BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Grafos para procesamiento morfológico

Tesis presentada para obtener el título de

Licenciatura en Matemáticas

Presenta:

Pedro Adair Gallegos Avila

Director de Tesis:

Dr. Carlos Guillén Galván

Junio 2021

A la memoria de mi madre
y mi hermana.

Agradecimientos

Introducción

En múltiples campos de la investigación científica es posible modelar las relaciones entre los objetos de una población de estudio mediante grafos (por ejemplo en histología; al investigar las las células y sus interacciones). En un grafo los objetos son representados mediante los vértices; mientras que las relaciones entre los objetos son descritas como aristas. En la década de 1960 fue que se dieron los primeros pasos en el estudio de imágenes; en un principio binaria y posteriormente a escala de grises por Matheron y Serra, es en esta vertiente que da inicio la **Morfologia Matemativa** (MM) como un acercamiento al análisis de imágenes basado en la teoría de conjuntos. Una de los conceptos centrales en MM es el de *elemento estructural*, mediante las cuales es posible definir los operadores elementales *erosión* y *dilatación*; y estos a su vez en la definición de las aperturas y los cierres. En [HHV92] se presenta el concepto de grafo estructural, mientras que en [Vin89] muestra algunas formas de construir funciones de vecindades; así como los grafos que de estas se desprendan.
En el Capitulo 1 se da una breve introducción a la morfología clásica en el espacio $\mathbb{R}^2$. Sin embargo; la teoría detrás de estas ideas fue expandida al caso de las lattices completas. Para un estudio mas completo de este tema, se recomienda consultar [T.10] para el caso general, mientras que los fundamentos teóricos de la morfología en escala de grises es preferible consultar [HR90].

En el capitulo 2, inicamos con los elementos basicos de la toeria de grafos, las definiciones y ejemplos fueron extraidos de [R.05]. Posteriormente, presentamos los operadores erosion y dilatacion en un grafo generados por la funcion de vecindades $N_G(v)$, asi como las formas usuales en las cuales se construyen

vecindades; tal es el caso de las triangulaciones Delaunay, los grafos de Gabriel y los grafos de vecindades relativas. Para terminar el capitulo, presentamos la nocion de grafo estructural; asi como de algunas propiedades basicas.

En el tercer capitulo, definimos y mostramos algunas representaciones de los operadores erosion y dilatacion de un grafo bajo una funcion de vecindades generada por un grafo estructural $\mathcal{A}$. Finalmente, se presentan las conclusiones y propuestas para un futuro trabajo.

Índice general

Introducción vii

1. Preliminaries 1
1.1. Lattices y operadores morfológicos 1
1.2. Filtros Morfológicos 10
1.2.1. Morfología aplicada al Fun(V) 14

2. 17
2.1. Elementos de la teoría de grafos 17
2.2. Gráficos binarios y de nivel de gris 20
2.3. Un caso especial: los operadores gráficos no estructurados 22
2.4. Representación gráfica de imágenes 24
2.5. Grafos estructurales 27

3. Morfología Gráfica 35
3.1. Erosiones y dilataciones 35
3.2. Aperturas y cierres 40

Conclusiones 49

Bibliografía 51

Simbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
G	Grafo.
V	Conjunto de vértices.
E	Conjunto de aristas.
K^n	Grafo completo con n vértices.
$\|G\|$	Numero de vértices de G.
$N_G(v)$	Vecindad del vértice v respecto del grafo G.
$G \hookrightarrow G'$	Homeomorfismo del grafo G en G'.
C^n	Ciclo de longitud n.
$\mathrm{Sim}(G)$	Grupo de simetrias de G.
$\mathcal{A}$	Grafo estructural o s-grafo.
$B_{\mathcal{A}}$	Brotes de $\mathcal{A}$.
$R_{\mathcal{A}}$	Raíces de $\mathcal{A}$.
$\delta, \oplus$	Dilatación
$\varepsilon, \ominus$	Erosión.
$\circ$	Apertura.
$\bullet$	Cierre.
$\alpha_{\mathcal{A}}$	Apertura estructural gráfica.
$\bigvee$	El supremo de un subconjunto en la lattice $\mathcal{L}$.
$\bigwedge$	El ínfimo de un subconjunto en la lattice $\mathcal{L}$.
$\check{N}(v)$	Función de vecindades reciproca de $N(v)$
$\mathcal{L}$	Lattice $(E, \leq)$.
$\hat{B}$	Reflección del conjunto B.
$\mathcal{P}(E)$	Conjunto potencia de E.
$\mathtt{Inv}(\psi)$	Dominio de invarianza de ψ.

Capítulo 1

Preliminaries

En este capítulo, se presentan y analizan algunos de los conceptos básicos de la "morfología clásica", es decir se estudian los operadores morfológicos sobre subconjuntos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y sobre la lattice de funciones reales definidas sobre $\mathbb{Z}^2$. Estas definiciones pueden ser generalizadas a las lattices completas, se presenta también la definición general y se demuestra que estas son compatibles con las que trabajaremos en el resto de la presente tesis.

1.1. Lattices y operadores morfológicos

Una lattice $\mathcal{L} = (E, \leq)$ es un conjunto E equipado de una relación de orden "$\leq$", la cual es reflexiva ($\forall x \in E, x \leq x$), transitiva (Si $x, y, z \in E$ son tales que $x \leq y, y \leq z$, entonces $x \leq z$) y anti-simétrica ($x \leq y, y \leq x$ se concluye que $x = y$); además la relación de orden satisface la siguiente propiedad: Para cualquier par de elementos $x, y \in E$ existen los elementos $x \wedge y$ y $x \vee y$, llamados el ínfimo y el supremo de x e y, respectivamente. Diremos que una lattice $(E, \leq)$ es completa si para cualquier $P \subseteq E$ existen el supremo $\vee P$ y el ínfimo $\wedge P$ elementos de E.

Ejemplo 1.1. Sea E un conjunto arbitrario y $\mathcal{P}(E)$ la familia de todos los subconjuntos de E, ordenados bajo la contención (i.e. $A \leq B$ si y solo si

$A \subseteq B$); forman una lattice completa donde el ínfimo y el supremo vienen dados por la intersección y la unión; respectivamente.

Ejemplo 1.2. En la imagen (1.1), se muestra una represetación de la lattice de colores aditivos primarios. Cada elemento es un vector, donde 0 representa la ausencia de un primario color y 1 su presencia. El color negro está representado por $(0, 0, 0)$ y el blanco por $(1, 1, 1)$. El rojo es (1, 0, 0), el verde es (0, 1, 0), etc; mientras que el color morado por (1, 0, 1).

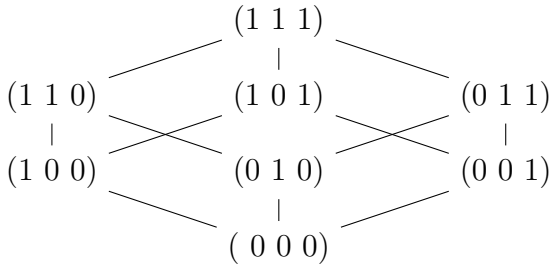


Figura 1.1: Lattice **RGB**.

A continuación, se presenta la lattice con la que trabajaremos en los capítulos siguientes.

Ejemplo 1.3. Sea V un conjunto cualesquiera y T una lattice completa, definimos la colección de todas las funciones de V hacia T como $\text{Fun}(V)$. Además diremos que $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$, para toda $x \in V$.

Proposición 1.1. *Con la estructura dada por "$\leq$", (Fun$(V), \leq$) es una lattice completa.*

Demostración. Primero demostraremos, que $\leq$ satisface las propiedades de un orden parcial, posteriormente que en efecto; $\text{Fun}(V)$ es una lattice completa.

- Sea $f \in \text{Fun}(V)$, entonces tenemos que $f(x) \leq f(x)$ para cualquier $x \in V$, así $f \leq f$, por lo tanto $\leq$ es reflexiva.
- Si $f, g, h \in \text{Fun}\ (V)$ son tales que $f \leq g, g \leq h$, y $x \in V$, ocurre que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, es decir que para cualquier $x \in V$ se tiene que $f(x) \leq h(x)$; es decir $f \leq h$, por lo tanto $\leq$ es transitiva.

- Sean $f, g \in \text{Fun}(V)$ tales que $f \leq g$ y $g \leq f$, luego sea $x \in V$, entonces $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq h(x), f(x) = g(x)$, por lo tanto $f = g$ y $\leq$ es antisimétrica.

- Sea $P \subseteq \text{Fun}(V)$, $P = \{f_i : i \in I\}$. Vamos a construir $\vee P$ y $\wedge P$. Para cualquier $x \in V$, definimos el conjunto $V_x = \{f(x) : f \in P\} \subseteq T$, el cual si es una lattice completa; por lo cual existen $\vee V_x, \wedge V_x$, así pues definimos a las funciones $f_{\text{ínf}}, f_{\text{sup}}$ de la siguiente forma: $f_{\text{ínf}}(x) = \wedge V_x$ y $f_{\text{sup}} = \vee V_x$. Solo resta probar que dichas funciones son, en efecto el ínfimo y el supremo de P, respectivamente. Únicamente probaremos que $f_{inf} = \wedge P$, la función f_{sup} es análoga.

  - Sean $f \in P, x \in V$, notemos que $f_{\text{ínf}}(x) = \vee V_x \leq f(x)$, entonces $f_{\text{ínf}} \leq f$ para toda $f \in P$, por lo cual $f_{\text{ínf}}$ es una cota inferior para el conjunto P, solo resta ver que es la mayor.
  - Supongamos que existe $\overline{f}$ tal que $f_{\text{ínf}} \leq \overline{f} \leq f$ para cualquier $f \in P$ y que $f \neq f_{\text{ínf}}$, entonces existe $\overline{x} \in V$ tal que $f_{\text{ínf}}(\overline{x}) < \overline{f}(\overline{x}) \leq f(\overline{x})$ para cualquier $f \in P$, lo cual es una contradicción, puesto que $f_{\text{ínf}}(\overline{x}) = \wedge V_{\overline{x}} < \overline{f}(\overline{x})$, por lo cual $f_{\text{ínf}} = \wedge P$. Análogamente se prueba que $f_{\text{sup}} = \vee P$.

□

Definición 1. *Una imagen es una función $f : V \to T$, donde V es el conjunto de todos los puntos de la imagen y T es el conjunto de posibles valores de f.*

Cuando $T = \{0, 1\}$ diremos que f es una imagen binaria (generalmente 0 representa el color blanco mientras que 1 al color negro), mientras que $\text{Fun}(V)$ es el espacio de todas las imágenes binarias de V. Una imagen en escala de grises puede variar el conjunto T codificado desde 8 bits a 256 bits. Por otra parte, V puede ser un espacio continuo (por ejemplo $V = \mathbb{R}$) o un espacio discreto ($V = \mathbb{Z}$). En particular, estaremos interesados con los operadores que preservan cierta estructura de orden.

Definición 2. *Sea E una lattice, el operador $\Psi : E \to E$ es:*

1. *Creciente si para cualesquiera* $x, y \in E : x \leq y \Rightarrow \Psi(x) \leq \Psi(y)$.
2. *Extensivo si* $x \leq \Psi(x)$, *para toda* $x \in E$,.
3. *Anti-extensivo si para toda* $x \in E, x \geq \Psi(x)$.
4. *Idempotente si* $\Psi^2 = \Psi$, *es decir que para cualquier* $x \in E$, $\Psi(\Psi(x)) = \Psi(x)$.

En el estudio de la morfología clásica, a menudo se estudian imágenes a nivel binario (blanco y negro) o a una cierta escala de grises utilizando familias especiales de conjuntos B, que se conocen a priori y se pueden adaptar a las diferentes necesidades que se desean satisfacer(respecto al tamaño, orientación, etc.), a dichos conjuntos lo llamaremos elementos estructurales. Haremos un paréntesis para recordar que podemos ver a una función $f : V \to T$, como el conjunto $X = \{(x, f(x))\} \subseteq V \times T$. Más aún, si $T = \{0, 1\}$, $\text{Fun}(V) \simeq \mathcal{P}(V)$.

Como lo comentamos al inicio de la sección, la morfología clásica tiene como objetos de estudio a los subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$. Sea X una imagen binaria, la traslación de X por el punto $p \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $X_p = \{x + p : x \in X\}$, mientras que para un conjunto B nos referimos a su reflexión como $\hat{B} = \{-b : b \in B\}$.

Definición 3. *La dilatación morfológica de* X *por el elemento estructural* B *esta dada por el conjunto definido y denotado de la siguiente forma:*

$$\delta_B(X) = X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \tag{1.1}$$

Cuando $X = \{p\}$, *escribimos* $\delta_B(p)$ *en vez de* $\delta_B(\{p\})$.

Ejemplo 1.4. En la figura (1.2), vemos la dilatación de una cruz por un triángulo. El origen o el elemento estructural es uno de los vértices del triángulo B y se muestra como un pequeño disco negro: (a) el original X (el cruz gris claro) y B (el triángulo oscuro); (b) la dilatación que se está produciendo; y (c) la final resultado con el conjunto X original superpuesto.

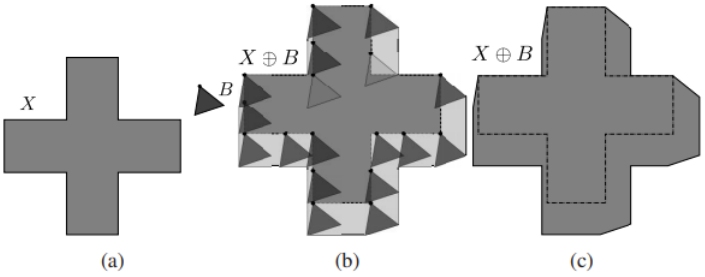


Figura 1.2

Como consecuencia, la dilatación de X por B "agranda" X, de ahí el nombre de la transformación. En la fórmula, X y B juegan papeles simétricos, es decir $X \oplus B = B \oplus X$.

Observación 1.1.

$$\delta_B(X) = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b : x \in X, b \in B\} \tag{1.2}$$

Proposición 1.2. *El operador dilatación tiene las siguientes propiedades:*

- *Es creciente.*
- *Si el origen pertenece a B, entonces δ_B es extensiva.*

Demostración. Sean X, Y conjuntos tales que $X \subseteq Y$ y B el elemento estructural.

- $\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_b$, como $X \subseteq Y, X_b \subseteq Y_b$ para cualquier $b \in B$, se tiene que $\bigcup_{b \in B} X_b \subseteq \bigcup_{b \in B} Y_b = \delta_B(Y)$, es decir $\delta_B(X) \leq \delta_B(Y)$.
- Si $0 \in B$, entonces $X = X_0 \subseteq \bigcup_{b \in B} X_b = \delta_B(X)$.

□

Definición 4. *La erosión de X por B se define y se denota mediante el siguiente conjunto:*

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \{p \in X : B_p \subseteq X\} \tag{1.3}$$

Cuando $X = \{p\}$*, escribimos* $\varepsilon_B(p)$ *en vez de* $\varepsilon_B(\{p\})$

Ejemplo 1.5. En la imagen (1.3), vemos la erosión de una cruz por el mismo elemento estructurante triangular que en la Figura 1.2: (a) la X original (la cruz gris claro) y B (el triańgulo oscuro); (b) la erosión tomando sitio; y (c) el resultado final, superpuesto dentro del conjunto original X.

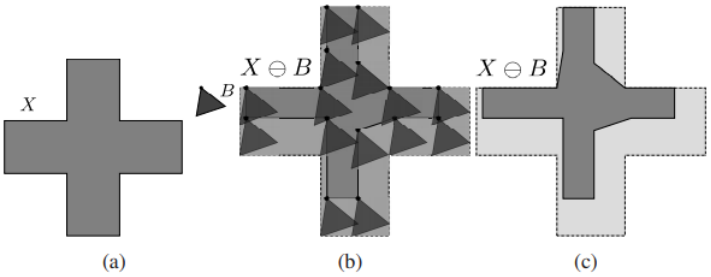


Figura 1.3

Proposición 1.3. $X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$

Demostración. Sean X, B conjuntos cualesquiera, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x \in X \ominus B &\Leftrightarrow B_x \subseteq X \\ &\Leftrightarrow b + x = \overline{x} \in X, \forall b \in B \\ &\Leftrightarrow x = \overline{x} - b, \forall b \in B \\ &\Leftrightarrow x \in X_{-b}, \forall b \in B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{b \in B} X_{-b} \end{aligned}$$

□

Geométricamente, la erosión de X por B es el lugar geométrico de los puntos p tal que B_p está completamente incluido en X. Una erosión "enconje" conjuntos, de ahí su nombre. Ver figura 1.3

Proposición 1.4. *Algunas propiedades inmediatas del operador erosión son las siguientes:*

- *ε es creciente bajo el orden de la contención. Es decir, si $X \subseteq Y$, entonces $\varepsilon_B(X) \subseteq \varepsilon_B(Y)$.*
- *Si $0 \in B$, entonces ε es anti-extensivo.*

Demostración. Sean X, Y subconjuntos y B el elemento estructural.

- Como $X \subseteq Y$, tenemos que $X_{-b} \subseteq Y_{-b}$ para cualquier b. Entonces $\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b\in B} X_{-b} \subseteq \bigcap_{b\in B} Y_{-b} = \varepsilon_B(Y)$
- Si $0 \in B, \varepsilon_B(X) = \bigcap_{b\in B} X_{-b} \subseteq X_{-0} = X$

□

Corolario 1.1. *Si X, B son conjuntos y $0 \in B$, entonces $X \ominus B \subset X \subset X \oplus B$.*

La siguiente definición extiende los conceptos de erosión y dilatación a una estructura de lattice general.

Definición 5 (Definición general de erosión y dilatación)**.** *Sea E una lattice y $\psi : E \to E$. Diremos que ψ es:*

- *Una erosión si $\psi(\bigwedge_{i\in I} X_i) = \bigwedge_{i\in I} \psi(X_i)$ para familia $(X_i)_{i\in I} \subseteq E$.*
- *Una dilatación si $\psi(\bigvee_{i\in I} X_i) = \bigvee_{i\in I} \psi(X_i)$ para cualquier $(X_i)_{i\in I} \subseteq E$.*

Demostraremos que las definiciones dadas anteriormente, son compatibles con la que se dio en un principio. Solo probaremos que δ_B es una dilatación, el otro caso se procede de manera similar.

Demostración. Sea B un elemento estructural y $(X_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_B\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) &= \bigcup_{b\in B}\Big(\bigcup X_i\Big)_b \\
&= \bigcup_{b\in B}\{x+b \text{ para algún } x\in X_i\} \qquad \text{por (1.2)} \\
&= \{x+b \text{ para algún } b\in B, x\in X_i, i\in I\} \\
&= \bigcup_{i\in I}\{x+b : x\in X_i\} \\
&= \bigcup_{i\in I}\big(\delta_B(X_i)\big)
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.1. *La dilatación y la erosión son operadores duales respecto al complemento y la reflexión, es decir; para cualquier par de conjuntos X, B se cumple que $X \ominus B = (X^c \oplus \hat{B})^c$.*

Demostración.

$$\big(X^c \oplus \hat{B}\big)^c = \Big(\bigcup_{b\in\hat{B}} X_b^c\Big)^c = \Big(\Big(\bigcap_{b\in\hat{B}} X_b\Big)^c\Big)^c = \bigcap_{b\in\hat{B}} X_b = X \ominus B$$

□

Proposición 1.5. *Sean X, Y conjuntos arbitrarios y B un elemento estructural, entonces*

$$\delta_B(X) \leq Y \Leftrightarrow X \leq \varepsilon_B(Y)$$

Demostración. Sean X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y B un elemento estructural.

- Supongamos que $\delta_B(X) \leq Y$, es decir $\bigcup_{b\in B} X_b \subseteq Y$ y sean $b\in B, x\in X$; entonces $x+b = y$ para algún $y\in Y$, por lo que $x = y-b \in Y_{-b}$ para cualquier $b\in B$, es decir $X \subseteq \bigcap_{b\in B} Y_{-b} = \varepsilon_B(Y)$.

- Ahora, supongamos que $X \subseteq \varepsilon_B(Y)$, entonces $X \subseteq \bigcap_{b\in B} Y_{-b}$. Para cualquier $b \in B$, se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y_{-b} &\Rightarrow x \in Y_{-b},\ x \in X \\ &\Rightarrow x = y - b \\ &\Rightarrow x + b = y \in Y \\ &\Rightarrow X_b \subseteq Y \\ &\Rightarrow X \subseteq \delta_B(Y) \end{aligned}$$

□

A la pareja formada por (δ, ε) le llamaremos adjunción. De manera análoga a la definición general de erosión y dilatación en lattices completas, tenemos la siguiente definición de adjunción.

Definición 6 (Definición general de adjunción)**.** *Sean α, β dos operadores en la lattice E, diremos que (α, β) forman una adjunción si satisfacen la siguiente propiedad:*

$$\alpha(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \beta(y) \tag{1.4}$$

para cualesquiera $x, y \in E$.

Teorema 1.2. *Sea (α, β) una adjunción en $\mathcal{L} = (E, \leq)$, entonces α es una dilatación y β es una erosión.*

Demostración. Solo demostraremos que α es una dilatación, el hecho de que β es una erosión se obtiene de forma equivalente. Sea $F \subseteq E, y \in E$

$$\begin{aligned} \bigvee_{x\in F} \alpha(x) \leq y \Leftrightarrow \forall\, x \in F, \alpha(x) \leq y & \qquad \text{de la definición de } \vee \\ \Leftrightarrow \forall\, x \in F, x \leq \beta(y) & \qquad (6) \\ \Leftrightarrow \bigvee F \leq \beta(y) & \qquad \text{de la definición de } \vee \\ \Leftrightarrow \alpha\Big(\bigvee F\Big) \leq y & \qquad (6) \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier $y \in E$, $\bigvee_{x\in E}(\alpha(x)) \leq y$ si y solo si $\alpha(\bigvee_{x\in E} x) \leq y$. Tomando $y = \bigvee_{x\in E}(\alpha(x))$ y $y = \alpha(\bigvee_{x\in E} x)$ obtenemos que $\bigvee_{x\in E}(\alpha(x)) = \alpha(\bigvee_{x\in E})$, es decir; α es una dilatación. □

1.2. Filtros Morfológicos

Definición 7. *Un filtro morfológico es un operador ψ que es tanto creciente como idempotente.*

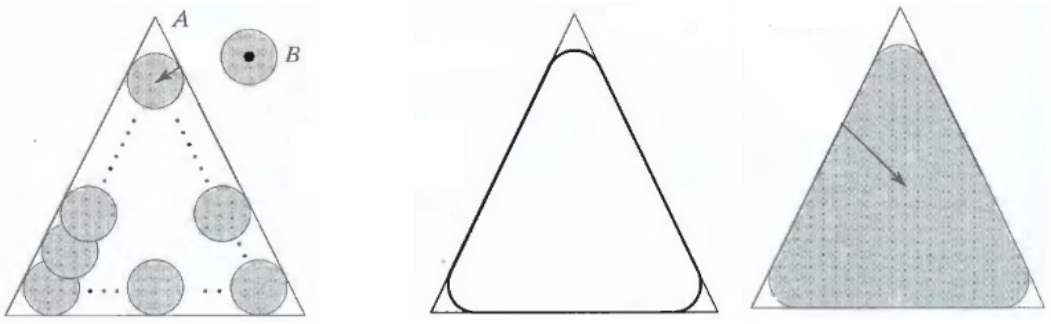
Definición 8. *Definimos la apertura del conjunto X por el elemento estructural B como el conjunto*

$$\gamma_B(X) = X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \tag{1.5}$$

mientras que el cierre de X por B

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.6. En la figura (1.4), vemos la apertura de un triangulo por el elemento estructurante B : (a) el triangulo original y B (circulo en negro); (b) la apertura tomando forma; y (c) el resultado final, superpuesto dentro del conjunto original A.



(a) **(b)** **(c)**

Figura 1.4

A continuación, veremos un par de equivalencias a la definición de apertura y cierre.

Lema 1.1. *Podemos expresar la apertura del conjunto X por el elemento estructural B como*

$$X \circ B = \bigcup_{B_x \subseteq X} B_x$$

Demostración. Sea X un conjunto cualesquiera y B un elemento estructural, entonces

$$\begin{aligned} x \in X \circ B &\Leftrightarrow x \in (X \ominus B) \oplus B \\ &\Leftrightarrow \hat{B}_x \cap (X \ominus B) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \text{ tal que } y \in \hat{B}_x \text{ y } y \in X \ominus B \\ &\Leftrightarrow \exists\, b \in B : y = x - b \text{ y } B_y \subset X \\ &\Leftrightarrow B_y \subseteq X \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{B_y \subseteq X} B_y \end{aligned}$$

□

Lema 1.2. *El cierre del conjunto X bajo el elemento estructural B puede verse como*

$$X \bullet B = \Big(\bigcup_{\hat{B}_x \subseteq X^c} \hat{B}_x \Big)^c = \bigcap_{\hat{B}_x \subseteq X^c} \hat{B}_x^c$$

Demostración. Sea X un conjunto y B un elemento estructural, el lema se sigue de la siguiente cadena de bicondicionales

$$\begin{aligned} x \in X \bullet B &\Leftrightarrow x \in (X \oplus B) \ominus B \\ &\Leftrightarrow B_x \subseteq X \oplus B \\ &\Leftrightarrow (X \oplus B)^c \subseteq B_x^c \\ &\Leftrightarrow \forall y \in (X \oplus B)^c \Rightarrow y \in B_x^c \\ &\Leftrightarrow \hat{B}_y \cap X = \emptyset \Rightarrow y \neq x + b, \forall b \in B \\ &\Leftrightarrow \hat{B}_y \subseteq X^c \Rightarrow x \neq y - b, \forall b \in B \\ &\Leftrightarrow \hat{B}_y \subseteq X^c \Rightarrow x \in \hat{B}_y^c \\ &\Leftrightarrow x \in \hat{B}_y^c, \forall \hat{B}_y \subseteq X^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\hat{B}_y \subseteq X^c} (\hat{B}_y)^c = \Big(\bigcup_{\hat{B}_x \subseteq X^c} \hat{B}_x \Big)^c \end{aligned}$$

□

Al igual que con los operadores erosión y dilatación, también existe una dualidad entre la apertura y el cierre de un conjunto X bajo un elemento estructural B.

Proposición 1.6. *Sea X un conjunto cualesquiera y B un elemento estructural, entonces:*

$$X \circ B = (X^c \bullet \hat{B})^c$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (X^c \bullet \hat{B})^c &= \Big(\Big(\bigcup_{\widehat{\hat{B}_x} \subseteq (X^c)^c} \widehat{\hat{B}_x} \Big)^c \Big)^c && \text{por el lema (1.2)} \\ &= \bigcup_{B_x \subseteq X} B_x \\ &= X \circ B && \text{por el lema (1.1)} \end{aligned}$$

□

Corolario 1.2. *Para cualquier conjuntos X y elemento estructural B se cumple que:* $(X \bullet B)^c = (X^c \circ \hat{B})$

Teorema 1.3. *El operador apertura tiene las siguientes propiedades:*

1a) Creciente;

2a) Anti-extensivo;

3a) Idempotente.

Mientras que los cierres son:

1b) Creciente;

2b) Extensivo;

3b) Idempotente.

Demostración. Primero, demostraremos las propiedades de las aperturas.

1a. Si X, Y son tales que $X \subseteq Y$ y B es un conjunto cualesquiera, como tanto el operador dilatación como erosión son crecientes, tenemos que $X \ominus B \subseteq Y \ominus B \Rightarrow X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \subseteq (Y \ominus B) \oplus B = Y \circ B$.

2a. Por el lema (1.1), $X \circ B = \bigcup_{B_x \subseteq X} B_x \subseteq X$.

3a. Para esto, primero veamos que $B_x = B_x \circ B$. En efecto, como las aperturas son crecientes (inciso 1a), $B_x \circ B \subseteq B_x$. Mientras que; por el lema (1.1), $B_x \circ B = \bigcup\{B_y : B_y \subseteq B_x\} \supseteq B_x$. Nuevamente por el inciso (1a) tenemos $B_x \subseteq X \Leftrightarrow B_x \circ B \subseteq X \circ B \Leftrightarrow B_x \subseteq X \circ B$. Entonces $X \circ B = \bigcup\{B_x : B_x \subseteq X\} = \bigcup\{B_x : B_x \subseteq X \circ B\} = (X \circ B) \circ B$.

1b. Como $\ominus$ y $\oplus$ son crecientes, si $X \subseteq Y$, $X \oplus B \subseteq Y \oplus B \Rightarrow X \bullet Y = (X \oplus B) \ominus B \subseteq (Y \oplus B) \ominus B = Y \bullet B$

2b. Primero, notemos que $\bigcup\{\hat{B}_x : \hat{B}_x \subseteq X^c\} \subseteq X^c$, entonces por el lema (1.2), $X \subseteq \left(\bigcup\{\hat{B}_x : \hat{B}_x \subseteq X^c\}\right)^c = X \bullet B$.

3b. Finalmente para la demostración de la idempotencia tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(X \bullet B) \bullet B &= \left((X \bullet B)^c \circ \hat{B}\right)^c && \text{Por el corolario (1.2)} \\
&= \left(\left((X^c \circ \hat{B})^c\right)^c \circ \hat{B}\right)^c && \text{Por el corolario (1.2)} \\
&= \left((X^c \circ \hat{B}) \circ \hat{B}\right)^c \\
&= (X^c \circ \hat{B})^c && \text{Por (3) de apertura} \\
&= X \bullet B
\end{aligned}$$

□

Finalizamos el estudio de la morfología clásica con una definición que amplia el concepto de apertura y cierre a las lattices completas.

Definición 9 (Definición general de apertura y cierre)**.** *Sea $\mathcal{L}$ una lattice y α, β operadores en $\mathcal{L}$. Entonces:*

- *α es una apertura si es anti-extensiva, creciente e idempotente.*
- *β es un cierre si es extensiva, creciente e idempotente.*

1.2.1. Morfología aplicada al Fun(V)

A continuación se presentan los conceptos de dilatación y erosión para la lattice Fun(V). En el espacio de funciones de V, definimos una función de vecindades en V como un mapeo $N : V \to \mathcal{P}(V)$.
Notemos que para cualquier función de vecindades corresponde una función de vecindades reciproca $\check{N}$ definida de la siguiente forma:

$$\check{N}(v) = \{w \in V : v \in N(w)\}$$

Teorema 1.4. *Cualquier función de vecindades tiene asociada una erosión y una dilatación, dadas de la siguiente forma.*

$$\delta(f)(v) = \sup\{f(w) : w \in \check{N}(v)\} \tag{1.7}$$

$$\varepsilon(f)(v) = \text{ínf}\{f(w) : w \in N(v)\} \tag{1.8}$$

Demostración. Solo demostraremos que el operador δ es en efecto una dilatación. Recordemos que un operador en $\text{Fun}(V)$ es una dilatación si para cualquier $\{f_i : i \in I\} \subseteq \text{Fun}(V)$, se cumple:

$$\delta\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big) = \bigvee_{i\in I} \delta(f_i)$$

$\delta\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big), \bigvee_{i\in I} \delta(f_i)$ son funciones del espacio $\text{Fun}(V)$. Sea $v \in V$, entonces:

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big)(v) &= \sup_{w\in\check{N}(v)} \Big\{\bigvee_{i\in I} f_i(w)\Big\} \\
&= \sup_{w\in\check{N}(v)} \Big\{\sup_{i\in I} f_i(w)\Big\} \\
&= \sup_{i\in I} \Big\{\sup_{w\in\check{N}(v)} f_i(w)\Big\} \\
&= \sup_{i\in I} \Big\{\delta\big(f_i\big\}(v) \\
&= \bigvee_{i\in I} \Big(\delta(f_i)\Big)(v).
\end{aligned}$$

□

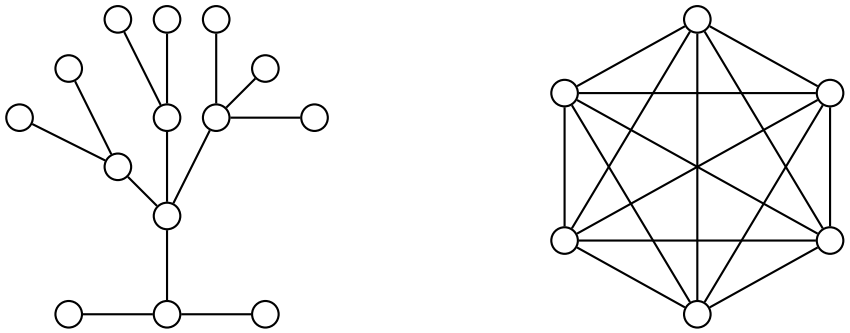
Si $\check{\varepsilon}$ y $\check{\delta}$ son la erosión y dilatación correspondientes a la vecindad recíproca $\check{N}$, uno puede demostrar que $\varepsilon^* = \check{\delta}$ y $\delta^* = \check{\varepsilon}$.

Capítulo 2

2.1. Elementos de la teoría de grafos

En esta sección, mostramos los elementos necesarios de la teoría de grafos para el desarrollo de de las secciones y capítulos posteriores , si algún otro concepto o teorema es necesario se desarrollará previamente en la sección correspondiente, o en su debido caso; se dará una referencia donde puede ser consultado.
Dado V un conjunto finito, definimos $[V]^2 = \{\{u, v\} \in \mathcal{P}(V) : u \neq v\}$, es decir todos los subconjuntos de V con exactamente 2 elementos.

Definición 10. *Un grafo no orientado G con conjunto de vértices E es un par ordenado $G = (V, E)$, donde $E \subseteq [V]^2$. $V(G) = V$ y $E(G) = E$.*



(a) **(b)**

Figura 2.1

Todo grafo puede ser representado en el plano de la siguiente manera: sus vértices se representan por puntos o círculos distribuidos arbitrariamente y sus

aristas mediante arcos o segmentos de recta que unen dos vértices si éstos están contenidos en una arista, (ver figura 2.1).
Si $u, v \in V$ son tales que $\{u, v\} \in E$, entonces diremos que u y v forman una arista, es usual representar por uv al conjunto $\{u, v\}$. Por otra parte diremos que $G' = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Definición 11. *Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Un homeomorfismo de G a G' es un función inyectiva $\theta : V \to V'$ con la siguiente propiedad:*

$$uv \in E \Rightarrow \theta(u)\theta(v) \in V'.$$

Si existe un homeomorfismo entre G y G', diremos que los grafos son homeomorfos y lo denotaremos por $G \hookrightarrow G'$.

Si, además θ es suprayectiva (y como consecuencia, biyectiva), diremos que G y G' son isomorfos, lo cual denotaremos por $G \simeq G'$. Un isomorfismo del grafo G en sí mismo es llamado una *simetría* de G. Definimos y denotamos por $\mathrm{Sim}(G)$ a la familia de todas las simetrías de G; la función identidad `Id` se llama la simetría trivial de G. Ver figura 2.2

(a) **(b)**

Figura 2.2: Una simetría del grafo C^5.

Observación 2.1. $(\mathrm{Sim}(G), \circ)$ forman un grupo bajo la composición de funciones, a este grupo le llamaremos grupo simétrico de G.

Dado un grafo $G = (V, E)$, una colección de vértices $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_{k+1})$ se dice un camino entre v y w si $v_1 = v, v_{k+1} = w$ y $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \ldots, k$. La longitud del camino $l(\pi) = k$.

Definición 12. *Para un grafo G, definimos y denotamos la distancia entre $v, w \in V(G)$ de la siguiente forma:*

$$d_G(v, w) = \text{ínf}\{l(\pi) : \pi \text{ es un camino que conecta a } v \text{ y } w\}.$$

En la figura 2.3 se ilustran los conceptos de camino, longitud y distancia entre vértices.

Ejemplo 2.1. En la figura 2.3 se ilustra este concepto. Observe en este caso que la bola consiste de

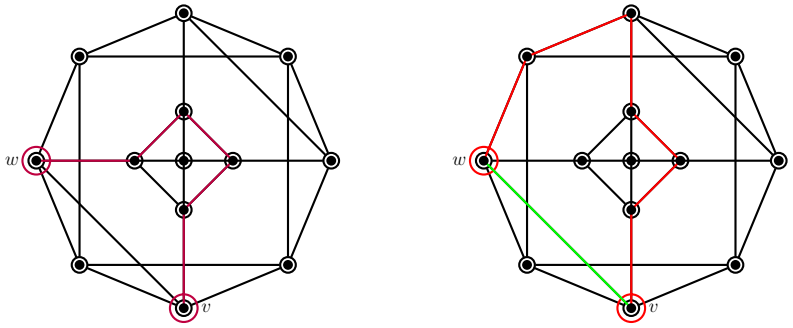


Figura 2.3: Dos caminos entre v y w, uno de longitud igual a 5 y otro de longitud 6. Notemos que $d_G(v, w) = 1$, correspondiente al camino verde

Sin embargo, puede ocurrir que no exista ningún camino entre dos vértices v, w; en este caso diremos que la distancia entre estos vértices es igual a ∞. Así, en el sentido estricto d_G no es una métrica.

Definición 13. *Dado un vértice $v \in V$ y un entero positivo n, la bola con centro en v y radio n es el conjunto*

$$B_n(v) = \{w \in V : d_G(v, w) \leq n\}$$

En la imagen 2.4 se ilustra este concepto, observe que en este caso la bola consiste de 4 vértices.

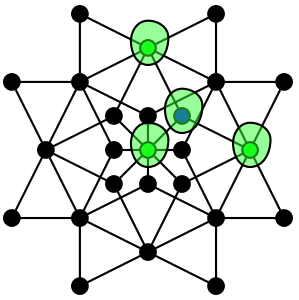


Figura 2.4: Bola de radio 1 centrada en el vertice azul.

2.2. Gráficos binarios y de nivel de gris

En el capítulo 1 presentamos una pequeña introducción a la téoria de los operadores morfológicos clásica, así como de la lattice $\mathrm{Fun}(V)$, cuando V es un conjunto arbitrario. En este capítulo estaremos interesados en el caso donde el conjunto V son los vértices de un grafo $G = (V, E)$.
Sea $G = (V, E)$ un grafo y $f \in \mathrm{Fun}(V)$, entonces decimos que f es un *gráfico de nivel de gris*. Si el conjunto $T = \{0, 1\}$ entonces f es llamado un gráfico binario, también, en este caso usaremos $(X|G)$ en vez de $(f|G)$.
A veces cuando queremos enfatizar el papel del grafo G escribimos $(f|G)$ en vez de f. Si $(f|G)$ es un gráfico a nivel de gris y $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$, definimos la función $(\tau f|G)$ mediante la regla de asociación $\tau f(v) = f(\tau^{-1}(v))$ para cada $v \in V$.

Definición 14. *Un operador gráfico es un mapeo que asocia a cualquier grafo $G = (V, E)$ un operador ψ_G en el espacio de funciones Fun(V).*

Definición 15. *Un operados gráfico es G-**creciente** si es creciente en G, es decir; $\psi(X|G) \subseteq \psi(X|G')$ para $G \subseteq G'$ y $X \subseteq V(G)$.*

Un ejemplo de un operados G-creciente es el operador N_G.

Definición 16. *Una función de vecindades gráfica es un mapeo N que, para cualquier grafo $G = (V, E)$ define una función vecindario para el conjunto de vértices V.*

Definición 17. *Un operador gráfico preserva simetrías si $\psi(f\tau|G) = \tau\psi(f|G)$ para cualquier $f \in$ Fun(V), $\tau \in$ Sim(G) y cualquier grafo $G = (V, E)$.*

Ejemplo 2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Definimos la función de vecindades gráfica N_G de la siguiente forma para cualquier $v \in V$.

$$N_G(v) = \{w \in V : vw \in E\} \cup \{v\}$$

Afirmación 1. N_G preserva simetrías, es decir;

$$\tau\big(N_G(v)\big) = N_G\big(\tau(v)\big)$$

para cualquier $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$, $v \in V$.

Demostración. Sea $v \in V$ arbitrario pero fijo. Definimos $\tau(E) = \{\tau(u)\tau(v) : uv \in E\}$. Es claro que $E = \tau(E)$.

$\subseteq$) Si $w \in \tau\big(N_G(v)\big)$, entonces $w = \tau(u)$ para algún $u \in N_G(v)$. Notemos los siguientes casos:

- $u = v$, entonces $w = \tau(v) \in N_G\big(\tau(v)\big)$.
- Por otro lado, si $v \neq v$, entonces tenemos que $u = \tau^{-1}(w)$ debido a que $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$ es biyectiva. Así $\tau^{-1}(w)v = uv \in E$, por lo que $\tau(\tau^{-1}(w))\tau(v) = w\tau(v) \in \tau(E)$, i.e. $w \in N_G(\tau(v))$.

$\supseteq$) Ahora, si $w \in N_G\big(\tau(v)\big)$, tenemos los siguientes casos:

- $w = \tau(v) \Rightarrow w \in \tau\big(N_G(v)\big)$.
- Si $w = \tau(u) \neq \tau(v)$, entonces $\tau(u)\tau(v) \in \tau(E)$, como $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$ tenemos que $\tau^{-1} \in \mathrm{Sim}(G)$. Por lo tanto $wv = \tau^{-1}\big(\tau(u)\big)\tau^{-1}\big(\tau(v)\big) \in E$; es decir $w \in \tau\big(N_G(v)\big)$.

□

2.3. Un caso especial: los operadores gráficos no estructurados

Previo a la introducción de la noción de s-grafo, la cual fue descrita en [HHV92]. presentamos en esta seccion el concepto de operador grafico no estructurado. Al final del capítulo y en el capítulo 3, se presentan los operadores gráficos estructurales; sin embargo en [Dou93] se prueba que estos operadores resultan ser un caso especial de los estructurados. En el presente sección, las operaciones morfológicas son directamente derivadas de la distancia inducida por el conjunto de aristas E sobre el conjunto de vértices V

Definición 18. *Dado un gráfico de nivel de gris $f \in Fun(V)$, con $G = (V, E)$ un grafo. Definimos la dilatación de tamaño $n \geq 0$ como:*

$$\begin{aligned} \delta^n(f) : V &\to T \\ v &\mapsto \text{máx}\{f(w) : w \in B_n(v)\} \end{aligned}$$

Mientras que; la erosión de tamaño $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon^n(f) : V &\to T \\ v &\mapsto \text{mín}\{f(w) : w \in B_n(v)\} \end{aligned}$$

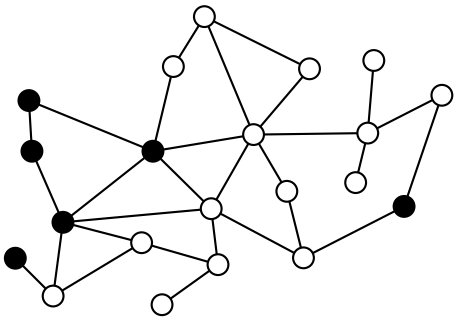
Cuando $n = 1$, el resultado de la dilatación δ^1 lo denotamos simplemente por δ, análogamente; $\varepsilon^1 = \varepsilon$.

Ejemplo 2.3. Consideremos un gráfico binario f y $n \geq 0$ un entero. tenemos que la dilatación de tamaño n para cualquier vértice $v \in V$, se representa de la siguiente forma:

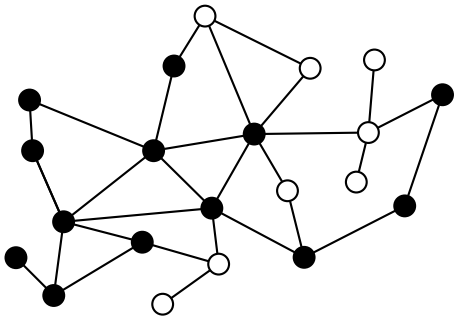
$$\begin{aligned} \text{Sí } f(v) = 0 \text{ y } \exists w \in B_n(v) : f(w) = 1 &\Rightarrow \delta^n(f)(v) = 1 \\ \text{Sí} f(v) = 1 &\Rightarrow \delta^n(f)(v) = 1 \\ \text{En otro caso,} \quad \delta^n(f)(v) &= 0 \end{aligned}$$

Para ilustrar lo anterior, consideremos el gráfico binario de la figura (2.5) donde $n = 1$, y $f \in \text{Fun}(V)$ es tal que si $f(v) = 1$ lo coloreamos de negro, mientras

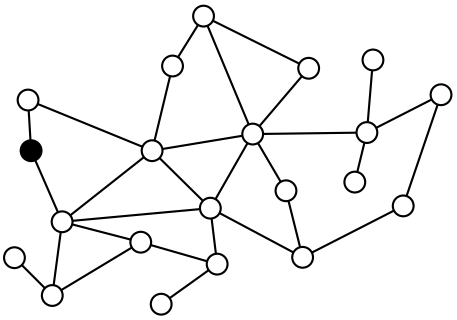
que $f(v) = 0$ lo dejamos en blanco, para cualquier vértice $v \in V$.



(a) $G = (V, E)$



(b) Dilatacion de tamaño 1



(c) Erosion de temaño 1

Figura 2.5

2.4. Representación gráfica de imágenes

En la resolución del problema del tratamiento morfológico de grafos, es decir; el procesamiento de imágenes mediante operadores morfológicos gráficos; el primer paso es el definir y construir nuestros sistemas de vecindades gráficas 2-dimensionales (en general n-dimensionales), con base a nuestra población de objetos inicial.
La modelación matemática usual es mediante las Triangulaciones de Delaunay (DT), los Grafos de Gabriel (GG) y las Vecindades gráficas Relativas (VGR). Estos grafos no dependerán de algún parámetro como distancia máxima entre objetos o la cantidad de vecinos que un vértice puede llegar a tener. Para iniciar la inicio a la definición de las triangulaciones Delaunay, comenzaremos con la definición de los Diagramas de Voronoï. Asumiremos, en general que los objetos son modelados por los puntos $p_1, \ldots, p_n$. Definimos el polígono de Vororoï asociado al punto p_i como:

$$V(p_i) = \partial\{p \in \mathbb{R}^2 : \forall j \neq i, d(p, p_i) < d(p, p_j)\}.$$

En las definiciones de DT, GG y VGR; el conjunto de vértices iniciales es $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$

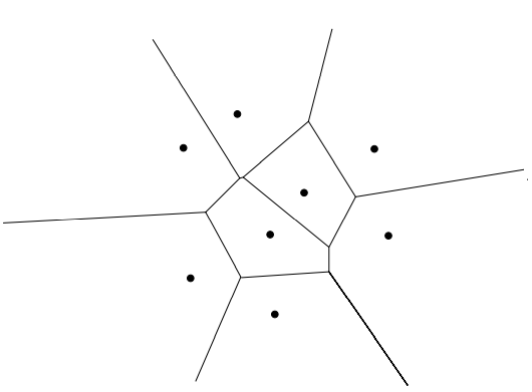
Definición 19. *La Triangulación Delaunay de V es el grafo $G_{td} = (V, E_{td})$. donde $E_{td} = \{p_i p_j : V(p_i), V(p_j)$ son adyacentes$\}$*

Ejemplo 2.4. En la figura (2.6) se muestra la construcción de lospolígono de Vororoï (2.6a), por otra parte en (2.6b) se muestra el grafo de Triangulación Delaunay $G = (V, E_{td})$

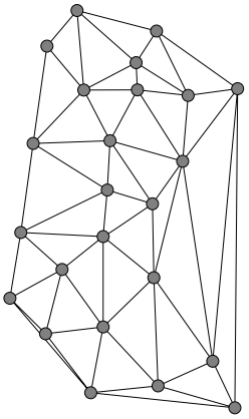
Para definir el Grafo de Gabriel, comenzaremos asociando una región del plano con un par de puntos p, q. $D(p, q)$ denota el disco cerrado que tiene como diámetro a p y q.

Definición 20. *El Grafo de Gabriel asociado al conjunto de vértices V es el grafo $G = (V, E_{gg})$, donde $E_{gg} = \{p_i p_j : p_k \notin D(p_i, p_j),$ si $k \neq i, j\}$*

Ejemplo 2.5. En la figura (2.7a) se muestra el disco $D(p, q)$, mientras que en (2.7b) se observa el gráfico de Gabriel $G = (V, E_{gg})$.

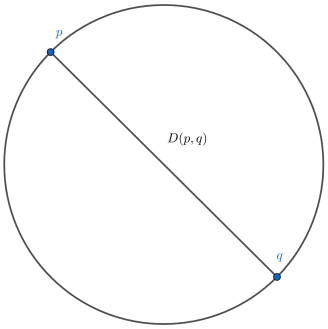


(a) Ejemplo de un diagrama de Voronoï

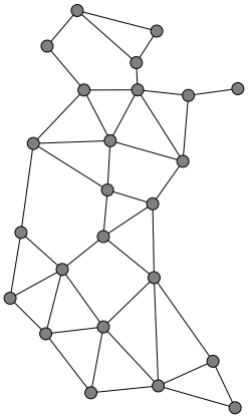


(b) Triangulación Delaunay

Figura 2.6



(a) Disco $D(p,q)$



(b) Grafo de Gabriel $G = (V, E_{gg})$.

Figura 2.7

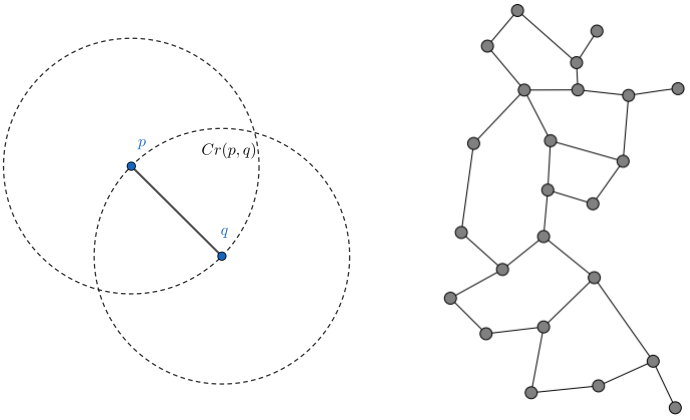
Finalmente; para definir el Grafo de Vecindades Relativas; definimos el creciente de los puntos p, q como $Cr(p,q)$, como la intersección de los discos abiertos centrados en p y q; es decir:

$$Cr(p,q) = C\big(p, d_{\mathbb{R}^2}(p,q)\big) \cap C\big(p, d_{\mathbb{R}^2}(p,q)\big)$$

Ver figura (2.8a).

Definición 21. *El Grafo de Vecindades Relativas asociado al conjunto de vértices V es un grafo $G = (V, E_{gvr})$, donde $E_{gvr} = \{p_i p_j : p_k \notin Cr(p_i, p_j),\ si\ k \neq i, j\}$*

En la figura (2.8b) se muestra el Grafo de Vecindades Relativas asociado al conjunto de vértices V, el cual fue el mismo para la Triangulación Delaunay (2.6b), el Grafo de Gabriel (2.7b) y el Grafo de Vecindades Relativas (2.8b).



(a) Creciente $Cr(p, q)$

(b) Grafo de Vecindades Relativas $G = (V, E_{gvr})$

Figura 2.8

Proposición 2.1. *Dado un conjunto $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$, tenemos las siguientes contenciones:*

$$G_{gvr} \subseteq G_{gg} \subseteq G_{td}.$$

Demostración. Primero; notemos que $D(p,q)\backslash\{p,q\} \subseteq Cr(p,q)$ para cualquier par de puntos p, q.

$E_{gvr} \subseteq E_{gg}$) Si $p_ip_j \in E_{gvr} \Rightarrow \forall k \neq i,j$ se cumple que $p_k \notin Cr(p_i,p_j)$. En particular $p_i \neq p_k \neq p_j$. Por la observación $p_k \notin D(p_i,p_j)\backslash\ \{p_i,p_j\}$, por lo cual concluimos que $p_k \notin D(p_i,p_j)$. Es decir $p_ip_j \in E_{gg}$.

$E_{gg} \subseteq E_{td}$) Si $p_ip_j \in E_{gg}$, definimos $[p_ip_j]$ como el segmento que une a p_i y p_j. Sea q el punto medio de $[p_ip_j]$. **Afirmación:** q pertenece a la frontera de los polígonos de Voronoï $V(p_i), V(p_j)$. En efecto, para cualquier $\epsilon > 0$, tomemos un punto $p_1 \in B(q,\epsilon) \cap [p_iq]$ y un punto $p_2 \in B(q,\epsilon) \cap [qp_j]$, es decir; los polígonos de Voronoï $V(p_i)$ y $V(p_j)$ son adyacentes, por lo tanto $p_ip_j \in E_{td}$.

□

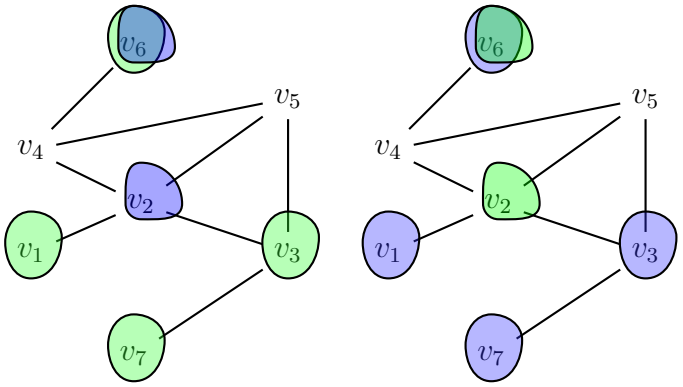
2.5. Grafos estructurales

La idea original de la morfología clásica es extraer informacioń de una imagen, sondeando en cualquier posición con pequeña forma geometrica llamada elemento estructural. Usando operadores que conserven el orden parcial en el espacio imagen subyacente uno puede construir una gran clase e operadores que permitan cumplir diferentes necesidades en el tratamiento de imágenes. Este enfoque fácilmente se traslada a los gráficos de nivel de gris con el concepto de s-grafo o grafo estructural.

Definición 22. *Un grafo estructural o s-grafo $\mathcal{A}$ es un grafo $G_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}})$, junto con dos subconjuntos no vacíos de vértices $B_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{A}} \subseteq V_{\mathcal{A}}$; llamados brotes y raíces, respectivamente.*

Si $\mathcal{A}$ es un s-grafo, definimos el recíproco $\check{\mathcal{A}}$ como el s-grafo $G_{\check{\mathcal{A}}} = G_{\mathcal{A}}$, donde $B_{\check{\mathcal{A}}} = R_{\mathcal{A}}$ y $R_{\check{\mathcal{A}}} = B_{\mathcal{A}}$. Es decir, el recíproco del s-grafo $\mathcal{A}$ es el mismo grafo; salvo que los brotes ahora son raíces y viceversa. Notemos que en la definición, $B_{\mathcal{A}}$ y $R_{\mathcal{A}}$ no son necesariamente disjuntos.

Ejemplo 2.6. En la figura (2.9a), el s-grafo $\mathcal{A}$ mediante el conjunto de vérties $V_{\mathcal{A}} = \{v_1, v_2 \dots v_7\}$, $E_{\mathcal{A}} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_3v_7, v_4v_6\}$ donde el conjunto de brotes y raices son: $B_{\mathcal{A}} = \{v_2, v_6\}$ y $R_{\mathcal{A}} = \{v_1, v_3, v_6, v_7\}$, respectivamente. Mientras que en la figura (2.9b) el s-grafo reciproco $\check{\mathcal{A}}$. En estas figuras y en las siguientes, el conjunto de brotes se designara con los vértices que se encuentren dentro de las regiones azules; mientras que las raíces con las vértices dentro de manchas azules,



(a) s-grafo $\mathcal{A}$ **(b)** El s-grafo reciproco $\check{\mathcal{A}}$

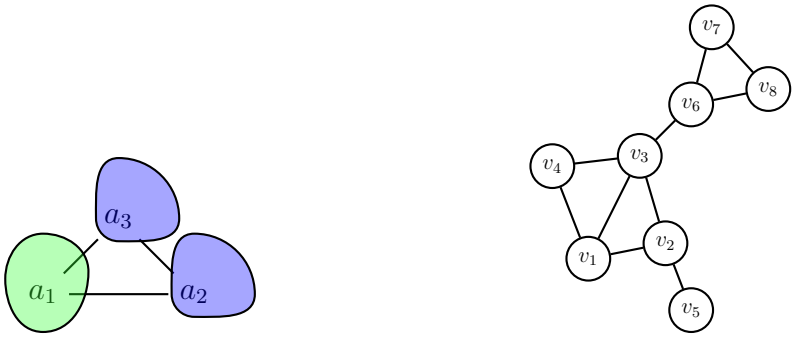
Figura 2.9: Un s-grafo y su reciproco.

Definición 23. *Sea $\mathcal{A}$ un s-grafo y $G = (V, E)$ un grafo arbitrario. Decimos que un homeomorfismo $\theta : V_{\mathcal{A}} \to V(G)$ es una incrustación de $\mathcal{A}$ en G para el vértice $v \in V$ si: $v \in \theta(R_{\mathcal{A}})$.*

Con la noción de s-grafo $\mathcal{A}$, podemos ahora definir una nueva función de vecindades en $V(G)$ de la siguiente forma:

$$N_{\mathcal{A}}(v|G) = \bigcup\{\theta(B_{\mathcal{A}}) : \theta \text{ es una incrustación de } \mathcal{A} \text{ en } G \text{ para } v\} \qquad (2.1)$$

Ejemplo 2.7. El homeomorfismo $\theta : G_{\mathcal{A}} \to G$ dado por $\theta(a_i) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$ es una incrustación de $\mathcal{A}$ en G para v_1. En este ejemplo $N_{\mathcal{A}}(v_1|G) = \{v_2, v_3, v_4\}, N_{\mathcal{A}}(v_2|G) = \{v_1, v_3\}, N_{\mathcal{A}}(v_5|G) = \emptyset$.



(a) **(b)**

Figura 2.10

Si comparamos este procedimiento con el tratamiento clásico, donde uno hace uso de pequeños conjuntos como elementos estructurales, las raíces corresponden al origen del elemento estructural mientras que los brotes a los puntos del elemento estructural. Sin embargo, la mayor diferencia diferencia con la morfología clásica es que para los s-grafos, la estructura de vecindad puede diferir en cada vértice, de modo que el s-grafo debe prescribir la estructura cerca de un vértice

Ejemplo 2.8. A continuación se muestra el concepto de s-grafo y su correspondiente función vecindario. En la figura (2.11) se muestra el grafo $G = (V, E)$ así como del vértice v_0 para el cual se evaluara la función vecindario (figura 2.13) correspondientes al respectivo s-grafo (figura 2.12).

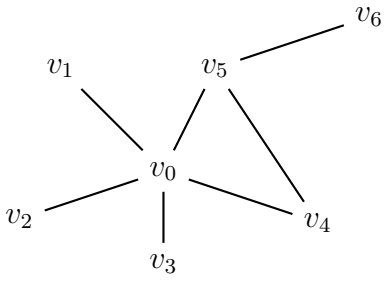
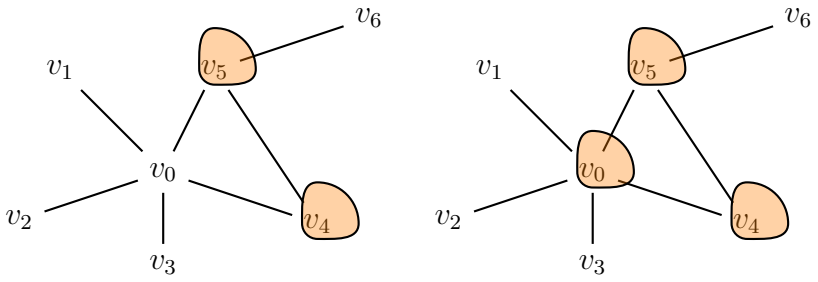


Figura 2.11: $G = (V, E), v_0 \in V(G)$.

(a) $\mathcal{A}$ **(b)** $\mathcal{B}$

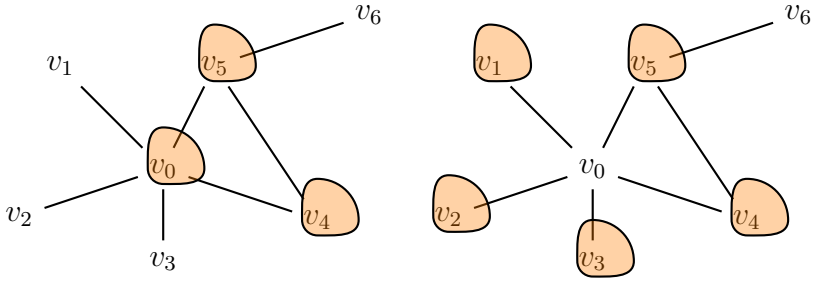
(c) $\mathcal{C}$ **(d)** $\mathcal{D}$

Figura 2.12: s-grafos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$



(a) $N_{\mathcal{A}}(v_0|G)$ **(b)** $N_{\mathcal{B}}(v_0|G)$

Figura 2.13: Las funciones vecindario para el vértice v_0 correspondientes a los-grafos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.



(a) $N_{\mathcal{C}}(v_0|G)$ **(b)** $N_{\mathcal{D}}(v_0|G)$

Por ejemplo, si tomamos el s-grafo $\mathcal{B}$ correspondiente a la figura 2.12 (b), las únicas incrustaciones de $\mathcal{B}$ en G para v_0 son:

$$\theta_1 : V_{\mathcal{B}} \to V(G) \qquad \theta_2 : V_{\mathcal{B}} \to V(G)$$

$$c \mapsto v_0 \qquad c \mapsto v_0$$

$$a \mapsto v_4 \qquad a \mapsto v_5$$

$$b \mapsto v_5 \qquad b \mapsto v_4$$

Por lo que

$$N_{\mathcal{A}}(v_0|G) = \bigcup_{i=1}^{2}\{\theta_i(B_{\mathcal{B}})\} = \{v_0, v_5, v_4\}.$$

Notemos que los s-grafos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen la misma función vecindario para el grafo G. Nuestro objetivo es dotar con una estructura de orden al conjunto de s-grafos.

Definición 24. *Sean A,B s-grafos. Decimos que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si y solo si: $N_{\mathcal{A}}(v|G) \subseteq N_{\mathcal{B}}(v|G)$ para cualquier grafo G y cualquier vértice $v \in V(G)$. Cuando $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ diremos que "$\mathcal{A}$ es mas selectivo que $\mathcal{B}$". Si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$, entonces diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes y escribiremos $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Estrictamente hablando, $\preceq$ solo define un orden parcial en las clases de equivalencia asociadas con la relación $\equiv$.

Proposición 2.2. *$\preceq$ un orden parcial en la clase de equivalencia de los s-grafos.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ diferentes representantes de clases de equivalencia de s-grafos, entonces:

- Es claro que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}$.
- Si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$, entonces para cualquier grafo G todo vértice $v \in V(G)$ se tiene que $N_{\mathcal{A}}(v|G) \subseteq N_{\mathcal{B}}(v|G)$ y $N_{\mathcal{B}}(v|G) \subseteq N_{\mathcal{C}}(v|G)$; lo que quiere decir que $N_{\mathcal{A}}(v|G) \subseteq N_{\mathcal{C}}(v|G)$, entonces $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$.
- Si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$, se sigue de la definición de equivalencia $\equiv$.

□

Lema 2.1. *Sea G un grafo y $v \in V(G)$, entonces:*

$$N_{\mathcal{A}}(v|G) = \bigcup \left\{ N_{\mathcal{A}}(v|G') : G' \subseteq G, G' \simeq G_{\mathcal{A}}, v \in V(G') \right\}$$

Demostración. Únicamente demostraremos la inclusión ($\supseteq$), supongamos que $w \in \bigcup\{N_{\mathcal{A}}(v|G') : G' \subseteq G, G' \simeq G_{\mathcal{A}}, v \in V(G')\}$, entonces existe una incrustación $\theta : V_A \to V(G)$ de $\mathcal{A}$ en G tal que $w \in \theta(B_{\mathcal{A}})$, asi definimos $G' = \theta(G_{\mathcal{A}})$. Notemos que $G' \equiv G_{\mathcal{A}}$, $G' \subseteq G$ y que $v \in V(G')$.

□

A continuación, proporcionamos una caracterización de cuando dos s-grafos son equivalentes.

Proposición 2.3. *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ s-grafos. $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si y solo si:*

(i) $G_{\mathcal{B}} \hookrightarrow G_{\mathcal{A}}$.

(ii) $N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}}) \subseteq N_{\mathcal{B}}(v|G_{\mathcal{A}})$, *para cualquier* $v \in R_{\mathcal{A}}$.

Demostración. Consideremos los s-grafos $\mathcal{A} = G_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{B} = G_{\mathcal{B}}$, donde $B_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{A}}$ y $B_{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{B}}$ son los conjuntos de brotes y raíces de $G_{\mathcal{A}}$ y $G_{\mathcal{B}}$; respectivamente.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

(i) Sea $v \in R_{\mathcal{A}}$, como $\texttt{Id}$: $V_{\mathcal{A}} \to V_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo tal que $\texttt{Id}(v) = v \in R_{\mathcal{A}}$, tenemos que la $\texttt{Id}$ es una incrustación de $\mathcal{A}$ en $G_{\mathcal{A}}$ para v. Ahora observemos que $B_{\mathcal{A}} = \texttt{Id}(B_{\mathcal{A}}) \subseteq N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}})$, por hipótesis $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, entonces tenemos que:

$$\emptyset \neq B_{\mathcal{A}} \subseteq N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}}) \subseteq N_{\mathcal{B}}(v|G_{\mathcal{A}})$$

Es decir; existe una incrustación de $\mathcal{B}$ en $G_{\mathcal{A}}$ para v, i.e $G_{\mathcal{A}} \hookrightarrow G_{\mathcal{B}}$.

(ii) Se obtiene de la definición de $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, tomando $G = G_{\mathcal{A}}$.

($\Leftarrow$) Primero demostraremos que si $G' \simeq G_{\mathcal{A}}$ y $v \in V(G')$, entonces tenemos que $N_{\mathcal{A}}(v|G') \subseteq N_{\mathcal{B}}(v|G')$. Sea $x \in N_{\mathcal{A}}(v|G)$, por definición existe una incrustación ϕ de $\mathcal{A}$ en G' para v. Notemos que:

$$x = \phi(b_1), v = \phi(r_1) \text{ para algun } b_1 \in B_{\mathcal{A}}, r_1 \in R_{\mathcal{A}} \tag{2.2}$$

Afirmamos que $b \in N_{\mathcal{A}}(r|G_{\mathcal{A}})$ para todo $b \in B_{\mathcal{A}}, r \in R_{\mathcal{A}}$, en efecto, tomando `Id` tenemos lo afirmado. Ahora, de (ii), (2.2) y la afirmación hecha hace un momento, tenemos que:

$$b_1 \in N_{\mathcal{B}}(r_1|G_{\mathcal{A}}) \tag{2.3}$$

Por lo tanto, existe una incrustación θ de $\mathcal{B}$ en $G_{\mathcal{A}}$ para r_1 tal que $b_1 = \theta(b_2), r_1 = \theta(r_2)$ para algún $b_2 \in B_{\mathcal{B}}, r_2 \in R_{\mathcal{B}}$. $\phi \circ \theta$ define una incrustación de $\mathcal{B}$ en $G^{\prime}$ tal que $\phi \circ \theta(r_2) = v$ y $\phi \circ \theta(b_2) = x$, es decir $x \in N_{\mathcal{B}}(v|G^{\prime})$. Por el lema (2.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{A}}(v|G) &= \bigcup \left\{ N_{\mathcal{A}}(v|G^{\prime}) : G^{\prime} \subseteq G, G^{\prime} \simeq G_{\mathcal{A}}, v \in V(G^{\prime}) \right\} \\ &\subseteq \bigcup \left\{ N_{\mathcal{B}}(v|G^{\prime}) : G^{\prime} \subseteq G, G^{\prime} \simeq G_{\mathcal{A}}, v \in V(G^{\prime}) \right\} \\ &\subseteq \bigcup \left\{ N_{\mathcal{B}}(v|G^{\prime}) : G \subseteq G, v \in V(G^{\prime}) \right\} \\ &= N_{\mathcal{B}}(v|G). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.1. *En particular, diremos que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si y solo si $G_{\mathcal{A}} \simeq G_{\mathcal{B}}$ y $N_{\mathcal{A}}(v|G_{\mathcal{A}}) = N_{\mathcal{B}}(v|G_{\mathcal{A}})$ para cualquier $v \in R_{\mathcal{A}}$.*

De la definicion, tenemos que $N_{\mathcal{A}}(\tau(v|)G) = \tau\big(N_{\mathcal{A}}(v|G)\big)$ para cualquier $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$. Concluimos este capitulo con la funcion reciproca.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un s-grafo y $\check{\mathcal{A}}$ su reciproco. Entonces*

$$\check{N}_{\mathcal{A}}(v|G) = N_{\check{\mathcal{A}}}(v|G)$$

para cualquier grafo G y $v \in V(G)$.

Demostración. Solo demostraremos la inclusión $\subseteq$, ya que la otra contención es análoga, tomando el reciproco de los términos brote. Supongamos que $w \in \check{N}_{\mathcal{A}}$, entonces $cv \in N_{\mathcal{A}}(v|G)$ por lo que existe un homeomorfismo $\theta : g_{\mathcal{A}} \to G$ tal que $x \in \theta(R_{\mathcal{A}})$ y $v \in \theta(B_{\mathcal{A}})$, esto quiere decir que $w \in \theta(B_{\check{\mathcal{A}}})$ y $v \in \theta(R_{\check{\mathcal{A}}})$.Por lo tanto $w \in N_{\check{\mathcal{A}}}(v|G)$ □

Capítulo 3

Morfología Gráfica

En el capítulo 1 mostramos como construir erosiones y dilataciones en $\mathrm{Fun}(V)$ usando una función de vecindades N. En combinación con el método para construir funciones de vecindades mediante el uso de s-grafos descritas en el capítulo anterior, podemos construir de forma sistemática erosiones y dilataciones (por ende, aperturas y cierres) en s-grafos. Si bien, estas definiciones se proponen en lo general, los ejemplos abordados serán sobre gráficos binarios.

3.1. Erosiones y dilataciones

Sea $\mathcal{A}$ un s-grafo, $N_{\mathcal{A}}$ la función de vecindades asociada, y G un grafo cualesquiera. Por la proposición (1.4) los operadores $\delta_{\mathcal{A}}$ y $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ dados por:

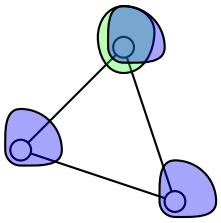
$$\delta_{\mathcal{A}}(f)(v) = \sup\{f(w) : w \in \check{N}_{\mathcal{A}}(v|G)\} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(f)(v) = \text{ínf}\{f(w) : w \in N_{\mathcal{A}}(v|G)\} \tag{3.2}$$

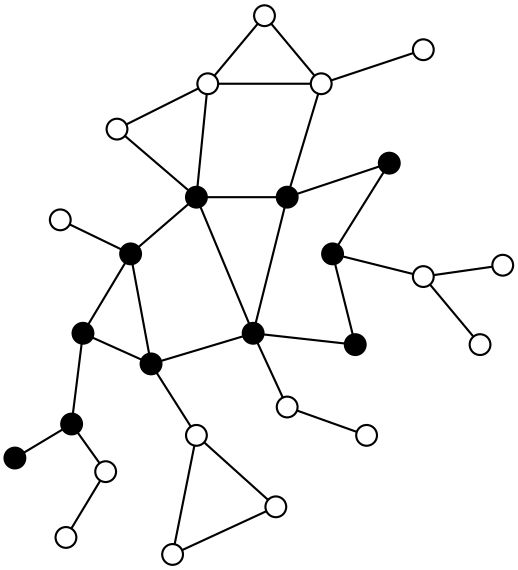
para $f \in \mathrm{Fun}(V)$, definen una dilatación y una erosión, respectivamente. Más aun $(\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$ forman una adjunción.

Ejemplo 3.1. En la figura (3.1), (a) el s-grafo $\mathcal{A}$. En (b) un gráfico binario G para el cual $f(v) = 1$ se representa con el color negro, mientras que $f(v) =$

0 se representa de color blanco. Finalmente, en la figura(3.2) se muestra la



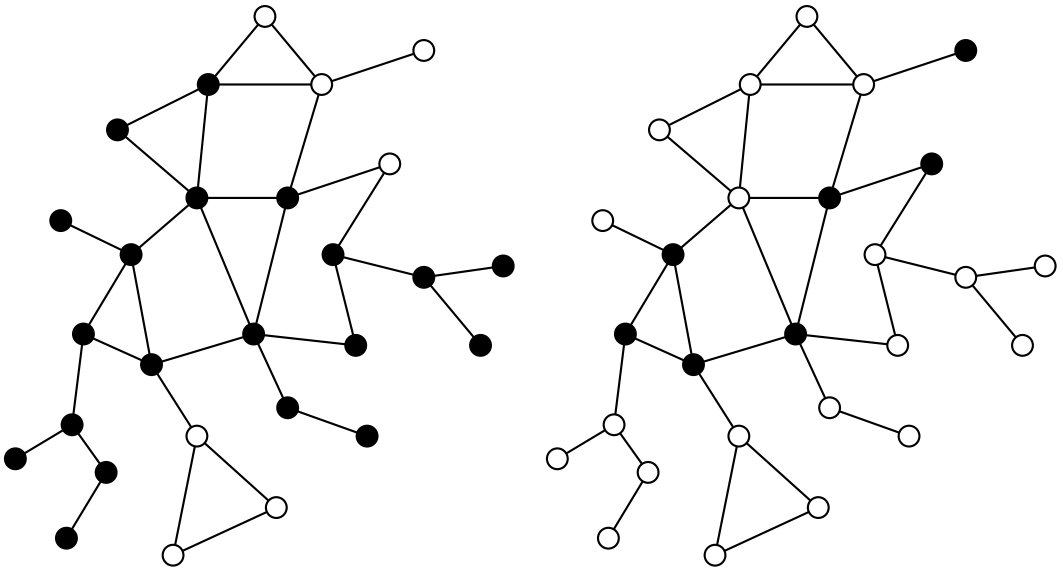
(a) El s-grafo $\mathcal{A}$.



(b) $G = (V, E)$

Figura 3.1

dilatación (a) y erosión (b) del grafo G de la imagen (3.1) respecto al s-grafo $\mathcal{A}$.



(a) **(b)**

Figura 3.2: Dilatacion (a) y erosion (b)

Observación 3.1. $\delta_{\mathcal{A}}$ y $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ preservan simetrías, es decir:

$$\delta_{\mathcal{A}}(\tau f(v)|G) = \tau\delta_{\mathcal{A}}(f(v)|G)$$
$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(\tau f(v)|G) = \tau\varepsilon_{\mathcal{A}}(f(v)|G)$$

para cualquier $\tau \in \mathrm{Sim}(G)$.

Recordemos que, cuando $T = \{0, 1\}$, se tiene que $\mathrm{Fun}(V)$ es isomorfo al conjunto potencia de V, pues para cualquier función $f : V \to V$, la función $f^* = f^c$ definida por $f^*(v) = 1 - f(v)$. Es decir que cualquier conjunto $X \subseteq V(G)$ tiene asociada una única función $f_X \in \mathrm{Fun}(V)$, (la función carácterística de X).

Proposición 3.1. *Para cualquier s-grafo $\mathcal{A}$, tenemos que*

$$\delta^*_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\check{\mathcal{A}}} \text{ y } \varepsilon^*_{\mathcal{A}} = \delta_{\check{\mathcal{A}}}$$

Demostración. Únicamente demostraremos la primer relación; la segunda se obtiene por dualidad. Además supondremos que $(X|G)$ es un gráfico binario,

mientras que omitiremos el argumento G de la prueba. Note que $y \in N_{\mathcal{A}}(x)$ si y solo si $x \in N_{\check{\mathcal{A}}}(y)$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta^*_{\mathcal{A}}(X|G) &= \Big[\bigcup_{x \in X^*} N_{\mathcal{A}}(x) \Big]^c \\
&= \bigcap_{x \in X^*} \big\{ y \in V : y \notin N_{\mathcal{A}}(x) \big\} \\
&= \bigcap_{x \in X^*} \big\{ y \in V : x \notin \check{N}_{\mathcal{A}}(y) \big\} \\
&= \{ y \in V : X^* \cap \check{N}_{\mathcal{A}}(y) = \emptyset \} \\
&= \{ y \in V : N_{\check{\mathcal{A}}} \subseteq X \} \\
&= \varepsilon_{\check{\mathcal{A}}}(X|G)
\end{aligned}$$

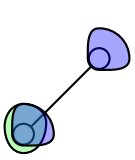
□

Notemos que estos son los resultados análogos de la morfología clásica, sin embargo existen otros resultados clásicos que no poseen de un análogo en morfología gráfica.

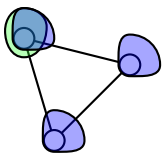
Ejemplo 3.2. En morfología gráfica ($\mathcal{P}(R^n)$), la composición de dos dilataciones bajo los elementos estructurales A y B es nuevamente una dilatación, más aún:

$$(X \oplus A) \oplus B = (X \oplus B) \oplus A = X \oplus (A \oplus B) = X \oplus C$$

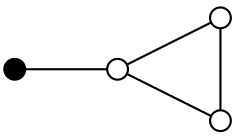
donde $C = A \oplus B$.
En la figura (3.3) se muestran los s-grafos $\mathcal{A}$ (a) y $\mathcal{B}$ (b), de verde el conjunto de raíces; mientras en azul el conjunto de brotes. En (c) un gráfico binario.



(a) s-grafo $\mathcal{A}$.



(b) s-grafo $\mathcal{B}$.



(c) gráfico binario G.

Figura 3.3

Mientras que en la figura (3.4) se muestra el resultado de las dilataciones $\delta_{\mathcal{A}}$ (a) y $\delta_{\mathcal{B}}$ (c); así como de las composiciones $\delta_{\mathcal{B}}\delta_{\mathcal{A}}$ (b) y $\delta_{\mathcal{A}}\delta_{\mathcal{A}}$ (d).

(a) $\delta_{\mathcal{A}}(G)$ **(b)** $\delta_{\mathcal{B}}\delta_{\mathcal{A}}(G)$

(c) $\delta_{\mathcal{B}}(G)$ **(d)** $\delta_{\mathcal{A}}\delta_{\mathcal{B}}(G)$

Figura 3.4: Dos dilataciones que no conmutan.

Otro resultado clásico es el teorema de Matheron, el cual establece que cualquier operador invariante bajo traslaciones puede ser descompuesto como la unión de erosiones; o de forma dual como la intersección de dilataciones. Sin embargo el siguiente ejemplo muestra que no hay dicho análogo en morfología gráfica.

Ejemplo 3.3. Consideremos el operador gráfico $\psi(\square|G)$ definido de la siguiente forma:

$$\psi(X|G) = \{v \in V(G) : v \text{ tiene al menos un vecino en } X\}$$

supongamos que ψ puede ser escrito de la forma

$$\psi = \bigcup_{\mathcal{A}\in\Sigma} \varepsilon_{\mathcal{A}}$$

para alguna colección Σ y consideremos el siguiente grafo G. Para cualquier

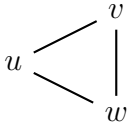


Figura 3.5: $G = (V, E)$; donde $= \{u, v, w\}$.

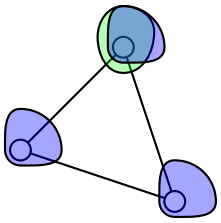
$\mathcal{A} \in \Sigma$, la vecindad asociada a cualquiera de los 3 vértices es no vacía. Como $\psi(\{u\}) = \{v, w\}$, entonces existe $\mathcal{A} \in \Sigma$ tal que $v \in \varepsilon_{\mathcal{A}}(\{u\})$, es decir $N_{\mathcal{A}}(v) \subseteq \{u\}$. Como $N_{\mathcal{A}}(v) \neq \emptyset$, entonces $N_{\mathcal{A}}(v) = \{u\}$. Análogamente podemos demostrar que $u \in N_{\mathcal{A}}(v)$ si y solo si $w \in N_{\mathcal{A}}(v) = \{u\}$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que ψ no puede ser escrito como la unión de erosiones.

3.2. Aperturas y cierres

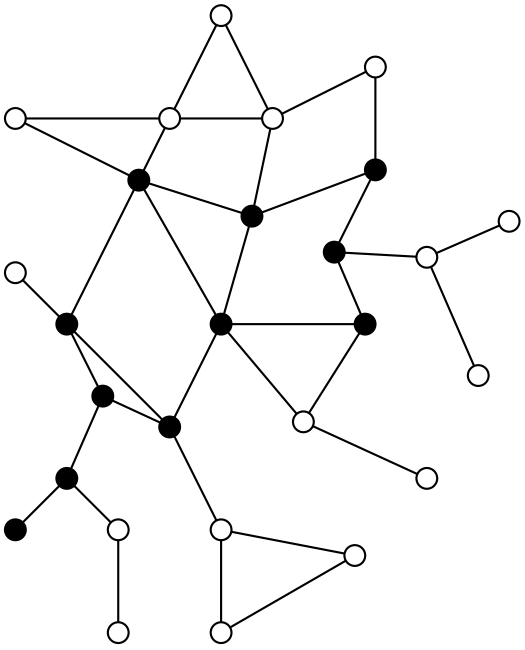
Un operador morfológico es llamado un **filtro mofológico** si es creciente e idempotente. La propiedad de idempotencia es muy importante, pues nos dice que si repetimos el operador mas de una vez su resultado no se vera afectado; lo cual es muy útil en el procesamiento de imágenes ya que deseamos que aplicando cualquier operador morfológico diseñado para limpiar el ruido de una imagen, debe aplicarse repetidamente hasta que el resultado permanezca constante.

Las aperturas y los cierres se encuentran en el corazón de la teoría de los filtros morfológicos, en buena parte es por que forman nociones duales. En este capítulo presentaremos únicamente la construcción de las aperturas. Los resultados pertinentes a los cierres pueden ser obtenidos por dualidad de la siguiente forma. Si ψ es una apertura; entonces ψ^* es un cierre y viceversa. Notemos que, siguiendo la corriente de la morfología clásica, ya que hemos definido la erosión $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ y la dilatación adjunta $\delta^*_{\mathcal{A}}$, por lo cual resulta natural el operador $\delta^*_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}}$,el cual es una apertura.

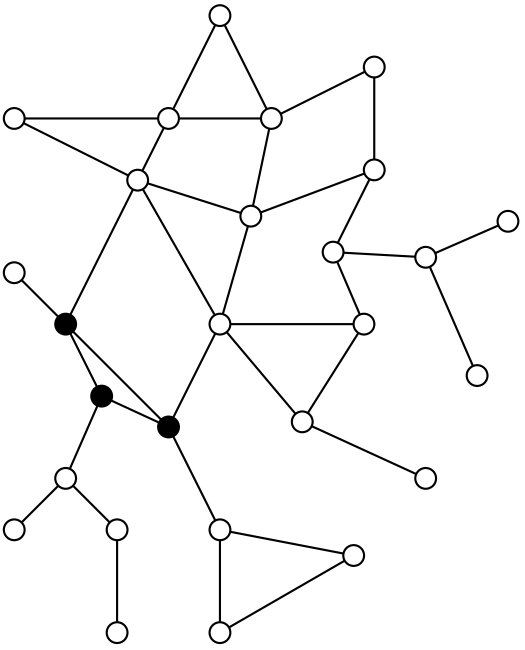
Ejemplo 3.4. En la figura 3.6 (a) se muestra el s-grafo $\mathcal{A}$, en (b) el gráfico binario G, y en (c) el resultado de aplicar la apertura $\delta_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}}$.



(a) s-grafo $\mathcal{A}$



(b) Gráfico binario G



(c) Apertura $\delta_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}}$

Figura 3.6

A continuación, presentamos una forma alterna para construir aperturas gráficas, dicho procedimiento fue descubierto y descrito por primera vez en [HR91]. Sea $\mathcal{A}$ un s-grafo, definimos el operador gráfico $\alpha_{\mathcal{A}}$ por

$$\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) = \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X\} \tag{3.3}$$

Proposición 3.2. *$\alpha_{\mathcal{A}}$ es una apertura.*

Demostración. Sean $G(V, E)$ un grafo arbitrario,$\mathcal{A}$ un s-grafo y $X \subseteq V$. Primero demostraremos que $\alpha_{\mathcal{A}}$ es creciente. En efecto, si $X, Y \subseteq V(G)$ tales que $X \subseteq Y$, entonces para cualquier $\theta : G_{\mathcal{A}} \to G$ tal que $\theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X$ tenemos que

$\theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq Y$. Entonces:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) &= \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X\} \\ &\subseteq \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq Y\} = \alpha_{\mathcal{A}}(Y|G).\end{aligned}$$

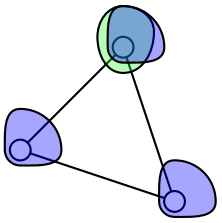
Para probar que $\alpha_{\mathcal{A}}$ es anti-extensiva, notemos que todo uniendo $\theta(B_{\mathcal{A}})$ es tal que $\theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X$, entonces $\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) = \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X\} \subseteq X$ para cualquier $X \subseteq V(G)$; es decir $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{A}}\big(\alpha_{\mathcal{A}}(X|G)\big) &= \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq \alpha_{\mathcal{A}}(X|G)\} \\ &= \alpha_{\mathcal{A}}(X|G)\end{aligned}$$

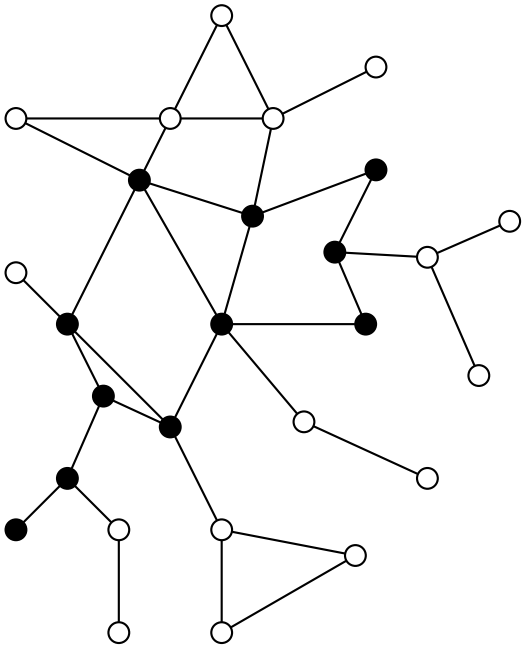
□

Notemos que en la definicíon de $\alpha_{\mathcal{A}}$ las raíces de $\mathcal{A}$ no juegan ningún papel. La apertura $\alpha_{\mathcal{A}}$ recibe el nombre de *apertura estructural gráfica*, esta terminología proviene de [HR91].

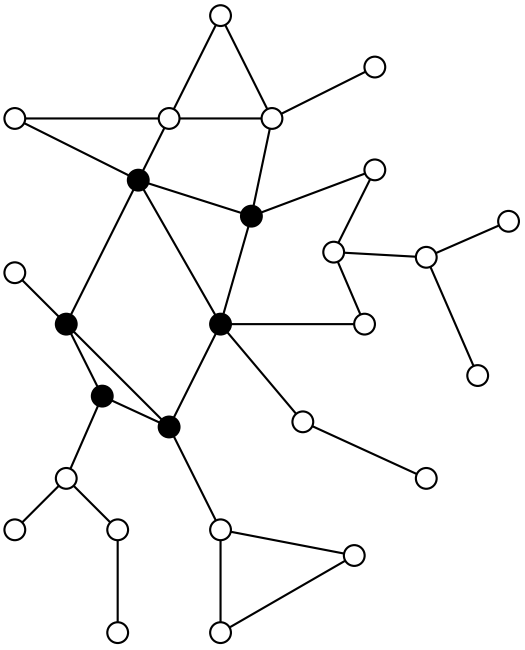
Ejemplo 3.5. En la figura(3.7), $\mathcal{A}$ es un s-grafo, mientras que en (b) se muestra el gráfico binario inicial, en (c) se muestra el efecto del operador $\alpha_{\mathcal{A}}$. Notemos que el efecto de la apertura $\delta_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}}$ (3.6c) es diferente al de la apertura estructural $\alpha_{\mathcal{A}}$ (3.7c).



(a) s-grafo $\mathcal{A}$



(b) Grafico binario G



(c) Apertura estructural $\alpha_{\mathcal{A}}$

Figura 3.7

A continuación presentamos un resultado que compara a estas aperturas.

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{A}$ un s-grafo y G un gráfico de nivel de gris arbitrario. Entonces*

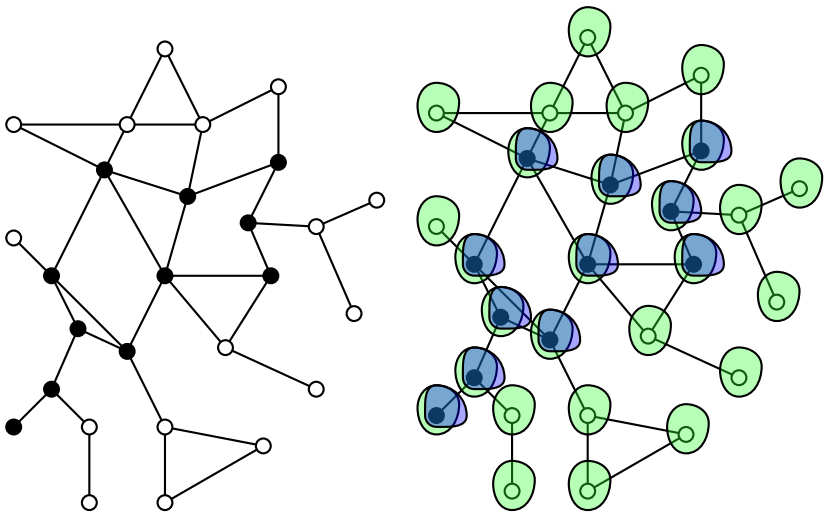
$$\delta^*_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}} \leq \alpha_{\mathcal{A}}$$

Demostración. Por simplicidad de la prueba, supondremos que el conjunto de nivel de gris es $\{0, 1\}$, es decir que $X \in \mathrm{Fun}(V)$ es un gráfico binario. Sea $v \in \delta_{\mathcal{A}}\varepsilon_{\mathcal{A}}(X|G)$, entoces $v \in N_{\mathcal{A}}(w|G)$ para algún $w \in \varepsilon_{\mathcal{A}}(X|G)$. Pero entonces $v \in N_{\mathcal{A}}(w|G) \subseteq X$, es decir que existe una incrustación θ de $G_{\mathcal{A}}$ en G para w tal que $v \in \theta(B_{\mathcal{A}})$, es decir $v \in \bigcup \left\{\theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X\right\} = \alpha_{\mathcal{A}}(X|G)$. □

La pregunta natural es si ocurre la igualdad (este es un resultado de la morfología clásica). Un contraejemplo a dicha igualdad se puede ver al comparar (c) de la imagen 3.6 y (c) de 3.7, ya que ambas provienen del mismo s-grafo $\mathcal{A}$ hacia el gráfico binario G, sin embargo aquí la desigualdad es estricta.

Un gráfico binario $(X|G)$ es invariante si existe un s-grafo $\mathcal{A}$ y un homeomorfismo θ de $G_{\mathcal{A}}$ en G tal que $v \in \theta(B_{\mathcal{A}})$ par cualquier vértice $v \in X$. Notemos que par cualquier gráfico binario $(X|G)$ podemos asociarle un s-grafo $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X|G)$; tomando $G_{\mathcal{A}} = G, B_{\mathcal{A}} = X$ y $R_{\mathcal{A}} = V$.

Ejemplo 3.6. En la figura (3.8.a) el gráfico binario G, donde $f(v) = 1$ se representa con un vértice negro, mientras que $f(v) = 0$ con un vértice blanco. Sea $X = \{v \in V(G) : f(v) = 1\}$, mientras que en (3.8.b) se muestra el s-grafo $\mathcal{A}(X|G)$. El homeomorfismo es $\mathtt{Id}$.



(a) Gráfico binario $(X|G)$ **(b)** El s-grafo $\mathcal{A}(X|G)$

Figura 3.8: Un grafico binario y su s-grafo asociado.

La clase de todos los grafos invariantes es llamado el dominio de invarianza de $\alpha_{\mathcal{A}}$ y lo denotamos por $\mathtt{Inv}(\alpha_{\mathcal{A}})$. Por conveniencia asumimos que el dominio de invarianza de un operador ψ consiste en todos los s-grafos asociados con gráficos binarios que son invariantes bajo ψ. Es decir:

$$\mathtt{Inv}(\psi) = \{\mathcal{A}(X|G) : \psi(X|G) = (X|G)\}$$

A continuación proporcionamos una caracterización de los operadores que preservan simetrías.

Proposición 3.3. *Sea α una apertura que preserva simetrías la cual es G-creciente (def.15). entonces α puede ser descompuesto como:*

$$\alpha = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathit{Inv}(\alpha)} \alpha_{\mathcal{A}} \tag{3.4}$$

Demostración. Definimos $\alpha' = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathtt{Inv}(\alpha)} \alpha_{\mathcal{A}}$.

$\alpha' \geq \alpha$: Sea $(X|G)$ un gráfico binario, definimos $\mathcal{A} \in \mathtt{Inv}(\alpha)$ como $\mathcal{A} = \mathcal{A}\alpha(X|G)$; es decir como el s-grafo correspondiente al gráfico binario $\alpha(X|G)$. Tomando la incrustacion trivial de $\mathcal{A}$ en $\alpha(X|G)$, se tiene que $\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) \geq \alpha(X|G)$, y por lo tanto $\alpha'(X|G) \geq \alpha(X|G)$.

$\alpha' \leq \alpha$: Sea $(X|G)$ un gráfico binario y $\mathcal{A} \in \mathtt{Inv}(\alpha)$. Por definición:

$$\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) = \bigcup \{\theta(B_{\mathcal{A}} : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X)\}$$

Como $\theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq X$, tenemos que $\alpha(\theta(_{\mathcal{A}}|G)) \subseteq \alpha(X|G)$ puesto que las aperturas son crecientes. Como el gráfico $(B_{\mathcal{A}}|G_{\mathcal{A}})$ es invariante, tenemos que $\theta(B_{\mathcal{A}}) \subseteq \alpha(X|G)$, de lo cual se deduce que $\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) \leq \alpha(XG)$; es decir $\alpha' \leq \alpha$.

□

Definición 25. *Decimos que el gráfico binario $(X|G)$ es $\mathcal{A}$-abierto si:*

$$\alpha_{\mathcal{A}}(X|G) = (X|G)$$

Nuestro objetivo es decir bajo que condiciones se cumple que para 2 s-grafos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\alpha_{\mathcal{A}}\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}} = \alpha_{\mathcal{B}}$$

Es decir,bajo que condiciones se cumple que si un gráfico binario es $\mathcal{B}$-abierto también es $\mathcal{A}$-abierto.

Proposición 3.4. *Las equivalencias $\alpha_{\mathcal{A}}\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}} = \alpha_{\mathcal{B}}$ se cumplen si y solo si $(B_{\mathcal{A}}|G_B)$ es $\mathcal{A}$-abierto.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $(B_{\mathcal{A}}|G_B)$ es $\mathcal{A}$-abierto, entonces para cualquier $b \in B_{\mathcal{B}}$ existe una incrustación $\theta_b : G_{\mathcal{A}} \to G_{\mathcal{B}}$ tal que:

$$\theta_b(a_b) = b \in \theta_b(B_{\mathcal{A}}) \subseteq B_{\mathcal{B}} \tag{3.5}$$

Sea $x \in \alpha_{\mathcal{B}}(X|G)$, entonces existe una incrustación $\theta : G_{\mathcal{B}} \to G$ y un $b \in B_{\mathcal{B}}$ tal que:

$$\theta(b) = x \in \theta(B_{\mathcal{B}}) \subseteq X \tag{3.6}$$

Consideremos la incrustación $\theta \circ \theta_b : G_{\mathcal{A}} \to G$, entonces tenemos que:

$$\theta \circ \theta_b(a_b) = x \in \theta \circ \theta_b(B_{\mathcal{B}}) \subseteq X \tag{3.7}$$

Por lo tanto existe un elemento $x \in \alpha_{\mathcal{A}}(X|G)$. Esto demuestra que

$$\alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{B}} \leq \alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}} \leq \alpha_{\mathcal{B}} \tag{3.8}$$

Como $\alpha_{\mathcal{B}}$ es idempotente, tenemos que ambos extremos dela desigualdad (3.8) son iguales, lo cual es equivalente a que $\alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{B}}$. Además como $\alpha_{\mathcal{B}}$ es creciente, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{B}} \leq \alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}} \leq \alpha_{\mathcal{B}} \tag{3.9}$$

Nuevamente, usando la idempotencia de $\alpha_{\mathcal{B}}$, tenemos que $\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{A}}\alpha_{\mathcal{B}}$. Finalmente tenemos la igualdad $\alpha_{\mathcal{A}}\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{B}}\alpha_{\mathcal{A}} = \alpha_{\mathcal{B}}$.

($\Leftarrow$) Notemos que si se cumple la igualdad, entonces el gráfico binario $(B_{\mathcal{B}}|G_{\mathcal{B}})$ correspondiente con el s-grafo $\mathcal{B}$ es $\mathcal{A}$-abierto.

□

En el espacio de imágenes binarias $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la definición de apertura estructural invariante bajo traslaciones con A como elemento estrutural es dada por:

$$\alpha_A(X) = \bigcup\{A_h : h \in \mathbb{R}^n, A_h \subseteq X\} \tag{3.10}$$

Mientras que su dual, el cierre estructural de A es dado por:

$$\phi_A(X) = \bigcap\{A_h : h \in \mathbb{R}^n, A_h \supseteq X\} \tag{3.11}$$

Sabemos que entre los operadores α y ψ existe la siguiente relación de dualidad:

$$\phi_A(X) = [\alpha_{A^*}(X^*)]^* \tag{3.12}$$

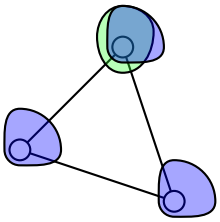
Donde * denota el complemento. En morfología gráfica no resulta inmediata una equivalencia para la ecuación (3.11) para construir los cierres estructurales. Sin embargo con la idea de la ecuación (3.12) definimos el cierre estructural $\psi_{\mathcal{A}}$ del s-grafo $\mathcal{A}$ como:

$$\phi_{\mathcal{A}}(X|G) = [\alpha_{A^*}(X^*|G)]^* \tag{3.13}$$

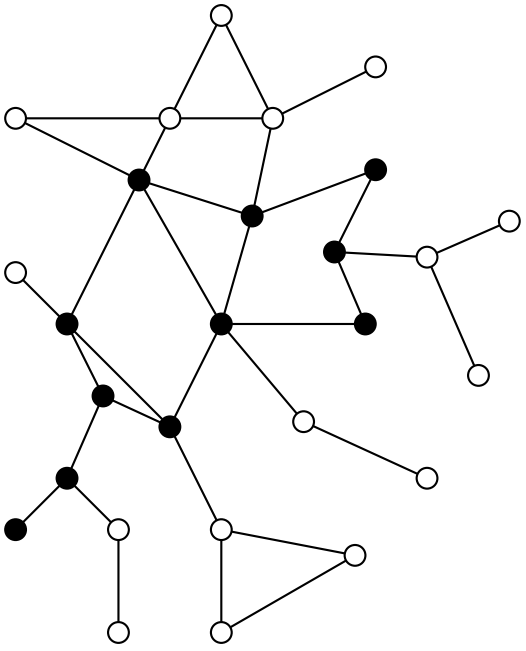
o equivalentemente

$$\phi_{\mathcal{A}}(X|G) = \bigcap\{V - \theta(B_{\mathcal{A}}) : G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\theta} G \text{ y } \theta(B_{\mathcal{A}}) \cap X = \emptyset)\} \tag{3.14}$$

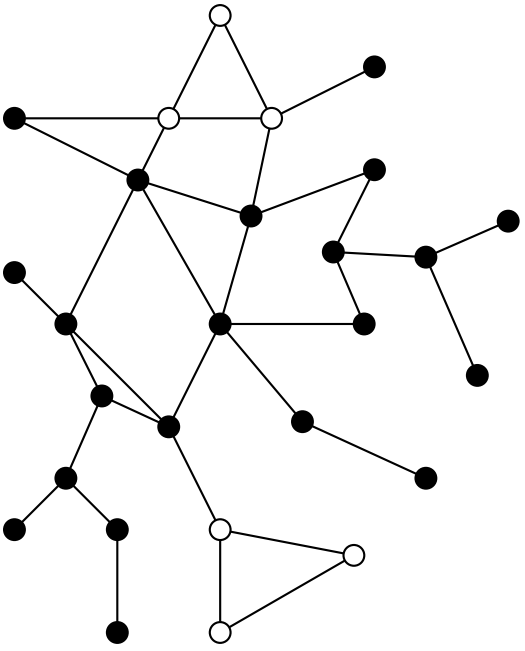
Ejemplo 3.7. En la figura (3.9.b) el gráfico binario $(X|G)$, mientras que en (3.9.a) el s-grafo $\mathcal{A}$, donde le conjunto de raíces consta únicamente de un vértice, mientras que el conjunto de brotes es $V(G_{\mathcal{A}})$. En (3.9.c) el cierre estructural $\phi_{\mathcal{A}}$.



(a) s-grafo $\mathcal{A}$



(b) Gráfico binario $(X|G)$



(c) Cierre estructural $\phi_{\mathcal{A}}$

Figura 3.9

Conclusiones

En el estudio de la morfología gráfica; hemos visto algunas de las formas en las cuales se construyen las aristas, ta fue el caso de las triangulaciones Delaunay, los grafos de Gabriel y de los sistemas se Vecindades Relativas. También tratamos acerca de los grafos estructurales y como con ellos es posible definir sus funciones de vecindades y y con estas las erosiones, dilataciones aperturas y cierres. Fundamentalmente en gráficos binarios.

Queda mucho por hacer en este tema, ya que en el presente trabajo solo se trato con grafos binarios o en escala de grises, además de que los ejemplos fueron en el espacio 2-dimensional. Una posible dirección a un trabajo futuro seria el análisis de los operadores morfológicos gráficos en hipergrafos, o la morfología gráfica adaptativa. Este trabajo espera ser un primer paso hacia una mayor comprensión de este importante tema.

Bibliografía

[Dou93] E. Dougherty. *Mathematical morphology in image processing*. Marcel Dekker, Inc., 1st edition, 1993. 22

[HHV92] A. Toet H. Heijmans, P. Nacken and L. Vincent. Graph morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3:24–38, March 1992. VII, 22

[HR90] H. Heijmans and C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology. part i: Dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 50:245–295, June 1990. VII

[HR91] H. Heijmans and C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology. part ii: Openigs and closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54:74–97, July 1991. 41, 42

[Jav14] Marisol Mares Javier. *Morfología Matemática: Un Enfoque al Procesamiento Digital de Imágenes*. PhD thesis, Benémrita Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, Pue., 2014.

[R.05] Diestel R. *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg, 3rd edition, 2005. VII

[T.10] Najman L. & Hugues T. *Mathematical morphology: from theory to applications*. ISTE Ltd & John Wiley & Sons, Inc., 1st edition, 2010. VII

[Vin89] L. Vincent. Graphs and mathematical morphology. *Visual Communications and Image Processing*, 1001:95–105, April 1989. VII

[Woo01] R. Gonzales & R. Woods. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, 2nd edition, 2001.