C.). Nació en la ciudad de Nicea (Iznik ahora en el noroeste de Turquía), pero pasó la mayor parte de su la vida en la isla de Rodas en el mar Egeo, donde estableció un observatorio. El uso de instrumentos de su propia invención, lo llevó a determinar la posición de alrededor de 1000 estrellas en términos de su longitud celestial y su latitud y las grabó en un mapa: el primer atlas exacto de las estrellas, que podría haber sido llevado a este proyecto por su observación, en el año 134 a. C. de una explosión de una estrella que nunca se había visto antes (estrella nova).

Para clasificar las estrellas según su luminosidad, Hiparco introdujo una escala en la que las estrellas más brillantes se les dio la magnitud 1 y la menor magnitud 6, esta escala, aunque revisada y muy extendida en rango, se sigue utilizando hoy en día. A Hiparco también se le atribuye el descubrimiento de la precesión de los equinoccios, un lento movimiento circular

de los polos celestes, una vez cada 26700 años, este movimiento aparente se sabe que fue causado por un bamboleo del eje de la propia Tierra (que fue Newton quien correctamente explicó este fenómeno sobre la base de su teoría de la gravedad). Refinado y simplificado el sistema antiguo de epiciclos, inventado por Aristóteles para explicar el movimiento observado de los planetas alrededor de la Tierra (véase el capítulo 5), lo que era en realidad un retroceso respecto de Aristarco, su predecesor, que ya tenia la visión de un universo en el que el Sol era el centro, y no la Tierra.

Para poder hacer sus cálculos Hiparco necesitaba una tabla de las razones trigonométricas, pero no tenía a quién recurrir: no existía dicha tabla, por lo que tuvo que calcular el mismo. A su juicio, cada triángulo plano o esférico se consideraba inscrito en un círculo, tal que cada lado viene a ser una cuerda. Con el fin de calcular las diversas partes del triángulo necesitaba encontrar la longitud de la cuerda en función del ángulo central, y se convirtió en el la tarea principal de la trigonometría para los próximos siglos. Como un astrónomo, Hiparco estaba preocupado principalmente con triángulos esféricos, debe haber conocido muchas fórmulas de la trigonometría plana, entre ellas las identidades (en notación moderna)

$$\boldsymbol{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1,}\quad \boldsymbol{sen^2\,\frac{\alpha}{2} = (1 - \cos\alpha)/2,}\quad \text{y}$$

$$\boldsymbol{sen\,(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\, sen\,\beta.}$$

estas fórmulas, por supuesto, se derivaron de teoremas puramente geométricos, que expresan la relación entre ángulos y cuerdas de un círculo (la primera fórmula, por ejemplo, es el equivalente trigonométrico del Teorema de Pitágoras); volveremos a algunas de estas fórmulas en el capítulo 5. Hiparco escribió doce libros sobre cálculo de cuerdas en un círculo, pero todos se perdieron.

La primera gran obra intacta de trigonometría que ha llegado a nosotros es el Almagesto de Claudio Ptolomeo, (Nació en Egipto aproximadamente en el año 85 d. C. y murió en Alejandría en el año 165 d. C.). Ptolomeo vivió en Alejandría, el centro intelectual del mundo helénico, pero los detalles de su vida no existen.

En contraste con la mayoría de los matemáticos griegos, que consideraban su disciplina como una ciencia pura, abstracta, Ptolomeo fue el primer matemático aplicado. Él escribió sobre astronomía, geografía, música, y posiblemente también sobre óptica. Él compiló un catálogo de estrellas basado en el trabajo de Hiparco, en el que hizo una lista y nombró cuarenta y ocho constelaciones, estos nombres están en uso hoy en día. En su trabajo "Geografía" Ptolomeo utiliza sistemáticamente la técnica de proyección (un sistema de cartografía de la Tierra esférica en una hoja de papel), que Hiparco ya había introducido en su mapa del mundo entonces conocido, como una rejilla de longitud y latitud, fue el mapa del mundo hasta la Edad Media (fig. 1.2.4). Sin embargo, Ptolomeo subestimó el tamaño de

la Tierra, descartando la de Eratóstenes que era una estimación "más correcta" (véase el capítulo 4).

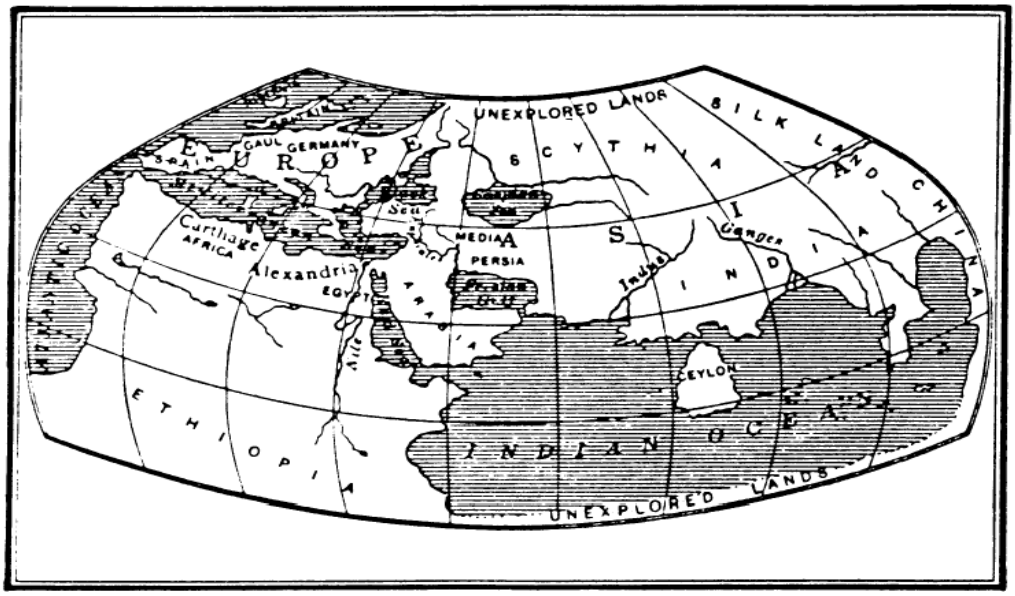



**Fig. 1.2.4.** Mapa mundial de Ptolomeo.

La mayor obra de Ptolomeo es el *Almagesto*, un resumen de la astronomía, como era conocida en su tiempo, sobre la base de la hipótesis de una Tierra inmóvil sentado en el centro del universo y los cuerpos celestes en movimiento a su alrededor en órbitas prescritas (el sistema geocéntrico). El *Almagesto* se compone de trece partes ("libros") y por lo tanto recuerda a los trece libros de los Elementos de Euclides. La semejanza va más allá, pero sobre todo las dos obras contienen algunos de sus propios descubrimientos, sino que son compilaciones de los conocimientos de sus respectivos campos y por lo tanto sobre la base de los logros de sus predecesores (en el caso de Ptolomeo, sobre todo de Hiparco). Ambas obras han ejercido una enorme influencia en generaciones de pensadores, pero a diferencia de los Elementos, que hasta hoy constituye el núcleo de la geometría clásica, el *Almagesto* perdió gran parte de su autoridad una vez que el sistema heliocéntrico de Copérnico fue aceptado. Como consecuencia, es mucho menos conocido hoy que los Elementos, un desafortunado estado de cosas, porque el Almagesto es un modelo de exposición que bien podría servir como un ejemplo, a los modernos escritores.

La palabra *Almagesto* ha tenido una evolución interesante: el propio título de Ptolomeo, en la traducción, era "Sintaxis matemática", a la que las generaciones posteriores agregaron el superlativo *megiste* ("el mayor", "el más grande"). Cuando los árabes tradujeron la obra en su propio idioma, se mantuvo la palabra *megiste* pero agregó la conjunción ("el"), y con el tiempo vino a ser conocido como "*El Almagesto*". En 1175 la Versión árabe fue traducida al latín, y se convirtió desde entonces en la piedra angular de la imagen geocéntrica del

mundo, que dominaría el pensamiento científico y filosófico de Europa bien entrado el siglo XVI y se convertiría en el canon de la Iglesia Romana.

Es de especial interés para nosotros aquí la tabla de cuerdas de Ptolomeo, que es el tema de los capítulos 10 y 11 del primer libro de él *Almagesto*. Su tabla da la longitud de una cuerda en un círculo en función del ángulo central que subtiende (fig. 1.2.5) para ángulos de $0^o$ a $180^o$ en intervalos de medio grado. Fundamentalmente se trata de una tabla de senos: si $r$ denota el radio, $\alpha$ el ángulo central, y la longitud de la cuerda la denotamos por $d$, tenemos

$$\boldsymbol{d = 2r\ sen\ \frac{\alpha}{2}} \qquad \textbf{(1)}$$

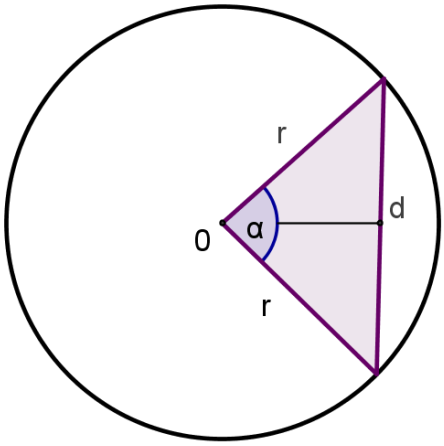



**Fig. 1.2.5.** $d = \ cuerda, \ \ d = 2r\ sin\ \alpha/2$.

Ptolomeo toma el diámetro del círculo de 120 unidades, de manera que $r = \ 60$ (la razón de esta elección pronto será clara). Ecuación (1) entonces se convierte en $d = 120\ sen\ \alpha/2$. Así, además de la proporcionalidad factor de 120, tenemos una tabla de valores de $sen\ \alpha/2$ y por lo tanto, (doblando el ángulo) de $sen\ \alpha$.

Para el cálculo de la tabla de Ptolomeo en la que usó el sistema de numeración sexagesimal babilónico o base 60, el sistema sólo es adecuado y disponible para el manejo de las fracciones hoy en día (el sistema decimal estaba todavía en un millar de años en el futuro). Pero él lo utiliza en conjunción con el sistema griego en el que cada letra del alfabeto se le asigna un valor numérico: $\alpha = 1$, β= 2 y así sucesivamente. Esto hace que la lectura de su tabla sea un poco engorrosa, (fig. 1.2.6).

Por ejemplo, para un ángulo de $7^o$ (expresada por la letra griega ζ), Ptolomeo presenta una tabla de longitud de cuerda 7, 19, 33 (escrito como $\zeta\ \iota\theta\ \lambda\gamma$, las letras $\iota, \theta, \lambda,$ y $\gamma$ que representa el 10, 9, 30, y 3, respectivamente), que es la notación moderna para el número sexagesimal $7 + 19/60 + 33/3,600$ (el punto y coma se utiliza para separar la parte entera del número de su fracción, y las comas separan las posiciones sexagesimales). Cuando se

escribe en nuestro sistema decimal, este número es casi igual a 7,32583; la verdadera longitud de la cuerda, redondeado a cinco lugares, es 7,32582.

Todo un logro extraordinario!

| Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν | | | Table of Chords | | |
|---|---|---|---|---|---|
| περιφε. ρειῶν | εὐθειῶν | ἑξηκοστῶν | arcs | chords | sixtieths |
| ½ | ϙ λα κε | ϙ α β ν | ½° | 0;31,25 | 0; 1, 2, 50 |
| α | α β ν | ϙ α β ν | 1° | 1; 2,50 | 0; 1, 2, 50 |
| α½ | α λδ ιε | ϙ α β ν | 1½° | 1;34,15 | 0; 1, 2, 50 |
| β | β ε μ | ϙ α β ν | 2° | 2; 5,40 | 0; 1, 2, 50 |
| β½ | β λξ δ | ϙ α β μη | 2½° | 2;37, 4 | 0; 1, 2, 48 |
| γ | γ η κη | ϙ α β μη | 3° | 3; 8,28 | 0; 1, 2, 48 |
| γ½ | γ λθ νβ | ϙ α β μη | 3½° | 3;39,52 | 0; 1, 2, 48 |
| δ | δ ια ιζ | ϙ α β μζ | 4° | 4;11,16 | 0; 1, 2, 47 |
| δ½ | δ μβ μ | ϙ α β μζ | 4½° | 4;42,40 | 0; 1, 2, 47 |
| ε | ε ιδ δ | ϙ α β μϛ | 5° | 5;14, 4 | 0; 1, 2, 46 |
| ε½ | ε με κζ | ϙ α β με | 5½° | 5;45,27 | 0; 1, 2, 45 |
| ϛ | ϛ ιϛ μθ | ϙ α β μδ | 6° | 6;16,49 | 0; 1, 2, 44 |
| ϛ½ | ϛ μη ια | ϙ α β μγ | 6½° | 6;48,11 | 0; 1, 2, 43 |
| ζ | ζ ιθ λχ | ϙ α β μβ | 7° | 7; 19,33 | 0; 1, 2, 42 |
| ζ½ | ζ ν νδ | ϙ α β μα | 7½° | 7;50,54 | 0; 1, 2, 41 |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| ροδ½ | ριθ να μγ | ϙ ϙ β νγ | 174½° | 119;51,43 | 0; 0, 2, 53 |
| ροε | ριθ νγ ι | ϙ ϙ β λϛ | 175° | 119;53,10 | 0; 0, 2, 36 |
| ροε½ | ριθ νδ κζ | ϙ ϙ β κ | 175½° | 119;54,27 | 0; 0, 2, 20 |
| ροϛ | ριθ νε λη | ϙ ϙ β γ | 176° | 119;55,38 | 0; 0, 2, 3 |
| ροϛ½ | ριθ νϛ λθ | ϙ ϙ α μζ | 176½° | 119;56,39 | 0; 0, 1, 47 |
| ροζ | ριθ νζ λβ | ϙ ϙ α λ | 177° | 119;57,32 | 0; 0, 1, 30 |
| ροζ½ | ριθ νη ιη | ϙ ϙ α ιδ | 177½° | 119;58,18 | 0; 0, 1, 14 |
| ροη | ριθ νη νε | ϙ ϙ ϙ νζ | 178° | 119;58,55 | 0; 0, 0, 57 |
| ροη½ | ριθ νθ κδ | ϙ ϙ ϙ μα | 178½° | 119;59,24 | 0; 0, 0, 41 |
| ροθ | ριθ νθ μδ | ϙ ϙ ϙ κε | 179° | 119;59,44 | 0; 0, 0, 25 |
| ροθ½ | ριθ νθ νϛ | ϙ ϙ ϙ θ | 179½° | 119;59,56 | 0; 0, 0, 9 |
| ρπ | ρκ ϙ ϙ | ϙ ϙ ϙ ϙ | 180° | 120; 0, 0 | 0; 0, 0, 0 |

**Fig. 1.2.6.** Una sección de la tabla de cuerdas de Ptolomeo.

La tabla de Ptolomeo da la longitud de la cuerda con una precisión de dos lugares sexagesimales, o 1/ 3,600, lo cual es suficiente para la mayoría de las aplicaciones incluso hoy en día. Por otra parte, la tabla tiene una columna de "sesenta" que permite interpolar entre las entradas sucesivas: le da el incremento promedio en la longitud de la cuerda de

una entrada a la siguiente, es decir, el incremento dividido por 30 (el intervalo entre ángulos consecutivos, medido en minutos de arco).

Aquí tenemos una tabla de cuerdas, escrita en sistema sexagesimal (base 60).

**Tabla 1**

| Arcs | Chords | Sixtieths | Arcs | Chords | Sixtieths |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0;31,25 | 0;1,2,50 | 6 | 6;16,49 | 0;1,2,44 |
| 1 | 1;2,50 | 0;1,2,50 | 47 | 47;51,0 | 0;0,57,34 |
| $1\frac{1}{2}$ | 1;34,15 | 0;1,2,50 | 49 | 49;45,48 | 0;0,57,7 |
| 2 | 2;5,40 | 0;1,2,50 | 72 | 70;32,3 | 0;0,50,45 |
| $2\frac{1}{2}$ | 2;37,4 | 0;1,2,48 | 80 | 77;8,5 | 0;0,48,3 |
| 3 | 3;8,28 | 0;1,2,48 | 108 | 97;4,56 | 0;0,36,50 |
| 4 | 4;11,16 | 0;1,2,47 | 120 | 103;55,23 | 0;0,31,18 |
| $4\frac{1}{2}$ | 4;42,40 | 0;1,2,47 | 133 | 110;2,50 | 0;0,24,56 |

Siguiendo a Hiparco, él considera el triángulo que se inscribe en un círculo. Vamos a mostrar aquí el caso más simple, un triángulo rectángulo. Veamos el triángulo $ABC$ (fig. 1.2.7), con el ángulo recto en $C$. De la geometría elemental sabemos que la hipotenusa $c = AB$ es el diámetro de la circunferencia que pasa por $A, B$ y $C$. Denotando por $O$ el centro de este círculo (es decir, el punto medio de $AB$), un conocido teorema dice que $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$.

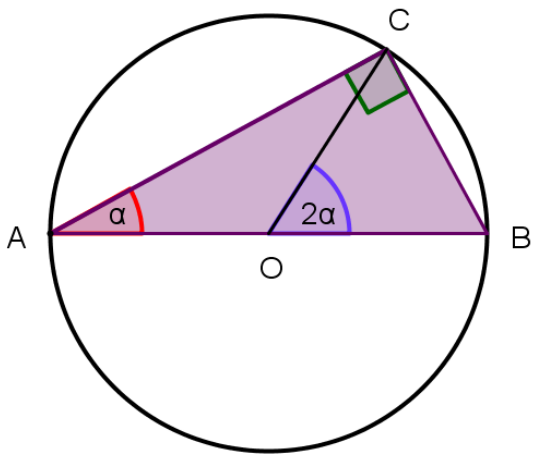



**Fig. 1.2.7.** Triángulo rectángulo inscrito en un círculo.

Suponer que $A$ y $C$ se dan. En primer lugar, calcular $2\alpha$ y utilizar la tabla para encontrar la longitud de la cuerda correspondiente, y desde la tabla asume $c = 120$, tenemos que multiplicar la longitud por el radio $c/120$. Esto nos da el lado $a = BC$. La parte restante

$b = AC$ entonces se puede encontrar en el teorema de Pitágoras, y el ángulo $\beta = \angle ABC$ de la ecuación $\beta = 90^o - \alpha$. Por el contrario, si ambas partes se conocen, por ejemplo $A\ y\ C$, se calcula la relación $a/c$, se multiplica por 120, y luego usar la tabla en sentido inverso para encontrar $2\alpha$ y de allí $\alpha$.

El procedimiento se puede resumir en la fórmula

$$\boldsymbol{a = \frac{c}{120}\ \text{Cuerda}\ 2\alpha,} \qquad \textbf{(2)}$$

donde cuerda $2\alpha$ es la longitud de la cuerda, cuyo ángulo central $2\alpha$. Esto lleva a una observación interesante: en el sistema sexagesimal ($base\ 60$), multiplicando y dividiendo por 120 es análoga a multiplicar y dividir por 20 en el sistema decimal: simplemente multiplicar o dividir por 2 y cambiar el punto de un lugar a la derecha o a la izquierda, respectivamente. Por lo tanto la ecuación (2) requiere el doble del ángulo, buscar la cuerda correspondiente, y dividir por 2. Para hacer esto una y otra vez se convierte en una tarea, por lo que era sólo cuestión de tiempo antes de que alguien acortara este trabajo en forma tabular, la mitad de la cuerda como una función de dos veces el ángulo, en otras palabras, nuestra función moderna $sen$. Esta tarea fue realizada por los hindús.

## 1.3. Veamos cómo pudo proceder Ptolomeo.

Tomando la explicación de Gerardo Sozio, Hiparco se basó en la cuerda del arco dado una en un círculo de radio fijo R.

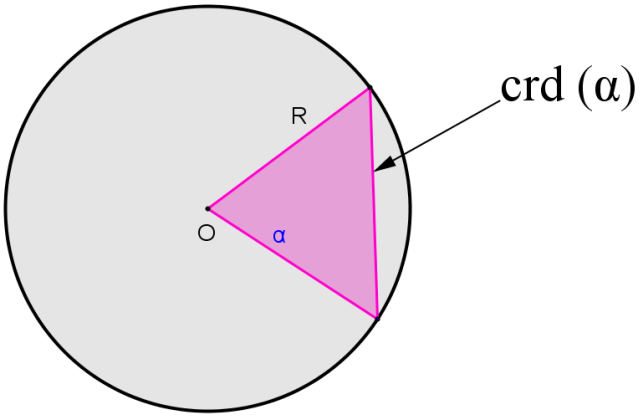



**Figura 1.3.1.** Esta figura muestra la cuerda $crd(\alpha)$ subtiende un ángulo $\alpha$ en un círculo.

La longitud de la cuerda se denota por $crd(\alpha)$.

Hiparco y Ptolomeo, más tarde dieron un cuadro con lista $\alpha$ y $crd(\alpha)$ para varios valores del ángulo $\alpha$, basado sobre un valor especifico de $R$. Ptolomeo uso el valor $R = 60$, mientras que Hiparco utilizó un valor más complicado, como veremos a continuación.

Utilización de las propiedades básicas del círculo. Se puede ver en el diagrama siguiente, que $crd(\alpha)$ es relacionada con la relación sinusoidal por la ecuación

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}crd\ (\alpha)}{R}, \text{ así } crd\ (\alpha) = 2R\ sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por lo tanto en un círculo de diámetro 1, tenemos $crd\ (\alpha) = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

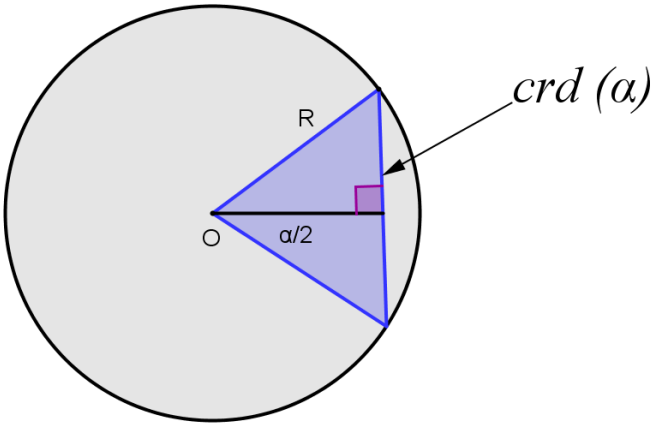



**Figura 1.3.2.** Esta figura muestra la cuerda $crd\ (\alpha)$ y el ángulo de media $\alpha/2$.

Además, utilizando la propiedad del círculo, que el ángulo en el centro de un círculo es dos veces el ángulo en la circunferencia subtendido por el mismo arco, se puede ver que en un círculo de diámetro 1, la cuerda que subtiende un ángulo $\alpha$ en la circunferencia tiene longitud $sen\ \alpha$. Esto está bien definido, ya que cuerdas iguales subtienden ángulos iguales.

Hiparco sabía que $2\pi\ R$ era igual a la circunferencia de un círculo, y teniendo 3; 8, 30 como la aproximación sexagesimal. El tiempo se mide todavía en un sistema de base 60 en la actualidad. La notación 3; 8, 30 se utiliza para representar $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$) para $\pi$, el radio $R$ se calculó:

$$C = 2\,\pi\,R$$

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

$$= \frac{60\ \times\ 360}{2\pi} = \frac{6,0,0}{6;17} = 57,18 = 3438'$$

$$\text{i.e. } 6,0,0 = 6\ \times\ 60^2 + 0\ \times 60 + 0\ \times 1)$$

$$(6;17 = 2\ \times 3;8,30 = 2\ \times (3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600})$$

Con este radio, la medida de un ángulo es igual a su medida radio. La medida de un ángulo se define como la longitud cortada en la circunferencia dividida por el radio.

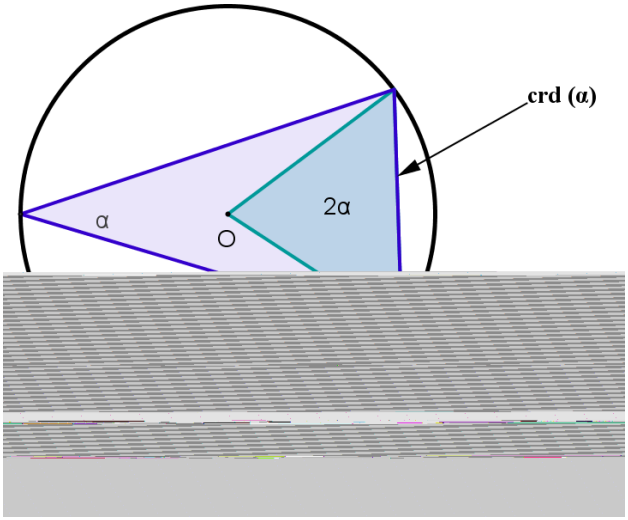



**Figura 1.3.3.** Esta figura muestra la geometría para que la cuerda $crd(\alpha) = sen\ (\alpha)$.

En el cálculo de la tabla de cuerdas, Hiparco comenzó con $60^o$, por lo que la cuerda es igual al radio, ya que tenemos un triángulo equilátero. Así $crd(60) = 57{,}18$ en sistema sexagesimal o $3438'$ en minutos. Ahora, por un ángulo de $90^o$, la cuerda es igual a:

$$R\sqrt{2} = 4862' = 81{,}2 \qquad (81 \times 60 + 2 \times 1)$$

Así $crd(90) = 81{,}2$ (en sexagesimal).

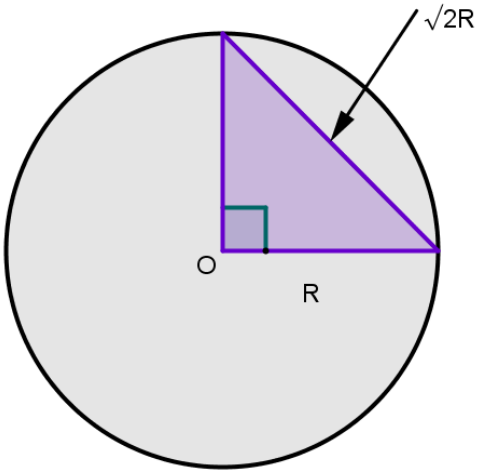



**Figura 1.3.4.** Esta figura muestra la geometría de una cuerda del ángulo recto.

Para el cálculo de las cuerdas de otros ángulos, Hiparco utilizó los resultados geométricos siguientes:

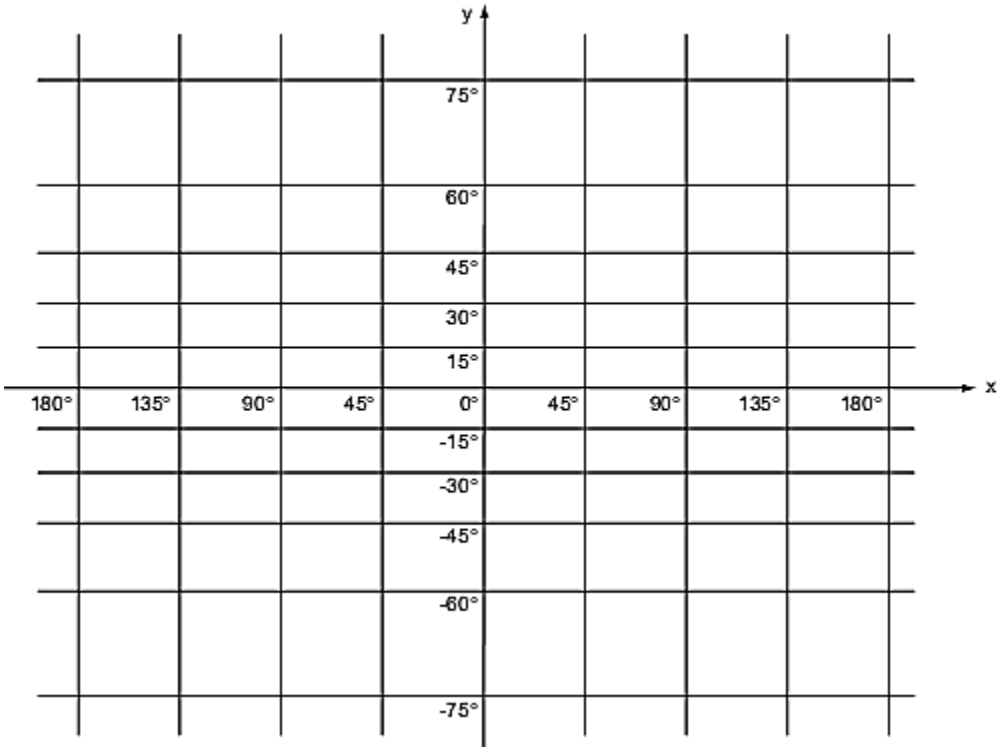



**Fig. 12.7.** La cuadrícula de Mercator.

Sin embargo, con el fin de poner en práctica este plan, el espaciamiento entre los paralelos sucesivos primero tenía que ser determinada. Exactamente cómo Mercator hizo esto no se sabe (y se sigue debatiendo por los historiadores de la cartografía), no dejó constancia escrita de su método, excepto para la siguiente explicación breve que fue impreso en su mapa:

*Al hacer esta representación del mundo, tuve que extender en un plano la superficie de la esfera de tal manera que las posiciones de los lugares corresponderán en todos los lados entre sí tanto en la dirección verdadera y en la distancia. . . . Con esta intención hemos tenido que emplear a una nueva disposición de los meridianos, con referencia a los paralelos. . . . Por estas razones, hemos incrementado progresivamente los grados de latitud hacia cada polo en proporción a la prolongación de los paralelismos con referencia al ecuador.*

Aunque esta explicación es vaga deja en claro que Mercator tenía una comprensión plena de los principios matemáticos que subyacen en su mapa. Después de haber creado su red, que ahora le quedaba para poner la piel al esqueleto para superponer a esta red el contorno de los continentes, como se les conocía en su tiempo. Él publicó su mapa del mundo (o "carta", como los navegantes prefieren llamarlo) en 1569 bajo el título de *Nueva y Mejorada Descripción de las tierras del mundo, y destinadas a modificar el uso de navegadores*. Fue un gran mapa, impreso en veintiún secciones y midiendo 54 por 83 pulgadas. Es uno de los artefactos cartográficos más preciados de todos los tiempos: sólo tres copias del original, sobreviven.

Mercator de Duisburgo murió el 2 de diciembre de 1594, después de haber vivido una larga vida que le dio fama y riqueza. Sin embargo, su más famoso logro, fue el mapa que lleva su nombre, no fue aceptado inmediatamente por la comunidad marítima, no podían comprender su excesiva distorsión de la forma de los continentes.

El hecho de que Mercator no había dado una explicación completa de cómo se había "aumentado progresivamente" la distancia entre los paralelos sólo se agrega a la confusión. Se dejó a Edward Wright (c. a. 1560-1615), un matemático Inglés y fabricante de instrumentos, dar la primera cuenta exacta de los principios subyacentes del Mapa de Mercator. En un trabajo titulado *Certaine errorors en navigatión…*, publicado en Londres en 1599, escribió:

*Las partes de los meridianos en cada punto de latitud debe aumentar con la misma proporción con la cual el aumento de Secantes. Por adición perpetua de las Secantes damos cuenta a la latitud de cada paralelo en la suma compuesta de todas las secantes anteriores. . . podemos hacer una tabla que realmente debe mostrar a los puntos de latitud en los meridianos de un planisferio náutico.*

En otras palabras, Wright utiliza integración numérica para evaluar $\int_0^{\varphi} \sec\varphi \, d\varphi$. Vamos a seguir su plan, usando notación moderna.

La figura 12.8 muestra un pequeño rectángulo esférico definido por los círculos de las longitudes $\lambda$ y $\lambda + \Delta\lambda$ y círculos de latitudes $\varphi$ y $\varphi + \Delta\varphi$, donde $\lambda$ y $\varphi$ se miden en radianes $\Delta\lambda$ se muestra en la figura.) Los lados de este rectángulo tienen una longitud $(R\cos\varphi)\,\Delta\lambda$ y $R\Delta\varphi$, respectivamente. Sea $P\ (\lambda,\varphi)$ un punto sobre la esfera al punto $P'(x,y)$ sobre el mapa (donde $y = 0$ corresponde a la línea del ecuador). Luego el rectángulo esférico se proyecta sobre un rectángulo plano definido por las líneas $x, x + \Delta x, y,$ y $y + \Delta y,$ cuando $\Delta x = R\Delta\lambda$. Ahora, el requisito es que el mapa sea conforme, que estos dos rectángulos deben ser similares (que a su vez significa que la dirección de $P(\lambda,\varphi)$ a un punto próximo $Q(\lambda + \Delta\lambda,\ \varphi + \Delta\varphi)$ es la misma que entre sus imágenes en el mapa). Así, se llegó a la ecuación

$$\frac{\Delta y}{R\Delta\lambda} = \frac{R\Delta\varphi}{R\cos\varphi\,\Delta\lambda} \quad \textbf{ó} \quad \Delta y = (R\sec\varphi)\Delta\varphi. \qquad \textbf{(3)}$$

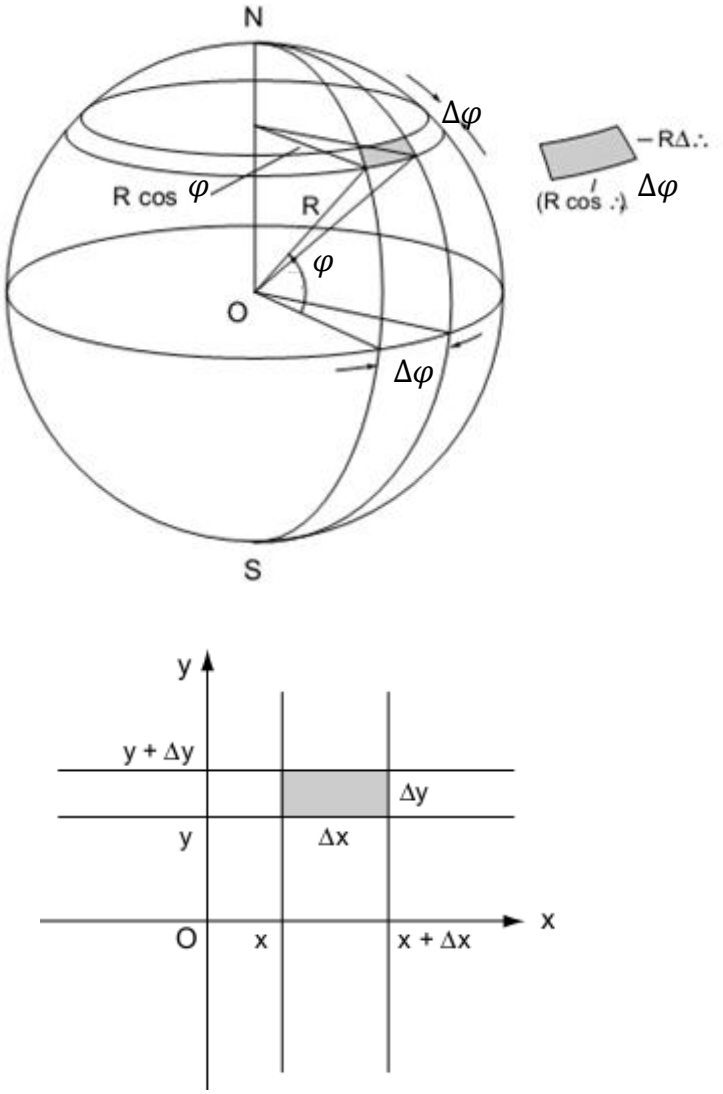



**Fig. 12.8.** Rectángulo esférico en el mundo y su proyección de Mercator mapa.

En términos modernos, la ecuación (3) es una ecuación en diferencias finitas.
Se puede resolver numéricamente mediante un procedimiento paso a paso: ponemos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, 2, 3, ...$, y decidir sobre un incremento fijo $\Delta\varphi$. Comenzando con el ecuador $(y_0 = 0)$ , aumentamos $\varphi$ por $\Delta\varphi$ , y encontramos $y_2 = y_1 + \Delta y_2$ y así sucesivamente hasta el intervalo deseado de latitudes ha sido cubierto. Esta integración numérica es un proceso tedioso y un procedimiento que consume mucho tiempo, a menos que uno tenga una calculadora programable o un PC, ninguna de los cuales estaba a disposición de Wright. Sin embargo, él llevó el plan a través de, la continua adición de las secantes a intervalos de un minuto de arco. Publicó sus resultados en una tabla de "partes meridionales" para las latitudes de $0^o$ a $75^o$. Así que al fin el método de construcción del mapa de Mercator se hizo conocido.

Hoy en día, por supuesto, podríamos escribir la ecuación (3) como una ecuación diferencial: dejamos que tanto $\Delta\varphi$ y $\Delta y$ ser infinitamente pequeño, y obtener límite en el

$$\frac{dy}{d\varphi} = \boldsymbol{R \sec \varphi}, \qquad \textbf{(4)}$$

Cuya solución es

$$y = \boldsymbol{R} \int_0^{\varphi} \sec t \, dt \qquad \textbf{(5)}$$

(hemos utilizado $t$ en lugar de $\varphi$ en el integrando para distinguir la variable de integración del límite superior de la integral). Hoy esta integral se da como un ejercicio de un segundo semestre de cálculo. Pero el libro de Wright apareció unos setenta años antes que Newton y Leibniz inventaran el cálculo, por lo que no podía valerse de sus técnicas. No tenía más remedio que recurrir a la integración numérica.

Técnicamente, la "proyección" de Mercator no es una proyección en absoluto, por lo menos no en el sentido geométrico de la palabra: sólo puede ser obtenido por un procedimiento matemático que, en su esencia, implica un proceso infinitesimal y por lo tanto el cálculo. Mercator mismo nunca utilizó el concepto del cilindro, y su proyección a excepción de una semejanza superficial no tiene nada que ver con la proyección cilíndrica. Sin embargo, una vez creados, los mitos son lentos para morir, y aún hoy se encuentran declaraciones erróneas en este sentido en muchos libros de texto de geografía.

Como hemos visto, Mercator se había dado cuenta de que en un solo mapa podría a la vez preservar la distancia, la forma y dirección.
Tener necesidad del navegante en mente, él eligió sacrificar distancia y forma con el fin de preservar dirección. Sin embargo, muchas personas del mundo aún provienen de la gran percepción del mapa de Mercator que colgaba de la pared de su salón de clases la escuela secundaria.

Libro de Wright apareció en 1599, treinta años después de que Mercator publicó su nuevo mapa del mundo. Poco a poco la comunidad marítima comenzó a apreciar el gran valor del mapa para los navegantes, ya su debido tiempo se convirtió en el mapa estándar para la navegación mundial, un estatus que ha mantenido desde entonces. Cuando la NASA inició su exploración del espacio en la década de 1960, un enorme mapa de Mercator, en el que las trayectorias de los satélites estaban siendo continuamente monitoreados, dominó la sala de Control de Misión en Houston, Texas. Y los primeros mapas de las lunas de Júpiter y Saturno, fotografiado a corta distancia por las naves espaciales Pioneer y Voyager, fueron dibujando en su proyección.

Pero volvamos al siglo XVII, donde la historia se traslada ahora a la arena matemática. En 1614 John Napier (1550-1617) de Escocia publicó su invención de los logaritmos, la ayuda más importante para la matemática computacional ya que el sistema de numeración indo-arábigo fue traído a Europa en la edad media. Poco después, Edmund Gunter (1581-1626), un matemático Inglés y clérigo, publico una tabla de tangentes logarítmicas (1620). Alrededor de 1645 Henry Bond, un profesor de matemáticas y una autoridad en la navegación, comparo con la tabla de meridional de Wright y se dio cuenta con sorpresa que las dos tablas coinciden, siempre que las entradas en la tabla de Gunter se escribe como $(45^o + \frac{\varphi}{2})$.
El conjeturo que $\int_0^{\varphi} \sec t \, dt$ es igual a $\ln \tan(45^o + \frac{\varphi}{2})$, cuando "$ln$" es sinónimo de logaritmos naturales (logaritmos a la base $e = 2.718$) pero no pudo demostrarlo. Pronto su

conjetura se convirtió en uno de los problemas matemáticos pendientes de la década de 1650.

Ahora estamos en una posición para anotar las coordenadas $(x, y)$ de un punto $P'$ en el mapa de Mercator en términos de longitud $\lambda$ y latitud $\varphi$ del punto P correspondiente en el mundo. La diferencia de la ecuación $\Delta x = R\Delta\lambda$ tiene una solución obvia $x = R\lambda$, y la integral que aparece en la ecuación (5) es igual a $\ln\tan(45^o + \frac{\varphi}{2})$; así tenemos

$$\boldsymbol{x = R\lambda, \qquad y = R\ln\tan(45^o + \frac{\varphi}{2})} \qquad \textbf{(6)}$$

La figura 12.9 muestra el mundo tal como aparece en el mapa de Mercator; debido al excesivo alargamiento norte-sur para latitudes altas, el mapa se limita a las latitudes del norte de $75^o$ a sur $60^o$.

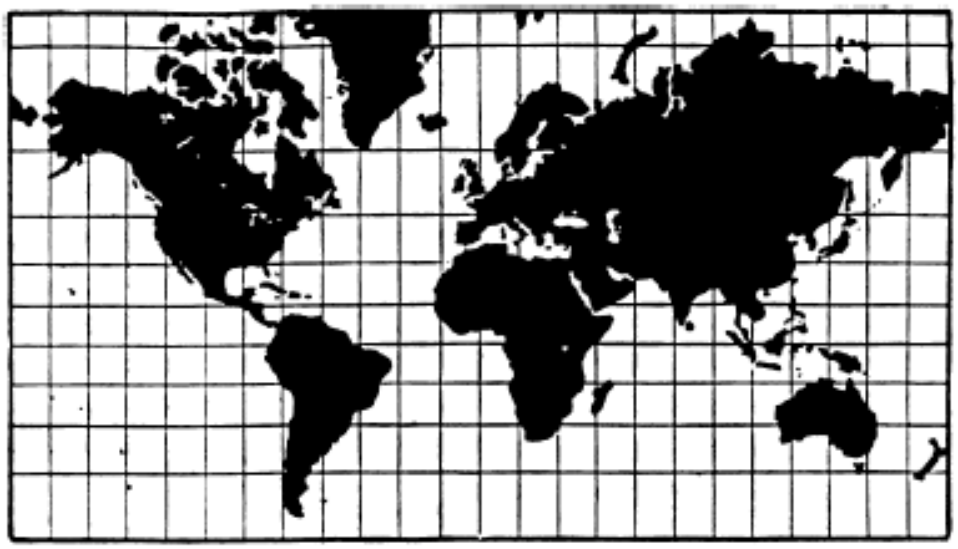


**Fig. 12.9.** El mundo en el mapa de Mercator.

Pero nuestra historia no acaba de terminar todavía. El lector puede en tener cuenta de que la expresión $\tan(45^o + \frac{\varphi}{2})$ en el interior del logaritmo en la ecuación (6) es la misma que la que aparece en la ecuación (2) en relación con la proyección estereográfica.

Esto no es casualidad. Uno de los grandes logros en las matemáticas del siglo XVIII era extender el álgebra de las funciones ordinarias como $sen\, x$, $e^x$ y $ln\, x$ para valores imaginarios y complejos, incluso para la variable $x$. Este desarrollo comenzó con Euler y alcanzó su clímax en el siglo XIX con la teoría de la funciones de una variable compleja. Como veremos en el próximo capítulo, esta extensión nos permite considerar la proyección de Mercator, como una representación conforme (en la matemática, así como en sentido geográfico) de la proyección estereográfica por medio de la función $w = ln\, u$, donde tanto $u$ y $w$ son variables complejas.

# CAPÍTULO 13.

# TRIGONOMETRÍA IMAGINARIA.

*El teorema de De Moivre fue la clave para un mundo nuevo de la trigonometría imaginaria o compleja.*

*Herbert Mc Kay, El Mundo de los Números (1946).*

Una de las primeras cosas que aprendemos en la trigonometría es que el dominio de la función $y = sen\ x$ es el conjunto de todos los números reales, y su rango el intervalo $-1 \leq y \leq 1$; en consecuencia, si usted trata de encontrar un ángulo cuyo seno es, por ejemplo, 2, en su calculadora, después de pulsar $arc\ sen$ (o $sen^{-1}$, o $sen\ inverso$), se mostrará una señal de error al igual que la mayoría de las calculadoras que hacen al tratar de encontrar $\sqrt{-1}$ . Sin embargo, a principios del siglo XVIII, se intentó ampliar el concepto de función de lo imaginario y complejo, incluso valores de la variable independiente; estos intentos resultaría un gran éxito, entre otras cosas, que nos permiten resolver la ecuación $sen\ x = y$ cuando $y$ tiene un valor dado real, imaginario o complejo.

Uno de los primeros pioneros en esta dirección fue Roger Cotes (1682-1716). En 1714 publicó la fórmula

$$\boldsymbol{i\varphi = \log(\cos\varphi + i sen\ \varphi),}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y "$log$" significa logaritmo natural, sino que fue reimpreso en su única obra importante, *Harmonia mensurarum*, una recopilación de sus artículos publicados póstumamente en 1722.

En el libro "La historia de *i*" de Paul J., Nahin inicia con la historia de la solución de la ecuación cubica, que conduce al descubrimiento de los números imaginarios, posteriormente varios matemáticos hacen el esfuerzo por encontrar una representación geométrica para los números complejos. De ahí surge la relación con las funciones trigonométricas.

Euler en 1748 publicó la fórmula explicita,

$$\boldsymbol{e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi + i sen\ \varphi.} \qquad \textbf{(1)}$$

de esta forma apareció en la gran obra de Euler, *Inroductio in Analysis Infinitorum*

(Introducción al Análisis de lo Infinito), aunque no fue el primero en deducirla ni tampoco en publicarla.

En el libro Análisis Básico de Variable Compleja Jerrold E. Marsden definen la exponencial compleja con la ecuación 1 y la 2 de la misma manera.

Mediante la adición y sustracción de estas fórmulas, Euler obtuvo las siguientes expresiones para $\cos\varphi$ y $sen\ \varphi$:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}} \qquad \textbf{(2)}$$

Estas dos fórmulas son la base de la trigonometría analítica moderna.

El crédito otorgado a Euler por redescubrir la fórmula Cotes no es del todo inmerecida: mientras Cotes (al igual que su contemporáneo Moivre) seguía el tratamiento de los números complejos como un medio conveniente y misterioso, para acortar los cálculos algebraicos, fue Euler quien incorporo plenamente estos números en el álgebra de funciones. Su idea era que un número complejo se puede utilizar como una entrada a una función, supuesto que la salida es también un número complejo.

Considérese, por ejemplo, la función $w = sen\, z$, donde tanto $z$ y $w$ son variables complejas. Escribiendo $z = x + iy$ , $w = u + iv$ procediendo como las leyes de la trigonometría ordinaria y si siguen siendo válidas, tenemos

$$\boldsymbol{w = u + iv = sen(x + iy)}$$

$$\boldsymbol{= sen\, x \cos iy + \cos x\ seniy}. \qquad \textbf{(3)}$$

Pero cuales con $cos\ iy$ y $sen\ iy$. Una vez más procediendo de una manera puramente formal, vamos a sustituir $iy$ por $\varphi$ en la ecuación (2):

$$\boldsymbol{\cos iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-iy(iy)}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}},$$

$$\boldsymbol{\operatorname{sen} iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-iy(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2}}.$$

Se da la circunstancia de que las expresiones $(e^{y} + e^{-y})/2$ y $(e^{y} - e^{-y})/2$ presentan muchas similitudes formales con el y funciones $\cos y$ y $sen\, y$, respectivamente, y en consecuencia se denota por $\cosh y$ y $senh\, y$ (léase "coseno hiperbólico" y "seno hiperbólico" de $y$):

$$\boldsymbol{\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}}. \qquad \textbf{(4)}$$

Por ejemplo, si elevamos al cuadrado las dos expresiones y restar los resultados, se obtiene la identidad

$$\boldsymbol{\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1,} \qquad \textbf{(5)}$$

análogo con la identidad trigonométrica $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, (sin embargo, tenga en cuenta, el signo menos del segundo término). También tenemos $\cosh 0 = 1$,$\operatorname{senh} 0 = 0$,

$$\cosh(-y) = \cosh y,$$

$$\operatorname{senh}(-y) = -\operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$d(\cosh y)/dy = \operatorname{senh} y,$$

$$d(\operatorname{senh} y)/dy = \cosh y.$$

Resulta que la mayoría de las fórmulas familiares trigonométricas tienen sus contrapartes hiperbólicas, con un posible cambio de signo en uno de los términos.

Ahora podemos escribir la ecuación (3) como

$$\boldsymbol{\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,} \qquad \textbf{(6)}$$

donde de nuevo $z = x + iy$. Exactamente de la misma manera podemos encontrar una expresión para $\cos z$:

$$\boldsymbol{\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.} \qquad \textbf{(7)}$$

Como ejemplo, vamos a encontrar el seno del número complejo $z = 3 + 4i$. Tomando todas las unidades en radianes, tenemos $\operatorname{sen} 3 = 0.141$,$\cosh 4 = 27.308$, $\cos 3 = -0.990$ y $\operatorname{senh} 4 = 27.290$ (todo ello redondeado a tres decimales), por lo que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} 3 \cosh 4 + i \cos 3 \operatorname{senh} 4 = 3.854 - 27.017i$.

Por supuesto, hay un grave error en lo que acabamos de hacer: la suposición de que las reglas familiares de álgebra y la trigonometría de los números reales se mantienen cuando se aplica a los números complejos. Realmente no hay una garantía a priori de que esto debería ser el caso, de hecho, en ocasiones estas reglas se descomponen cuando se extiende más allá de su dominio original: no podemos utilizar la regla $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando $a$ y $b$ son negativos, pues de lo contrario tendríamos que

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right) \cdot (\sqrt{-1} = \sqrt{[(-1) \cdot (-1)]} = \sqrt{1} = 1, \text{ en lugar de } -1.$$

Con lo que nuestro razonamiento anterior nos conduce a una "contradicción". Por ello hay que tener cuidado con los números complejos.

Pero estas sutilezas no impidió que Euler jugara con su nueva idea: él vivió en una época en que una manipulación libre de preocupaciones de los símbolos fue aceptada, y él hizo la mayor parte de ella. Sencillamente, tenía fe en sus fórmulas, y por lo general él tenía razón. Sus exploraciones audaces e imaginativas dieron lugar a numerosas y nuevas relaciones cuyas rigurosas pruebas tuvo que esperar a las generaciones futuras.

La teoría de las funciones de una variable compleja, fue creada en parte para poner las ideas de Euler en un terreno firme. Para ello, en esencia, definimos una función $w = f(z)$ de tal manera que todas las propiedades de la función de valor real $y = f(x)$ se conserva cuando $x$ y $y$ son sustituidos por las variables complejas $z$ y $w$. Por otra parte, siempre debemos ser capaces de volver a la "vieja" la función $f(x)$ como un caso especial de la "nueva" función cuando $z$ es una variable real $x$ (es decir, cuando $z = x + 0i$).

Vamos a ilustrar estas ideas con las funciones seno y coseno. Utilizando las ecuaciones (6) y (7) como las definiciones de $sen\, z$ y $\cos z$, podemos demostrar que $sen^2\, z + \cos^2 z = 1$, que cada una tiene un período $2\pi$ (tal que, $sen\,(z + 2\pi) = sen\, z$ para todo $z$, y análogamente para $\cos z$), y que las fórmulas de adición familiares siguen vigentes. Bajo ciertas condiciones, incluso podemos diferenciar una función compleja $f(z)$, que nos da (formalmente) la misma derivada que obtendríamos al diferenciar la función de valor real $y = f(x)$; en otro caso, tenemos $\frac{d(sen\, z)}{dz} = \cos z$ y $\frac{d(\cos z)}{dz} = -\text{sen}\, z$, exactamente como en el caso real.

Pero, usted puede preguntar, si la extensión de una función de valor real al dominio complejo se limita a reproducir sus antiguas propiedades, ¿por qué tomarse la molestia? No sería ciertamente vale la pena el esfuerzo, si no fuera por el hecho de que esta ampliación dota a la función con algunas propiedades nuevas y únicas en el dominio complejo. El principal entre estos es el concepto de un mapeo de un plano a otro.

Para ver esto, primero debemos revisar el concepto de función cuando se aplica a una variable compleja. Una función de valor real $y = f(x)$ asigna a cada número real $x$ (la "entrada" o "variable independiente") en su dominio, y sólo un número real (la "salida" o "variable dependiente") en el rango, por lo que es un "mapeo" del eje $X$ al eje $Y$. Una manera conveniente de representar esta asignación es para representar la función en el plano de coordenadas $xy$, en esencia, la producción de una representación gráfica que nos permite ver, literalmente, la forma en que las dos variables dependen una de otra.

Sin embargo, cuando tratamos de extender esta idea a las variables complejas es decir, sustituir la función de valor real $y = f(x)$ con la función de valores complejos $w = f(z)$ inmediatamente nos encontramos con una dificultad. Para representar un número

complejoúnico $x + iy$ se requiere de dos dimensiones. Pero ahora tratamos con dos variables complejas, $z$ y $w$, cada uno de los cuales requiere su propio sistema de coordenadas de dos dimensiones. No podemos por lo tanto, "graficar" la función $w = f(z)$ en el mismo sentido en que la gráfica de la función de $y = f(x)$; para describir geométricamente, tenemos que pensar en ello como una asignación de un plano a otro.

Vamos a ilustrar esto con la función $w = z^2$, cuando $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Tenemos

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i.$$

Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos

$$\boldsymbol{u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy.} \qquad \textbf{(8)}$$

Las ecuaciones (8) nos dicen que tanto $u$ como $v$ son funciones de dos variables independientes $x$ e $y$. Vamos a llamar el plano $xy$ el "plano $z$" y el plano de los rayos $uv$ del "plano $w$." Entonces la función $w = z^2$ mapea cada punto $P(x, y)$ del plano $z$ en un punto correspondiente $P'(u, v)$, la imagen de $P$ en el plano $w$; por ejemplo, el punto $P$ (3,4) va al punto de $P'(-7,24)$, como se deduce de la ecuación $(3 + 4i)^2 = -7 + 24i$.

Imaginemos ahora que $P$ describe una curva en el plano $z$, entonces $P'$ describe una "curva imagen" en el plano $w$. Por ejemplo si $P$ se mueve a lo largo de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = cte.$, $P'$ se moverá a lo largo de la curva $u = cte.$ que es una línea vertical en el plano w. De manera similar, si $P$ traza la hipérbola equilátera $2xy = cte.$, su imagen traza la línea horizontal $v = cte.$ Al asignar diferentes valores a las constantes, tenemos dos familias de hipérbolas en el plano $z$, y sus imágenes forman una cuadrícula rectangular en el plano $w$ (fig. 13.1).

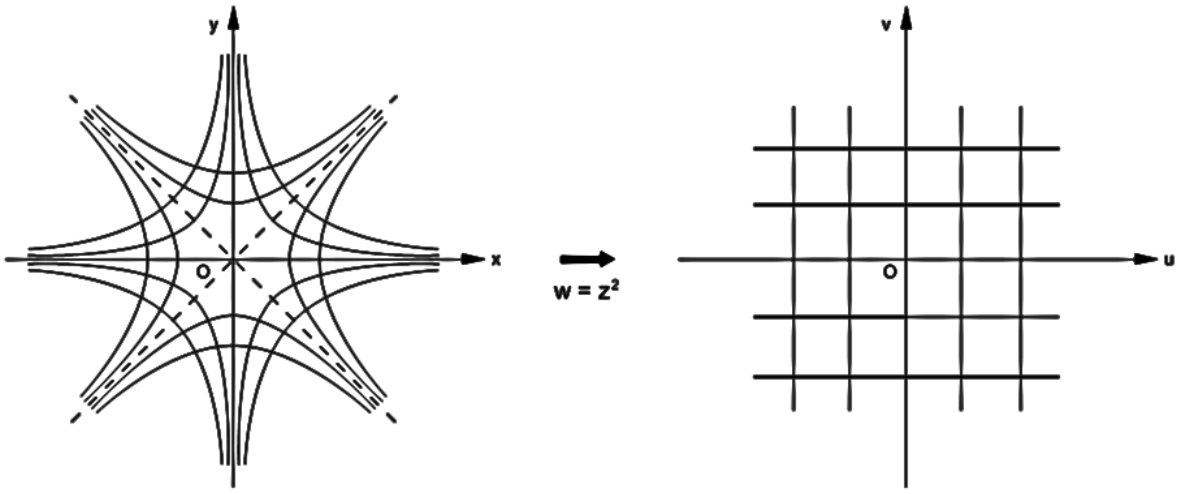



**Fig. 13.1.** Mapeo por la función $w = z^2$.

Uno de los resultados más elegantes de la teoría de funciones, dice que la asignación efectuada por una función $w = f(z)$ es conforme (preservando direcciones) en todos los puntos $z$ donde tiene una derivada que no es cero. Esto significa que si dos curvas en el plano $z$ se cortan en un cierto ángulo (el ángulo entre sus líneas tangentes en el punto de intersección), sus curvas imagen en el plano $w$ se intersecan en el mismo ángulo, siempre $df(z)/dz$ existe y no es cero en el punto de intersección. Esto se ve claramente en el caso de $w = z^2$: las dos familias de hipérbolas, $x^2 - y^2 = cte.$ y $2xy = cte.$, son ortogonales cada hipérbola de una familia interseca cada hipérbola de la otra en un ángulo recto al igual que sus curvas de imagen, las líneas horizontales y verticales en el plano $w$.

El mapeo efectuado por la función $w = sen\, z$ puede ser explorado de una manera similar. Empezamos con líneas horizontales $y = c = cte.$ en el plano $z$. Ecuaciones (6) luego nos dicen que

$$\boldsymbol{u = sen\, x \cosh c, \quad v = \cos x\, senh\, c.} \qquad \textbf{(9)}$$

Las ecuaciones (9) pueden ser consideradas como un par de ecuaciones paramétricas que describen una curva en el plano $W$, siendo el parámetro $x$. Para obtener la ecuación rectangular de la curva, tenemos que eliminar x entre las dos ecuaciones. Podemos hacer esto dividiendo la primera ecuación por $cosh\, c$ y la segunda por $senh\, c$, elevando al cuadrado los resultados y sumando, en vista de la identidad $sen^2\, x + cos^2\, x = 1$ obtenemos

$$\boldsymbol{\frac{u^2}{cosh^2\, c} + \frac{v^2}{senh^2\, c} = 1.} \qquad \textbf{(10)}$$

Ecuación (10) es de la forma $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, que representa una elipse con centro en el origen de la plano $w$, eje semi-mayor $a = \cosh c$ y eje semi-menor $b = |senh\, c|$ (desde $cosh\, y$ es siempre mayor que $senh\, y$ como se deduce de las ecuaciones 4 el eje mayor es siempre a lo largo del eje $U$). Nótese, sin embargo, que lleva el par de líneas $y = \pm c$ para producir la elipse completa, la mitad superior correspondiente a $y = c$ (cuando $c > 0$), la mitad inferior a $y = -c$ (esto se puede ver mejor a partir de las ecuaciones paramétricas 9). De la geometría analítica sabemos que los dos focos de la elipse se encuentran en los puntos $(\pm f, 0)$ donde $f^2 = a^2 - b^2$. Pero $a^2 - b^2 = cosh^2 - senh^2\, c = 1$, por lo que tenemos $f = \pm 1$; para diferentes valores de c que por lo tanto, obtener una familia de elipses con un par de focos en común $(\pm 1,0)$, independientemente de $c$. Cuando $c \to 0$, $\cosh c \to 1$ y $\text{senh}\, c \to 0$, de manera que poco a poco los puntos degeneran en el segmento de línea $-1 \leq u \leq 1$ a lo largo del eje $u$. Estas características se muestran en la figura 13.2.

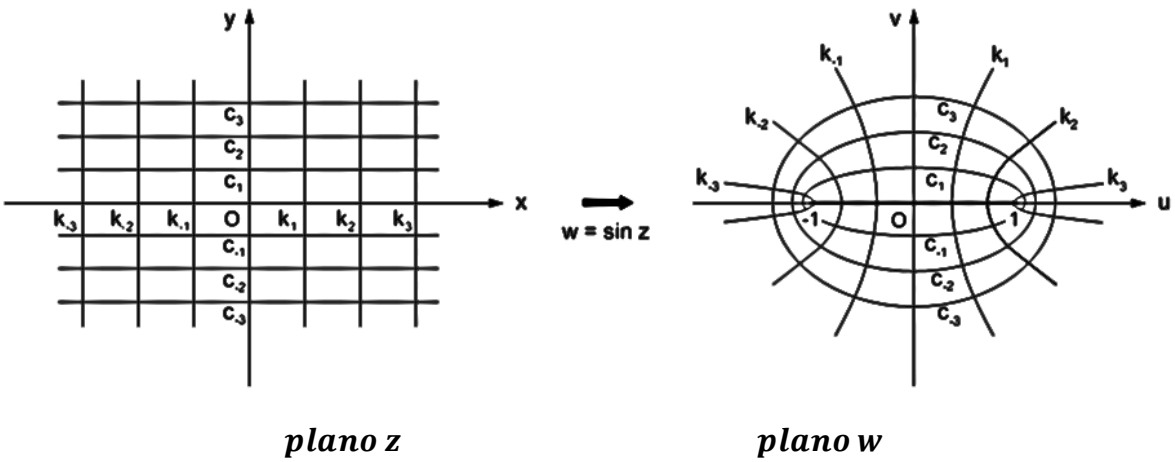



**Fig. 13.2.** Mapeo por la función $w = sen\ z$.

Consideremos a continuación las líneas verticales $x = k = cte.$ en el plano $z$.

Ecuación (9) nos dan

$$\boldsymbol{u = sen\ k \cosh y, \quad v = \cos k\ senh\ y.} \qquad \textbf{(11)}$$

Esta vez se puede eliminar el parámetro y dividiendo la primera ecuación por $cosh\ y$ y el segundo por $senh\ y$, cuadrando los resultados y restando; en vista que tenemos la identidad $cosh^2\ y - \ senh^2\ y = 1$, obtenemos

$$\frac{\boldsymbol{u^2}}{\boldsymbol{sen^2\ k}} - \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{cos^2\ k}} = \mathbf{1.} \qquad \textbf{(12)}$$

Ecuación (12) es de la forma $u^2/a^2 - \frac{v^2}{b^2} = 1$, cuya gráfica es una hipérbola con centro en el origen, eje semi-transversal $a = |sen\ k|$ y eje semi-conjugado $b = |cos\ k|$; sus asíntotas son el par de líneas $y = \pm[(\cos k)/(senk)]x = \pm(\cot k)x$. Al igual que con las elipses, toma el par de líneas $x = \pm k$ para producir toda la hipérbola, la rama derecha correspondiente a $x = k$ (cuando $k > 0$), la rama izquierda de $x = -k$. Los dos focos de la hipérbola se encuentran en $(\pm f, 0)$, donde ahora $f^2 = a^2 + b^2 = \ sen^2 k + \ cos^2\ k = 1$; cambiando el valor de k por lo tanto produce una familia de hipérbolas con un par de focos en común $(\pm 1, 0)$ (ver fig. 13.2). Como $k \to 0$ las hipérbolas se abren, y para $k = 0$ (correspondiente al eje X en el plano $z$) que degeneran en la línea $u = 0$ (el eje v en el plano $w$). Por otro lado, como $|k|$ aumenta las hipérbolas, degeneran en el par de rayos $u \geq 1$ y $u \leq -1$ cuando $k = \ \pm \pi/2$. También notamos de que cualquier aumento de $k$ por $\pi$ no cambia los valores de $sen^2 k$ o $cos^2\ k$ y por lo tanto produce la misma hipérbola, lo que, por supuesto, sólo demuestra que el mapeo no es de uno a uno, como ya sabemos de la periodicidad de $sen\ z$. Por último, las elipses y las hipérbolas forman familias ortogonales, como se desprende de la propiedad conforme de funciones con valores complejos.

Como un ejemplo más tenemos en cuenta la función $w = e^z$. En primer lugar, por supuesto, debemos definir lo que entendemos por $e^z$, así que vamos a proceder formalmente escribiendo $z = x + iy$ y actuar como si las reglas del álgebra de los números reales siguen siendo válidas:

$$\boldsymbol{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.}$$

Pero $e^{iy} = \cos y + isen\ y$, por lo que tenemos

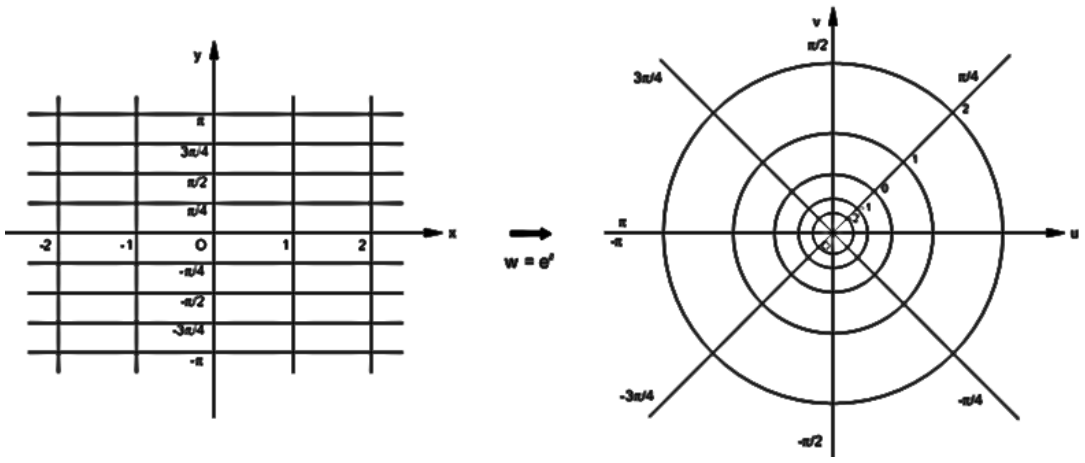
$$\boldsymbol{e^z = e^x(\cos y + isen\ y).} \qquad \textbf{(13)}$$

Ahora consideramos la ecuación (13) como la definición de $e^z$. Observamos, en primer lugar, que esto no es una función uno a uno: el aumento y por $2\pi$ no cambia el valor de $e^z$, por lo que tenemos $e^{z+2\pi i} = e^z$. En consecuencia, la función exponencial de valores complejos tiene un período imaginario $2\pi i$. Esto, por supuesto, está en marcado contraste con la función de valor real $e^x$.

Escribimos $w = e^z = u + iv$, la ecuación (13) implica que

$$\boldsymbol{u = e^x \cos y,} \qquad \boldsymbol{v = e^x \operatorname{sen} y.} \qquad \textbf{(14)}$$

Puesto que $y = c = cte.$ en estas ecuaciones y eliminando el parámetro $x$, tenemos $v = (\tan c)u$, la ecuación de un rayo de pendiente $\tan c$ que emana desde el origen del plano w; poniendo $x = k = cte.$ y eliminando $y$, obtenemos $u^2 + v^2 = e^{2k}$, lo que representa un círculo con centro en el origen y el radio $e^k$. Así, el sistema de coordenadas rectangulares del plano $z$ se asigna en una cuadrícula polar en el plano $w$, con los círculos espaciados de manera exponencial (fig. 13.3). Una vez más los dos sistemas de redes son ortogonales en todos lados.




***plano z*** ***plano w***

**Fig. 13.3.** Mapeo para la función $w = e^z$.

Podemos descubrir aquí una inesperada conexión con las proyecciones analizadas en el capítulo anterior. Para producir una cuadrícula polar en el plano $w$ con los círculos espaciados linealmente (en lugar de exponencial), debemos aumentar $k$ logarítmicamente, es decir, las líneas verticales en el plano $z$ deben estar separado como $ln\ k$. La función de valores complejos que logra esto es la inversa de $w = e^z$, esto es $w = ln\ z$. Este mapeo, cuando se aplica a la red polar de una proyección estereográfica, nos da nada menos que la red Mercator, excepto que las funciones de las líneas horizontales y verticales se invierten. Pero esta inversión puede ser corregida por una rotación $90^o$ del sistema de coordenadas, es decir, una multiplicación por $i$. Por lo tanto, puede comenzar con el globo y proyectarla estereográficamente sobre el plano $z$, y luego mapear este plano en el plano $w$ por medio de la función $w = iln\ z$: el producto final es la proyección de Mercator. Y puesto que cada uno de los mapas de los componentes es conforme, por lo que será su producto. Como se recuerda, fue precisamente este objetivo de producir una conformación (dirección de preservación) mapa del mundo sobre la base de una cuadrícula rectangular que llevó a su famosa proyección Mercator.

# CAPÍTULO 14.

# SUGERENCIAS DIDÁCTICAS.

**En este capítulo haremos algunas reflexiones y sugerencia sobre la enseñanza de la trigonometría, que se incluye en los programas oficiales de SEP en tercero de secundaria y en segundo año de Bachillerato**

Partimos del hecho de que la trigonometría es una materia un tanto árida para muchos alumnos cuando se sigue una clase con una dinámica tradicional: el maestro quiere explicar todo en el pizarrón. También compartimos el problema de que casi cualquier tema de matemáticas es difícil de aprender por parte de los estudiantes.

Por ello es importante tener opciones para implementar diversas actividades, concretamente conocer la matemática y su historia es importante pues permite dar otra visión de la misma. En este caso, usando la historia podemos combatir la idea de muchos alumnos de que la matemática es aburrida, no sirve para nada, parece no tener relación con otras materias. La historia de la trigonometría nos muestra que tiene un origen en una necesidad teórica o practica, estudiar el movimiento de las estrellas, los navegantes antiguos se guiaban por las estrellas. Para unos es "teórico", pero para los navegantes los conocimientos astronómicos y su herramienta (la trigonometría) resultan esenciales para navegar, así para ellos era un asunto esencial para "llegar a bueno puerto".

## 14.1. Matemáticas y comprensión.

**Tomamos algunas ideas de Araya, et al (**2007**) en su artículo "Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis". Entre otras cosas rescatamos el** concepto de "comprensión". Son diversos los esfuerzos por dar respuesta a la pregunta ¿qué es la comprensión?, ¿qué significa comprensión de un objeto matemático dado?, ¿es posible distinguir grados de comprensión?, y si así lo fuera, ¿cuáles son algunas de estas clasificaciones?

Si alguien sólo repite cuando se le enseña, no sabemos si el individuo comprende. Pero si la persona sabe dónde aplicar y dónde no aplicar los conocimientos y puede hacerlo en situaciones nuevas, entonces comprende.

Hay tres categorías de comprensión según los desempeños de la persona (Araya):

• Comprensión Instrumental: es posible aplicar las reglas para cada caso específico, sin necesidad de saber las razones de su funcionamiento.

• Comprensión Relacional: se sabe qué hacer en cada paso concreto (instrumental); pero además pueden relacionarse estos procedimientos con conocimientos más generales.

• Comprensión Integral: puede reconstruirse el camino que llevó a un resultado, conociendo las justificaciones de los pasos que se siguen.

Como bien lo afirma Perkins, la comprensión se da por niveles, La noción de comprensión puede ser abordada empleando distintos y diversos modelos, los cuales establecen las etapas necesarias para la construcción del conocimiento.

Entendemos la comprensión como la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. La comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" Perkins, (1999, p. 70.)

Hay una explicación de los niveles de comprnesion partir de la clasificación propuesta por la Taxonomía SOLO (Biggs 2006) para evaluar la calidad de lo que aprende el estudiante. Esta taxonomía clasifica y evalúa el resultado de una tarea de aprendizaje en función de su organización estructural considerando el proceso de proceso de progreso **de la incompetencia a la competencia. Se denomina SOLO por sus siglas en inglés.**

| NIVEL | CONCEPTO |
|---|---|
| Preestructural | El alumno no ha captado la cuestión y en sus respuestas usa la tautología para esconder su falta de comprensión.<br>La tarea no es abordada adecuadamente. El estudiante no comprende el punto. |
| Uniestructural | La respuesta capta sólo una parte de la cuestión o tarea. Uno o unos pocos aspectos de la tarea son logrados con trabajo y usados (comprensión como nominal). |
| Multiestructural | El estudiante muestra que posee conocimiento y quizá la compresión de muchos hechos, pero no muestra evidencias suficientes de la comprensión del conjunto. Se han aprendido diversos aspectos de la tarea pero son tratados separadamente (comprensión como conocimiento aproximado). |
| Relacional | Todas las partes relevantes e importantes de la tarea, tópico o contenido, se hallan bien orientadas y se conjugan en un conjunto coherente. Según Biggs es en este punto cuando la "compresión" se usa adecuadamente.<br>Los componentes son integrados en un todo coherente. Cada una de las partes contribuye al significado general (comprensión como apreciación de relaciones). |

| | |
|---|---|
| Abstracto ampliado | La respuesta del estudiante va más allá de lo que se ha trabajado. Muestra un nivel de reconceptualización del conjunto en un nivel de coherencia de nivel superior.<br>El conjunto integrado a un nivel relacional es reconceptualizando en un más alto nivel de abstración, que capacita para una generalización a nuevos temas o áreas, o es vuelto reflexivamente a uno mismo (comprensión hasta el nivel de transferencia o como implicando metacognición). |

Diremos que un estudiante muestra una determinada comprensión de una noción matemática según las secuencias de actos (explicar, justificar, extrapolar, vincular, aplicar). Asumimos que la "apropiación de un significado", y por lo tanto la comprensión de la noción asociada, es producto de un proceso dinámico, progresivo y no lineal, que se desarrolla en los distintos dominios de experiencia y contextos.

Nivel Instrumental: Corresponde a un primer nivel de comprensión del objeto o tema, visto como una herramienta que le permite resolver problemas. Una persona alcanza este nivel si es capaz de utilizar conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas o algoritmos. Logra resolver el problema (llega a la respuesta esperada) sin necesidad de saber las razones de los elementos empleados en el proceso.

Nivel Relacional: Puede vincular los contenidos matemáticos con otra área dentro y fuera de las matemáticas. En este nivel no basta con saber cuál método funciona, sino que es necesario adaptarlos a los nuevos problemas.

Nivel Formal: La persona es capaz de reconstruir el camino que lo llevó a un resultado ofreciendo explicaciones de sus razonamientos, así como formas de probar las afirmaciones y ofrecer evidencias que justifiquen las fórmulas o resultados que usó. En este nivel la persona es crítica, la construcción del conocimiento se ve como una tarea compleja y puede comunicar lo que se sabe de manera creativa a otros.

## 14.2. Pedagogía de la comprensión.

David Perkins en su libro "La Escuela inteligente", explica claramente lo que considera una pedagogía de la comprensión. Entre otras cosas afirma que *la comprensión es una meta bastante misteriosa de la educación. Con frecuencia me he sentido defraudado por las declaraciones de objetivos que figuran en los planes de estudio o en los diseños de currículos y en* ODV TXH VH DILUPD ³ORV DOXPQRV FRPSUHQG *podemos saber si un alumno ha alcanzado ese valioso estado de comprensión?*

*El misterio se reduce a esto: el conocimiento es un estado de posesión, de modo que es fácil averiguar si los alumnos tienen o no un determinado conocimiento. La comprensión* HQ FDPELR YD PiV DOOi GH OD SRVHVLyQ /D SHUVRQD T OD LQIRUPDFLyQ VXPLQLVWUDGD´

Propone las siguientes actividades de comprensión.

- *La explicación.*
- *La ejemplificación.*
- *La justificación.*
- *Comparación y contraste.*
- *La contextualización.*
- *La generalización.*

Afirma: /D FRPSUHQVLyQ QR HV DOJR ³TXH VH GD R QR VI Finalmente indica la meta de la pedagogía de la comprensión: *capacitar a los alumnos para que realicen una variedad de actividades de comprensión vinculadas con el contenido que están aprendiendo.*

Concretamente: ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos de secundaria a comprender los primeros elementos de la trigonometría? es decir, que no sólo repitan de memoria las definiciones, pero que no pueden resolver problemas con enunciado. Debemos observar que con mucha frecuencia los libros de texto, son parte del problema, no de la solución al plantear situaciones poco accesibles a los alumnos (medir un río, hallar la altura de un acantilado, calcular la altura de un faro visto desde un barco). Algunos profesores opinan que esto se debe a que los alumnos no saben leer, olvidando que no cualquier situación es significativa para los jóvenes.

Veamos un ejemplo (Araya et al) donde la situación no es común para la mayoría de losa alumnos y esto repercute en su proceso de solución, en siguiente enunciado en nuestra opinión es muy rebuscado y es el PRIMER OBSTACULO para la comprensión de la trigonometría.

*La sobrecargo, pregunta:*

*- ¿Alguno de ustedes sabe matemática?*

*Usted se levanta para ver qué se le ofrece, y le dice:*

*- Tal vez yo la puedo ayudar, ¿cuál es el problema?*

*- Estamos volando actualmente a una altitud de aproximadamente 10 kilómetros y experimentamos dificultades técnicas ±sobrecargo.*

*Usted comprende que se necesita su ayuda, así que toma su calculadora y camina hacia el frente del avión para ofrecer su colaboración al piloto, que parece un poco enfermo y desorientado.*

*- Me estoy sintiendo muy mal y no puedo pensar ±el piloto*

*- ¿Qué puedo hacer para ayudar? ±pregunta usted*

*- Necesito deducir cuándo debe comenzar el descenso. ¿Qué tan lejos del aeropuerto debe de estar el avión, si quiero descender con un ángulo de 3°? -piloto-.*

*El piloto se observa peor cada segundo transcurrido.*

*- ¡Eso es fácil! ±exclama usted. Veamos. Estamos a una altitud de 10 km. y queremos aterrizar en la pista con un ángulo de 3°.*

*¿Qué tan lejos del aeropuerto le dijo usted al piloto que empezara el descenso?*

Es importante que el maestro inicie el difícil camino hacia la comprensión de la resolución de triángulos usando trigonometría, usando situaciones cotidianas y creíbles para los alumnos, si la situación es poco común o usa términos "extraños" para los alumnos, ellos no verán como fácilmente como se aplica la trigometría.

## 14.3. ¿Los libros de texto de trigonometría ayudan a comprensión?

En los siguientes libros, no hay capitulo de motivación, referencias históricas y ejemplos de aplicaciones interesantes que motiven al estudiante. Por lo cual los problemas a resolver, resultan difíciles para el alumno, les cuesta mucho trabajo comprender la situación, y por lo tanto no aciertan a representar la situación, con un croquis, que en estos casos resulta necesario para que quede claro el ángulo o lado que se pide hallar.

**Contenido del libro llamado Trigonometría Plana. Nathan O. Niles.**

**Capítulo.**

1.- Conceptos fundamentales.

2.- Funciones trigonométricas (ángulos).

3.- El triangulo rectángulo.

4.- Funciones trigonométricas (números reales).

5.- Identidades fundamentales.

6.- Variaciones y graficas de las funciones trigonométricas.

7.- Funciones trigonométricas (argumentos compuestos).

8.- Logaritmos.

9.- Triángulos oblicuángulos.

10.- Funciones trigonométricas inversas.

11.- Ecuaciones trigonométricas.

12.- Vectores y números complejos.

Otro libro también revisado, fue Trigonometría Plana Rice Bernard J., Strange Jerry D. tercera reimpresión 1987 CECESA México, traducción del ingles 1081.

Contenido

**Capítulo**

1.- Algunos conceptos fundamentales

1.1. El sistema de coordenadas rectangulares

1.2. Funciones

1.3. Números aproximados

1.4. Ángulos

1.5. Medida en radianes.

1.6. Algunos hechos acerca de ángulos.

2.- Trigonometría de triángulos rectángulos.

2.1. Definiciones de las funciones trigonométricas.

2.2. Relaciones fundamentales.

2.3. Los valores de las funciones trigonométricas.

2.4. Razones trigonométricas con una calculadora.

2.5. Interpolación.

2.6. Solución de triángulos rectángulos.

2.7. Componentes de un vector.

2.8. Aplicaciones a la navegación.

2.9. Aplicaciones a las ciencias relacionadas con el espacio.

3.- Funciones trigonométricas para cualquier ángulo.

Se observa claramente en ambos libros que no hay un capítulo de motivación histórica o de otro tipo para los alumnos y después se pretende que hagan problemas de aplicación, (que son ampliamente conocidos), es claro que se saltan el primer nivel de comprensión. Y los maestros normalmente se apoyan en el texto, por lo cual esta propuesta resulta de gran utilidad (ver fotografías).

## 14.4. EXPERIENCIAS.

**Ejercicio aplicado a los jóvenes de 3º de secundaria.**

*Primera actividad.*

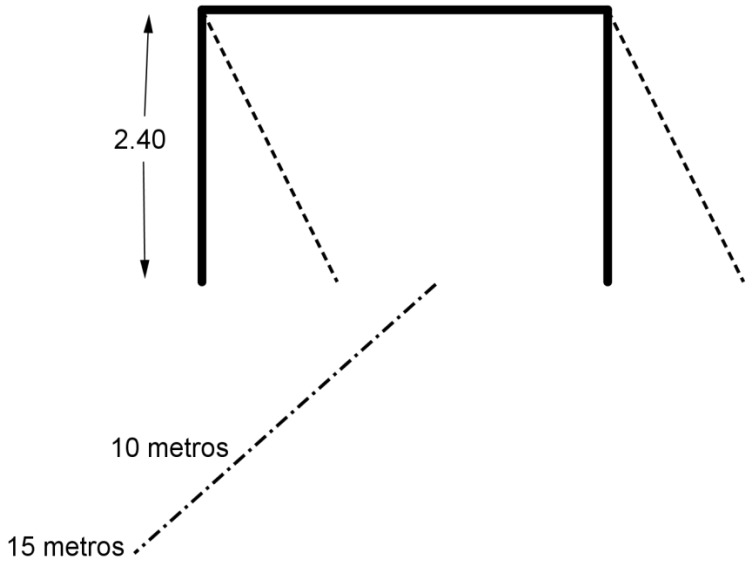
Dos de los integrantes del equipo de futbol practican mucho los tiros a gol desde diferentes distancias y ángulos de tiro. Si la portería tiene una altura de 2.40 m. y un jugador tira a gol, desde 10 metros y otro desde 15 metros. ¿Los jugadores tienen el mismo ángulo vertical de tiro? ó ¿Cual es el que tiene mayor ángulo vertical?

Explica tu respuesta, puedes hacer un dibujo.

¿A que distancia tienes mayor ángulo vertical de tiro para meter gol, a 10 metros ó 15 metros?

¿Como lo calcularías?, ¿Que función trigonométrica aplicarías? (seno, coseno o tangente).

Nota: el ángulo horizontal se mediría del balón a los postes, el ángulo vertical se mide desde el balón en el suelo hasta el larguero o poste horizontal.



Aclaración: en forma verbal se explica a los niños; Que el ángulo es del balón al "travesaño", poste horizontal, por que hay otro ángulo, del balón a los "postes verticales".

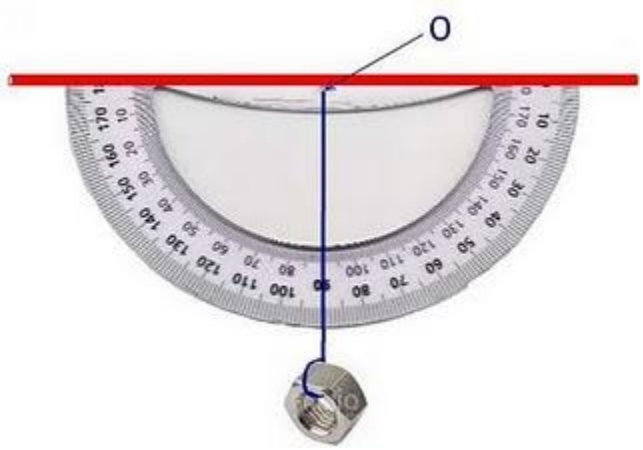
La respuesta de los niños fue más rápida y acertada, dijeron que el que esta más cerca de la portería esta mejor centrado, es decir desde los 10 m. más fácil tirar y no fallar, que en los 15 m. el ángulo que se forma es más grande. Las niñas tuvieron dudas y en general no contestaron claramente. Nuestra hipótesis era que las niñas por su falta de práctica les iban a resultar un tanto confusa la pregunta, se confirmo, pero no tuvimos oportunidad de aplicar a un mayor número de niños y de analizar sus respuestas para obtener un porcentaje de aciertos de niños y compararlo con el de niñas.

En el caso de los niños nuestra hipótesis era de que en un contexto más familiar para ellos, por ser el futbol una actividad común, ellos acertarían a responder que a mayor distancia es menor "el ángulo de disparo".

La sugerencia didáctica es que el profesor plante esta situación, y que después de una discusión grupal, se pase al cálculo del ángulo.

*Segunda actividad*.

**Teodolito o astrolabio sencillo** (pág. 68 Las matemáticas en la vida del hombre). Sirve para medir ángulos a distancia.

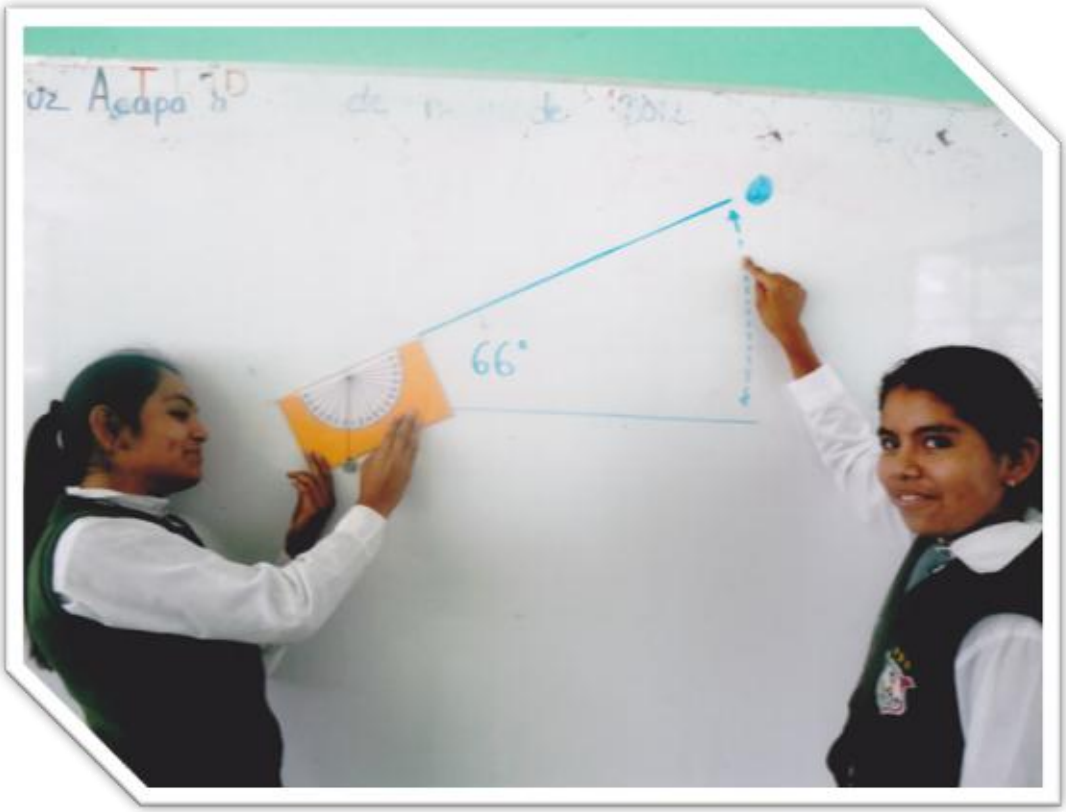



**Astrolabio de metal**

Fabricado por los alumnos.

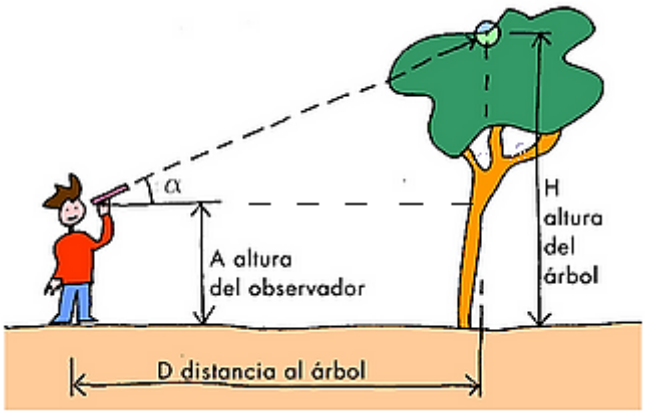
Algunas sugerencias son más adecuadas para secundaria que para bachillerato, en este caso trabajamos con alumnos de 3º. De secundaria.

Para los niños de secundaria todavía no queda claro que los ángulos son un dato, ya que enseguida recurren al uso del teorema de Pitágoras. Es decir, en este caso no resulta adecuado hablar de las funciones trigonométricas.




Estas alumnas explican como se utiliza su astrolabio para medir su ángulo.

Se mide el  ángulo y las distancia hacia la base de la hasta bandera  después aplicaron las funciones trigonométricas




Mi estimado profesor Pablo Zeleny.

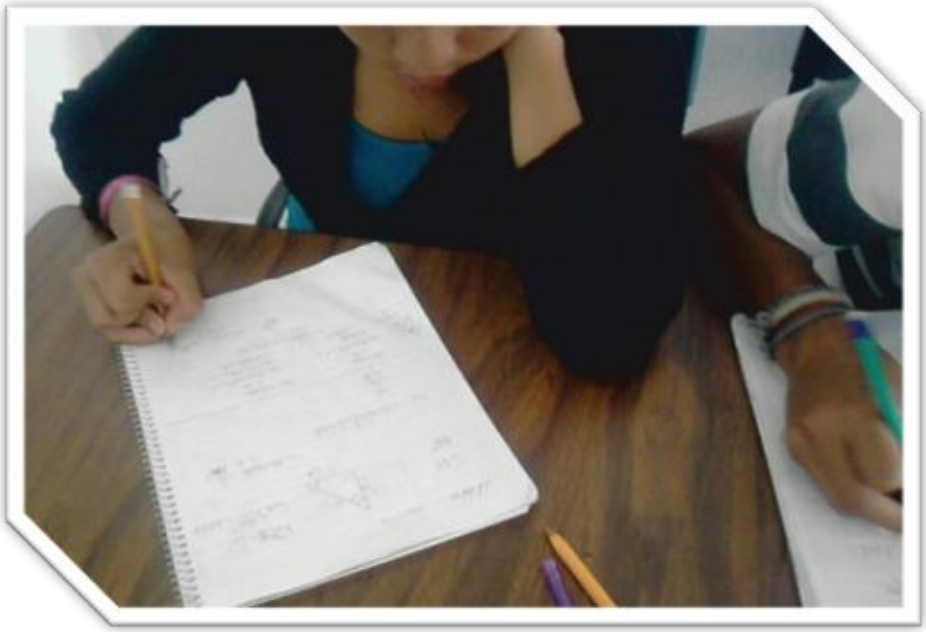
Los alumnos de estas fotografías son de segundo grado de secundaria de la comunidad de Xaltipanapa, municipio de Tepeyahualco, Puebla, de la Escuela Telesecundaria Federal Cantona de la zona escolar 14 de Libres del sector de 3 de Tepeaca su profesor es René Xalteno Sánchez.

Un comentario del Maestro Rene Xaltenco.

Los alumnos quedaron muy satisfechos en ver las matemáticas desde otro punto de vista, como se enfocó, les gusto prácticamente todo lo que se abordó sobre todo recortar y pegar, el juego de futbol les ayudó mucho en el cálculo mental en la prueba de Enlace. Le estoy muy agradecido y ahora en mis planes del siguiente ciclo escolar tengo que crear formas creativas de la enseñanza o más bien para el aprendizaje de mis alumnos, mis compañeros de trabajo se percataron en la forma diferente de enseñar matemáticas y me piden apoyo.

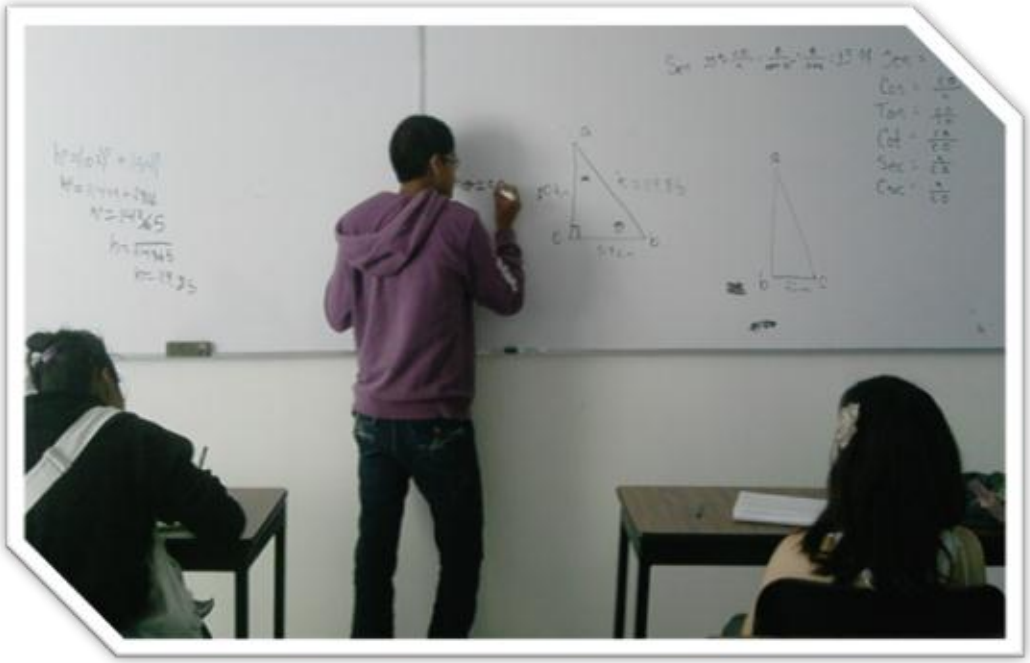
Sugerencias para enseñar en secundaria; es recomendable no limitarse a trabajar con lápiz y papel encerrados en el salón; podemos medir ángulos saliendo al patio y medir sombras; con ello recuperamos algo de la historia de la trigonometría y los niños se relacionan con el entorno físico como parte esencial para aprender matemáticas, e identifican los puntos cardinales. Se proponen algunas actividades concretas. ¡Además de que se le tiene entretenidos un buen rato!

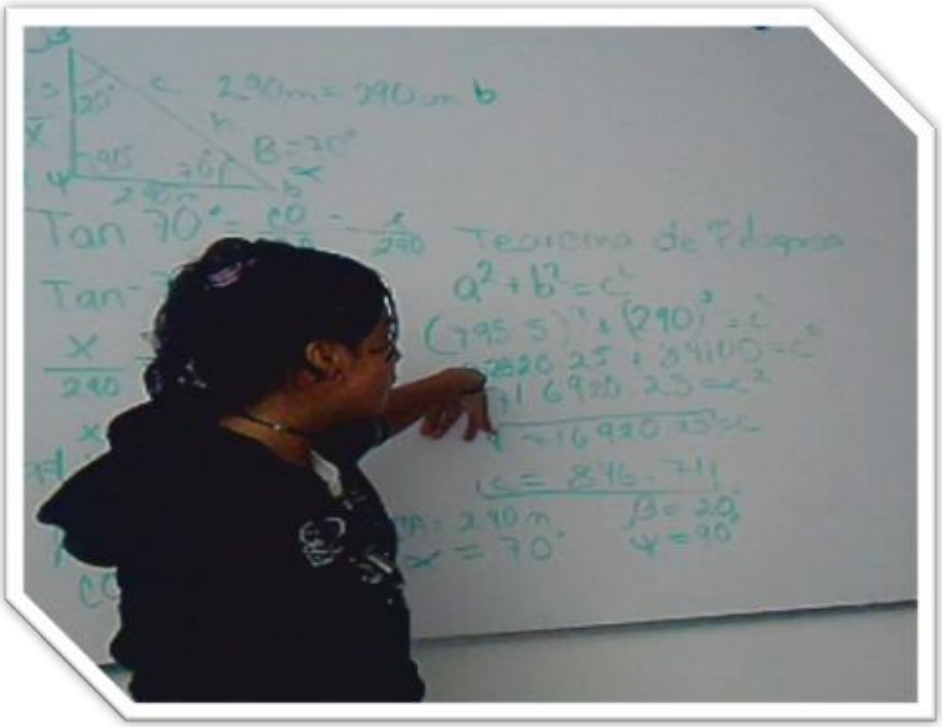
Las siguientes fotos muestran el trabajo en el salón de clase de los alumnos de la secundaria técnica No. 1 después de haber medido sus ángulos y como resuelven algunos ejercicios.



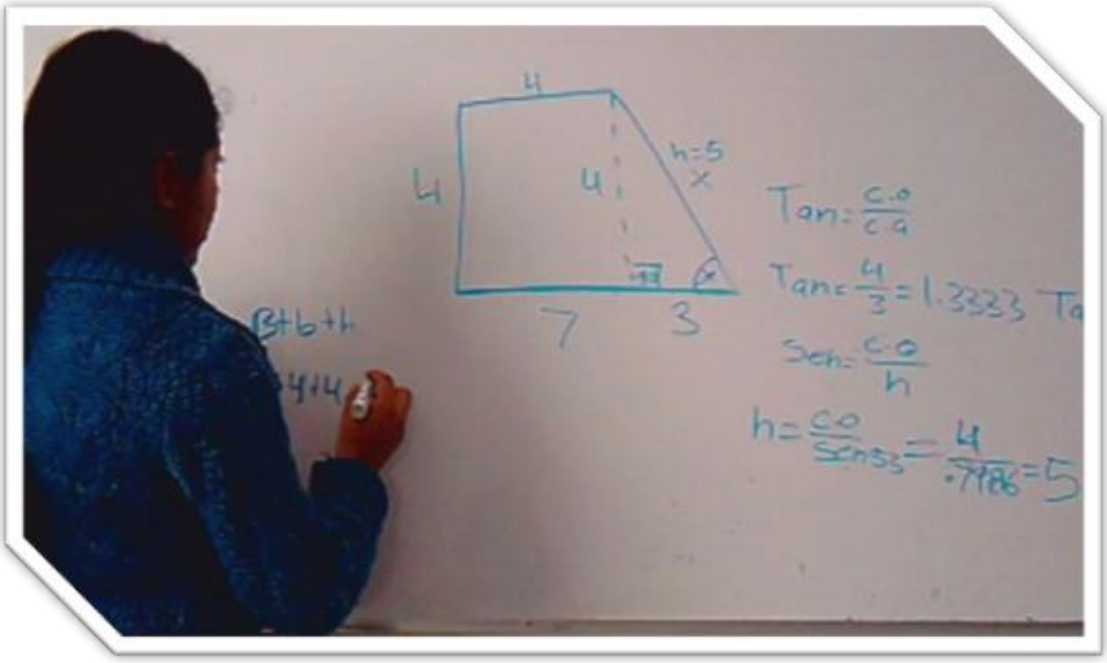
Cálculo de los lados y los ángulos con el apoyo de la función coseno.

Es conveniente sacar a los niños para medir cosas reales con respecto a su entorno y luego realizar operaciones en el salón de clases.

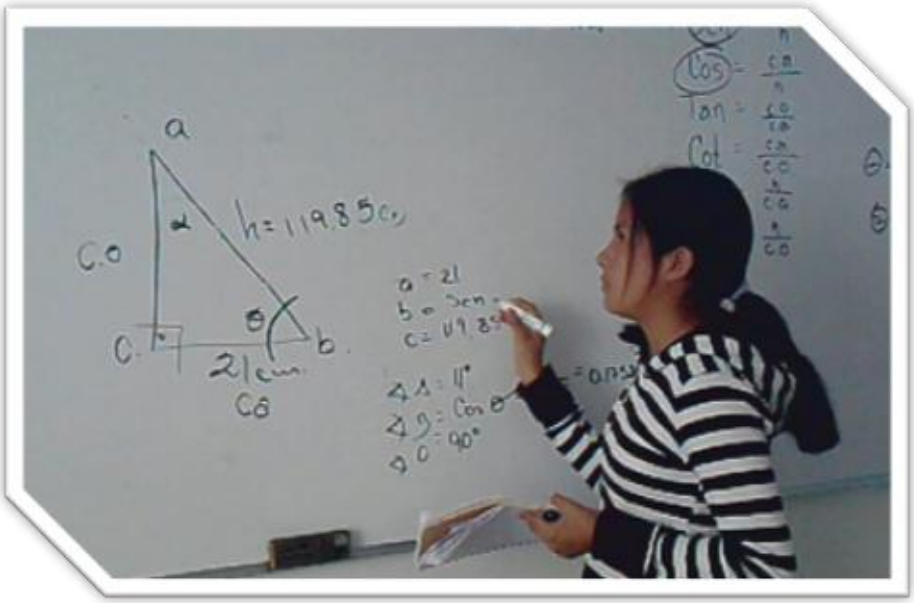





Utilizan las funciones seno, coseno y tangente para calcular los lados y ángulos de un triangulo, aunque para el caso especial de triángulos rectángulos se utiliza generalmente el Teorema de Pitágoras (cuando ya se conocen 2 lados).



A partir de esta actividad, le podemos explicar al alumno lo que es una función trigonométrica, cambiando el ángulo con la horizontal y midiendo los catetos, y es totalmente diferente hacer la actividad en un libro o libreta, que fuera del salón.



Sen =
Cos =
Tan =
Cot =
Sec =
Csc =
a
b
c

# CONCLUSIONES.

No es conveniente limitarse sólo a las actividades del libro, ya que con la experiencia obtenida con los niños, a partir de una actividad donde ellos miden longitudes y calculan los ángulos con las funciones trigonométricas, calculan el resto de los elementos, en objetos concretos (transportador y flexómetro). Además también se realizaron actividades con un palo de escoba o una escalera para formar triángulos con la pared y el suelo, se concluye que en su aprendizaje se les facilita y fluye mucho más rápido con esos recursos.

Con nuestra propuesta se espera que el alumno mejore en su comprensión de la resolución de triángulos, aplicando las funciones seno coseno y tangente.

La comprensión se debe cimentar en una serie de actividades concretas, de otra manera el alumno repite sólo de memoria, las definiciones e intenta imitar la resolución de los ejercicios.

La historia nos muestra una forma diferente de demostrar algunos teoremas conocidos por la el seno de una suma de ángulos que es diferente a la que encuentra en los textos, como lo que mencionamos en el capítulo 5,así las "fórmulas trigonométricas" salen de manera natural en el circulo, a partir del teorema del Ptolomeo.

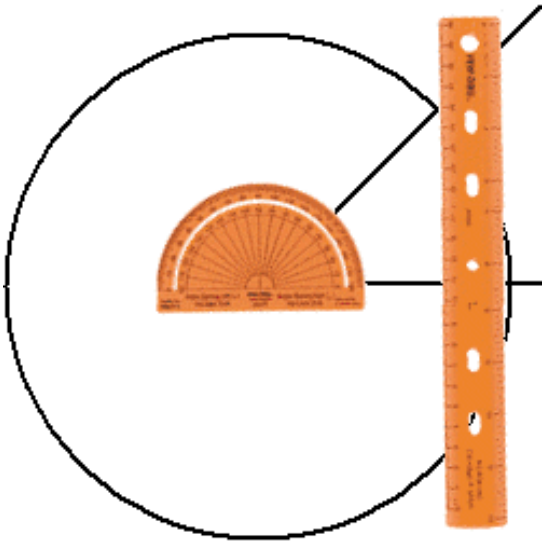
Es importante diversificar las estrategias de enseñanza, sólo de esta manera lograremos una mejor comprensión por parte de los alumnos, ya que la comprensión no se logra en un poco tiempo, y no hay una sola forma de aprender.

La maestra Laura Xochicale Ortega de la secundaria técnica No. 1 implemento algunas actividades con sus alumnos de tercero, a sugerencia nuestra, concretamente dedico un poco más de tiempo al tema, del que viene marcado y pudo observar algunas reacciones de sus alumnos: de las tres funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, los chicos mostraron mayor facilidad para entender la tangente al relacionarla con la pendiente de una recta (rampa o escalera), ellos preguntaban ¿que es el seno, coseno? Al no poderla referir a una situación más concreta como la pendiente de una recta, les resulta un tanto misteriosa y sobre todo cuando se da el valor de $sen\ x$ y $cos\ x$ y se debe hallar $x$, aplicando su calculadora, es decir tenían la indicación de usar la tecla de "función inversa". A la maestra Laura se lo proporciono copia del libro de Eli Maor y tuvo el tino de introducir otras actividades y o temas relacionados con la trigonometría, como la lectura de cartas de navegación, donde el rumbo de la embarcación se indica 30 grados norte, etc. Por lo tanto a sus alumnos no les resultan tan extraños los enunciados de problemas donde se debe aplicar funciones trigonométricas para hallar lados de un triangulo. Consiguió la ayuda de una de sus alumnas que le presto un aparato para medir ángulos que su papá usa en el trabajo.

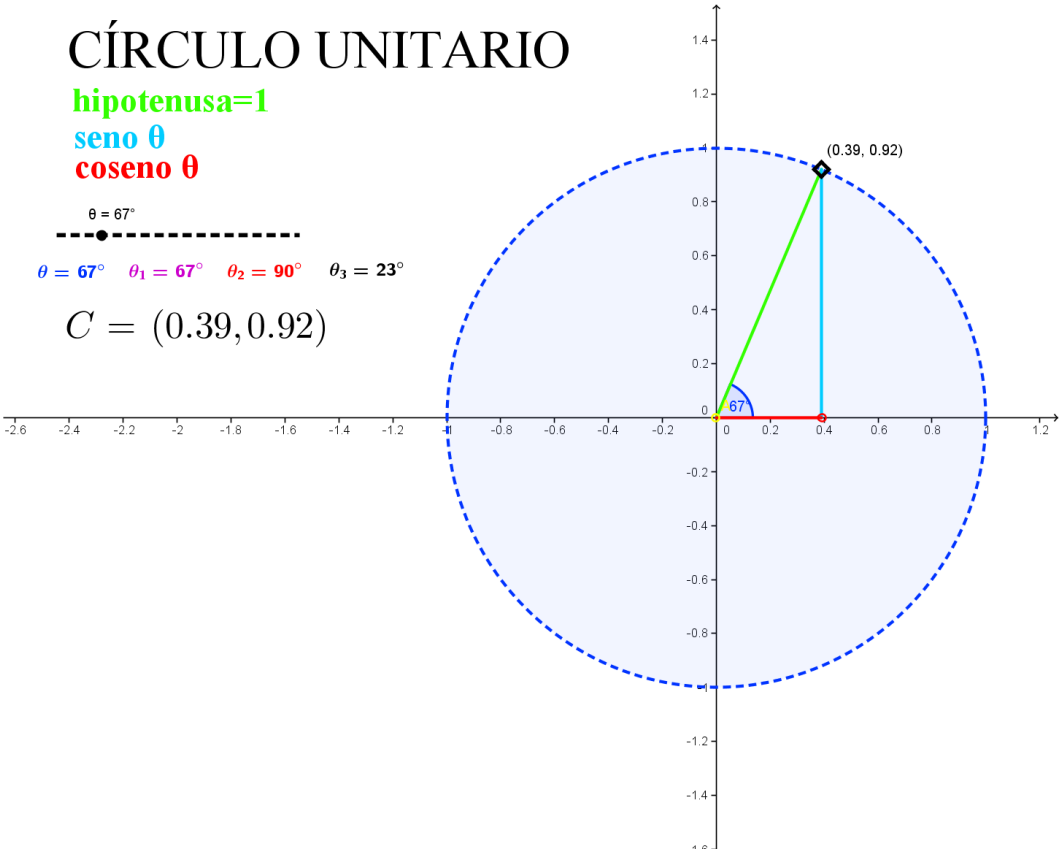
Un trabajo en un plano más concreto, con varias actividades, es un buen inicio en el largo camino hacia la comprensión.

Imitando a Eratóstenes, en algunas escuelas han intentado medir la Tierra conociendo la distancia entre dos ciudades y comparando la sombra de un objeto prefijado, este proyecto puede hacerse entre personas que vivan en dos ciudades diferentes y que compartan datos por internet. Esto se ilustra con las dos fotografías al inicio de este trabajo.

Con este instrumento se midieron ángulos de rampas y la inclinación del edificio 111-A FCFM



Con esta actividad se espera que los alumnos tengan una idea del círculo trigonométrico.




Hacer dibujo usando dos puntos exteriores al círculo, la razón es la misma, la idea es que con el círculo unitario simplifico el trabajo, porque la hipótesis es uno.

Y poco a poco llevarlo a la grafica de $y = senx$ y verlo como función, ayuda la animación en geogebra.

**Para hacer uso didáctico de la historia abordada en este trabajo, podemos usar las sugerencias de Fauvel de la siguiente manera.**

- Ayuda a incrementar la motivación para el aprendizaje, (capítulo 1 ángulos y cuerdas).
- Da a la matemática una cara humana, (Historia de los Cassini capítulo 4)
- Ayuda a desarrollar una visión multicultural de las matemáticas, (analizado en el capítulo 3).
- Muestra a los alumnos como los conceptos han tenido un desarrollo que ayuda a su comprensión, (visto en el capitulo 5 ley de senos 5.7)
- Cambia la percepción de los alumnos de las matemáticas.
- Comparando técnicas modernas y antiguas establece el valor de las técnicas modernas.
- Los obstáculos del pasado ayudan a explicar por qué los alumnos de hoy encuentran dificultades, (visto en capítulo 8 las paradojas de Zenón y las series).
- Ayuda a explicar el rol de las matemáticas en la sociedad, (capítulo 9 y 10).
- Proporciona oportunidades para investigar, (capítulo12 y 13 el paraíso de los cartógrafos) Se le deja al alumno investigar la historia de los mapas y sistemas de navegación, es decir saber leer cartas náuticas, actualmente, sistema GPS.

# Bibliografía.


[1] Abetti G. (1956). Historia de la astronomía. Fondo de Cultura Económica, Colección Breviarios No. 118, México.

[2] Araya C. A., Monge S. A., Morales Q. C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas. Revista Electrónica publicada por el Instituto de Investigación en Educación, Universidad de Costa Rica ISSN 1409-4703, Volumen 7, Número 2.

[3] Biggs J. (2006). Calidad del aprendizaje universitario, 2ª. ed. Narcea S. A.,España.

[4] Boyer C., Wiley J. (1986). Historia de las matemáticas. Alianza editorial España.

[5] Clark O. E. J. (2006). Joyas de la cartografía. Impreso en Thailand.

[6] Fauvel J. (1991). For The Learning of Mathematics. FLM Publishing Association,Vol. 11, No. 2.

[7] Ferris T. (1997). La aventura del universo. Grijalbo Mondadori., España.

[8] Hogben L. (1956). La matemática en la vida del hombre., Compañía Editorial Continental S. A., México, D. F.

[9] Kline M. (1999). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días, tomo 1, Alianza editorial, España.

[10] Koestler A. (1986). Los Sonambulos (I).Salvat Editores S. A. Barcelona.

[11] Kuhn S. T. (1994). La revolución copernicana- La astronomía Planetaria en el desarrollo del pensamiento occidental. Planeta- Agostini, España.

[12] Lewis H. G. A. (1996). Algebra y Trigonometría con geometría Analítica, Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., Naucalpan de Juárez, Edo. De México.

[13] Maor, E. (1998). Trigonometric delights. Princeton University Press, USA.

[14] Marsden E. J., Hoffman J. M. (1996), Análisis Básico de Variable Compleja, Trillas, México, D. F.

[15] Marsden E. J., Tromba J. A. (2004). Cálculo Vectorial 5ª. Edición, Pearson Educación, S. A., España.

[16] Nahin J. P. (2008). Esto no es real. La historia de i. Coedición: CONACULTA, Dirección General de Publicaciones Librarία, S.A de C. V., México, D. F.

[17] Niles O. N. (1988). Trigonometría Plana. Limusa, S. A de C. V., México D. F.

[18] Perkins D. (2000). La escuela inteligente, Gedisa, S. A., México, D. F. Sep/Gedisa.

[19] Sánchez S. F. (2007). Matemáticas a partir de la solución de problemas. Fernández editores, México.

[20] Sozio G. (1964). Revista electrónica Parábola Online a mathematics magazine for secondary schools, The University New South Wales Sydney Australia.

[21] Wilson A. M. (1995). The Infinite in the Finite. Oxford University Press Inc., New York.