Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Aplicación de la Teoría de Opciones al Reaseguro

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Rebeca Antonio Zambrano

Director de tesis

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
Octubre de 2011

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Aplicación de la Teoría de Opciones al Reaseguro

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Rebeca Antonio Zambrano

Director de tesis

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
Octubre de 2011

Con cariño a
Raúl, Valeria Arantzazú, Citlalli

y a mi hermana
Maribel.

Agradecimientos

A Dios por permitirme llegar hasta este pequeño pero significativo momento.

A los que estuvieron junto a mi en los buenos y malos momentos:
Mamá, gracias por apoyarme siempre con lo que estuvo a tu alcance, por enseñarme que todo lo que cuesta ganarse en esta vida con gusto se disfruta.

Mari y Teo, por estar en todo momento a mi lado, y tomarme de la mano siempre que lo he necesitado, para obtener este logro ha sido fundamental su apoyo. Gracias por cuidar y dar cariño a mis hijas como si fueran suyas.

A mis hermanos; Veronica, María de Jesús, Gloria y Miguel gracias por la confianza que depositaron en mi para cumplir una meta más en mi vida.

Agradezco a mi asesor, Dr. Francisco Tajonar Sanabría, por su inagotable paciencia para ver concluido este trabajo, por sus consejos para seguir siempre adelante en pie de lucha y por su amistad brindada.

Un agradecimiento al jurado; Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, Dr. Victor Hugo Vázquez Guevara y Dra. Hortensia Reyes Cervantes por dedicar su valioso tiempo para revisar este trabajo.

Sin olvidar a mis amigos y compañeros que compartieron conmigo mi estancia en la facultad, por todo el apoyo que en algún momento me dieron.

Índice general

Introducción

La forma tradicional de calcular las primas de seguros se ha dado a través de métodos actuariales.

El proceso asegurador se caracteriza principalmente por la variable aleatoria "siniestralidad" la cual es ampliamente estudiada en la Teoría de Riesgo Clásica considerando las variables aleatorias básicas: número de siniestros y cuantia del siniestro; y la estabilidad del proceso asegurador, (véase [9]). Cuando los efectos de las variaciones de la siniestralidad son muy altas pueden llevar a la empresa aseguradora a la ruina. Es en este momento cuando aparece el reaseguro como un mecanismo para distribuir el riesgo y eliminar parte de las perdidas ocasionadas por la ocurrencia de siniestros con alto costo, pues la compañía aseguradora busca disminuir el riesgo de que las primas cobradas se vuelvan insuficientes.

Existen distintos tipos de reaseguro, por la relación legal que son contratados: reaseguro automático y reaseguro facultativo; y por la forma en que actuan en determinado siniestro: reaseguro proporcional y reaseguro no proporcional. Los contratos de reaseguro tienen una cantidad límite a partir de la cual paga el asegurado y a partir de la cual paga el reasegurador, generalmente se suscriben por año, llegada esta fecha de vencimiento se puede renovar el contrato o bien negociar con otra empresa reaseguradora, (véase [8]).

Además de los seguros, las opciones son otro medio que se puede utilizar para ampararse frente a un riesgo. Una opción protege ante una variación en los precios ya que se puede ejercer o no según sea el beneficio que se espere. Un seguro protege ante una adversidad, cubre los gastos cuando una situación inesperada ocurre. En ambos casos se paga una cuota por cubrir dicho suceso, (véase [4]).

El objetivo de este trabajo es mostrar como el modelo de valuación de opciones se puede aplicar al cálculo de primas para el reseguro no proporcional. Para esto se ha estructurado el trabajo de la siguiente manera:

En el capítulo uno revisamos algunos conceptos básicos, las distintas transformadas y la relación que existe entre ellas, así como algunas distribuciones de probabilidad. Además, se estudia la teoría de procesos estocásticos centrándonos principalmente en el proceso de Poisson y sus propiedades. Finalmente, se estudian los elementos del cálculo estocástico que nos permitiran abordar el modelo de Black-Scholes para la valuación de opciones, (véase[11]).

En el capítulo dos se presentan los modelos de seguro básicos: individual y colectivo para expresar el riesgo que asume una compañía aseguradora. También, se presentan algunas propiedades que posee la variable aleatoria que representa el riesgo acumulado.

En el capítulo tres se describen brevemente lo que es el seguro, el reaseguro; y el porqué una compañía aseguradora tiene la necesidad de reasegurarse. Además, se describen las formas más comunes del reaseguro que existen. Se analiza el riesgo asumido por la reaseguradora, el valor esperado y la varianza del monto total de los siniestros para el reaseguro no proporcional.

También, se presentan los tipos de opciones más comerciados en las bolsas de valores y con las cuales se va a trabajar. Se analiza y se desarrolla el modelo Black-Scholes para calcular el precio de una opción de compra y una opción de venta europea, desde la perspectiva de la matemática financiera.

El objetivo del capítulo cuatro es presentar una aplicación de la teoría de opciones para obtener la prima del contrato del reaseguro no proporcional.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones obtenidas en el desarrollo del trabajo de tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos básicos de probabilidad y estadística que son útiles para el desarrollo del trabajo. La revisión de propiedades así como definiciones se hace sobre aquellas que de manera directa o indirecta se utilizarán en el desarrollo de los siguientes capítulos.

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ constituido por un espacio muestra, Ω, una σ-álgebra $\mathcal{F}$, la cual es una colección no vacía de subconjuntos de Ω que cumple:

- $\emptyset, \ \ \Omega \in \mathcal{F}$;
- si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$;
- si $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ entonces $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \in \mathcal{F}$.

y una función de probabilidad P.
Los conjuntos que estan en $\mathcal{F}$ se llaman eventos.

Definición 1. *Una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada subconjunto Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$\{X \in B\} \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$, es decir, es la miníma σ-álgebra que contiene todos los intervalos de la forma $(-\infty, x], \ x \in \mathbb{R}$.

Definición 2. *Sea X una variable aleatoria, la función de distribución de X se define para cualquier $x \in \mathbb{R}$, como*

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Las variables aleatorias se pueden clasificar en variables aleatorias discretas, continuas o mixtas.

Definición 3. *La variable aleatoria X es discreta si toma un número finito o numerable de posibles valores. Y la función*

$$f(x) = P(X = x),$$

se llama función de probabilidad puntual. Mientras que la función de distribución toma la siguiente forma

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

Definición 4. *Para el caso en que las variables aleatorias toman valores en un espacio de muestra continuo se trata de una variable aleatoria continua, entonces, la función $f(\cdot)$ definida en el conjunto de los números reales, se llama función de densidad de probabilidad de X si:*

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R};$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$

con función de distribución dada de la siguiente forma,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad para \quad -\infty < x < \infty.$$

1.1. Momentos, Función Generadora y Transformadas

El valor esperado de una variable aleatoria X, $E(X)$, se define como

$$E(X) = \int x\, dF_X(x).$$

Los momentos que a continuación se definen son útiles para describir la forma de la distribución de una variable aleatoria X.

Definición 5. *El r-ésimo momento de X alrededor de cero se denota por μ_r y se define por*

$$\mu_r = E[X^r], \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Definición 6. *El r-ésimo momento factorial de X, se define como*

$$\mu_r^{'} = E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-(r+1))],$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Los momentos factoriales y los momentos se relacionan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mu_1^{'} &= \mu_1 \\
\mu_2^{'} &= \mu_2 - \mu_1 \\
\mu_3^{'} &= \mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu_1 \\
\mu_4^{'} &= \mu_4 - 6\mu_3 + 11\mu_2 - 6\mu_1.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_1^{'}\\ \mu_2 &= \mu_2^{'} + \mu_1^{'}\\ \mu_3 &= \mu_3^{'} + 3\mu_2^{'} + \mu_1^{'}.\end{aligned}$$

Definición 7. *El k-ésimo momento con respecto a la media o momento central de una variable aleatoria X, μ_k, está definido por*

$$\mu_k = E((X-\mu)^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Otros elementos que desempeñan un papel importante en la determinación de la función de distribución se enuncian a continuación.

Definición 8. *La función generadora de momentos (fgm) de una variable aleatoria X denotada por $M_X(z)$ se define como*

$$M_X(z) = E(e^{zX}) = \int e^{zx} dF(x).$$

Definición 9. *La función generadora de probabilidad, (fgp), de X, $P_X(z)$, se define como*

$$P_X(z) = E(z^X) = \int z^x dF_X(x).$$

Con frecuencia, la fgp se utiliza para el caso de variables aleatorias discretas. En tal caso

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x f_X(k).$$

A partir de la fgp, las probabilidades se obtienen de la siguiente forma

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} P_X(z) \mid_{z=0},$$

y los momentos factoriales se obtienen diferenciando a la fgp.

Definición 10. *La función característica, (fc), de X, $\phi_X(z)$, se define como*

$$\phi_X(z) = E(e^{izX}) = \int e^{izx}\, dF_X(x).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\phi_X^{'}(z) &= \int ixe^{izx}\, dF(x), \\
\phi_X^{'}(0) &= \int ix\, dF(x) = iE(X), \\
\phi_X^{''}(z) &= \int i^2x^2e^{izx}\, dF(x), \\
\phi_X^{''}(0) &= \int i^2x^2\, dF(x) = i^2E(X^2), \\
&\vdots \\
\phi_X^{k}(z) &= \int i^kx^ke^{izx}\, dF(x), \\
\phi_X^{k}(0) &= \int i^kx^k\, dF(x) = i^kE(X^k).
\end{aligned}$$

La siguiente transformada esta definida para variables que no toman valores negativos.

Definición 11. *La transformada de Laplace, (LT) de X o de su distribución, denotada por $L_X(z)$, se define como*

$$L_X(z) = E(e^{-zX}) = \int e^{-zx} dF(x).$$

Las transformadas definidas anteriormente se relacionan con la función generadora de momentos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
M_X(z) &= E(e^{zX}), \\
P_X(z) &= E(z^X) = E(e^{Xln(z)}) = M_X(ln(z)), \\
\phi_x(z) &= E(e^{izX}) = M_X(iz), \\
L_X(z) &= E(e^{-zX}) = M_X(-z).
\end{aligned}$$

A partir de la función generadora de momentos se define;

Definición 12. *La función generadora cumulante de X, la cual se denota como $C_X(z)$, se define como*

$$C_X(z) = lnM_X(z).$$

Note que si se toma la serie de potencias en z, se tiene

$$C_X(z) = k_1(z) + k_2(z)\frac{z^2}{2!} + \ldots + \ldots$$

donde $k_r,\ \ r = 1, 2, \ldots$; son llamados los cumulantes de la distribución.
Observe que

$$k_r = \frac{d^r}{dz^r} C_X(z) \mid_{z=0},$$

y además, el r-ésimo cumulante existe si todos los momentos de orden r existen.

1.2. Divisibilidad Infinita

El concepto de divisibilidad infinita de una variable aleatoria X o de su distribución puede ser utilizado para clasificar la distribución de dicha variable.

Definición 13. *Se dice que una variable aleatoria X o que su distribución es infinitamente divisible si para toda $n = 1, 2, 3, \ldots$, la función característica $\phi_X(z)$ puede ser escrita como*

$$\phi_X(z) = (\phi_n(z))^n,$$

donde $\phi_n(z)$ es la función característica de alguna distribución.

Para más detalles, (véase[5]).

1.3. Distribuciones de Probabilidad

1.3.1. Distribución de Sumas Aleatorias

Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes. La distribución de la suma $S = X + Y$ se denota por

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s),$$

la cual es llamada la convolución de F_X con F_Y. La función de distribución de S, esta dada por

$$\begin{aligned}
F_S(s) = P(S \leq s) &= \int P(S \leq s \mid Y = y) dF_Y(y) \\
&= \int P(X \leq s - y \mid Y = y) dF_Y(y) \\
&= \int F_{X|Y}(s - y \mid y) dF_Y(y) \\
&= \int F_X(s - y) dF_Y(y).
\end{aligned}$$

Observe que lo anterior se cumple por que $F_{X,Y}(x \mid y) = F_X(x)$ debido a la independencia de las variables aleatorias X y Y.
Por lo tanto,

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int F_X(s - y) dF_Y(y).$$

De manera similar se tiene que la función de densidad de probabilidad es

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int f_X(s - y) dF_Y(y).$$

`Observación 1.` *En general, si se tienen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variables aleatorias independientes y $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, entonces*

$$F_S(x) = F_{X_1} * F_{X_2} * \ldots * F_{X_n}(x).$$

Si además, se supone que $X_1, X_2, X_3, \ldots,$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución común $F_X(\cdot)$, función característica $\phi_X(\cdot)$, esperanza μ_X y varianza σ_X^2. Entonces, para $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, se tiene

1. $F_S(s) = F_X^{*n}(x)$,
2. $\phi_S(Z) = \{\phi_X(Z)\}^n$,
3. $E(S) = n\mu_X$,
4. $V(S) = n\sigma_X^2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Si ahora se considera a $S = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$, donde N tiene alguna distribución discreta y $S = 0$ cuando $N = 0$, entonces la función de distribución de S toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P(S \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F_X^{*n}(x), \end{aligned}$$

donde,

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La distribución de la suma aleatoria se conoce como distribución compuesta.

Si N tiene distribución Poisson, entonces la distribución de S, es una distribución Poisson compuesta, de manera similar cuando N tiene distribución Binomial o Binomial Negativa, se dice que S tiene una distribución Binomial o Binomial Negativa compuesta.

Además las transformadas se obtienen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi_S(z) = E(e^{izS}) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{iz(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_N)} \mid N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)(\phi_S(z))^n, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\phi_S(z) = P_N(\phi_X(z)).$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} M_S(z) &= P_N(M_X(z)), \\ P_S(z) &= P_N(P_X(z)), \\ L_S(z) &= P_N(L_X(z)). \end{aligned}$$

A continuación se presentan algunas distribuciones de probabilidad que son parte importante en la teoría de riesgo clásica.

1.3.2. Distribución Binomial

Una variable aleatoria X tiene distribución binomial con parametros n y θ, donde $n = 1, 2, \ldots$ y $\theta \in (0, 1)$, si su función de probabilidad puntual esta dada por

$$f(x; n, \theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n; \\ 0, & \text{d.}o.f. \end{cases}$$

Dicha distribución tiene como función generadora de probabilidades a

$$\begin{aligned} P_X(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (z\theta)^x \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} (1-\theta)^{n-x} \\ &= (z\theta + (1-\theta))^n = (1 + \theta(z-1))^n, \end{aligned}$$

con,

$$\mu = n\theta,$$

$$\sigma^2 = n\theta(1-\theta),$$

y función característica

$$\begin{aligned} \phi_X(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{izx} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (\theta e^{iz})^x \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} (1-\theta)^{n-x} \\ &= (\theta e^{iz} + (1-\theta))^n = (1 + \theta(e^{iz}-1))^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

De acuerdo con (1.1) se tiene que $\phi_X(z) = (1 + \theta(e^{iz}-1))^n$, la cual se puede reescribir como

$$\phi_X(z) = \left(\left(1 + \theta(e^{iz}-1)\right)^{\frac{n}{m}}\right)^m, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde

$$\phi_m(z) = \left(1 + \theta(e^{iz}-1)\right)^{\frac{n}{m}},$$

no es una función característica, dado que $\frac{n}{m}$ no siempre es un entero. Este hecho indica que la función de distribución de una variable aleatoria binomial no es infinitamente divisible.

1.3.3. Distribución de Poisson

La función de probabilidad puntual Poisson con parámetro $\lambda > 0$ está dada por

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & \text{x} = 0, 1, 2, \ldots; \\ 0, & \text{d.}o.f. \end{cases}$$

La función generadora de probabilidades de una variable aleatoria X que se distribuye Poisson es

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x \lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= e^{-\lambda(z-1)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Mientras que, la función generadora de momentos es

$$M_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{zx} \frac{\lambda^x e^{\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^z)^x}{x!}.$$

Note que, $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^z)^x}{x!}$ es una serie de McLaurin, por tanto

$$M_X(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^z} = e^{\lambda(e^z-1)}. \tag{1.3}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M_x^{'}(0) = \lambda, \\ \mu_2 &= M_x^{''}(0) = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mu = \lambda, \tag{1.4}$$
$$\sigma^2 = \lambda. \tag{1.5}$$

1.3.4. Distribución Log-normal

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{1}{2}\,(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sea $Y = exp\, X$ entonces $X = ln\, Y$, por lo que la función de densidad de probabilidad de Y es,

$$f_Y(y) = f_X(ln(y))\, \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\, y}\, e^{-\frac{1}{2}\,(\frac{ln\,(y)-\mu}{\sigma})^2}, \quad y > 0.$$

La cual es conocida como distribución log-normal.

La función de distribución de Y esta dada por,

$$F(y) = \Phi\left(\frac{ln\,(y) - \mu}{\sigma}\right), \quad y > 0.$$

Donde $\Phi(\Delta)$ es la función de distribución normal estándar.

El r-ésimo momento alrededor del cero se obtiene utilizando resultados de la distribución normal.

Note que,

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(Y^r) \\ &= E(e^{rX}) \\ &= M_X(r), \end{aligned}$$

con $M_X(z)$ la función generadora de momentos de la distribución normal.

Por tanto,

$$\mu_r = exp\left(\mu r + \frac{r^2\sigma^2}{2}\right).$$

1.4. Procesos Estocásticos

La utilidad de los procesos estocásticos para describir el comportamiento aleatorio de variables financieras en el tiempo tales como los precios de las acciones, las tasas de interés, los tipos de cambio, etc., ha hecho que ocupen un papel muy importante en la teoría de finanzas en tiempo continuo.

Definición 14. *La sucesión $\mathbf{X} = \{X(t) : t \in T\}$ es un proceso estocástico si para cada $t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria.*

Al conjunto T se le llama conjunto índice o espacio de parámetros. El número t se conoce como índice, el cual es interpretado como el parámetro tiempo, cada $X(t)$ es un estado del proceso y al conjunto $\{X(t) : t \in T\}$ es llamado el espacio de estados de $\mathbf{X}$. Al conjunto de todos los posibles valores de $X(t)$ para algún t fijo se le llama espacio muestral de $X(t)$.

Si T es un conjunto discreto, el proceso $\mathbf{X}$ es un proceso estocástico a tiempo discreto. Si T es un conjunto continuo, el proceso $\mathbf{X}$ es un proceso estocástico a tiempo continuo.

Definición 15. *Un proceso estocástico a tiempo continuo tiene incrementos estacionarios si $X(t+h) - X(t)$ tiene la misma distribución para todos los valores de t. Es decir, que la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo depende sólo de la longitud del intervalo.*

Definición 16. *Un proceso estocástico a tiempo continuo tiene incrementos independientes si para $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, las variables aleatorias*

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

son mutuamente independientes. Es decir, el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

Definición 17. *Un proceso de conteo $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso que representa el número total de eventos que ocurren en el tiempo t. Este proceso satisface las siguientes propiedades:*

1. $N(t) \geq 0$,

2. $N(t)$, *es un valor entero,*

3. $N(t)$ *es no decreciente, es decir, para todo* $s, t \in T$ *con* $s < t$, $N(s) < N(t)$,

4. *Para* $s < t$, $N(t) - N(s)$ *representa el número de eventos que ocurren en el intervalo* $(s, t]$.

1.4.1. Procesos de Poisson

El proceso de Poisson es un proceso de conteo especial, en el cual el número de eventos que ocurren en algún período de tiempo tiene una distribución Poisson. A continuación se define de manera formal.

Definición 18. *Un proceso de conteo $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ es un Proceso de Poisson con parametro $\lambda > 0$, si satisface las siguientes condiciones*

1. $N(0) = 0$,

2. *El proceso N tiene incrementos estacionarios e independientes.*

3. $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o(h)$, *para* $t \geq 0$.

4. $P[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h)$, *para* $t \geq 0$.

`Observación 2.` *Recuerde que una función $f(x)$ es $o(h)$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Las condiciones (3) y (4) eliminan la posibilidad de que en intervalos suficientemente pequeños ocurra más de un evento.

Teorema 1. *Para cualquier proceso de conteo que satisfaga las condiciones de la definición (18), el número de eventos en cualquier intervalo de longitud t, tiene una distribución Poisson con esperanza λt. Es decir, para $s, t \geq 0$*

$$P\left[N(t+s) - N(s) = n\right] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

Demostración. Sea $P_n(t) = P\left[N(t) = n\right]$. Entonces para $n = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
P_0\left[t+h\right] &= P\left[N(t) = 0\right] = P\left[N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\right] \\
&= P\left[N(t) = 0\right] P\left[N(t+h) - N(t) = 0\right] \\
&= P_0\left[t\right]\left[1 - P\left(N(t+h) - N(t)\right) \geq 1\right] \\
&= P_0\left[t\right]\left[1 - P\left(N(t+h) - N(t)\right) = 1 + P\left(N(t+h) - N(t) > 1\right)\right] \\
&= P_0\left[t\right]\left[1 - (\lambda h + o(h)) + o(h)\right] \\
&= P_0\left[t\right]\left[1 - (\lambda h + o(h))\right] = P_0\left[t\right]\left[1 - \lambda h + o(h)\right],
\end{aligned}$$

luego,

$$\frac{P_0\left[t+h\right] - P_0\left[t\right]}{h} = \frac{P_0[t](-\lambda h + o(h))}{h},$$

entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_0\left[t+h\right] - P_0\left[t\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_0[t](-\lambda h + o(h))}{h},$$

por tanto,

$$P_0^{'}[t] = -\lambda P_0[t],$$

de donde,

$$P_0[t] = e^{-\lambda t}.$$

Ahora mostremos cuando $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P_n\left[t+h\right] &= P\left[N(t+h)=n\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} P\left[N(t)=n-j, N(t+h)-N(t)=j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} P\left[N(t)=n-j\right] P\left[N(t+h)-N(t)=j\right] \\
&= P\left[N(t)=n\right] P\left[N(t+h)-N(t)=0\right] \\
&+ P\left[N(t)=n-1\right] P\left[N(t+h)-N(t)=1\right] \\
&+ \sum_{j=2}^{n} P\left[N(t)=n-j, N(t+h)-N(t)=j\right] \\
&= P_n\left[t\right]\left[1-P\left[N(t+h)-N(t)=1\right]+P\left[N(t+h)-N(t)>1\right]\right] \\
&+ \lambda h P_{n-1}(t)+o(h) \\
&= P_n\left[t\right]\left[1-((\lambda h+o(h))+o(h))\right]+\lambda h P_{n-1}[t]+o(h) \\
&= P_n\left[t\right]+\lambda h\left[P_{n-1}[t]-P_n[t]\right]+o(h).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_n\left[t+h\right]-P_n\left[t\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\lambda h(P_{n-1}\left[t\right]-P_n[t])+o(h)}{h},$$

y

$$P_n^{'}[t]=-\lambda(P_{n-1}[t]-P_n[t]).$$

Veamos que,

$$\forall n\geq 0, \quad P_n[t]=(\lambda t)^n\frac{e^{-\lambda t}}{n!},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left((\lambda t)^{n+1}\frac{e^{-\lambda t}}{(n+1)!}\right) &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d}{dt}\left(t^{n+1}e^{-\lambda t}\right) \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\left((n+1)t^n e^{-\lambda t}-\lambda t^{n+1}e^{-\lambda t}\right).
\end{aligned}$$

Por el teorema de unicidad para la solución de ecuaciones diferenciales se tiene el resultado deseado, (véase[2]).
Así,

$$P\left[N(t+s)-N(s)=n\right]=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

□

1.5. Movimiento Browniano

Definición 19. *Un movimiento Browniano estándar es un proceso estocástico* $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ *definido en un espacio fijo de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *que satisface:*

1. $W(0) = 0$.
2. $W(t)$ *es una función continua en* t.
3. *Para cualquier conjunto de tiempos* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$*, los incrementos* $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_n - 1)$ *son independientes.*
4. *Para cualquier par de tiempos* t *y* s*, con* $0 \leq s < t$*,* $W(t) - W(s)$ *tiene distribución normal con media* 0 *y varianza* $t - s$*.*

A continuación mostramos algunas propiedades del Movimiento Browniano.

`Proposición 1.` *El Movimiento Browniano cumple que*

1. $E(W(t)^2) = t$.
2. *Si* $s < t$*, entonces* $E((W(s))(W(t))) = s$.
3. $E(e^{izW(t)}) = e^{-\frac{z^2 t}{2}}$.
4. $E(W(t)^4) = 3t^2$.

Demostración. 1. Dado que $W(t)$ se distribuye normal con media 0 y varianza t, el resultado es inmediato.

2. La función de distribución conjunta de $W(s)$, $W(t)$ es:

$$f_{W(s),W(t)}(x, y) = f(0, s; x) f(x, t - s; y),$$

donde $f(x, t - s; y)$ es la función de distribución de $W(t) - W(s)$.

$$\begin{aligned}
E((W(s))(W(t))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y f(0, s; x) f(x, t - s; y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(0, s; x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, t - s; y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(0, s; x)\, dx = s.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E(e^{izW(t)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2 t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-izt)^2}{2t}} dx \\ &= e^{-\frac{z^2 t}{2}}. \end{aligned}$$

4. De acuerdo con el resultado en 3, se tiene que

$$\begin{aligned} E(W(t)^4) &= \frac{d^4}{dz^4}\bigg|_{z=0} E(e^{izW(t)}) \\ &= \frac{d^4}{dz^4}\bigg|_{z=0} e^{-\frac{z^2 t}{2}} = 3t^2. \end{aligned}$$

□

1.6. Filtraciones

Generalmente en los modelos financieros es necesario conocer los precios, pasado y presente, de las acciones para establecer un pronóstico. El siguiente concepto es una herramienta útil para esta idea.

Definición 20. *Una filtración es una familia $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ de σ-álgebras, tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ para toda $t \in T$, donde $T \subset \mathbb{R}$.*

Definición 21. *Se dice que un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Es decir, que la información que toma X_t en t, depende solamente de la información disponible en t.*

Definición 22. *Un proceso estocástico $\{\widetilde{X}_t : t \geq 0\}$ es una modificación de $\{X_t : t \geq 0\}$ si para toda $t \geq 0$, $P(X_t = \widetilde{X_t}) = 1$. Es decir, las variables aleatorias de $\{X_t : t \geq 0\}$ son iguales a las variables aleatorias de $\{\widetilde{X}_t : t \geq 0\}$ con probabilidad uno.*

`Observación 3.` *Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y $\{\widetilde{X}_t : t \geq 0\}$ es una modificación de $\{X_t : t \geq 0\}$ entonces $\{\widetilde{X}_t : t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, (véase [8]).*

1.7. Proceso de Wiener

Definición 23. *Sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Un proceso estocástico $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener relativo a $\mathbb{F}$ si cumple lo siguiente*

1. *$W(0) = 0$.*

2. *$W(t)$ es una función continua en t.*

3. *$W(t)$ es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$.*

4. *Si $0 \leq s < t$, el incremento $W(t) - W(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y normalmente distribuido con media 0 y varianza $t - s$.*

Las siguientes son condiciones bajo las cuales un proceso de Wiener es un movimiento Browniano

`Proposición 2.` *Un proceso estocástico $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener relativo a $\mathbb{F}$ si y sólo si*

1. *$W(t)$ es un movimiento Browniano,*

2. *$W(t)$ es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$,*

3. *$W(t) - W(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ cuando $0 \leq s \leq t$.*

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en (véase[8]). □

1.8. Movimiento Browniano Geométrico

Uno de los conceptos importantes en los modelos financieros es el movimiento Browniano geométrico, el cual se obtiene a través de una transformación exponencial del movimiento Browniano.

Definición 24. *Si $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano, μ es una constante, $\sigma > 0$ y S_0 es el precio inicial conocido de una acción, entonces*

$$S_t = S_0 \, exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \right\},$$

es llamado movimiento Browniano geométrico.

Generalmente, este proceso se utiliza para describir el cambio porcentual del precio de una acción, (véase[11]).

1.9. Integral de Itô

Sea $\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$ un movimiento Browniano y una partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ del intervalo $(0, t]$ tal que $t_i = \frac{it}{n}$. Así, $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$, y $V_n = \sum_{i=1}^{n}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2$, $n = 1, 2, \ldots,$ una sucesión de variables aleatorias. Deseamos encontrar V_t con la siguiente propiedad

$$lim_{n\to\infty} E[(V_n - V_t)^2] = 0, \tag{1.6}$$

pues la convergencia se debe dar en media cuádratica. Entonces, sea

$$V_t = E\left[\sum_{i=1}^{n}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2\right].$$

Note que,

$$\begin{aligned} V_t &= E\left[\sum_{i=1}^{n}(W(t_i)-W(t_{i-1}))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[(W(t_i)-W(t_{i-1}))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[(W(t_i))^2\right]-2E\left[W(t_i)W(t_{i-1})\right]+E\left[(W(t_{i-1}))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(t_i-2t_{i-1}+t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=t, \end{aligned}$$

es independiente de n.
En este caso, (1.6) se transforma en el error cuadrático medio, $E\left[(V_t-E(V_t))^2\right]$. Observe que,

$$\begin{aligned} E\left[(V_n-t)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(W(t_i)-W(t_{i-1}))^2-t\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W(t_i))^4-2t\sum_{i=1}^{n}(\Delta W(t_i))^2+t^2+2\sum_{1\le i<j\le n}(\Delta W(t_i))^2(\Delta W(t_j))^2\right]. \end{aligned}$$

En relación con la Proposición 1, tenemos que

$$\begin{aligned} E\left[(V_n-t)^2\right] &= 3\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})^2-2t\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})+t^2 \\ &+ 2\sum_{1\le i<j\le n}(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1}). \end{aligned}$$

Luego,

$$3\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})^2=3\frac{t^2}{n},$$

y

$$\sum_{1\le i<j\le n}(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})=\binom{n}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2=\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2n}.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W(t_i))^2-t\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{2t^2}{n}=0.$$

Por lo cual, el límite de V_t se puede escribir como

$$\int_0^t (dW(s))^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta W(t_i))^2 = t. \tag{1.7}$$

En efecto se cumple que la convergencia es en media cuadrática como se establecio en (1.6).

Definición 25. *La integral estocástica o integral de Itô*

$$V_t = \int_0^t f(s)d(W(s)),$$

es el proceso estocástico tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})) - V_t\right]^2 = 0,$$

donde $\{W(t) : t \geq 0\}$ *es un movimiento Browniano y* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$, *es una partición del intervalo* $[0,t]$ *tal que* $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se tiene que $\int_0^t f(s)^2\, ds < \infty$, casi donde quiera. Esto asegura que la integral de Itô este bien definida y que $\int_0^t E(f^2(s))\, ds < \infty$ asegura que la varianza de $\int_0^t f(s)^2\, dW(s)$, se mantenga finita.

`Proposición 3.` *La integral estocástica tiene las siguientes propiedades*

1. *Linealidad Si* f *y* g *son tales que sus integrales de Itô existen y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s))\, dW(s) = \alpha \int_0^t f(s)dW(s) + \beta \int_0^t g(s)\, dW(s).$$

2. *Isometría Si* f *es tal que su integral de Itô existe, entonces*

$$E\left[\left(\int_0^t f(s)\, dW(s)\right)^2\right] = E\left(\int_0^t f(s)^2\, ds\right) = \int_0^t E(f(s)^2)\, ds.$$

3. *Propiedad de martingala Si* f *es tal que su integral de Itô existe, entonces*

$$E\left[\int_0^t f(s)\, dW(s)|\mathcal{F}_u\right] = \int_0^u f(s)\, dW(s), \quad 0 < u < t.$$

Las pruebas de estas propiedades se encuentran en (véase [7]).

1.10. Diferenciación Estocástica

El lema de Itô es un resultado muy importante del cálculo estocástico, se utiliza para obtener diferenciales estocásticas. A continuación se enuncian las reglas básicas de diferenciación estocástica que serán útiles para el desarrollo del lema de Itô en su forma diferencial e integral.

Reglas básicas de diferenciación estocástica

En el cálculo de variables reales es bien sabido que si una cantidad es pequeña, entonces su cuadrado es una cantidad todavia más pequeña. Es decir, si t es una variable independiente, entonces el cuadrado de una cantidad infinitesimal se escribe

$$(dt)^2 = 0. \tag{1.8}$$

La regla central de cálculo estocástico, que hace la distinción entre el cálculo de variables reales, se debe a que el cuadrado de una cantidad infinitesimal es significativa.
Si $\{W(t) : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano, entonces por (1.7)

$$(dW(t))^2 = dt. \tag{1.9}$$

De manera formal, el cálculo estocástico produce

$$\int_0^t (dW(s))^2 = \int_0^t ds = t, \tag{1.10}$$

de manera más simple se denota como en (1.9).

Note que,

$$(dt)(dW(t)) = (dt)(dt)^{\frac{1}{2}} = (dt)^{\frac{3}{2}},$$

es una cantidad despreciable, es decir; $(dt)(dW(t)) = 0$.

Las reglas básicas de diferenciación estocástica se resumen en la siguiente tabla

	dt	$dW(t)$
dt	0	0
$dW(t)$	0	dt

1.10.1. Lema de Itô

Sean

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(S_t, t)dt + \int_0^t \sigma(S_t, t)dW(t) \quad y \quad y = f(S_t, t).$$

Considerando a (1.9), calculemos su diferencial utilizando una serie de Taylor.
La expansión en serie de Taylor de $y = f(S_t, t)$ en términos de segundo orden conduce a,

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial (S_t)^2}(dS_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} dS_t dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sustituyendo (1.9) y aplicando las reglas de diferenciación estocástica, obtenemos,

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial S_t}\left(\mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW(t)\right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial (S_t)^2}\mu^2(S_t,t)(dt)^2 + 2\mu(S_t,t)\sigma(S_t,t)dtdW(t) + \sigma^2(S_t,t)(dW(t))^2\right] \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(\mu(S_t,t)(dt)^2 + \sigma(S_t,t)(dW(t))(dt)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu(S_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2(S_t,t)\right] dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma(S_t,t)(dW(t)). \end{aligned} \tag{1.13}$$

La ecuación (1.12) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial S_u}\mu(S_u,u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}\sigma^2(S_u,u)\right) du \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u}\sigma(S_u,u)(dW_u). \end{aligned}$$

Entonces,

$$dS_u = \mu(S_u,u)du + \sigma(S_u,u)dW(u),$$

o

$$y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}\sigma^2(S_u,u)du. \tag{1.14}$$

Los resultados anteriores son conocidos como el Lema de Itô en su forma diferencial e integral y se obtienen suponiendo que $y = f(S_t, t)$ tiene segundas derivadas parciales continuas, para más detalles, (véase [11]).

`Ejemplo 1.` *El movimiento Browniano geométrico satisface que:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t),$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma > 0$.
Si $y = lnS_t$, *entonces*

$$\frac{\partial y}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Aplicando el Lema de Itô en su forma diferencial, obtenemos,

$$d\,lnS_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t). \tag{1.15}$$

Note que,

$$\begin{aligned} d\,lnS_t &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t) \\ &= \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

La integral estocástica de (1.14) esta dada por

$$\begin{aligned} lnS_t &= lnS_0 + \mu \int_0^t du - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t (dW(u))^2 + \sigma \int_0^t dW(s) \\ &= lnS_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t). \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que las reglas del cálculo de variables reales no son consistentes en el cálculo estocástico.

Capítulo 2

Teoría de Riesgo

En el proceso asegurador la variable aleatoria de interés es la "siniestralidad", está variable se estudia en la Teoría de Riesgo Clásica. El objetivo consiste en estudiar la distribución de la siniestralidad asi como, la estabilidad del proceso. La incertidumbre es un elemento esencial en el proceso asegurador, por lo que la teoría de riesgo se encarga de las variables aleatorias que afectan a este proceso analizando la variación y la forma en la que estas influyen en los resultados.

Enseguida se presentan los modelos, individual y colectivo que modelan el riesgo que enfrenta una compañía aseguradora.

2.1. Modelo Individual

Suponga que se tiene un portafolio con n pólizas de seguros válidas por un año.
Denotemos con p_j la probabilidad de que el $j-$ésimo asegurado no haga alguna reclamación en este periodo de tiempo y por q_j la probabilidad de que haga exactamente una reclamación; es decir,

$$p_j + q_j = 1.$$

Sea

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ \\ 0, & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases}$$

Observe que D_j es una variable aleatoria con distribución Bernoulli y parámetro q_j.
Sea C_j el monto de la reclamación efectuada por la póliza j, entonces la verdadera reclamación de la póliza está determinada por

$$D_j C_j = \begin{cases} C_j, & \text{si } D_j = 1, \\ \\ 0, & \text{si } D_j = 0. \end{cases}$$

Así, se consideran los vectores $(D_1, C_1), \ldots, (D_n, C_n)$, los cuales suponemos son independientes. Además, C_j, D_j también se consideran independientes. A partir de esto se define el agregado de reclamaciones como

Definición 26. *El monto agregado de reclamaciones, en el modelo individual, es la variable aleatoria*

$$S = \sum_{j=1}^{n} D_j C_j,$$

la cual se llama riesgo.

Nuestro interés esta orientado en analizar las propiedades de la variable aleatoria S.
Si $F_j(\cdot)$ es la función de distribución de $D_j C_j$ y $F(\cdot)$ la función de distribución de S, entonces, por la Observación 1, se tiene que la función de distribución esta dada en términos de convoluciones

$$F(x) = (F_1 * \ldots * F_n)(x).$$

Denotemos por $G_j(x)$ la función de distribución de C_j y cuando exista, $M_X(t)$ la función generadora de momentos de una variable aleatoria X cualquiera.

Teorema 2. *Bajo la notación e hipótesis anteriores*

1. $F_j(x) = p_j 1_{[0,\infty)}(x) + q_j G_j(x)$.
2. $M_{D_j C_j}(t) = 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)$.
3. $M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)\right]$.
4. $E(S) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j)$.
5. $V(S) = \sum_{j=1}^{n} \left[q_j V(C_j) + q_j p_j [E(C_j)]^2\right]$.

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}
F_j(x) &= P(D_j C_j \leq x) \\
&= P\left(D_j\, C_j \leq x \mid D_j = 0\right) P\left(D_j = 0\right) \\
&+ P\left(D_j\, C_j \leq x \mid D_j = 1\right) P\left(D_j = 1\right) \\
&= P\left(0 \leq x \mid D_j = 0\right) p_j + P\left(C_j \leq x \mid D_j = 1\right) q_j \\
&= p_j 1_{[0,\infty)}(x) + q_j G_j(x).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
M_{D_jC_j}(t) &= E(e^{tD_jC_j}) \\
&= E\left(e^{tD_jC_j} \mid D_j = 0\right) P\left(D_j = 0\right) \\
&+ E\left(e^{tD_jC_j} \mid D_j = 1\right) P\left(D_j = 1\right) \\
&= E\left(e^{0} \mid D_j = 0\right) p_j + E\left(e^{tC_j} \mid D_j = 1\right) q_j \\
&= p_j + q_j M_{C_j}(t) \\
&= 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1).
\end{aligned}$$

3. Por (2), se sabe que

$$M_{D_jC_j}(t) = 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1),$$

como C_j, D_j son independientes se sigue inmediatamente el resultado.

4.

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} E(D_jC_j) = \sum_{j=1}^{n} E(D_j)E(C_j) = \sum_{j=1}^{n} q_jE(C_j).$$

5. Observe que

$$a) \;\; E(D_jC_j) = E(D_j)E(C_j) = q_jE(C_j).$$

$$b) \;\; E({D_j}^2{C_j}^2) = E({D_j}^2)E({C_j}^2) = q_jE({C_j}^2).$$

Luego entonces de a) y b),

$$V(D_jC_j) = E({D_j}^2{C_j}^2) - [E(D_jC_j)]^2 = q_jV(C_j) + q_jp_jE[(C_j)]^2.$$

Por tanto, usando la hipótesis de independencia y del resultado anterior, se tiene que

$$V(S) = \sum_{j=1}^{n} \left[q_jV(C_j) + q_jp_jE[(C_j)]^2\right].$$

□

2.2. Modelo Colectivo

Considere un conjunto de un número desconocido de contratos de seguros vigentes en un período de tiempo [0, T]. Sea N la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones que ocurren en este intervalo y, sean $Y_1, \ldots, Y_N$, los montos de dichas reclamaciones. Suponga que N es una variable aleatoria con cierta distribución y que los $Y_j, \quad j = 1, \ldots, N$, son variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad que además son independientes de N.

Definición 27. *El monto de las reclamaciones agregado o monto acumulado, de todas las reclamaciones, es la variable aleatoria S, definida como,*

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j.$$

`Observación 4.` *Note que*

1. *Si $N = 0$ entonces $S = 0$.*
2. *S es una variable aleatoria mixta.*

`Proposición 4.` *Sea $G(\cdot)$ la función de distribución de cada reclamación Y, la función de distribución del riesgo S esta dada por*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
F(x) &= P\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq x\right) \\
&= P\left(Y_0 \leq x \mid N = 0\right) P(N = 0) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \leq x \mid N = n\right) P(N = n) \\
&= G^{*0}(x) P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n).
\end{aligned}$$

□

De igual forma que en el modelo individual, se muestran algunas características de la variable aleatoria S.

`Proposición 5.` *La variable aleatoria S definida anteriormente tiene las siguientes propiedades.*

1. $E(S) = E(N)E(Y)$.
2. $E(S^2) = E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))[E(Y)]^2$.
3. $V(S) = V(N)[E(Y)]^2 + V(Y)E(N)$.
4. $M_S(r) = M_N[ln(M_Y(r))]$.

Demostración.

1. Aplicando la definición de valor esperado y condicionando sobre N se tiene que

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \mid N=n\right) P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \mid N=n\right) P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} E(Y_j)P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y_j)P(N=n) \\ &= E(N)E(Y). \end{aligned}$$

2. Procediendo de forma análoga a (1), se tiene

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right)^2 \mid N=n\right] P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2 \mid N=n\right] P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2\right] P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 + \sum_{k,j=1_{j\neq k}}^{n} E(Y_jY_k)\right] P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y^2)P(N=n) + \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1))[E(Y)]^2P(N=n) \\ &= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))[E(Y)]^2. \end{aligned}$$

3. De las propiedades (1) y (2), se tiene que

$$\begin{aligned} V(S) &= E(S^2) - [E(S)]^2 \\ &= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))[E(Y)]^2 - [E(N)]^2[E(Y)]^2 \\ &= E(N)V(Y) + [E(Y)]^2[E(N^2) - [E(N)]^2] \\ &= E(N)V(Y) + V(N)[E(Y)]^2. \end{aligned}$$

4. Usando la definición de función generadora de momentos y condicionando sobre N, se tiene que

$$\begin{aligned} M_S(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{r(Y_1+\cdots+Y_N)} \mid N=n\right) P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{rY_1}.e^{rY_2}\dots e^{rY_n}\right) P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_Y(r)\right)^n P(N=n) \\ &= E\left(M_Y(r)^N\right) \\ &= M_N[ln(M_Y(r))]. \end{aligned}$$

□

2.3. Modelo de Poisson Compuesto

Si en el modelo colectivo se considera que N tiene una distribución de Poisson con parámetro λ, entonces S tiene una distribución compuesta la cual recibe el nombre de distribución Poisson Compuesta.

`Proposición 6.` *Sea $\mu_n = E(Y^n)$, en particular $\mu = \mu_1$. Bajo las consideraciones para N, la variable aleatoria S tiene las siguientes propiedades*

1. $E(S) = \lambda\mu$.
2. $E(S^2) = \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2$.
3. $E(S^3) = \lambda\mu_3 + 3\lambda^2\mu_2\mu + \lambda^3\mu^3$.
4. $V(S) = \lambda\mu_2$.
5. $E[(S - E(S))^3] = \lambda\mu_3$.

6. $\alpha_3 = \frac{E\left[(S-E(S))^3\right]}{[V(S)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}}$.

7. $M_S(r) = exp[\lambda(M_Y(r) - 1)]$.

A partir de los resultados de la Sección 1.3.3, se sabe que $E(N) = \lambda$, $V(N) = \lambda$ y $M_N(r) = exp(\lambda(e^r - 1))$. Además, haciendo uso de la Proposición 5 se demuestran las propiedades antes mencionadas.

Para más modelos compuestos (veáse [9]).

2.4. Modelo de Poisson Compuesto Asociado al Modelo Individual

A partir del modelo individual se construye un modelo colectivo con distribución Poisson compuesta, para lo cual suponemos que

1. El número de reclamaciones en los dos modelos sea el mismo,

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} q_j.$$

2. Se define la función de distribución de una reclamación como la suma de las funciones de distribución del monto de reclamaciones en el modelo individual.

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} G_j(x).$$

Donde $G_j(x)$ y $G(x)$ son las funciones de distribución de C_j y del monto de reclamaciones respectivamente.

Definición 28. *El modelo colectivo Poisson compuesto asociado al modelo individual se define como*

$$S^c = \sum_{j=1}^{N} Y_j,$$

donde N es el número de reclamaciones y, $Y_1, \ldots, Y_N$ los montos de dichas reclamaciones.

Para este modelo se tienen las siguientes propiedades.

`Proposición 7.` *Sea S^c el modelo colectivo Poisson compuesto asociado al modelo individual S^i. Entonces*

1. $E(S^c) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j)$.

2. $V(S^c) = \sum_{j=1}^{n} q_j (V(C_j) + [E(C_j)]^2)$.

3. $E(Y^k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} E(C_j^k)$.

4. $M_Y(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t)$.

A continución se demuestra la igualdad 3.

Demostración.

$$\begin{aligned} E(Y^k) &= \int_0^\infty y^k \, dG(y) \\ &= \int_0^\infty y^k \, d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \, G_j(y)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \int_0^\infty y^k \, dG_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \, E(C_j^k). \end{aligned}$$

□

Las demás igualdades se siguen directamente de las condiciones establecidas sobre λ, $G(x)$ y los resultados anteriores.

Una vez que se han estudiado los modelos clásicos, así como sus propiedades en el siguiente capítulo se discutirá qué es el reaseguro y que son las opciones.

Capítulo 3

Reaseguro y Opciones

Antes de dar una definición formal de lo que es el reaseguro, así como los tipos y características de los mismos, es importante dar una breve descripción de lo que es el seguro y por tanto, analizar cuales son los riesgos que enfrenta una compañía aseguradora por los cualesse ve en la necesidad de reasegurarse.

3.1. Seguros

Los sistemas de seguros ofrecen alivio frente a pérdidas de un siniestro en las cuales el número, tamaño o momento de ocurrencia es aleatorio. Si el asegurado tiene el control sobre la ocurrencia del suceso o si la reclamación excede la pérdida financiera existirá un incentivo para que la pérdida ocurra. Bajo esta situación el seguro no cumplirá con el objetivo de aumentar las utilidades esperadas tanto del asegurado como del asegurador.
Cuando se organiza un nuevo seguro es importante conocer la información anterior sobre situaciones de riesgos similares para realizar estimaciones preliminares y determinar el pago que realiza el asegurado, así como el monto que la aseguradora cubrirá por el riesgo aceptado, (véase [8]).
Para que un sistema de seguros sea estable es esencial que ciertas características se cumplan:

1. Gran número de asegurados:
   El valor esperado del monto de los siniestros aumenta o es mayor si la población asegurada es grande.

2. Valores a riesgo homogéneo:
   Tener mayor homogeneidad en las sumas aseguradas implica que la varianza sea menos en cuanto al monto total de los siniestros.

3. Cálculos adecuados:
   Lo que paga el asegurado debe estar relacionado con la información del riesgo a cubrir.

Aunque las características antes mencionadas puedan cumplirse, existen otros riesgos que el seguro puede enfrentar, algunos de ellos son:

1. Riesgo por desvío en las bases demográficas:
   Un ejemplo de ello es cuando surgen epidemias incontrolables que afectan a gran parte de la población.

2. Riesgo por la acumulación de siniestros en un evento:
   Es la acumulación de siniestros que se ven afectados por un mismo evento catastrófico, como en el caso de un terremoto, un huracan o accidente aéreo.

3. Riesgo por antiselección:
   Cuando el asegurado tiene ventajas por cotizaciones no detalladas.

3.2. Cálculo de Primas

El seguro se sustenta en la cantidad de dinero que cada asegurado acuerda pagar a la compañía aseguradora, a esta cantidad se le conoce como "prima". La suma de todas las primas recogidas se utilizan para pagar los posibles siniestros ocasionados por el conjunto de asegurados durante el período de tiempo establecido. Así que el asegurado evita pagar la cuantía de sus siniestros sustituyéndola por el pago de esa cierta cantidad de dinero, la prima.

La prima debe representar la tarifa adecuada que una compañía de seguros debe cobrar por un contrato a un individuo. Para su obtención la compañía debe conocer la distribución del número de siniestros, de la cuantía del siniestro o bien del costo total.

Lo deseable sería que el conjunto de asegurados que comparten sus gastos pagando una misma prima sea lo más homogéneo posible en cuanto a sus riesgos se refiere, pues si no fuera así, los asegurados que generan más gastos a la compañía deberían pagar primas mayores.
La prima debe cumplir con las siguientes propiedades

1. Simplicidad. El cálculo de la prima debe ser fácil.

2. Consistencia. Si un riesgo se incrementa en una constante, la prima debe reflejar el cambio incrementándose en la misma cantidad.

3. Aditividad. La prima de un portafolio que consiste de riesgos independientes debe ser la suma de las primas individuales.

La prima pura es la componente esencial en el precio del seguro, ya que está destinada a acumular la recaudación suficiente para hacer frente a los siniestros ocurridos, esta prima esta dada por

$$p = E(S). \tag{3.1}$$

Esta prima parece ser justa para el asegurado, sin embargo, para el asegurador no lo es. Veámos la siguiente situaciòn.

Consideremos un portafolio con n pólizas de seguro de un mismo riesgo, válidas por un tiempo determinado. Supóngase que se cobra una misma prima p por cada póliza y que S_j representa el monto de las reclamaciones efectuadas por la póliza j, los cuales son independientes e idénticamente distribuidas. Si u es el capital inicial de la aseguradora, entonces el capital al término de la vigencia de las pólizas es

$$X_n = u + np - \sum_{j=1}^{n} S_j. \tag{3.2}$$

Tomado esperanza en la ecuación anterior y utilizando (3.1) obtenemos

$$E(X_n) = u + n(p - E(S)) = u \tag{3.3}$$

Esto es la compañía aseguradora permanece con su capital inicial.
Si la cartera fuera infinita, unos riesgos se compensarían con otros y los ingresos obtenidos serían suficientes para asegurar la solvencia de la empresa. En la práctica no es así debe tomarse en cuenta que la prima debe ser suficiente no sólo para el pago de las reclamaciones esperadas sino también para cubrir los gastos administrativos y comisiones, y proveer un margen por riesgo y utilidad, por ello es necesario agregar un recargo por seguridad con la prima pura para asegurar la solidez de la aseguradora.
Gracias a este recargo se obtiene una reserva que permite hacer frente a las desviaciones imprevistas de la siniestralidad.
Enseguida se presentan algunos principios para calcular las primas de manera general.

Principio del valor esperado Este principio establece que la prima se puede calcular de la siguiente forma

$$p = (1 + d)E(S), \quad d > 0. \tag{3.4}$$

La constante d se conoce como factor de recargo.
Este principio atribuye la misma prima a dos riesgos con distinta distribución pero con media común, sin considerar otras características.

Principio de la varianza En este principio el factor de recargo, $d > 0$, se aplica sobre la varianza y establece que

$$p = E(S) + dV(S). \tag{3.5}$$

Además de estimar la siniestralidad media del riesgo, proporciona un recargo de seguridad para las desviaciones aleatorias de la siniestralidad.

Principio de la desviación estándar Este principio establece que

$$p = E(S) + d\sqrt{V(S)}. \tag{3.6}$$

El factor de recargo $d > 0$ se aplica sobre la desviación estándar del riesgo.

Una vez que se ha hecho una descripción acerca de lo que es un sistema de seguros procedemos a hablar de lo que es el reaseguro.

3.3. Reaseguro

En un inicio el reaseguro se consideró como una medida para cubrir un acto imprudente al aceptar un riesgo. El asegurador sin afectar su obligación con el asegurado, toma medidas para protegerse contra las mismas obligaciones con otro asegurador mejor informado o con mayores posibilidades financieras.

Es conocido que el primer documento que contiene todos los puntos básicos de lo que hoy es una póliza de seguros, fue emitido en 1347 en Génova Italia, y se trata de un seguro marítimo de mercancias, por otro lado, el primer contrato de reaseguro se firmó en Génova en 1370.

La técnica de reaseguro mejoró y acumuló gran experiencia en cuanto al reaseguro de riesgo por riesgo, el procedimiento seguido hasta hoy se basó en este tipo de reaseguro y el nuevo sistema que se estableció fue el reaseguro por contrato.

Definición 29. *El reaseguro es un convenio que una compañía de seguros (cedente) celebra con otra compañía (aceptante) para ampararse de las consecuencias de los seguros que ha otorgado en cuanto éstas excedan de su capacidad transfiriendo total o parcialmente los riesgos.*

Visto de manera simple, el reaseguro es una forma aseguradora de segundo grado.

Las causas por las que una compañía de seguros busca reasegurarse son:

1. Disminuir el riesgo de una posible pérdida, es decir, que el monto de los siniestros no sobrepase una cierta cantidad y de esta forma estabilizar los resultados.
2. Ampliar la aceptación de riesgos sin tener que exponer sus propios recursos, lo que le permite aumentar el volúmen de sus negocios.

Una ventaja del reaseguro es que la reaseguradora puede brindar información técnica, experiencia en cuanto a causas de siniestralidad y asesoría en la selección de riesgos.

3.4. Clasificación del Reaseguro

Existen varios tipos de reaseguro, como la finalidad de este trabajo no es hablar de todas las modalidades sólo se mencionan las formas más comunes.

3.4.1. Por la Forma de Contratación

De acuerdo a la relación legal que existe entre la cedente y la aceptante, se divide al reaseguro en: facultativo y automático.

Facultativo
Esta forma permite al aceptante tratar cada riesgo propuesto individualmente el cual puede asumir o rechazar. La cedente como la aceptante tienen completa libertad para ceder o aceptar los riesgos. Este tipo de reaseguro permite a la compañía asumir riesgos que presenten con más frecuencia pérdidas superiores a la normal.

Automático
Consiste de un contrato obligatorio entre la cedente y la aceptante, en el cual se establecen las características de los riesgos a cubrir. Como su nombre lo dice, la duración del contrato es continuada y su renovación es automática.

3.4.2. Por la Forma en que Operan

Se divide al reaseguro en dos grupos: el reaseguro proporcional y el reaseguro no proporcional. Llamados también reaseguro de riesgos y reaseguro de siniestros, respectivamente.

Reaseguro Proporcional
Este tipo de reaseguro procede a través de la distribución equitativa de las primas y los siniestros ocurridos. Es decir, la cedente aporta un porcentaje de las primas recaudadas y en este mismo porcentaje la aceptante se responsabiliza de los siniestros.
Esta modalidad de reaseguro está dividido en los siguientes tipos: Cuota parte y Excedente.

a)Cuota Parte
En este contrato el aceptante toma un porcentaje fijo para todos los riesgos y se responsabiliza con el mismo porcentaje en todos los siniestros. Bajo esta forma de contrato, la cedente puede sumar riesgos libremente siempre y cuando no se exceda el límite de contrato, aunque se obliga a ceder los riesgos que podría retener por cuenta propia. La aceptante no aplica ningún criterio para asumir riesgos, recibe en igual proporción riesgos buenos y malos.

b)Excedente
Este contrato es semejante al de Cuota Parte, la diferencia radica en que la cedente no transfiere todos los riesgos, sólo los que sobrepasan una determinada cantidad. Los riesgos que la cedente pueda retener en su totalidad no tendrán que ser cedidos. El porcentaje cedido varía riesgo por riesgo.

Reaseguro No Proporcional
También llamado ”reaseguro de siniestros”. Una característica esencial de este reaseguro, es que la totalidad de primas es retenida por la cedente, lo que le permite cubrir siniestros hasta un cierto monto llamado prioridad.
La finalidad de este tipo de reaseguro es amparar a la cedente cuando los siniestros excedan a la prioridad. Las formas en que se desarrolla son: Stop-Loss y Excess-Loss

a) Reaseguro Excess-Loss
En esta modalidad el reasegurador se responsabiliza de la parte de cada siniestro que sobrepasa una cantidad, llamada prioridad. La cedente fija su retención en forma de una cantidad deducible por siniestro. Esta cantidad se fija:

Por riesgo
En este tipo de contrato se cubre el monto del siniestro individual que sobrepasa la prioridad hasta una cantidad llamada "Capacidad". Este contrato trabaja los riesgos de manera individual.

De catástrofe
Llamado CatXL o catastrófico. Este contrato se aplica cuando ocurre un número mínimo de riesgos y que el monto acumulado no supere la prioridad.

b) Reaseguro Stop-Loss
En este contrato se protege a la cedente en caso de que el monto acumulado de los siniestros, en un período de tiempo, sobrepase cierta prioridad. Cuando esto ocurre, la aceptante es responsable por el monto excedente de la prioridad hasta un límite. Generalmente la prioridad se expresa en un cierto porcentaje de las primas totales del conjunto de pólizas protegidas por la aseguradora.

Lo anterior se presenta en el caso de un contrato Stop-Loss con capacidad ilimitada; también existen contratos Stop-Loss en los que la aceptante se hace responsable del monto de los siniestros que exceden a la prioridad hasta una determinada cantidad llamada "Capacidad del contrato de reaseguro". En este caso, la cedente puede reasegurar el riesgo restante o bien conservarlo.

Al igual que la prioridad, la capacidad de contrato y la prima stop-loss se expresan en un porcentaje de las primas totales del conjunto de pólizas aseguradas.

3.5. Media y Varianza del Reaseguro No Proporcional

Tanto en el seguro excess-loss como en el stop-loss, la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros que asumen la cedente y la aceptante esta determinada por:

Sea M la prioridad, y S el monto total de los siniestros, entonces:

$$Si\; 0 < S \leq M = \begin{cases} la\, cedente\, paga: & S, \\ \\ la\, aceptante\, paga: & 0. \end{cases}$$

$$Si\ M\ <\ S<\infty=\begin{cases} la\, cedente\, paga: & M, \\ \\ la\, aceptante\, paga: & S-M. \end{cases}$$

Si el monto total de los siniestros supera a la prioridad hasta la capacidad, entonces la variable aleatoria que representa el monto total de los siniestros que asumen la cedente y la aceptante esta determinada por:

$$Si\ 0<S\ \leq\ M=\begin{cases} la\, cedente\, paga: & S, \\ \\ la\, aceptante\, paga: & 0. \end{cases}$$

$$Si\ M\ <\ S\leq M\ +\ C=\begin{cases} la\, cedente\, paga: & M, \\ \\ la\, aceptante\, paga: & S-M. \end{cases}$$

$$Si\ M+C\ <\ S<\infty=\begin{cases} la\, cedente\, paga: & S-C, \\ \\ la\, aceptante\, paga: & C. \end{cases}$$

Donde C es la capacidad del contrato.

Con lo anterior se tiene que la función de distribución de la siniestralidad antes del reaseguro tiene la siguiente forma

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)V^{*n}(s),$$

donde $P(n)$ es el número de siniestros y $V^{*n}(s)$ la cuantía del siniestro.
Después del reaseguro, la distribución toma la siguiente forma

$$F_r(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)V_r^{*n}(s),$$

con $V_r^{*n}(s)$ el nuevo valor del siniestro después del reaseguro, (véase [4]).

Además, es claro que:
El monto total de los siniestros se puede ver como la suma de los montos asumidos por la cedente y la aceptante. Por tanto, el valor esperado del monto de los siniestros acumulados es igual a la suma de los valores esperados de los montos asumidos por la cedente y la aceptante. Es decir,

$$S=S_c+S_a, \tag{3.7}$$

y

$$E(S)=E(S_c)+E(S_a).$$

A continuación obtenemos el valor esperado del monto acumulado de los siniestros, en relación al riesgo asumido por la cedente y la aceptante, sin obtener la función de distribución compuesta del monto acumulado de los siniestros.

Basándonos en la teoría de riesgo colectivo, tenemos que el valor esperado y la varianza del monto total de los siniestros se calcula como en la Proposición 5.
Luego, para determinar el valor esperado de los siniestros a cargo de la aceptante tomamos en cuenta el monto que asume de acuerdo a los valores que toma la variable aleatoria S. Por lo que el valor esperado a cargo de la aceptante toma la siguiente forma:

$$E(S_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{M}^{M+C} (s-M)\, f_S(s \mid N)\, ds + \int_{M+C}^{\infty} C\, f_S(s \mid N)\, ds \right) P(N=n).$$

Donde $f_S(s \mid N)$ es la función de densidad de la variable aleatoria S dado N. Además, recuerde que N representa el número de siniestros, (véase[8]).

Para calcular la varianza del monto de los siniestros, utilizamos la Proposición 5 y la igualdad (3.7). Observe que, S_c y S_a, son variables aleatorias dependientes, entonces se calcula la $V(S)$ de la siguiente forma:

$$V(S) = V(S_c) + V(S_a) + 2Cov(S_c, S_a).$$

La varianza del monto de los siniestros que asume la cedente se puede obtener de la siguiente manera:

$$V(S_c) = \int_{s_c=0}^{\infty} s_c^2 f_{S_c}(s_c)\, ds_c - (\mu_{s_c})^2.$$

Donde, $f_{S_c}(s_c)$ es la función de densidad y μ_{S_c} el valor esperado del monto de los siniestros a cargo de la cedente, (véase[8]).
De manera muy similar, la varianza del monto de los siniestros que asume la aceptante está determinada por:

$$V(S_a) = \int_{s_a=0}^{\infty} s_a^2 f_{S_a}(s_a)\, ds_a - (\mu_{s_a})^2.$$

$f_{S_a}(s_a)$ es la función de densidad y μ_{s_a} el valor esperado del monto de los siniestros a cargo de la aceptante.
Mientras que la $Cov(S_c, S_a)$ se puede obtener como (véase[8]):

$$Cov(S_c, S_a) = E(S_c \cdot S_a) - \mu_c \cdot \mu_a.$$

Una vez que hemos mencionado como calcular la varianza, se puede ver como esta puede ser utilizada para determinar la prima en el reaseguro no proporcional. Como mencionamos en la Sección (3.2) es importante que la aceptante no cobre unicamente el valor esperado de los siniestros a su cargo si no que debe cobrar un recargo de seguridad adicional, en este caso la prima se establece como en (3.6).

$$p = E(S_a) + d\sqrt{V(S_a)}$$

El valor, d, es decisión de la aceptante el cual se puede determinar por las políticas de esta y/o por la competencia en precios del mercado.

3.6. Opciones

El estudio de la Teoría de opciones inicia en 1900 con la tesis doctoral sobre la teoría de la especulación de Bachelier, alumno de la universidad de la Sorbonne, (véase [11]).
En 1973, Black y Scholes derivaron una fórmula exacta para el precio de una opción de compra europea suscrita sobre una acción. En 1976, Merton analizó la valuación de derivados suponiendo procesos estocásticos más complejos para el precio del activo subyacente. Gracias al desarrollo de esta teoría Black Scholes y Merton obtuvieron el premio Nobel de economía en 1997.

En los últimos años, Hull, White y Rubinstein, entre otros, han trabajado en la valuación de las denominadas opciones exóticas, derivados diseñados por una institución financiera para satisfacer las necesidades específicas de un cliente.

Hoy en día la Teoría de Opciones se ha convertido en un importante eje de referencia en la concepción y el desarrollo de los mercados financieros modernos. Dicha teoría, ha impactado en el campo de las finanzas por sus amplias aplicaciones de innovación financiera, la valuación de inversiones, las finanzas corporativas y también en el campo actuarial.

Las opciones pertenecen a una clase de instrumentos llamados "derivados", la característica más importante es que su valor depende de otro bien o activo subyacente, como: acciones comunes, pagarés, metales (oro, plata) y mercancías (ganado, maíz, algodón, azúcar, trigo). Otra característica es que a cambio de un pago, dan el derecho de comprar o vender un activo a un precio y tiempo establecido. De manera más formal se tiene la siguiente definición.

Definición 30. *Una opción, es un contrato que le da al comprador el derecho pero no la obligación, de comprar o vender un activo, a un precio especificado en un tiempo establecido.*

Existen dos clases elementales de opciones: opción de compra y opción de venta.

Definición 31. *Opción de venta (put), es un contrato de opción que da a quién la posee el derecho a vender un bien a un precio determinado en un tiempo establecido.*

Definición 32. *Opción de compra (call), es el contrato que le da a su tenedor el derecho de comprar un bien en una fecha pactada y a un precio especificado.*

La fecha en que los contratos tienen validez es otra característica que define los contratos, (véase [3]). Dentro de las opciones se encuentran las opciones europeas, americanas, etc. Como sólo nós centraremos en las opciones europeas, a continuación damos la siguiente definición.

Definición 33. *Opción Europea, es un contrato que sólo puede ejercerse en la fecha de vencimiento.*

Como puede notarse participan dos figuras: los que compran opciones y los que las venden. Los compradores pueden adquirir una opción de compra o una de venta.
Una opción de compra tiene valor si el precio de la acción es mayor al precio convenido o precio de ejercicio, si el precio de la acción es menor al precio de ejercicio el valor de la opción de compra es cero. Ocurre lo contrario de lo que sucede con el valor de una opción de compra cuando se trata de una opción de venta.

Quien vende una opción debe entregar las acciones al comprador de la opción si este hace uso de sus derechos. Si el precio de la acción en el mercado es mayor que el precio de ejercicio, el comprador ejerce la opción de compra y además tiene una ganancia, en el caso contrario, no ejercerá dicha opción y su pérdida es el valor de la opción.

El que vende una opción de venta tendrá una pérdida cuando el precio de la acción en el mercado sea menor que el precio de ejercicio y el comprador de la opción de venta ejercerá dicha opción.

3.7. Modelo Black-Scholes

Considere un proceso de Wiener $\{W(t) : 0 \leq t \leq T, T \subset \mathbb{R}\}$ definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Se supone que el precio de una acción al tiempo t, S_t, es modelado por el movimiento Browniano geométrico

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t). \tag{3.8}$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma > 0$, la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. De acuerdo con el ejemplo 1 y utilizando el Lema de Itô se obtiene

$$d(lnS_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t). \tag{3.9}$$

Luego, si se toma $\Delta t = T - t$, se obtiene

$$ln(S_T) - ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\,\mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \sim N(0, 1)$. Por tanto,

$$ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \tag{3.10}$$

El rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de S_t, pero con parámetro de tendencia, $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, menor al rendimiento esperado μ, para más detalles véase [11].

3.7.1. Valuación Neutral al Riesgo

Dado que la ecuación (3.8) considera el rendimiento esperado μ, la ecuación no es independiente del riesgo al que se exponen los agentes que participan en el mercado.

Entre mayor sea la exposición al riesgo mayor es el rendimiento esperado, μ, a fin de que la ganancia, $v = \mu - r$, sea atractiva. Si se supone que no se necesita de una ganancia para entrar al mercado, entonces $v = 0$ y $\mu = r$.

Otra forma de medir consiste, en estandarizar a v por unidad de desviación estándar, es decir; $\lambda = \frac{v}{\sigma}$. Si se supone lo anterior, entonces $\lambda = 0$ y $\mu = r$. Por tanto,

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_tdt + \sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW(t)\right) \\ &= rS_tdt + \sigma S_t(\lambda dt + dW(t)). \end{aligned}$$

Bajo el supuesto de neutralidad al riesgo se tiene que $\lambda = 0$ y (3.8) toma la siguiente forma

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_tdW(t). \tag{3.11}$$

En tal caso se dice que el movimiento Browniano esta definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo.

3.7.2. Función de Densidad del Precio del Activo Subyacente

Si se utiliza la expresión (3.10) se tiene que $ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ tiene una distribución normal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$.
Sea $\mathcal{E} \sim N(0, 1)$ con función de densidad

$$\Psi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Definimos,

$$g(\mathcal{E}) = S_T = S_texp\left\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\mathcal{E}\right\}, \tag{3.12}$$

entonces,

$$g^{-1}(S_T) = \frac{ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \tag{3.13}$$

Así, la derivada de S_T dado S_t, esta dada por

$$f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) = \Psi(g^{-1}(s))\left|\frac{dg^{-1}(s)}{ds}\right|.$$

Observe que,

$$\left|\frac{dg^{-1}(s)}{ds}\right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) &= \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T - t)}} \\ &\cdot exp \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.7.3. Media y Varianza del Precio del Activo Subyacente

El valor esperado del precio del subyacente al vencimiento T, es una cantidad que sirve como referencia para calcular el precio de ejercicio de la opción.
A partir de la expresión (3.13), se tiene que

$$\varepsilon = \frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Entonces,

$$s = S_t exp\left\{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}. \tag{3.15}$$

Por tanto,

$$ds = S_t\, exp\left\{\varepsilon\, \sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\} \sigma\sqrt{T-t}\, d\varepsilon, \tag{3.16}$$

o

$$ds = s\sigma\sqrt{T-t}\, d\varepsilon.$$

Utilizando (3.15), se calcula el valor esperado de S_T dado S_t.

$$
\begin{aligned}
E(S_T \mid S_t) &= \int_0^\infty s f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
exp & \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \\
S_t \cdot & \quad exp\left\{ \varepsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \sigma\sqrt{T-t} d\varepsilon \\
&= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \\
\cdot exp & \left\{ \sigma\sqrt{T-t}\varepsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} d\varepsilon \qquad (3.17) \\
&= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
\cdot exp & \left\{ -\frac{1}{2} \left[\varepsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon + \sigma^2(T-t) \right] \right\} e^{r(T-t)} d\varepsilon \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t} \right)^2 \right\} d\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$Si \quad u = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t},$

$$
\begin{aligned}
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= S_t e^{r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos el segundo momento de S_T dado S_t, para que posteriormente calculemos la varianza.

$$
\begin{aligned}
E(S_T^2 \mid S_t) &= \int_0^\infty s^2 f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \\
\cdot exp & \left\{2\left(\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)\right\}\sigma\sqrt{T-t}d\varepsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{2\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} e^{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\varepsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}[\varepsilon^2-4\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon+4\sigma^2(T-t)]} \\
\cdot e & ^{[2\sigma^2(T-t)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\varepsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\varepsilon-2\sigma\sqrt{T-t}\right)^2} e^{\sigma^2(T-t)+2r(T-t)} d\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Sea $\quad w = \varepsilon - 2\sigma\sqrt{T-t}$

$$
\begin{aligned}
E(S_T^2 \mid S_t) &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t)+2r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\
&= S_t^2 e^{(\sigma^2+2r)(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
V[S_T \mid S_t] &= E[S_T^2 \mid S_t] - (E[S_T \mid S_t])^2 \\
&= S_t^2 e^{(\sigma^2+2r)(T-t)} - S_t^2 e^{2r(T-t)} \\
&= S_t^2 e^{2r(T-t)}\left(e^{\sigma^2(T-t)}-1\right).
\end{aligned}
$$

3.7.4. Valuación de una Opción Europea de Compra

El precio de un call europeo al tiempo t, con precio de ejercicio K y vencimiento en T, $C = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ está dado por el valor esperado del valor presente sobre el valor positivo al momento de ejercer la opción, esto es,

$$C = e^{-r(T-t)} E\{max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}\}$$

$$\begin{aligned}
C &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} max(s-K,0) f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds \\
&= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s-K) f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s \mid S_t) ds \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
\cdot exp & \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \qquad (I_1) \\
- & K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
\cdot exp & \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds. \qquad (I_2)
\end{aligned}$$

Para (I_1), utilizando (3.16), tenemos que,

$$\begin{aligned}
I_1 &= S_t e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\varepsilon > \frac{ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\varepsilon \\
&= S_t \int_{\left\{\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t} \frac{ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\varepsilon. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Sean, $u = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t}, \quad -\mathcal{E} \sim N(0,1)$;

$$I_1 = S_t \int_{\left\{-\infty < u < \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

De manera análoga para (I_2), se tiene

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{\varepsilon > \frac{ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{-\infty < \varepsilon < \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

A partir de (3.18) y (3.19), obtenemos el siguiente resultado,

$$c = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad (3.20)$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim N(0,1)$, es decir,

$$
\begin{aligned}
\Phi(d) &= P_{\mathcal{E}}(\mathcal{E} \leq d) \\
&= \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon - \int_{d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&= 1 - \Phi(-d).
\end{aligned}
$$

Además,

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad (3.21)$$

y

$$
\begin{aligned}
d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) &= \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

3.7.5. Valuación de una Opción Europea de Venta

El precio de un put europeo al tiempo t, con precio de ejercicio K y vencimiento en T, $P = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ está dado por el valor esperado del valor presente sobre el valor positivo al momento de ejercer la opción, esto es,

$$P = e^{-r(T-t)} E\{max(K - S_T, 0) \mid \mathcal{F}\}.$$

De manera similar a la valuación de un call se puede ver que el precio de un put, está dado por

$$P = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \qquad (3.23)$$

3.7.6. Condición de Paridad entre un Put y un Call

Utilizando (3.20) y (3.23) se establece la condición de paridad entre un put y un call.

$$
\begin{aligned}
p + S_t &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) + S_t \\
&= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + S_t(1 - \Phi(-d_1)) \\
&= Ke^{-r(T-t)}(1 - \Phi(d_2)) + S_t\Phi(d_1) \\
&= -Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + S_t\Phi(d_1) + Ke^{-r(T-t)} \\
&= c + Ke^{-r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Esta igualdad muestra que el valor de un put europeo con precio de ejercicio específico y una fecha de vencimiento puede calcularse a partir del valor de un call con características muy semejantes y se calcula mediante,

$$P = C - (S_t - Ke^{-r(T-t)}).$$

3.7.7. Griegas para el Modelo de Black-Scholes

Las razones de cambio del precio de una opción europea, put o call, con respecto a las variables importantes del modelo reciben el nombre de letras griegas.
Recuerde que el precio S_t de un activo subyacente tiene un comportamiento modelado por la ecuación (3.11) y además, el precio de un call europeo está dado por la ecuación (3.20).

Lema Fundamental de las Griegas del Modelo de Black-Scholes

El lema establece, que si;

$$C = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \tag{3.24}$$

Entonces,

$$S_t\Phi'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2) = 0, \tag{3.25}$$

donde,

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2}. \tag{3.26}$$

A partir de (3.22),

$$\begin{aligned}
d_2^2 &= (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2 \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}d_1 + \sigma^2\sqrt{T-t} \\
&= d_1^2 - 2\left(ln\left(\frac{S_t}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) + \sigma^2\sqrt{T-t} \\
&= d_1^2 - 2ln\left(\frac{S_t}{k}\right) - 2r(T-t) \\
&= d_1^2 - 2ln\left(\frac{S_t}{k}\right) - 2lne^{r(T-t)} \\
&= d_1^2 - 2ln\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{k}\right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$-\frac{1}{2}d_2^2 = -\frac{1}{2}d_1^2 + ln\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{k}\right).$$

Por tanto,

$$e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{k}\right). \tag{3.27}$$

De (3.26) y (3.27) se tiene el resultado deseado.

Razón de Cambio entre una Opción de Compra Europea y el Precio del Subyacente Δ_c

El cambio del precio de un call europeo con respecto al cambio en el precio del activo subyacente, tiene un papel importante en la elaboración de estrategias de cobertura con opciones, la llamada cobertura delta. Esta razón se denota como, $\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S_t}$ y se calcula;

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S_t} = \Phi(d_1) + S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t}.$$

Por (3.22)

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Así,

$$\Delta_c = \Phi(d_1) + \left[S_t\Phi'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right]\frac{\partial d_1}{\partial S_t}.$$

Por el lema fundamental de las griegas y (3.25), tenemos,

$$0 \leq \Delta_c = \Phi(d_1) \leq 1. \tag{3.28}$$

Esto es, un valor grande de Δ_c, implica que el precio de la opción es muy sensible a cambios en el precio del subyacente y recíprocamente para un valor pequeño.

Δ_p Para un Put Europeo

Como ya se vió, el precio de un put satisface la igualdad (3.23) y de acuerdo a la condición de paridad calculamos la Δ_p de un put. Así se tiene que

$$\Delta_p = \Delta_c - 1.$$

Por tanto,

$$-1 < \Delta_p = \Phi(d_1) - 1 < 0.$$

Capítulo 4

Aplicación

Como ya se mencionó en capítulos anteriores, las opciones y los seguros son instrumentos que pueden resultar adecuados para cubrirse frente a un riesgo.

Para cubrirse ante una variación de precios se utilizan las opciones, las cuales se pueden ejercer o no. Un agente que se protege ante una adversidad puede adquirir un seguro, y el beneficio es la cobertura cuando la situación que se busca evitar ocurre. En los dos casos, se paga una prima, el valor que da el derecho a la cobertura del suceso. El suceso para el caso de las opciones es la desviación de precios para el agente; en el caso del seguro, el suceso es el siniestro. Cuando sucede el siniestro el agente pide el cubrimiento al que tiene derecho por haber pagado la prima pactada durante el período de tiempo acordado, para el caso de las opciones el agente realiza la operación de compra-venta a la que tiene derecho por haber pagado la prima pactada durante el período de tiempo acordado. En ambos casos, la no ocurrencia del suceso genera la pérdida del valor de la prima.

La realización de la operación de compra-venta en caso de que ocurra el suceso genera un ingreso para el agente comprador de la opción, de la misma manera que el cubrimiento del seguro genera, cuando ocurre el siniestro, un ingreso para el asegurado.
La estrategia de los agentes, en ambos casos consiste en maximizar su beneficio que está dado por el valor esperado del ingreso a recibir menos la prima. El período de tiempo en el que se establecen, tanto las opciones como los seguros, se realiza en términos que se pueden considerar cortos, aunque un seguro se puede establecer en años, es posible retirarse del contrato en cualquier momento.

De manera similar, los contratos de opciones se suscriben por períodos de tiempo cortos o largos, pero en cualquier caso, el agente puede decidir ejercer o no la opción y sólo en la fecha de vencimiento cuando se trata de opciones europeas. En todo caso, los períodos para los que actualmente se negocian opciones en los mercados financieros raramente superan el año.

En el mercado de opciones se produce la transferencia de riesgos a través de la transferencia de contratos de un agente a otro, en el mercado de seguros el comprador del seguro está transfiriendo su riesgo de pérdida y la compañia de seguros, a su vez, cede su riesgo reasegurándose. La transferencia de un contrato de seguros puede generar ganancias en la medida en que el que transfiere incurre básicamente en gastos de intermediación.

Esto deja ver cómo las opciones y los seguros son instrumentos adecuados para protegerse frente a un riesgo.

Estos puntos de coincidencia entre los contratos de opción y los contratos de seguro muestran, desde una perspectiva de cobertura, que la prima que se paga por la compra de una opción y la prima que se paga por un contrato de seguro debe ser equivalente siempre y cuando coincidan en el riesgo y el valor asegurado, así como los plazos. De esta manera una opción es un seguro y de ello se puede concluir que la prima pagada por una opción debe ser equivalente a la prima pagada por un reaseguro.

4.1. Aplicación al Reaseguro Stop-Loss

El reaseguro Stop-Loss descrito en el capítulo anterior, puede ser tratado utilizando la teoría de opciones.

Considere un contrato Stop-Loss, para obtener un valor adecuado para la prima de la opción es necesario dar una relación entre las variables que se utilizan en el modelo Black-Scholes y las que se utilizan en un contrato de seguros. Para esto suponemos que:

1. S es la siniestralidad total de la compañía aseguradora, que en este caso se considera como el activo subyacente.
2. El período de tiempo que se considera en ambos casos es de un año.
3. M es la prioridad y C la capacidad, que se establecen igual al precio de ejercicio.

Recuerde que si al final del período, la siniestralidad supera la prioridad entonces la aceptante pagará la proporción α, $0 < \alpha < 1$, de los siniestros hasta el límite que es igual a la capacidad del contrato. Por tanto, la siniestralidad a cargo de la aceptante se establece de la siguiente forma:

$$S_a = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq M, \\ \alpha(S-M), & \text{si } M < S < C, \\ \alpha(S-C), & \text{si } S \geq C. \end{cases}$$

De acuerdo a esto, la siniestralidad que asume la aceptante al final del período establecido se escribe como:

$$\alpha\left(Max[S-M,0] - Max[S-C,0]\right).$$

Observe que $Max[S-M,0]$ y $Max[S-C,0]$ son dos opciones de compra de la siniestralidad, S, con precio de ejercicio M y C, respectivamente.

Así, la responsabilidad que adquiere la aceptante que iguala el costo del contrato del reaseguro es la diferencia entre estas dos opciones de compra.

4.2. Aplicación al Reaseguro Excess-Loss

El reaseguro Excess-Loss también puede verse como una opción de compra. Utilizando las mismas suposiciones que en la aplicación del reaseguro Stop-Loss y si además se supone que la cedente transfiere una parte de un siniestro sin límite superior, la aceptante pagará:

$$S_a = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq M, \\ \\ S - M, & \text{si } S \geq M. \end{cases}$$

Lo cual se puede escribir como:

$$Max[S - M, 0].$$

Por lo que la aceptante compra, una opción de compra sobre el valor del siniestro con precio de ejercicio M.

Si la póliza tiene límite superior, es decir, supera a la prioridad hasta la capacidad entonces el valor que aporta la aceptante sobre la siniestralidad queda establecida de la siguiente forma:

$$Max[S - M, 0] - Max[S - C, 0].$$

Nótese que en ambos casos, el funcionamiento del reaseguro es equivalente a la compra de una opción call.

Capítulo 5

Conclusiones

En el desarrollo del trabajo se utilizó la teoría de riesgo clásico para mostrar modelos actuariales del riesgo que enfrentan las compañías aseguradoras, dichos modelos analizan las variables aleatorias que afectan el proceso asegurador.

El modelo Black Scholes, deja ver, bajo la adaptación de las variables necesarias (relación de datos financieros), como puede ser también aplicado para valuar primas de reaseguro, en particular se trato con el reaseguro no proporcional, dicho modelo no muestra diferencia en el cálculo de primas en el reaseguro, más bien permite una buena aproximación al precio que debe ser pagado por la compañía aseguradora para protegerse ante un riesgo.

Bajo los supuestos de este modelo se obtuvo la prima de reaseguro no proporcional la cual se establece como la diferencia de dos opciones de compra (call) europeas.

El modelo que se analizo ha sido diseñado para proporcionar al reasegurador una tasa de rendimiento competitiva sobre su capital libre en relación a las pólizas reaseguradas. Esto permite al reasegurador un rendimiento adecuado que mantendrá su distribución del capital. Por consiguiente lo anterior permite ilustrar las posibilidades del uso del modelo de valuación de opciones europeas para valuar contratos de reaseguro.

El modelo se puede adaptar a la problemática de empresas reaseguradoras y de esta forma se tiene un modelo alternativo cuya aplicación resulta adecuada para una buena estimación del valor de la prima del reaseguro.

Un trabajo posterior es estudiar la administración de riesgos en compañías aseguradoras.

Otra alternativa es el estudio de medidas sobre la severidad de ruina que sufre una compañía aseguradora.

Bibliografía

[1] Ash Robert B., *Basic Probability Theory*, Department of Mathematics University of Illinois, Dover Publications, INC. Mineola, New York, 2008.

[2] Boyce, William E., *Elementary differential equations and boundary value problems.* Limusa, México, 2004.

[3] Climent Hernández J.A., *Valuación de opciones, Vinculos Matemáticos*, N^o. 38, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

[4] Del Pozo García Eva María, *Aplicación de la Teoría de Opciones al Reaseguro*, Economía Financiera y Contabilidad I Facultad de C.C. Economicas y Empresariales U.C.M., N^o. 25, 2001.

[5] H. Panjer Harry and Willmot Gordon E., *Insurance Risk Models*, Society of actuaries, 1992.

[6] Klebaner F.C., *Introduction to Stochastic Calculus With Applications*, Second Edition,Imperial College Press, 2005.

[7] Mikosch, Thomas,*Elementary stochastic calculus: with finance in view*, Singapore: World Scientific, 1998.

[8] Nava Ramírez Ricardo, *Métodos Prácticos para obtener la Prima del Reaseguro Stop-Loss en el seguro de Vida*, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 1998.

[9] Rincón Luis, *Introducción a la Teoría del Riesgo*, Departamento de Matemáticas UNAM, México D.F., 2007.

[10] Ross S.R., *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons Inc., 1996.

[11] Venegas Martínez Francisco, *Riesgos financieros y Económicos. Productos derivados y desiciones económicas bajo incertidumbre.* Segunda edición. CENGANGE Learning. México D. F., 2008.