Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Ejemplos de Espacios Pseudocompactos

Tesis

Que para obtener el Título de
Licenciado en Matemáticas

Presenta
Rodrigo Hidalgo Linares

Director de Tesis
Dr. Oleg Okunev

Puebla, Pue. Enero 2016

A mis padres...

Agradecimientos

> “Si una persona es perseverante, aunque sea dura de entendimiento se hará inteligente; y aunque sea débil se hará fuerte.”
>
> Leonardo Da Vinci.

Además de dar gracias a mis padres por todo lo que me han brindado, hoy quiero agradecer a dos personas en especial; la primera se ha ganado mis agradecimientos por que sin ella esto no sería posible: Claudia. Aunque ella no lo crea, el apoyo y cariño que me brindó fue parte fundamental en la realización de este trabajo. Además, es la única que me conoce y aún así me quiere.

La segunda persona a la que deseo agradecerle es al Dr. Oleg Okunev, por los conocimientos que compartió conmigo, pues las enseñanzas que me dió no sólo se restringieron a la elaboración de la presente tesis. Finalmente, y no menos importante, quiero agradecer a mis sinodales, al Dr. Iván Martínez Ruíz, al M. en C. Manuel Ibarra Contreras y al M. en C. Alfredo Sánchez Jiménez, por las observaciones que ayudaron a mejorar el presente trabajo.

Introducción

Para un espacio completamente regular X, $C(X)$ denotará al anillo de funciones continuas con valores en los reales y $C^*(X)$ denotará al anillo de funciones acotadas en $C(X)$. E. Čech (1937), en su artículo: "On bicompact spaces", introduce la notación βX para la clausura de un espacio X en un cubo de Tychonoff de tamaño apropiado. Čech usa el anillo $C^*(X)$ para construir el espacio βX. Además, demuestra que X se encuentra C^*-encajado en βX. Por otro lado, M. H. Stone (1937), en su artículo: "Aplications of the theory of Boolean rings to general topology", llegaría a resultados similares. Stone introduce una topología en el espacio $\mathcal{M}(X)$, de los ideales maximales del anillo $C^*(X)$, y demuestra que X está C^*-encajado en el espacio compacto $\mathcal{M}(X)$. Estos artículos son los pioneros en la investigación de los anillos de funciones continuas. Aunque, el primero en establecer un estudio formal de dichas estructuras es el de I. M. Gel'fand y A. N. Kolmogorov (1939) titulado: "On rings of continuous functions on topological spaces".

El estudio de los anillos de funciones continuas se basó principalmente en $C^*(X)$. Por lo cual, E. Hewitt (1948), tomando como punto de partida los trabajos de E. Čech y M. H. Stone, publicó su artículo: "Rings of real-valued continuous functions. I". La intención de Hewitt era generalizar los hechos conocidos para $C^*(X)$ a $C(X)$. El primer paso era demostrar que existen espacios que tienen funciones continuas real valuadas no acotadas, para esto agrupó a todos los espacios, cuyos anillos $C(X)$ y $C^*(X)$ fuesen idénticos, en una clase de espacios: Los espacios pseudocompactos.

En este texto centraremos nuestra atención en esta clase de espacios, pues como veremos, es una clase muy amplia de espacios topológicos que presenta ejemplos con características por demás interesantes.

El objetivo primordial de esta tesis es presentar ejemplos de espacios topológicos que no cumplen con las propiedades de tipo compacidad menos generales que la pseudocompacidad. De este modo se puedan observar las propiedades intermedias que bastan para que la pseudocompacidad sea equivalente con otras propiedades de tipo compacidad.

La estructura de esta tesis es muy simple, el primer capítulo contiene los preliminares, definiciones y proposiciones clave para el desarrollo del presente trabajo, el segundo capítulo contiene una caracterización de la pseudocompacidad y se desarrollan proposiciones clave relacionadas con la compacidad numerable. El tercer capítulo contiene todos nuestros ejemplos: ω_1 el primer ordinal no numerable, el Σ-producto de una familia de espacios topológicos, los espacios de Mrówka, una variación del ejemplo de Novák (para el producto de espacios numerablemente compactos) y finalmente el ejemplo de Shakhmatov. Concluimos con un Teorema de N. Noble: Todo espacio de Tychonoff se puede encajar como un subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto.

En todo el texto se denotará al conjunto potencia de un conjunto X por medio de $\mathcal{P}(X)$. Tomaremos a $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana, por lo tanto, a menos que se indique lo contrario, para $I = [0, 1]$ se tomará la topología heredada de $\mathbb{R}$. Finalmente, ω denota al primer ordinal numerable y $\aleph_0$ denota a su correspondiente número cardinal.

Índice general

Ejemplos de espacios Pseudocompactos

Rodrigo Hidalgo Linares

Enero 2016

Capítulo 1

Preliminares

Gran parte de la topología general se basa en la teoría de conjuntos, por lo cual, como requisito para leer y entender esta tesis, se pide que el lector recuerde las nociones básicas de dicha teoría.

El presente capítulo está diseñado para que el lector pueda revisar algunas definiciones y resultados básicos de la topología general. Cabe señalar que en este capítulo no se encontrarán demostraciones, pues las proposiciones son ampliamente conocidas y sus pruebas pueden encontrarse en los elementos de la bibliografía.

1.1. Definiciones básicas

Para iniciar, conviene saber lo que se entenderá por una topología y un espacio topológico.

Definición 1.1.1. Un *espacio topológico* es una pareja (X, τ) que consiste de un conjunto X y una colección τ, de subconjuntos de X, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

2. Si U_1, U_2 son elementos de τ, entonces, $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3. Si $\mathcal{A}$ es una familia de elementos de τ, entonces, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Tal colección es llamada una *topología* sobre X y sus elementos se dirán *conjuntos abiertos*. Los complementos de los conjuntos abiertos son llamados *conjuntos cerrados*.

En adición, si X es un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X que cumple la definición (1.1.1), entonces, el conjunto X es llamado un espacio y los elementos de X son llamados *puntos del espacio*.

Sea (X, τ) un espacio topológico. A partir de las *leyes de De Morgan* puede verse que la familia $\mathcal{C}$, de todos los subconjuntos cerrados de (X, τ), tiene las siguientes propiedades:

1. $X \in \mathcal{C}$ y $\emptyset \in \mathcal{C}$.

2. Si F_1, F_2 son elementos de $\mathcal{C}$, entonces, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.

3. Si $\mathcal{F}$ es una familia de elementos de $\mathcal{C}$, entonces, $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

Note que estas propiedades son duales a las dadas en la Definición (1.1.1).

Dado un conjunto X, siempre pueden definirse en él, al menos, dos topologías: *La topología discreta* $(\mathcal{P}(X))$ y *la topología indiscreta* $(\{\emptyset, X\})$. Si X tiene más de un elemento, entonces, dichas topologías son distintas. En general, dado un conjunto X (con más de un punto), tiene sentido hablar del *conjunto de todas las topologías que se pueden definir en* X, es decir, del conjunto:

$$\tau(X) = \{\tau \subset \mathcal{P}(X) : \tau \text{ es una topología en } X\}.$$

Consideremos a $\tau(X)$ con el orden parcial definido por la inclusión: $\tau_1 \preceq \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$; en este caso diremos que τ_2 *es más fina que* τ_1 o que τ_1 *es más gruesa que* τ_2.

Observación 1.1.2. Si τ_1 denota a la topología indiscreta y τ_2 denota a la topología discreta, entonces, para cualquier otra topología τ de X se tendrá que $\tau_1 \preceq \tau \preceq \tau_2$.

Definición 1.1.3. Sean (X, τ) un espacio topológico y x un punto de X. Diremos que $V \subset X$ es *una vecindad del punto* x, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \subset V$. A la colección de vecindades del punto x le llamamos *sistema de vecindades de* x *en* X y lo denotaremos por $\mathcal{V}(x)$.

Definición 1.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ y $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$. Decimos que (Y, τ_Y) es un *subespacio topológico* de (X, τ) y que τ_Y es la *topología inducida en* Y.

Dado un espacio topológico (X, τ) y A un subconjunto de X, el conjunto A no tiene por que ser abierto o cerrado, pero A siempre contendrá un conjunto abierto $(\emptyset)$ y siempre estará contenido en un conjunto cerrado (X). Este hecho motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.1.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. El *interior de* A *en* X es el conjunto $int(A) = \bigcup\{U \subset X : U \in \tau \text{ y } U \subset A\}$. La *clausura de* A *en* X es el conjunto $[A]_X = \bigcap\{F \subset X : X \setminus F \in \tau \text{ y } A \subset F\}$, cuando no exista confusión sobre el espacio en el cual se toma la clausura del conjunto A ésta simplemente se denotará por $\bar{A}$.

Definición 1.1.6. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es un *conjunto clopen*, si A es cerrado y abierto a la vez.

Note que en todo espacio topológico (X, τ), el conjunto vacío y el espacio X son conjuntos clopen.

Definición 1.1.7. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Diremos que A es un *conjunto de tipo* G_δ, si $A = \bigcap_{n \in \omega} U_n$, donde $U_n \in \tau$ para cada $n \in \omega$; y que B es un *conjunto de tipo* F_σ, si $B = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, donde $X \setminus F_n \in \tau$ para cada $n \in \omega$.

Definición 1.1.8. Dado un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$, diremos que $x \in X$ es un *punto de acumulación (punto límite) de* A, si para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. El conjunto formado por los puntos límite de A es el *conjunto derivado de* A y se denotará como A'. Un punto $y \in X$ es un *punto aislado de* A si $y \in A \setminus A'$.

Todos estos conceptos permiten definir otros subconjuntos (de suma importancia) en un espacio topológico (X, τ).

Definición 1.1.9. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que:

1. A es *denso en* X si $\bar{A} = X$.
2. A es *denso en sí mismo* si $A \subset A'$.
3. A es *denso en ninguna parte* si $int(\bar{A}) = \emptyset$.
4. A es *perfecto* si A es cerrado y denso en sí mismo.

1.1.1. Familias que generan una topología

En algunas ocasiones, y para aplicaciones practicas, no es necesario saber como es cada elemento de la topología de un conjunto X, pues como veremos, hay ciertas familias que determinan la topología de un conjunto y que son más manejables que toda la colección de abiertos. Esto motiva la definición de base y sub-base de una topología.

Definición 1.1.10. Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es llamada *una base para* τ, si todo subconjunto abierto de X puede representarse como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.

Proposición 1.1.11 ([6], Sección 1.1)**.** *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para τ. Entonces, $\mathcal{B}$ cumple las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y cada punto $x \in B_1 \cap B_2$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

2. *Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.*

Definición 1.1.12. Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{S} \subset \tau$ es llamada *una sub-base para* τ, si la familia $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ y $0 < |\mathcal{S}'| < \aleph_0\}$ es una base para τ.

Proposición 1.1.13 ([6], Proposición 1.2.1)**.** *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X con las propiedades de la Proposición (1.1.11). Sea τ la familia de todos los subconjuntos de X que se representan como la unión de subfamilias de $\mathcal{B}$, es decir, $U \in \tau$, si y sólo si, $U = \bigcup \mathcal{B}'$, para alguna subfamilia $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$. Entonces, la familia τ es una topología sobre el conjunto X que tiene como base a la familia $\mathcal{B}$. La topología τ es llamada la topología generada por la base $\mathcal{B}$.*

1.1.2. Funciones continuas y homeomorfismos

Un concepto de vital importancia en la topología es el de *función continua*. Dicho concepto nos permitirá establecer relaciones entre espacios topológicos.

Definición 1.1.14. Sean (X,τ), (Y,ϱ) espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Diremos que f *es continua en* x, si para cada $V \in \varrho$ tal que $f(x) \in V$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Se dice que f es una función continua si lo es en cada punto del espacio.

La definición anterior es equivalente a que la preimagen de conjuntos abiertos sea de nuevo un conjunto abierto. Puede demostrarse, sin mucho esfuerzo, que la continuidad de una función puede verificarse fijándose únicamente en los elementos de una base (sub-base) de la topología.

Definición 1.1.15. Sean (X, τ), (Y, ϱ) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si la función f es biyectiva y tanto f como su inversa son funciones continuas, entonces, f se dirá un *homeomorfismo*. En este caso, se dirá que los espacios (X, τ), (Y, ϱ) son *homeomorfos*.

Definición 1.1.16. Sean (X, τ), (Y, ϱ) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. f es un *encaje topológico*, si f es un homeomorfismo entre X y su imagen $f(X) \subset Y$.

Observación 1.1.17. Para cada espacio topológico (X, τ), *el mapeo identidad* $id_X : X \to X$ es un homeomorfismo; y si $Y \subset X$, la función inclusión $i_Y : Y \hookrightarrow X$ es un encaje.

Las propiedades de los homeomorfismos son numerosas. En la siguiente proposición enunciamos sólo algunas.

Proposición 1.1.18. *Sean* (X, τ), (Y, ϱ) *y* (Z, ν) *espacios topológicos,* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *homeomorfismos. Entonces:*

1. $f^{-1} : Y \to X$ *es un homeomorfismo.*

2. $g \circ f : X \to Z$ *es un homeomorfismo.*

3. *La relación de "ser espacios homeomorfos" es una relación de equivalencia en la clase de los espacios topológicos.*

Definición 1.1.19. Sean (X, τ), (Y, ϱ) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es una *función abierta* (*función cerrada*), si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto (cerrado) de X es un subconjunto abierto (cerrado) de Y.

Proposición 1.1.20 ([6], Proposición 1.4.18)**.** *Para una función biyectiva entre los espacios topológicos* (X, τ) *y* (Y, ϱ), *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El mapeo* f *es un homeomorfismo.*

2. *El mapeo f es abierto.*

3. *El mapeo f es cerrado.*

Estas definiciones nos ayudarán a entender mejor el contenido del presente trabajo. Para hacer esto aún más simple, siempre y cuando no haya confusión, denotaremos por X al espacio topológico (X, τ).

1.2. Propiedades de numerabilidad y axiomas de separación

El concepto de vecindad de un punto nos dice como se relaciona éste con los puntos que hay a su alrededor, sin embargo, existe otro concepto que no sólo nos dará información del punto, sino de todo el espacio: El carácter de un punto en el espacio.

Definición 1.2.1. Sean $x \in X$ y $\mathcal{B}(x)$ una subfamilia de $\mathcal{V}(x)$. Diremos que $\mathcal{B}(x)$ es una *base de vecindades* (*base local de vecindades*) de X en el punto x, si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset V$.

Definición 1.2.2. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *primero numerable*, si cada punto $x \in X$ posee una base local $\mathcal{B}(x)$ numerable; X es un espacio *segundo numerable*, si X posee una base $\mathcal{B}$ numerable. Por último, diremos que X es *separable*, si X posee un subconjunto denso y numerable.

Proposición 1.2.3 ([6], Corolario 1.3.8)**.** *Sea X es un espacio topológico segundo numerable. Entonces, X es primero numerable y separable.*

Definición 1.2.4. Una *función cardinal* es una función f que a cada espacio topológico X le asigna un número cardinal $f(X)$, tal que $f(X) = f(Y)$ para cada par X, Y de espacios homeomorfos.

Saber si dos espacios son homeomorfos es algo fácil, basta encontrar una función biyectiva, continua y de inversa continua entre ellos; sin embargo, para saber si dos espacios no son homeomorfos se debe demostrar que no existe homeomorfismo alguno entre dichos espacios, las funciones cardinales son un auxiliar en este problema. A continuación, enunciamos algunas de las más importantes.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio topológico. Se tienen las siguientes funciones cardinales:

1. *El carácter de un punto x en el espacio X* se define como
$$\chi(x, X) = \text{mín}\{\mathcal{B}(X) : \mathcal{B}(X) \text{ es una base local de } X \text{ en el punto } x\}.$$
2. *El carácter de un espacio X* se define como
$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$
3. *El peso del espacio X* se define como
$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } X\}.$$
4. *La densidad de un espacio X* se define como
$$d(X) = \text{mín}\{|Y| : Y \subset X \text{ es un subespacio denso de } X\}.$$

Observación 1.2.6. Con esta información, la Definición (1.2.2) puede reformularse en los siguientes términos. Para un espacio topológico X, se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Si $\chi(X) \leq \aleph_0$, entonces, X es primero numerable.
2. Si $w(X) \leq \aleph_0$, entonces, X es segundo numerable.
3. Si $d(X) \leq \aleph_0$, entonces, X es separable.

Otro hecho importante sobre las propiedades de numerabilidad es que son *hereditarias*, es decir, se heredan a cualquier subespacio; la propiedad de separabilidad sólo se preserva bajo funciones continuas.

Ahora definiremos los *axiomas de separación*, dichos axiomas son propiedades que clasifican a los espacios topológicos. En este texto estamos especialmente interesados en los espacios de Tychonoff.

Definición 1.2.7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que:

1. *X es de Kolmogorov* o T_0, si para cualesquiera $x, y \in X$, tales que $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.

2. X *es de Riesz* o T_1, si para cualesquiera $x, y \in X$, tales que $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

3. X *es de Hausdorff* o T_2, si para cualesquiera $x, y \in X$, tales que $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

4. X *es regular* o T_3, si X es T_1, y para cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ y cada $x \in X \setminus F$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

5. X *es completamente regular* o *de Tychonoff* ($T_{3\frac{1}{2}}$), si X es T_1, y para cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ y cada $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$.

6. X *es normal* o T_4, si X es T_1, y para cualesquiera conjuntos cerrados disjuntos $F, G \subset X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Cabe notar que un espacio X es de Tychonoff, si X es T_1, y para cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ y cada $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to [a, b]$ tal que $f(x) = a$ y $f(F) \subset \{b\}$. El concepto que se define a continuación, nos ayudará a saber cuando un espacio es de Tychonoff.

Definición 1.2.8. Un espacio X es *cero dimensional*, si X es un espacio T_1 que tiene una base formada por conjuntos clopen.

Proposición 1.2.9. *Sea X un espacio T_1 y cero dimensional. Entonces, X es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $x_0 \notin F$, de este modo $U = X \setminus F$ es una vecindad de x_0. Como X es cero dimensional, existe un conjunto clopen $V \subset X$ tal que $x_0 \in V \subset U$. Sea χ_V *la función característica* del conjunto V y consideremos $f = 1 - \chi_V$. Tenemos que f es continua ([2], Ejercicio 3.A.8) y es tal que $f(x_0) = 0$ y $f(X \setminus F) = 1$. Así, hemos verificado que X es de Tychonoff. □

Un hecho importante, relacionado con los axiomas de separación, es que $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, pero ninguna de estas implicaciones se cumple en sentido contrario. Estos axiomas de separación son *propiedades topológicas*, es decir, se preservan bajo homeomorfismos. Además las propiedades de ser $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ son hereditarias. La propiedad de ser T_4 no es hereditaria, ya que sólo se hereda a subespacios cerrados.

Definición 1.2.10. Sean (X, d) un *espacio métrico* y τ_d la familia de subconjuntos abiertos de X generados por la métrica d. Diremos que (X, τ) es un *espacio metrizable*, si existe una métrica ρ, sobre X, tal que $\tau_\rho = \tau$.

En general todo espacio métrico es normal, y con la ayuda de la definicón anterior puede enunciarse un hecho que es de suma importancia.

Teorema 1.2.11 ([6], Teorema 4.2.9)**.** *Sea X un espacio segundo numerable. Entonces, X es metrizable, si y sólo si, X es regular.*

1.3. Topologías generadas por una familia de mapeos

Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Consideremos *el producto cartesiano*:

$$X = \prod_{t \in T} X_t = \{f : T \to \bigcup_{t \in T} X_t \text{ tales que } f(t) \in X_t, \text{ para cada } t \in T\},$$

es decir, X es el conjunto de todas las funciones posibles con dominio T e imagen contenida en $\bigcup_{t \in T} X_t$; a un punto $x \in X$ lo denotaremos por $(x_t)_{t \in T}$.

Proposición 1.3.1 ([6], Proposición 1.4.8)**.** *Sean X un conjunto, $\{Y_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y $\mathcal{F} = \{f_t : t \in T\}$ una familia de mapeos, donde $f_t : X \to Y_t$. En la clase de todas las topologías del conjunto X, que hacen continuas a todos los mapeos de la familia $\mathcal{F}$, existe una topología más gruesa que todas las demás; esta es la topología τ generada por la base de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{k} f_{t_i}^{-1}(V_i)$, donde $t_i \in T$ y V_i es un subconjunto abierto del espacio Y_{t_i}, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. La topología τ es llamada la topología generada por la familia de mapeos $\mathcal{F}$.*

Teorema 1.3.2 ([6], Proposición 1.4.9)**.** *Sea X un conjunto con la topología generada por la familia de mapeos $\{f_t : t \in T\}$. Si Y es un espacio topológico, y $f : Y \to X$ una función, entonces, f es continua, si y sólo si, la composición $f_t \circ f$ lo es.*

Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos, no vacíos. Consideremos el producto cartesiano $X = \prod_{t \in T} X_t$ y la familia de mapeos $\{\pi_t : t \in T\}$, donde $\pi_t : X \to X_t$ es *la proyección sobre el t-ésimo factor*. El conjunto X

con la topología τ generada por la familia de mapeos $\{\pi_t : t \in T\}$ es llamado: *El producto topológico de la familia de espacios topológicos* $\{X_t : t \in T\}$, y la topología τ es llamada: *La topología producto de Tychonoff en* X.

Proposición 1.3.3 ([6], Proposición 2.3.1)**.** *La familia de todos los conjuntos de la forma* $\prod_{t\in T} U_t$*, donde* U_t *es un conjunto abierto de* X_t*, y* $U_t \neq X_t$ *sólo para una cantidad finita de elementos de* T*, es una base para la topología producto de Tychonoff en* X*.*

La base descrita es llamada *la base canónica del producto cartesiano*.

Proposición 1.3.4 ([6], Proposición 2.3.3)**.** *Si* $A_t \subset X_t$ *para cada* $t \in T$*, entonces,* $\overline{\prod_{t\in T} A_t} = \prod_{t\in T} \overline{A_t}$*.*

Corolario 1.3.5 ([6], Corolario 2.3.5)**.** *Si* $D_t \subset X_t$ *es un conjunto denso, para cada* $t \in T$*, entonces,* $\prod_{t\in T} D_t$ *es un conjunto denso en* $\prod_{t\in T} X_t$*.*

Note que la familia $\{\pi_t : t \in T\}$ es una familia de funciones abiertas. Para finalizar esta sección, recordaremos algo sobre la función inclusión.

Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $i_Y : Y \hookrightarrow X$ *la función inclusión*, si dotamos al subespacio Y de la topología τ formada por la base $\{i_Y^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } X\}$, tenemos que τ y τ_Y coinciden, es decir, la topología generada por la familia de mapeos $\{i_Y\}$ coincide con la topología de subespacio. Como consecuencia, la función i_Y es continua.

Lema 1.3.6. *Sea* $Y \subset X$ *un conjunto cerrado (abierto). Entonces,* i_Y *es una función cerrada (abierta).*

Proposición 1.3.7. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *funciones continuas cerradas (abiertas). Entonces,* $g \circ f$ *es una función continua cerrada (abierta).*

1.4. Suma directa de espacios topológicos

Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos. Consideremos el conjunto $X = \bigcup_{t\in T} X_t$ y la familia τ de todos los conjuntos $U \subset X$, tales que $U \cap X_t$ es abierto en X_t, para cada $t \in T$. No es difícil ver que la familia τ satisface la Definición (1.1.1). El conjunto X, con la topología τ, es llamado *la suma directa de la familia de espacios* $\{X_t : t \in T\}$, y es denotado por $\bigoplus_{t\in T} X_t$. La función inclusión $i_t : X_t \hookrightarrow X$, jugará un rol importante en esta sección.

Proposición 1.4.1 ([6], Proposición 2.2.6). *Sea* $X = \bigoplus_{t\in T} X_t$ *la suma directa de la familia de espacios topológicos* $\{X_t : t \in T\}$. *Si* $f : X \to Y$ *es una función al espacio* Y, *entonces,* f *es continua, si y sólo si, la composición* $f \circ i_t$ *es continua, para cada* $t \in T$.

La suma directa de espacios topológicos no tiene por que limitarse a colecciones disjuntas de éstos. En general, dada una familia de espacios topológicos $\{X_t : t \in T\}$, bastará fijarnos en la familia $\{X'_t : t \in T\}$, donde $X'_t = X_t \times \{t\}$. El espacio topológico X'_t tiene la topología generada por el mapeo $p_t : X'_t \to X_t$ definido como $p_t(x, t) = x$. De este modo se define la suma directa de la familia $\{X_t : t \in T\}$ como $\bigoplus_{t\in T} X_t = \bigoplus_{t\in T} X'_t$.

1.5. El Lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze

Los siguientes enunciados son de gran importancia en la topología general, no sólo por la sencillez de sus enunciados, sino por las consecuencias de éstos.

Teorema 1.5.1 (Lema de Urysohn ([6], Teorema 1.5.11)). *Sean* X *un espacio normal y* $F, G \subset X$ *conjuntos cerrados disjuntos. Entonces, existe una función continua* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(F) \subset \{0\}$ *y* $f(G) \subset \{1\}$.

Corolario 1.5.2. *Sea* X *un espacio* T_1. *Entonces,* X *es un espacio normal, si y sólo si, para cualesquiera* $F, G \subset X$, *cerrados y disjuntos, existe una función* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(F) \subset \{0\}$ *y* $f(G) \subset \{1\}$.

Teorema 1.5.3 (de extensión de Tietze-Urysohn ([6], Teorema 2.1.8)). *Sean* X *un espacio normal y* $F \subset X$ *un subespacio cerrado. Entonces, toda función continua* $f : F \to [0, 1]$ *posee una extesión continua a todo* X, *es decir, existe una función continua* $g : X \to [0, 1]$ *tal que* $g(x) = f(x)$ *para todo* $x \in F$.

El teorema anterior sigue siendo válido si se consideran funciones continuas a todo $\mathbb{R}$. Note que los Teoremas (1.5.1) y (1.5.3) son equivalentes, y caracterizan a los espacios normales. En este contexto, se dirá que un conjunto $A \subset X$ está *C-encajado* (*C^*-encajado*) en X, si toda función continua (continua y acotada) con valores en los reales, tiene una extensión continua a todo el espacio X.

Otra proposición de suma importancia relacionada con las extensiones de funciones es que éstas pueden ser únicas.

Teorema 1.5.4 ([6], Teorema 2.1.9). *Sean X un espacio topológico, $D \subset X$ un subespacio denso y Y un espacio topológico de Hausdorff. Si una función $f : D \to Y$ puede extenderse a todo X, entonces, dicha extensión es única.*

1.6. El Teorema de encaje de Tychonoff

Antes de demostrar el Teorema de encaje de Tychonoff construiremos dos entes auxiliares.

Definición 1.6.1. Sean $\{X_t : t \in T\}$, $\{Y_t : t \in T\}$ dos familias de espacios topológicos y $\{f_t : t \in T\}$ una familia de funciones continuas, donde $f_t : X_t \to Y_t$ para cada $t \in T$. El mapeo que a cada punto $(x_t)_{t\in T}$ le asigna el punto $(f_t(x_t))_{t\in T}$ es llamado *el producto cartesiano de la familia de mapeos* $\{f_t : t \in T\}$ y es denotado por $\prod_{t\in T} f_t$.

Por la Proposición (1.3.2), el mapeo $\prod_{t\in T} f_t : \prod_{t\in T} X_t \to \prod_{t\in T} Y_t$ es continuo. Es decir, el mapeo $\prod_{t\in T} f_t$ es el único que cumple la condición $(\pi_s \circ \prod_{t\in T} f_t)(x) = f_s(x_s)$, donde $\pi_s : \prod_{t\in T} Y_t \to Y_s$.

Otro ente de gran importancia, y que usaremos frecuentemente, es el producto diagonal de funciones.

Definición 1.6.2. Sean X un espacio topológico, $\{Y_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_t : t \in T\}$ una familia de funciones continuas, donde $f_t : X \to Y_t$ para cada $t \in T$. El mapeo que a cada punto $x \in X$ le asigna el punto $(f_t(x))_{t\in T}$ es llamado *el producto diagonal de la familia de mapeos* $\{f_t : t \in T\}$ y es denotado por $\triangle_{t\in T} f_t$.

Por la Proposición (1.3.2), el mapeo $\triangle_{t\in T} f_t$ es continuo. Es decir, $\triangle_{t\in T} f_t$ es el único mapeo tal que $(\pi_s \circ \triangle_{t\in T} f_t)(x) = f_s(x)$, donde $\pi_s : \prod_{t\in T} Y_t \to Y_s$.

Definición 1.6.3. Sean X un espacio topológico, $\{Y_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_t : t \in T\}$ una familia de funciones continuas, donde $f_t : X \to Y_t$ para cada $t \in T$. Diremos que *la familia $\mathcal{F}$ separa puntos*, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un mapeo $f_t \in \mathcal{F}$ tal que $f_t(x) \neq f_t(y)$. Si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existe un mapeo $f_t \in \mathcal{F}$ tal que $f_t(x) \notin \overline{f_t(F)}$, entonces, diremos que la familia $\mathcal{F}$ *separa puntos de conjuntos cerrados*.

Si X es un espacio T_0, entonces, cada familia que separa puntos de conjuntos cerrados también separa puntos.

Lema 1.6.4 ([6], Lema 2,3,19). *Si la función continua $f : X \to Y$ es inyectiva y la familia $\{f\}$ separa puntos de conjuntos cerrados, entonces, f es un encaje.*

Teorema 1.6.5 (Teorema Diagonal ([6], Teorema 2.3.20)). *Si la familia $\mathcal{F} = \{f_t : t \in T\}$ de mapeos continuos, donde $f_t : X \to Y_t$, separa puntos, entonces, el producto diagonal $\triangle_{t\in T} f_t : X \to \prod_{t\in T} Y_t$ es un mapeo inyectivo. Más aún, si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados, entonces, $\triangle_{t\in T} f_t$ es un encaje. En particular, si existe $t \in T$ tal que f_t es un encaje, entonces, $\triangle_{t\in T} f_t$ es un encaje.*

Definición 1.6.6. Diremos que un espacio X es *universal* para todos los espacios que tienen la propiedad topológica $\mathcal{Q}$, si X tiene la propiedad $\mathcal{Q}$ y todo espacio con la propiedad $\mathcal{Q}$ puede encajarse en X.

El cubo de Tychonoff, de peso $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, es el espacio $I^{\mathfrak{m}}$.

Teorema 1.6.7 (de encaje de Tychonoff ([6], Teorema 2.3.23)). *El cubo de Tychonoff $I^{\mathfrak{m}}$ es universal para todos los espacios de Tychonoff de peso $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$.*

Una de las tantas consecuencias de este Teorema, es que, dado un espacio topológico X de peso $\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, existe una familia de funciones continuas $\mathcal{F} = \{f_t : t \in \mathfrak{m}\}$, tales que $f_t : X \to I$ y $f = \triangle_{t\in\mathfrak{m}} f_t : X \to I^{\mathfrak{m}}$ es un encaje.

1.7. Propiedades de tipo compacidad

En esta sección trabajaremos con los conceptos y algunos resultados importantes de espacios compactos y localmente compactos. También revisaremos la compactación de Alexandroff y de Stone-Čech.

Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X presumirá de ser una *cubierta* de X, si $\bigcup \mathcal{U} = X$. La familia $\mathcal{U}$ se dirá una *cubierta abierta*, si para cada $U \in \mathcal{U}$, se tiene que U es un conjunto abierto en X. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta y $\mathcal{V}$ es una subfamilia de $\mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{V} = X$, se dirá que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos cerrados en un espacio topológico X. Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad de intersecciones finitas* (es una *familia centrada*), si para toda subfamilia $\mathcal{F}'$ finita y no vacía de $\mathcal{F}$, se cumple que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

Definición 1.7.1. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X es *compacto*, si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

La propiedad de ser compacto se hereda a subespacios cerrados y se preserva bajo funciones continuas. Diremos que $K \subset X$ es compacto en X si lo es como espacio topológico (con la topología inducida). Si $K \subset X$ es compacto en X y X es un espacio de Hausdorff, entonces, K es cerrado en X.

Son varias las caracterizaciones que se pueden dar de un espacio compacto y son varias las propiedades que se desprenden del hecho de ser compacto, pero probablemente, las más importantes son las siguientes:

Teorema 1.7.2 ([6], Teoremas 3.1.1, 3.1.9, 3.1.12 y 3.1.13)**.** *Sean X, Y espacios topológicos de Hausdorff. Entonces:*

1. *X es compacto, si y sólo si, toda familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersecciones finitas tiene intersección no vacía.*

2. *Si X es compacto, entonces, X es un espacio normal.*

3. *Si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto, entonces, f es una función cerrada.*

4. *Si X es compacto y $f : X \to Y$ es continua y biyectiva, entonces, f es un homeomorfismo.*

Teorema 1.7.3 (de Tychonoff ([6], Teorema 3.2.4))**.** *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos de Hausdorff no vacíos. El producto de Tychonoff $X = \prod_{t\in T} X_t$ es compacto, si y sólo si, X_t es compacto para todo $t \in T$.*

Definición 1.7.4. Un espacio de Hausdorff X es *localmente compacto*, si todo $x \in X$ tiene una vecindad compacta.

La propiedad de ser localmente compacto se hereda a subespacios abiertos y cerrados, es una propiedad topológica y todo espacio localmente compacto es de Tychonoff. Además, el producto de Tychonoff de una familia finita de espacios localmente compactos es localmente compacto.

La propiedad de ser compacto resulta ser de gran importancia, por lo cual, durante mucho tiempo se estudió el problema de cómo extender un espacio dado a un espacio compacto. Así es como se formula el concepto de la compactación de un espacio.

Definición 1.7.5. Sea X un espacio topológico de Tychonoff. Una pareja (b, bX) es una *compactación de* X, si bX es un espacio compacto y $b : X \to bX$ es un encaje topológico de tal modo que $b(X)$ es un subespacio denso en bX. La compactación (b, bX) es T_2 si bX es de Hausdorff.

Usualmente, suele identificarse a X con $b(X)$ y a bX con la pareja (b, bX), por lo cual, será común hablar de X como subespacio de bX y decir que bX es una compactación de X. Como primer acercamiento, podríamos pensar que todo espacio posee una compactación de Hausdorff, pero esto pasa, si y sólo si, el espacio es de Tychonoff.

Dadas dos compactaciones b_1X y b_2X de un espacio X, diremos que $b_1X \preceq b_2X$ si existe una función continua $f : b_2X \to b_1X$ tal que $f|_X = id_X$. Más aún, diremos que b_1X y b_2X son equivalentes, si $b_1X \preceq b_2X$ y $b_2X \preceq b_1X$. Note que la relación "b_1X y b_2X son dos compactaciones equivalentes" es una relación de equivalencia.

En este contexto, vale hablar de la familia de todas las compactaciones de un espacio X, a la cual denotaremos por $\mathcal{C}(X)$; dicha familia, estrictamente hablando, consiste de todas las clases (de equivalencia) de compactaciones equivalentes de un espacio X, que junto con el orden $\preceq$ resulta ser un conjunto ordenado con elemento maximal: La compactación de Stone-Čech. Si el espacio es localmente compacto, entonces, $\mathcal{C}(X)$ tiene un elemento minimal: La compactación por un punto de Alexandroff.

1.7.1. La compactación de Alexandroff

Sea X un espacio de Hausdorff, no compacto pero localmente compacto. Definimos la *compactación de Alexandroff* αX como el espacio $X \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto que no pertenece a X, con la siguiente topología:

$$\tau = \{U \subset X \cup \{\infty\} : U = \{\infty\} \cup (X \setminus F)\} \cup \tau_X,$$

donde F es un conjunto compacto en X y τ_X es la topología original del espacio X. Entonces, αX es un espacio de Hausdorff compacto tal que $\alpha X \preceq bX$ para toda compactación bX de X.

1.7.2. La compactación de Stone-Čech

La manera más cómoda de definir la *compactación de Stone-Čech* es mediante el producto diagonal de funciones.

Sea $C(X, [0,1])$ la colección de todas las funciones continuas de X a $[0,1]$. Si X es un espacio de Tychonoff y $\beta = \triangle_{f \in C(X,[0,1])} f : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ es el producto diagonal, al tomar βX como la cerradura de $\beta(X)$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, se tiene que βX es la compactación de Stone-Čech de X.

Teorema 1.7.6 ([6], Teoremas 3.6.1, 3.6.2 y 3.6.6)**.** *Sean X, Y espacios de Tychonoff y βX la compactación de Stone-Čech de X. Entonces:*

1. *$bX \preceq \beta X$, para toda compactación bX de X.*
2. *Toda función continua $f : X \to K$, donde K es compacto, posee una única extensión continua $\tilde{f} : \beta X \to K$.*
3. *Sean $A, B \subset X$ ajenos. Si existe un mapeo $F : X \to I$ tal que $F(A) \subset \{0\}$ y $F(B) \subset \{1\}$, entonces, $[A]_{\beta X} \cap [B]_{\beta X} = \emptyset$.*
4. *Para cada compactación bY de Y y cada función continua $f : X \to Y$, existe una extensión continua $\tilde{f} : \beta X \to bY$.*
5. *Todo espacio está C^*-encajado en su compactación de Stone-Čech.*

Observación 1.7.7. Si existe una compactación bX de X que satisface cualquier condición del Teorema (1.7.6), entonces, bX es equivalente a βX, es decir, existe un homeomorfismo f entre bX y βX tal que $f|_X = id_X$.

1.8. El lema de Tukey-Teichmüller

El siguiente lema será de gran utilidad para construir algunos ejemplos de espacios pseudocompactos.

Definición 1.8.1. Sea X un conjunto y $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ una *propiedad de subconjuntos de* X. Diremos que $\mathcal{Q}$ es una *propiedad de carácter finito*, si el conjunto vacío tiene esta propiedad y un conjunto $A \subset X$ tiene la propiedad $\mathcal{Q}$, si y sólo si, cualquier subconjunto finito de A tiene la propiedad $\mathcal{Q}$.

Proposición 1.8.2 (Lema de Tukey-Teichmüller ([6], sec. 1.4))**.** *Sean X un conjunto y $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{Q}$ es una propiedad de carácter finito, entonces, todo conjunto $A \subset X$ con la propiedad $\mathcal{Q}$ está contenido en un conjunto $B \subset X$ con la propiedad $\mathcal{Q}$, que además es maximal en la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad $\mathcal{Q}$ ordenados por la relación de contención $\subset$.*

1.9. Un poco más sobre teoría de conjuntos

Dado un conjunto X de cardinalidad λ, muchas veces estaremos interesados en *la familia de subconjuntos de X de cardinalidad $\varkappa$, con $\varkappa \leq \lambda$.* Estas familias serán importantes para desarrollar los espacios de Mrówka y el ejemplo de Shakhmatov.

Definición 1.9.1. Sea Z un conjunto y $\varkappa$ un cardinal menor o igual que $|Z|$. Se definen los siguientes conjuntos:

1. $[Z]^{<\varkappa} = \{A \subset Z : |A| < \varkappa\}$.
2. $[Z]^{\leq\varkappa} = \{A \subset Z : |A| \leq \varkappa\}$.
3. $[Z]^{\varkappa} = \{A \subset Z : |A| = \varkappa\}$.

La cardinalidad de estas familias se determinará en base a la siguiente Proposición.

Proposición 1.9.2 ([4], Proposición 5.2.14)**.** *Para cada conjunto infinito X y todo cardinal $\varkappa \leq |X|$, con $\varkappa \neq 0$, se tiene que:*

$$|[X]^{\leq\varkappa}| = |[X]^{\varkappa}| = |X|^{\varkappa}.$$

Capítulo 2

Pseudocompacidad

Antes de dar paso a nuestros ejemplos, daremos un muy breve repaso de la historia de la pseudocompacidad. Además, desarrollaremos algunas proposiciones que serán clave en la construcción de nuestros ejemplos.

2.1. Hewitt y la pseudocompacidad

En ([9], 1948), Edwin Hewitt definió la pseudocompacidad para espacios completamente regulares y expuso algunas de sus caracterizaciones. Alrededor de aquellos años, la teoría de los anillos de funciones continuas y acotadas con valores reales se había desarrollado ampliamente por los matemáticos de las escuelas estadounidenses, rusas y japonesas. La intención de Hewitt era extender dicha teoría a los anillos de funciones continuas con valores en los reales, no necesariamente acotadas; y para esto decidió agrupar todos los espacios cuyas funciones continuas real valuadas fueran acotadas en una clase: La clase de los espacios pseudocompactos.

La notación que seguiremos en este apartado es la dada en [9]. Dado un espacio X, *el anillo de funciones continuas con valores en los reales* se denotará por $C(X,\mathbb{R})$ y *el anillo de funciones continuas acotadas real valuadas* se denotará por $C^*(X,\mathbb{R})$. La definición original que dió Hewitt de los espacios pseudocompactos es la siguiente:

Definición 2.1.1. Un espacio completamente regular X se dirá *pseudocompacto* si $C(X,\mathbb{R})$ es idéntico a $C^*(X,\mathbb{R})$.

Un concepto vital para el resto del texto es el de función acotada.

Definición 2.1.2. Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f está acotada superiormente (inferiormente), si existe $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) tal que $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) para todo $x \in X$. La función f se dirá acotada si lo es superior e inferiormente.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in X$. Diremos que f asume sus cotas si existen $y, z \in X$ tales que $f(y) = m$ y $f(z) = M$.

Teorema 2.1.4 ([9], Teorema 27)**.** *Sea X un espacio completamente regular. Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es pseudocompacto.*

2. *Cada función en $C^*(X, \mathbb{R})$ asume su mínima cota superior y su máxima cota inferior para algún punto o algunos puntos en X.*

3. *Si $f \in C^*(X, \mathbb{R})$, entonces, $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.*

En [9], Hewitt no sólo definió una nueva generalización de la compacidad; como mencionamos, Hewitt se basó en los trabajos de E. Čech y M.H. Stone para generalizar las ideas de $C^*(X)$ a $C(X)$, creando de este modo un ente similar a la compactación βX. Este nuevo ente actualmente es llamado la realcompactación (realcompactificación) νX. Aunque no tocaremos este tema, vale saber que el trabajo de Hewitt fue trascendental y hoy día sigue siendo referencia para muchos otros investigadores.

2.2. Espacios numerablemente compactos

Esta sección tiene por objetivo exponer algunos teoremas que caracterizan a la propiedad de ser numerablemente compacto, ya que en secciones posteriores serán de utilidad para presentar nuestros ejemplos. A partir de aquí, y a menos que se indique lo contrario, todos los espacios considerados se suponen de Tychonoff.

Definición 2.2.1. Un espacio X es *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable $\mathcal{U}$ de X tiene una subcubierta finita. X es un *espacio de Lindelöf* si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene una subcubierta numerable.

Ambas propiedades se heredan a subespacios cerrados y se preservan bajo funciones continuas. Además, si X es un espacio numerablemente compacto y de Lindelöf, entonces, X es compacto.

Un hecho que usaremos frecuentemente es que un conjunto es *cerrado y discreto*, si y sólo si, es un conjunto sin puntos límite. De este modo la siguiente proposición nos dará una primera caracterización de los espacios numerablemente compactos:

Teorema 2.2.2. *Sea X un espacio topológico. X es numerablemente compacto, si y sólo si, todo conjunto infinito en X tiene un punto límite.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración notemos que la afirmación "todo conjunto infinito tiene un punto límite", es equivalente a que "todo conjunto cerrado y discreto sea finito".

Supongamos que X es numerablemente compacto y sea $F \subset X$ cerrado, discreto e infinito. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que F es numerable, pues todo conjunto infinito contiene un conjunto numerable. Como F es discreto se tiene que para cada $x \in F$ existe un abierto U_x tal que $U_x \cap F = \{x\}$. Así pues, la cubierta $\mathcal{U} = \{U_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ es numerable y no tiene subcubiertas finitas, lo cual contradice la hipótesis.

Recíprocamente, supongamos que todo conjunto infinito en X tiene un punto límite y que X no es numerablemente compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta numerable de X que no tiene subcubiertas finitas. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ y para cada $n \in \omega$ sea $V_n = \bigcup_{i=0}^{n} U_n$. Tomemos un punto $x_0 \in U_0 = V_0 \subsetneq X$, si $n_1 = \min\{n \in \omega \setminus \{0\} : U_n \cap (X \setminus V_0) \neq \emptyset\}$, entonces, elegimos un punto $x_1 \in U_{n_1} \cap (X \setminus V_0)$. Para cada $i \in \omega$ sea $n_i = \min\{n \in \omega \setminus \{0, n_1, \ldots, n_{i-1}\} : U_n \cap (X \setminus V_{i-1}) \neq \emptyset\}$, dado que $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas finitas podemos elegir un punto $x_i \in U_{n_i} \cap (X \setminus V_{n_i - 1})$. Siguiendo inductivamente con este proceso, obtenemos un conjunto $A = \{x_n : n \in \omega\}$ infinito tal que si $k \in \omega$, entonces, $x_k \in U_{n_k}$ y $x_k \notin V_n$ para todo $n < k$. Por hipótesis, existe un punto $x \in X$ que es punto límite de A; como $\mathcal{U}$ es una cubierta de X se tiene que existe $n \in \omega$ tal que $x \in U_n$, por lo tanto, $x \in V_n$. Note que V_n es una vecindad abierta de x. Sea $r \in \omega$ tal que $r > n$, entonces, $x_r \notin V_n$ contradiciendo el hecho de que x es punto de acumulación de A. Luego, X debe ser numerablemente compacto. $\square$

La propiedad de Lindelöf también es una generalización de la compacidad, sin embargo, aunque no tocaremos muy a fondo dicha propiedad tenemos la siguiente caracterización:

Proposición 2.2.3 ([6], Teorema 4.1.15 y Corolario 4.1.16.)**.** *Para un espacio metrizable las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $w(X) \leq \aleph_0$.

2. *El espacio X tiene la propiedad de Lindelöf.*

3. $d(X) \leq \aleph_0$.

Si X es un espacio compacto, entonces, X es numerablemente compacto, sin embargo, el recíproco no se cumple siempre. La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que esto se cumpla.

Proposición 2.2.4 ([6], Teorema 4.1.17)**.** *Sea X un espacio metrizable. Si X es numerablemente compacto, entonces, X es compacto.*

Así como la compacidad implica la compacidad numerable, la compacidad numerable implica la pseudocompacidad.

Proposición 2.2.5. *Todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces, $f(X)$ es numerablemente compacto. Como $\mathbb{R}$ es metrizable, entonces, $f(X)$ es compacto. Esto implica que f está acotada; por lo tanto, X es pseudocompacto. $\square$

Vale tener en mente estas proposiciones pues serán usadas frecuentemente como hechos conocidos, por lo tanto, no serán referenciadas, de este modo evitaremos confusiones.

Capítulo 3

Ejemplos de espacios pseudocompactos

3.1. El primer ordinal no numerable

Definición 3.1.1. Diremos que un espacio X es *ω-acotado*, si para cualquier subconjunto a lo más numerable de X su cerradura es un conjunto compacto.

Observación 3.1.2. Todo espacio ω-acotado es numerablemente compacto.

Con todo esto podemos dar nuestro primer ejemplo de un espacio pseudocompacto: ω_1, el primer ordinal no numerable. Primero mencionaremos como es su topología, *la topología del orden*. En general y para cualquier conjunto ordenado $(X, <)$, una sub-base para su topología es la siguiente:

$$\mathcal{S} = \{(\leftarrow, a), (b, \rightarrow) : a, b \in X\},$$

donde $(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}$ y $(b, \rightarrow) = \{x \in X : b < x\}$. En el caso de ω_1, $\mathcal{B} = \{[0, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \rightarrow) : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ es una base para su topología. Como primera propiedad tenemos que ω_1 es localmente compacto.

Proposición 3.1.3. *Sea $\alpha \in \omega_1$. Entonces, $[0, \alpha]$ es un espacio compacto.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción. Es claro que si $\alpha = 0$, entonces, el conjunto $\{0\}$ es compacto. Sea $\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\}$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ el conjunto $[0, \beta]$ es un conjunto compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0, \alpha]$, entonces, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U_0$. Por la forma de los abiertos básicos de ω_1, se tiene que, existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] \subset U_0$.

Por hipótesis, $[0, \beta]$ es compacto y como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $[0, \beta]$, entonces, existen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ elementos de $\mathcal{U}$ que cubren a $[0, \beta]$ de tal modo que $\mathcal{U}' = \{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, por lo tanto, $[0, \alpha]$ es compacto. $\square$

Lema 3.1.4. *Todo subconjunto numerable de ω_1 está acotado superiormente.*

Demostración. Sea A un subconjunto numerable de ω_1, entonces, $\sup(A) = \bigcup A = \alpha$ es un elemento de ω_1 tal que $x \leq \alpha$, para todo $x \in A$. $\square$

Proposición 3.1.5. *ω_1 es ω-acotado*

Demostración. Sea A un subconjunto de ω_1 a lo más numerable, entonces, A está acotado superiormente por $\sup(A) = \alpha \in \omega_1$. De esto, se sigue que $A \subset [0, \alpha]$. Como $\bar{A}$ es un conjunto cerrado en $[0, \alpha]$ se concluye que $\bar{A}$ es compacto. $\square$

El resultado anterior implica que ω_1 es un conjunto numerablemente compacto, pero como veremos, ω_1 tiene propiedades bastante interesantes.

Proposición 3.1.6. *$\chi(\omega_1) \leq \aleph_0$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \omega_1$. Entonces, $\mathcal{B}(\alpha) = \{(\beta, \alpha + 1) : \beta < \alpha\}$ es una base local numerable de ω_1 en el punto α. $\square$

Para demostrar que ω_1 es un espacio normal necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3.1.7. *Si F y G son dos subconjuntos cerrados no acotados de ω_1, entonces, $F \cap G \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión creciente, de elementos de ω_1, tal que $\alpha_n \in F$ si n es par y $\alpha_n \in G$ si n es impar. Sea $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$, entonces, $\alpha_{2n} \to \alpha$, lo que implica que $\alpha \in F$. También $\alpha_{2n+1} \to \alpha$, luego $\alpha \in G$. Esto hace evidente que $F \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Observación 3.1.8. El lema anterior es equivalente a que si F y G son dos cerrados disjuntos en ω_1, entonces, F es cerrado y acotado, o G lo es. En estos casos, como en $\mathbb{R}$, el ser cerrado y acotado es equivalente a ser compacto.

Lema 3.1.9. *Sean X un espacio topológico de Tychonoff, $K \subset X$ un conjunto compacto y $F \subset X$ un conjunto cerrado tales que $K \cap F = \emptyset$. Entonces, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(K) \subset \{0\}$ y $f(F) \subset \{1\}$.*

Demostración. Como X es un espacio de Tychonoff tiene sentido trabajar con la compactación βX. Notemos que K es un conjunto cerrado en βX y como $K \cap F = \emptyset$, entonces, $K \cap [F]_{\beta X} = \emptyset$. Por otro lado, βX es un espacio normal así que existe una función continua $g : \beta X \to [0,1]$ tal que $g(K) \subset \{0\}$ y $g([F]_{\beta X}) \subset \{1\}$. Sea $f = g|_X$, entonces, f es una función continua que separa a F de G. $\square$

Lema 3.1.10. *ω_1 es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean $x, y \in \omega_1$ puntos distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$. Los abiertos $U = [0, x+1)$ y $V = (x, \omega_1)$ son tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, ω_1 es un espacio de Hausdorff, por lo tanto, ω_1 es un espacio T_1.

Como se mencionó al inicio de esta sección, la familia $\mathcal{B} = \{[0,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\to) : \alpha, \beta, \in \omega_1\}$ es una base para la topología de ω_1, sin embargo, la familia $\mathcal{B}' = \{[0,\alpha], (\alpha,\beta], [\beta,\to) : \alpha,\beta, \in \omega_1\}$ cumple las condiciones de la Proposición (1.1.11), por lo tanto, $\mathcal{B}'$ es una base para la topología de ω_1. Note que los intervalos de la forma $(\gamma,\delta]$ son en realidad de la forma $(\gamma,\delta+1)$. De este modo la base $\mathcal{B}'$ es una base formada por conjuntos clopen. De la Proposición (1.2.9) se concluye que ω_1 es un espacio de Tychonoff. $\square$

Proposición 3.1.11. *ω_1 es un espacio normal.*

Demostración. Sean F y G dos subconjuntos cerrados y disjuntos de ω_1. Por la Observación (3.1.8), tenemos que F o G es compacto. Supongamos que F lo es; por el Lema (3.1.9), existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(K) \subset \{0\}$ y $f(F) \subset \{1\}$. Por lo tanto, de la Proposición (1.5.2), ω_1 es un espacio normal. $\square$

Proposición 3.1.12. *ω_1 no es separable.*

Demostración. Sea $D \subset \omega_1$ un conjunto numerable. Entonces, $sup(D) = \delta \in \omega_1$ y de ahí que $D \subset [0,\delta]$, por lo tanto, (δ,ω_1) es un conjunto abierto en ω_1 que tiene intersección vacía con D. Se sigue que ω_1 no tiene subconjuntos densos numerables. $\square$

Observación 3.1.13. Notemos que si $f : \omega_1 \hookrightarrow \omega_1+1$ es un encaje, entonces, ω_1 no es un conjunto cerrado en ω_1+1. Por esta razón, ω_1 es un ejemplo de un espacio numerablemente compacto (pseudocompacto) que no es compacto.

Un hecho importante sobre ω_1 es que toda función continua con valores en los reales es eventualmente constante, es decir, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta > \alpha$.

Proposición 3.1.14. *Sea $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es eventualmente constante.*

Demostración. Sean $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que no existe $\alpha \in \omega_1$ tal que para todo $\beta, \gamma \geq \alpha$ se cumpla que $|f(\beta) - f(\gamma)| < \varepsilon$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\alpha \in \omega_1$ existen $\beta_\alpha, \gamma_\alpha \geq \alpha$ tales que $|f(\beta_\alpha) - f(\gamma_\alpha)| \geq \varepsilon$. Tomemos los conjuntos $\overline{\{\beta_\alpha : \alpha \in \omega_1\}}$ y $\overline{\{\gamma_\alpha : \alpha \in \omega_1\}}$, ambos son cerrados y no acotados; por el Lema (3.1.7) se tiene que $\overline{\{\beta_\alpha : \alpha \in \omega_1\}} \cap \overline{\{\gamma_\alpha : \alpha \in \omega_1\}} \neq \emptyset$. Sea $\delta \in \overline{\{\beta_\alpha : \alpha \in \omega_1\}} \cap \overline{\{\gamma_\alpha : \alpha \in \omega_1\}}$, entonces, f es discontinua en δ pues $0 = |f(\delta) - f(\delta)| \geq \varepsilon$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha \in \omega_1$ tal que si $\beta, \gamma \geq \alpha$, entonces, $|f(\beta) - f(\gamma)| < \varepsilon$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $\varepsilon_n = \frac{1}{2n}$, de este modo creamos un conjunto $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$, entonces, para cualesquiera $\beta, \gamma \geq \alpha_n$ se cumple que $|f(\beta) - f(\gamma)| < \varepsilon_n$. Sea $\alpha = \sup(A)$, como f es continua es claro que $f(\alpha_n)$ converge a $f(\alpha)$. Tomando $\beta > \alpha$ se tiene que:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |f(\beta) - f(\alpha_n)| + |f(\alpha_n) - f(\alpha)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $|f(\beta) - f(\alpha)| = 0$. Sea $f(\alpha) = c$ se concluye que si $\beta > \alpha$, entonces, $f(\beta) = c$. □

Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.15. Un espacio topológico de Tychonoff X es *casi compacto* si $|\beta X \setminus X| \leq 1$.

Proposición 3.1.16. *ω_1 es casi compacto.*

Demostración. Denotemos por $[0, \omega_1]$ al conjunto $\omega_1 + 1$. Es claro que $[0, \omega_1]$ es un espacio compacto tal que $\overline{\omega_1} = [0, \omega_1]$. Además, dada una función continua $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$, por la Proposición (3.1.14), existe $g : [0, \omega_1] \to \mathbb{R}$, tal que g es una extensión continua de f. Este hecho implica que $\beta\omega_1 = [0, \omega_1]$, por lo tanto, ω_1 es casi compacto. □

3.2. Σ-productos

En 1959, H. H. Corson introdujo la definición de Σ-*producto* (y σ-*producto*) y estudió sus propiedades, (ver [5]). Para definir este espacio sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, donde T es un conjunto infinito no numerable. Tomemos a $X = \prod_{t\in T} X_t$ con la topología producto de Tychonoff y sea $x = (x_t)_{t\in T} \in X$. El Σ-*producto de la familia de espacios* $\{X_t : t \in T\}$ *con centro en* x se define como:

$$\Sigma_x X = \{z \in X : |\{t \in T : z_t \neq x_t\}| \leq \aleph_0\}.$$

Si en la definición anterior se reemplaza la desigualdad por una desigualdad estricta, entonces, se habla de un σ-producto.

Proposición 3.2.1. *Sea K un espacio compacto, T un conjunto no numerable y $x \in K^T$, entonces, $\Sigma_x K^T$ es un conjunto denso en K^T.*

Demostración. Sea U un abierto básico de K^T. Digamos $U = U_{t_0} \times \cdots \times U_{t_n} \times K^{T\setminus S}$, donde $S = \{t_0, \ldots, t_n\}$ y U_{t_i} es un abierto en K para $0 \leq i \leq n$. Sea $y = (y_t)_{t\in T} \in K^T$, donde $y_{t_i} \in U_{t_i}$ para $0 \leq i \leq n$ y $y_t = x_0$ para $t \in T \setminus S$, entonces, $y \in U \cap \Sigma_x K^T$ y, por lo tanto, $U \cap \Sigma_x K^T \neq \emptyset$. De este modo hemos probado que $\Sigma_x K^T$ es denso en K^T. □

Note que en la demostración anterior no se uso el hecho de que K es un espacio compacto, por lo tanto, la proposición anterior es válida para cualquier Σ-producto de cualquier familia de espacios.

Dado este concepto, es natural preguntarnos si este espacio es numerablemente compacto, pero para responder a esta cuestión definiremos primero una propiedad auxiliar.

Definición 3.2.2. Sea X un espacio topológico. Diremos que $Y \subset X$ es un conjunto ω-cerrado, si para todo $A \subset Y$ a lo más numerable se cumple que $[A]_X \subset Y$.

Proposición 3.2.3. *El conjunto $\Sigma_x K^T$ es ω-cerrado en K^T.*

Demostración. Sea $A \subset \Sigma_x K^T$ a lo más numerable. Defínase $B = \{t \in T :$ existe $a \in A$ tal que $a_t \neq x_t\}$, notemos que $B = \bigcup_{a\in A}\{t \in T : a_t \neq x_t\}$. Entonces, $|B| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ y además, para todo $a \in A$ se tiene que $a_t = x_t$ para todo $t \in T \setminus B$. De este modo $A \subset \bigcap_{t\in T\setminus B} \pi_t^{-1}(\{x_t\})$. Como para todo $c \in K$ se tiene que $\pi_t^{-1}(\{c\})$ es un conjunto cerrado en K^T, entonces, $\bar{A} \subset \bigcap_{t \in T \setminus B} \pi_t^{-1}(\{x_t\}) \subset \Sigma_x K^T$ (de hecho $\bar{A}$ es un conjunto cerrado en K^T). De esto último se desprende que $\Sigma_x K^T$ es un conjunto ω-cerrado. □

Proposición 3.2.4. *El espacio $\Sigma_x K^T$ es ω-acotado.*

Demostración. Sea $A \subset \Sigma_x K^T$ a lo más numerable, como $\bar{A}$ es cerrado en K^T, entonces, $\bar{A}$ es compacto en K^T. Por lo cual, $\Sigma_x K^T$ es un espacio ω-acotado. □

La proposición anterior implica que el espacio $\Sigma_x K^T$ es pseudocompacto.

Proposición 3.2.5. *Sea X un espacio topológico con un subespacio denso pseudocompacto. Entonces, X es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que X no es un espacio pseudocompacto. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función continua no acotada y D dicho subespacio denso y pseudocompacto. Entonces, $g|_D(D) \subset [-m, m]$, para algún $m \in \omega$. Sea $n > m$, entonces, existe $x \in X \setminus D$ tal que $|g(x)| > n$, pues g es no acotada. Sea $U = (g(x) - \frac{1}{2}, g(x) + \frac{1}{2})$, entonces, $V = g^{-1}(U)$ es un conjunto abierto no vacío de X, por lo tanto, $D \cap V \neq \emptyset$. Sea $z \in D \cap V$, entonces, $|g(z)| \leq m$ y $|g(z)| > n$ lo cual es una contradicción. □

Corolario 3.2.6. *Si $\Sigma_x K^T \subset X \subset K^T$, entonces, X es pseudocompacto.*

Sean T un conjunto no numerable y $K = [0, 1]$. Si $X = [0, 1]^T \setminus \{\bar{1}\}$, donde $\pi_t(\bar{1}) = 1$ para todo $t \in T$, entonces, X es pseudocompacto pero no numerablemente compacto. Para ver esto último, tomemos un conjunto infinito $A = \{a_n : n \in \omega\} \subset X$ definido como $a_n = (a_{n_t})_{t \in T}$ donde $a_{n_t} = 1 - \frac{1}{n+1}$ para todo $t \in T$, entonces, A es cerrado y discreto, pues $\bar{1}$ es el único punto límite de A y $\bar{1} \notin X$.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que ser pseudocompacto no implica ser numerablemente compacto. Muchas propiedades de tipo compacidad se preservan bajo mapeos continuos y el ser pseudocompacto no es la excepción.

Proposición 3.2.7. *Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva y continua. Si X es un espacio pseudocompacto, entonces, Y también lo es.*

Demostración. Sea $g : Y \to \mathbb{R}$ una función continua, tomemos $p = g \circ f$, entonces, $p : X \to \mathbb{R}$. Por hipótesis, X es pseudocompacto y de ahí que p este acotada, digamos que $p(X) \subset [-m, m]$ para algún $m \in \omega$. Como $p(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y)$, entonces, g es una función acotada. Por lo tanto, Y es pseudocompacto. □

La compactación por un punto (de Alexandroff) de un espacio no compacto, pero localmente compacto, es un proceso mediante el cual, agregando un punto y modificando un poco la topología del espacio, conseguimos un espacio compacto en el que está encajado densamente nuestro espacio inicial. Esta compactación tiene su análogo en los espacio de Lindelöf: La *lindeloficación por un punto* (*extensión unipuntual de Lindelöf*) de un espacio.

3.2.1. Extensión unipuntual de Lindelöf

Sea $\varkappa$ un cardinal mayor o igual que ω_1, por $D(\varkappa)$ denotaremos al espacio discreto de cardinalidad $\varkappa$, es decir, $D(\varkappa)$ es $\varkappa$ acompañado con la topología discreta. Tomemos ahora un punto ∞ que no pertenezca a $D(\varkappa)$, entonces, el conjunto $\lambda D(\varkappa) = D(\varkappa) \cup \{\infty\}$, con la topología definida como sigue: todos los puntos de $\varkappa$ son aislados y las vecindades U de ∞ son tales que $|\varkappa \setminus U| \leq \aleph_0$, es un espacio de Lindelöf. A $\lambda D(\varkappa)$ se le conoce como la extensión unipuntual de Lindelöf del espacio $D(\varkappa)$.

El espacio que realmente nos interesa es $C_p(\lambda D(\varkappa), [0, 1])$; es decir, el conjunto de funciones continuas de $\lambda D(\varkappa)$ a $[0, 1]$ con la *topología de la convergencia puntual*, dicha topología no es más que la heredada del espacio $[0, 1]^{\lambda D(\varkappa)}$ con la topología producto de Tychonoff. Para analizar este espacio es conveniente saber como son sus elementos.

Sea $f : \lambda D(\varkappa) \to [0, 1]$ una función continua. Como todo punto en $[0, 1]$ es de tipo G_δ, entonces, $f(\infty)$ es de tipo G_δ en $[0, 1]$. Por otro lado, $\infty \in U = f^{-1}(f(\infty))$, así pues, U es de tipo G_δ en $\lambda D(\varkappa)$ y es una vecindad de ∞. Por lo tanto, $|\varkappa \setminus U| \leq \aleph_0$, es decir, para todo $\alpha \in \varkappa$, salvo una cantidad a lo más numerable, se debe cumplir que $f(\alpha) = f(\infty)$, en otras palabras, $C_p(\lambda D(\varkappa), [0, 1])$ es el conjunto de funciones en $[0, 1]^{\lambda D(\varkappa)}$ tales que existe $A \subset \varkappa$ a lo más numerable de tal forma que $f(\alpha) = f(\infty)$, para todo $\alpha \in \varkappa \setminus A$, en símbolos se tiene que:

$$C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1]) = \bigcup_{A\in[\varkappa]^{\leq\aleph_0}} \{f \in [0,1]^{\lambda D(\varkappa)} : f(\alpha) = f(\infty) \ \ \forall\alpha \in \varkappa \setminus A\}.$$

Para saber si $C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1])$ es un espacio pseudocompacto lo que haremos será buscar un homeomorfismo entre $C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1])$ y un espacio que sepamos que sí es pseudocompacto. Es así como decimos que $C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1]) \simeq \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1]$.

Sea $H : C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1]) \to \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1]$ definida mediante la siguiente regla:

$$f \longmapsto (f - \mathbf{1}f(\infty), f(\infty)), \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{1} : \lambda D(\varkappa) \to [0,1]$ es la función constante igual a 1 y el escalar $f(\infty)$ es un elemento de $[0,1]$. Aseguramos lo siguiente:

Proposición 3.2.8. *Sea $H : C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1]) \to \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1]$ definida como en (3.1). Entonces:*

- *La función H es lineal y continua.*
- *La función $G : \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1] \to C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1])$ definida por $(g,r) \mapsto g + \mathbf{1}r$, $r \in [0,1]$, es lineal, continua y tal que $G = H^{-1}$.*

Para verificar la continuidad de H necesitaríamos profundizar un poco más en la topología de los espacios de funciones continuas, pero esto ya no se encuentra dentro de los propósitos del presente trabajo, si el lector desea profundizar en este tema puede revisar ([17]).

Demostración. Es fácil probar que G es lineal y continua, por lo tanto, sólo demostraremos que $G = H^{-1}$.

Probaremos que $H \circ G = Id_{\Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1]}$ y que $G \circ H = Id_{C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1])}$.

- $H \circ G : \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1] \to \Sigma_0[0,1]^\varkappa \times [0,1]$ es tal que $(H \circ G)(g,r) = H(G(g,r)) = H(g+\mathbf{1}r) = (g+\mathbf{1}r - \mathbf{1}(g(\infty)+r), g(\infty)+r)$. Como $g + \mathbf{1}r \in C_p(\lambda D(\varkappa),[0,1])$, entonces, para todo $\alpha \in \varkappa$, salvo una cantidad numerable, $(g+\mathbf{1}r)(\alpha) = (g+\mathbf{1}r)(\infty)$. Por otro lado, $g \in \Sigma_0[0,1]^\varkappa$, entonces, para todo $\alpha \in \varkappa$, salvo una cantidad numerable, $g(\alpha) = 0$. Se concluye que $g(\infty) = 0$, luego entonces, $(H \circ G)(g,r) = (g,r)$.

- $G \circ H : C_p(\lambda D(\varkappa), [0,1]) \to C_p(\lambda D(\varkappa), [0,1])$ es tal que $(G \circ H)(f) = G(H(f)) = G(f - \mathbf{1}f(\infty), f(\infty)) = f - \mathbf{1}f(\infty) + \mathbf{1}f(\infty) = f$.

Luego entonces, $G = H^{-1}$. □

Proposición 3.2.9 ([6], Corolario 3.10.27)**.** *El producto cartesiano $X \times Y$, de un espacio pseudocompacto X y un espacio compacto Y, es pseudocompacto.*

De la proposición anterior se concluye que $C_p(\lambda D(\varkappa), [0,1])$ es un espacio pseudocompacto.

3.3. Espacios de Mrówka

Existe una variante de la propiedad de compacidad numerable: La compacidad numerable en sentido débil.

Definición 3.3.1. Un espacio X es *numerablemente compacto en sentido débil*, si existe un subespacio denso $Y \subset X$ tal que todo conjunto infinito $A \subset Y$ tiene un punto límite en X.

Notemos que X es numerablemente compacto en sentido débil, si y sólo si, existe un subespacio denso $Y \subset X$ que no contiene conjuntos infinitos, cerrados y discretos.

Observación 3.3.2. Como primeras consecuencias de la Definición (3.3.1), cabe destacar las siguientes:

1. Si $Y = X$, entonces, X es numerablemente compacto.

2. Si X tiene un subespacio Y denso y numerablemente compacto, entonces, X es numerablemente compacto en sentido débil.

Como es natural, demostraremos que esta propiedad implica la pseudocompacidad, pero antes demostraremos un lema auxiliar.

Lema 3.3.3. *Sea $f : X \to Z$ una función continua y suprayectiva. Si X es numerablemente compacto en sentido débil, entonces, Z también lo es.*

Demostración. Sea $f : X \to Z$ una función continua. Si X es numerablemente compacto en sentido débil, entonces, existe $Y \subset X$ denso tal que todo conjunto infinito $A \subset Y$ tiene un punto límite en X. Por otro lado,

$Z = f(X) = f(\bar{Y}) \subset \overline{f(Y)}$, de aquí que $\overline{f(Y)} = Z$, esto último implica que $f(Y)$ es denso en Z. Sea $B \subset f(Y)$ infinito. como $f^{-1}(B) \cap X$ es un conjunto infinito en X, entonces, existe un punto de acumulación de $f^{-1}(B)$ digamos $x \in X$. Sea $z = f(x) \in Z$, tenemos que z es punto de acumulación de B, pues de no serlo existiría una vecindad U de z tal que $B \cap (U \setminus \{z\}) = \emptyset$. Entonces, $V = f^{-1}(U)$ sería una vecindad de x tal que $f^{-1}(B) \cap (V \setminus \{x\}) = \emptyset$. Por lo tanto, Z es numerablemente compacto en sentido débil. □

Proposición 3.3.4. *Todo espacio numerablemente compacto en sentido débil es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que X no es pseudocompacto. Entonces, existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua y no acotada. Sea $Y \subset X$ un subespacio denso tal que todo conjunto infinito $A \subset Y$ tiene un punto límite en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de elementos (distintos) de Y tales que $f(x_n) > |f(x_{n-1})| + 1$ para todo $n > 0$. Como $f(X)$ es numerablemente compacto en sentido débil se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$ converge a un punto y en $f(X)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que para todo $m, n \geq N$ se cumple que $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, pues en $\mathbb{R}$ toda sucesión convergente es de Cauchy. Esto último no es posible. Por lo tanto, X es pseudocompacto. □

Definición 3.3.5. Sea X un conjunto no numerable. Una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset [X]^{\aleph_0}$ es *casi disjunta* (*almost disjoint*), si $|\mathcal{A}| \geq \aleph_0$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ distintos se cumple que $|A \cap B| < \aleph_0$.

Proposición 3.3.6. *Existe una familia casi disjunta de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea $f : \omega \to \mathbb{Q}$ una biyección entre ω y los números racionales. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{x_n^r\}_{n\in\omega}$ una sucesión de números racionales distintos que converge a r. Entonces, $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia casi disjunta. Para verificar esto sean $r, s \in \mathbb{R}$ distintos; como $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff se sigue que existen conjuntos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}$ tales que $r \in U$, $s \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean $A_r, A_s \in \mathcal{A}$ las sucesiones que convergen a dichos reales, entonces, $|A_r \setminus U| < \aleph_0$ y $|A_s \setminus V| < \aleph_0$, por lo tanto, $|A_r \cap A_s| < \aleph_0$. Además, $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$. □

Lo anterior pone de manifiesto que existen familias casi disjuntas muy grandes. De hecho, toda familia casi disjunta está contenida en una familia casi disjunta maximal. Esto, pues la propiedad de “ser una familia casi disjunta” es una propiedad de carácter finito. Por el Lema (1.8.2), existe una *familia casi disjunta maximal* (*maximal almost disjoint family*), o *familia mad* por su siglas en inglés. A continuación tenemos una caracterización de estas familias.

Teorema 3.3.7. *Una familia $\mathcal{A} \subset [\omega]^{\aleph_0}$ es una familia mad, si y sólo si, $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta y para todo $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \aleph_0$.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es una familia mad, entonces, $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta. Por otro lado, de existir $A \in [\omega]^{\aleph_0} \setminus \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| < \aleph_0$ para todo $B \in \mathcal{A}$, se debe tener que $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es casi disjunta. Por la maximalidad de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \{A\} = \mathcal{A}$, es decir, $A \in \mathcal{A}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}$ no es una familia mad. Entonces, existe $A \in [\omega]^{\aleph_0} \setminus \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es una familia casi disjunta. De esto se desprende que $|A \cap B| < \aleph_0$ para todo $B \in \mathcal{A}$. Por hipótesis, esto no puede suceder, por lo tanto, $\mathcal{A}$ es una familia mad. □

Proposición 3.3.8. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta maximal. Entonces, $\mathcal{A}$ es no numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta numerable. Veamos que de suceder esto $\mathcal{A}$ no es una familia mad. Es decir, demostraremos que existe $A \subset [\omega]^{\aleph_0}$ tal que $A \notin \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es una familia casi disjunta.

Tomemos una enumeración $\{A_n : n \in \omega\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $A_n \neq A_m$ si $n \neq m$. Observe que para todo $n \in \omega$, el conjunto $\omega \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_n)$ es infinito, pues de ser finito existiría $k \in \omega$ tal que A_k puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$, esto implicaría que $A_i \cap A_k$ es infinito para algún $i < k$, lo cual es una contradicción.

Por recursión, elegiremos un conjunto de puntos $\{x_n : n \in \omega\}$ tal que $x_i \notin ((A_0 \cup \ldots \cup A_i) \cup \{x_0, \ldots, x_{i-1}\})$ para cada $i \in \omega$. Entonces, $A = \{x_n : n \in \omega\}$ no pertenece a $\mathcal{A}$ y $A \cap A_n \subset \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ para cada $n \in \omega$. De este modo hemos probado que $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es una familia casi disjunta. □

La proposición que enunciaremos a continuación es una caracterización de los espacios pseudocompactos discretos.

Proposición 3.3.9. *Sea X es un espacio discreto. Entonces, X es pseudocompacto, si y sólo si, X es finito.*

Demostración. Si X es discreto y finito, entonces, para toda función $f : X \to \mathbb{R}$ se tiene que $f(X) \subset [-r, r]$, donde $r = \text{máx}\{f(x) : x \in X\}$. Por lo tanto, X es pseudocompacto.

Recíprocamente, supongamos ahora que X es discreto, pseudocompacto e infinito. Sin pérdida de generalidad supongamos que X es numerable, digamos $X = \{x_n : n \in \omega\}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x_n) = n$. Como X discreto se tiene que f es continua, pero por su definición f es no acotada. Esto no puede suceder, por lo tanto, X es finito. □

Ahora procederemos a construir nuestro ejemplo. Sea $\mathcal{A} \subset [\omega]^{\aleph_0}$ una familia casi disjunta. Denotamos por $\Psi(\mathcal{A})$ al espacio $\omega \cup \mathcal{A}$ con la siguiente topología: todos los puntos de ω son aislados y U es una vecindad abierta básica de $A \in \mathcal{A}$ si $U = \{A\} \cup (A \setminus F)$, donde $F \subset \omega$ es un conjunto finito. A estos espacios se les conoce como Ψ-espacios. La siguiente proposición enumera varias propiedades de este espacio.

Proposición 3.3.10. *Sea $\Psi(\mathcal{A})$ un Ψ-espacio, donde $\mathcal{A}$ es una familia casi disjunta. Entonces:*

1. $d(\Psi(\mathcal{A})) \leq \aleph_0$.
2. *$\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado y discreto en $\Psi(\mathcal{A})$.*
3. $\chi(\Psi(\mathcal{A})) \leq \aleph_0$.
4. *$\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto.*

Demostración. Hay que notar que A es una sucesión que converge a $\{A\}$, para cada $A \in \mathcal{A}$.

1. $\Psi(\mathcal{A})$ es separable, pues ω es un conjunto denso numerable en $\Psi(\mathcal{A})$.
2. Sea $x \in \Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$, entonces, $x \in \omega$ y $\{x\}$ es una vecindad de x que no intersecta a $\mathcal{A}$. Se sigue que $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en $\Psi(\mathcal{A})$. Por otro lado, $V_A = \{A\} \cup A$ es una vecindad de A para cada $A \in \mathcal{A}$. Más aún, $V_A \cap \mathcal{A} = \{A\}$, entonces, $\mathcal{A}$ es un subespacio discreto de $\Psi(\mathcal{A})$.
3. Para ver que $\Psi(\mathcal{A})$ es primero numerable notemos que todo elemento $x \in \omega$ es aislado y para $A \in \mathcal{A}$ los abiertos básicos son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, $F \subset \omega$ finito. Como $|[\omega]^{<\aleph_0}| = \aleph_0$ (Proposición (1.9.2)), entonces, A tiene una base local numerable.

4. Todo elemento $A \in \Psi(\mathcal{A})$ es una sucesión convergente (converge a $\{A\}$) y las sucesiones convergentes con su punto límite son conjuntos compactos.

Note que esta proposición sigue siendo válida si $\mathcal{A}$ es una familia mad. $\square$

Corolario 3.3.11. $\Psi(\mathcal{A})$ *no es numerablemente compacto.*

Demostración. Por la Proposición (3.3.10), $\Psi(\mathcal{A})$ contiene el subespacio $\mathcal{A}$ que es cerrado, discreto e infinito. $\square$

Para continuar con el desarrollo de este ejemplo es vital hacer notar que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Tychonoff. Es fácil ver que $\Psi(\mathcal{A})$ es de Hausdorff, y de la Proposición (3.3.10), se concluye que $\Psi(\mathcal{A})$ tiene una base formada por *conjuntos clopen*. Aplicando la Proposición (1.2.9) se concluye que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Tychonoff.

Definición 3.3.12. Sea X un espacio de Hausdorff, diremos que X es un *espacio disperso* (*scattered space*), si todo subconjunto no vacío de X tiene un punto aislado.

Dado un espacio topológico X el conjunto derivado de X se denota por X', ver la Definición (1.1.8). Para cada ordinal α se define el *α-ésimo conjunto derivado de X* de la siguiente forma: $X^{(0)} = X$, $X^{(\alpha)} = (X^{(\beta)})'$ si $\beta + 1 = \alpha$ y $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ si α es un ordinal límite. Observe que $X^{(\alpha)} \subseteq X^{(\beta)}$ para $\beta < \alpha$. Se define la *altura de Cantor-Bendixson* como $ht(X) = \text{mín}\{\alpha : X^{(\alpha)} = \emptyset\}$.

Tenemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio disperso, pues todo punto de ω es aislado y $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado y discreto. De este modo $ht(\Psi(\mathcal{A})) = 2$.

Definición 3.3.13. Un *espacio de Mrówka* es un espacio de la forma $\Psi(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una familia mad.

Proposición 3.3.14. *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\Psi(\mathcal{A})$ *es pseudocompacto.*

2. $\Psi(\mathcal{A})$ *es numerablemente compacto en sentido débil.*

3. $\mathcal{A}$ *es una familia mad.*

Demostración. Demostraremos que $2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$.

- Por la Proposición (3.3.4), se tiene que todo espacio numerablemente compacto en sentido débil es pseudocompacto.

- Probaremos que $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$. Supongamos que $\mathcal{A}$ no es una familia mad. Entonces, existe $A \subset \omega$ infinito tal que $A \notin \mathcal{A}$ y $|B \cap A| < \aleph_0$ para todo $B \in \mathcal{A}$. Sea $A = \{x_n : n \in \omega\}$. Como $\Psi(\mathcal{A})$ es de Tychonoff, entonces, las funciones $\chi_{\{x_n\}} : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ son continuas pues $\{x_n\}$ es un conjunto clopen para todo $x_n \in A \subset \omega$. Así pues, las funciones $f_n : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ definidas como $f_n = n \cdot \chi_{\{x_n\}}$ son continuas. Sea $f : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ definida como $f = \sum_{n \in \omega} f_n$. Tenemos que f está bien definida pues $f(x) \neq 0$, si y sólo si, $x = x_n$ para algún $n \in \omega$ y en este caso, la función f coincide con f_n, entonces, f es continua. Desafortunadamente, la función f no es acotada. De este modo probamos que $\Psi(\mathcal{A})$ no es pseudocompacto.

- Sean $\mathcal{A}$ una familia mad, $Y = \omega$ y $A \subset Y$ un conjunto infinito. Diferenciaremos dos casos. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces, $\{A\}$ es punto límite de A. Si $A \notin \mathcal{A}$, por la Proposición (3.3.7), existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \aleph_0$, entonces, $\{B\}$ es un punto límite de A. Por lo tanto, $\Psi(\mathcal{A})$ es numerablemente compacto en sentido débil.

De este modo hemos probado que las afirmaciones anteriores son equivalentes. □

Varias propiedades de tipo compacidad se heredan a subespacios cerrados. La pseudocompacidad es una excepción.

Proposición 3.3.15. *Sea $\Psi(\mathcal{A})$ un espacio de Mrówka. Entonces, existe un subespacio cerrado $F \subset \Psi(\mathcal{A})$ que no es pseudocompacto.*

Demostración. Por la Proposición (3.3.10), $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado y discreto en $\Psi(\mathcal{A})$. Sea $F = \mathcal{A}$. Entonces, F no es pseudocompacto pues es un espacio discreto infinito, ver la Proposición (3.3.9). □

3.4. Algunas caracterizaciones de los espacios pseudocompactos

La Proposición (2.1.4) es una de las tantas caracterizaciones de los espacios pseudocompactos. En esta sección, enunciaremos algunas que son de interés y que nos ayudarán a presentar nuestros ejemplos finales.

Definición 3.4.1. Sea X un espacio topológico. Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de X es *localmente finita* (*discreta*), si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $|\{s \in S : V \cap A_s\}| < \aleph_0$ ($|\{s \in S : V \cap A_s\}| \leq 1$).

Observación 3.4.2. Toda familia discreta es localmente finita.

Teorema 3.4.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es pseudocompacto.*
2. *Toda familia localmente finita $\{U_s : s \in S\}$, de abiertos no vacíos en X, debe ser finita.*
3. *Toda familia discreta $\{U_s : s \in S\}$, de abiertos no vacíos en X, debe ser finita.*
4. *En X no existen subespacios cerrados, discretos e infinitos que sean C-encajados.*

Demostración. Demostraremos que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

- Sea X un espacio pseudocompacto. Supongamos por contradicción que existe una familia localmente finita $\{U_s : s \in S\}$, de abiertos no vacíos en X, que es infinita. Sin perder generalidad, supongamos que dicha familia puede verse como $\{U_n : n \in \omega\}$. Escogemos, para todo $n \in \omega$, un punto $x_n \in U_n \setminus \{x_k : k < n\}$. Como X es de Tychonoff se tiene que existen funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ tales que $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(X \setminus U_n) \subset \{0\}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función definida como $f(x) = \sum_{n\in\omega} n \cdot |f_n(x)|$. Como $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia localmente finita, para cada $x \in X$ la función f está bien definida y es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, entonces, x posee una vecindad V que intersecta a una cantidad finita de elementos de $\{U_n : n \in \omega\}$, digamos $\{U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}\}$. Se tiene que $f(x) = k_1 \cdot |f_{k_1}(x)| + \cdots + k_n \cdot |f_{k_n}(x)|$, es decir, $f|_V$ es continua pues es una suma finita de funciones continuas. Por lo tanto, existe un abierto $U \subset V$ tal que $f(U) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$; dado que U es un abierto, se concluye que f es continua en x. Como x fue elegido arbitrariamente se cumple que f es continua en X. Pero f no es acotada, luego, X no es pseudocompacto. Por lo tanto, toda familia localmente finita $\{U_s : s \in S\}$, de abiertos no vacíos en X, es finita.

- Es claro que si toda familia localmente finita $\{U_s : s \in S\}$, de abiertos no vacíos en X, es finita, entonces, toda familia discreta $\{V_t : t \in T\}$, de abiertos no vacíos en X, es finita.

- Supongamos por contradicción que $Y \subset X$ es un subespacio cerrado, discreto, infinito y C-encajado. Sin pérdida de generalidad sea $Y = \{y_n : n \in \omega\}$. Tomemos $f : Y \to \mathbb{R}$ definida por $f(y_n) = n$. Como Y está C-encajado en X, existe $g : X \to \mathbb{R}$ extensión continua de f. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos no vacíos de $\mathbb{R}$ tal que $U_n = (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})$. Definimos $V_n = g^{-1}(U_n)$, como $|\{n \in \omega : (g(x) - \frac{1}{3}, g(x) + \frac{1}{3}) \cap (n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})\}| \leq 1$ para todo $x \in X$, se concluye que $g^{-1}(g(x) - \frac{1}{3}, g(x) + \frac{1}{3})$ intersecta a lo más a un miembro de $\{V_n\}_{n\in\omega}$. Por lo tanto, $\{V_n\}_{n\in\omega}$ es una familia discreta infinita, lo cual es una contradicción.

- Supongamos nuevamente por contradicción que X no es pseudocompacto. Entonces, existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua no acotada. Elegimos un conjunto $Y = \{y_n : n \in \omega\}$ tal que $f(y_{n+1}) > |f(y_n)| + 1$ para cada $n \in \omega$. Sea $U_n = f^{-1}((f(y_n) - \frac{1}{3}, f(y_n) + \frac{1}{3}))$, entonces, $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia discreta infinita. Como X es de Tychonoff existen funciones continuas $g_n : X \to [0, 1]$ tales que $g_n(y_n) = 1$ y $g_n(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus U_n$. Sea $h : Y \to \mathbb{R}$ una función continua. La función $\bar{h} = \sum_{n\in\omega} h(y_n) \cdot g_n : X \to \mathbb{R}$ es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, entonces, x posee una vecindad V que intersecta a lo más a un miembro de $\{U_n : n \in \omega\}$, digamos U_k. Se tiene que $\bar{h}(x) = h(y_k) \cdot g_k(x)$, es decir, $\bar{h}|_{U_k}$ es continua pues es el producto de dos funciones continuas. Por lo tanto, existe un abierto $U \subset V$ tal que $\bar{h}(U) \subset (\bar{h}(x) - \varepsilon, \bar{h}(x) + \varepsilon)$, dado que U es un abierto se concluye que f es continua en x. Como x fue elegido arbitrariamente se cumple que f es continua en X y $\bar{h}|_Y = h$. De este modo hemos verificado que Y está C-encajado en X. Finalmente, Y es cerrado y discreto, pues $y_n \in U_n$ para todo $n \in \omega$.

$\square$

Definición 3.4.4. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ dos cubiertas de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$, si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset V$.

Definición 3.4.5. Un espacio X es *paracompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento localmente finito.

Proposición 3.4.6. *Si X es paracompacto y pseudocompacto, entonces, X es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por la paracompacidad de X, existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Como X es pseudocompacto, entonces, $\mathcal{V}$ es finito. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea U un elemento de la cubierta $\mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Entonces, $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : \text{existe } V \in \mathcal{V} \text{ tal que } V \subset U\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. □

Proposición 3.4.7. *Sea X un espacio normal. Si X es pseudocompacto, entonces, X es numerablemente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es normal pero no numerablemente compacto. Entonces, existe $Y \subset X$ cerrado, discreto e infinito. Por el Teorema (1.5.3), Y está C-encajado en X, por lo tanto, X no puede ser pseudocompacto. □

Proposición 3.4.8. *Un espacio X es numerablemente compacto, si y sólo si, todo subespacio cerrado de X es pseudocompacto.*

Demostración. Si X es numerablemente compacto, entonces, todo subespacio cerrado de X es numerablemente compacto, y por consecuencia, pseudocompacto.

Recíprocamente, supongamos que todo subespacio cerrado de X es pseudocompacto. Si X no es numerablemente compacto se tiene que existe $Y \subset X$ cerrado, discreto e infinito. Por la Proposición (3.3.9) se tiene que Y no puede ser pseudocompacto. □

Proposición 3.4.9. *Sea X un espacio metrizable. Si X es pseudocompacto, entonces, X es compacto.*

Demostración. Todo espacio metrizable es normal, por lo tanto, si X es pseudocompacto, entonces, X es numerablemente compacto. Por la Proposición (2.2.4), X es compacto. Otra forma para ver este hecho es que todo espacio metrizable es paracompacto, así, por la Proposición (3.4.6) se concluye que X es compacto. □

Definición 3.4.10. Sea X un espacio topológico. Diremos que $Y \subset X$ es un subespacio *G_δ-denso* en X, si todo conjunto no vacío de tipo G_δ tiene intersección no vacía con Y.

Proposición 3.4.11. *Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subespacio denso y pseudocompacto. Entonces, Y es G_δ-denso en X.*

Demostración. Supongamos que Y no es G_δ-denso en X. Entonces, existe una familia numerable $\{U_n : n \in \omega\}$, de conjuntos abiertos no vacíos tales que $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$ es un conjunto de tipo G_δ y $A \cap Y = \emptyset$. Sea $z \in A$, como X es de Tychonoff existen funciones continuas $f_n : X \to [0,1]$ definidas como $f_n(z) = 0$ y $f_n(X \setminus U_n) \subset \{1\}$. Tomemos la función $g : X \to [0,1]$ definida como $g(x) = \sum 2^{-n} \cdot f_n(x)$. Puesto que para todo $x \in X$ la serie $g(x)$ converge uniformemente y todas las funciones f_n son continuas, se debe tener que g es continua, $g(z) = 0$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \notin A$, en particular $g(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$. Como Y es denso se tiene que $z \in \overline{Y}$, por lo tanto, dado que g es continua, se tiene que para cada $n \in \omega$ existe $y \in Y$ tal que $g(y) < \frac{1}{n}$. Finalmente, sea $f : Y \to \mathbb{R}$ definida como $f(y) = \frac{1}{g|_Y(y)}$. Note que f está bien definida, pues $g(y) \neq 0$ para todo $y \in Y$ y además f es continua y no acotada. Entonces, Y no es pseudocompacto. □

Teorema 3.4.12. *Un espacio X es pseudocompacto, si y sólo si, es G_δ-denso en su compactación de Stone-Čech βX.*

Demostración. Sabemos que X es denso en su compactación de Stone-Čech βX. Si X es pseudocompacto, por la Proposición (3.4.11), debe tenerse que X es G_δ-denso en βX.

Recíprocamente, supongamos que X es G_δ-denso en βX. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y $h : \mathbb{R} \to (0,1)$ un homeomorfismo. Consideremos $g = h \circ f : X \to (0,1)$, la función g es continua y acotada, más aún, existe $\tilde{g} : \beta X \to [0,1]$ extensión continua de g, ver la Proposición (1.7.6). Por otro lado, tanto $\{0\}$ como $\{1\}$ son conjuntos de tipo G_δ en $[0,1]$, pero son tales que $\tilde{g}^{-1}(\{0\}) \cap X = \emptyset = \tilde{g}^{-1}(\{1\}) \cap X$, lo que implica que $\tilde{g}^{-1}(\{0\}) = \emptyset = \tilde{g}^{-1}(\{1\})$. Entonces, $\tilde{g}(\beta X) \subsetneq (0,1)$. Como βX es compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{g}(\beta X) \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Por lo tanto, $g(X) = \tilde{g}(X) \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Como $f = h^{-1} \circ g$, entonces, $f(X) = (h^{-1} \circ g)(X) \subset h^{-1}([\varepsilon, 1-\varepsilon])$. Dado que h es un homeomorfismo, se tiene que f está acotada. Por esto, X es pseudocompato. □

3.5. Ejemplo de Novák

El Teorema de Tychonoff (1.7.3) dice que el producto de una cantidad arbitraria de espacios compactos sigue siendo un espacio compacto, pero para espacios pseudocompactos esto ya no se cumple. Para probar esto, modificaremos un poco la construcción que dio J. Novák, para ver que el producto de dos espacios numerablemente compactos no es necesariamente numerablemente compacto.

Una proposición clave en el desarrollo de este ejemplo es la siguiente:

Proposición 3.5.1. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos tales que X_t es ω-acotado para cada $t \in T$. Entonces, $X = \prod_{t\in T} X_t$ es ω-acotado.*

Demostración. Sean $S \subset X$ un conjunto a lo más numerable y $\pi_t|_S : S \to \pi_t(S) = S_t \subset X_t$ la proyección t-ésima de S. Entonces, $|S_t| \leq |S| \leq \aleph_0$ y $[S_t]_{X_t}$ es un conjunto compacto. Por lo tanto, como $S \subset \prod_{t\in T} S_t \subset \prod_{t\in T}[S_t]_{X_t}$ se concluye que $\bar{S} \subset \prod_{t\in T}[S_t]_{X_t}$, esto último implica que $\bar{S}$ es compacto. □

Antes de pasar directamente a la construcción de nuestro ejemplo, expondremos algunos resultados interesantes de la compactación de Stone-Čech $\beta\omega$ del espacio $D(\omega)$.

Teorema 3.5.2 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery ([6], Teorema 2.3.15))**.** *Sean $\{X_t : t \in T\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si $d(X_t) \leq \mathfrak{m}$ para cada $t \in T$ y $|T| \leq 2^{\mathfrak{m}}$, entonces, $d(\prod_{t\in T} X_t) \leq \mathfrak{m}$.*

Teorema 3.5.3 ([6], Teorema 3.6.11)**.** *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. La compactación de Stone-Čech del espacio $D(\mathfrak{m})$ tiene cardinalidad $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ y peso $2^{\mathfrak{m}}$.*

Corolario 3.5.4. *El espacio $\beta\omega$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ y peso $\mathfrak{c}$.*

Teorema 3.5.5. *Sea X un espacio infinito de cardinalidad $\mathfrak{m}$. Entonces, X contiene un subespacio numerable y discreto.*

Demostración. Si existe $x \in X$ tal que $|X \setminus U| < \aleph_0$ para toda vecindad U de x, entonces, X es homeomorfo a la compactación por un punto del espacio $D(\mathfrak{m})$. De este modo la imagen de cualquier subespacio numerable de $D(\mathfrak{m})$ es el espacio deseado.

Sin embargo, si para todo $x \in X$ se cumple que $|X \setminus U| \geq \aleph_0$, para alguna vecindad U de x. Siempre podemos elegir un punto $y \in X \setminus U$ tal que existe una vecindad de y, $V \subset (X \setminus U)$ tal que $|X \setminus (U \cup V)| \geq \aleph_0$. Repitiendo este proceso, obtenemos un conjunto $A = \{x_n : n \in \omega\} \subset X$ discreto. $\square$

Proposición 3.5.6. *Sea D un espacio discreto. Si $A, B \subset D$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces, $[A]_{\beta D} \cap [B]_{\beta D} = \emptyset$.*

Demostración. Sea $f : D \to [0,1]$ una función tal que $f(d) = 1$ si $d \in A$ y $f(d) = 0$ si $d \in D \setminus A$, entonces, f es una función continua. Por la Proposición (1.7.6), existe una función continua $g : \beta D \to [0,1]$ que extiende continuamente a f. Como los conjuntos $g^{-1}(\{0\}), g^{-1}(\{1\})$ son cerrados en βD se sigue que $[A]_{\beta D} \cap [B]_{\beta D} \subset g^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, pues $A \subset g^{-1}(\{0\})$ y $B \subset g^{-1}(\{1\})$. $\square$

Teorema 3.5.7. *Si A es un subconjunto infinito de $\beta\omega$, entonces, $\bar{A} = 2^{\mathfrak{c}}$.*

Demostración. Es claro que $|\bar{A}| \leq |\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$. Por el Teorema (3.5.5), tenemos que existe un subespacio numerable y discreto $B \subset A$. Sean $C, D \subset B$ tales que $C \cap D = \emptyset$, por la Proposición (3.5.6), se tiene que $[C]_{\beta\omega} \cap [D]_{\beta\omega} = \emptyset$. Entonces, $K = [B]_{\beta\omega}$ es una compactación de B que es equivalente a βB, (ver Proposición (1.7.6). Como consecuencia, K es homeomorfo a $\beta\omega$ y $|K| = 2^{\mathfrak{c}}$, dado que $|\overline{A}| \geq |K|$, pues $K \subset \bar{A}$, entonces, $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$. $\square$

Ahora sí, procedemos a construir nuestro ejemplo. Primero, identifiquemos a $D(\omega)$ con ω.

Lema 3.5.8. *Existe un conjunto $F_1 \subset \beta\omega$ tal que $\omega \subset F_1$, $|F_1| = \mathfrak{c}$ y F_1 es numerablemente compacto.*

Demostración. Sea Z un espacio topológico infinito. Definimos la función $f : [Z]^{\aleph_0} \to Z$ tal que a cada $A \in [Z]^{\aleph_0}$, f le asigna un punto límite en Z. En $\beta\omega$ construiremos por recursión de longitud ω_1 una familia de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tales que $C_0 = \omega$ y

$$C_\alpha = \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right) \cup f\left(\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right]^{\aleph_0} \right), \quad 0 < \alpha < \omega_1.$$

Una característica de estos conjuntos es que, para todo $\alpha \in \omega_1$, la cardinalidad de C_α no excede a $\mathfrak{c}$. Para ver esto, notemos que $|C_0| = \aleph_0 < \mathfrak{c}$ y si

$|C_\gamma| \leq \mathfrak{c}$ para cada $\gamma < \alpha$, entonces, por la Proposición (1.9.2), se tiene que:

$$\left| \left[\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right]^{\aleph_0} \right| = (\aleph_0 \cdot \mathfrak{c})^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \Rightarrow \left| f\left(\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right]^{\aleph_0} \right) \right| = \mathfrak{c},$$

$$\Rightarrow |C_\alpha| = \left| \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right) \cup f\left(\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} C_\gamma \right]^{\aleph_0} \right) \right| \leq \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad 0 < \alpha < \omega_1.$$

Finalmente, sea $F_1 = \bigcup \mathcal{C}$. Es claro que $\omega \subset F_1$ y $|F_1| = \mathfrak{c}$, pues $|F_1| = |\bigcup \mathcal{C}| = \omega_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Además, F_1 es numerablemente compacto pues dado $B \subset F_1$ a lo más numerable, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $B \subset C_\alpha$. Entonces, B tiene un punto límite en $C_{\alpha+1}$ y, por tanto, en F_1. Más aún, F_1 es pseudocompacto. □

Lema 3.5.9. *Existe un conjunto $F_2 \subset \beta\omega$ tal que $\omega \subset F_2$, $|F_2| = \mathfrak{c}$, F_2 es numerablemente compacto y $F_1 \cap F_2 = \omega$.*

Demostración. La construcción de F_2 la haremos por recursión de longitud ω_1. Dado que $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$ y $|F_1| = \mathfrak{c}$, podemos construir una familia de conjuntos $\mathcal{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que $C'_0 = \omega$ y

$$C'_\alpha = \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} C'_\gamma \right) \cup f\left(\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} C'_\gamma \right]^{\aleph_0} \right) \subset \beta\omega \setminus F_1, \quad 0 < \alpha < \omega_1.$$

Naturalmente, si $F_2 = \bigcup C'$, entonces, $\omega \subset F_2$, $|F_2| = \mathfrak{c}$, F_2 es numerablemente compacto, pseudocompacto y $F_1 \cap F_2 = \omega$. □

Proposición 3.5.10. *Sea $X = F_1 \times F_2$. Entonces, existe $D \subset X$ conjunto discreto, clopen e infinito.*

Demostración. Consideremos $\triangle_0 = X \cap \triangle$, donde $\triangle = \{(y, y) : y \in \beta\omega\} \subset \beta\omega \times \beta\omega$. Como $F_1 \cap F_2 = \omega$ tenemos que $\triangle_0 = \{(n, n) : n \in \omega\}$. El conjunto $\{n\}$ es abierto en $\beta\omega$, por lo tanto, $\{(n, n)\} = \pi_1^{-1}(\{n\}) \cap \pi_2^{-1}(\{n\})$ es abierto en $\beta\omega \times \beta\omega$. Entonces, $\triangle_0 = \bigcup_{n\in\omega}\{(n, n)\}$ es abierto en X. Ya que $\triangle$ es un subespacio cerrado de $\beta\omega \times \beta\omega$, entonces, $\triangle_0$ es cerrado en X. La función $\pi_1|_{\triangle_0} : \triangle_0 \to \omega$ es una función continua y biyectiva, que mapea a $\triangle_0$ sobre el espacio discreto ω, de este modo hemos probado que $\triangle_0$ es un subespacio discreto de X. Haciendo $D = \triangle_0$ obtenemos la conclusión deseada. □

Proposición 3.5.11. *X no es pseudocompacto.*

Demostración. Como $D \subset X$ es un conjunto cerrado y discreto, la familia $\{\{x\} : x \in D\}$ es una familia discreta infinita. Entonces, X no es pseudocompacto. $\square$

Podemos ir un poco más allá, demostraremos que existe un espacio Z pseudocompacto tal que $Z \times Z$ no es pseudocompacto.

Teorema 3.5.12 ([6], Teorema 3.10.8)**.** *Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. La suma directa $\bigoplus_{t \in T} X_t$ es numerablemente compacta, si y sólo si, todos los espacios X_t son numerablemente compactos y el conjunto T es finito.*

Definición 3.5.13. Sean X un espacio topológico y $G \subset X$. G se dirá un *dominio cerrado* si $G = \overline{int(G)}$.

Teorema 3.5.14 ([17] Observación 2, de la solución al problema 140)**.** *La pseudocompacidad se hereda a dominios cerrados.*

Proposición 3.5.15. *Existe un espacio pseudocompacto Z tal que $Z \times Z$ no es pseudocompacto.*

Demostración. Por el Teorema (3.5.12), el espacio $Z = F_1 \oplus F_2$ es numerablemente compacto. Entonces, Z es pseudocompacto. Tomemos $Z \times Z$, tenemos que $Z \times Z$ contiene un subespacio clopen (dominio cerrado) $D \subset F_1 \times F_2$ que no es pseudocompacto. Esto último contradice el Teorema (3.5.14). Por lo tanto, $Z \times Z$ no es pseudocompacto. $\square$

3.6. Ejemplo de Shakhmatov

En [14], D. B. Shakhmatov demuestra lo siguiente:

Teorema 3.6.1 ([14], Corolario 1)**.** *Sea λ cualquier cardinal infinito. Entonces, existe un espacio pseudocompacto de Tychonoff tal que todo subconjunto de cardinalidad menor o igual a λ es cerrado y C^*-encajado.*

Nosotros construiremos un espacio de Tychonoff Y tal que todo subespacio a lo más numerable de Y es cerrado y C^*-encajado. Para entender mejor este ejemplo recordemos las siguientes definiciones:

Definición 3.6.2. Un subconjunto A de un ordinal α, es *no acotado en* α, si para todo $\beta < \alpha$ existe $\gamma \in A$ tal que $\beta \leq \gamma$.

Definición 3.6.3. Sean α y β ordinales. Diremos que β es *cofinal* en α, si existe una función $f : \beta \to \alpha$ con la propiedad de que $f(\beta)$ es no acotado en α. A f se le llama *mapeo cofinal* en α.

Definición 3.6.4. La *cofinalidad* de α, denotada por $cf(\alpha)$, se define como: $cf(\alpha) = \text{mín}\{\beta : \text{existe } f : \beta \to \alpha \text{ mapeo cofinal en } \alpha\}$.

Definición 3.6.5. Un conjunto $Z \subset I^A$ es *ω-denso* en I^A, si y sólo si, $\pi_B(Z) = I^B$ para cualquier $B \subset A$ a lo más numerable.

Una proposición clave en nuestra construcción es la siguiente:

Proposición 3.6.6. *Sean A un conjunto y Z un subespacio denso del cubo de Tychonoff I^A. Entonces, Z es pseudocompacto, si y sólo si, Z es ω-denso en I^A.*

Demostración. Supongamos que Z es pseudocompacto y sea $B \subset A$ un conjunto a lo más numerable. Por la Proposición (3.2.7), el espacio $\pi_B(Z) \subset I^B$ es pseudocompacto. Como I^B es metrizable se concluye que $\pi_B(Z)$ es compacto. Dado que $\pi_B(Z)$ es denso en I^B se tiene que $\pi_B(Z) = I^B$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{B}$ la base canónica de I^A. Dado un conjunto $U = \prod_{t \in A} U_t \in \mathcal{B}$, sea $supp(U) = \{t \in A : U_t \neq I\}$. Note que $|supp(U)| < \aleph_0$ para cada $U \in \mathcal{B}$.

Supongamos que Z es ω-denso en I^A y que Z no es pseudocompacto. Entonces, existe una familia localmente finita de cardinalidad infinita $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \omega\}$, de abiertos no vacíos en Z, así mismo, existe una familia de abiertos básicos $\{U_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U_n \cap Z \subset O_n$, para cada $n \in \omega$. Sea $B = \bigcup\{supp(U_n) : n \in \omega\} \subset A$, entonces, la proyección $\pi_B : I^A \to I^B$ es una función abierta ([17], S. 107). Como $\pi_B^{-1}(\pi_B(U_n)) = U_n$ se tiene que si $V_n = \pi_B(U_n)$, entonces, V_n es abierto en I^B para cada $n \in \omega$.

El espacio I^B es compacto, por tanto, pseudocompacto. Por la Proposición (3.4.3), la familia $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ no puede ser localmente finita en I^B, es decir, existe $g \in I^B$ tal que toda vecindad de g intersecta una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{V}$. Tomemos cualquier $z \in Z$ tal que $\pi_B(z) = g$ y una vecindad abierta W de z en Z. Entonces, W intersecta una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{O}$. Por tanto, $\mathcal{O}$ no es una familia localmente finita. En otras palabras, Z debe ser pseudocompacto. □

Proposición 3.6.7. *Identifiquemos a $D(\omega)$ con ω y supongamos que K es una compactación de ω tal que $[A]_K \cap [B]_K = \emptyset$ para cualesquiera $A, B \subset \omega$ ajenos. Entonces, existe un homeomorfismo $f : \beta\omega \to K$ tal que $f(n) = n$ para cada $n \in \omega$. En particular, cualquier mapeo continuo de ω a un espacio compacto puede extenderse continuamente a K.*

Demostración. La existencia del homeomorfismo f entre $\beta\omega$ y K está dada por el Teorema (1.7.6). Sea ahora $g : \omega \to J$ un mapeo continuo sobre un espacio compacto J. Entonces, existe $\tilde{g} : \beta\omega \to J$ extensión continua de g. Por otro lado, $f^{-1} : K \to \beta\omega$ es continua. De este modo hemos probado que $\tilde{g} \circ f^{-1} : K \to J$ es una extensión continua de g a el espacio K. □

Proposición 3.6.8. *Sea N un conjunto tal que $|N| = \varkappa$, donde $\varkappa$ es un cardinal infinito. Entonces, existe una enumeración $\{n_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ del conjunto N tal que cada $n \in N$ ocurre $\varkappa$-veces, es decir, para cada $n \in N$ el conjunto $\{\alpha < \varkappa : n_\alpha = n\}$ tiene cardinalidad $\varkappa$.*

Demostración. Como $|N| = \varkappa$ existe una biyección $f : \varkappa \to N$. Por otro lado, $|\varkappa \times \varkappa| = \varkappa$ ([4], Teorema 5.2.4), así que existe un mapeo biyectivo $g : \varkappa \to \varkappa \times \varkappa$. Finalmente, sea $\pi : \varkappa \times \varkappa \to \varkappa$ la proyección sobre el primer factor. De este modo $\{n_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, donde $n_\alpha = f(\pi(g(\alpha)))$, es la enumeración requerida.

Sea $h = f \circ \pi \circ g : \varkappa \to N$, veremos que $|\{\alpha \in \varkappa : h(\alpha) = n\}| = \varkappa$ para cualquier $n \in N$. Tenemos que $h^{-1}(n) = \{\alpha \in \varkappa : h(\alpha) = n\} = (f \circ \pi \circ g)^{-1}(n) = g^{-1}(\pi^{-1}(f^{-1}(n)))$ para cada $n \in N$. Como f es biyectiva se tiene que existe un único $\gamma \in \varkappa$ tal que $f(\gamma) = n$. Por otro lado, el conjunto $A = \{(\gamma, \beta) : \beta \in \varkappa\} \subset \varkappa \times \varkappa$ cumple que $\pi(A) = \gamma$, en términos simples, tenemos que $A = \{\gamma\} \times \varkappa$ lo que implica que $|A| = \varkappa$. Adicionalmente, del hecho de que g es una función biyectiva, se concluye que $|g^{-1}(A)| = \varkappa$. De esta forma, hemos probado que $|h^{-1}(n)| = \varkappa$ para todo $n \in N$. □

Observación 3.6.9. La proposición anterior nos dice que todo conjunto infinito N de cardinalidad $\varkappa$, se puede dividir en $\varkappa$ subconjuntos, cada uno con $\varkappa$ elementos. Es más, las enumeraciones de este tipo son tales que para cada $n \in N$ el conjunto $\{\alpha \in \varkappa : n_\alpha = n\}$ es cofinal en $\varkappa$.

3.6.1. Construcción

Sea X un espacio discreto de cardinalidad $\aleph_0$, θ un conjunto de cardinalidad $w(X) = \aleph_0$ y Λ un *ordinal inicial* de cardinalidad $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (el ordinal más pequeño de cardinalidad $2^{\aleph_0}$). Sin pérdida de generalidad supongamos que $X \cap \theta = \emptyset$, $X \cap \Lambda = \emptyset$ y $\theta \cap \Lambda = \emptyset$. Finalmente, para cada $A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$ se define el conjunto $F_A = \{g \in I^{\theta \cup \Lambda} : \pi_\alpha(g) = 0 \text{ para todo } \alpha \in (\theta \cup \Lambda) \setminus A\}$.

Proposición 3.6.10. *Sea $S = \Sigma_0 I^{\theta \cup \Lambda}$. Entonces, $S = \bigcup\{F_A : A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}\}$.*

Demostración. Sea $g \in S$, el conjunto $A = \{\alpha \in \theta \cup \Lambda : \pi_\alpha(g) \neq 0\}$ tiene cardinalidad a lo más $\aleph_0$. Por tanto, $A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$. Como $\pi_\alpha(g) = 0$ para cada $\alpha \in (\theta \cup \Lambda) \setminus A$ se tiene que $g \in F_A$. Esto último implica que $S \subset \bigcup\{F_A : A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}\}$.

Recíprocamente, sea $g \in \bigcup\{F_A : A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}\}$. Entonces, existe $A \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$ tal que $g \in F_A$. Por lo tanto, $|\{\alpha \in \theta \cup \Lambda : \pi_\alpha(g) \neq 0\}| = |A| \leq \aleph_0$. De esta forma hemos probado que $g \in S$. □

De un modo más sintético tenemos que $F_A = I^A \times \{0\}^{(\theta \cup \Lambda) \setminus A}$, luego, $|F_A| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Además, como $|[\theta \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}| = \mathfrak{c}$ (Proposición (1.9.2)) se concluye que $|S| = \mathfrak{c} = |\Lambda|$. Aplicando la Proposición (3.6.8) se tiene que $\{g_\beta : \beta \in \Lambda\}$ es una enumeración de S tal que para toda $g \in S$ el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : g_\alpha = g\}$ es cofinal en Λ.

Antes de continuar, dotaremos a Λ de la topología discreta y en $X \cup \Lambda$ tomaremos la topología de la suma discreta. Aplicando el Teorema (1.6.7) a nuestro ejemplo se tiene que existe una familia de mapeos continuos $\{\psi_\alpha : \alpha \in \theta\}$ con $\psi_\alpha : X \to I$ tales que el mapeo diagonal $\triangle\{\psi_\alpha : \alpha \in \theta\} : X \to I^\theta$ es un encaje topológico. Para cada $\alpha \in \theta$, sea $f_\alpha : X \cup \Lambda \to I$ una función tal que $f_\alpha|_X = \psi_\alpha$ y $f_\alpha(\gamma) = \pi_\alpha(g_\gamma)$ para cada $\gamma \in \Lambda$.

Sean $\mathcal{M} = \{\langle A, B\rangle : A, B \in [X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0} \text{ y } A \cap B = \emptyset\}$ y $P : \mathcal{M} \to [X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$ una función tal que $P(\langle A, B\rangle) = A$. Es claro que P es sobreyectiva, por lo tanto, $|\mathcal{M}| \geq |[X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}| = \mathfrak{c} = |\Lambda|$. Por otro lado, $\mathcal{M} \subset [X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0} \times [X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$. Entonces, $|\mathcal{M}| \leq \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c} = |\Lambda|$. Se concluye que $|\mathcal{M}| = |\Lambda|$.

De la Proposición (3.6.8), se tiene que existe una enumeración $\{\langle A_\alpha, B_\alpha\rangle : \alpha \in \Lambda\}$ de $\mathcal{M}$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : \langle A_\alpha, B_\alpha\rangle = \langle A, B\rangle\}$ es cofinal en Λ para cada $\langle A, B\rangle \in \mathcal{M}$. Note que todo subconjunto de $X \cup \Lambda$ de cardinalidad menor o igual que $\aleph_0$ es cerrado y C^*-encajado. Por lo tanto, para cada $\alpha \in \Lambda$ podemos fijar una función $\psi_\alpha : X \cup \Lambda \to I$ tal que $\psi_\alpha(A_\alpha) \subset \{1\}$ y $\psi_\alpha(B_\alpha) \subset \{0\}$. Observe que si $\gamma \in \Lambda$, entonces, $\psi_\alpha(\gamma) = 1$ si $\gamma \in A_\alpha$ y $\psi_\alpha(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin A_\alpha$. De este modo queda determinada la función $\varphi_\alpha : \Lambda \to I$ definida por la regla:

$$\varphi_\alpha(\gamma) = \begin{cases} \pi_\alpha(g_\gamma) & \text{si } \alpha \leq \gamma \\ \psi_\alpha(\gamma) & \text{si } \alpha > \gamma \end{cases} . \tag{3.2}$$

Sea $f_\alpha : X \cup \Lambda \to I$ una función que coincide con φ_α en Λ y con ψ_α en X. Entonces, la función producto diagonal $j = \triangle\{f_\alpha : \alpha \in \theta \cup \Lambda\} : X \cup \Lambda \to I^{\theta \cup \Lambda}$ nos regala el espacio deseado: $Y = j(X \cup \Lambda) \subset I^{\theta \cup \Lambda}$.

Lema 3.6.11. *El espacio $j(X)$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Como para cada $\alpha \in \theta \cup \Lambda$ el mapeo $f_\alpha|_X = \psi_\alpha$ es continuo, el mapeo $j|_X = \triangle\{\psi_\alpha : \alpha \in \theta \cup \Lambda\}$ es continuo. Por otro lado, el mapeo $\triangle\{\psi_\alpha : \alpha \in \theta\}$ es un encaje topológico. Se concluye que el mapeo $j|_X$ es un homeomorfismo entre X y su imagen $j(X)$. En particular, $|j(X)| = |X| = \aleph_0$. □

Con el afán de que todo sea más claro enunciaremos el Teorema de König y algunas de sus consecuencias.

Teorema 3.6.12 (de König, ([10], Teorema 4.54))**.** *Sea K un conjunto de índices. Si para cada $k \in K$ se cumple que $0 < \lambda_k < \mu_k$, donde λ_k, μ_k son cardinales para cada $k \in K$, entonces,*

$$\sum_{k \in K} \lambda_k < \prod_{k \in K} \mu_k.$$

Corolario 3.6.13 ([10], Teorema 5.5)**.** *Para todo cardinal infinito $\varkappa$ se cumple que $\varkappa < \varkappa^{cof(\varkappa)}$.*

Corolario 3.6.14 ([10], Teorema 5.6)**.** *Si $\varkappa$ es un cardinal infinito, entonces, $\varkappa < cof(2^\varkappa)$.*

Proposición 3.6.15. *Sean $A, B \in [X \cup \Lambda]^{\leq \aleph_0}$ y $g \in S$. Entonces, existen $\xi, \gamma \in \Lambda$ tales que $\xi, \gamma > \sup(B)$, $A_\xi = A$ y $g_\gamma = g$.*

Demostración. Como $|B| \leq \aleph_0$ y $\aleph_0 < cof(2^{\aleph_0}) = cof(\mathfrak{c})$, existe $\lambda = sup(B) < \mathfrak{c}$. Debido a la forma de las enumeraciones de S y de $\mathcal{M}$, existen $\xi, \gamma \in \mathfrak{c} \setminus \lambda$ tales que $A_\xi = A$ y $g_\gamma = g$. □

Proposición 3.6.16. *Y es denso en $I^{\theta\cup\Lambda}$.*

Demostración. Sean $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ un subconjunto finito de $\theta \cup \Lambda$ y $U_1, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos de I. Considérese el conjunto $U = \{f \in I^{\theta\cup\Lambda} : f(\lambda_i) \in U_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Tómese $g \in I^{\theta\cup\Lambda}$ tal que $\pi_{\lambda_i}(g) = u_i \in U_i$ si $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $\pi_{\lambda_i}(g) = 0$ si $i \notin \{1, \ldots, k\}$. Entonces, g es un elemento de $S \cap U$. Por la Proposición (3.6.15), existe $\gamma \in \Lambda$ mayor que cualquier λ_i para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $g_\gamma = g$. Esto implica que $\pi_{\lambda_i}(g_\gamma) = f_{\lambda_i}(\gamma) = (\pi_{\lambda_i} \circ j)(\gamma)$. Se desprende que $g_\gamma = j(\gamma) \in Y$, entonces, $Y \cap U \neq \emptyset$. □

Proposición 3.6.17. *El conjunto Y es ω-denso en $I^{\theta\cup\Lambda}$.*

Demostración. Sean $D \subset \theta \cup \Lambda$ tal que $|D| \leq \aleph_0$ y $h \in I^D$. Como $D \in [\theta \cup \Lambda]^{\leq\aleph_0}$ existe $g \in S$ tal que $\pi_D(g) = g|_D = h$. Por la Proposición (3.6.15), existe $\beta > \sup\{\gamma : \gamma \in D \cap \Lambda\}$ tal que $g = g_\beta$. Entonces, $g_\beta = j(\beta) \in Y$ y $\pi_D(j(\beta)) = h$. De este modo hemos probado que $\pi_D(Y) = I^D$ para cualquier $D \subset X \cup \Lambda$ a lo más numerable. □

Observación 3.6.18. Las Proposiciones (3.6.16) y (3.6.17) implican que Y es pseudocompacto.

Proposición 3.6.19. *Sean $M, N \in [Y]^{\leq\aleph_0}$ tales que $M \cap N = \emptyset$. Entonces, $[M]_{I^{\theta\cup\Lambda}} \cap [N]_{I^{\theta\cup\Lambda}} = \emptyset$.*

Demostración. Sean $A, B \in [X \cup \Lambda]^{\leq\aleph_0}$ tales que $j(A) = M, \quad j(B) = N$ y $A \cap B = \emptyset$. Por la Proposición (3.6.15), existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\beta > \sup\{\gamma : \gamma \in (A \cup B) \cap \Lambda\}$, $A_\beta = A$ y $B_\beta = B$. Como $\langle A_\beta, B_\beta\rangle \in \mathcal{M}$ existe una función continua $\psi_\beta : X \cup \Lambda \to I$ que separa a $A_\beta = A$ de $B_\beta = B$, es decir, A_β y B_β están *completamente separados*. Por otro lado, $j(A_\beta) = M$ y $j(B_\beta) = N$ también están separados por una función continua, a saber, $\pi_\beta : I^{\theta\cup\Lambda} \to I$, pues $\pi_\beta(j(A_\beta)) = (\pi_\beta \circ j)(A_\beta) = f_\beta(A_\beta) = \psi_\beta(A_\beta) \subset \{1\}$, análogamente, $\pi_\beta(j(B_\beta)) = \psi_\beta(B_\beta) \subset \{0\}$. Entonces, $[M]_{I^{\theta\cup\Lambda}} \cap [N]_{I^{\theta\cup\Lambda}} = \emptyset$. □

Proposición 3.6.20. *Sea $D \in [Y]^{\leq\aleph_0}$. Entonces, D es cerrado.*

Demostración. Sean $D \in [Y]^{\leq\aleph_0}$ y $y \in Y \setminus D$. De la Proposición (3.6.19) se tiene que $[D]_{I^{\theta\cup\Lambda}} \cap [\{y\}]_{I^{\theta\cup\Lambda}} = \emptyset$. Por lo tanto, D es cerrado. □

Observación 3.6.21. Todo subconjunto a lo más numerable de D también será cerrado, de aquí que D sea discreto (como subespacio de Y). En particular X es cerrado en Y.

Proposición 3.6.22. *Sea $D \in [Y]^{\leq \aleph_0}$. Entonces, D está C^*-encajado en Y.*

Demostración. Sea $D \in [Y]^{\leq \aleph_0}$. Como D es discreto podemos establecer un homeomorfismo entre D y ω. Sea $Z = [D]_{I^{\theta \cup \Lambda}}$, por la Proposición (3.6.19), se tiene que $[M]_Z \cap [N]_Z = \emptyset$, cuando $M, N \subset D$ y $M \cap D = \emptyset$. Por la Proposición (3.6.7), Z coincide con la compactación de Stone-Čech βD.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Por la Proposición (3.6.7), existe una función continua $\tilde{f} : Z \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}|_D = f$. Por el Teorema (1.5.3), se tiene que $\tilde{f}$ posee una extensión continua $\tilde{\tilde{f}} : I^{\theta \cup \Lambda} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\tilde{f}}|_Z = \tilde{f}$. Finalmente, la función $g = \tilde{\tilde{f}}|_Y$ extiende continuamente a f sobre Y. $\square$

Uniendo todas las proposiciones anteriores tenemos que hemos construido un espacio pseudocompacto Y tal que X está encajado en Y como un subconjunto cerrado y todos los subconjuntos a lo más numerables de Y son cerrados y C^*-encajados.

Podemos decir un poco más, modificando un poco el argumento dado en ([1], Proposición 0.3.6), puede verse que para cualquier espacio de Tychonoff R, $C_p(R, I)$ es un conjunto denso de I^R. Con esto demostraremos que $C_p(Y, I)$ es pseudocompacto.

Proposición 3.6.23. *Considere el espacio $C_p(Y, I) \subset I^Y$. Entonces, $C_p(Y, I)$ es ω-denso en I^Y.*

Demostración. Sean $B \subset Y$ a lo más numerable y $f \in I^B$. Por la Proposición (3.6.22), B está C^*-encajado en Y. Por tanto, existe $g \in C_p(Y, I)$ tal que $g|_B = f$. Esto muestra que $\pi_B(C_p(Y, I)) = I^B$. $\square$

Antes de dar paso a la parte final del texto, es necesario hacer notar un hecho: La pseudocompacidad no implica la compacidad numerable en sentido débil. Shakhmatov construyó el espacio Y de manera que todo conjunto de cardinalidad menor o igual que $\aleph_0$ fuera cerrado y C^*-encajado. Pero hay algo más en este ejemplo que nos es de utilidad: Y es un espacio "extremadamente" no numerablemente compacto.

Proposición 3.6.24. *Y no es numerablemente compacto en sentido débil.*

Demostración. Sea $D \subset Y$ un subespacio denso de Y. Sabemos que todo subconjunto numerable de D es cerrado y discreto. Analizando la Definción (3.3.1) se concluye que Y no es numerablemente compacto en sentido débil.
$\square$

Capítulo 4

El Teorema de Norman Noble

Sabemos que la pseudocompacidad no se hereda a subespacios cerrados. En ([12], 1969), Norman Noble demostró que todo espacio de Tychonoff puede encajarse como un subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto de Tychonoff.

La demostración que dió N. Noble de este hecho hace uso de la compactación de Stone-Čech de X y de un ordinal ω_α tal que $|\omega_\alpha| > |\beta X|$. La demostración que se dará a continuación difiere de la original en muchos sentidos, pero para nuestros própositos es la idónea.

4.1. Demostración

Proposición 4.1.1. *En I^{ω_1} existe un subespacio R tal que $R \cap \Sigma_0 I^{\omega_1} = \emptyset$ y R es homeomorfo a I.*

Demostración. Sea $R = \{x \in I^{\omega_1} : \pi_0(x) = x_0 \in I \text{ y } \pi_\alpha(x) = 1, \text{ para cada } \alpha \in \omega_1 \setminus \{0\}\}$. Como $\Sigma_0 I^{\omega_1} = \{x \in I^{\omega_1} : |\alpha \in \omega_1 : \pi_\alpha(x) \neq 0| \leq \aleph_0\}$, entonces, $R \cap \Sigma_0 I^{\omega_1} = \emptyset$.

Para ver que R es homeomorfo a I basta ver que la función $f : R \to I$, donde $f = \pi_0 \circ i_R$, es un homeomorfismo.

1. La función $f : R \to I$ es continua. Dado que ambas funciones son continuas, entonces, su composición es una función continua.

2. La función $f : R \to I$ es biyectiva:

- Inyectiva. Sean $x, y \in R$ dos puntos distintos. Entonces, existe $\alpha \in \omega_1$ tales que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Por la forma en que está definido el conjunto R debe tenerse que $x_0 \neq y_0$. De aquí que $f(x) = (\pi_0 \circ i_R)(x) = \pi_0(i_R(x)) = \pi_0(x) = x_0 \neq y_0 = \pi_0(y) = \pi_0(i_R(y)) = (\pi_0 \circ i_R)(y) = f(y)$.
- Sobreyectiva. Sea $x_0 \in I$. El punto $x \in R$ tal que $\pi_0(x) = x_0$ es tal que $f(x) = x_0$.

3. Note que $R = I \times \{1\}^{\omega_1 \setminus \{0\}}$, de aquí que R sea compacto.

Por lo tanto, $f : R \to I$ es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 4.1.2 (Teorema de N. Noble)**.** *Todo espacio de Tychonoff puede encajarse como un subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto de Tychonoff.*

Demostración. Tomemos $P = R \cup \Sigma_0 I^{\omega_1}$. Por el Teorema (1.6.7), existe una mapeo $g : X \hookrightarrow I^\varkappa$, donde $\varkappa = w(X)$. Sea $f : R \to I$ el homeomorfismo descrito en la Proposición (4.1.1), si $f_\alpha = f$ para todo $\alpha \in \varkappa$, entonces, $F = \prod_{\alpha \in \varkappa} f_\alpha : R^\varkappa \to I^\varkappa$ es un homeomorfismo. $R^\varkappa$ es compacto, F es continua en virtud del Teorema (1.3.2) y es biyectiva. De este modo la función $h = (F^{-1} \circ g)$ es tal que $h : X \hookrightarrow R^\varkappa$. Como es usual, tomaremos a X como subespacio de $R^\varkappa$.

Note que $P^\varkappa = R^\varkappa \cup (\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa$. Sea $Z = X \cup (\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa \subset P^\varkappa$, por el Corolario (1.3.5), se tiene que $(\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa$ es denso en $(I^{\omega_1})^\varkappa$. Como $(\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa \subset Z \subset P^k \subset (I^{\omega_1})^\varkappa$ y el espacio $\Sigma_0 I^{\omega_1}$ es ω-acotado, entonces, $(\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa$ es ω-acotado y por ende pseudocompacto, ver las Proposiciones (3.5.1) y (3.2.5). De este modo hemos probado que Z es pseudocompacto.

Como $R^\varkappa$ es compacto y $X \subset R^\varkappa$, entonces, $[X]_{P^\varkappa} \cap (\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa = \emptyset$, lo que implica que $[X]_Z \cap (\Sigma_0 I^{\omega_1})^\varkappa = \emptyset$. De este modo se observa que X es cerrado en Z. $\square$

Conclusión

Los ejemplos presentados son contundentes. Aunque la compacidad $\Rightarrow$ compacidad numerable $\Rightarrow$ compacidad numerable en sentido débil $\Rightarrow$ pseudocompacidad. Las implicaciones en sentido contrario no se cumplen, en ningún caso. De hecho, la construcción de D. B. Shakhmatov es un ejemplo de un espacio que es “extremadamente” no numerablemente compacto. Esto último hace pensar que entre la compacidad numerable y la pseudocompacidad existe, al menos, toda una clase distinta de espacios topológicos. En resumen, la clase de los espacios pseudocompactos resulta ser muy amplia, tal vez más de lo que hubiera imaginado Hewitt.

Bibliografía

[1] ARKHANGEL'SKII, A.V. (1991) *Topological Function Spaces, Mathematics and its Aplications (Vol. 78).* Kluwer Academic Publishers.

[2] CASARRUBIAS-SEGURA, F., & TAMARIZ-MASCARÚA, A. *Elementos de Topología de Conjuntos.*

[3] ČECH, E. (1937). *On bicompact spaces.* Annals of Mathematics, 823-844.

[4] CIESIELSKI, K. (1997). *Set theory for the working mathematician (Vol. 39).* Cambridge University Press.

[5] CORSON, H. H. (1959). *Normality in subsets of product spaces.* American Journal of Mathematics, 785-796.

[6] ENGELKING, R. (1989). *General Topology, Sigma series in pure mathematics, vol. 6.*

[7] GEL'FAND, I., & KOLMOGOROV, A. (1993). *On rings of continuous functions on topological spaces.* In The Mathematical Legacy of Eduard Čech (pp. 62-66). Birkhäuser Basel.

[8] HART, K. P., NAGATA, J. I., & VAUGHAN, J. E. (2003). *Encyclopedia of general topology.* Elsevier.

[9] HEWITT, E. (1948). *Rings of real-valued continuous functions. I.* Transactions of the American Mathematical Society, 45-99.

[10] IVORRA-CASTILLO, C. *Teoría de conjuntos.*

[11] MRÓWKA, S. (1955). *On completely regular spaces.* Fundamenta Mathematicae, 1(41), 105-106.

[12] Noble, N. (1969). *Countably compact and pseudocompact products.* Czechoslovak Mathematical Journal, 19(3), 390-397.

[13] Novák, J. (1953). *On the Cartesian product of two compact spaces.* Fund. Math, 40, 106-112.

[14] Shakhmatov, D. B. (1986). *A pseudocompact Tychonoff space all countable subsets of which are closed and C^*-embedded.* Topology and its Applications, 22(2), 139-144.

[15] Stone, M. H. (1937). *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Transactions of the American Mathematical Society, 41(3), 375-481.

[16] Tamariz-Mascarúa, A. *α-Pseudocompactness in C_p-Spaces.*

[17] Tkachuk, V. V. (2011). *Cp-theory Problem Book.* Springer.

Índice alfabético