Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del Constructo “Demostración Matemática”, en la Comunidad de Matemáticos de la FCFM-BUAP.

Bajo la Teoría de la Influencia Minoritaria

Tesis presentada como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Ricardo Guzman Fuentes

Director de tesis: Dr. José Antonio Juárez López

Co-directora de tesis: Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

Puebla Pue. 2014

Todo matemático tiene tres obligaciones morales: Hacer investigación, divulgar y enseñar matemáticas; para esta última no hay recetas mágicas.

A mis padres, hermanos, hermanas

y aquellos, que sin un vinculo

consanguíneo, son parte de mi familia.

Introducción

En ocasiones se considera a la enseñanza de la Matemática como un proceso “trivial” y esto ocurre en parte porque los conocimientos matemáticos parecieran de fácil acceso para quien estudia matemáticas por elección, debido a la “naturalidad” con que se estructuran, sensación que proviene del razonamiento que se utiliza. No obstante, para quien estudia matemáticas por imposición (de manera obligatoria) y que acude a la escuela, este conocimiento y el razonamiento involucrado resulta muy lejano a lo natural de su entorno dado que, el cuerpo científico del conocimiento matemático presenta un desarrollo artificial y depurado que, en ocasiones, no se parece al desarrollo cognitivo del conocimiento matemático (Larios, 2006).

Uno de los problemas en Educación Matemática (también conocida como: Matemática Educativa, Didáctica de las Matemáticas, etc.) está relacionado con la construcción de la demostración y la aprehensión de su papel, además, se añaden otras cuestiones como es el resolver problemas, construir nociones o realizar demostraciones (Balacheff, 2000; Crespo, 2007; Guzmán, 2012; Larios, 2003 y 2006; Martínez & Viramontes, 2010).

La mayoría de las investigaciones realizadas en torno de la *Demostración Matemática* (Crespo, 2007; Larios, 2003 y 2006), se centran en la construcción de los alumnos (de varios niveles educativos) del concepto de la demostración matemática en distintos escenarios socioculturales e incluso la influencia de la tecnología (Larios 2006, Guzmán, 2012).

El aprendizaje de la demostración matemática se realiza en un contexto, en el cual encontramos influencia sociocultural (Crespo, 2007). Consideraremos entonces a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. Esta no es la misma de una comunidad a otra, está determinada por su contexto y se ha modificado de una cultura a otra (Crespo, 2007).

Los procesos de influencia social pueden ser definidos, en su acepción más específica, como regidores de las modificaciones de todo tipo de respuestas (percepciones, juicios, opiniones, comportamientos, etc.) observables en el individuo, cambios originados por el conocimiento de las respuestas de otro(s) individuo(s) (Pérez & Mugny, 1985).

Las minorías proponen alternativas e ideas originales que son a menudo un agente de la innovación y el cambio social. Crean conflicto social dando propuestas alternativas a las establecidas. Las minorías son, por lo general, los grupos numéricamente pequeños que cuestionan las normas sociales. Las minorías influyen en el pensamiento, las actitudes y el comportamiento de las personas, por ser coherentes y flexibles en su negociación con su objeto de influencia. Dicha influencia se presenta más a menudo de manera latente que manifiesta, dando lugar a diferentes tipos de influencia (Gardikiotis, 2011).

El objetivo de esta investigación es encontrar el tipo de influencia que ejerce el profesorado en la comunidad de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en torno a la construcción del concepto "demostración matemática" bajo la *Teoría de la Influencia Minoritaria*, además, de poder dar una posible respuesta a las cuestiones:

- ¿Los profesores de la FCFM forman una minoría en términos de normas y poder?

- ¿ Los profesores (de la FCFM - BUAP) generan la innovación en el conocimiento de sus alumnos (de la misma institución)?

Para llevar a cabo la presente investigación se utilizó una metodología con el enfoque cualitativo (Hernández, Fernandez & Baptista; 2002). La población a la que se le aplicó la entrevista fue: 5 profesores que imparten clases en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas a todos los niveles desde licenciatura hasta posgrado, los cuales realizan investigación de diversas ramas de la matemática; 10 alumnos de primer año y 10 de último año de la misma institución (licenciaturas en: matemáticas, matemáticas aplicadas y actuaría).

Cabe mencionar que hasta la fecha, no se encontraron trabajos, en los cuales se analicen problemas de la Educación Matemática bajo el marco de la *Teoría de la Influencia Minoritaria,* mucho menos relacionados con la demostración matemática.

El trabajo está conformado por cuatro capítulos, las conclusiones, bibliografía correspondiente y anexos.

El capítulo 1 se centra en la demostración matemática, en cómo ha evolucionado este concepto y dos clasificaciones de ésta, en tanto a su nivel de *"formalismo"* (sección 1.2.1) y la *función* (sección 1.2.2) que se le puede dar a una demostración matemática. Esto con el propósito de clarificar este concepto tan valioso en la ciencia llamada Matemáticas.

El capítulo 2, comprende la Teoría de la Influencia Minoritaria, cómo se define una minoría, qué tipos de influencia produce una minoría, comparación entre la influencia de una mayoría y una minoría, además, modelos de análisis de la influencia minoritaria.

En el capítulo 3 se exponen, la metodología utilizada para la realización de nuestra investigación, se muestra la manera en la que se llevó a cabo este estudio y el sustento del mismo; se describen las características de la población de estudio, además, se explica el propósito de cada sección los cuestionarios y se justifica el uso de los mismos.

En el capítulo 4 se presenta el análisis cualitativo de los resultados obtenidos mediante el instrumento de investigación y también se hace la interpretación y el análisis de las entrevistas realizadas; bajo el marco planteado en los dos primeros capítulos.

En las conclusiones se incluye una breve discusión sobre los resultados obtenidos.

La bibliografía que se presenta en esta investigación tiene la finalidad de dar a conocer al lector las referencias bibliográficas que se utilizaron, asimismo, servirle como una guía de consulta para profundizar en este tema y de referencia en otras investigaciones. Finalmente, en los anexos aparece el cuestionario utilizado en las entrevistas, en sus dos versiones, tipo I y tipo II.

Índice general

Capítulo 1

Acerca de la Demostración Matemática

1.1. Un poco sobre la Demostración Matemática

El primer contacto con la Demostración en matemáticas produce interrogantes como: ¿Para qué demostrar algo que es evidente?, "si el profesor lo dice, ¿por qué hay que demostrarlo?", ¿qué es una demostración?, ¿para qué sirve una demostración?, entre muchas más interrogantes, sobre la utilidad en la matemática de un argumento demostrativo, sin saber que éste es uno de los pilares de la misma, que sin ella la matemática no sería mas que una técnica.

Fetísov (1980) describe unos ejemplos de las frustraciones que una demostración puede ocasionar como en el siguiente ejemplo:

> *...recientemente un alumno de octavo grado me enseñó su trabajo de control, por el que "injustamente", según él, le habían rebajado la nota. En el problema propuesto se daba un trapecio isósceles, cuyas bases tenían respectivamente 9 y 25 cm, los lados no paralelos 17 cm, se pedía hallar la altura del trapecio. Para resolver este problema, en el trapecio había inscrito una circunferencia e indicaba, basándose en el teorema del cuadrilátero circunscrito (según el cual las sumas de los lados opuestos del cuadrilátero circunscrito son iguales), en dicho trapecio podía inscribirse una circunferencia (puesto que 9+25=17+17). Después la altura la determinaba con el diámetro de la circunferencia inscrita en trapecio isósceles, el cual era igual a la media proporcional entre las bases del mismo (este teorema había sido demostrado por los alumnos en uno de los problemas resueltos antes).*
>
> *La resolución parecía muy sencilla y convincente, pero el profesor subrayó que la referencia al teorema del cuadrilátero circunscrito no era correcta ...¿Donde está el error? —me preguntaba.*

El alumno del que habla Fetísov, no encontraba error alguno en su razonamiento y menos en el argumento demostrativo que presentaba. Larios (2003, pp 164-165) expone casos de profesores del posgrado en Enseñanza de las Matemáticas, donde se les pide demostrar que dados dos complejos z_1 y z_2, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (donde $\overline{z}$ es el conjugado del número complejo z). Larios encuentra que un entrevistado da como "demostración" un ejemplo (ponerle un valor a cada complejo) y otro, a pesar de dar un argumento general, llega a ver ese argumento como un ejemplo. Esto arroja la interrogante: ¿ Qué es una demostración matemática?

Desde el punto de vista histórico, es innegable que fue Grecia el lugar donde apareció la matemática como ciencia hipotético-deductiva (una referencia de este hecho es la obra de Euclides: Los elementos). Cabe mencionar que la demostración no siempre formó parte natural de la actividad matemática, los "matemáticos" en culturas antiguas, como babilónica, egipcia y china, sólo estaban interesados en presentar resultados que pudieran ser utilizados en diversas aplicaciones y no en la manera de cómo éstos se obtenían (tal vez dichos resultados eran probados). Szabo (citado por Arsac 1987) atribuye el surgimiento de la demostración en matemáticas a la transformación de la matemática en ciencia hipotético-deductiva, esta transformación fue consecuencia de la "aplicación" de las reglas del debate que gobernaba en la sociedad griega.

De acuerdo con autores como: Balacheff (2000), Larios (2003), Guzmán (2012), entre otros; el concepto de demostración matemática, ha evolucionado notablemente a través de la historia, el qué es y cuándo se la considera válida, es relativo al escenario sociocultural, he aquí unas concepciones de la misma a través del tiempo:

- **Ignacio Bartolache** (Nueva España, siglo XVIII): *"... es, por un exacto y bien ordenado discurso, la conexión que hay entre la hipótesis y la tesis, empleando para estos otras proposiciones establecidas de antemano, hasta venir a caer de silogismo en silogismo en la dicha tesis como en una consecuencia necesaria"* (citado por Larios 2003).

- **Morris Kline** (Estados Unidos, siglo XX): *"Todas las demostraciones matemáticas deben ser deductivas. Cada demostración es una cadena de inferencias deductivas y cada una de éstas con sus correspondientes premisas y conclusiones"*(citado por Larios 2003).

- **Balacheff** (1987): *"...son secuencias de enunciados organizados según reglas determinadas"*(Balacheff, 1987).

- **Mendelson** (1997) *"...una demostración en $\mathbb{F}$ [*], es una sucesión $\beta_1 \ldots \beta_k$ de fórmulas bien formadas, tal que para cada i, β_i es un axioma de $\mathbb{F}$ ó β_i es consecuencia directa de alguna fórmula bien formada antecesora en la sucesión por virtud de una o de otra regla de inferencia de $\mathbb{F}$ "*(Mendelson, 1997).

En términos generales, la concepción de lo que es una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas.

1.2. Clasificación de las Demostraciones

Presentaremos dos clasificaciones (no son las únicas clasificaciones que se pueden encontrar) para poner mas claro qué se entiende como una demostración matemática. Cabe aclarar que la clasificación mas usual es la que se enfoca en la forma de la prueba, comunmente llamadas demostración directa e indirecta (por reducción al absurdo, por inducción matemática, por construcción, etcétera).

[*] Donde $\mathbb{F}$ es un sistema formal bien definido, con reglas de inferencia válidas en $\mathbb{F}$.

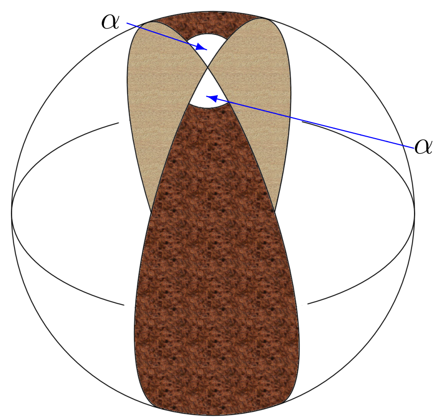


Figura 1.1: Una doble luna con ángulo α.

1.2.1. Clasificación de Lakatos

Lakatos (2007), sostiene que aún cuando la concepción de qué es una demostración (como una cadena de deducciones), entre la comunidad matemática, es "unánime", los matemáticos puros niegan las demostraciones de los aplicados, mientras que los lógicos, a su vez, la de los puros. Los logicistas desprecian las demostraciones de los formalistas y algunos intuicionistas rechazan con desdén las demostraciones de logicistas y formalistas. Lakatos clasifica las demostraciones que usualmente se usan en la creación matemática como sigue.

- Demostraciones Pre-Formales.
- Demostraciones Formales.
- Demostraciones Post-Formales.

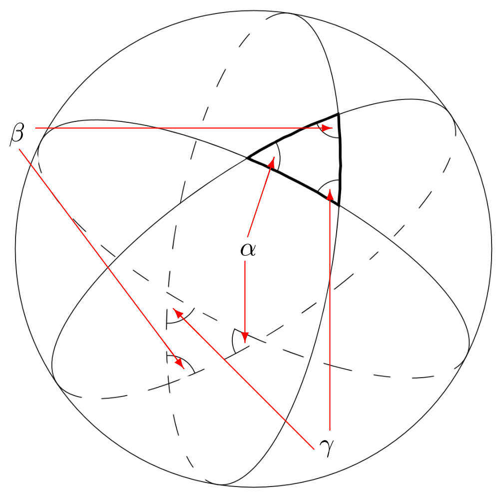


Figura 1.2: Prolonga los lados de un triángulo esférico y los círculos máximos resultantes formarán un "triángulo antípoda" en la parte posterior de la esfera.

En seguida se describe estos tipos mediante algún ejemplo.

Demostraciones Pre-formales

Proposición 1.2.1. *El área de un triángulo esférico (en una esfera de radio 1) con ángulos α, β y γ es:*

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

con α, β y γ en radianes.

Demostración Primero debemos saber cómo calcular el área de una "doble luna" sobre la esfera (de radio 1). Una **doble luna** es una región de la esfera delimitada por dos círculos máximos, como se muestra en la figura 1.1. Lo más que puede valer α es π, en este caso cubriríamos toda la esfera. Si α fuese, por ejemplo $\frac{\pi}{3}$, sería una tercera parte del mayor ángulo posible π, la doble luna debe abarcar $\frac{1}{3}$ del área total de la esfera, es decir

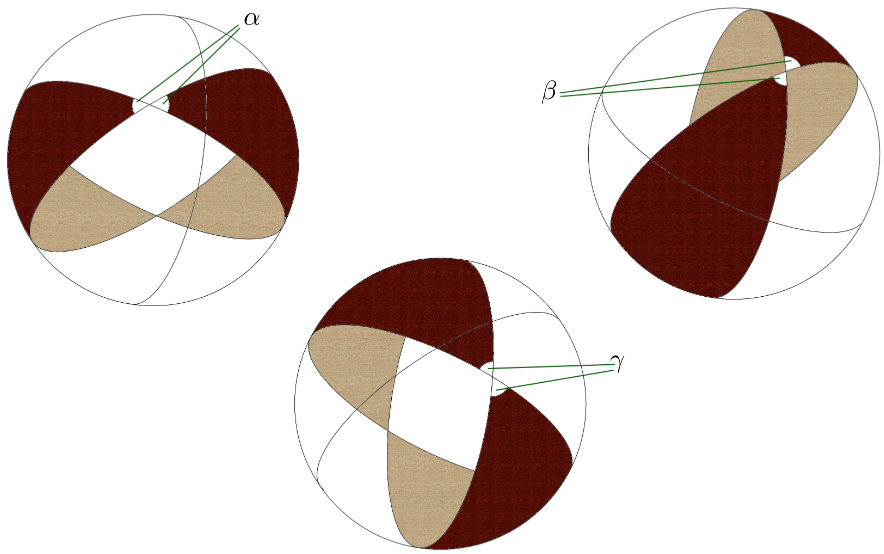


Figura 1.3: Tres dobles lunas formadas por el triángulo.

$\frac{1}{3}(4\pi) = \frac{4\pi}{3}$. De manera análoga podemos deducir que para el ángulo α, el área de la doble luna es $\frac{\alpha}{\pi}(4\pi) = 4\alpha$.

Ahora, veamos el área de un triángulo esférico (en una esfera de radio 1) con ángulos α, β y γ. Primero se prolongan los lados de dicho triángulo al rededor de toda la esfera, como se muestra en la figura 1.2. En la parte posterior de la esfera (línea punteada en las figuras), se forma un "triángulo antípoda", igual al original. La figura 1.3 muestra las tres dobles lunas formadas por los lados del triángulo en cuestión, de donde se obtiene que las áreas de cada una son 4α, 4β y 4γ.

Si tomamos las tres dobles lunas, cubren toda la esfera, además que los triángulos (el triángulo en cuestión y el antípoda) se cubren tres veces (uno por cada luna), como se observa en la figura 1.4. Si tomamos A_p como el

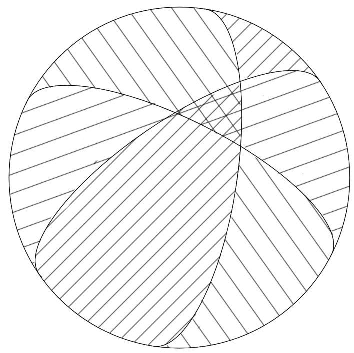


Figura 1.4: Área cubierta por las tres dobles lunas al mismo tiempo.

área del triángulo antípoda (que es igual al área del triángulo) obtenemos:

$$\begin{aligned} 4\alpha + 4\beta + 4\gamma &= 4\pi + 2A + 2A_p \\ 4(\alpha + \beta + \gamma) &= 4(\pi + A) \\ \alpha + \beta + \gamma - \pi &= A \end{aligned}$$

■

Esta demostración es un claro ejemplo de una demostración pre-formal, ya que por más que le busquemos no hay postulados, ni una lógica subyacente clara (bien definida), es decir, una demostración en una teoría pre-formal.

Pero en realidad hemos *mostrado intuitivamente* que el resultado (teorema) es válido, o al menos el por qué debe ser válido. Los griegos lo denominaron $\delta\varepsilon\acute{\iota}\kappa\nu\upsilon\mu\iota$, pero Lakatos (2007) lo llama "experimento mental".

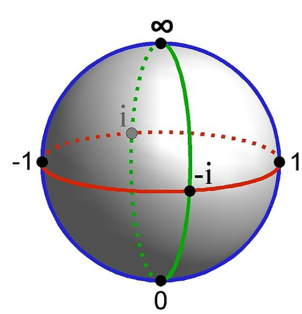
Una demostración pre-formal, no previene de que al resultado se le pueda encontrar un contraejemplo, es decir, el mismo argumento no provee herramientas "sólidas" para decidir si puede o no existir una contraejemplo de este resultado. Lakatos (2007, pp 94-97) provee un ejemplo de una propiedad que posee una demostración pre-formal pero que se puede hallar una falsación.

Demostraciones Formales

La mayor parte de los estudiosos de la filosofía moderna de las matemáticas "definirían" compulsivamente la demostración como Mendelson (1997): "... una demostración en $\mathbb{F}$, es una sucesión $\beta_1 \dots \beta_k$ de fórmulas bien formadas, tal que para cada i, β_i es un axioma de $\mathbb{F}$ o β_i es consecuencia directa de alguna fórmula bien formada antecesora en la sucesión por virtud de una o de otra regla de inferencia de $\mathbb{F}$."

Una de las características más importante de las demostraciones formales es que, dada una supuesta demostración, podemos decidir si es o no una demostración formal. Veamos el siguiente ejemplo.

Proposición 1.2.2. *El conjunto* $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widetilde{\mathbb{C}}$ *es una superficie de Riemann. A este conjunto se le conoce como: Esfera de Riemann.*



Demostración Sean $\mathcal{B} = \{(\mathbb{C}, \varphi_1), (\widetilde{\mathbb{C}}, \varphi_2)\}$, donde $\varphi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\varphi_1(z) := z$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $\varphi_2 : \widetilde{\mathbb{C}} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\varphi_2(w) = \frac{1}{w}$ para cada

$w \in \widetilde{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$.

Es claro que $\widetilde{\mathbb{C}} \backslash \{0\} \cup \mathbb{C} = \widetilde{\mathbb{C}}$. Además $\widetilde{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ y $\mathbb{C}$ son abiertos en $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Por la misma definición de φ_1 y φ_2, tenemos que φ_1 es homeomorfismo entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ y también φ_2 es un homeomorfismo entre $\widetilde{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ y $\mathbb{C}$.

Además, tenemos que φ_1 es biholomorfa (ya que es la función identidad en $\mathbb{C}$, ésta es holomorfa y tiene inversa holomorfa), también φ_2 es biholomorfa. Entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ son biholomorfismos.

Por lo tanto $\widetilde{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.

$\blacksquare$

En esta demostración, tenemos la necesidad de omitir algunas deducciones y obviar otras más, lo que genera la casi imposibilidad de escribir deducciones rigurosas y exhaustivas en una demostración, teniéndose que obviar algunos pasos e introducir frases temidas como: "esto es trivial", "es evidente que pasa esto", "se sigue inmediatamente de", entre otras.

Según Kline (citado por Larios 2003): "La inferencia inductiva de la suma de los ángulos de un triangulo puede efectuarse en cosa de minutos ... por otro lado, para llegar deductivamente a la misma conclusión tal vez harían falta semanas, e incluso no alcanzaría la vida entera del individuo". Esto nos hace pensar en la imposibilidad de dar una demostración puramente formal; por eso es que la mayoría de los matemáticos (en formación o no) prefieren demostraciones "informales", es decir, usan demostraciones pre-formales o post-formales (Lakatos, 2007).

Demostraciones Post-formales

En este tipo de demostraciones hay dos clases diferentes: las que pertenecen a la prueba de la validez de los axiomas o principios de una teoría axiomatizada y las correspondientes a las pruebas tales como, la indecidibilidad de un sistema también formalizado completamente.

El primer tipo está representado por el Principio de Dualidad de la Geometría Proyectiva, que afirma que cualquier enunciado válido formulado en los términos apropiados que se refiera a las incidencias de puntos y rectas en un plano proyectivo da origen a un segundo enunciado válido al intercambiar los términos "punto" y "recta". Por ejemplo:

Ejemplo 1.2.1. *Si la proposición "Cualesquiera dos rectas distintas en el mismo plano determinan un punto único" es válido, entonces también será válida la proposición "Cualesquiera dos puntos distintos en el mismo plano determinan una recta única".*

Para probar el último enunciado sólo consideramos un teorema del sistema y otra proposición, ésta última se denomina frecuentemente como *meta-teorema*, que no podemos especificar y mucho menos demostrar con las herramientas del mismo sistema formal dado.

Otro famoso ejemplo, es el siguiente.

Teorema 1.2.1 (**V Postulado de Euclides**)**.** *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*

Este postulado generó grandes conflictos en el momento de decidir si era válido o no en la geometría euclidiana.

Para nuestro segundo tipo, cabe mencionar que siempre las demostraciones muestran más de lo que deseamos probar, es decir, los axiomas definen implícitamente no sólo una estructura, sino una familia completa de estructuras. Ahora bien, existen siempre proposiciones que son válidas en un sistema matemático, pero son falsas en otros (V Postulado), tales proposiciones son indecidibles en la estructura formal común, esto es un resultado que Kurt Gödel obtuvo con sus teoremas de completez; para sistemas axiomáticos como los propuestos por David Hilbert, dado que existen conjeturas en algunas ramas de las matemáticas que no pueden ser demostradas.

1.2.2. Clasificación Funcional

Repasando la historia, observamos que hay un tránsito de las demostraciones visuales a las deductivas; éste involucra una transformación profunda en cuanto a la concepción de los objetos de la matemática misma.

De manera que la didáctica de la matemática debe tomar en cuenta que las demostraciones, y el consiguiente nivel de rigor, no pueden adquirirse sin una actividad constructora del significado matemático en cada etapa de la evolución conceptual de sus objetos. La intuición entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida de investigación y del aprendizaje.

La mayoría de las ciencias, en particular las que atañen a los campos de las matemáticas, parten de la inducción, unida a la intuición, como método para enunciar sus proposiciones. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas e hipótesis que, a partir de un conjunto de observaciones, conducen a la generalización de propiedades.

En la enseñanza de la Matemática existe la postura de enfrentar a los alumnos a situaciones similares a la de los matemáticos para que construyan su conocimiento.

De acuerdo con Larios (2006), esto conduce a que sea necesario que los alumnos se enfrenten a las demostraciones y las construyan, dado que no podemos esperar que conozcan el espíritu de la ciencia matemática completamente si se elimina una parte medular y epistemológicamente indispensable.

La demostración no sólo es un medio para validar conocimiento, sino que también puede ser un medio de comunicación. Michael de Villiers (1990) plantea cinco funciones que puede tener la demostración en el aprendizaje de la Matemática.

Como verificación o convicción

Cuando se utiliza para plantear la verdad de un enunciado. Esto se observa en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ también distintos. Existe una transformación de Möbius, tal que $T(z_i) = w_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración Sean $T_1(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ y $T_2(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$, entonces $T(z) = (T_2^{-1} \circ T_1)(z)$ es tal que

$$T(z_1) = (T_2^{-1} \circ T_1)(z_1) = T_2^{-1}(z_1) = w_1$$
$$T(z_2) = (T_2^{-1} \circ T_1)(z_2) = T_2^{-1}(z_2) = w_2$$
$$T(z_3) = (T_2^{-1} \circ T_1)(z_3) = T_2^{-1}(z_3) = w_3$$

Por tanto $T(z_i) = w_i$ para cada $i \in \{1,2,3\}$, así T es la transformación buscada. ∎

Nota: Si $T(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right)\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right) = \frac{az + b}{cz + d}$ entonces $a = z_1 - z_3$, $b = z_2(z_3 - z_1)$, $c = (z_1 - z_2)$ y $d = z_3(z_2 - z_1)$. Luego toda transformación de Möbius es de la forma $T(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right)\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right) = (z, z_1, z_2, z_3)$.(Para más detalles sobre el tema de transformaciones de Möbius, consultar Lambraño (2005)).

Como explicación

Cuando provee una idea del por qué un enunciado es verdadero, frecuentemente se utilizan demostraciones por reducción al absurdo (o por contradicción), como el que se presenta a continuación.

Proposición 1.2.4. *Para todo conjunto A, se tiene que $\emptyset$ es subconjunto de A. Donde $\emptyset$ es el conjunto vacío.*

Demostración Sea A un conjunto cualquiera, supongamos que $\emptyset$ no es subconjunto de A, así entonces por definición tendremos que: existe x elemento de $\emptyset$ tal que x no es elemento de A. Lo que es una contradicción a la definición de conjunto vacío.

Por tanto $\emptyset$ es subconjunto de A ∎

Como sistematización

Cuando se plantean varios resultados dentro de un sistema de axiomas o teoremas. Algunas de las funciones más importantes de ésta, se dan de la siguiente manera por De Villiers (1990):

- Ayuda a identificar inconsistencias, argumentos circulares y los supuestos en que se declaren ocultos o no.
- Se unifican y simplifican las teorías matemáticas mediante la integración de los estados no relacionados, teoremas y conceptos con otros, lo que conduce a una presentación económica de los resultados.
- Proporciona una perspectiva útil global o parcial (vistazo) de un tema, al exponer la estructura axiomática subyacente del tema, a partir de la cual todas las otras propiedades se pueden deducir.
- Esto a menudo lleva a los sistemas deductivos alternativos, que proporcionan nuevas perspectivas y / o son más económicos, elegantes y de gran alcance que las ya existentes.

Como descubrimiento

Cuando se descubren o inventan nuevos resultados. A menudo los resultados en matemáticas se descubren por primera vez por medio de la intuición (y / o métodos cuasi-empíricos), antes de que sean verificados por la producción de pruebas. Sin embargo, existen numerosos ejemplos en la historia de las matemáticas donde se descubrieron (o inventaron) nuevos resultados de una manera puramente deductiva, de hecho,es completamente poco probable que algunos de los resultados, por ejemplo, las geometrías no euclidianas, se encuentren con la intuición. Incluso en el contexto de este tipo de procesos deductivos formales como lo son *la axiomatización* y *la definición*, la demostración con frecuencia puede conducir a nuevos resultados (De Villiers, 1990). Para la demostración matemática, el trabajo no es simplemente un medio para verificar un resultado ya descubierto, muy a menudo también es un medio para explorar, analizar, descubrir e inventar nuevos resultados.

Como medio de comunicación

Varios autores han destacado la importancia de la función comunicativa de la demostración, por ejemplo:

> "... la prueba es una forma de discurso, un medio de comunicación entre las personas que hacen las matemáticas."Volmink (citado por De Villiers, 1990).

> "... Reconocemos que el argumento matemático se dirige a un público humano, que posee un conocimiento de fondo que le permite comprender las intenciones del hablante o autor. Al afirmar que el argumento matemático no es mecánico o formal, también lo hemos declarado implícitamente ... es decir, un intercambio humano basado en los significados compartidos, los cuales, no son todos verbales o fórmulas. "Davis y Hersh (citado por De Villiers, 1990).

Eso no implica que la demostración matemática es la "única" manera de comunicación entre profesionales de la matemática, de profesor y alumno, estudiantes con ellos mismos (Larios, 2003). El énfasis recae tanto en el proceso social de la información y la difusión de los conocimientos matemáticos en la sociedad. Por lo tanto, la demostración matemática también implica subjetivamente negociación no sólo de la validez de una proposición también, implícitamente, de los criterios para que dicha demostración sea "aceptable". A su vez, una filtración social que contribuye a su refinamiento y a la identificación de errores, así como, algunas veces, a su rechazo por el descubrimiento de un contra-ejemplo.

En resumen, la clasificación de Lakatos propone la existencia de tres tipos de demostración, la pre-formal, formal y post-formal. La primera y la última aclaran el por qué "algo" es verdadero (sobre aquel material a veces claro y empírico). Por otro lado la clasificación funcional de la demostración nos da un amplia gama de usos que se pueden dar a ésta, frecuentemente se hace uso inconsciente de alguna de las funciones.

Capítulo 2

Teoría De La Influencia Minoritaria

"Human society is the only natural system known to have the ability to form and transform its functioning on the basis of its investments and of the image it has of its own ability to act upon itself" **Touraine 1973**

Hablar de la Psicología es, de entrada, un asunto difícil debido al inevitable encuentro con una disciplina científica, versátil y en construcción. Cuando se aborda lo que ha sido denominado como Psicología Social, este problema se matiza aún más por la inclusión de los elementos ideológicos de lo aparentemente subjetivo (Mora, 2002).

Con respecto a las representaciones sociales, Serge Moscovici ha señalado en *El psicoanálisis, su imagen y su público*, las siguientes consideraciones: La representación es un corpus organizado de conocimientos y una de las actividades psíquicas gracias a las cuales los hombres hacen inteligible la realidad física y social, se integran en un grupo o en una relación cotidiana de intercambios, liberan los poderes de su imaginación (Moscovici, 1979).

Los procesos de influencia social pueden ser definidos, en su acepción más específica, como regidores de la modificaciones de todo tipo de respuestas (percepciones, juicios, opiniones, comportamientos, ...) observables en el individuo, cambios de respuestas originados por el conocimiento de las respuestas de otro(s) individuo(s).

Las primeras recogidas de datos y teorizaciones sistemáticas sobre los procesos de influencia social se enumeran dentro del modelo funcionalista que se centra exclusivamente en la producción de normas y en los procesos de control social, tales como el conformismo y la obediencia (Mugny & Pérez, 1985).

Mientras que en el modelo interaccionista existe una reciprocidad (lo que no implica igualdad o simetría perfecta): todo individuo o grupo (sea mayoritario o minoritario) es considerado como potencial de influencia.

El fenómeno de la influencia mayoritaria, la primera que se ha estudiado (Asch, 1951,1956 citado por Mugny & Pérez, 1985)es el centro de interés del enfoque funcionalista, mientras que la influencia minoritaria es el terreno del enfoque interaccionista (Moscovici, 1979).

2.1. Definición de Minoría

Podemos definir una minoría y una mayoría de dos maneras principales: en términos de número y de consenso, y en términos de las normas y el poder. De acuerdo con la primera definición, minoría es numéricamente más pequeño que el grupo mayoritario. Durante las últimas tres décadas, así es como minoría (la noción como el concepto), se ha usado principalmente en la influencia de la investigación social, a los participantes se les informa que por lo general, de acuerdo con una encuesta, una muestra de la población ya sea, por ejemplo, “una mayoría del 82 %” o “un minoría de 18 % ”, apoya una posición sobre un tema determinado (Gardikiotis, 2011).

De acuerdo con la segunda definición, Moscovici (citado por Mugny & Pérez, 1985) sugiere que los pequeños números no definen necesariamente una minoría. Las minorías son principalmente grupos de personas que piensan y actúan diferente, fuera de la norma; que intentan (por sus ideas y acciones) producir la innovación y el cambio social. Moscovici (citado por Gardikiotis, 2011) hace hincapié en el hecho de que las minorías son *“todos los grupos que, por cualquier motivo, se desvían o transgreden las normas para el establecimiento de éstas, es decir, piensan diferente a la mayoría de los miembros de la comunidad”*.

Por lo tanto la mayoría, por lo general ocupa el cargo normativo (es decir, las opiniones y las creencias que reflejan las normas “aceptadas.en la sociedad) y se considera de “alto poder” y la minoría tiene la posición anti-normativo o desviada y se considera que es de “bajo poder”. La idea es que las minorías puedan tener un impacto en las actitudes, al afectar nuestra forma de pensar; y por lo tanto una explicación básica de los procesos psicológicos con influencia minoritaria, es la cantidad y la calidad subyacente del procesamiento cognitivo.

2.2. Modelos de Análisis de la Influencia Social

Moscovici sostiene que la influencia mayoritaria no es el único proceso de influencia sobre la vida social. La minoría no solo es el objetivo, si no que también la fuente de influencia sobre situaciones de grupo. Los cambios sociales, como se han observado a través de la historia, son muy a menudo el resultado del cuestionamiento y confrontación de las minorías hacia lo que se toma por asentado (Gardikiotis, 2011).

Los fenómenos de influencia social son complejos y revelan la existencia de un gran número de factores. Como consecuencia, nos encontramos frente a una cantidad considerable de teorías psicológicas que intentan explicar dichos fenómenos (Riba & Mugny, 1981). A continuación se presentan dos formas de modelar los fenómenos de influencia social, propuestos por Moscovici.

2.2.1. Modelo Genético

Moscovici (1976; citado en Gardikiotis, 2011) propone el *modelo genético*, que se centra en la producción y generación de cambio social. Él argumenta que cualquier intento de influencia genera un conflicto. La influencia social trata de crear, enfrentar o negociar los conflictos sociales. De acuerdo con este modelo, las posibles modalidades de influencia son:

Conformidad

Los sujetos bajo la presión implícita de un grupo, renuncian a la norma individual para aceptar la norma colectiva muy generalmente en contradicción con la norma establecida en otro grupo (Gardikiotis, 2011; Riba & Mugny, 1981).

Normalización

En esta modalidad, los sujetos renuncian a la norma personal para crear una norma colectiva, que es el resultado de la convergencia de las normas personales, de cada uno de los integrantes del colectivo, en una situación de interacción en la cual no aparecen jerárquicas (Gardikiotis, 2011; Riba & Mugny, 1981).

Innovación

La innovación se refiere al proceso de creación de nuevas normas que reemplazarán la existentes. Puede provenir de los que detenten el poder, tengan la autoridad y el crédito para imponerlas, sin embargo es más frecuente que provengan de individuos o grupos minoritarios que carecen de toda competencia social (Mugny & Pérez, 1985).

De acuerdo con Mugny y Pérez (1991), se tiene que en cualquier situación en la que se desarrolle la evolución de una innovación se debe distinguir al menos tres tipos de agentes sociales:

a) **El poder**: entendido aquí en su sentido más amplio, como cualquier entidad que dispone de recursos de dominación (a menudo institucionalizada); se puede incluir aquí cualquier tipo de norma social dominante.

b) **La población**: se considera como el blanco por excelencia de los intentos de influencia tanto mayoría como minoría.

c) **La minoría**: Que cuestiona el orden establecido (esta minoría es tanto normativa como numérica, como suele ser habitual en la mayoría de los casos).

Entre estas tres entidades se establecen relaciones de diverso orden. Así, la que relaciona la población y el poder, es la de dominación: el poder dicta e impone las normas que debe seguir la población. La existente del poder con la minoría es la de antagonismo; por último entre la minoría y la población es la influencia minoritaria.

2.2.2. Teoría de la Conversión

Moscovici (1980), planteó un doble proceso de influencia social. La teoría de la conversión, la cual sugiere que la influencia de la mayoría y de la minoría es un proceso cualitativamente diferente; por un lado las mayorías conducen a un proceso de comparación donde las personas se centran en "lo que otros dicen, con el fin de encajar con sus opiniones y juicios" (Moscovici, 1980). En contraste, las minorías desencadenan un proceso de validación mediante el cual uno se "cuestiona las respuestas y los juicios, propios, con el fin de confirmarlos y validarlos"(Moscovici, 1980).

Estos procesos tienen diferentes implicaciones para el impacto que las mayorías y las minorías puedan tener. Moscovici (1980) argumentó que las mayorías inducen el cumplimiento por lo que el cambio se expresa públicamente, pero tiende a permanecer sólo en un nivel manifiesto y directo, mientras que las minorías inducen la conversión mediante el cual el cambio se produce en un nivel latente e indirecto. En comparación con el modelo genético, la teoría de la conversión pone menos énfasis en el estilo de comportamiento de la minoría y más en su carácter distintivo que conduce a una mayor elaboración cognitiva de la posición de la minoría (Gardikiotis, 2011).

2.3. Condiciones para la influencia minoritaria

Una minoría puede inducir a una mayoría a adoptar la respuesta minoritaria aun cuando esto implique la transformación de las normas del grupo, a condición de que la minoría adopte un estilo de comportamiento consistente. La consistencia de un comportamiento minoritario se operativiza como la repetición sistemática de una misma respuesta (diacronía) y un acuerdo unánime entre todos sus miembros (sincronía). Es decir, una minoría puede devenir fuente de influencia en tanto sostenga sólidamente un punto de vista determinado y lo desarrolle coherentemente. La adopción por parte de la minoría de un estilo de comportamiento consistente provoca incertidumbre y conflicto en la población objeto de la influencia. Dicho conflicto induce a una reestructuración de los juicios, actitudes u opiniones de los individuos que a veces, finalmente, pueden aceptar el punto de vista de la fuente minoritaria (Riba & Mugny, 1981). No obstante, si una minoría se muestra intransigente en su posición, expresando su punto de vista bruscamente sin la aceptación de ningún tipo de compromiso, puede provocar un bloqueo y hacer que el conflicto se resuelva negativamente.

Estilo rígido trata de una forma de negociación que rehúsa cualquier tipo de compromiso. El **estilo flexible** caracteriza a una minoría más elástica que acepta ciertos compromisos con tal de no cuestionen la consistencia de la ruptura minoritaria frente a la norma rechazada (Riba & Mugny, 1981).

Riba y Mugny (1981) sostienen que, bajo un estilo de comportamiento consistente y percibido por los sujetos como tal, un estilo de negociación flexible produce mayor grado de influencia que un estilo rígido; y, por otra parte, que el grado de influencia que produce un estilo de negociación rígido está inversamente relacionado con la rigidez percibida. Una minoría con un estilo de negociación rígido provoca con este comportamiento que la población elabore una imagen de ella en términos de bloqueo de la negociación, quedando posiblemente enmascarada la consistencia de su estilo de comportamiento (Mugny & Papastamou, 1980; citado por Riba & Mugny, 1981). Esto produce consecuentemente su rechazo como fuente de influencia.

Esta resistencia al cambio social puede ser explicada mediante el concepto de naturalización (Riba & Mugny, 1981). La naturalización supone la existencia de un mecanismo psicológico que lleva, a la población objeto de influencia, a buscar una explicación tanto del comportamiento como del discurso minoritario, con base en las características idiosincráticas de la fuente. Como consecuencia, los sujetos tienden a interpretar el antagonismo entre minoría y poder por las características individuales de esta minoría; se encubre, de este modo, el contenido innovador de su alternativa. La naturalización no puede reducirse a simples mecanismos cognitivos que permitan juzgar la plausibilidad del razonamiento de la minoría, sino que parece depender de un funcionamiento ideológico que puede enmascarar las relaciones entre poder y minoría (Riba & Mugny, 1981).

En la medida que la identificación con una fuente minoritaria esté asociada a una serie de connotaciones negativas, se producirá un rechazo: esto es lo que ocurre cuando la fuente presenta un estilo rígido, ya que su identidad social desviante queda explicitada; mientras que una minoría flexible enmascara en parte su identidad social desviante y posibilita de este modo la identificación con ella. En este sentido los resultados experimentales muestran que el hecho de explicitar la identidad social de la fuente minoritaria produce los mismos efectos que un estilo de negociación rígido, o sea el rechazo de su influencia, aun cuando la fuente presente en realidad un estilo flexible (Riba & Mugny, 1981).

2.4. Demostración, Aprendizaje e Influencia Minoritaria

El aprendizaje se realiza en un contexto, en el cual encontramos influencia sociocultural. Para Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006), la socioepistemología sostiene que se forman discursos que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales.

El conocimiento no sólo se construye en la escuela o instituciones donde se realiza investigación científica (universidades, institutos de educación superior o de investigación), por eso se considera que los conocimientos científicos son establecidos por consenso entre los científicos, aunque la ciencia no es un fenómeno de hombres aislados, sino de grupos en interacción.

Consideraremos entonces a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. Ésta no es la misma de una comunidad a otra, está determinada por su contexto y se ha modificado de una cultura a otra (Crespo, 2007).

Claramente, los profesores forman una minoría numérica, pero ¿es una minoría en términos de normas y poder?, puesto que parte del conocimiento de las personas se genera en la escuela, ¿ los profesores generan la innovación en el conocimiento de sus alumnos?

Capítulo 3

Metodología

Este trabajo es de carácter cualitativo (Hernández, Fernández & Baptista; 2002). El propósito de este estudio es encontrar el tipo de influencia que ejerce el profesorado en la comunidad de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en torno a la construcción del concepto “demostración matemática”. Además, si esta influencia genera innovación en el alumnado en dicha construcción, y si hay consenso en los profesores acerca del “concepto” de la demostración matemática.

La expresión “entrevistas cualitativas”, en plural, representa de manera sencilla en el lenguaje escrito y hablado una realidad diversa en la práctica investigadora. Bajo este amparo terminológico se alojan formas y usos conversacionales de muy variada denominación: entrevista en profundidad, biográfica, especializada, semiestructurada, no estandarizada, etcétera (Valles, 2002).

En esta investigación se optó por una entrevista cualitativa semiestructurada (las cuales fueron videograbadas). Valles (2002) expone la utilidad de este tipo de instrumentos para investigaciones de corte cualitativo. Por tal motivo se diseñó un cuestionario que consiste de 4 secciones (ver Anexo). De acuerdo con Martínez y Viramontes (2010), la naturaleza de las Representaciones Sociales, permite el acercamiento multimetodológico para la recolección de datos y para el análisis; por lo que se opta utilizar la técnica de asociación libre en las entrevistas realizadas.

3.1. Descripción del Cuestionario

La primera sección tiene como objetivo observar la existencia de consenso al "concepto" de demostración matemática dentro de la comunidad FCFM-BUAP.

En las secciones 2 y 4, se persigue evidenciar la posible influencia de los profesores como un grupo hacia los alumnos, en el momento de emitir su juicio acerca de la validez de un argumento como una demostración; para tal fin, el contexto de cada sección fue modificado, en las secciones 2 y 4 se proporcionó a cada entrevistado un texto para su lectura, a continuación se presentan los párrafos introductorios de dichos textos para cada tipo de cuestionario y cada sección.

Para el cuestionario tipo I, el párrafo introductorio del texto que se dio a los entrevistados a leer, en la sección 2 fue:

> *En una entrevista que se realizó a alumnos de primer año de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, una de las preguntas decía: "Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par".*

A lo cual respondieron algunos ... alumnos así...

y para el cuestionario tipo II, se tiene:

En una entrevista que se realizó a alumnos de primer año y a profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, una de las preguntas decía: "Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par". En seguida presentamos una demostración dada por un alumno y otra por un profesor (no necesariamente en ese orden)...

Los textos a juzgar si eran o no una demostración en la sección 2, que para ambos cuestionarios son los mismos, se presentan a continuación:

Demostración 1: *a es par, entonces se puede escribir $a = 2k$. El cuadrado de a es: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ que es par.*

■

Demostración 2: *Sea $a^2 = 2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces $a = 2u$ $\left(\text{siendo } u = \dfrac{k}{2}\right)$ y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

■

Éstas "demostraciones" no califican como tal, puesto que la primera justifica el enunciado recíproco, es decir, si tengo un número natural, el cuadrado de este es un par; además que no se indica la naturaleza de los elementos a y k, bien podrían ser racionales o en su defecto irracionales, puesto no indica que sean naturales. Para la demostración 2, la primera parte "prueba" que el enunciado es verdadero, pero al final "prueba" que es falso, lo cual no puede ser.

Ahora, el párrafo introductorio del texto que se dio a los entrevistados a leer, en la sección 4, en el cuestionario tipo I es:

> *"En todo triángulo rectángulo las suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa." La siguiente demostración fue dada por un profesor de la FCFM-BUAP.* ***Demostración*** *...*

mientras para el cuestionario tipo II es:

> *"En todo triángulo rectángulo las suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa."* ***Demostración*** *...*

Y el texto del que se pidió que el entrevistado emitiera su juicio es:

> ***Demostración*** *:*
> *Se observa que el área del cuadrado (de lado cuya longitud es $a + b$) es $(a + b)^2$, pero también se observa que se puede calcular su área sumando el área de los 4 triángulos y el área del cuadrado interior, por lo que se puede establecer la igualdad:*
>
> $$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$
>
> *que se desarrolla como sigue:*

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

y finalmente, simplificando se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De aquí se observa que se cumple la proposición.

■

Esta "demostración" no califica como tal puesto que en ningún momento dice qué son a, b y c, entre otras cosas.

La diferencia de cada cuestionario, se encuentra en la presencia del *profesorado* en el contexto. El propósito de poner estos textos en las secciones 2 y 4, es para observar la influencia del profesor en los alumnos entrevistados, al emitir juicios de validez sobre las presuntas demostraciones presentadas.

Para la tercera sección, se plantean dos preguntas para indagar si la comunidad matemática de la FCFM-BUAP maneja a la demostración como un ente polifacético, que posee más usos que el de validación, además de distintos niveles de "formalismo".

La población a la que se le aplicó la entrevista fue: 5 profesores que imparten clases en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas a todos los niveles, desde licenciatura hasta posgrado, los cuales realizan investigación en diversas ramas de la matemática; 10 alumnos de primer año y 10 de último año de la misma institución pertenecientes a la comunidad de matemáticas (licenciaturas en: matemáticas, matemáticas aplicadas y actuaría). A los profesores solo se les aplicó el cuestionario de tipo I. A 5 alumnos de primer año y 5 de último año se les aplicó el cuestionario de tipo I; a los alumnos restantes se les aplicó el cuestionario de tipo II. La entrevista se realizó de manera individual sin más personas presentes que el entrevistado y el entrevistador.

Capítulo 4

Análisis

Como se describió anteriormente, son dos tipos de cuestionarios y 25 personas entrevistadas; por tal motivo para referirnos a dichos entrevistados se usará la siguiente nomenclatura.

M denota que el entrevistado fue un profesor, P un estudiante de primer año y U para un estudiante de último año. Ahora, el subíndice indica el número de entrevistado y el superíndice el tipo de cuestionario aplicado; por ejemplo: U_1^{II} indica que es el alumno 1 de último año al que se le aplicó el cuestionario II.

En la primera parte del capítulo 1, se presentan varias concepciones de la demostración matemática, concluyendo que, en términos generales, una demostración es una cadena de deducciones.

En los cuestionarios (tipo I y tipo II) en la primera sección se pregunta ¿Qué es una demostración matemática?, se observa el siguiente patrón en las respuestas de los entrevistados:

- Secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas (3).

- Verificación de la veracidad o falsedad de un enunciado (8).

- Justificación (14).

En cada caso el número entre paréntesis indica la cantidad de respuestas con dichas características. Se obtuvieron respuestas como las que siguen:

$\mathbf{M_2}$: *Una argumentación que está basada en ciertas reglas de la lógica, como los silogismo y cosas así, aristotélicos, ..., cuyas premisas son esencialmente proposiciones que se aceptan verdaderas en un sistema axiomático particular.*

$\mathbf{U_1^I}$: *Una demostración matemática es un argumento en el que ... ayuda a ver que cierta proposición es falsa o verdadera.*

$\mathbf{U_3^I}$: *Es como dar ciertos argumentos de forma deductiva de tal modo lleguemos a que algo sea verdad.*

$\mathbf{P_4^{II}}$: *Es para conocer de donde viene una fórmula y como se emplea.*

De lo anterior se observa que la concepción de la demostración matemática no se encuentra en consenso dentro de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas puesto que se bifurca la noción de lo que es una demostración matemática en dos partes, la primera como *"secuencias de enunciados organizados según reglas determinadas"* y la segunda como *"validación"*, la cual es una función de la demostración.[*]

Como se describió en la sección 1.2 del capítulo 1, existen varias formas de clasificar la demostración matemática, el punto de vista funcional y la clasificación que da Lakatos. Para observar qué tipo de clasificación se

[*]Esta aseveración se tiene porque en caso de tener consenso, los entrevistados coincidirían en sus respuestas.

maneja en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas se diseñó la sección 3 de los cuestionarios (Anexo 4); para la pregunta *¿Hay distintos tipos de demostración en matemáticas? En caso de que la respuesta sea si, ¿cuáles son estos?* se obtuvieron las siguientes respuestas.

$\mathbf{M_1}$*: Si, no me atrevería a decir que conozco todas, pero hay demostración directa, por reducción a lo absurdo, contraposición, por inducción. Básicamente, esas son las que usamos en matemáticas, aunque naturalmente podríamos utilizar las equivalencias entres situaciones de lógica proposicional, que usualmente no utilizamos.*

$\mathbf{M_2}$*: Esencialmente no, según como quiera hacerse una clasificación.*

$\mathbf{M_5}$*: Distintos tipos, mas bien son métodos de demostración directa, ...indirecta y por contradicción.*

$\mathbf{P_2^I}$*: No se.*

De aquí se clasifican las respuestas obtenidas en dos formas:

- ※ No hay distintos tipos de demostración matemática (4).
- ※ Clasificación de acuerdo con la forma de la demostración (19).

Para los entrevistados que daban una respuesta como: "existen la demostración directa e indirecta" se les realizó una pregunta extra, ¿existe otra clasificación (más general o no)?, para lo cual respondieron básicamente de tres maneras: "no hay otra", "no recuerdo" y "más seguro si pero no las conozco". Esto podría indicar el por qué no existe consenso dentro de lo que es una demostración y también una dificultad u obstáculo al momento de aprender lo que es una demostración matemática.

Para la pregunta *¿Qué función o funciones tiene una demostración?*, se clasificaron las respuestas en:

♣ Verificación de la veracidad o falsedad de un enunciado (23).

♣ Comunicación, creación de nuevo conocimiento (1).

Las siguiente lista de respuestas para la pregunta *¿Qué función o funciones tiene una demostración?*, da evidencia de la confusión de lo que es una demostración y el para qué sirve, he aquí la lista:

$\mathbf{P_2^{II}}$*: Pues como lo decía en la definición, de acuerdo de nuestros intereses, debería ser necesario saber si se cumplen para ciertos números, es eso para verificar algo.*

$\mathbf{U_4^{I}}$*: Se parece a la primera pregunta.*

$\mathbf{U_4^{II}}$*: Como ya te había dicho la validez de una proposición.*

Ahora las respuestas obtenidas para la pregunta *¿Hay distintos tipos de demostración en matemáticas?*, parece ser que no se maneja la clasificación de Lakatos (Sección 1.2.1), pero al momento de responder la sección 4 del cuestionario, en las preguntas: *¿ Consideras que la anterior es una demostración?* y *¿ Qué tipo de demostración es?*, se encuentran respuestas como las que siguen:

$\mathbf{M_4}$*:... quizá no sea una demostración formal, pero geométricamente lo que hace ...*

$\mathbf{U_3^{I}}$*: Depende para quién esté dirigida, bueno si la considero una demostración, ... pues la demostración, podría no ser formal ...*

$\mathbf{U_2^{II}}$*: Si podría verse como una demostración.*

$\mathbf{U_4^{II}}$: *Se puede decir que es una demostración, pero no es, tiene las ideas pero no el, se puede ver como borrador, más bien una demostración informal.*

$\mathbf{P_4^{II}}$: *Demostración si, pero no formal.*

Estas respuestas ponen en evidencia la existencia de la clasificación que propone Lakatos, pero de manera implícita en la comunidad de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, aunque no está presente en la concepción de qué es una demostración, pero si se acepta la posibilidad de la existencia de demostraciones "informales", más aún $\mathbf{M_1}$, responde que es una demostración geométrica la cual es otra posible clasificación de una demostración matemática.

De esto podemos concluir que la demostración es vista funcionalmente solo en su acepción de validación y en el nivel de "formalismo" indirectamente es aceptada la clasificación que propone Lakatos.

Las preguntas: ¿ cuál demostración es la correcta? ¿ Por qué?, en la sección 2 de los cuestionarios, es el tomar una decisión de "cuál" es la correcta mostrando la posibilidad de que una de las demostraciones debía ser correcta; de donde se obtuvo que tres profesores ($M_1,\ M_2, M_3$) y cuatro alumnos de último semestre ($U_2^I,\ U_4^I,\ U_1^{II},\ U_3^{II}$) respondieran que ninguna de las "demostraciones" era correcta, de esto tenemos el siguiente comportamiento en las respuestas.

∞) La demostración 1 es la correcta (15).

∞) La demostración 2 es la correcta (3).

∞) Ninguna es correcta (7).

Para los entrevistados que descartan ambas pruebas, las demostraciones que proporcionan son las siguientes:

Demostración $\mathbf{U_2^I}$*:*

$$P \Longrightarrow Q \equiv \neg Q \Longrightarrow \neg P$$

P.D. Si n no es par $\Rightarrow n^2$ tampoco es par.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

de donde n^2 no es par. ■

Demostración $\mathbf{U_3^{II}}$*:*

Sea a un número natural tal que a^2 es par, esto es $a^2 = 2k$ para algún k, entonces, como a es natural se tienen dos opciones.

(1) a es par o (2) a es impar.

Si a fuera impar, entonces a sería igual a $2k_1 + 1$ para algún k_1 un número natural.

Luego, se tendría que

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k_1+1)^2 \\ &= 4k_1^2 + 4k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1, \qquad 2k_1^2 + 2k_1 \text{ es un número natural,} \end{aligned}$$

así que a^2 sería impar. Pero se esta suponiendo que a^2 es par, así que a debe ser par. ■

Demostración *M_4:*

Supongamos $n^2 = 2k$ y n no es par.

$$\begin{aligned} n &= (impar)\\ &= (2k-1)\\ n^2 &= (2k-1)^2\\ n^2 &= \underset{\substack{\uparrow\\ par}}{\underline{(2k)^2}} - \underset{\substack{\uparrow\\ par}}{\underline{2k}} + \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

■

Demostración *M_3:*

La proposición $p \longrightarrow q$ es equivalente a $\sim q \longrightarrow \sim p$.

Así que probaremos a no es par $\Longrightarrow a^2$ no es par

a no es par, es equivalente a que a es impar, es decir existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = 2k+1$, entonces

$$a^2 = (2k+1)^2 \qquad\qquad \odot$$

y desarrollando el lado derecho de $\odot$ obtenemos que $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ y como $2k^2 + 2k$ es un número natural, entonces a^2 es un número impar. ■

Demostración *U_4^I:*

Sea $a \in \mathbb{N}$.

Si $a^2 = 2n$, entonces $a = 2k$

Demostración por contraejemplo.

Sea $a^2 = 2$*, dos es un número par sin embargo* $\sqrt{a^2} = \sqrt{2}$ *y* $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ *y además no es un número par.*

$\therefore$ *La afirmación es falsa.* ■

Los entrevistados que optan por la demostración 1, argumentan la validez de ésta porque "se entiende más que la segunda", "no me confundió" y "es claro y directo"; cabe señalar que los profesores M_4, M_5 y excluyendo al alumno P_1^I, todos los alumnos de primer año responden de esta manera. Los que responden como correcta la demostración 2 dan argumentos como: "es más general", "la primera no toma todos los casos"; en este caso solo U_4^{II}, U_5^{II} y P_1^I son los que optan por la demostración 2. La mayoría de los 15 entrevistados que dan por correcta la demostración 1, tienen muy presente que una demostración correcta es clara y todo argumento que no es comprensible por ellos, inmediatamente es incorrecto, los profesores M_4yM_5, así descartan la demostración 2.

Veamos las siguientes respuestas obtenidas de alumnos a las primeras dos preguntas de las sección 2 del cuestionario.

$\mathbf{U_1^I}$*: La uno. Porque (silencio de 3 minutos). Creo que es la otra. La primera no porque empieza diciendo que a es par, según el argumento* a^2 *es par, y en el problema decía que si el cuadrado de un número es par entonces dicho número es par...*

$\mathbf{U_3^I}$*: La de arriba, la uno. Porque dice, ¡Ha! Dice que si el cuadrado de un número natural es par dicho número es par; ya me confundí. Se quiere probar que ...*

$\mathbf{U_1^{II}}$*: La primera, no nos dice quién es* k*, nos dice sea* $a = 2k$ *pero, ¿quién* *es k?... La segunda está mal, porque, en un inicio dice $a^2 = 2k$ dice que $a = 2u$, dice: "Sea $a^2 = 2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces $a = 2u$ $\left(\text{siendo } u = \dfrac{k}{2} \right)$" y no se como k debe tener un factor 2.*

$\mathbf{U_2^{II}}$: *La uno, porque si nosotros queremos probar que si el cuadrado de un número natural es par entonces dicho número es par; entonces para demostrar que eso es par, consideramos, por ejemplo que si tal número es impar entonces el cuadrado es impar. Entonces eso, no nos está llevando a lo que queremos, así debe ser par, para que al multiplicar por el mismo número nos de un par.*

El tiempo que se tardan los entrevistados en dar una respuesta a las preguntas, ¿ cuál demostración es la correcta? y ¿ Por qué?, en la sección 2 del cuestionario, se observó de la siguiente manera.

	Tiempo promedio (segundos)
Profesores	171.2
Alumnos de último año - cuestionario tipo I	332.2
Alumnos de último año - cuestionario tipo II	273.2
Alumnos de primero año - cuestionario tipo I	214.8
Alumnos de primero año - cuestionario tipo II	204.2

Como se esperaría los profesores tardaron mucho menos en responder que los alumnos. Con respecto a los alumnos, los que tardan más en contestar son los que respondieron el cuestionario tipo I, en el cual no existe el profesor en el contexto. Aquí podemos observar la influencia de la autoridad "profesor", al momento de que los alumnos de último año tomen una decisión. Como esta autoridad no aparece en el contexto del cuestionario tipo I, los alumnos tardan, 60 segundos mas que los del tipo II. La falta de una autoridad les causa confusión al momento de responder. Este fenómeno no es visto en los alumnos de primer año, puesto que los tiempos promedio difieren en no más de 11 segundos.

Ahora, al momento de realizar la pregunta *¿ Consideras que la anterior es una demostración?* de la sección 4 del cuestionario, se encuentran tres grupos principales de respuestas.

- ☑ Si es una demostración (14).
- ☑ No es una demostración (6).
- ☑ "Si, pero no" o "no, pero si" (5).

Los números entre paréntesis indican cuantos entrevistados responden de esa forma. Las respuestas tipo: "si, pero no" o "no pero si", se detectan en respuestas como las siguientes:

$\mathbf{U_3^I}$: Depende para quien este dirigida, bueno si la considero una demostración, . . . pues la demostración, podría no ser formal . . .

$\mathbf{P_4^{II}}$: Demostración si, pero no formal.

Los alumnos, ya sean de primer año o último semestre mantienen la idea de la existencia de el lado "informal" de una demostración, a diferencia de los profesores, que solo dieron respuestas rotundas, un si o un no, sin dejar espacio a la posible "informalidad" de una demostración matemática, exceptuando M_4, es el único que responde un "si pero no", su respuesta es : "En la estructura si. Porque toma la figura, quizá no sea una demostración formal…".

De los resultados obtenidos en las secciones dos y cuatro, se encontró que existe dificultad al momento de emitir un juicio sobre la validez de una argumentación como una demostración matemática. Esto indica lo difícil que es poner en claro el concepto de demostración y mas aún si ésta es para un entorno matemático hasta cierto punto "formal".

Conclusiones

El concepto “demostración matemática”, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla , se enfoca en dos puntos de vista.

- Secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas.
- Verificación de la veracidad o falsedad de un enunciado.

La comunidad de Facultad de Ciencias Físico Matemáticas se inclina mas por la característica funcional de verificación de la demostración, en lugar de verla como un secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas.

Del capítulo 4, se observó que: la influencia ejercida por el profesorado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas está de manera latente pero dada su falta de consenso; dicha influencia es de estilo rígido (por los resultados obtenidos en las secciones 2 y 3 de las entrevistas), puesto que no dan paso a flexibilidad en el concepto de lo que debe ser una demostración, aún a pesar que el alumnado si opta por la característica “informal” de una la demostración matemática.

Por lo que la influencia que produce la minoría (profesores) trata de una forma de negociación que rehúsa cualquier tipo de compromiso. Riba y Mugny (1981) sostiene que bajo un estilo de comportamiento consistente y percibido por los sujetos como tal, un estilo de negociación flexible produce mayor grado de influencia que un estilo rígido; y, por otra parte, que el grado de influencia que produce un estilo de negociación rígido está inversamente relacionado con la rigidez percibida, dicha minoría con un estilo de negociación rígido provoca con este comportamiento que la población (alumnado) elabore una imagen de ella en términos de bloqueo de la negociación, quedando posiblemente enmascarada la consistencia de su estilo de comportamiento (Ricateau, 1970; citado por Riba & Mugny, 1981). Esto conduce frecuentemente a su rechazo como fuente de influencia.

Otro gran problema que se percibe es la gran dificultad que encuentra la comunidad matemática de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en tomar una decisión sobre la validez de un argumento como una demostración matemática, más aún en proporcionar una que cumpla sus propias exigencias.

Ahora recordando las dos preguntas planteadas en la sección 2.4. ¿Es una minoría en términos de normas y poder? y ¿ Los profesores generan la innovación en el conocimiento de sus alumnos? Las respuestas son:

- ✓ Efectivamente los profesores forman una minoría en términos de normas y poder, puesto que los resultados de la sección 4, la figura del profesor no tiene mayor impacto en la decisión de los alumnos entrevistados.

- ✓ Por lo dicho en los párrafos anteriores, la influencia que ejercen es de manera rígida por ende, lo que está produciendo dicha influencia es su rechazo como fuente de influencia o que el alumnado busque por cuenta propia responder de una manera u otra el qué es una demostración matemática, que frecuentemente causa mas confusión en el alumno y tiende a generar una concepción muy alejada de verse como una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas.

Los problemas que quedan a futuro son, el indagar el por qué la dificultad de la comunidad en tomar como una demostración un argumento. Otro es, ¿por qué no existe consenso entre los profesores del qué es una demostración? Uno mas interesante dado que la demostración es polifacética, ¿se percibe como tal e la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas o solo en su concepción funcional de verificación? Y ¿Cuáles son las consecuencias de dicha concepción?

Para evitar el rechazo que se observó en la población (alumnado), es prudente cambiar el trayecto de la influencia de la minoría (profesorado), de manera flexible y consistente, para poder producir una innovación en la población, siempre y cuando este fenómeno se desee cambiar, de otro modo se causará más rechazo y mayor conflicto en un concepto que es la base de la matemática actualmente, la demostración matemática.

Bibliografía

[1] Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 8 (3), 267-312.

[2] Balacheff, N. (2000). *Los procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

[3] Cantoral, R, Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y Representación: Algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,* número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 83-102.

[4] Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

[5] De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras.* Núm. 24. pp. 17-24.

[6] Fetísov, A. (1980). *Acerca de la Demostración en Geometría.* Lecciones populares de matemáticas. Moscú: Editorial Mir.

[7] Gardikiotis, A. (2011). Minority Influence. *Social and Personality Psychology Compass,* 5 (9), 679–693,

[8] Guzmán, R. (2012). Matemática, Demostración y Tecnología. En Etelvina Archundia Sierra et al (Eds.). *El Desarrollo de la Tecnología para la Educación en México.* (pp. 91-96). Puebla México. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla , Dirección Fomento Editorial.

[9] Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2002). *Metodología de la investigación.* Tercera Ed. McGraw-Hill Interamericana. Mexico. pp. 3-111.

[10] Lakatos, I. (2007). Matemáticas, Ciencia y Epistemología. *Escritos Filosóficos 2.* Madrid. Ed: Alianza Editorial, S. A. pp. 91-102.

[11] Lambraño, E. (2005). *Transformaciones de Möbius y Temas Relacionados.* Monografía para optar al título de Matemático. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas. Bogotá D.C. pp 1-5.

[12] Larios, V. (2003). Si no Demuestro . . . ¿Enseño Matemática?. *Educación Matemática.* Agosto. 15 (002). Santillana. Distrito Federal, México. pp. 163-178

[13] Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar. Reflexiones y propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica.* Querétaro, México: Escuela de Bachilleres, Universidad Autónoma de Querétaro.

[14] Mendelson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic.* Gran Bretaña: Champ & Hall, fourth edition, pp. 33-35

[15] Mora, M. (2002). La teoría de las representaciones sociales de Serge Moscovici. *Athenea Digital,* 2 otoño.

[16] Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público.* Buenos Aires: Huemul.

[17] Moscovici, S. (1980). Toward a theory of conversion behavior. *Advances in experimental social Psychology,* Vol 13. pp 209-239.

[18] Mugny, G. & Pérez, J. (1985). Categorización e Influencia Minoritaria. *Anuario de Psicología,* 32 (1).

[19] Mugny, G. & Pérez J. (1991). *The Social Psychology Of Minority Influence.* Cambridge : Cambridge University Press.

[20] Riba, M. & Mugny, G. (1981). Consistencia y rigidez de las minorías: Reinterpretación. *Cuadernos de Psicología.* Vol II. pp 37-56.

[21] Valles, S. (2002). Entrevistas cualitativas. *Cuadernos metodológicos*, 32. Centro de Investigaciones Sociológicas.

[22] Viramontes, J. & Martínez, G. (2010). La demostración, un análisis desde la Teoría de las Representaciones Sociales. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 23 (pp:23-28). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Anexos

Cuestionario Tipo I

Sección 1. *¿ Qué es una demostración matemática? Justifique su respuesta ampliamente.*

Sección 2. *Lea con atención y después responda las preguntas.*

En una entrevista que se realizó a alumnos de primer año de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, una de las preguntas decía: "Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par". A lo cual respondieron algunos alumnos así:

Demostración 1: *a es par, entonces se puede escribir $a = 2k$.*
El cuadrado de a es: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ que es par.

$\blacksquare$

Demostración 2: *Sea $a^2 = 2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces $a = 2u$ $\left(\text{siendo } u = \dfrac{k}{2}\right)$ y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

■

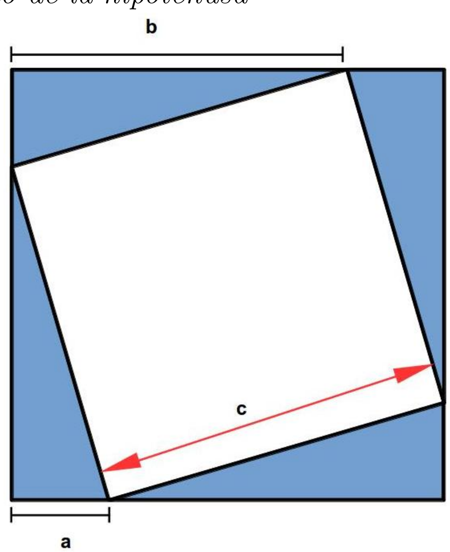
- ¿ Cuál demostración es la correcta? ¿ Por qué?
- Realice una demostración del valor de verdad de la proposición, si las demostraciones son incorrectas.

Sección 3. *Dé una respuesta y justifique las siguientes cuestiones:*

- *¿Hay distintos tipos de demostración en matemáticas? En caso de que la respuesta sea si, ¿cuáles son estos?*
- *¿Qué función o funciones tiene una demostración?*

Sección 4. *Lea con atención y después responda.*

"En todo triángulo rectángulo las suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"



La siguiente demostración fue dada por un profesor de la FCFM-BUAP.

Demostración :

Se observa que el área del cuadrado(de lado cuya longitud es $a + b$) es $(a+b)^2$, pero también se observa que se puede calcular su área sumando el área de los 4 triángulos y el área del cuadrado interior, por lo que se puede establecer la igualdad:

$$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

que se desarrolla como sigue:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

y finalmente, simplificando se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De aquí se observa que se cumple la proposición.

$\blacksquare$

- ¿ Consideras que la anterior es una demostración? ¿Por qué?
- ¿ Qué tipo de demostración es?
- ¿ Qué finalidad tiene la demostración?

Cuestionario Tipo II

Sección 1. *¿ Qué es una demostración matemática? Justifique su respuesta ampliamente.*

Sección 2. *Lea con atención y después responda las preguntas.*

En una entrevista que se realizó a alumnos de primer año y a profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, una de las preguntas decía: "Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par". En seguida presentamos una demostración dada por un alumno y otra por un profesor (no necesariamente en ese orden).

Demostración 1: *a es par, entonces se puede escribir $a = 2k$. El cuadrado de a es: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ que es par.*

$\blacksquare$

Demostración 2: *Sea $a^2 = 2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces $a = 2u$ $\left(\text{siendo } u = \dfrac{k}{2}\right)$ y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.*

$\blacksquare$

- ¿ Cuál demostración es la correcta? ¿ Por qué?
- Realice una demostración del valor de verdad de la proposición, si las demostraciones son incorrectas.

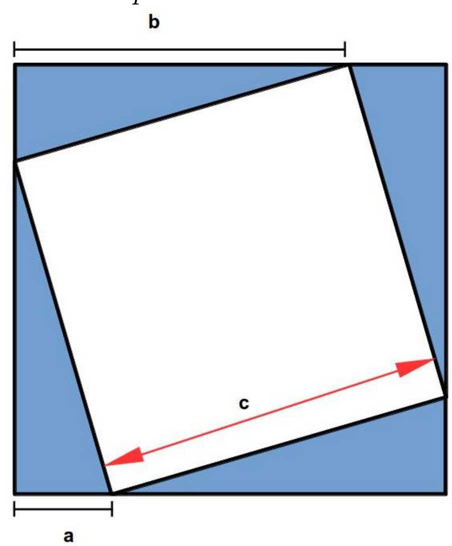
Sección 5. *Dé una respuesta y justifique las siguientes cuestiones:*

- *¿Hay distintos tipos de demostración en matemáticas? En caso de que la respuesta sea si, ¿cuáles son estos?*

- *¿Qué función o funciones tiene una demostración?*

Sección 3. *Lea con atención y después responda.*

"En todo triángulo rectángulo las suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"



Demostración :
Se observa que el área del cuadrado(de lado cuya longitud es $a + b$) es $(a+b)^2$, pero también se observa que se puede calcular su área sumando el área de los 4 triángulos y el área del cuadrado interior, por lo que se puede establecer la igualdad:

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

que se desarrolla como sigue:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

y finalmente, simplificando se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De aquí se observa que se cumple la proposición.

■

- ¿ Consideras que la anterior es una demostración? ¿Por qué?
- ¿ Qué tipo de demostración es?
- ¿ Qué finalidad tiene la demostración?