Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

ESPACIOS SUBSECUENCIALES

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Rafael Esteban García Becerra

Directores de Tesis

M. en C. Manuel Ibarra Contreras

Dr. Salvador García-Ferreira

Dedicada a mis padres
y hermano.

Agradezco especialmente a mis asesores de tesis, M. C. Manuel Ibarra Contreras y Dr. Salvador García-Ferreira, por el tiempo dedicado al objetivo final de mi formación universitaria, por todos los conocimientos compartidos en un ambiente de amistad.

Agradezco a los miembros del jurado, Dr. Juan Angoa Amador, Dr. Agustín Contreras y Dr. Iván Martínez Ruíz, sus observaciones que mejoraron esta tesis.

Introducción

¿Cómo acercarse a un punto? En el lenguaje coloquial esta pregunta tiene una respuesta simple, camina y sigue la ruta más corta hasta él, esta respuesta no necesita mayor demostración que llevarla a cabo y comprobar si llegamos al punto deseado. En matemáticas, saber cómo acercarnos a ciertos puntos conlleva una caracterización formal de los caminos (sucesiones) que llevan a algún lugar en un espacio topológico, mas estas caracterizaciones requieren una demostración para tener completa seguridad que vamos por el rumbo indicado. ¿Por qué querríamos conocer con certeza las rutas de algún sitio? Si se conocen todos los caminos siempre se sabrá llegar a cualquier lugar que se desee, es decir, que será de nuestro completo dominio ese sitio. La misma razón es la que impulsa a la topología a caracterizar espacios topológicos mediante sus sucesiones convergentes; conocer al espacio y todas sus características mediante sus sucesiones convergentes.

Fréchet introdujo los espacios abstractos en su trabajo títulado *Sur quelques points du calcul functionnel* de 1906, lo hizo definiendo sus espacios en términos de sucesiones convergentes. Esta propuesta de Fréchet tiene una gran desventaja frente a trabajos de otros matemáticos como Riesz, ya que se restringe a funciones definidas sobre los naturales. La primera definición satisfactoria de una topología fue dada por Hausdorff en *Grundzuge der Mengenlehre* de 1914. A pesar de esto, ha sido posible desarrollar una muy rica teoría de los espacios llamados de Fréchet y Secuenciales, también gracias a trabajos de E. R. Hedrick y T. H. Hildebrandt.

El estudio sobre los espacios secuenciales aún se lleva a cabo en la actualidad. Algunos de los matemáticos que desarrollan este trabajo son S. García-Ferreira y C. Uzcátegui. En [8] y [9], estos autores presentan algunos conceptos ligados a los espacios secuenciales, dos de ellos, que abordaremos en los Capítulos 2 y 5, son los grados de secuencialidad y subsecuencialidad de un espacio topológico. Un espacio topológico es subsecuencial si se puede encajar en un espacio secuencial. Este concepto generaliza la propiedad de secuencialidad y fue presentado por primera vez por N. Noble en [16].

El objetivo de esta tesis es hacer una breve exploración sobre las propiedades enunciadas anteriormente con la intención de introducir al lector en un tema de actualidad desde sus fundamentos. En el capítulo de preliminares se hace un breve recorrido sobre algunos conceptos básicos, como son las redes, los filtros y los espacios de adición. En los Capítulos 2 y 3, revisaremos la teoría fundamental de los espacios secuenciales y de Fréchet-Urysohn; dos de los resultados más importantes de estos capítulos son el Corolario 2.22, que es la caracterización de los espacio secuenciales como cocientes de un espacio métrico, y el Teorema 2.32 referente a la relación de la propiedad de secuencialidad con el grado de secuencialidad. Así mismo, se presentan algunos espacios topológicos que sirven de contraejemplos para proposiciones inversas de algunos teoremas demostrados en el Capítulo 2. Por último, en el capítulo llamado Espacios Subsecuenciales, se introduce al lector en la teoría de estos espacios, enfocándose principalmente al estudio de los espacios numerables con un solo punto no aislado.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Relaciones y Órdenes

Daremos inicio a esta sección introduciendo dos conceptos básicos de la teoría de conjuntos, estos son el concepto de relación y el concepto de orden.

Definición 1.1. *Un conjunto R es una relación binaria si todo elemento de R es un par ordenado, es decir, si para todo $z \in R$ existen x y y tales que $z = (x, y)$. Si A y B son conjuntos de manera que $R \subset A \times B$ se dice que R es una relación entre A y B. Si $R \subset A \times A$ entonces se dirá que R es una relación sobre A. Cuando $(x, y) \in R$ se escribirá xRa.*

Un ejemplo de relación binaria es el siguiente. Sea X un conjunto no vacío con cardinalidad mayor que 1. Consideremos τ una topología no trivial sobre X, y definamos el conjunto $R = \{(x, V) : V \in \tau, x \in V\}$. Entonces R es una relación binaria entre X y τ.

Definición 1.2. *Una relación R en un conjunto A es*

(1) reflexiva si para todo $a \in A$, aRa.

(2) simétrica si para cualesquiera $a, b \in A$, aRb implica bRa.

(3) asimétrica si para cualesquiera $a, b \in A$, aRb y bRa implica $a = b$.

(4) transitiva si para cualesquiera $a, b, c \in A$, aRb y bRc implica aRc.

Definición 1.3. *Una relación R en un conjunto A, que es reflexiva, asimétrica y transitiva se llama orden (orden parcial) en A. El par ordenado (A, R) se denomina conjunto ordenado (parcialmente ordenado). En caso que R no sea reflexiva se dirá que R es un orden estricto.*

El ejemplo más usual de orden es la relación de igualdad. Dado un conjunto A, la relación identidad R, es decir para $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ si y sólo si $x = y$, es un orden. Tambien el orden usual $\leq$ definido sobre el conjunto de los números reales es un orden.

Existen relaciones que no son órdenes, la siguiente es una de ellas. Sea A un conjunto no vacío, y definamos la relación de pertenencia $\in_A$ restringida a A como

$$\in_A = \{(a, b) : a, b \in A, a \in b\}.$$

Entonces $\in_A$ no es un orden, esto se debe a que ningún conjunto pertenece a sí mismo, es decir la relación $\in_A$ no es reflexiva.

Si $A, B \subset \omega$, entonces $A \subset^* B$ denotará que $A \setminus B$ es finito y se dirá que A está casi contenido en B. La relación de casi contensión no es asimétrica ya que $\omega \subset^* \omega \setminus \{0\}$ y $\omega \setminus \{0\} \subset^* \omega$ sin embargo $\omega \neq \omega \setminus \{0\}$.

Definición 1.4. *Sean $\leq$ un orden parcial en un conjunto A y $B \subset A$, $b \in B$ es el elemento mínimo de B en el orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $b \leq x$.*

Ejemplo 1.5. *El subconjunto de números reales, con el orden usual, $A = (0, 1)$ no tiene elemento mínimo puesto que para cualquier $x \in (0, 1)$ es posible hallar $y \in (0, 1)$ tal que $y < x$. Sin embargo los conjuntos $[0, 1)$ y $[0, 1]$ sí lo tienen, a saber, 0 es su elemento mínimo.*

Definición 1.6. *Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ se llama bien ordenado si cada subconjunto no vacío $B \subset A$ tiene elemento mínimo. En este caso al orden $\leq$ se le llama buen orden.*

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$ heredado del conjunto de los números reales es un conjunto bien ordenado, mientras que $(\mathbb{R}, \leq)$ no lo es (ver Ejemplo 1.5).

Definición 1.7. *Sean X un conjunto no vacío y $\leq$ una relación sobre X. Se dice que $\leq$ dirige a X (X está dirigido por $\leq$ o que $\leq$ es una dirección para X), si:*

(1) $\leq$ es reflexiva;

(2) $\leq$ es transitiva;

(3) Para cualesquiera $x, y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.

Ejemplo 1.8. *Sea X un conjunto no vacío. Consideremos el conjunto potencia de X, $\mathcal{P}(X)$, y la relación de contención usual de conjuntos, $\subset$, entonces $\mathcal{P}(X)$ está dirigido por $\subset$.*

Demostración. (i) Si $x, y, z \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $x \subset y$ y $y \subset z$ entonces para cada $\alpha \in x$ se tiene que $\alpha \in y$ y para $\beta \in y$ ocurre que $\beta \in z$, por tanto para cada $\alpha \in x, \alpha \in z$, es decir que $x \subset z$.

(ii) Si $x \in \mathcal{P}(X)$ entonces se cumple trivialmente que $x \subset x$.

(iii) Sean $x, y \in \mathcal{P}(X)$ entonces $x \cup y \in \mathcal{P}(X)$, además $x \subset x \cup y$ y $y \subset x \cup y$.

†

En el ejemplo 1.21 veremos otro ejemplo de dirección. Para finalizar esta sección se presenta el concepto de conjunto cofinal.

Definición 1.9. *Consideremos X un conjunto dirigido por una relación $\leq$. Un subconjunto A de X es cofinal en X si para todo $x \in X$ existe $y \in A$ tal que $x \leq y$.*

Consideremos $A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$, note que A es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ que es cofinal en $\mathbb{N}$. Si ahora consideramos $B = [0, 1]$, entonces B no es cofinal en el conjunto de los números reales, ya que $2 \in \mathbb{R}$ y para todo $a \in B$, $a < 2$.

1.2. Funciones

Las funciones son una herramienta fundamental en el desarrollo de diversas áreas de la matemática, y como era de esperarse la topología no es una excepción.

Definición 1.10. *Una relación f es llamada función si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ implica que $b = c$ para cualesquiera a, b, c.*

Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 1\}$ entonces

$$f = \{(1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0)\}$$

es una función. Sin embargo,

$$g = \{(1,1),(1,0),(3,1),(4,0)\}$$

no es una función puesto que $(1,1) \in g$, $(1,0) \in g$ y 1 no es igual a 0.

Cuando trabajamos con conjuntos dirigidos, las funciones pueden tener otras propiedades, comúnmente conocidas como de preservación de orden definidas a continuación.

Definición 1.11. *Sean X y Y conjuntos dirigidos por $\leq_1$ y $\leq_2$ respectivamente. Se dirá que una función $f : X \to Y$*

(1) es no decreciente (monótona creciente) si: $f(x) \leq_2 f(y)$ siempre que $x \leq_1 y$,

(2) es no creciente (monótona decreciente) si: $f(x) \leq_2 f(y)$ siempre que $y \leq_1 x$.

La relación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x + 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$, es una función monótona creciente mientras que la función $g : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$, es monótona decreciente.

1.3. Ordinales y Cardinales

Definición 1.12. *Un conjunto x es transitivo si para todo $y \in x$, $y \subset x$.*

Definición 1.13. *Un conjunto x es un ordinal (número ordinal) si*

(1) x es un conjunto transitivo,

(2) x es bien ordenado por $\in_x$.

Definición 1.14. *Sea α un número ordinal, el sucesor de α, $s(\alpha)$, se define como*

$$s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Al sucesor de un número ordinal α se le denotará también por $\alpha + 1$.

Observación 1.15. *Si α es un número ordinal entonces $s(\alpha)$ también es un número ordinal.*

A continuación se presentan algunos resultados de la teoría de números ordinales que son conocidos.

Lema 1.16. *Cualquier elemento de un número ordinal es un número ordinal.*

Demostración. Sean α un número ordinal y $\beta \in \alpha$. Suponga que γ y δ son tales que $\gamma \in \delta$ y $\delta \in \beta$. Dado que α es un conjunto transitivo, $\delta \in \alpha$ y también $\gamma \in \alpha$, así $\gamma, \delta, \beta \in \alpha$. Usando el hecho que $\in_\alpha$ es un buen orden, entonces $\in_\alpha$ es una relación transitiva, por tanto $\gamma \in \beta$. †

A partir de este momento por $\in_x$ se entenderá la relación $\{(a, b) : a, b, \in x, a \in b \text{ ó } a = b\}$. Así $a \in_x b$ si y sólo si $a, b \in x$ y $a \in b$ ó $a = b$.

Lema 1.17. *Si α es un número ordinal, entonces $\alpha \notin \alpha$. Si α y β son dos números ordinales entonces es falso que $(\alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha)$.*

Demostración. Dado que α es un conjunto entonces no puede ocurrir $\alpha \in \alpha$, además si $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$ entonces por transitividad se tiene $\alpha \in \alpha$ lo cual no puede suceder. †

Lema 1.18. *Si α y β son ordinales distintos tales que $\alpha \subset \beta$ entonces $\alpha \in \beta$.*

Demostración. Sean α y β ordinales distintos tales que $\alpha \subset \beta$ entonces $\beta \setminus \alpha$ es un subconjunto no vacío de β y por tanto tiene un elemento mínimo γ. Observe que $\gamma \subset \alpha$. Veamos ahora que $\alpha \subset \gamma$. Sea $\delta \in \alpha$. Si ocurriera que $\delta \notin \gamma$ entonces $\gamma \in \delta$ o $\gamma = \delta$, note que en ambos casos ocurre que $\gamma \in \alpha$ lo cual contradiria que $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \gamma$ y con ello $\alpha \in \beta$. †

Definición 1.19. *Para ordinales α y β definimos $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$*

Teorema 1.20. *Sean α, β y γ números ordinales.*

(i) *Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$.*

(ii) *$\alpha < \beta$ y $\beta < \alpha$ no pueden ocurrir simultáneamente.*

(iii) *Una de las relaciones $\alpha < \beta$,$\beta < \alpha$ ó $\alpha = \beta$ se satisface.*

(iv) *Sea X un conjunto de números ordinales, entonces $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado.*

(v) *Para todo conjunto de ordinales X hay un ordinal α tal que $\alpha \notin X$.*

Demostración. (i) Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$, por transitividad $\alpha \in \gamma$ y con ello $\alpha < \gamma$.

(ii) Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \alpha$ entonces $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$ lo cual no puede ocurrir por el Lema 1.17.

(iii) Si α y β son ordinales entonces, $\alpha \cap \beta$ es un ordinal y $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ y $\alpha \cap \beta \subset \beta$. Si $\alpha \cap \beta = \alpha$ entonces $\alpha \subset \beta$ así $\alpha \in \beta$ ó $\beta = \alpha$, analogamente para cuando $\alpha \cap \beta \subset \beta$.

(iv) Por el Lema 1.35 la relación $<$ es antisimétrica en X, por (i) es transitiva, además el par $(X, <)$ es un conjunto ordenado. Basta ver que $(X, <)$ es bien ordenado. Sean $A \subset X$ no vacío y $\alpha \in A$ entonces, si $\alpha \cap A = \emptyset$ entonces α es el primer elemento de A, de otro modo, si $\alpha \cap A \neq \emptyset$ entonces $\alpha \cap A$ es un subconjunto no vacío de α por tanto tiene un primer elemento.

(v) Sea X un conjunto de números ordinales. Dado que todos sus elementos son conjuntos transitivos, entonces $\bigcup X$ es un conjunto transitivo, además por (iv) se tiene que $<$ es un buen orden para $\bigcup X$, por tanto $\bigcup X$ es un número ordinal. Sea $\alpha = s\big(\bigcup X\big)$, el sucesor de $\bigcup X$, entonces $\alpha \notin X$, pues de lo contrario $\alpha \subset \bigcup X$ lo cual implica que $\alpha = \bigcup X$ ó $\alpha \in \bigcup X$, note que en cualquiera de estos casos se tiene $\alpha \in \alpha$ lo cual no puede suceder.

†

De (v) del Teorema 1.20 se concluye que el conjunto de los números ordinales no existe. Finalicemos esta sección con ejemplos de direcciones, funciones no decrecientes y no crecientes.

Ejemplo 1.21. *Consideremos el conjunto de los números naturales ω y la relación usual $\leq$. Entonces ω está dirigido por la relación $\leq$.*

Ejemplo 1.22. *Consideremos la clase de los números ordinales, $\mathcal{R}$, dirigido por la relación $\leq$ usual sobre $\mathcal{R}$, es decir, para $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$. Entonces.*

(1) La función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, definida por $f(\alpha) = \alpha + 1$ para cada $\alpha \in \mathcal{R}$, es una función monótona creciente.

(2) *La función $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, dada por $f(\alpha) = 0$ para cada $\alpha \in \mathcal{R}$, es una función monótona decreciente.*

(3) *La función identidad $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, definida como $h(\alpha) = \alpha$, es una función no decreciente.*

Definición 1.23. *Si α es un ordinal se define la cofinalidad de α como*

$$cof(\alpha) = min\{\mu : \exists f : \mu \to \alpha \text{ función tal que su rango es cofinal en } \alpha\}$$

donde μ es un número ordinal.

Consideremos β un ordinal sucesor, es decir que $\beta = \alpha + 1$ con α un número ordinal, entonces la función $f : 1 \to \beta$ dada por $f(0) = \alpha$ es una función cuyo rango es cofinal en β. Por lo tanto todo número ordinal sucesor tiene cofinalidad 1. Además observe que para cualquier ordinal β se tiene que $cof(\beta) \leq \beta$.

Definición 1.24. *Sea α un ordinal límite. Se dice que α es un ordinal regular si $cof(\alpha) = \alpha$. Si $cof(\alpha) < \alpha$ entonces se dice que α es un ordinal singular.*

Definamos una función $f : \omega \to \omega + \omega$ como $f(n) = \omega + n$, es claro que el rango de la función f es cofinal en $\omega + \omega$ y $\omega < \omega + \omega$. es decir que $\omega + \omega$ es un ordinal singular. Igualmente, como ya vimos, los ordinales sucesores mayores que 1 son ordinales singulares. Se sabe que ω y ω_1 son ordinales regulares.

Definición 1.25. *Diremos que dos conjuntos X y Y son equipotentes ($X \approx Y$) si existe una función biyectiva f con rango igual a X y dominio igual a Y.*

Definición 1.26. *Un ordinal α es un cardinal (o número cardinal) si cumple que*

$$\forall \beta < \alpha, \beta \not\approx \alpha.$$

Se sabe que la relación $|\cdot|$ definida como $(X, \kappa) \in |\cdot|$ si y sólo si $X \approx \kappa$, donde κ es un cardinal y X un conjunto, es una función cuyo dominio es la clase de los conjuntos y que tiene por rango la clase de los números cardinales, es decir, todo conjunto X tiene un cardinal, que se denotará por $|X|$

Definición 1.27. *Se dice que un conjunto X es finito si $|X| < \omega$, y se dirá que X es infinito si no es finito.*

A continuación introduciremos una serie de definiciones que se ocuparán a lo largo del presente trabajo.

Definición 1.28. *Sean X un conjunto y κ un cardinal. Se definen los siguiente subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$.*

(1) $[X]^{<\kappa} = \{Y \subset X : |Y| < \kappa\}$.

(2) $[X]^{\kappa} = \{Y \subset X : |Y| = \kappa\}$.

(3) $[X]^{\leq\kappa} = \{Y \subset X : |Y| \leq \kappa\}$.

Definición 1.29. *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω es una familia casi ajena (AD por sus siglas en inglés) si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B$ es finito. Si $\mathcal{A}$ es una familia AD y es maximal respecto de $\subset$ entonces se dirá que $\mathcal{A}$ es una familia maximal casi ajena y se denotará por MAD (por sus siglas en inglés).*

1.4. Redes

Para denotar la topología propia de un espacio X usaremos el símbolo τ_X, cuando no hay lugar a confusiones simplemente escribiremos τ.

Definición 1.30. *Sean X un espacio topológico y Σ un conjunto no vacío dirigido por una relación $\leq$. Una red en X es una función $f : \Sigma \to X$. Una red en X se denotará por $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ donde $x_\sigma = f(\sigma)$. Se escribirá indistintamente $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ó $\sigma_2 \leq \sigma_1$, para $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$.*

Definición 1.31. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ se llama punto límite de una red S en X, si para cualquier vecindad V de x en X existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que*

$$\forall \sigma \in \Sigma(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in V).$$

Si x es un punto límite de una red S diremos que la red S converge a x. El conjunto de puntos límite de una red S es denotado por $limS$ o $limx_\sigma$.

Definición 1.32. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ se llama punto de adherencia de una red $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, si para toda vecindad V de x en X y para todo $\sigma_0 \in \Sigma$ existe $\sigma \geq \sigma_0$ tal que $x_\sigma \in V$.*

Definición 1.33. *Si $S' = \{x_{\sigma'} : \sigma' \in \Sigma'\}$ y $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ son dos redes en un espacio topológico X, diremos que S' es más fina que S si existe una función $\Phi : \Sigma' \to \Sigma$ tal que:*

(i) $(\forall \sigma_0 \in \Sigma)(\exists \sigma_0' \in \Sigma')(\forall \sigma' \in \Sigma')(\sigma' \geq \sigma_0' \Rightarrow \Phi(\sigma') \geq \sigma_0)$

(ii) $x_{\Phi(\sigma')} = x_{\sigma'}$

Teorema 1.34. *Si S' y S son dos redes en un espacio topológico X y $f : \Sigma' \to \Sigma$ es una función creciente tal que $f(\Sigma')$ es cofinal en Σ, entonces la función f satisface (i) de la Definición 1.33.*

Demostración. Sean $\sigma_0 \in \Sigma$ y $\sigma_1 \in f(\Sigma')$ de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_0$. Dado que $\sigma_1 \in rango(f)$, existe $\sigma_1' \in \Sigma'$ tal que $f(\sigma_1') \geq \sigma_0$. Para cada $\sigma' \in \Sigma'$ de manera que $\sigma' \geq' \sigma_1'$ se tiene que f(σ') $\geq f(\sigma_1')$ y como $f(\sigma_1') \geq \sigma_0$ se obtiene lo deseado. †

Teorema 1.35. *Sean S y S' dos redes en un espacio topológico X tales que S' es más fina que S, entonces:*

(1) Si x es un punto de adherencia de S' entonces x es un punto de adherencia de S.

(2) Si x es un punto límite de S entonces x es un punto límite de S'

Demostración. (1) Sean x un punto de adherencia de S' y $\Phi : \Sigma' \to \Sigma$ tal que satisface (i) y (ii) de la Definición 1.33, por ser S' más fina que S. Sean U una vecindad de x y $\sigma_0 \in \Sigma$ entonces existe $\sigma_0' \in \Sigma'$ de manera que si $\sigma' \geq \sigma_0'$ ocurre que $\Phi(\sigma') \geq \sigma_0$. Luego, por definición de punto de adherencia, existe $\sigma'' \geq \sigma_0'$ tal que existe $x_{\Phi(\sigma'')} = x_{\sigma''} \in U$ con $\Phi(\sigma'') \geq \sigma_0$. Por lo tanto x es un punto de adherencia de S.

(2) Sean x un punto límite de S y U una vecindad de x, entonces existen $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que si $\sigma \geq \sigma_0$ sucede que $x_\sigma \in U$, y $\sigma_0' \in \Sigma'$ tal que si $\sigma' \geq \sigma_0'$ entonces $\Phi(\sigma') \geq \sigma_0$, así $x_{\Phi(\sigma')} = x_{\sigma'} \in U$, por lo tanto x es un punto límite de S'.

†

Teorema 1.36. *Sea S una red. Si x es un punto de adherencia de S entonces existe una red S' más fina que S tal que x es un punto límite de S'.*

Demostración. Sea x un punto de adherencia de S. Consideremos

$$\Sigma' = \{(\sigma, U) : \sigma \in \Sigma \text{ y } \wedge x_\sigma, x \in U\}$$

y definamos la relación $\leq'$ sobre Σ' como sigue

$$(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma_2, U_2) \Leftrightarrow (\sigma_1 \leq \sigma_2 \wedge U_2 \subset U_1)$$

Veamos que la relación $\leq'$ dirige a Σ'. Suponga que $(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma_2, U_2)$ y $(\sigma_2, U_2) \leq' (\sigma_3, U_3)$, entonces se cumple que $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_3$, lo que implica $\sigma_1 \leq \sigma_3$. Además $U_3 \subset U_2$ y $U_2 \subset U_1$, por lo tanto $U_3 \subset U_1$, con ello se concluye que $(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma_3, U_3)$.

Se sabe ya que $\sigma \leq \sigma$ y $U \subset U$, por tanto $(\sigma, U) \leq' (\sigma, U)$. Por último note que para (σ_1, U_1) y (σ_2, U_2) podemos hallar $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma_1 \leq \sigma$ y $\sigma_2 \leq \sigma$. Además note que $U = U_1 \cap U_2$ es una vecindad de x y cumple que $U \subset U_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$, por lo tanto

$$(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma, U) \;\wedge\; (\sigma_2, U_2) \leq' (\sigma, U).$$

Con esto se concluye que $\leq'$ dirige a Σ'

Ahora definamos $\Phi : \Sigma' \to \Sigma$ de la siguiente manera: $\Phi((\sigma, U)) = \sigma$. Observe que si $(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma_2, U_2)$ entonces por definición de $\leq'$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$, por lo tanto $\Phi((\sigma_1, U_1)) \leq \Phi((\sigma_2, U_2))$ siempre que $(\sigma_1, U_1) \leq' (\sigma_2, U_2)$.

Además si $(\sigma_0, U) \in \Sigma'$ ocurre que para cualquier vecindad V de x y para todo $\sigma \geq \sigma_0$, $\Phi((\sigma, V)) = \sigma \geq \sigma_0$, particularmente sucede

$$\big(\forall(\sigma, V)\big)\big((\sigma_0, U) \leq' (\sigma, V) \Rightarrow \Phi((\sigma, V)) \geq \sigma_0\big)$$

por lo tanto S' es más fina que S.

Sea U una vecindad cualquiera de x, como x es punto de adherencia de S, para cualquier $\sigma_1 \in \Sigma$ existe $\sigma_0 \in \Sigma$ de modo que $\sigma_0 \geq \sigma_1$ y $x_{\sigma_0} \in U$. Luego $\forall(\sigma, V) : (\sigma_0, U) \leq' (\sigma, V)$ ocurre que $\sigma_0 \leq \sigma$ y $V \subset U$, entonces $x_\sigma \in V$ y $x_\sigma = x_{\Phi(\sigma,V)} = x_{(\sigma,V)}$, de lo que se concluye que x es un punto límite de S'. †

Teorema 1.37. *Un punto x pertenece a $cl_X(A)$ si y sólo si existe una red formada de elementos de A que converge a x.*

Demostración. Sea $\eta(x)$ el conjunto de las vecindades de x, éste es un conjunto dirigido por la relacion $\supset$, definamos la relación $\leq$ como: $U \leq V$ si y sólo si $V \subset U$. Dado que $x \in cl_X(A)$ ocurre que para cada $U \in \eta(x) : U \cap A \neq \emptyset$, así para cada $U \in \eta(x)$ elijamos $x_U \in U \cap A$. Sea $S = \{x_U : U \in \eta(x)\}$ una red sobre X, veamos que $x \in lim x_U$. Sea $U \in \eta(x)$ entonces $x_U \in U$ y además si $U \leq V$ entonces $U \supset V$ así $x_V \in U$, por lo tanto $x \in lim x_u$. La otra implicación es obvia. †

Corolario 1.38. *Un conjunto A es cerrado en un espacio topológico X si y sólo si para cada red S en A, A contiene a sus puntos límite.*

Demostración. Necesidad. Suponga que A es cerrado en X, S es una red en A y x un punto límite de S. Si U es un conjunto abierto en X tal que $x \in U$ entonces existe $\sigma_0 \in \Sigma$ de modo que $\sigma \geq \sigma_0$ implica $x_\sigma \in U$, de aquí que para cada V abierto en X tal que $x \in V$ se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in cl_X(A)$.

Suficiencia. Sean $x \in cl_X(A)$ entonces por la Teorema 1.37 existe una red S sobre A tal que $x \in limS$, luego por hipótesis ocurre que $x \in A$. Por lo tanto $cl_X(A) = A$. †

Corolario 1.39. *Un punto x pertenece a $d(A)$ si y sólo si existe una red $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ sobre A tal que $x \in limS$ y $x_\sigma \neq x$ para todo $\sigma \in \Sigma$.*

Demostración. Necesidad. Supongamos que $x \in d(A)$, donde $d_X(A)$ es el conjunto derivado de A en el espacio X, entonces para cualquier $U \in \tau$ ocurre que $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Luego, $V \in \eta(x)$ implica que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$, así, para toda vecindad V de x se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap A) \neq \emptyset$, sabemos que $\eta(x)$ está dirigido por la relación $\leq$ definida por $U_1 \leq U_2$ si y sólo si $U_1 \supset U_2$, entonces $S = \{x_V : V \in \eta(x)\}$ es una red donde $x_V \in (V \setminus \{x\}) \cap A$ y $x \in limS$. En efecto. Sea $V_0 \in \eta(x)$, entonces para cualquier

$$V \in \eta(x) : V_0 \leq V \Rightarrow x_V \in (V \setminus \{x\}) \cap A \subset (V_0 \setminus \{x\}) \cap A \subset V_0$$

.

Suficiencia. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$ entonces existe $\sigma_0 \in \Sigma$ de manera que

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in U)$$

además $x_\sigma \in A$ y $x_\sigma \neq x$, por lo tanto

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset).$$

De lo que se concluye que $x \in d(A)$. †

Teorema 1.40. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f(lim x_\sigma) \subset lim f(x_\sigma)$ para cualquier red $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.*

Demostración. Necesidad. Supongamos que f es continua y considere $x \in lim x_\sigma$. Si $V \in \eta(f(x))$ entonces existe $U \in \eta(x)$ tal que $f(U) \subset V$. Como $x \in lim x_\sigma$, existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in U).$$

Entonces para cualquier $\sigma \in \Sigma$ tal que $\sigma \geq \sigma_0$ ocurre $f(\sigma) \in V$, con ello $f(x) \in lim f(x_\sigma)$. Por lo tanto $f(lim x_\sigma) \subset lim f(x_\sigma)$.

Suficiencia. Sea $x \in cl_X(A)$, entonces existe S una red en A tal que $x \in lim S$, así

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(x_\sigma \in A)$$

de aquí que $f(x_\sigma) \in f(A)$, luego $f(S)$ es una red en $f(A)$, por hipótesis $f(lim x_\sigma) \subset lim f(x_\sigma)$, por lo tanto $f(cl_X(A)) \subset cl_Y(f(A))$. De aquí se concluye que f es continua en X. †

Teorema 1.41. *Sea X un espacio topológico. X es Hausdorff si y sólo si para cualquier red S en X, ésta tiene a lo más un punto límite.*

Demostración. Necesidad. Sean $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ una red en X y $x_1, x_2 \in lim S$. Considere $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$. Entonces existe $\sigma_0 \in \Sigma$ de modo que

$$(\forall \sigma \in \Sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in U_1 \cap U_2).$$

Por tanto $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Como X es Hausdorff se tiene que $x_1 = x_2$.

Suficiencia. Suponga que X no es T_2, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y para cualesquiera $U_1, U_2 \in \tau$ de manera que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ ocurre que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Note que $\Sigma = \{U_1 \cap U_2 : U_1, U_2 \in \tau, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ está dirigido por la relación $\leq'$ definida por $U_1 \cap U_2 \leq' V_1 \cap V_2$ si y sólo si $U_1 \cap U_2 \supset V_1 \cap V_2$. En efecto.

(i) $(U_1 \cap U_2) \subset (U_1 \cap U_2)$

(ii) Si $(U_1 \cap U_2) \subset (V_1 \cap V_2)$ y $(V_1 \cap V_2) \subset (G_1 \cap G_2)$ entonces se tiene que $(U_1 \cap U_2) \subset (G_1 \cap G_2)$

(iii) Si $(U_1 \cap U_2) \subset (V_1 \cap V_2) \in \Sigma$ entonces $U \cap V \in \Sigma$, donde $U = U_1 \cap V_1$ y $V = U_2 \cap V_2$, es tal que $(U \cap V) \subset (U_1 \cap U_2)$ y $(U \cap V) \subset (V_1 \cap V_2)$.

Considere la red $S = \{x_{U\cap V} : U \cap V \in \Sigma, x_{U\cap V} \in U \cap V\}$. Sea $V \in \eta(x_1)$ entonces existe $U_0 \in \tau$ tal que $x_1 \in U_0 \subset V$. Sea $V' \in \eta(x_2)$, entonces existe $V_0 \in \tau$ tal que $x_2 \in V_0 \subset V'$, entonces $U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$. Entonces para cualquier $U \cap V \subset U_0 \cap V_0$ ocurre $x_{U\cap V} \in U_0 \cap V_0 \subset U_0$ así $x_1 \in limS$, análogamente $x_2 \in limS$. †

1.5. Filtros

Definición 1.42. *Un filtro sobre un conjunto no vacío X es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes proposiciones.*

(1) $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(3) Si $A \in \mathcal{F}$, $B \subset X$ y $A \subset B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

A partir de ahora y hasta el final de esta sección se trabajará solamente con conjuntos no vacíos, así que no se enunciará esta propiedad en la subsecuente redacción.

Sea X un conjunto, entonces las siguientes familias de subconjuntos de X son filtros: $\{X\}$ se llama filtro trivial sobre X, $\mathcal{F}_A = \{B \subset X : A \subset X\}$ se conoce como el filtro generado por A y $\mathcal{F}_x = \{B \subset X : x \in B\}$ el filtro generado por x. Si X es un espacio topológico la familia $\eta_X^o(x) = \{U \in \tau_X : x \in U\}$ es un filtro, sin embargo ninguna topología es un filtro. Observe que de los ejemplos anteriores es fácil observar que si X es un conjunto, $x \in X$ y $A = \{x\}$ entonces $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_A$.

Recordemos que una familia $\mathcal{C}$ de subconjunto no vacíos de un conjunto no vacío X tiene la propiedad de la intersección finita si para cualquier subfamilia finita $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ la intersección $\bigcap \mathcal{B}$ es no vacía; y una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X es una cadena en $\mathcal{P}(X)$ si el par ordenado $(\mathcal{D}, \subset)$ es un orden total, es decir que cualesquiera dos elemenos te $\mathcal{D}$ son comparables, digamos si a y b, pertenecen a $\mathcal{D}$ ocurre que $a \subset b$ o que $b \subset a$.

Lema 1.43. *(i) Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de filtros sobre un conjunto X entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un filtro sobre X.*

(ii) Si $\mathcal{C}$ es una cadena de filtros sobre un conjunto X respecto a $\subset$ entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro sobre X.

(iii) Si $G \subset \mathcal{P}(X)$ es no vacío y tiene la propiedad de la intersección finita entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $G \subset \mathcal{F}$.

Demostración. (i) Es claro que $X \in \bigcap \mathcal{F}$ y que $\emptyset \notin \bigcap \mathcal{F}$. Además si $A, B \in \bigcap \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}$, por lo que $A \cap B \in \bigcap \mathcal{F}$. Ahora, si $A \in \bigcap \mathcal{F}$ y $C \subset X$ son tales que $A \subset C$ entonces $C \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, lo que implica $C \in \bigcap \mathcal{F}$. Por lo tanto $\bigcap F$ es un filtro sobre X.

(ii) Resulta obvio que $X \in \bigcup \mathcal{C}$ y que $\emptyset \notin \bigcup \mathcal{C}$. Dado que $\mathcal{C}$ es una cadena entonces para cualesquiera $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$ existe $F \in \mathcal{C}$ de modo que $A, B \in F$ así $A \cap B \in F$ y por tanto $A \cap B \in \bigcup \mathcal{C}$. Por lo que podemos concluir que $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro sobre X.

(iii) Sea $G \subset \mathcal{P}(X)$ no vacío con la propiedad de la intersección finita. Veamos que la familia

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \exists H \in [G]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}(\cap H \subset A)\}$$

es un filtro sobre X. Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y que $X \in \mathcal{F}$. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces podemos hallar $H_1, H_2 \in [G]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de manera que

$$\bigcap H_1 \subset A \text{ y } \bigcap H_2 \subset B$$

$$\text{entonces } \Big(\bigcap H_1\Big) \cap \Big(\bigcap H_2\Big) \subset A \cap B$$

lo que implica $A \cap B \in \mathcal{F}$. Finalmente si $A \in \mathcal{F}$ y $C \subset X$ son tales que $A \subset C$ entonces existe $H \in [G]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcap H \subset A \subset C$, por tanto $C \in \mathcal{F}$. Por tanto se tiene que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X y además contiene a G.

†

Definición 1.44. *Un filtro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X es un ultrafiltro si para cualquier $A \subset X$, o bien $A \in \mathcal{U}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Definición 1.45. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es maximal si no existe un filtro $\mathcal{F}'$ sobre X que contenga propiamente a $\mathcal{F}$.*

Lema 1.46. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es un ultrafiltro si y sólo si es un filtro maximal.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X y que $\mathcal{U}$ es un filtro sobre X que contiene propiamente a $\mathcal{F}$, entonces existe $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$, lo que implica $A, X \setminus A \in \mathcal{U}$ esto es una contradicción. Por tanto $\mathcal{F}$ es maximal.

Ahora supóngase que $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro sobre X, es decir existe $A \subset X$ de modo que $A, X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Considere $G = \mathcal{F} \cup \{A\}$, entonces para cada $B \in \mathcal{F}$ se tiene $A \cap B \neq \emptyset$ de lo contrario $B \subset X \setminus A$ lo cual implicaría que $X \setminus A \in \mathcal{F}$, además, dado que $\mathcal{F}$ es un filtro entonces G tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces por (iii) del Teorema 1.61 existe un filtro $\mathcal{F}'$ que contiene a G. Por tanto $\mathcal{F}$ no es maximal. †

La siguiente definición nos permitirá caracterizar a los ultrafiltros sobre un conjunto no vacío X. En capítulos posteriores, también será útil para describir algunos aspectos topológicos de ciertos espacios cuya topología está determinada por un filtro.

Definición 1.47. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto no vacío X, se dice que $A \subset X$ es un conjunto positivo respecto de $\mathcal{F}$ si para cualquier $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \cap F \neq \emptyset$. El conjunto de todos los subconjuntos de X positivos respecto de $\mathcal{F}$ se denotará por $\mathcal{F}^+$.*

Cabe notar que si X es un conjunto no vacío, entonces para cualquier filtro sobre X se tiene que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^+$.i

Teorema 1.48. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto no vacío X es un ultrafiltro si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X y sea A un conjunto positivo respecto de $\mathcal{F}$ entonces, en virtud del Teorema 1.46, $\mathcal{F}$ es un filtro maximal, esto implica que no es posible que $A \notin \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$. Inversamente, Si $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro entonces no es un filtro maximal por lo que existe $A \subset X$ de modo que $A \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$ y $A \notin \mathcal{F}$. Por lo tanto se tiene el resultado. †

Teorema 1.49. [Tarski] *Todo filtro sobre un conjunto puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro definido sobre un conjunto X y considere $(P, \subset)$ el conjunto de todos los filtros sobre X que contienen a $\mathcal{F}$, parcialmente ordenado por la relación $\subset$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $(P, \subset)$ entonces por (iii) del Teorema 1.43 $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}$ y es una cota superior para $\mathcal{C}$, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal $\mathcal{U} \in P$, entonces en virtud del Lema 1.46 $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. †

Otro aspecto importante de los subconjuntos positivos se remite a la construcción de nuevos filtros.

Definición 1.50. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X y $A \in \mathcal{F}^+$. Se define el filtro sobre A inducido por $\mathcal{F}$ como sigue*

$$\mathcal{F}|_A = \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}.$$

Es fácil mostrar que $\mathcal{F}|_A$ es un filtro sobre A. En esta tesis los filtros a considerar serán libres. Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω y $f : \omega \to \omega$ una biyección, entonces el conjunto $f[\mathcal{F}] = \{A \subset \omega : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ es un filtro sobre ω.

Definición 1.51. *Una famlia $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ es una base de filtro sobre X si y sólo si $\mathcal{G}$ es no vacío, $\emptyset \notin \mathcal{G}$ y para cualesquiera $A, B \in \mathcal{G}$ existe $C \in \mathcal{G}$ tal que $C \subset A \cap B$.*

Lema 1.52. *Si X es un conjunto y $\mathcal{G}$ una base de filtro en X, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{A \subset X : (\exists B \in \mathcal{G})(B \subset A)\}$ es un filtro en X.*

Demostración. (i) Dado que para todo $B \in \mathcal{G}$, $B \neq \emptyset$, se tiene $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

(ii) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ entonces existen B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{G}$ tales que $B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$, entonces podemos hallar $B \in \mathcal{G}$ de modo que

$$B \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2,$$

por lo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ y $A \subset D \subset X$ entonces existe $B \in \mathcal{G}$ tal que $B \subset A \subset D$ así $D \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

Por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ es un filtro en $\mathcal{A}$. †

Como se mencionó al inicio de esta sección, en los espacios topológicos existen algunos filtros que son las familias de vecindades de un punto. Es sabido que existen algunas características que tienen los subconjuntos de espacios topológicos que se definen a partir de las familias de la forma $\eta(x)$ para cada $x \in X$, con X un espacio topológico. Ahora veremos que se pueden definir características similares pero ahora sobre filtros en espacios topológicos.

Definición 1.53. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El punto x se llama punto límite de un filtro $\mathcal{F}$ sobre X si $\eta(x) \subset \mathcal{F}$. Cuando esto ocurra diremos que $\mathcal{F}$ converge a x y se escribirá como $x \in lim\mathcal{F}$.*

Definición 1.54. *Un punto $x \in X$ se llama punto límite de una base de filtro $\mathcal{G}$ sobre X si $x \in lim\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, diremos que $\mathcal{G}$ converge a x y se escribirá como $x \in lim\mathcal{G}$.*

Definición 1.55. *Un punto $x \in X$ se llama punto de adherencia de un filtro $\mathcal{F}$ (base de filtro $\mathcal{G}$) sobre X si pertenece a la clausura de cada elemento de $\mathcal{F}$ (correspondientemente $\mathcal{G}$).*

Lema 1.56. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. El punto x es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$ si y sólo si Para cualesquiera $V \in \eta(x)$ y $A \subset X$ ocurre que $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Necesidad. Sean $V \in \eta(x)$ y $A \in \mathcal{F}$, como x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$ entonces $x \in cl_X(A)$ así $V \cap A \neq \emptyset$.

Suficiencia. Sea $A \in \mathcal{F}$ entonces por hipótesis $(\forall V \in \eta(x))(A \cap V \neq \emptyset)$ de aquí que $x \in cl_X(A)$ para cada $A \in \mathcal{F}$. †

Teorema 1.57. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Si $\mathcal{F}'$ es un filtro sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ entonces ocurren las siguientes proposiciones.*

(1) Si $x \in X$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}'$ entonces x es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$.

(2) Si $x \in X$ es un punto límite de $\mathcal{F}$ entonces x es un punto límite de $\mathcal{F}'$.

(3) Si $x \in X$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$, entonces existe un filtro $\mathcal{F}_0$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ y $x \in lim\mathcal{F}_0$

Demostración. (1) Sea x un punto de adherencia de $\mathcal{F}'$, entonces por definición para cada $A \in \mathcal{F}'$ se tiene que $x \in cl_X(A)$, dado que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ entonces $(\forall A \in \mathcal{F})(x \in cl_X(A))$, por lo tanto x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$.

(2) Sea $x \in lim\mathcal{F}$, entonces $\eta(x) \subset \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ se tiene que $\eta(x) \subset \mathcal{F}'$ así $x \in lim\mathcal{F}'$.

(3) Consideremos el filtro

$$\mathcal{F}_0 = \{U \subset X : (\exists A \in \mathcal{F})(\exists V \in \eta(x))(A \cap V \subset U)\}$$

sobre X. En efecto, $\mathcal{F}_0$ es un filtro ya que:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$ ya que para cualesquiera $V \in \eta(x)$ y $A \in \mathcal{F}$, $A \cap V \neq \emptyset$.

(ii) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{F}_0$ entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ y $V_1, V_2 \in \eta(x)$ tales que

$$A_1 \cap V_1 \subset U_1 \ y \ A_2 \cap V_2 \subset U_2$$

entonces

$$(A_1 \cap V_1) \cap (A_2 \cap V_2) = (A_1 \cap A_2) \cap (V_1 \cap V_2) \subset (U_1 \cap U_2)$$

Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}_0$

(iii) Si $U \in \mathcal{F}_0$ y $U \subset B \subset X$, entonces existen $A \in \mathcal{F}$ y $V \in \eta(x)$ tales que $A \cap V \subset U \subset B$; por lo tanto $B \in \mathcal{F}_0$.

Es claro que $\eta(x) \subset \mathcal{F}_0$, por tanto $x \in lim\mathcal{F}_0$.

†

Teorema 1.58. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$, $x \in X$. Entonces $x \in cl_X(A)$ si y sólo si existe una base de filtro formada por subconjuntos de A que converge a x.*

Demostración. Necesidad. Para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ ocurre que $U \cap A \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{G} = \{A \cap U : U \in \tau, x \in U\}$. $\mathcal{G}$ es una base de filtro. En efecto.

(i) $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Además $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

(ii) Sean $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces

$$(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathcal{G}.$$

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es una base de filtro sobre X. Por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ es un filtro sobre X, además

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{B \subset X : (\exists U \in \tau)(x \in U \wedge A \cap U \subset B)\}.$$

Note que para cada $V \in \eta(x)$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$ así $A \cap U \subset V$, por lo tanto $\eta(x) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. De aquí que $x \in lim\mathcal{G}$

Suficiencia. Suponga que $\mathcal{G}$ es una base de filtro tal que $x \in lim\mathcal{G}$, entonces por definición $x \in lim\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ así $\eta(x) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, luego, para cada $V \in \eta(x)$ existe $B \in \mathcal{G}$ tal que $B \subset V$ y $B \subset A$, así $V \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in cl_X(A)$. †

Teorema 1.59. *Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para toda base de filtro $\mathcal{G}$ sobre X y la base de filtro $f(\mathcal{G}) = \{f(A) : A \in \mathcal{G}\}$ sobre Y ocurre que $f(lim\mathcal{G}) \subset limf(\mathcal{G})$.*

Demostración. Veamos primero que $f(\mathcal{G})$ es una base de filtro sobre Y.

(i) Dado que $\mathcal{G} \neq \emptyset$ se tiene que $f(\mathcal{G}) \neq \emptyset$.

(ii) Como $\emptyset \notin \mathcal{G}$ entonces $\emptyset \notin f(\mathcal{G})$.

(iii) Si $A, B \in \mathcal{G}$ entonces existe $C \in \mathcal{G}$ de modo que $C \subset A \cap B$ entonces $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$.

Por lo tanto $f(\mathcal{G})$ es una base de filtro sobre Y y con ello $\mathcal{F}_{f(\mathcal{G})}$ es un filtro sobre Y.

Necesidad. Sea $x \in lim\mathcal{G}$ entonces $x \in lim\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, dado que f es continua para cada $V \in \eta(f(x))$ existe $U \in \tau_X$ tal que $f(x) \in f(U) \subset V$, entonces $V \in \mathcal{F}_{f(\mathcal{G})}$, por lo tanto $f(lim\mathcal{G}) \subset limf(\mathcal{G})$.

Suficiencia. Sean $A \subset X$ y $x \in cl_X(A)$ entonces por el Teorema 1.58 existe una base de filtro $\mathcal{G}$ sobre A tal que $x \in lim\mathcal{G}$ entonces $f(x) \in limf(\mathcal{G})$ por tanto $f(x) \in cl_Y(f(A))$. †

Teorema 1.60. *Un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si todo filtro sobre X tiene a lo más un punto límite.*

Demostración. Necesidad. Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x_1, x_2 \in lim\mathcal{F}$ entonces $\eta(x_1) \subset \mathcal{F}$ y $\eta(x_2) \subset \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es filtro, para cualesquiera $V_1 \in \eta(x_1)$ y $V_2 \in \eta(x_2)$ ocurre que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, dado que X es Hausdorff se tiene que $x_1 = x_2$.

Suficiencia. Suponga que X no es T_2, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que para cualesquiera $V_1 \in \eta(x_1)$ y $V_2 \in \eta(x_2)$ ocurre que

$$(V_1 \cap V_2 \neq \emptyset).$$

Consideremos $\mathcal{F} = \{A \subset X : (\exists V_1 \in \eta(x_1))(\exists V_2 \in \eta(x_2))(V_1 \cap V_2 \subset A)\}$, veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro.

(i) Dado que para toda $V_1 \in \eta(x_1)$ y cada $V_2 \in \eta(x_2)$ se tiene que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) Si $A, B \in \mathcal{F}$ existen $U_1, V_1 \in \eta(x_1)$ y $U_2, V_2 \in \eta(x_2)$ tales que $U_1 \cap U_2 \subset A$ y $U_2 \cap V_2 \subset B$. Entonces $U = U_1 \cap U_2 \in \eta(x_1)$ y $V = V_1 \cap V_2 \in \eta(x_2)$ son tales que $U \cap V \subset A \cap B$ por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B \subset X$, entonces existen $V_1 \in \eta(x_1)$ y $V_2 \in \eta(x_2)$ de modo que $V_1 \cap V_2 \subset A \subset B$; por lo tanto $B \in \mathcal{F}$

Además note que $\eta(x_1) \subset \mathcal{F}$ y $\eta(x_2) \subset \mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{F}$ tiene más de un punto límite. †

Teorema 1.61. *Para toda red $S = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ sobre un espacio topológico X, $\mathcal{F}(S) = \{A \subset X : (\exists \sigma_0 \in \Sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in A)\}$ es un filtro sobre X y $lim \mathcal{F}(S) = lim S$. Además, si S' es una red más fina que S entonces $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{F}(S')$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{F}(S)$ es un filtro.

(i) Ya que para todo $\sigma \in \Sigma$ se cumple que $\sigma \geq \sigma$ y $x_\sigma \notin \emptyset$ entonces $\emptyset$ no pertenece a $\mathcal{F}(S)$.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{F}(S)$ entonces existen $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ tales que

$$(\forall \sigma)(\sigma \geq \sigma_1 \Rightarrow x_\sigma \in A) \text{ y}$$

$$(\forall \sigma)(\sigma \geq \sigma_2 \Rightarrow x_\sigma \in B)$$

Dado que S es una red podemos hallar $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que $\sigma_1 \leq \sigma_0$ y $\sigma_2 \leq \sigma_0$ así

$$(\forall \sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in A \cap B)$$

por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{F}(S)$.

(iii) Si $A \in \mathcal{F}(S)$ y $A \subset B \subset X$ entonces existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$(\forall \sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in A \subset B).$$

Por lo tanto $B \in \mathcal{F}(S)$.

Ahora, si $x \in X$, entonces: $x \in lim\mathcal{F}(S)$ si y sólo si $\eta(x) \subset \mathcal{F}(S)$, equivalentemente, para toda $V \in \eta(x)$ existe $\sigma_0 \in \Sigma$ de manera que

$$\forall \sigma : \sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in V$$

es decir $x \in limS$.

Sabemos que $\mathcal{F}(S)$ y $\mathcal{F}(S')$ son filtros. Como S' es más fina que S existe $f : \Sigma' \to \Sigma$ tal que

$$(\forall \sigma_0 \in \Sigma)(\exists \sigma_0' \in \Sigma')(\sigma' \geq \sigma_0' \Rightarrow f(\sigma') \geq \sigma_0) \text{ y}$$
$$(\forall \sigma' \in \Sigma')(x_{\sigma'} = x_{f(\sigma')})$$

Así, si $A \in \mathcal{F}(S)$ existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que para cualquier $\sigma \geq \sigma_0 : x_\sigma \in A$, para σ_0 existe $\sigma_0' \in \Sigma'$ tal que para todo $\sigma' \geq \sigma_0'$ ocurre $f(\sigma') \geq \sigma_0$ y con ello $x_{\sigma'} \in A$, por lo tanto $A \in \mathcal{F}(S')$. †

Teorema 1.62. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un espacio topológico X. Consideremos el conjunto $\Sigma = \{(x, A) : A \in \mathcal{F}, x \in A\}$. Definimos $(x_1, A_1) \leq (x_2, A_2)$ si y sólo si $A_2 \subset A_1$. El conjunto Σ está dirigido por $\leq$, y para la red*

$$S(\mathcal{F}) = \{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\},$$

donde $x_\sigma = x$ para $\sigma = (x, A) \in \Sigma$, se tiene que

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(S(\mathcal{F})) \text{ y } limS(\mathcal{F}) = lim\mathcal{F}.$$

Demostración. Veamos que $\leq$ dirige a Σ.

(i) Para todo $(x, A) \in \Sigma$ ocurre que $A \subset A$ por lo tanto $(x, A) \leq (x, A)$.

(ii) Suponga que $(x, A) \leq (y, B)$ y que $(y, B) \leq (z, C)$ entonces $C \subset B$ y $B \subset A$ por tanto $C \subset A$ y así $(x, A) \leq (z, C)$.

(iii) Sean $(x, A), (y, B) \in \Sigma$ entonces $C = A \cap B$ es tal que $C \neq \emptyset$, $C \subset A$ y $C \subset B$. Sea $z \in C$ entonces $(z, C) \in \Sigma$ y es tal que $(x, A) \leq (z, C)$ y $(y, B) \leq (z, C)$.

Por lo tanto $\leq$ dirige a Σ. Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(S(\mathcal{F})) &= \{A \subset X : (\exists \sigma_0 \in \Sigma)(\forall \sigma)(\sigma \geq \sigma_0 \Rightarrow x_\sigma \in A\} \\
&= \{A \subset X : (\exists (x, B) \in \Sigma)(\forall (y, C))(y, C) \geq (x, B) \Rightarrow y \in A\} \\
&= \{A \subset X : (\exists B \in \mathcal{F})(B \subset A)\} \\
&= \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Finalmente por el Teorema 1.61 se tiene que $lim\mathcal{F} = lim\mathcal{F}(S(\mathcal{F})) = limS$

†

1.6. Espacios de adición

El proceso de adición de un espacio topológico X con otro espacio Y será de gran importancia, puesto que al final del Capítulo 2 se definirá el grado de secuencialidad de un espacio topológico, y los espacios de adición nos ayudarán a construir muchos espacios con grado de secuencialidad arbitrariamente grande.

Definición 1.63. *Sean X y Y dos espacios topológicos ajenos, $A \subset X$ un conjunto cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. En $X \oplus Y$ se define la relación de equivalencia $\sim$ como $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. El espacio cociente $X \oplus Y/\sim$ se llama la adición de X a Y bajo la función f y se denotará por $X \oplus_f Y$. A f se le llama función de adición.*

Algunas propiedades importantes de los espacios de adición son las siguientes (ver [4]). La primera se refiere a la construcción de conjuntos cerrados en los espacios de adición.

Teorema 1.64. *Sea $p : X \oplus Y \to X \oplus_f Y$ la proyección natural de la suma ajena de dos espacios al espacio de adición determinado por los mismos y f una función de adición, y sea $C \subset X \oplus Y$ de modo que $C \cap X$ es cerrado en X. Entonces $p(C)$ es cerrado en $X \oplus_f Y$ si y sólo si $(C \cap Y) \cup f(C \cap A)$ es cerrado en Y.*

Teorema 1.65. *Sea $p : X \oplus Y \to X \oplus_f Y$ la proyección natural. Entonces las siguientes proposiciones son verdaderas.*

(1) Y está inmerso como un conjunto cerrado en $X \oplus Y$ y $p|_Y$ es un homeomorfismo.

(2) $X \setminus A$ está inmerso como un conjunto abierto en $X \oplus Y$ y $p|_{X \setminus A}$ es un homeomorfismo.

Como en toda la topología, las propiedades hereditarias son de gran interés.

Teorema 1.66. *Sea X un espacio adicionado a Y bajo una función $f : A \to Y$, con $A \subset X$ cerrado en X. Sean $X_1 \subset X$ y $Y_1 \subset Y$ subconjuntos cerrados tales que $f(X_1 \cap A)$ es cerrado en Y, y X_1 está adicionado a Y_1 bajo la función restricción, $f_1 = f|_{A \cap X_1}$. Entonces $X_1 \oplus_{f_1} Y_1$ es homeomorfo a algún subconjunto cerrado de $X \oplus_f Y$.*

Teorema 1.67. *Sean X adicionado a Y bajo $f : A \to Y$ y $p : X \oplus Y \to X \oplus_f Y$ la función identificación. Sean $\phi : X \to Z$ y $\psi : Y \to Z$ dos funciones continuas, y sea $(\phi, \psi) : X \oplus Y \to Z$ la única extensión común. Si ϕ y ψ son tales que $\phi(a) = \psi[f(a)]$ para cada $a \in A$, entonces $(\phi, \psi) \circ p^{-1} : X \oplus_f Y \to Z$ es continua.*

Capítulo 2

Espacios Secuenciales

2.1. Introducción

En el desarrollo del cálculo, uno de los conceptos de mayor importancia es el de límite de funciones; como sabemos, las sucesiones son funciones con dominio el conjunto de los números naturales y cuyo rango está contenido en algún espacio topológico. Si una sucesión tiene un punto límite, se dice que dicha sucesión converge a ese punto, donde la convergencia de la sucesión depende de la topología del espacio, a saber, una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en un espacio X converge a un punto $x \in X$ si para cualquier vecindad abierta U de x existe $n_0 < \omega$ de manera que para cualquier $m < \omega$ con $n_0 \leq m$ se tiene que $x_n \in U$. La teoría de los espacios secuenciales tiene por objetivo la caracterización de un espacio topológico dado por medio de sus sucesiones convergentes. Fue en los trabajos de E. R. Hedrick, T. H. Hildebrandt y principalmente en los de M. Fréchet donde el estudio de la teoría de la secuencialidad tomó mayor importancia. Fue Fréchet uno de los primeros matemáticos que logró dar una definición acertada de lo que es un espacio secuencial, logrando que la topología de un espacio quedase caracterizada por completo mediante sus sucesiones convergentes. Cabe hacer notar que no todo espacio topológico es secuencial, hecho que mostramos en el Ejemplo 2.6 y se reafirma en el Ejemplo 4.2.

Actualmente, en algunos trabajos de S. García-Ferreira y C. Uzcátegui se profundiza un poco más en la teoría de los espacios secuenciales demostrando que podemos ir pegando puntos a un conjunto dado en un espacio topológico secuencial mediante sucesiones convergentes, de manera que podemos determinar un número ordinal que nos indica la cantidad de veces que debemos añadir puntos a un conjunto para alcanzar su cerradura; este número ordinal es siempre menor o igual que ω_1 y se llama el grado de secuencialidad.

2.2. Los Espacios Secuenciales

Para comenzar introduciremos la definición donde se sustenta toda la teoría de los espacios secuenciales.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico.*

(1) $U \subset X$ es secuencialmente abierto en X si y sólo si para cada $\{x_n\}_{n\in\omega+1}$ tal que $x_\omega \in U$ y $x_n \to x_\omega$, existe $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq m \Rightarrow x_n \in U).$$

(2) $F \subset X$ es secuencialmente cerrado si y sólo si para toda $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset F$, $x_n \to x$ implica $x \in F$.

Definición 2.2. *Un espacio topológico X se llama espacio secuencial, o simplemente se dirá que X es secuencial, si todo subconjunto secuencialmente abierto es abierto.*

Note que si $A \subset X$ entonces, A es secuencialmente abierto en X si y sólo si $X \setminus A$ es secuencialmente cerrado.

Lema 2.3. *Un espacio topológico X es secuencial si y sólo si todo subconjunto secuencialmente cerrado es cerrado en X.*

Del Lema 2.3 es fácil deducir que un espacio X es secuencial cuando y sólo cuando para todo conjunto no cerrado $A \subset X$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A que converge a algún punto en $X \setminus A$.

Lema 2.4. *Todo espacio primero numerable es secuencial.*

Demostración. Sean $F \subset X$ secuencialmente cerrado en X, $x \in cl_X(F)$ y $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ una base local en x tal que para cada $n < \omega$, $B_{n+1} \subset B_n$. Para cada $n < \omega$ elija $x_n \in F \cap B_n$, entonces $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión contenida en F que converge a x en X, así $x \in F$. Por lo tanto F es un conjunto cerrado en X, lo cual implica que X es un espacio secuencial. †

Un espacio topológico Y divide a X si y sólo si no existe τ' topología sobre X tal que $\tau_X < \tau'$ y $\mathcal{C}(Y,(X,\tau_X)) \subset \mathcal{C}(Y,(X,_{\tau'}))$. El conjunto $\omega+1$ provisto con $\tau_<$ la topología inducida por el orden usual de ordinales restringido al número ordinal $\omega+1$ tiene un solo punto de acumulación, a saber ω, y el subconjunto ω es discreto, es decir, para cada $n<\omega$, el punto n es aislado.

Teorema 2.5. *Para cualquier espacio topológico X las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) $\omega+1$, *provisto con la topología inducida por el orden usual restringido al número ordinal* $\omega+1$, *divide a* X.

(2) Todo $U \subset X$ secuencialmente abierto es abierto en X.

(3) Todo $F \subset X$ secuencialmente cerrado es cerrado en X.

Además, si X es Hausdorff y $A \subset X$ entonces también son equivalentes

(4) Si para toda sucesión $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ en X, $A \cap \{x_n : n < \omega+1\}$ es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

(5) Si para cualquier subespacio métrico compacto M de X, $A \cap M$ es un conjunto cerrado en X, entonces A es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Afirmación. (1) es equivalente a la proposición:

$$\text{(a) Si } U \subset X \text{ es tal que } (\forall f : \omega+1 \to X \text{ continua})(f^{-1}(U) \in \tau_<)$$

$$\text{implica } U \text{ es abierto en } X.$$

Demostración de la afirmación. Necesidad. Suponga que existe $U \subset X$ tal que $\forall f : \omega+1 \to X$ continua $f^{-1}(U) \in \tau_<$ y U no es abierto en X. Sea τ' la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{U\} \cup \tau_X$, note que $\tau_X < \tau'$ y además $\mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau_X}) \subset \mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau'})$ y esto no puede ocurrir ya que por hipótesis $\omega+1$ divide a X.

Suficiencia. Sea τ' una topología sobre X de manera que $\mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau_X}) \subset \mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau'})$. Considere $U \in \tau'$ entonces ocurre que para toda $f \in \mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau'}) : f^{-1}(U) \in \tau_<$ entonces $U \in \tau_X$. Por lo tanto $\tau' \leq \tau_X$. Con esto queda demostrada la afirmación.

Ahora note que para una función $f : \omega+1 \to X$: f es continua si y sólo si $f(n) \to f(\omega)$ en X.

Si f es continua, como $n \to \omega$ entonces $f(n) \to f(\omega)$ en X. Ahora suponga que $\{x_n\}_{n\in\omega+1} \subset X$ es tal que $x_n \to x_\omega$ en X, definamos $f : \omega + 1 \to X$ como $f(\alpha) = x_\alpha$ para cada $\alpha \in \omega + 1$. Para ver que f es continua bastará probar que lo es en x_ω. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x_\omega \in U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ de manera tal que para cualquier $n \geq N$ ocurre que $x_n \in U$, es decir existe $N \in \mathbb{N}$ de manera tal que para cualquier $n \geq N$ ocurre que $f(n) \in U$, así $f^{-1}[U] = \{n < N : f(n) \in U\} \cup \{n \geq N\} = [N, \to) \cup \{n < N : f(n) \in U\}$ es abierto en $\omega + 1$. Por lo tanto f es continua.

Observe que toda sucesión convergente en X es el rango de una función continua en X. Entonces existe una función inyectiva $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{C}(\omega+1, X_{\tau_X})$ donde $\mathcal{S}$ es el conjunto de las sucesiones convergentes en X, y a cada elemento de $\mathcal{S}$, Φ le asocia una función continua f definida como antes.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $U \subset X$ secuencialmente abierto en X, se quiere demostrar que U es abierto en X, por (a) bastará probar que si $f : \omega + 1 \to X$ es continua entonces $f^{-1}[U]$ pertenece a $\tau_<$. Si consideramos $f : \omega + 1 \to X$ continua entonces, como $n \to \omega$, $f(n) \to f(\omega)$. En caso de que $f(\omega) \notin U$ se tiene que $f^{-1}[U] \subset \omega$, esto implica que $f^{-1}[U] \in \tau_<$. Ahora si $f(\omega) \in U$, dado que U es secuencialmente abierto y $f(n) \to f(\omega)$, entonces existe $m < \omega$ de modo que para todo $n < \omega$ con $n \geq m$ se tiene que $f(n) \in U$, es decir $\omega \setminus f^{-1}[U]$ es finito, es decir $f^{-1}[U] \in \tau_<$, por (a) U es abierto en X.

(2) $\Rightarrow$ (1) Probaremos que se satisface (a). Sea U un subconjunto de X que satisface

$$\text{(b) } (\forall f : \omega + 1 \to X \textit{ continua})(f^{-1}(U) \in \tau_<).$$

Queremos demostrar que U es abierto en X y para ello bastará probar que U es secuencialmente abierto en X, así que consideremos $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ una sucesión en X tal que $x_\omega \in U$ y $x_n \to x_\omega$; definamos $f : \omega + 1 \to X$ como $f(n) = x_n$ para cada $n \leq \omega + 1$, entonces f es continua pues $x_n \to x_\omega$, luego por la hipótesis (b) $f^{-1}[U] \in \tau_<$ y dado que $\omega \in f^{-1}[U]$ existe $m < \omega$ tal que para cada $n < \omega$ con $n \geq m$ se tiene que $n \in f^{-1}[U]$, equivalentemente existe $N < \omega$ de modo que para cada $n < \omega$ con $n \geq N$ se tiene que $x_n \in U$. Esto prueba que U es secuencialemte abierto en X, y por lo tanto U es abierto en X.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que todo conjunto secuencialmente cerrado en X es un conjunto cerrado en X y consideremos un conjunto U secuencialmente abierto en X. Probaremos que $X \setminus U$ es secuencialmente cerrado en X. Sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión contenida en $X \setminus U$ de modo que $x_n \to x$ con $x \in X$.

Si $x \in U$, como U es secuencialmente abierto, existe $m < \omega$ tal que para todo $n < \omega$ con $n \geq m$ se tiene que $x_n \in U$, esto es una contradicción. Entonces $x \in X \setminus U$, esto implica que $X \setminus U$ es secuencialmente cerrado en X, y por hipótesis es cerrado en X, así que U es abierto en X.

Sea U secuencialmente abierto en X, así, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega+1}$ tal que $x_n \to x_\omega \in U$ existe $m < \omega$ de modo que $\{x_n : m \leq n < \omega\} \subset U$, entonces, $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ es una sucesión convergente, $x_n \to x_\omega$,. Sea $F = X \setminus U$ entonces ocurre que con $x_\omega \in U$ podremos hallar $M < \omega$ de manera que para todo $n < \omega$, $n \geq M$ implica $x_n \in U$, es decir U es secuencialmente abierto y por tanto U es abierto en X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea F secuencialmente cerrado en X. Sean $U = X \setminus F$, $x_\omega \in U$ y $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en X que converge a x_ω, note que no puede ocurrir que haya una infinidad de elementos de la sucesión contenidos en F, de lo contrario ésta formaría una sucesión en F convergente a x_ω y así $x_\omega \in F$, pero esto es falso. Así, a lo más existe una cantidad finita de elementos de la sucesión pertenecientes a F. Sea $n_1 = max\{n \in \omega : x_n \in F\}$ entonces para cualquier $n \geq n_0$, donde $n_0 = n_1 + 1$, ocurre que $x_n \in U$, por lo tanto U es secuencialmente abierto en X y por tanto $U \in \tau_X$. De lo anterior se concluye qe F es cerrado en X.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponga qe X es un espacio topológico Hausdorff. Sea $A \subset X$ tal que para todo sucesión convergente $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ en X se tiene que $A \cap \{x_n : n < \omega + 1\}$ es un conjunto cerrado en X. Considere $\{y_n\}_{n<\omega+1}$ una sucesión convergente en X, observe que tiene un único punto límite, así si $\{y_n\}_{n<\omega+1} \subset A$ entonces $A \cap \{y_n : n < \omega + 1\}$ es un conjunto cerrado en X así $y_\omega \in A$, lo cual implica que A es secuencialmente cerrado. Por (3), A es un conjunto cerrado en X.

(4) $\Rightarrow$ (3) Si $F \subset X$ es un conjunto secuencialmente cerrado en X, entonces para cada sucesión convergente contenida en F ocurre que su punto límite, que es único, pertenece a F, por tanto F satisface las hipótesis del inciso (4), lo cual implica que F es cerrado. Así todo conjunto secuencialmente cerrado en X es cerrado en X

(4) $\Rightarrow$ (5) Recuerde que el rango de toda sucesión convergente unión con su punto de convergencia es un espacio métrico compacto. Sea $A \subset X$ de modo que su intersección con cada subespacio métrico compacto de X es un conjunto cerrado en X, entonces se cumple que la intersección del conjunto A con el rango de cada sucesión convergente en X unido con su punto de convergencia es un conjunto cerrado en X. Así, A satisface la hipótesis de (4), por tanto A es cerrado en X.

(5) $\Rightarrow$ (4) Suponga que $A \subset X$ no es cerrado en X, entonces existe un subespacio métrico compacto M de X de manera que $A \cap M$ no es cerrado en X, lo cual implica que $A \cap M$ no es cerrado en M, así que es posible hallar $y \in d_M(A \cap M) \setminus (A \cap M)$, como M es métrico existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en $A \cap M$ tal que $x_n \to y$ con $y \notin A \cap M$. Si denotamos a y por x_ω entonces $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ es una sucesión convergente en X con la propiedad de que $A \cap \{x_n : n < \omega + 1\}$ no es cerrado en X. †

Ejemplo 2.6. *Existen espacios que no son secuenciales.*

Considere el espacio de ordinales $\omega_1 + 1$ cuya topología es aquella inducida por el orden usual sobre $\omega_1 + 1$. Note que para cualquier subconjunto numerable A de ω_1 el supremo de A pertenece a ω_1 por ser éste último un cardinal regular, esto implica que una sucesión en ω_1, digamos $\{x_n\}_{n<\omega}$, es convergente a ω_1 si y sólo si existe $m < \omega$ de modo que para cualquier $n < \omega$, $m \leq n$ implica que $x_n = \omega_1$. Por lo tanto $\{\omega_1\}$ es un conjunto secuencialmente abierto en $\omega_1 + 1$ que no es abierto. Por lo tanto $\omega_1 + 1$ no es secuencial.

Ejemplo 2.7. *La imagen continua de un espacio secuencial no es necesariamente secuencial.*

Sean X un conjunto no vacío, τ_1 la topología discreta sobre X y τ_2 una topología que hace a X un espacio no secuencial, es decir que existe un subconjunto de X que es secuencialmente abierto en (X, τ_2) que no pertenece a τ_2. Entonces la función identidad $id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua dado que su dominio es un espacio discreto. Por lo tanto la imagen continua de un espacio secuencial no es necesariamente secuencial.

Para comprobar la situación descrita en el Ejemplo 2.7 basta considerar a $(\omega_1 + 1, \tau_1)$ donde τ_1 es la topología discreta y a $(\omega_1 + 1, \tau_2)$ como el espacio del Ejemplo 2.6, entonces la función identidad sobre $\omega_1 + 1$ es continua y su rango no es secuencial.

Teorema 2.8. *Todo espacio cociente de un espacio secuencial es secuencial.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos con X secuencial, f una función cociente de X sobre Y y $U \subset Y$ secuencialmente abierto en Y. Veamos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X. Considere $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ una sucesión convergente tal que $x_\omega \in f^{-1}(U)$, entonces $f(x_n) \to f(x_\omega)$ y $f(x_\omega) \in U$, entonces existe $n_0 < \omega$ de modo que para cada $n_0 \leq n < \omega$, $f(x_n) \in U$. Por tanto para cada $n_0 \leq n < \omega$, $x_n \in f^{-1}(U)$. Así $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X y por tanto un conjunto abierto, lo que implica que U es un conjunto abierto en Y. Por lo tanto Y es un espacio secuencial. †

Corolario 2.9. *Existen espacios secuenciales que no son primero numerables.*

Demostración. Considere el espacio cociente determinado por $\mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathcal{D}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donde $\mathcal{D} = \big\{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\big\} \cup \big\{\mathbb{Z}\big\}$. Entonces $(\mathcal{D}, \tau_f)$ es un cociente de $\mathbb{R}$ con

$$\tau_f = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } \mathbb{R}\}.$$

En virtud del Teorema 2.8, el espacio $(\mathcal{D}, \tau_f)$ es un espacio secuencial, sin embargo no es primero numerable puesto que $\mathbb{Z}$ no admite base local numerable alguna en $(\mathcal{D}, \tau_f)$.

Considere $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ una familia anidada de vecindades abiertas de $\mathbb{Z}$ en $(\mathcal{D}, \tau_f)$. Construiremos un conjunto U abierto en $(\mathcal{D}, \tau_f)$ de modo que $\mathbb{Z} \in U$ y tal que para todo $n < \omega$, $B_n \not\subset U$.

Para cada $k < \omega$ sean $C_k = B_{2k}$ y $D_k = B_{2k+1}$ entonces, $\mathcal{B} = \{C_k\}_{k<\omega} \cup \{D_k\}_{k<\omega}$. Dado que $\mathbb{Z} \in B_n$ para todo $n < \omega$, se tiene lo siguiente

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}(k \in f^{-1}[C_k])$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})(k \in f^{-1}[D_{-k}]).$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe un intervalo abierto J_k tal que $k \in J_k \subset f^{-1}[C_k]$, análogamente, para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ existe un intervalo abierto J_k de manera que $k \in J_k \subset f^{-1}[D_{-k}]$, luego

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ \exists \xi_k \in (0, 1/2)\big((k - \xi_k, k + \xi_k) \subsetneq J_k\big)$$

entonces el conjunto

$$U = f\Big[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k - \xi_k, k + \xi_k)\Big]$$

es un conjunto abierto en $(\mathcal{D}, \tau_f)$ de modo que para cada $n < \omega$, $B_n \not\subset U$. †

Corolario 2.10. *La imagen continua y abierta o cerrada de un espacio secuencial es secuencial.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos con X secuencial y $f : X \to Y$ una función continua, abierta y sobre. Bastará ver que la preimagen de cada conjunto secuencialmente abierto en Y es un abierto en X. Tome $U \subset Y$ secuencialmente abierto en Y y $\{x_n\}_{n<\omega+1}$ una sucesión convergente en X de modo que $x_\omega \in f^{-1}(U)$ entonces $f(x_n) \to f(x_\omega)$ y $f(x_\omega) \in U$, así es posible hallar $n_0 < \omega$ tal que para cada $n_0 < n < \omega$ se tiene que $x_n \in f^{-1}(U)$, lo cual implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, por lo tanto $f\big(f^{-1}(U)\big) = U$ es abierto en Y. Por lo tanto Y es un espacio secuencial.
Ahora, si f es una función cerrada y $F \subset Y$ es secuencialmente cerrado en Y, entonces $Y \setminus F$ es secuencialmente abierto en Y, así $f^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X por tanto $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X, lo cual implica que F es un conjunto cerrado en Y. Por lo tanto, Y resulta ser un espacio secuencial. †

Corolario 2.11. *Sean $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y X el espacio producto*

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha.$$

Si X es secuencial entonces para todo $\alpha \in I$, X_α es secuencial.

Demostración. Dado que para cada $\alpha \in I$ la función $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es una función continua, abierta y sobre, por el Corolario 2.10 X_α es un espacio secuencial. †

Teorema 2.12. *Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es una familia de espacios topológicos secuenciales ajenos entonces*

$$X = \sum_{\alpha\in I} X_\alpha$$

es un espacio secuencial.

Demostración. Bastará ver que si $U \subset X$ es secuencialmente abierto, entonces para cada $\alpha \in I$, $U \cap X_\alpha$ es secuencialmente abierto en X_α.

Sea $U \subset X$ secuencialmente abierto. Sean $\alpha \in I$ y $x_\omega \in U \cap X_\alpha$, considere $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en X que converja a x_ω. Entonces ocurre lo siguiente

(1) Existe $n_1 < \omega$ de modo que para cada $n_1 < n < \omega, x_n \in U$.

(2) Existe $n_2 < \omega$ de modo que para cada $n_2 < n < \omega, x_n \in X_\alpha$.

Tome $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ entonces para todo $n_0 < n < \omega$, por (1) y (2), $x_n \in U \cap X_\alpha$. Por lo tanto para cada $\alpha \in I$ la intersección de U con X_α es secuencialmente abierto en X_α. Note que

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} (U \cap X_\alpha)$$

y así concluimos que U es abierto en X. †

Teorema 2.13. *Si X es un espacio secuencial entonces todo subespacio abierto o cerrado de X es secuencial.*

Demostración. Sean X un espacio secuencial y A un subconjunto de X. Suponga que A es abierto en X y tome $U \subset A$ un conjunto secuencialmente abierto en A. Bastará ver que U es secuencialmente abierto en X. Considere $x_\omega \in U$ y $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en X convergente a x_ω. Entonces ocurre lo siguiente

(1) Existe $n_1 < \omega$ de modo que para cada $n_1 < n < \omega (x_n \in A)$.

(2) Existe $n_1 < n_2 < \omega$ de modo que para cada $n_2 < n < \omega (x_n \in U)$

Por (1) y (2) se concluye que la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ está eventualmente contenida en U, por tanto U es abierto en X y como $U = A \cap U$ entonces U es abierto en A.

Ahora suponga que A es cerrado en X y que F es un subconjunto de A secuencialmente cerrado en A. Veamos que F es secuencialmente cerrado en X. Tome $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en F convergente a $x \in X$, entonces x es un punto de acumulación de F y por tanto $x \in F$. Así F es secuencialmente cerrado en X y dado que $F = A \cap F$, F es un conjunto cerrado en A.

En ambos casos se concluye que A es un subespacio secuencial de X. †

Definición 2.14. *Un espacio topológico Hausdorff es un espacio secuencialmente compacto si toda sucesión en el espacio tiene una subsucesión convergente.*

Un espacio topológico X es numerablemente compacto si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita, además, recuerde que un espacio X sea numerablemente compacto es equivalente a que todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

Teorema 2.15. *Todo espacio topológico X Hausdorff, secuencial y numerablemente compacto es secuencialmente compacto.*

Demostración. Considere $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en X y sea $A = \{x_n : n < \omega\}$. Suponga sin pérdida de generalidad que para $n < m < \omega$, $x_n \neq x_m$. Como X es numerablemente compacto entonces la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ tiene un punto de acumulación, digamos $x_\omega \in X$. Note que $A \setminus \{x_\omega\}$ no es un conjunto cerrado en X. Dado que X es un espacio secuencial y que $x_\omega \in cl_X(A \setminus \{x_\omega\})$ entonces existe una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ contenida en A que tiene como único punto límite a x_ω. Tome $y_1 = x_{n_1}$ y suponga que hemos elegido $y_r \in \{x_{n_k} : k < \omega\}$ para $r < m+1$ con $m < \omega$. Sea $y_{m+1} \in \{x_{n_k} : k < \omega\}$ tal que

$$m + 1 = min\big\{s < \omega : m < s \text{ y } x_s \in \{x_{n_k} : k < \omega\}\big\}.$$

De este modo $\{y_m\}_{m<\omega}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n<\omega}$ que converge a x_ω. Por lo tanto el espacio X es secuencialmente compacto. †

Teorema 2.16. *Si X es numerablemente compacto y Y es secuencial entonces la segunda proyección de $X \times Y$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$, es una función cerrada.*

Demostración. Tome $F \subset X \times Y$ un conjunto cerrado en el espacio producto. Considere una sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ contenida en $\pi_Y(F)$ y $y \in Y$ un punto de acumulación de dicha sucesión. Para cada $n < \omega$ tome $x_n \in X$ de manera que $(x_n, y_n) \in F$, esto es posible ya que $y_n \in \pi_Y(F)$. Si ocurre que existe $x \in X$ de manera que el conjunto $A = \{n < \omega : x_n = x\}$ es finito, entonces la sucesión (x_{n_i}, y_{n_i}) converge a (x, y), donde $\{n_i : i < \omega\}$ es la única enumeración estrictamente creciente de A, lo cual implica que $(x, y) \in F$ y por tanto $y \in \pi_Y(F)$.

En otro caso, si la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ está indicada inyectivamente entonces existe $x \in X$ de manera que x es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$. Entonces se tiene que $(x, y) \in F$, por ser F un conjunto cerrado. Por lo tanto $y \in \pi_Y(F)$.

De lo anterior se concluye que $\pi_Y(F)$ es secuencialmente cerrado en Y y por tanto es cerrado. †

Teorema 2.17. *Si $f : X \to Y$ es una función cerrada, X es Hausdorff y para cada $y \in Y : f^{-1}(y)$ es numerablemente compacto, entonces para todo subespacio numerablemente compacto Z de Y, $f^{-1}(Z)$ es numerablemente compacto en X.*

Demostración. Sea $Z \subset Y$ un subespacio de Y numerablemente compacto, entonces $f^{-1}(Z)$ es un subespacio de X y por tanto es Hausdorff. Sea $\{U_n\}_{n<\omega}$ una familia de conjuntos abiertos en X que cubren a $f^{-1}(Z)$, para cada $A \in [\omega]^{<\omega}$ defínase

$$U_A = \bigcup_{n \in A} U_n.$$

Para cada $z \in Z$ se puede hallar $A(z) \in [\omega]^{<\omega}$ con la propiedad de que $f^{-1}(\{z\}) \subset U_{A(z)}$. Entonces $z \in Y \setminus f(X \setminus U_{A(z)})$, esto implica que

$$Z \subset \bigcup_{z \in Z} \big(Y \setminus f(X \setminus U_{A(z)})\big).$$

Además observe que $\{A(z) : z \in Z\} \subset [\omega]^{<\omega}$, y por ser f una función cerrada $Y \setminus f(X \setminus U_{A(z)})$ es un conjunto abierto en Y para cada $z \in Z$, por tanto $\{Y \setminus f(X \setminus U_{A(z)})\}$ forma una cubierta de Z por conjuntos abiertos en Y. Dado que Z es un subespacio numerablemente compacto de Y, existen $z_1, \ldots, z_n$ puntos de Z tales que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{n} \big(Y \setminus f(X \setminus U_{A(z_i)}\big)$$

así

$$f^{-1}(Z) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{A(z_i)}.$$

Por lo tanto $f^{-1}(Z)$ es numerablemente compacto. †

Es conocido que el producto de dos espacios numerablemente compactos no necesariamente es numerablemente compacto (ver [5] p. 205), sin embargo, si pedimos que uno de los factores sea secuencial, entonces el espacio producto es numerablemente compacto.

Corolario 2.18. *El producto de dos espacios numerablemente compactos, de los cuales uno es secuencial, es numerablemente compacto.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos numerablemente compactos de manera que Y es un espacio secuencial. Por el Teorema 2.16 la función $\pi_Y : X \times Y \to Y$ es una función cerrada. Note que $\pi_Y^{-1}(Y) = X \times Y$ y que para cada $y \in Y$ la fibra de y bajo π_Y es un conjunto numerablemente compacto dado que $\pi_Y^{-1}(\{y\}) = X \times \{y\}$ y X es homeomorfo a $X \times \{y\}$ para todo $y \in Y$. En virtud del Teorema 2.15 y de que Y es numerablemente compacto, se concluye que $X \times Y$ es numerablemente compacto. †

Ejemplo 2.19. *En general el producto de dos espacios secuenciales no es un espacio secuencial.*

Consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces $\mathbb{Q}$ es secuencial por ser primero numerable, y sea $\mathbb{Q}'$ el espacio donde los enteros están identificados en un punto, es decir que $\mathbb{Q}'$ es el espacio determinado por la siguiente partición $\{\mathbb{Z}\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}$, con esto se tiene que $\mathbb{Q}'$ es un cociente de $\mathbb{Q}$, esto implica que $\mathbb{Q}'$ también es un espacio secuencial. Defina X como el espacio producto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}'$,veremos que X no es un espacio secuencial, para ello probaremos que existe un conjunto W secuencialmente abierto en X que no es abierto.

Sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión de números irracionales menores que 1, estrictamente decreciente y convergente a 0 en $\mathbb{R}$. Para cada $n < \omega$ definamos T_n como el interior en el plano del triángulo cuyos vértices son $(x_n, n), (1, n + \frac{1}{2})$ y $(1, n - \frac{1}{2})$, T'_n como el interior en el plano del triángulo cuyos vértices son $(-x_n, n), (-1, n + \frac{1}{2})$ y $(-1, n - \frac{1}{2})$ y sea R_n el interior del rombo determinado por los puntos $(-x_n, n), (0, n + \frac{1}{2}), (x_n, n)$ y $(0, n - \frac{1}{2})$. Entonces $W_n = T_n \cup T'_n \cup R_n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Considerando a X como subconjunto del plano con los enteros del eje vertical identificados, haga $W = X \cap \left(\bigcup_{n<\omega} W_n\right)$.

Si $\pi_1 : X \to \mathbb{Q}$ y $\pi_2 : X \to \mathbb{Q}'$ son las proyecciones canónicas, entonces es sencillo ver que para cualesquiera U y V vecindades abiertas de 0 y $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ y$\mathbb{Q}'$, respectivamente, se tiene que el conjunto $\pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V]$ no está contenido en W. En efecto, sean U y V vecindades abiertas de 0 y $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente. Entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \subset \pi_1^{-1}[U]$, y dado que $\mathbb{Z} \in V$ entonces, visto desde el plano, se tiene que $k \in \pi_2^{-1}[V]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir que el punto $(0, \mathbb{Z})$ pertenece a $\pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V]$, sin embargo, existe $n < \omega$ de modo que $x_n < \epsilon$, así el punto (y, n), donde $x_n < y < \epsilon$, pertenece a $\pi_1^{-1}[U] \cap \pi_2^{-1}[V]$ pero no a W. Por lo tanto W no es abierto.

Ahora suponga que $\{y_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en $X \setminus W$ tal que $y_n \to y \in W$. Note que si $\pi_2(y) \neq 0$, entonces la segunda coordenada de y es distinta de $\mathbb{Z}$, así la convergencia al punto y en X es la misma que la convergencia a y en el plano, pero tomando en cuenta que W es abierto en el plano y la sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ está contenida en el complemente de W, esto es una contradicción, esto implica que $\pi_2(y) = 0$. Si $\pi_1(y) \neq 0$, entonces para algún $n_0 < \omega$ se tiene que para todo $n_0 \leq n < \omega$, $y_n \in W$, lo cual es falso. Por último, si $y = (0, 0)$ enotces $\pi_2(y_n) \to 0$ en $\mathbb{Q}'$, observe que esto sólo es posible cuando alguna subsucesión de $\{\pi_2(y_n)\}_{n<\omega}$ converge a algún entero k en $\mathbb{Q}$, es decir que la sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ dado $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon < \omega$ de manera que $y_n \in \pi_2^{-1}[(k-\epsilon, k+\epsilon)]$ para todo $n_\epsilon \leq n < \omega$. Así, del hecho de que $y_n \to (0,0)$, se puede hallar $N < \omega$ tal que $y_n \in W$ para todo $N \leq n < \omega$. Esto es una contradicción. Se concluye que W es un conjunto secuencialmente abierto y no abierto en X. Por lo tanto el producto de dos espacios secuenciales no necesariamente es un espacio secuencial.

Teorema 2.20. *Todo espacio secuencial es un cociente de una suma topológica de sucesiones convergentes.*

Demostración. Sea X un espacio secuencial. Para cada $x \in X$ y $s \subset X$ sucesión convergente a x en X defina el espacio $S(s,x) = rango(s) \cup \{x\}$ donde para todo $n < \omega$ x_n es un punto aislado y las vecindades de x en $S(s,x)$ son todos los subsconjuntos cofinitos en $S(s,x)$ que contienen a x. Así $x_n \to x$ en $S(s,x)$, $S(s,x)$ es homeomorfo a $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y por tanto, $S(s,x)$ es un espacio métrico.

Considere T la suma topológica ajena de todos los espacios de la forma $S(s,x)$. Observe que como conjuntos X y T son iguales, puesto que para cada $x \in X$, la sucesión constante x es convergente a x en X. Defínase $f : T \to X$ como $f(x) = x$ para cada $x \in T$. Para ver que f es una función continua, bastará probar que $f|_{S(s,x)}$ es continua para cada $x \in X$ y cada sucesión s convergente a x. En efecto. Sean $U \subset X$ un conjunto abierto en X, $x \in U$ y $s \subset X$ una sucesión convergente a x, entonces

$$f|_{S(s,x)}^{-1}[U] = S(s,x) \cap U$$

que es precisamente un conjunto abierto en $S(s,x)$.

Veamos que f es una función cociente. Tómese $U \subset X$ tal que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en T. Sean $x \in U$ y $s = \{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión convergente a x en X, entonces $x \in f^{-1}(U)$ y $x_n \in f^{-1}(U)$ para cada $n \geq n_0$ para algún $n_o < \omega$, así

$$\forall n < \omega(n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U).$$

Esto implica que U es secuencialmente abierto en X y por tanto un conjunto abierto en ese mismo espacio. Es decir, f es una función cociente. †

Al espacio topológico T descrito en la prueba de la Teorema 2.20 se denotará por X^* y a la función $f : X^* \to X$, por ϕ_X.

Corolario 2.21. *Todo espacio secuencial es el cociente de un espacio métrico completo, localmente compacto y cero dimensional.*

Demostración. Sea X un espacio secuencial, por el Teorema 2.20, X es un cociente del espacio X^*. Note que para cada $x \in X^*$ que no sea un punto aislado, existe s una sucesión en X convergente a él de modo que $S(s,x)$ es una vecindad de x en X^*, además $S(s,x)$ es compacto, por lo tanto el espacio X^* es localmente compacto.

Sabemos que cada sumando del espacio X^* es métrico, así bastará definir $d : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ como sigue,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } S(s_z,z) \cap S(s_w,w) = \emptyset \\ d_{S(s_z,z)}(x,y) & \text{si } S(s_z,z) = S(s_w,w) \end{cases}$$

para todo $x, y \in X^*$ donde $z, w \in X$ y s_z es una sucesión convergente a z y s_w es una sucesión convergente a w. Observe que, dado que para cada $x \in X$ y cada $s \subset X$ sucesión convergente a x en X, $d_{S(s,x)}$ genera la topología de dicho espacio, y la colección de tales topologías forman una base para X^*, entonces la métrica d genera la topología del espacio X^*, entonces este último es un espacio métrico. Claramente X^* es completo; sean $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión de Cauchy. Sin perder generalidad suponga que $\{x_n\}_{n<\omega}$ es infinita. Entonces existen $y \in X$ y $s \subset X$ de modo que s es una sucesión convergente a y y $\{x_n\}_{n_0<n<\omega} \subset S(s,x)$ para algún $n_0 < \omega$, puesto que $S(s,y)$ es secuencial y numerablemente compacto entonces $\{x_n\}_{n<\omega}$ tiene una subsucesión convergente $\{y_n\}_{n<\omega}$ y $y_n \to y$, además como $\{x_n\}_{n<\omega}$ es de Cauchy entonces $x_n \to y$. Por lo tanto el espacio X^* es completo.

Por último, es claro que para todo punto aislado $x \in X^*$, el conjunto $\{x\}$ es también cerrado, además si U es una vecindad de x en $S(s,x)$ para alguna sucesión s convergente a x, los puntos pertenecientes a $S(s,x) \setminus U$ son aislados, por tanto U es cerrado. Esto implica que X^* es cero dimensional. †

Corolario 2.22. *Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(1) X es secuencial.

(2) X es un cociente de un espacio primero numerable.

(3) X es el cociente de un espacio métrico.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Note que para cada $x \in X$ y cada sucesión convergente a x en X el conjunto $B(x) = \{U \cap S(s,x) : x \in U \text{ y } U \text{ abierto en X}\}$ es una base local de vecindades para x en X^*. Además $B(x) \subset \{F \subset S(s,x) : F \text{ es cofinito}\}$ y el conjunto de los cofinitos en $S(s,x)$ es numerable ya que $S(s,x)$ es numerable. Por lo tanto X^* es un espacio primero numerable.

(2) $\Rightarrow$ (3): Por Lema 2.4 y la Teorema 2.8. X es un espacio secuencial, entonces el resultado se sigue del Corolario 2.21.

(3) $\Rightarrow$ (1): Como todo espacio métrico es primero numerable, todo primero numerable es secuencial y todo cociente de un espacio secuencial es secuencial, se tiene el resultado. †

Teorema 2.23. *Un subespacio Y de un espacio secuencial X es secuencial si y sólo si la restricción $\phi_X|_{\phi_X^{-1}(Y)}$ es una función cociente.*

Demostración. Sean $Y_1 = \phi_X^{-1}(Y)$ y $\phi_1 = \phi_X|_{Y_1}$. Denote por σY al espacio sobre el conjunto Y cuya topología es aquella inducida por X donde todo secuencialmente abierto es abierto, es decir que σY es un espacio secuencial. Sea $\phi_Y : Y^* \to Y$ la función que al sustituir Y por σY se vuelve una función cociente. Es evidente que Y^* es un subespacio de X^*. Además note que $Y^* \subset Y_1$.

Veremos que ϕ_1 es una función cociente si y sólo si ϕ_Y lo es, y con esto quedará demostrado el Teorema. Si ϕ_1 es cociente y $U \subset Y$ es tal que $\phi_1^{-1}[U]$ es abierto en Y_1, entonces $\phi_Y^{-1}[U] = \phi_1[U] \cap Y^*$ es abierto en Y^*, esto implica que ϕ_Y es cociente. Inversamente, se tiene que $\phi_Y^{-1}[U] = \phi_X^{-1}[U] = \bigcup\{\phi_X^{-1}[U \cap s] : s \text{ es una sucesión convergente en } X\}$ para $U \subset Y$. Así, si ϕ_Y es cociente y $U \subset Y$ es tal que $\phi_Y^{-1}[U]$ es abierto entonces $U \cap s$ es abierto en s para cada sucesión convergente s en X, es decir $\phi_1^{-1}[U] \subset Y_1$ es abierto en X^*. Con esto se tiene que ϕ_1 es una función cociente. †

Teorema 2.24. *Un espacio secuencial tiene límites secuenciales únicos si y sólo si cada subconjunto numerablemente compacto es cerrado (y por tanto secuencial).*

Demostración. Sea X un espacio secuencial. Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ tiene dos límites distintos, digamos, $x, y \in X$, entonces $\{x_n : n < \omega\} \cup \{x\}$ es un subconjunto de X compacto y no cerrado. Si ahora suponemos que X tiene límites secuenciales únicos, entonces X es T_1. Sea K un subespacio numerablemente compacto de X. Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en K y $x_n \to x$ para algún $x \in X$, entonces $\{x_n : n < \omega\} \cup \{x\}$ es secuencialmente cerrado en X y con ello también es cerrado. Así, x es el único punto de acumulación de la sucesión $\{x_n : n < \omega\}$. Si $\{x_n : n < \omega\}$ en infinito entonces $x \in K$, si el rango de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ es finito entonces $x \in \{x_n : n < \omega\} \subset K$. Por lo tanto K es cerrado. †

Corolario 2.25. [Aull] *Un espacio secuencial tiene límites secuenciales únicos si y sólo si cada subconjunto secuencialmente compacto es cerrado.*

Demostración. Todo subconjunto secuencialmente compacto de un espacio secuencial con límites únicos es numerablemente compacto. La necesidad es trivial. †

Un espacio topológico es localmente secuencial si para cada punto en el espacio existe una vecindad abierta que es secuencial.

Teorema 2.26. *Todo espacio localmente secuencial es secuencial.*

Demostración. Sean U secuencialmente abierto en un espacio topológico X, $x \in U$ y V una vecindad secuencial y abierta de x. Entonces $V' = U \cap V$ es abierto en V y con ello V' es abierto en X. Además $V' \subset U$ y $x \in V'$. Por lo tanto U es abierto en X. †

2.3. Espacios numerables con un solo punto no aislado

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Denotaremos por $\xi(\mathcal{F})$ al espacio topológico definido sobre el conjunto $\{\mathcal{F}\} \cup \omega$ donde ω es discreto y las vecindades de $\mathcal{F}$ son de la forma $U_F = \{\mathcal{F}\} \cup F$ con $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.27. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω y $A \subset \omega$. Entonces, $\mathcal{F} \in cl_{\xi(\mathcal{F})}(A)$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}^+$.*

Demostración. Si $\mathcal{F} \in cl_{\xi(\mathcal{F})}(A)$ entonces para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \cap F \neq \emptyset$ es decir, $A \in \mathcal{F}^+$. Inversamente, si para cualquier $F \in \mathcal{F}$ ocurre que $A \cap F \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{F} \in cl_{\xi(\mathcal{F})}(A)$. †

Teorema 2.28. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. El espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Hausdorff si y sólo si $\mathcal{F}$ es un filtro libre.*

Demostración. Necesidad. Suponga que el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Hausdorff, entonces para todo $n < \omega$ existe $F \in \mathcal{F}$ de modo que $n \notin F$, esto implica que para cada $n < \omega$ el conjunto $\omega \setminus \{n\}$ pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Es decir, $\mathcal{F}$ es libre.

Suficiencia. Si $\mathcal{F}$ es un filtro libre entonces el conjunto $F_n = \omega \setminus \{n\}$ pertenece a $\mathcal{F}$ para cada $n < \omega$, además F_n no contiene al punto aislado n, por lo tanto el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Hausdorff. †

Corolario 2.29. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro libre sobre ω entonces el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Tychonoff.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω, por el Teorema 2.28 el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es Hausdorff, esto implica que $\xi(\mathcal{F})$ es un espacio T_1. Por simplicidad consideraremos a ω como el conjunto de números naturales positivos. Sean K un subconjunto cerrado de $\xi(\mathcal{F})$ y $x \in \xi(\mathcal{F}) \setminus K$.

Primer caso, cuando $\mathcal{F} \in K$. Como $\mathcal{F} \in K$ entonces K pertenece a $\mathcal{F}^+$. Sea $f : \xi(\mathcal{F}) \to [0,1]$ la función definida como $f(y) = 0$ para $y \in Ky$ $f(y) = \frac{1}{y}$ para $y \notin K$ y $y \neq x$, y $f(x) = 1$. Veamos que f es una función continua. Es claro que si U es un subconjunto abierto de $[0,1]$ de modo que $0 \notin U$, entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en $\xi(\mathcal{F})$ ya que $f^{-1}[U]$ está contenido en ω y ω es discreto. Ahora si U es abierto en $[0,1]$ y contiene a 0 entonces, como la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n<\omega}$ converge a 0, podemos hallar $n_0 < \omega$ de modo que para todo $n_0 \leq n < \omega$ se cumple que $\frac{1}{n} \in U$. Esto implica que $f^{-1}[U]$ contenga un conjunto cofinito de ω, así la preimagen de U bajo la función f es abierto en $\xi(\mathcal{F})$. Con esto concluimos que f es una función continua.

Segundo caso, cuando $x = \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \notin K$ y K es cerrado en $\xi(\mathcal{F})$ entonces $K \notin \mathcal{F}^+$, así, existe $F \in \mathcal{F}$ de manera que $F \cap K = \emptyset$. Definamos $f : \xi(\mathcal{F}) \to [0,1]$ como sigue, $f(y) = 0$ si $y \in E$ y $f(y) = 1$ si $y \notin K$. Para finalizar veamos que la función f es continua. Sea V un conjunto abierto en $[0,1]$. Si $0 \in V$ entonces $f^{-1}[V] = E$, dado que E es un subconjunto de ω y ω es discreto en $\xi(\mathcal{F})$, entonces la preimagen de V bajo f es un conjunto abierto en $\xi(\mathcal{F})$. Ahora, si $1 \in V$ entonces $f^{-1}[V]$ contiene a $\{\mathcal{F}\} \cup F$, es decir que $f^{-1}[V]$ es abierto.

De los dos casos expuestos se concluye que el espacio $\xi(\mathcal{F})$, cuando $\mathcal{F}$ es un filtro libre sobre ω, es completamente regular. †

Teorema 2.30. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros libres sobre ω. Entonces las siguiente condiciones son equivalentes.*

(1) Los espacios $\xi(\mathcal{F})$ y $\xi(\mathcal{G})$ son homeomorfos ($\xi(\mathcal{F}) \cong \xi(\mathcal{G})$).

(2) Existe una biyección $f : \omega \to \omega$ tal que $f[\mathcal{F}] = \mathcal{G}$.

Demostración. Suponga que $\xi(\mathcal{F}) \cong \xi(\mathcal{G})$, entonces existe un homeomorfismo $h : \xi(\mathcal{F}) \to \xi(\mathcal{G})$ tal que $h(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$. Sea $f : \omega \to \omega$ la restricción de h a ω, es decir $f(n) = h(n)$ para cada $n < \omega$. Veamos que $f[\mathcal{F}] = \mathcal{G}$. Considere $A \in f[\mathcal{F}]$ entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, dado que h es una función abierta entonces $h(U_{f^{-1}(A)}) = U_A$ y $h(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(A)) = A$, esto implica que $A \in \mathcal{G}$.

Ahora si existe una biyección $f : \omega \to \omega$ tal que $f[\mathcal{F}] = \mathcal{G}$ y definimos $h : \xi(\mathcal{F}) \to \xi(\mathcal{G})$ como $h(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ y para cada $n < \omega$, $h(n) = f(n)$. Es claro que la función h es sobreyectiva, continua y abierta. Por lo tanto h es un homeomorfismo. †

Definición 2.31. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros libres sobre ω. Si existe una biyección $f : \omega \to \omega$ de modo que $f[\mathcal{F}] = \mathcal{G}$ se dirá entonces que los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes y se denotará por $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$.*

Definición 2.32. *Un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre ω es un filtro secuencial si el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es un espacio secuencial.*

A pesar de que la propiedad de que un espacio sea de Fréchet-Urysohn se define en el Capítulo 3 (ver Definición 3.1) el resultado siguiente se sigue inmediatamente de la definición anterior, no es difícil de demostrar ni de comprender.

Teorema 2.33. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Entonces, $\xi(\mathcal{F})$ es secuencial si y sólo si $\xi(\mathcal{F})$ es un espacio de Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Es sabido que todo espacio Fréchet-Urysohn es secuencial (vea Teorema 3.3). Suponga ahora que $\xi(\mathcal{F})$ es secuencial, entonces para todo $A \in \mathcal{F}^+$ existe una sucesión $B \subset A$ que converge a $\mathcal{F}$, es decir que $\xi(\mathcal{F})$ es de Fréchet-Urysohn. †

2.4. El grado de secuencialidad

En esta sección presentaremos la definición del grado de secuencialidad de un espacio secuencial X, puesto que en el Capítulo 5 revisaremos algunos resultados relacionados con el grado de subsecuencialidad de un espacio topológico subsecuencial, estos conceptos se definirán en ese mismo capítulo.

Sean X un espacio y $A \subset X$. Hacemos $A^0 = A$ y para cada número ordinal θ definimos $A^\theta = \{x \in X : \exists \{x_n\}_{n<\omega} \subset A^\mu (x_n \to x)\}$ si $\theta = \mu + 1$, y $A^\theta = \bigcup_{\mu<\theta} A^\mu$ si θ es un ordinal límite.

Teorema 2.34. *Un espacio X es secuencial si y sólo si para cada $A \subset X$ existe $\theta \leq \omega_1$ tal que $cl_X(A) = A^\theta$.*

Demostración. Necesidad. Sea $A \subset X$, veamos que $cl_X(A) = \bigcup_{\theta<\omega_1} A^\theta$. Es evidente que $A^0 \subset cl_X(A)$, ya que $A^0 = A$. Suponga que para todo $\nu < \theta$ con $\theta < \omega_1$ fijo, se tiene que $A^\nu \subset cl_X(A)$. Si $\theta = \nu+1$ es trivial que $A^\theta \subset cl_X(A)$. Ahora si θ es límite, también resulta claro que $A^\theta \subset cl_X(A)$. Probemos ahora, la otra contención. Suponga que existe $x \in cl_X\big(\bigcup_{\theta<\omega_1} A^\theta\big) \setminus \bigcup_{\theta<\omega_1} A^\theta$. Dado que X es secuencial, entonces es posible hallar una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en $\bigcup_{\theta<\omega_1} A^\theta$ de modo que $x_n \to x$. Luego, para cada $n < \omega$, existe $\theta_n < \omega_1$ con la propiedad de que $x_n \in A^{\theta_n}$. Sea $\theta = sup\{\theta_n : n < \omega\}$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ está contenida en A^θ, esto implica que $x \in A^{\theta+1}$, esto contradice nuestra suposición. Por lo tanto se tiene la igualdad deseada.

Suficiencia. Bastará ver que si A no es cerrado entonces existe una sucesión contenida en A que converge a algún punto en $X \setminus A$. Procederemos por inducción transfinita. Sea $A \subset X$ no cerrado, entonces si para $\theta = 1$ se tiene $A^1 \setminus A$ es no vacío, por definición de A^1 existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en A que converge a algún $x \in A^1 \setminus A$. Si $\theta < \omega_1$ suponga entonces que el resultado es válido para todo $\nu < \theta$. Sin perder generalidad suponga que $\theta = \mu + 1$ es un ordinal sucesor. Así, si $x \in A^\theta \setminus A$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en A^μ que converge a x. Así, si existe $n_0 < \omega$ de modo que $x_{n_0} \notin A$ se tiene el resultado por hipótesis inductiva. De lo contrario, si para cada $n < \omega$ el punto x_n pertenece a A, ya terminamos. Por lo tanto X es secuencial. †

Al mínimo ordinal θ con esta propiedad se llama el grado de secuencialidad del espacio secuencial X y será denotado por $\sigma(X)$. Observe que para cada espacio secuencial X se tiene que $\sigma(X) \leq \omega_1$. Para un espacio secuencial X y $x \in X$ se define:

$$\sigma(x, X) = min\{\theta \leq \omega_1 : \forall A \in \mathcal{P}(X)(x \in cl_X(A) \Rightarrow x \in A^\theta)\}.$$

Es claro que $\sigma(X) = sup\{\sigma(x, X) : x \in X\}$ (vea [9]).

A continuación veremos que existen espacios secuenciales de grado arbitrariamente grande. Consideremos el conjunto $S_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ como espacio métrico.

Definición 2.35. [Arhangel'skii-Franklin] *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios T_1 y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in X_n$ un punto cualquiera. Se define* *la suma secuencial de la familia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con la sucesión* S_1 *como el espacio de adición*

$$\big(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\big) \oplus_{Seq} S_1,$$

donde el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es cerrado en la suma topológica ajena* $\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *y* $Seq : A \to S_1$ *a cada* $x_n \in A$ *le asigna* $\frac{1}{n} \in S_1$.

Definición 2.36. *La suma secuencial de un espacio* X *con un punto distinguido* $x \in X$ *con* S_1 *es la suma secuencial de una familia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de copias del espacio* X *con* S_1 *y se denotará por* $X \oplus_{Seq} S_1$.

Procederemos ahora con nuestra construcción de espacios secuenciales con grado arbitrariamente grande.

Sea $S_0 = \{0\}$ el espacio del singular del cero. Es evidente que $\sigma(S_0) = 0$. Considere S_1 la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ con su topología usual. Observe que $S_1 = S_0 \oplus_{Seq} S_1$ y que $\sigma(S_1) = 1$. Para el caso $n = 2$, sea $S_2 = S_1 \oplus_{Seq} S_1$, el espacio S_2 cumple tener grado de secuencialidad igual a 2. En general, si $\alpha < \omega_1$ es un ordinal sucesor y $\alpha = \beta + 1$ entonces, $S_\alpha = S_\beta \oplus_{Seq} S_1$, además $\sigma(S_\alpha) = \alpha$. Si α es un ordinal límite menor que ω_1 entonces $S_\alpha = \big(\oplus_{\beta<\alpha} S_\beta\big) \oplus_{Seq} S_1$. Es claro que $\sigma(S_\alpha) = \alpha$.

Capítulo 3

Espacios Fréchet-Urysohn

3.1. Introducción

La clase de los espacios Fréchet-Urysohn está contenida en la clase de los espacios secuenciales como se demuestra en el Teorema 3.3, no sólo eso, sino que la contención es estricta, como se muestra en el Ejemplo 4.4. A diferencia de los espacio secuenciales, en el Teorema 3.5 se prueba que la propiedad de ser Fréchet-Urysohn es hereditaria. Además, como todo espacio Fréchet-Urysohn es secuencial, todos los resultados referentes a los espacios secuenciales son válidos para los espacios Fréchet-Urysohn.

3.2. Los Espacios Fréchet-Urysohn

Definición 3.1. *Un espacio topológico X es un espacio Fréchet-Urysohn si y sólo si satisface*

$$x \in cl_X(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \to x$$

Lema 3.2. *Todo espacio primero numerable es un espacio Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sean A un subconjunto de un espacio primero numerable X y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Sin perder generalidad considere $\{B_n\}_{n<\omega}$ una base local para $x \in X$ de modo que para cada $n < \omega$, $B_{n+1} \subset B_n$. Dado que $x \in cl_X(A)$, para cada $n < \omega$ sea x_n un punto perteneciente a $A \cap B_n$, note que x_n es distinto de x. Es claro que $\{x_n : n < \omega\} \subset A$, además para cada $n < \omega$ se tiene que para todo $m < \omega$ con $m \geq n$, $x_m \in B_n$, así $x_n \to x$. Por lo tanto X es de Fréchet-Urysohn. †

Teorema 3.3. *Todo espacio de Fréchet-Urysohn es secuencial.*

Demostración. Sea X un espacio de Fréchet-Urysohn y $A \subset X$ un conjunto no cerrado, entonces existe $x \in cl_X(A)\backslash A$, dado que X es de Fréchet-Urysohn, existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en A que converge a x. Por lo tanto X es secuencial. †

El Lema 3.2 proporciona varios ejemplos de espacios Fréchet-Urysohn. Algunos de ellos son los espacios métricos, ya que son primero numerables. Trivialmente si X es un espacio topológico con $|X| < \aleph_0$ entonces X es un espacio Fréchet-Urysohn. Mas cabe notar que no todo espacio topológico es un espacio Fréchet-Urysohn. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 3.4. *Sea X un conjunto con $|X| > \aleph_0$ y considere τ la topología conumerable sobre el conjunto X, es decir para $A \subset X$, $A \in \tau$ si y sólo si $|X \setminus A| \leq \aleph_0$. (X, τ) no es un espacio Fréchet-Urysohn.*

En efecto. Sea $x \in X$, note que $x \in cl_X(A)$, donde $A = X \setminus \{x\}$, sin embargo para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subset A$ se tiene $X \setminus \{x_n : n < \omega\}$ es una vecindad de x en X y por tanto $\{x_n\}_{n<\omega}$ no converge a x.

Teorema 3.5. *Todo subespacio de un espacio Fréchet-Urysohn es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sean X un espacio Fréchet-Urysohn, Y un subespacio de X y $A \subset Y$. Tome $x \in cl_Y(A)$ entonces $x \in Y \cap cl_X(A)$, dado que X es un espacio de Fréchet-Urysohn se puede hallar una sucesión contenida en A, digamos $\{x_n\}_{n<\omega}$, convergente a x en X. Así para cada U abierto en X con $x \in U$ existe $n_0 < \omega$ de modo que

$$\forall n < \omega (n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \cap Y).$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a x en Y. Es decir, Y es un espacio de Fréchet Urysohn. †

Teorema 3.6. *La suma topológica de una familia de espacios Fréchet-Urysohn ajenos es un espacio Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios Fréchet-Urysohn ajenos y consideremos X la suma topológica de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Tome $A \subset X$ y $x \in cl_X(A)$. Existe $\alpha \in I$ de modo que $x \in X_\alpha$, entonces

$$x \in X_\alpha \cap cl_X(A) = cl_{X_\alpha}(A \cap X_\alpha)$$

dado que el espacio X_α es Fréchet-Urysohn es posible hallar una sucesión contenida en $A \cap X_\alpha$ convergente a x en X_α, digamos $\{x_n\}_{n<\omega}$. Veamos que $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a x en X. Sea $U \in \tau_X$ con $x \in U$ entonces $U \cap X_\alpha$ es un abierto en X_α que contiene al punto x, además existe $m < \omega$ de manera que

$$\forall n < \omega : m \leq n \Rightarrow x_n \in U \cap X_\alpha$$

esto implica que

$$\forall n < \omega : m \leq n \Rightarrow x_n \in U$$

es decir que la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a x en X. Por lo tanto X es un espacio Fréchet-Urysohn. †

Rpcordemos que para un espacio topológico X, una compactación de X es un espacio topológico compacto Y de modo que X es denso en Y.

Teorema 3.7. *La compactación a un punto de cualquier espacio discreto es un espacio Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sean X un espacio discreto y Y la compactación a un punto $p \notin X$ de X. Observe que

(1) Todo subconjunto de X es abierto y cerrado en X.

(2) $K \subset X$ es compacto si y sólo si K es finito.

Así que $\eta_Y(p) = \{U \subset Y : p \in U \text{ y } |X \setminus U| < \aleph_0\}$, entonces para cada vecindad abierta U de p en Y su complemento respecto a Y es finito. Por la observación (1), bastará ver que si $A \subset X$ es infinito entonces existe una sucesión en A que converge a p, mas note que existe $B \subset A$ que es numerable. Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una indicación biyectiva de B entonces por (2), $x_n \to p$ en Y. Por lo tanto Y es un espacio de Fréchet-Urysohn. †

Una función continua y sobreyectiva $f : X \to Y$ es pseudo abierta si y sólo si para cada $y \in Y$ y cada vecindad U de $f^{-1}(y)$, ocurre que $y \in int(f[U])$. Es claro que cualquier función continua abierta (o cerrada) es pseudo abierta. Además toda función pseudo abierta es una función cociente.

Teorema 3.8. *Si X y Y son Hausdorff, X es de Fréchet-Urysohn y $f : X \to Y$ una función cociente, entonces Y es de Fréchet-Urysohn si y sólo si f es pseudo abierta.*

Demostración. Suponga que Y es de Fréchet-Urysohn, sean $y \in Y$ y U una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$. Si $y \notin int(f[U])$, entonces $y \in cl_Y(Y \setminus f[U])$. Dado que Y es de Fréchet-Urysohn es posible hallar una sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ en $Y \setminus f[U]$ de modo que $y_n \to y$. Puesto que Y es Hausdorff entonces $cl_Y(\{y_n : n < \omega\}) = \{y_n : n < \omega\} \cup \{y\}$. Llame F a la preimagen de $\{y_n : n < \omega\}$, entonces $f^{-1}(y) \cap cl_X(F) = \emptyset$ ya que $f^{-1}(y) \subset U$. Esto implica que F es cerrado, es decir $X \setminus F$ es abierto y $X \setminus F = f^{-1}(Y \setminus \{y_n : n < \omega\})$. Así $Y \setminus \{y - n : n < \omega\}$ es abierto en Y, mas esto contradice que $y_n \to y$. Es decir $y \in int(f[U])$, y con ello se tiene que f es pseudoabierta.

Inversamente, suponga que f es una función pseudoabierta y considere $y \in cl_Y(M)$ con $M \subset Y$. Observe que no puede ocurrir que la intersección $f^{-1}(y) \cap cl_X(f^{-1}[M])$ sea vacía, de serlo, el conjunto $U = X \setminus cl_X(f^{-1}[M])$ sería una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$ de modo que $y \in int(f[U]) \subset Y \setminus M)$, esto contradiría que $y \in cl_Y(M)$. Entonces podemos encontrar un punto $x_\omega \in f^{-1}(y) \cap cl_X(f^{-1}[M])$. Elija una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en $f^{-1}(M)$ de manera que $x_n \to x_\omega$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n<\omega}$ es una sucesión contenida en M convergente a $y \in Y$. Por lo tanto Y es un espacio Fréchet-Urysohn. †

Un resultado inmediato del Teorema anterior es el siguiente.

Teorema 3.9. *En la clase de los espacios Hausdorff, un espacio es Fréchet-Urysohn si y sólo si es la imagen pseudo abierta de una suma topológica de sucesiones convergentes.*

El siguiente teorema describe una relación que hay entre las propiedades de Fréchet-Urysohn y secuencial.

Teorema 3.10. *Un espacio topológico es de Fréchet-Urysohn si y sólo si es hereditariamente secuencial.*

Demostración. Se sabe que la propiedad de ser Fréchet-Urysohn es hereditaria, entonces todo subespacio de un espacio Fréchet-Urysohn es Fréchet-Urysohn y con ello secuencial. Suponga ahora que X es un espacio hereditariamente secuencial. Entonces ϕ_X es una función hereditariamente secuencial, es decir, para todo $A \subset X$ la función $\phi_X|_{A^*}$ es cociente. Esto implica que ϕ_X es una función pseudo abierta. Por lo tanto X es de Fréchet-Urysohn. †

Capítulo 4

Contraejemplos

Ejemplo 4.1. *Existe un espacio numerable, compacto, Fréchet-Urysohn y con límites secuenciales únicos que no es Hausdorff.*

Considere $X = (\omega \times \omega) \cup \{p, q\}$ el espacio donde p y q son distintos y no pertenecen a $\omega \times \omega$, $\omega \times \omega$ es discreto, las vecindades de p son de la forma $U_E = \{p\} \cup E$ donde $E \in \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}$ el filtro generado por la familia

$$\mathcal{P} = \Big\{ \bigcup_{n \leq k} (\{n\} \times \omega) : k < \omega \Big\}$$

y las vecindades de q son de la forma $U_F = \{q\} \cup F$ donde $F \in \mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ el filtro generado por la familia

$$\mathcal{G} = \Big\{ \bigcup_{n < \omega} \{(n, k) : s_n < k, s_n \in s\} : s \in S \Big\}$$

Donde $S = \{s \subset \omega : s \text{ es una sucesión}\}$. En lo que sigue, para cada $s \in S$, $B_s = \bigcup_{n<\omega} \{(n, k) : s_n < k, s_n \in s\}$.

Es claro que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{G}$ definen bases de vecindades para p y q en X respectivamente, además, para cualesquiera $E \in \mathcal{F}$ y $F \in \mathcal{G}$ se tiene que $E \cap F \neq \emptyset$. Por lo tanto X no es Hausdorff.

Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X. Para p y q podemos hallar $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $V \in \eta(q)$, $E \in \mathcal{F}$ y $F \in \mathcal{G}$ tales que $p \in U_E \subset C_1$ y $q \in U_F \subset C_2$. Por la forma en que se definieron las vecindades básicas de p y q ocurre lo siguiente

(1) Existe $k < \omega$ de modo que para cualquier $n < k$, $(\{n\} \times \mathbb{N}) \cap E = \emptyset$.

(2) Existe $r < \omega$ tal que para cada $n < k$, $(\omega \times \{n\}) \cap F = \emptyset$

Entonces $D = X \setminus (E \cup F)$ es finito y es claro que $X \setminus (C_1 \cup C_2) \subset D$, por tanto $X \setminus (C_1 \cup C_2)$ es finito. Tome $C_x \in \mathcal{C}$ con $x \in C_x$ para cada $x \in X \setminus (C_1 \cup C_2)$. Por tanto la colección de abiertos $\mathcal{C}' = \{C_1, C_2\} \cup \{C_x : x \in \setminus (C_1 \cup C_2)\}$ está contenida en $\mathcal{C}$, cubre a X y es finita. Con lo que queda demostrada la compacidad del espacio X.

Dado que q no pertenece a las vecindades básicas de p, y p no pertenece a las vecindades básicas de q, sin perder generalidad suponga que las sucesiones convergentes a p o q están contenidas en $\omega \times \omega$.

Afirmación 1. Una sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega} \subset \omega \times \omega$ converge a p si y sólo si para cada $r < \omega$ el conjunto $(\{r\} \times \omega) \cap \{(n_k, m_k) : k < \omega\}$ es finito.

En efecto, si la sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ no converge a p entonces existe $r < \omega$ de manera que

$$\{(n_k, m_k) : k < \omega\} \setminus \bigcup_{n>r} \{r\} \times \omega$$

es infinito entonces para algún $1 \leq s \leq r$, $(\{s\} \times \omega) \cap \{(n_k, m_k) : k < \omega\}$ es infinito. Si la sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ converge a p entonces para cada $r \in \omega$,

$$\{(n_k, m_k) : k < \omega\} \setminus \bigcup_{n>r} \{r\} \times \omega$$

es finito, por tanto $(\{r\} \times \omega) \cap \{(n_k, m_k) : k < \omega\}$ es finito.

Afirmación 2. Una sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ converge a q si y sólo si existe $r_0 < \omega$ de modo que

$$\left| \{(n_k, m_k) : k < \omega\} \cap \left(\bigcup_{k>r_0} \{k\} \times \omega \right) \right| < \omega$$

Sea $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ una sucesión no convergente a q entonces existe una sucesión en ω, digamos s, de modo que

$$\{(n_k, m_k) : k < \omega\} \setminus B_s$$

es infinito, de acuerdo a la definición de los conjuntos B_s se tiene que $\{r < \omega : |(\{r\} \times \omega) \cap s| \neq 0\}$ es infinito. Ahora, si existe $r_0 < \omega$ de modo que

$$\left| \{(n_k, m_k) : k < \omega\} \cap \left(\bigcup_{k>r_0} \{k\} \times \omega \right) \right| < \omega$$

entonces, por como se definen las vecindades de q, contienen un conjunto de la forma B_s, por tanto, para vecindad V de q $\{(n_k, m_k) : k < \omega\} \setminus V$ es finito. Por lo tanto $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ converge a q.

De las caracterizaciones de las sucesiones convergentes a p y a q se concluye que no existen sucesiones convergentes a p y q simultáneamente. Por tanto X es un espacio cuyas sucesiones convergentes tienen límites únicos y claramente X es numerable.

Ejemplo 4.2. *Existe un espacio numerable, secuencial y normal con un subespacio que no es secuencial.*

Consideremos $\{A_n\}_{n<\omega}$ una partición de ω en conjuntos infinitos, para cada $n < \omega$ sea $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}r(A_n)$ el filtro de Fréchet sobre A_n. Definimos el filtro $\mathcal{A}$ sobre ω de la siguiente forma:

$$\mathcal{A} = \big\{F \subset \omega : \{n < \omega : F \cap A_n \in \mathcal{F}_n\} \in \mathcal{F}r\big\}.$$

El filtro $\mathcal{A}$ es conocido en la literatura como el filtro de Arens. Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω y $\xi(\mathcal{F})$ el espacio topológico tendido sobre el conjunto $\omega \cup \{\mathcal{F}\}$ donde ω es discreto y las vecindades de $\mathcal{F}$ donde la forma $\{\mathcal{F}\} \cup F$ donde F es un elemento de $\mathcal{F}$. Dada la definición del espacio $\xi(\mathcal{F})$ para cualquier filtro sobre ω, es claro que para cada $n < \omega$ cualquier conjunto infinito de A_n es una sucesión convergente a $\mathcal{F}_n$ en el espacio $\xi(\mathcal{F}_n)$. Además, es fácil ver que no existen sucesiones en ω que converjan a $\mathcal{A}$ en el espacio $\xi(\mathcal{A})$. En efecto, sin perder generalidad tome $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en ω de modo que para $k < m < \omega$ se tiene que $x_n \neq x_m$. Entonces es posible hallar $n_0 < \omega$ tal que el conjunto $A_{n_0} \cap \{x_n : n < \omega\}$ es infinito, o bien para cada $n < \omega$, la intersección $A_n \cap \{a_n : n < \omega\}$ es finito. Si existe $n_0 < \omega$ tal que el conjunto $A_{n_0} \cap \{x_n : n < \omega\}$ es infinito, entonces $F = \bigcup_{n_0<n<\omega} A_n$ es un elemento de $\mathcal{A}$ y $\{x_n : n < \omega\} \setminus F$ es infinito. De otra forma, si para cada $n < \omega$, la intersección $A_n \cap \{a_n : n < \omega\}$ es finito, bastará tomar $F = \bigcup_{n<\omega} F_n$, donde para cada $n < \omega$, $F_n = A_n \setminus \{x_n : n < \omega\}$, así, $F \in \mathcal{A}$ y $F \cap \{x_n : n < \omega\}$ es vacío. Esto demuestra que no existen sucesiones en ω convergentes a $\mathcal{A}$ en el espacio $\xi(\mathcal{A})$ y con ello se tiene que $\xi(\mathcal{A})$ no es secuencial.

Sea X el espacio definido sobre el conjunto $\omega \cup \{\mathcal{A}\} \cup \{\mathcal{F}_n : n < \omega\}$, donde ω es discreto, las vecindades básicas de $\mathcal{F}_n$ son aquellos conjuntos que son vecindades abiertas de $\mathcal{F}_n$ en $\xi(\mathcal{F})$, es decir, los conjuntos de la forma $\{\mathcal{F}_n\} \cup F_n$ con $F_n \in \mathcal{F}_n$. Por último, las vecindades básicas de $\mathcal{A}$ en X son aquellos conjuntos $B \subset X$ tales que $\{n < \omega : \mathcal{F}_n \text{ es punto interior de } B\} \in \mathcal{F}r$.

Es claro que X es numerable. Primero probemos que X es secuencial. Sea $U \subset X$ un conjunto secuencialmente abierto en X con $U \setminus \omega \neq \emptyset$. Si para algún $n_0 < \omega$ el punto $\mathcal{F}_{n_0}$ pertenece a U entonces el conjunto A_{n_0} está casi contenido en U, es decir $F_{n_0} = A_{n_0} \setminus U$ es finito, esto implica que $\{\mathcal{F}_{n_0}\} \cup F_{n_0} \subset U$. Note que $\{\mathcal{F}_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión convergente a $\mathcal{A}$ en X así, si $\mathcal{A}$ pertenece a U entonces el conjunto $\{n < \omega : \mathcal{F}_n \in U\}$ es cofinito en ω, y como acabamos de demostrar, para cada $n < \omega$ de modo que $\mathcal{F}_n \in U$, el filtro $\mathcal{F}_n$ es un punto interior de U, esto implica que $\mathcal{A}$ es un punto interior de U.

Ahora veamos que X es normal. Sean $F \subset X$ un conjunto cerrado y U un abierto en X con $F \subset U$. Sin pérdida de generalidad suponga que $\mathcal{A} \in F$, entonces sea V una vecindad básica de $\mathcal{A}$ en X contenida en U y para cada $n \in B$, donde B es el conjunto de los naturales $m < \omega$ de modo que $\mathcal{F}_m \in F \setminus V$, considere V_n un abierto básico de $\mathcal{F}_n$ en X contenido en U, entonces el conjunto

$$G = \big(\bigcup_{n\in B} V_n\big) \cup \big(\bigcup_{k\in F\cap\omega} \{k\}\big) \cup V$$

es un abierto y cerrado en X contenido en U. Con esto hemos demostrado que X es normal.

Además es evidente que $\xi(\mathcal{A})$ es un subespacio de X y como hemos visto, éste no es secuencial.

Ejemplo 4.3. *Existe un espacio numerable, compacto y secuencial con límites secuenciales únicos que no es Hausdorff.*

Sea $M_1 = M \cup \{p\}$ el espacio donde M es el espacio descrito en el Ejemplo 4.2, $p \notin M$, todo abierto en M es abierto en M_1 y p tiene por base de vecindades la colección $\mathcal{B}(p)$ de los conjuntos de la forma $B_F(p) = \{p\} \cup \big((\omega \times \omega) \setminus F\big)$ donde $F = \bigcup\{s : s \in A\}$ con A un conjunto cuyos elementos son los rangos de una cantidad finita de sucesiones convergentes en M contenidas en $\omega \times \omega$. Es claro que el conjunto M_1 es numerable. Note que una sucesión $s \subset \omega\times$ es convergente en M si y sólo si s es casi constante o existe $n < \omega$ de modo que s está casi contenida en $\omega \times \{n\}$, es decir, hay a lo más una cantidad finita de elementos de s que no pertenecen a $\omega \times \{n\}$, si ocurre esto último entonces la sucesión s converge a n, lo cual implica que para cada $B \in \mathcal{B}(p)$ el conjunto $\{m < \omega : (\omega \times B) \neq \emptyset\}$ es infinito, y por tanto cualesquiera dos vecindades U y V de $\mathcal{A}$ y p en M_1 tienen intersección no vacía; con esto hemos probado que M_1 no es un espacio Hausdorff.

Recordemos que ninguna sucesión en $\omega \times \omega$ converge a $\mathcal{A}$. Observe que una sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ es convergente a p si y sólo si para todo $m < \omega$, excepto una cantidad finita de naturales, el conjunto $\{k < \omega : m_k = m\}$ es finito.

En efecto. Dado que para cada $m < \omega$, $B_{E_m}(p)$ es una vecindad básica de p, donde $E_m = B_1(m)$, se tiene que

$$\forall m < \omega\big(\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega} \setminus B_{E_m}(p) \text{ es finito }\big)$$

lo que implica que para cada $m < \omega$ el conjunto $\{k < \omega : m_k = m\}$ es finito. Inversamente, si la sucesión $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ no converge a p entonces existe un conjunto F que es la unión de rangos de una cantidad finita de sucesiones convergentes en M contenidas en $\omega \times \omega$ tal que $\{(n_k, m_k)\}_{k<\omega} \setminus B_F(p)$ es infinito, es decir, $F \cap \{(n_k, m_k)\}_{k<\omega}$ es infinito, por tanto existe una sucesión $\{x_t\}_{t<\omega}$ contenida en F de manera que $\big\{k < \omega : (n_k, m_k) \in \{x_t : t < \omega\}\big\}$ es infinito. Suponga que la sucesión $\{x_t\}_{t<\omega}$ es casi constante entonces existen $(n, m) < \omega \times \omega$ y $t_0 < \omega$ tales que para cualquier $t < \omega$ con $t \geq t_0$, $x_t = (n, m)$ entonces $\{k < \omega : (n_k, m_k) = (n, m)\}$ es infinito, lo que implica que el conjunto $\{k < \omega : m_k = m\}$ es infinito, ahora bien, si la sucesión $\{x_t\}_{t<\omega}$ converge a $n < \omega$ entonces existe $t_1 < \omega$ de modo que para cualquier $t < \omega$ con $t \geq t_1$, $x_t = (n_t, n)$, esto implica que $\{k < \omega : m_k = n\}$ es infinito. De aquí que ninguna sucesión convergente a p en M_1 puede converger a algún $x \in M$. Esto demuestra que M_1 es un espacio con límites secuenciales únicos.

Sea $U \subset M_1$ un conjunto secuencialmente abierto en M_1. Entonces $U \cap M$ es secuencialmente abierto en M y por tanto todos sus puntos son interiores. Dado que cualquier sucesión convergente a p cumple que para cada $m < \omega$, $\{k < \omega : m_k = m\}$ es finito, entonces $(\omega \times \{m\}) \setminus U$ es no vacío para una cantidad finita de $m < \omega$, de lo contrario ocurriría que el conjunto $A = \{m < \omega : (\omega \times \{m\}) \setminus U \neq \emptyset\}$ es infinito, así si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una enumeración de $\bigcup\{A_m : m \in A\}$ donde para cada $m \in A$, A_m es un subconjunto no vacío de $(\omega \times \{m\}) \setminus U$, entonces $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a p y $\{x_n\}_{n<\omega} \cap U = \emptyset$, lo cual no es posible. Por tanto U es una vecindad básica de p, es decir, p es un punto interior de U. Con lo que se concluye que M_1 es un espacio secuencial.

Finalmente veamos que M_1 es compacto. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de M_1, entonces existen B vecindad básica de p y $C \in \mathcal{C}$ tales que $p \in B \subset C$, entonces existe a lo más una cantidad finita de sucesiones convergentes no contenidas en C_0, digamos, $s_0, \ldots, s_{n-1}$ con $n < \omega$, por ser sucesiones convergente son compactas, entonces para cada $i < n$ existe una subcolección finita $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$ que cubre a s_i, por tanto $\mathcal{D} = \bigcup_{i<n} \mathcal{C}_i$ con $\mathcal{C}_0 = \{C_0\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$ para M_1.

Ejemplo 4.4. *Existe un espacio secuencial, compacto y Hausdorff que no es Fréchet.*

El ejemplo que se presentará es la compactación a un punto del espacio Ψ de Isbell-Mrówka. Sea $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ una familia MAD y considere $\Psi = \mathcal{A} \cup \omega$ donde cada $n < \omega$ será un punto aislado y cada $A \in \mathcal{A}$ tendrá por base de vecindades al conjunto conformado por aquellos subconjuntos de Ψ que tienen a A como elemento y contienen a A excepto a lo más una cantidad finita de puntos, es decir

$$\mathcal{B}(A) = \{B \subset \Psi : A \in B \text{ y } |A \setminus B| < \aleph_0\}.$$

Sea $\Psi^* = \Psi \cup \{\Psi\}$ la compactación a un punto de Ψ.

Observe que para cada $A \in \mathcal{A}$ el conjunto $A \cup \{A\}$ es una vecindad compacta de A en Ψ. En efecto, sea $\mathcal{C}$ una cubierta de $A \cup \{A\}$ por abiertos de Ψ, entonces es posible hallar $C \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{B}(A)$ tales que $A \in B \subset C$, así $A \setminus C$ es finito por estar contenido en $A \setminus B$. Esto dice que el espacio Ψ es localmente compacto. Y dado que los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos ajenos de ω, si $A, B \in \mathcal{A}$ son distintos entonces $(A \cup \{A\}) \cap (B \cup \{B\})$ es vacío, por tanto Ψ es un espacio Hausdorff, lo que implica que Ψ^* sea un espacio Hausdorff.

Dado que ω es discreto, todo elemento de ω es un punto interior de cualquier conjunto que lo contenga, particularmente de los conjuntos secuencialmente abiertos. Veamos cómo son las sucesiones convergentes a algún elemento de la familia $\mathcal{A}$ y aquellas que convergen a Ψ en Ψ^*.

Una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subset \Psi^*$ converge a $A \in \mathcal{A}$ cuando y sólo cuando $|\{x_n : n < \omega\} \setminus A| < \aleph_0$ y para cada $k < 0 < \omega$, $\{n < \omega : x_n = k\}$ es finito. Suponga que $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a $A \in \mathcal{A}$. Dado que para cualquier $D \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$, $D \notin A \cup \{A\}$ entonces $\{x_n : n < \omega\} \cap \mathcal{A}$ es finito. Supongamos sin perder generalidad que $\{x_n : n < \omega\} \subset \omega$, entonces $\{x_n : n < \omega\} \setminus (F \cup \{A\})$ es finito para cada $F \subset A$ con $|A \setminus F| < \omega$, por tanto para cada $k < \omega$, $\{n < \omega : x_n = k\}$ es finito. En otro caso, si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es tal que $|\{x_n\}_{n<\omega} \setminus A| < \aleph_0$ y para cada $k < 0 < \omega$, $\{n < \omega : x_n = k\}$ es finito, entonces para cada $F \subset A$ cofinito en A se tiene que para cada $k \in A \setminus F$, $\{n < \omega : x_n = k\}$ es finito, así, podemos hallar $n_0 < \omega$ de manera que para cualquier $n_0 \leq n < \omega$, $x_n \in F \cup \{A\}$, por tanto la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge a A en Ψ^*. Por tanto si

$\{x_n\}_{n<\omega}$ es una enumeración de A y U es un conjunto secuencialmente abierto en Ψ^* con $A \in U$entonces la sucesión está contenida en U salvo una cantidad finita de puntos por ser convergente a A, es decir si $F = U \cap \{x_n : n < \omega\}$ entonces $A \setminus F$ es finito y por tanto $F \cup \{A\} \subset U$ y es una vecindad de A, lo cual implica que A es un punto interior de U.

Recordemos que el complemento respecto de Ψ de las vecindades de Ψ en Ψ^* son compactos. $K \subset \Psi$ es compacto si y sólo existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y $B \subset \omega$ tales que $K = B \cup \{A_i : i < n+1\}$ y $B \setminus \left(\bigcup_{i<n+1} A_i\right)$ es finito. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta por abiertos de Ψ de K que es de la forma descrita, entonces existen $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $A_i \in C_i$ para cada $i < n+1$. Dado que

$$B \setminus \Big(\bigcup_{i<n+1} C_i \Big) \subset B \setminus \Big(\bigcup_{i<n+1} A_i \Big)$$

entonces resta cubrir una cantidad finita de puntos de K, por tanto K es compacto. Si K contiene una infinidad de elementos de $\mathcal{A}$ o si $K \setminus \left(\bigcup_{A\in K\cap\mathcal{A}} A\right)$ es infinito bastará tomar

$$\mathcal{C} = \Big\{ A \cup \{A\} : A \in K \cap \mathcal{A} \Big\} \cup \Big\{ \{n\} : n \in K \setminus \Big(\bigcup_{A\in K\cap\mathcal{A}} A \Big) \Big\}.$$

Dada $\mathcal{D}$ cualquier subcolección finita de $\mathcal{C}$, su unión no contendrá a K por tener éste una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{A}$ o porque hay una cantidad infinita de puntos aislados fuera de

$$\bigcup_{A\in\ K\cap\mathcal{A}} A.$$

Por tanto cualquier sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en $\mathcal{A}$ de modo que para cada $A \in \mathcal{A}$ el conjunto $\{n < \omega : x_n = A\}$ es finito será convergente a Ψ en Ψ^*. Particularmente cualquier sucesión indicada inyectivamente de puntos en $\mathcal{A}$ converge a Ψ. Por lo tanto, si U es un conjunto secuencialmente abierto en Ψ^* con $\Psi \in U$ entonces Ψ es un punto interior de U.

Es decir, todos los puntos de cualquier conjunto secuencialmente abierto en Ψ^* son puntos interiores del mismo, por tanto todo secuencialmente abierto en Ψ^* es abierto en Ψ^*. Con lo que se concluye que la compactación a un punto de Ψ es un espacio secuencial.

Empero, si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión contenida en ω entonces ésta no converge a Ψ, ya que si es infinita y como subconjunto de ω pertenece a

$\mathcal{A}$, bastará tomar la vecindad U de Ψ definida como el complemento de $\{x_n : n < \omega\} \cup \big\{\{x_n : n < \omega\}\big\}$ en Ψ^*; si no pertenece a $\mathcal{A}$ entonces podemos hallar $A \in \mathcal{A}$ tal que $\{x_n : n < \omega\} \cap A$ es infinito entonces la vecindad determinada por el complemento de $A \cup \{A\}$ en Ψ^* deja fuera a una infinidad de elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$. De otra forma, si la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ es finita entonces su complemento en Ψ^* es una vecindad de Ψ de modo que toda la sucesión queda fuera de ella. Mas note que Ψ pertenece a la cerradura de ω en Ψ^*, puesto que sus vecindades tienen complemento compacto en Ψ, y de acuerdo a la caracterización de los compactos en Ψ, $\Psi \setminus K$ es no vacío para todo $K \subset \Psi$ compacto, por tanto toda vecindad de Ψ intersecta a ω. Esto prueba que, Ψ^*, la compactación a un punto de Ψ no es un espacio Fréchet-Urysohn.

Capítulo 5

Espacios Subsecuenciales

5.1. Introducción

A lo largo del Capítulo 2 hemos estudiado los espacios secuenciales, como en toda la matemática, ahora procederemos a generalizar ese concepto, el de secuencialidad, al de espacio subsecuencial; un espacio topológico es subsecuencial si es posible encajarlo en uno secuencial. Uno de los primeros matemáticos en utilizar este concepto fue N. Noble en [13]. El Ejemplo 4.2 es testigo de que los espacios subsecuenciales existen, puesto que el espacio determinado por $\mathcal{A}$, el filtro de Arens, no es secuencial, sin embargo puede ser encajado en un espacio secuencial, esto se logra añadiendo un punto de acumulación a cada partición de ω y declarando que dichos puntos agregados convergen a $\mathcal{A}$. Veremos en el Ejemplo 5.22 que existen espacios que no son subsecuenciales, este ejemplo fue dado en [16], trabajo de S.Todorcevic y C. Uzcátegui.

Al igual que en la teoría de los espacios secuenciales, en [9] S. García-Ferreira y C. Uzcátegui definen el grado de subsecuencialidad, que de manera natural, depende de los espacios secuenciales donde sea posible encajar un espacio topológico subsecuencial dado. Este grado de subsecuencialidad es también un número ordinal menor o igual a ω_1. En el Teorema 5.13 se demuestra, en la clase de los filtros subsecuenciales, que si $\xi(\mathcal{G})$ es un subespacio de $\xi(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es un filtro subsecuencial, entonces el grado de subsecuencialidad de $\mathcal{G}$ es menor o igual al grado de subsecuencialidad de $\mathcal{F}$.

5.2. Preliminares y Notación

La compactación de Stone-Čech $\beta(\omega)$ de los números naturales ω con la topología discreta se identificará con el conjunto de todos los ultrafiltros sobre ω y $\omega^* = \beta(\omega) \setminus \omega$, con el conjunto de todos los ultrafiltros libres sobre ω. Para $A \subset \omega$, se sabe que $cl_{\beta(\omega)}(A) = \hat{A} = \{\mathcal{U} \in \beta(\omega) : A \in \mathcal{U}\}$ y $A^* = \hat{A} \cap \omega^*$. Si $f : \omega \to \omega$ es una función, entonces $\overline{f} : \beta(\omega) \to \beta(\omega)$ denotará la extensión de Stone de f. Recordemos que para un conjunto infinito X, $[X]^\omega = \{A \subset S : |A| = \omega\}$. Recuerde también que pbn ara $A \in [\omega]^\omega$ se define

$$\mathcal{F}_r(A) = \{F \subset A : |A \setminus F| < \omega\}.$$

$\mathcal{F}_r(\omega) = \mathcal{F}_r$ es el filtro de Fréchet sobre ω.

Recuerde que un espacio X es Fréchet-Urysohn si existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A que converge a x siempre que $x \in cl_X(A)$ con $A \subset X$. Un espacio X es secuencial si para cada subconjunto no cerrado A de X existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A que converge a algún punto en $X \setminus A$. La siguiente definición es una generalización de espacios secuenciales dada por N. Noble [13].

Definición 5.1. *Un espacio es subsecuencial si puede ser encajado en un espacio secuencial.*

Nuestra generalización de filtros secuenciales es la siguiente.

Definición 5.2. *Un filtro libre $\mathcal{F}$ se llama subsecuencial si el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es subsecuencial. En particular, $\mathcal{F}$ es un filtro secuencial si el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es secuencial.*

Nuestro primer ejemplo de un filtro secuencial es el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ ya que el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es una sucesión convergente. Para un filtro libre $\mathcal{F}$, es claro que $\xi(\mathcal{F})$ es secuencial si y sólo si es Fréchet-Urysohn. Posteriormente veremos que ningún ultrafiltro libre sobre ω es subsecuencial, y por tanto no es secuencial.

Una caracterización para la clase de los filtros secuenciales fue dada por P. Simmon [15] que se usará para demostrar que existen $2^{\mathfrak{c}}$ filtros no equivalentes por pares. En la sección 3, se establecerán importantes propiedad de los filtros subsecuenciales.

5.3. Propiedades básicas de los espacios Subsecuenciales

Comenzaremos estudiando algunas propiedades básicas de los espacios subsecuenciales.

Teorema 5.3. *(1) Los subespacios de un espacio subsecuencial son subsecuenciales.*

(2) El producto numerable de espacios subsecuenciales es subsecuencial.

(3) Cualquier imagen cociente de un espacio subsecuencial es subsecuencial.

Demostración. La proposición (1) es trivial. Para (3) basta recordar que la imagen cociente de todo espacio secuencial es secuencial. Considere X un espacio subsecuencial y S un espacio secuencial de modo que X es un subespacio de S. Suponga que Y es un espacio cociente de X bajo una función dada $g : X \to Y$. Definamos $h : S \to Z$ donde $Z = Y \cup (S \setminus X)$ como $h|_X = g$ y $h(s) = s$ para cada $s \in S \setminus X$. Si dotamos a Z con la topología $\tau_z = \{U \subset Z : h^{-1}[U] \in \tau_S\}$, donde τ_S es la topología del espacio secuencial S, entonces h es una función cociente y Z es un espacio secuencial que tiene como subespacio a Y. Por lo tanto Y es subsecuencial.

Por último demostremos (2). Sabemos del Corolario 2.18 que el producto de dos espacios secuenciales y numerablemente compactos es numerablemente compacto, en el Teorema 4.2 de [12] se demuestra que dicho producto es secuencial. Además en el Teorema 4.5 de [13] se prueba que el producto numerable de espacios secuenciales y numerablemente compactos es secuencial y numerablemente compacto. Es por esto que bastará probar que cada espacio secuencial puede ser encajado en un espacio secuencial y numerablemente compacto.

Comencemos con un espacio secuencial X_0 y construiremos un X_α para cada $\alpha \leq \omega_1$ como sigue:

(i) Si α es un número ordinal sucesor, construya X_α a partir de $X_{\alpha-1}$ añadiendo un punto límite x_s a cada sucesión $s \subset X_{\alpha-1}$ que no tenga subsucesiones convergentes (así la sucesión s converge a x_s en X_α.)

(ii) Si α es un número ordinal límite, sea X_α la unión topológica de $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$, es decir, el cociente de la unión ajena de la familia $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ inducida por las inmersiones $X_\beta \to X_\delta$ para $\delta < \alpha$.

Dado que cualquier cociente de un espacio secuencial es secuencial, cada X_α es secuencial, en particular X_{ω_1} es secuencial. Además, dado que cada sucesión en X_{ω_1} está contenida en algún X_α, es más, ésta tiene un límite en $X_{\alpha+1}$, X_{ω_1} es numerablemente compacto. Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Sabemos del Teorema 2.12 que la suma topológica de cualquier familia de espacios secuenciales ajenos es un espacio secuencial, esto permite que la suma topológica ajena de cualquier familia de espacios subsecuenciales sea un espacio subsecuencial. Esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. [N. Noble] *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si para cada $\alpha \in I$ el espacio X_α es secuencial, entonces $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es subsecuencial.*

Demostración. Para cada $\alpha \in I$ sea Y_α un espacio secuencial de modo que X_α sea un subespacio de Y_α. Es claro que $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un subespacio del espacio secuencial $\bigoplus_{\alpha\in I} Y_\alpha$. Por lo tanto se tiene lo deseado. †

Recordemos que un espacio topológico está determinado por subconjuntos numerables si $[A]_{ACP} = cl_X(A)$ para cada $A \subset X$, donde

$$[A]_{ACP} = A \cup \{x \in X \setminus A : \exists B \subset A(|B| \leq \omega \text{ y } cl_X(B) = B \cup \{x\})\}$$

Teorema 5.5. [T. Rishel [5]] *Sean X un espacio determinado por subconjuntos numerables y $\mathcal{B} = [X]^{\leq\omega}$ la familia de todos los subconjuntos numerables de X. Entonces la proyección natural de la suma topológica $\bigoplus_{B\in\mathcal{B}} B$ sobre X es una función cociente.*

Demostración. Es claro que $p : \bigoplus_{B\in\mathcal{B}} B \to X$ es una función sobreyectiva. Además, por la definición de la topología del espacio suma, la preimagen de todo abierto en X es abierto en $\bigoplus_{B\in\mathcal{B}} B$. Y si U es abierto en el espacio suma, entonces su imagen bajo p es

$$p(U) = p\big(\bigcup\{B \in \mathcal{B} : U \cap B\}\big) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} p(B \cap U) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \cap U = U.$$

Por lo tanto p es una función cociente. †

Teorema 5.6. *Sea X un espacio determinado por conjuntos numerables. Entonces, si cada subconjunto numerable de X es subsecuencial, entonces X es subsecuencial.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = [X]^{\leq\omega}$ la familia de todos los subconjuntos numerables de X y f la proyección natural de la suma topológica $\sum_{B\in\mathcal{B}} B$ sobre el espacio X es una función cociente, además dado que cada subconjunto numerable de X es subsecuencial se tiene que $\sum_{B\in\mathcal{B}} B$ es un espacio subsecuencial. Por lo tanto X es un espacio secuencial. †

El Ejemplo 4.2 justifica que el Teorema 5.6 no es válido si sustituimos la propiedad de ser subsecuencial por la de ser secuencial.

5.4. Filtros Secuenciales

Para comprender la combinatoria de los filtros subsecuenciales se estudiarán, en esta sección, algunas propiedades básicas de los filtros secuenciales.

Para $A \in [\omega]^\omega$, $[A]$ denotará al conjunto $\{B \in [\omega]^\omega : |A \cap B| = \omega\}$.

Lema 5.7. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro libre, entonces $\mathcal{F}^+ = \bigcap\{[F] : F \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. Note que si $E \in \mathcal{F}^+$ entonces es falso que para algún $F \in \mathcal{F}$, $|F \cap E| < \omega$, de ser así, $F_0 = F \setminus (F \cap E) \in \mathcal{F}$ es tal que $F_0 \cap E = \emptyset$, por tanto, para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $E \in \mathcal{F}^+$, $|E \cap F| = \omega$. Por lo tanto se da la igualdad deseada. †

Entonces se tiene que $\mathcal{F} \in cl_{\xi(\mathcal{F})}(A)$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}^+$. Para un filtro libre $\mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{F}^+$, ocurre que $\xi(\mathcal{F}|_A)$ es un subespacio de $\xi(\mathcal{F})$.

Dada $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, es claro que $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \{F \subset \omega : \forall A \in \mathcal{A}(A \subset^* F)\}$ es un filtro sobre ω y mostraremos que de hecho es secuencial. Pero antes, observemos que todo subconjunto infinito de $A \in \mathcal{A}$ converge a $\mathcal{F}$.

Lema 5.8. *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD. Entonces, para cada $B \notin \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es AD si y sólo si $\omega \setminus B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$.*

Demostración. Suponga que la familia $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi ajena para $B \notin \mathcal{A}$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$, $|A \cap B| < \omega$, es decir, para cada $A \in \mathcal{A}$, $A \subset^* \omega \setminus B$. Esto implica que $\omega \setminus B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$. Inversamente, si $\omega \setminus B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$ entonces para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \subset^* \omega \setminus B$, es decir para cada $A \in \mathcal{A}$, $|A \cap B| < \omega$. Por tanto $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi ajena. †

Teorema 5.9. *Un filtro libre $\mathcal{F}$ es secuencial si y sólo si existe $\mathcal{A}$ una familia AD maximal respecto a la siguientes propiedade:*

$$F \in \mathcal{F} \textit{ si y sólo si para todo } A \in \mathcal{A}, A \subset^* F \textit{ y} \mathcal{F} = \mathcal{F}_\mathcal{A}.$$

Demostración. Suponga que $\mathcal{F}$ es un filtro secuencial, entonces el espacio $\xi(\mathcal{F})$ es secuencial. Definimos

$$\mathcal{F}^* = \{A \in [\omega]^\omega : \forall F \in \mathcal{F}(A \subset^* F)\}.$$

Note que para cada $B \in \mathcal{F}^+$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenida en B que converge a $\mathcal{F}$ en $\xi(\mathcal{F})$, es decir, para cada $F \in \mathcal{F}$, $\{x_n : n < \omega\} \in \mathcal{F}^*$. elija ahora $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal en $\mathcal{F}^*$. Note que si $B \in \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{A}$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ de modo que $|B \cap A| = \omega$.

Considere

$$\mathcal{F}_\mathcal{A} = \{F \subset \omega : \forall A \in \mathcal{A}(A \subset^* F)\}.$$

es claro que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{F}_\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Supongamos que existe $G \in \mathcal{F}_\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, entonces $\omega \setminus G \in \mathcal{F}^+$.

Como $\mathcal{F}$ es secuencial, podemos hallar $B \subset \omega \setminus G$ sucesión convergente a $\mathcal{F}$ así, para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $B \subset^* F$, es decir $B \in \mathcal{F}^*$. Note que $[B]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$ ya que $G \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$ y para cada $C \in [B]^\omega$ se tiene que $C \not\subset^* G$, además se tiene que para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $C \in [B]^\omega$ $A \cap C$ es finito, puesto que $C \subset B$ y $B \cap G = \emptyset$. Esto contradice la maximalidad de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}^*$.

Por lo tanto $\mathcal{F}_\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ cumple las propiedades solicitadas.

Inversamente, sea $\mathcal{A}$ una familia AD en ω de modo que $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \mathcal{F}$. Sea $B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}^+$, si $\mathcal{A} \cup \{B\}$ es casi ajena, entonces por el Lema 5.9, $\omega \setminus B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}$, esto contradice que $B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}^+$, así se tiene que $\mathcal{A} \cup \{B\}$ no es AD, entonces es posible hallar $A \in \mathcal{A}$ de modo que $|A \cap B| = \omega$, esto implica que $A \cap B$ sea una sucesión convergente a $\mathcal{F}_\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es secuencial. †

Teorema 5.10. *Para cada familia AD $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ es un filtro secuencial.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ una familia AD en ω y $B \in [\omega]^\omega$ de modo que $\mathcal{F}_\mathcal{A} \in cl_{\xi(\mathcal{F}_\mathcal{A})}(B)$. Sabemos que $B \in \mathcal{F}_\mathcal{A}^+$, entonces por el Lema 5.9,se obtiene que $\mathcal{A} \cup \{B\}$ no es una familia AD, así, existe $A \in \mathcal{A}$ de modo que $A \cap B$ es infinito. Note que $A \cap B$ es una sucesión contenida en B convergente a $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ en $\xi(\mathcal{F}_\mathcal{A})$. Por lo tanto $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ es secuencial. †

El Teorema anterior provee un método para construir varios filtros secuenciales no equivalentes por pares. Recordemos que dos filtros libres $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre ω son equivalentes si y sólo si los espacios $\xi(\mathcal{F})$ y $\xi(\mathcal{G})$ son homeomorfos.

Teorema 5.11. *Existen $2^\mathfrak{c}$ filtros secuenciales no equivalentes por pares.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia AD de tamaño $\mathfrak{c}$ (para la construcción de dicha familia vea [10] p. 184)Considere $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una indicación de $\mathcal{A}$. Para cada $x \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$ defina

$$\mathcal{A}_x = \{A_\alpha : \alpha \in x\}.$$

Note que $\mathcal{A}_x$ es una familia AD para cada $x \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$, por ser una subfamilia de $\mathcal{A}$. Si $x, y \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$ son distintos, existe, sin perder generalidad, $\gamma \in x$ tal que $A_\gamma \notin \mathcal{A}_y$. Dado que $\mathcal{A}_y \cup \{A_\gamma\}$ es AD, entonces $\omega \setminus A_\gamma \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_y}$, además $\omega \setminus A_\gamma \notin \mathcal{F}_{\mathcal{A}_x}$, por lo que los filtros $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_x}$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_y}$ son distintos. Sea $x_0 \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$, como $\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_0}})$ es numerable, este espacio no puede ser homeomorfo a más de $\mathfrak{c}$ espacios del mismo tipo. Entonces existe $x_i \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$ de modo que $\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_0}})$ y $\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_1}})$ no son homeomorfos. Supongamos que para $\alpha < 2^\mathfrak{c}$ hemos elegido elementos de $\mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$ para formar la familia

$$X = \{\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_\mu}}) : \mu < \alpha\}$$

de elementos no homeomorfos dos a dos. Para cada elemento de X existen a lo más $\mathfrak{c}$ espacios de la misma forma homeomorfos a cada uno de ellos, es decir, existen a lo más $\alpha\mathfrak{c}$ espacios homeomorfos a algún elemento de X, y $\alpha\mathfrak{c} < 2^\mathfrak{c}$, entonces existe $x_\alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_\alpha}})$ no es homeomorfo a algún elemento de X.

Por lo tanto existe una familia

$$X = \{\xi(\mathcal{F}_{\mathcal{A}_{x_\mu}}) : \mu < 2^\mathfrak{c}\}$$

que consiste de espacios no homeomorfos por pares. †

5.5. Filtros Subsecuenciales

En [9], el autor introduce el grado de subsecuencialidad de un filtro subsecuencial y prueba que existen filtros subsecuenciales con grado de secuencialidad arbitrariamente grande. Usando la definición del grado de secuencialidad introduciremos el orden de subsecuencialidad de un filtro subsecuencial.

Sea S es un espacio secuencial que contiene a $\xi(\mathcal{F})$ como subespacio, sin perder generalidad, asumiremos que $S = cl_S(\omega)$. También note que $A \in \mathcal{F}^+$ si y sólo si $\mathcal{F} \in cl_S(A)$. El grado de subsecuencialidad de $\mathcal{F}$ en el espacio S es el número ordinal

$$\sigma(\mathcal{F}, S) = min\{\theta \leq \omega_1 : \forall A \in \mathcal{F}^+(\mathcal{F} \in A^\theta)\}$$

donde la iteración A^θ (ver Sección 2.4) es tomada en el espacio S. Observe que si $\mathcal{F}$ es un filtro subsecuencial, entonces

$$\sigma(\mathcal{F}, S) = sup\{\sigma(\mathcal{F}|_A, cl_S(A)) : A \in \mathcal{F}^+\}.$$

El grado de subsecuencialidad de un filtro subsecuencial $\mathcal{F}$ es el número ordinal

$$\sigma(\mathcal{F}) = min\{\sigma(\mathcal{F}, S) : S \text{ es un espacio secuencial con } \xi(\mathcal{F}) \subset S\}.$$

El siguiente resultado ha sido tomado de [14].

Teorema 5.12. *Para cada filtro secuencial $\mathcal{F}$ y cada $A \in \mathcal{F}^+$, se tiene que $\mathcal{F}|_A$ es subsecuencial y $\sigma(\mathcal{F}|_A) \leq \sigma(\mathcal{F}) \leq \omega_1$.*

Demostración. Note que para todo $A \in \mathcal{F}^+$ ocurre lo siguiente

(i) $\{S : S \text{ es secuencial y } \xi(\mathcal{F}) \subset S\} \subset \{S : S \text{ es secuencial y } \xi(\mathcal{F}|_A) \subset S\}$.

(ii) $\mathcal{F}|_A^+ = \{B \subset \omega : A \cap B \in \mathcal{F}^+\} \subset \mathcal{F}^+$.

Entonces bastará ver que para cada $A \in \mathcal{F}^+$ y cada S espacio secuencial que contiene a $\xi(\mathcal{F})$ como subespacio ocurre que

$$\sigma\big(\mathcal{F}|_A, S\big) \leq \sigma\big(\mathcal{F}, S\big).$$

Sea $A \in \mathcal{F}^+$. Observe que para cada $B \in \mathcal{F}|_A^+$ se tiene que $\mathcal{F}|_A \in B^\theta$, con $\theta \leq \omega_1$, si y sólo si existe $\{x_n : n < \omega\}$ contenido en $A \cap B^\mu$ de modo que $x_n \to \mathcal{F}|_A$, con $\theta = \mu + 1$, si y sólo si $\mathcal{F} \in B^\theta$.

Así, si $\theta_0 = \sigma(\mathcal{F}, S)$ entonces para todo $B \in \mathcal{F}|_A^+$ se tiene que $\mathcal{F}|_A \in B^{\theta_0}$, por lo que $\sigma(\mathcal{F}|_A, S) \leq \theta_0$. Es decir $\sigma(\mathcal{F}|_A) \leq \sigma(\mathcal{F})$. Además es claro que $\mathcal{F}|_A$ es subsecuencial y que $\sigma(\mathcal{F}) \leq \omega_1$. †

En [9] el autor usa la suma de filtros e introduce el producto de filtros para generar varios filtros subsecuenciales. Veamos cómo se definen estas nociones.

Fije un filtro libre $\mathcal{F}$ sobre ω y una partición $\{A_n : n < \omega\}$ de ω en conjuntos infinitos. Para cada $n < \omega$, sea $\mathcal{F}_n$ un filtro libre sobre A_n. Entonces definimos

$$\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n = \big\{A \subset \omega : \{n < \omega : A \cap A_n \in \mathcal{F}_n\} \in \mathcal{F}\big\} \text{ y}$$

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n = \Big\{ \bigcup_{n<\omega} F_n : \forall n < \omega (F_n \in \mathcal{F}_n) \Big\}.$$

Es claro que $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$ y $\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$ son filtros libres sobre ω. Obsérvese que para $A \subset \omega$, $A \in \big(\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n \big)^+$ (respectivamente $A \in (\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n)^+$) si y sólo si $\{n < \omega : A \cap A_n \in \mathcal{F}_n^+\} \in \mathcal{F}^+$ (respectivamente, existe $n < \omega$, $A \in \mathcal{F}_n^+$).

Veamos que estas dos operaciones de filtros generan filtros subsecuenciales.

Teorema 5.13. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro subsecuencial y sea $\{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos infinitos. Si $\mathcal{F}_n$ es un filtro subsecuencial sobre A_n, para cada $n < \omega$, entonces $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$ es subsecuencial y*

$$\sigma\Big(\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n \Big) \leq min\Big\{ sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega \Big\} + \sigma(\mathcal{F}).$$

Particularmente, $\sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n$ es subsecuencial y

$$\sigma\Big(\sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n \Big) \leq min\Big\{ sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega \Big\}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n = \big\{ A \subset \omega : \{n < \omega : A \cap A_n \in \mathcal{F}_n\} \in \mathcal{F} \big\}.$$

Por hipótesis, existe un espacio secuencial S y, para cada $n < \omega$, un espacio secuencial S_n tales que $\xi(\mathcal{F}) \subset S = cl_S(\omega)$, $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}, S)$, $\xi(\mathcal{F}_n) \subset S_n = cl_{S_n}(A_n)$ y $\sigma(\mathcal{F}_n) = \sigma(\mathcal{F}_n, S_n)$, para cada $n < \omega$. Suponga que $S \cap S_n = \emptyset$ para cada $n < \omega$, y $S_n \cap S_m = \emptyset$ para distintos $n, m < \omega$. Siguiendo la idea de suma secuencial introducida en [2], sea Y la suma topológica ajena de los espacios S_n y $X = \{\mathcal{F}_n : n < \omega\}$. Observe que X es cerrado en Y. Defina $f : X \to S$ como $f(\mathcal{F}_n) = n$, para cada $n < \omega$. Por el Teorema 2.8 sabemos que el espacio $Z = Y \cup_f S$ es secuencial. Haga $\mathcal{F} = z \in Z$. Suponga que $V \in \eta(z)$. Por la definición de la topología de Z, se tiene que $\{n < \omega : V \cap A_n \in \mathcal{F}_n\} \in \mathcal{F}$. Sea $F \in \sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$. Entonces es posible hallar $U \in \eta_S(\mathcal{F})$ tal que $U \cap \big(\bigcup_{n<\omega} A_n \big) = F$. También se sabe que para cada $k \in \{n < \omega : F \cap A_n \in \mathcal{F}_n\}$ existe $U_k \in \eta_{S_k}(\mathcal{F}_k)$ tal que $U_k \cap A_k = F \cap A_k$. Entonces, $V = U \cup \big(\bigcup_{k<\omega} U_k \big)$ es un abierto en Z tal que $z \in V$ y $V \cap \big(\bigcup_{k<\omega} A_k \big) = F$. Además

$$\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n = \Big\{ V \cap \big(\bigcup_{n<\omega} A_n : V \in \eta(z) \big) \Big\}.$$

Esto demuestra que $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$ es subsecuencial. Sea $\alpha = min\{sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega\}$. Escoja $m < \omega$ tal que $\alpha = sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\}$. Si $z \in cl_Z(C) \setminus C$ para algún $C \subset S \subset Z$, entonces existe $\theta \leq \sigma(\mathcal{F})$ de modo que $z \in C^{\theta}$. Así, $z \in C^{\alpha+\sigma(\mathcal{F})}$. Ahora, fije $A \in \left(\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n\right)^+$. Entonces, se puede hallar una sucesión creciente $\{n_k\}_{k<\omega}$ de números naturales tal que $A \cap A_{n_k} \in \mathcal{F}_{n_k}^+$ para cada $k < \omega$.Sin perder generalidad suponga que $m < n_k$ para cada $k < \omega$. Esto se sigue de suponer que $\mathcal{F}_{n_k} \in (A \cap A_{n_k})^{\alpha} \subset A^{\alpha}$, en el espacio S_{n_k}, para cada $k < \omega$. Así, $z \in A^{\alpha+\sigma(\mathcal{F})}$. Además

$$\sigma\big(\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n\big) \leq \sigma\big(\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n, X \cup_f S\big) \leq min\big\{sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega\big\} + \sigma(\mathcal{F}).$$

†

Teorema 5.14. [14] *Sea $\{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos infinitos. Si $\mathcal{F}_n$ es un filtro subsecuencial sobre A_n, para cada $n < \omega$, entonces $\prod \mathcal{F}_n$ es también subsecuencial y $\sigma\big(\prod \mathcal{F}_n\big) = sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n < \omega\}$.*

Demostración. Por definición tenemos que

$$\prod \mathcal{F}_n = \Big\{ \bigcup_{n<\omega} F_n : \forall n < \omega (F_n \in \mathcal{F}_n) \Big\}.$$

Para cada $n < \omega$, sea S_n un espacio secuencial tal que $\xi(\mathcal{F}_m) \subset S_n = cl_{S_n}(A_n)$ y $\sigma(\mathcal{F}_n) = \sigma(\mathcal{F}_n, S_n)$. Sea X la suma topológica ajena de los espacios S_n. En el espacio X, identificamos todos los puntos $\mathcal{F}_n$ en un solo punto z. En virtud del Teorema 2.8, el espacio cociente $X/\sim$ es secuencial, además $\prod \mathcal{F}_n = \{V \cap \omega : V \in \eta(z)\}$. Haga $\mathcal{F} = \prod \mathcal{F}_n$. Sabemos que $A \in \mathcal{F}^+$ si y sólo si existe $n < \omega$ de modo que $A \cap A_n \in \mathcal{F}_n^+$. Así, se dedcue que $\sigma(\mathcal{F}) \leq sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n < \omega\}$. Sea S un espacio secuencial tal que $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}, S)$. Para $k < \omega$, se tiene que $\mathcal{F}|_{A_k} = \mathcal{F}_k$ y $A_k \cup \mathcal{F} \subset S$, así que $\sigma(\mathcal{F}_k) = \sigma(\mathcal{F}_{A_k}) \leq \sigma(\mathcal{F}|_{A_k}, S) \leq \sigma(\mathcal{F}, S) = \sigma(\mathcal{F})$. Por lo tanto $\sigma(\mathcal{F}) = sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n < \omega\}$. †

Una aplicación interesante de la suma de filtros es la siguiente.

Teorema 5.15. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro subsecuencial. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}^+$ existe una partición $\{A_n : n < \omega\} \subset [\omega]^{\omega}$ de A y, para cada $n < \omega$, un filtro subsecuencial $\mathcal{F}_n$ sobre A_n de modo que*

$$\mathcal{F}|_A \subset \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n.$$

Particularmente, existe una partición $\{A_n : n < \omega\} \subset [\omega]^\omega$ *de* ω *y, para cada* $n < \omega$, $\mathcal{F}_n$ *un filtro subsecuencial sobre* A_n *tal que*

$$\mathcal{F} \subset \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n$$

Demostración. Primero, suponga que $\mathcal{F}$ es secuencial. Elija $A \in [\omega]^\omega$ que converja a $\mathcal{F}$. Sea $\{A_n : n < \omega\}$ una partición de A en conjuntos infinitos. Si es necesario, añada una cantidad finita de puntos en cada A_n de modo que $\bigcup_{n<\omega} A_n = \omega$. Fije $F \in \mathcal{F}$. Entonces, existe $m < \omega$ de modo que $A \setminus m \subset F$. De nuestra suposición deducimos que existe $k < \omega$ tal que $A_n \subset F$ para todo $k < n < \omega$. Así, $F \in \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_r(A_n)$. Entonces $\mathcal{F} \subset \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_r(A_n)$. Ahora suponga que $\sigma(\mathcal{F}) > 1$. Sea S un espacio secuencial de modo tal que $\xi(\mathcal{F})$ es subespacio de S y $\sigma(\mathcal{F}, S) = \sigma(\mathcal{F})$ y ω es denso en S. Como $\sigma(\mathcal{F}, S) > 1$, existe una sucesión no trivial $\{s_n\}_{n<\omega}$ en $S \setminus \omega$ tal que $s_n \to \mathcal{F}$. Podemos suponer que $s_n \neq s_m$ para $n < m < \omega$. Sea $\{V_n : n < \omega\}$ la familia de subconjuntos abiertos ajenos dos a dos de S tal que $s_n \in V_n$ para todo $n < \omega$. Haga $A_n = V_n \cap \omega$ y $\mathcal{F}_n = \{A_n \cap V : V \in \eta_S(s_n)\}$, para cada $n < \omega$. Como antes, se puede asumir que $\omega = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Es claro que $\mathcal{F}_n$ es un filtro subsecuencial sobre A_n, para cada $n < \omega$. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces, es posible encontrar una vecindad abierta U de $\mathcal{F}$ tal que $F = \omega \cap U$. Se sabe que existe $m < \omega$ tal que $s_n \in U$ para cada $m \leq n < \omega$. Por definición, se tiene que $A_n \cap U \in \mathcal{F}_n$ para todo $m \leq n < \omega$. Esto es, $F = \bigcup_{n<\omega}(F \cap A_n) \in \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n$. †

A continuación daremos una caracterización de aquellos filtros libres que tienen sucesiones convergentes no triviales.

Teorema 5.16. *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro libre,* $\xi(\mathcal{F})$ *tiene sucesiones convergentes no triviales si y sólo si existe una partición* $\{A_n : n < \omega\}$ *de* ω *en conjuntos infinitos tal que* $\mathcal{F} \subset \prod \mathcal{F}_r(A_n)$.

Demostración. Suponga que $\mathcal{F} \subset \prod \mathcal{F}_r(A_n)$. Es claro que cada A_n es una sucesión no trivial convergente en $\xi(\mathcal{F})$. Inversamente, sea $\{A_n : n < \omega\}$ una partición en conjuntos infinitos del rango de una sucesión convergente no trivial en $\xi(\mathcal{F})$, suponga sin perder generalidad que $\bigcup_{n<\omega} A_n = \omega$. Si $F \in \mathcal{F}$ entonces para cada $n < \omega$, $A_n \subset^* F$, por tanto $\mathcal{F} \subset \prod \mathcal{F}_r(A_n)$. †

Se dice que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos infinitos de ω genera un filtro $\mathcal{F}$ sobre ω si para cualquier F elemento de $\mathcal{F}$ exiten $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ de manera que $\bigcap_{i \leq n} B_i \subset F$.

Teorema 5.17. *Sean $\mathcal{A} = \{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos infinitos y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Si $\mathcal{F}_n$ es un filtro libre sobre A_n, para cada $n < \omega$, entonces $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$ es el filtro generado por $\prod \mathcal{F}_n \cup (\mathcal{F} \otimes \mathcal{A})$, donde*

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{A} = \big\{B \subset \omega : \{n < \omega : A_n \subset B\} \in \mathcal{F}\big\}$$

Demostración. Consideremos $F \in \sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$, entonces de acuerdo a la definición de filtro suma, el conjunto $D = \{n < \omega : A_n \cap F \in \mathbb{F}_n\}$ pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Consideremos $B_1 = \bigcup_{n<\omega} F_n$ donde para cada $n \in D$, $F_n = A_n \cap F$ y para todo $n \notin D$, $F_n \in \mathcal{F}_n$, es claro que $B_1 \in \prod \mathcal{F}_n$, y sea $B_2 = \bigcup_{n \in D} A_n$, observe que el conjunto B_2 pertenece a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$. Entonces

$$B1_{\cap}B_2 = \Big(\bigcup_{n<\omega} F_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n\in D} A_n\Big) = \bigcup_{n\in D}(A_n \cap F_n) = \bigcup_{n\in D}(A_n \cap F) \subset F.$$

Por lo tanto, la familia $\prod \mathcal{F}_n \sup(\mathcal{F} \otimes \mathcal{A})$ genera al filtro $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$. †

Teorema 5.18. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Entonces $\mathcal{F}$ es secuencial (subsecuencial) si y sólo si $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ es secuencial (subsecuencial) para cada partición $\mathcal{A}$ de ω en conjuntos infinitos.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos infinitos. Haga $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$.

Primero suponga que $\mathcal{F}$ es secuencial y sea $B \in \mathcal{G}^+$. Entonces $E = \{n < \omega : B \cap A_N \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}^+$. Así, existe una sucesión $\{n_k\}_{k<\omega}$ en E tal que $x_n \to \mathcal{F}$. Para cada $k < \omega$ fije $b_k \in B \cap A_{n_k}$. Si $G \in \mathcal{G}$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{n \in F} A_n \subset G$. Se sabe que existe $i < \omega$ tal que $n_k \in F$ para cada $k < \omega$ con $k \geq i$. Luego, $b_k \in G$ para cada $k < \omega$ con $i \leq k$. Esto demuestra que $b_k \to \mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es secuencial. Ahora asuma que $\mathcal{G}$ es secuencial y sea $D \in \mathcal{F}^+$. Haga $G = \bigcup_{n \in D} A_n$. Es claro que $G \in \mathcal{G}^+$. Entonces, es posible hallar un subconjunto infinito C de G tal que $C \subset^* W$ para todo $W \in \mathcal{G}$. Sea $E = \{n \in D : C \cap A_n \neq \emptyset\}$. Si $F \in \mathcal{F}$, entonces se tiene que $C \subset^* \bigcup_{n \in F} A_n$ y esto implica que $E \subset^* F$. Por tanto $\mathcal{F}$ es secuencial.

Veamos ahora el caso subsecuencial. Si definimos la función $f : \omega \to \omega \times \omega$ de modo que $f : A_n \to \{n\} \times \omega$ es una biyección para cada $n < \omega$, entonces

$$\mathcal{G} \sim f[\mathcal{G}] = \big\{A \subset \omega \times \omega : \{m < \omega : \{n < \omega : (m,n) \in A\} = \omega\} \in \mathcal{F}\big\}.$$

Así, se observa que $\xi(\mathcal{F})$ es homeomorfo a $f[\mathcal{G}] \cup (\omega \times \{0\})$, como subespacio de $\xi(f[\mathcal{G}])$. Entonces, si $\mathcal{G}$ es subsecuencial entonces $\mathcal{F}$ lo es. Inversamente, suponga que existe un espacio secuencial S tal que $\xi(\mathcal{F}) \subset S$ y $S = cl_X(\omega)$. Considere la función $f : S \to S$ definida por $f(x) = x$ si $x \in S \setminus \omega$ y $f(x) = n$ si $x \in A_n$. Considere a S con la topología débil inducida por la función f y denote a este espacio topológico por T. Entonces T es secuencial y $\xi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}) \subset T$. †

Usaremos la suma de ultrafiltros para demostrar que todo filtro secuencial tiene una $\pi-$base numerable. Se dice que $\mathcal{P} \subset [\omega]^\omega$ es una $\pi-$base de un filtro $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subset F$. Para tal finalidad necesitaremos el siguiente lema.

Lema 5.19. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre y $\{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos infinitos y suponga que $\mathcal{F}_n$ es un filtro sobre A_n, para cada $n < \omega$. Si $\mathcal{P}_n$ es una $\pi-$base para $\mathcal{F}_n$, para cada $n < \omega$, entonces $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}_n$ es una $\pi-$base para $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$.*

Demostración. Si $F \in \sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n$, entonces $E = \{n < \omega : F \cap A_n \in \mathcal{F}_n\} \in \mathcal{F}$. Fijemos $n \in E$ y sea $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $P \subset F \cap A_n$. Entonces, se tiene que $P \subset F$. Esto demuestra el Lema. †

Teorema 5.20. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro subsecuencial, entonces $\mathcal{F}$ tiene una $\pi-$base numerable.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ un filtro subsecuencial y S un espacio secuencial tal que $\xi(\mathcal{F}) \subset cl_S(\omega) = S$. Entonces, existe $A \in \mathcal{F}^+$ y $0 \leq \mu < \omega_1$ tales que $\mathcal{F} \in A^{\mu+1}$, donde la iteración $A^{\mu+1}$ es tomada en el espacio S. Procederemos por inducción transfinita sobre μ. Si $\mu = 0$, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n<\omega}$ en ω que converge a $\mathcal{F}$. Entonces, la familia $\big\{\{s_k : n \leq k < \omega\} : n < \omega\big\}$ es la $\pi-$base buscada. Suponga ahora que $1 < \mu$, entonces es posible hallar una sucesión $\{s_n\}_{n<\omega}$ en $S \setminus \omega$ y $\mu_n < \mu$ tales que $s_n \to \mathcal{F}$ y $s_n \in A^{\mu_n}$, para cada $n < \omega$ y $\mu_n < \mu$. Sea $\{A_n : n < \omega\}$ una partición de ω de modo que para todo $n < \omega$, $s_n \in A_n^{\mu_n}$. Haga $\mathcal{F}_n = \{V \cap A_n : V \in \eta(s_n)\}$ e identifique s_n con $\mathcal{F}_n$, para cada $n < \omega$. Es claro que $\mathcal{F}_n$ es un filtro subsecuencial, para cada $n < \omega$. Además $\mathcal{F} \subset \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n$. Por hipótesis inductiva, $\mathcal{F}_n$ tiene una $\pi-$base numerable. Es claro que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros libres con $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, entonces toda $\pi-$base de $\mathcal{G}$ es una $\pi-$base para $\mathcal{F}$. Aplicando el Lema 5.19 se tiene el resultado. †

5.6. Algunos ejemplos

En [9], se define la $\theta-$potencia de un filtro libre, para cada número ordinal $1 \leq \theta < \omega$ (la idea de esta noción fue tomada de la potencia original, definida en [3]):

Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Fije una partición $\{A_n : n < \omega\}$ de ω en conjuntos infinitos, y para cada ordinal límite $\theta < \omega_1$ fijamos una sucesión estrictamente creciente $\{\theta_n : n < \omega\}$ no acotada en θ donde para cada $n < \omega$, θ_n no es un número ordinal límite. Para cada $n < \omega$, sea $\mathcal{F}_n$ un filtro libre sobre A_n equivalente a $\mathcal{F}$. Entonces, definimos $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^2 = \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{F}_n$. Usando inducción transfinita, definimos $\mathcal{F}^\theta$ para cada $2 \leq \theta < \omega_1$ como sigue:

Si $\theta = \mu + 1$ y μ no es un número ordinal límite, entonces se define

$$\mathcal{F}^\theta = \sum_{\mathcal{F}_r} \mathcal{G}_n,$$

donde $\mathcal{G}_n \sim \mathcal{F}^\mu$, para cada $n < \omega$. Ahora, suponga que θ es un ordinal límite. Entondes, definimos

$$\mathcal{F}^\theta = \prod \mathcal{F}_n \text{ y } \mathcal{F}^{\theta+1} = \sum_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_n,$$

donde $\mathcal{F}_n$ es equivalente a $\mathcal{F}_r^{\theta_n}$ para cada $n < \omega$. Destacamos que la definición de cada potencia de los filtros $\mathcal{F}^\theta$ es única salvo equivalencia de filtros, ya que depende de la partición que hemos fijado y de los filtros sobre cada elemento de la partición que elegimos. Las propiedades básicas de estas potencias de filtros fueron estudiadas en [9] y de ahí hemos tomado el siguiente resultado que muestra el principal papel de las potencias del filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$.

Ahora mostramos un ejemplo de [16] de un filtro no subsecuencial.

Ejemplo 5.21. Sea $\{M_k : k < \omega\}$ una partición de ω en conjuntos finitos tales que $sup\{|M_k| : k < \omega\} = \omega$. Entonces, definimos un ideal $\mathcal{I}$ de subconjuntos de ω declarando que $E \in \mathcal{I}$ si existe $m < \omega$ tal que $|E \cap M_k| < m$ para todo $k < \omega$. Veamos que el filtro dual de $\mathcal{I}$ no es subsecuencial (de hecho no tiene $\pi-$base numerable). Sea $\{A_n : n < \omega\}$ una familia de subconjuntos infinitos de ω. Por inducción, podemos hallar puntos $x_k \in A_k \cap M_{i_k}$ para todo $k < \omega$ tales que $i_k \neq i_j$ para $i < k < \omega$. El conjutnos $V = \xi(\mathcal{F}) \setminus \{x_k : k < \omega\}$ es una vecindad de $\mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es el filtro dual del ideal $\mathcal{I}$, tal que para cada $k < \omega$, $A_k \not\subset V$. Esto demuestra que $\mathcal{F}$ no admite $\pi-$base numerable alguna, y por lo tanto el filtro $\mathcal{F}$ no es subsecuencial.

El siguiente ejemplo muestra que la proposición inversa del Teorema 5.15 no es verdadera.

Ejemplo 5.22. Para comenzar con nuestro ejemplo, consideremos el filtro $\mathcal{F}_r^2 = \big\{A \subset \omega \times \omega : \{n < \omega : \{m < \omega : (n,m) \in A\} \in \mathcal{F}_r\} \in \mathcal{F}_r\big\}$ como subconjuntos de $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ (en la literatura, este filtro es conocido como el filtro tensor y se denota por $\mathcal{F}_r \otimes \mathcal{F}_r$), fije un filtro libre arbitrario $\mathcal{G}$ sobre ω. Entonces, definimos:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \Big\{(A \times \omega) \cup \Big(\bigcup_{n \in \omega \setminus A} \{n\} \times (\omega \setminus f(n))\Big) : A \in \mathcal{G} \text{ y } f \in {}^{\omega}(\omega \setminus \{0\})\Big\}^S$$

donde, en general, $\mathcal{D}^S = \{A \subset \omega : \exists D \in \mathcal{D}(D \subset A)\}$ para $\mathcal{D} \subset [\omega]^\omega$. Es claro que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ es un filtro libre sobre $\omega \times \omega$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F}_r^2$ y $\omega \times \{0\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}^+$. También es evidente que el filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}|_{\omega \times \{0\}}$ es equivalente a $\mathcal{G}$. Sea $\mathcal{G}$ cualquier filtro libre sobre ω no subsecuencial (de hecho, el filtro dado en el Ejemplo 5.21), entonces el filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}|_{\omega \times \{0\}}$ no es subsecuencial y de igual forma $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

Ahora presentaremos una clase de ejemplos de filtros subsecuenciales.

Sea $Seq = \bigcup_{n<\omega} {}^n\omega$. Para una función δ que asigna a cada $s \in Seq$ un filtro libre $\delta(s)$ sobre ω, definimos una topología τ_δ sobre Seq de la siguiente manera $U \in \tau_\delta$ es abierto si y sólo si $\{n < \omega : s \frown n \in U\} \in \delta(s)$ para cada $s \in Seq$, donde $s \frown n = s \cup \{(dom(s), n)\}$ (para más propiedades acerca de los espacios Seq se puede considerar [16]). Este espacio será denotado por $Seq(\delta)$. Es sabido que $Seq(\delta)$ es un espacio Hausdorff, cero-dimensional y extremadamente disconexo sin puntos aislados (vea [16]). Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre ω. Si $\delta(s) = \mathcal{F}$ para cada $s \in Seq$, entonces $Seq(\delta)$ será denotado por $Seq(\mathcal{F})$. Es también sabido que el espacio $Seq(\mathcal{F}_r)$ es homeomorfo al espacio de Arhangelskii-Franklin (ver [2]) que es secuencial mas no Fréchet-Urysohn.

Para $s \in Seq$, definimos los conjuntos $C(s) = \{t \in Seq : s \leq t\}$ y $X_s = \{s\} \cup \{s \frown n : n < \omega\}$. Observe que $C(s)$ es abierto en $Seq(\delta)$ y X_s es un subconjunto cerrado de $Seq(\delta)$, para cada $s \in Seq$. Además note que, $C \subset Seq(\delta)$ es cerrado si y sólo si $C \cap X_s$ es cerrado para cada $s \in Seq$. En efecto, suponga que $C \cap X_s$ es cerrado en X_s, para todo $s \in Seq$, y que existe $t \in cl_{Seq(\delta)}(C) \setminus C$. Sin perder generalidad, asuma que $\{n < \omega : t \frown n \in C\} \in \delta(t)^+$ (esto se puede demostrar inductivamente). Esto implica que $t \in cl_{X_t}(C \cap X_t) \setminus C$ lo cual es imposible ya que $C \cap X_t$ es cerrado. Cabe mencionar que los espacios X_s y $\xi(\delta(s))$ son homeomorfos, para cada $s \in Seq$.

Así, podemos suponer que $\xi(\delta(s)) = \{s\} \cup N_s$, donde $N_s = \{s \frown n : n < \omega\}$, para cada $s \in Seq$.

El siguiente teorema fue tomado de [12].

Teorema 5.23. *$Seq(\delta)$ es secuencial si y sólo si $\delta(s)$ es secuencial para todo $s \in Seq$.*

Demostración. Necesidad. Fije $s \in Seq$. Como $Seq(\delta)$ es secuencial, entonces X_δ es secuencial también. Igualmente se sabe que, $\big\{V \cup \{s \frown n : n < \omega\} : V \in \eta(s)\big\} = \big\{\{s \frown n : n \in F\} : F \in \delta(s)\big\}$. Así, obtenemos que $\delta(s)$ es secuencial.

Suficiencia. Sea $C \subset Seq(\delta)$ un conjunto no cerrado. Entonces, existe $t \in Seq$ tal que $C \cap X_t$ es no cerrado. Como X_t es secuencial y cerrado en $Seq(\delta)$ es posible hallar una sucesión en $C \cap X_t$ que converge a un punto fuera de C. Esto demuestra que $Seq(\delta)$ es secuencial. †

Teorema 5.24. *$Seq(\delta)$ es subsecuencial si y sólo si $\delta(s)$ es subsecuencial para todo $s \in Seq$.*

Demostración. Es claro que si $Seq(\delta)$ es subsecuencial, entonces para todo $s \in Seq$, $\delta(s)$ es subsecuencial.

Ahora asuma que para todo $s \in Seq$, $\delta(s)$ es subsecuencial y que $\delta(s)$ es un filtro sobre $\{s \frown n : n < \omega\}$. La estrategia para la construcción del espacio secuencial S que contendrá a $Seq(\delta)$ como un subespacio está basada en el Teorema 5.13. En efecto, para cada $s \in Seq$, sea T_s un espacio secuencial tal que $\xi(\delta(s)) = \{s \frown n : n < \omega\} \cup \{\delta(s)\} \subset T_s$. Sin perder generalidad asumiremos que $T_s \cap T_r = \emptyset$ para cualesquiera $s, r \in Seq$ distintos. Por facilidad, identificaremos el punto $\delta(\emptyset)$ de $T_\emptyset$ con $\emptyset$. Sea Y la suma topológica ajena de los espacios $\{T_s : s \in Seq\}$. Hagamos $X = \big\{\delta(s) : s \in Seq \setminus \{\emptyset\}\big\}$. Es claro que X es un subconjunto cerrado de Y, y defina $f : X \to Y$ como $f(\delta(s)) = s$, para cada $s \in Seq \setminus \{\emptyset\}$. El espacio deseado es $Z = Y \cup_f Y$ que es secuencial por el Teorema 2.8. Así como en la prueba del Teorema 5.13, se tiene que $Seq(\delta)$ es un subespacio de Z. Por lo tanto, $Seq(\delta)$ es subsecuencial. †

Bibliografía

[1] C. E. Aull, R. Lowen, *Handbook of the History of General Topology vol. 2*, Kluwer Acad. Pub.(1998).

[2] A. V. Arhangel'skii and S. P. Franklin, *Ordinal invariants for topological spaces*, Moscow State Univ. USSR (1967) 313-320.

[3] D. Booth, *Ultrafilters on a countable set*, Ann. Math. Logic 2 (1) (1970/1971) 1-24.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Boston.

[5] R. Engelking, *General Topology vol. 6*, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[6] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fun. Math. 57 (1965), 107-115.

[7] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fund. Math. 61(1967), 51-56.

[8] S. García-Ferreira, C. Uzcátegui, *Subsequential filters*, Topology Appl. 156(2009), 2949-2959.

[9] S. García-Ferreira, C. Uzcátegui, *The degree of subsequentiality of a subsequential filter*, Topology Appl. 157(2010), 2180-2193.

[10] L. J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory*, Springer (2011).

[11] F. Hernández-Hernández, *Teoría de Conjuntos Una introducción*, SMM, México (2011).

[12] E. Michael, *Local compactness an cartesian products of quotient maps and k-spaces*, Ann Inst. Fourier, Grenoble, 18, 2 (1968), 281-286.

[13] N. Noble, *Products with closed projections II*, American Mathematical Society Col 160 (1971) 169-183.

[14] J.E. Rivera-Gómez, S. García-Ferreira, *Filtros de Fréchet-Urysohn*, UNAM-UMSNH.

[15] P. Simon, *A hedgehog in the product*, Acta Univ. Carolin. Math Phys. 39 (1998) 147-153.

[16] S. Todorcevic, C. Uzcátegui, *Analytic k-spaces*, Topology Appl. 146-147 (2005) 511-526.

[17] L. M. Villegas, A. Sestier, J. Olivares, *Lecturas básicas en Topología General*, SMM México (2000)