BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS Y CONEXOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Patricia Aguilar Rangel

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. FECHA

Dedicatoria

Este trabajo de tesis es dedicado a las personas que han sido y son muy importantes en mi vida.

A la memoría de mis padres, la señora Cesarea Morales Rangel y el señor Romualdo Aguilar García, porque a pesar de las adversidades, siempre me dieron lo mejor de ellos, porque fueron un gran ejemplo de vida y siempre los llevaré en mi corazón y mis recuerdos.

A mis hermanos Tomasita, Rosa María y César, porque los amo y por ser los mejores hermanos.

A mi esposo Froylan Sergio Bello Olivos, por su amor incondicional, por creer en mí, por ser mi mejor amigo y porque lo amo.

A mis hijos Eduardo y Julio César, por ser lo más hermoso que tengo.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis ha sido posible gracias a la coolaboración de varias personas, las cuales serán mencionadas a continuación y quienes merecen reconocimiento especial.

Quiero agradecer a mis asesores de tesis, al Dr. David Herrera Carrasco y al Dr. Fernando Macías Romero por haber confiado en mí, por darme la oportunidad para realizar este trabajo y por todo el apoyo que he recibido por parte de ellos.

Quiero agradecer a la Dra. Patricia Domínguez Soto, al Dr. Alexander I. Bykov y al Mtro. Germán Montero Rodríguez, por aceptar formar parte de mi jurado de tesis, por dedicar su tiempo para la revisión de esta, por sus observaciones, las cuales sirvieron para mejorar esta tesis.

También agradezco a los compañeros Antonio de Jesús Libreros López y a Gerardo Hernández Valdez por el valioso tiempo y apoyo que me dedicaron para poder mejorar este trabajo, agradezco su paciencia.

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por haber permitido dejarme ser parte de esta hermosa facultad, así como también agradecer a todos aquellos maestros que me inspiraron para continuar estudiando las matemáticas y por haber compartido sus conocimientos.

Quiero agradecer a mis padres por haberme dado todo lo que pudieron para que yo pudiera llegar a este momento tan importante de mi vida, todo esto no hubiese sido posible sin su valioso apoyo y en especial por haber creído en mí. A mis hermanos Tomasita, Rosa María y César, por su apoyo incondicional.

También quiero agradecer a mi esposo Froylan S. Bello y a mis hijos, por creer en mi, por su amor, por darme toda su confianza, por apoyarme todos aquellos días en que los necesité, por sus palabras, por su cariño y por hacerme feliz día a día.

Agradezco a mi suegra María Elena por haberme apoyado durante todo este tiempo cuidando a mis hijos, por su confianza y esfuerzo. Agradezco a mis cuñados Edgar Erik y Guillermo Israel por sus buenos consejos, por su apoyo y por ser un buen ejemplo para mis hijos. Agradezco también a mi suegro José Guillermo, por todo el apoyo que a mi familia ha brindado.

Introducción

El estudio sistemático de los continuos se inició a principios del siglo XX en Europa. Específicamente, en la escuela polaca de matemáticas, la cual escogió a la topología, y, en particular, a la teoría de los continuos como una de las cuatro ramas de la matemática a las que se dedicarían y fortalecerían. En ese tiempo entre los principales colaboradores se encontraban, Z. Janiszewski (1888 – 1920), W. Sierpiński (1882 – 1969), S. Mazurkiewicz (1888 – 1945), B. Knaster (1893 – 1980), K. Kuratowski (1896 – 1980) y K. Borsuk (1905 – 1982). Por otro lado, en Norte América el estudio comenzó con R. L. Moore (1882 – 1974). La influencia de Moore en la topología norteamericana fue tan grande que, aún en la actualidad, se siguen discutiendo sus métodos de enseñanza. En 1992 se publica el libro: Continuum Theory: An Introduction, escrito por Sam B. Nadler, Jr. Éste es el primer libro cuya intención primordial es convertirse en un libro de texto, véase [4].

Las raíces del concepto de continuo están en la noción de continuidad. En la segunda mitad del siglo XIX los matemáticos iniciaron un lento (y difícil) avance para establecer los conceptos básicos del Analysis Situs, como se llamaba en ese tiempo a la topología.

Muchos de los objetos estudiados en el periodo inicial de la topología eran considerados como subconjuntos de la línea real, el plano o - más generalmente - del n-espacio Euclidiano para un entero positivo n. La primera clase de espacios abstractos a la cual fueron generalizados varios conceptos y resultados fue la clase de los espacios métricos, definidos en 1906 por M.Frechét (1878 – 1973), aunque el término espacio métrico no fue introducido hasta 1914 por F. Hausdorff (1868 – 1942). En ese mismo año fue introducida la noción de espacio de Hausdorff. Sin embargo, por un periodo largo, los espacios métricos fueron mucho más populares que los espacios de Hausdorff, véase [2], pág. 225.

Uno de los conceptos básicos de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1893 por C. Jordan (1838 – 1922) para la clase de subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914 por F. Hausdorff y en 1921 por B. Knaster y K. Kuratowski, véase [2], pág. 225.

Otro concepto topológico relacionado con la noción de continuo es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel $(1871 - 1956)$, el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado, tiene una subcubierta finita. En 1903 Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado en un espacio Euclidiano. La definición actual esencialmente se debe a P. S. Aleksandrov $(1896 - 1982)$ y a P. S. Uryson $(1898 - 1924)$, véase [2], pág. 225.

El objetivo primordial de esta tesis es introducir a toda persona interesada, al estudio de los espacios métricos compactos y conexos, los cuales son un continuo.

Los resultados principales que se presentan en este trabajo se encuentran originalmente en,[1], [3], [4], [7], [9], [10], [11]. Sin embargo, las pruebas de estos resultados varían de su prueba original puesto que aquí son demostrados a detalle.

En el primer capítulo se presentan las nociones de métrica y espacios métricos. Se observa que todo espacio métrico es un espacio topológico. Se enuncian los conceptos de compacidad y conexidad, estos son fundamentales para el objetivo de este trabajo, ya que se prueba que estas propiedades se preservan bajo funciones continuas. Otro concepto importante para poder obtener continuos es el de homeomorfismo, veremos que la propiedad de ser continuo se preserva bajo homeomorfismos. Se definen los espacios arco- conexos en un espacio métrico y las componentes de un espacio topológico. Además se aborda la noción de límite de conjuntos, puesto que es muy importante en el estudio de los continuos, se dan ejemplos interesantes de los conceptos mencionados, así como también resultados básicos que nos permitirán el objetivo de este trabajo.

En el segundo capítulo se presentará la noción de un continuo. Se abordan los conceptos de continuos localmente conexos y conexos en pequeño. Estos conceptos son muy importantes, porque podremos definir y caracterizar otros continuos a partir de ellos. Daremos algunos ejemplos de estos, así como algunos resultados interesantes.

También se presentará una técnica muy conocida para la construcción de continuos, la cual consiste en construir una sucesión anidada de continuos con intersección no vacía, dicha intersección tendrá la propiedad de ser un continuo. Finalmente, se definen continuos encadenables y se dan algunos ejemplos.

Se invita al lector a consultar los textos, [6], [7], en los que puede conocer más a fondo sobre el estudio de los continuos.

Índice general

Introducción a los espacios métricos compactos y conexos

Patricia Aguilar Rangel

fecha

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo el símbolo X denotará un conjunto, el cual será un espacio métrico, un espacio topológico o un continuo, según se indique. Si A es un subconjunto del espacio X, el símbolo $X - A$ denotara el complemento del conjunto A. Denotaremos por $|A|$ a la cardinalidad del conjunto A. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos del espacio X, entonces la unión e intersección de los elementos de la familia se denotaran por $\bigcup \mathcal{F}$ y $\bigcap \mathcal{F}$, respectivamente. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ denotaran el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales y el espacio euclidiano n-dimensional, respectivamente. El símbolo $\emptyset$ denotara al conjunto vacío. Un espacio es no degenerado si consiste de más de un punto.

1.1. Métrica y topología

En esta sección se presenta una introducción a los espacios métricos, los cuales son base para el desarrollo de este trabajo. Además, se definen los espacios métricos compactos y conexos. También se dan algunos resultados y ejemplos importantes de estos espacios, estos serán de gran utilidad en las siguientes secciones.

Definición 1.1. *Dado un conjunto X no vacío, una* ***métrica*** *para X es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:*

(i) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

(ii) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (propiedad reflexiva).

(iii) *Para todo* $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$ *(propiedad simétrica).*

(iv) *Para todo* $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(desigualdad triangular).*

A la pareja (X,d) *se le conoce como* ***espacio métrico***. *Si no se presta a confusión, escribiremos simplemente* X *en lugar de* (X,d).

Podemos prescindir de la condición (i), pero se incluye en la definición 1.1, para recordar que la distancia entre dos puntos siempre es positiva.

Observación 1.2. *En la definición 1.1, las condiciones* $(ii), (iii)$ *y* (iv) *implican* (i).

Demostración. En efecto, supongamos que existen x, y en X tales que $d(x,y) < 0$, luego por la desigualdad del triangulo (iv), se satisface que $d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y)$, luego por (iii), implica que $d(x,x) < 2d(x,y)$, en consecuencia $d(x,x) < 0$, lo que contradice (ii). Así, concluimos que $d(x,y) \geq 0$. □

En el Análisis Matemático el uso de desigualdades es muy común e importante y por tanto es útil conocer desigualdades como **la desigualdad de Cauchy** y **la desigualdad de Hölder**, entre otras, pero en este caso centraremos nuestro interés en la **desigualdad de Minkowski**, porque será de gran utilidad para demostrar la desigualdad triangular para la métrica euclidiana, la cual se presenta a continuación.

Proposición 1.3. ***Desigualdad de Minkowski***. *[3, Proposición 0.F.2]. Supóngase que* $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ *son números reales. Entonces*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Veamos algunos ejemplos de espacios métricos:

Ejemplo 1.4. *Sea la función* $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *definida por*

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ *y* $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$. *Entonces* d_n *es una métrica para* $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ y $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n)$ en $\mathbb{R}^n$.

(i) Dado que el cuadrado de cualquier número es no negativo y la suma de números no negativos es no negativo, entonces d_n no toma valores negativos.

(ii) Supongamos que $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, entonces, $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = 0$, lo cual implica que $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0$, pero esto sucede cuando $(x_i - y_i) = 0$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, de esta manera se tiene que $x_i = y_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y por tanto tenemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(iii) Tenemos que $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$, ya que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, de este modo tenemos que $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

(iv) Sea

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2}.$$

Aplicando la proposición 1.3 y considerando $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \\ &= d_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que d_n es una métrica para $\mathbb{R}^n$. Así, $(\mathbb{R}^n, d_n)$ es un espacio métrico. A la pareja $(\mathbb{R}^n, d_n)$ se le conoce como **espacio métrico Euclidiano** de dimensión n y a d_n como la **métrica Euclidiana** (o métrica usual) sobre $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ejemplo 1.5. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida, para cada (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $\mathbb{R}^2$ por,*

$$T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Entonces T es una métrica para $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3) en $\mathbb{R}^2$.

(i) Es claro que $T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$.

(ii) Si $T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$, entonces $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$, luego, $|x_1 - x_2| = 0$ y $|y_1 - y_2| = 0$. Así $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, es decir, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

(iii)

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |(-1)(x_2 - x_1)| + |(-1)(y_2 - y_1)| \\ &= |-1||(x_2 - x_1)| + |-1||(y_2 - y_1)| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ &= T((x_2, y_2), (x_1, y_1)). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |x_1 - x_2 + x_3 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_3 - y_3| \\ &= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| + |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= T((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + T((x_3, y_3), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Así, T es una métrica para $\mathbb{R}^2$. La métrica T se conoce como la **métrica del taxista**. En conclusión, $(\mathbb{R}^2, T)$ es un espacio métrico. $\square$

Ejemplo 1.6. *Sean X cualquier conjunto no vacío y $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$. Definimos para todo $(x, y) \in X \times X$*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & si\ x = y \\ 1, & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Entonces d es una métrica para X.

Demostración. Sean $x, y, z \in X$.

(i) Por definición, $d(x, y) \geq 0$.

(ii) Por definición tenemos que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(iii) Para todo $x \neq y$, se tiene $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ y para todo $x = y$, $d(x, y) = 0 = d(y, x)$.

(iv) Supongamos que $x = y$. Por definición, $d(x, y) = 0$, por inciso (i), tenemos que $0 \leq d(x, z)$ y $0 \leq d(z, y)$, por lo tanto, $d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Supongamos $x \neq y$. Por definición $d(x, y) = 1$.

Si $z = x$, entonces $z \neq y$, de esto, $d(z, y) = 1$. En consecuencia, $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si $z \neq x$, entonces, $d(x, z) = 1$. Por (i) $d(z, y) \geq 0$. Luego, $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Así, concluimos que d es una métrica para X. Esta métrica es conocida como la **métrica discreta** y al espacio (X, d), se le llama **espacio métrico discreto**. $\square$

A continuación se presenta una métrica para el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, denotado por $C[0, 1]$.

Ejemplo 1.7. *Sean* $C[0, 1]$ *y* $d_0 \colon C[0, 1] \times C[0, 1] \to [0, 1]$ *definida por*

$$d_0(f, g) = \text{máx}\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\}.$$

Entonces d_0 *es una métrica para el espacio* $C[0, 1]$.

Demostración. Sean $f, g, h \in C[0, 1]$.

(i) Es claro que $d_0(f, g) = \text{máx}\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\} \geq 0$.

(ii) Si $d_0(f, g) = 0$, entonces $\text{máx}\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\} = 0$. Luego, $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Así, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in [0, 1]$, es decir, $f = g$.

(iii) Dado que $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ para toda x en $[0, 1]$, entonces $\text{máx}\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\} = \text{máx}\{|g(x) - f(x)| \colon x \in [0, 1]\}$, es decir, $d_0(f, g) = d_0(g, f)$.

(iv) Observemos que para toda $x \in [0, 1]$ se tiene:

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d_0(f,g) &= \text{máx}\{|f(x)-g(x)|\colon x\in[0,1]\} \\ &\leq \text{máx}\{|f(x)-h(x)|\colon x\in[0,1]\}+\text{máx}\{|h(x)-g(x)|\colon x\in[0,1]\} \\ &= d_0(f,h)+d_0(h,g) \end{aligned}$$

Así, concluimos que d_0 es una métrica para el conjunto $C[0,1]$ y por lo tanto, $(C[0,1],d_0)$ es un espacio métrico. $\square$

A continuación se enuncia la noción de bola abierta en un espacio métrico y algunos ejemplos.

Definición 1.8. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\varepsilon>0$ y $x\in X$. El conjunto, $B^d_X(x,\varepsilon)=\{y\in X\colon d(x,y)<\varepsilon\}$, se le conoce como* ***bola abierta*** *en X con centro en x y radio ε. Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente $B(x,\varepsilon)$.*

Ejemplo 1.9. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, la bola abierta con centro en x y radio $\varepsilon>0$ es:*

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}\colon d(x,y)<\varepsilon\}=(x-\varepsilon,x+\varepsilon).$$

Véase la Figura 1.1.

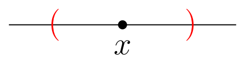


Figura 1.1: La bola abierta con centro en x y radio ε en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.10. *En $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, la bola abierta con centro en (x,y) y radio ε es:*

$$B^{d_2}((x,y),\varepsilon)=\{(z,w)\in\mathbb{R}^2\colon \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}<\varepsilon\}.$$

El siguiente ejemplo describe la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual.

Ejemplo 1.11. *En $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, la bola abierta con centro en $(x_1,\ldots,x_n)$ y radio $\varepsilon>0$ es:*

$$B^{d_n}((x_1,\ldots,x_n),\varepsilon)=\{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n\colon \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}<\varepsilon\}.$$

Ejemplo 1.12. *En* $\mathbb{R}^2$ *con la métrica del taxista, la bola abierta con centro en* (x_1, y_1) *y radio* $\varepsilon > 0$ *es:*

$$B^T((x_1, y_1), \varepsilon) = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \varepsilon\}.$$

En la Figura 1.2, se muestran las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ con centro en x y radio ε, con la métrica euclidiana y la métrica del taxista.

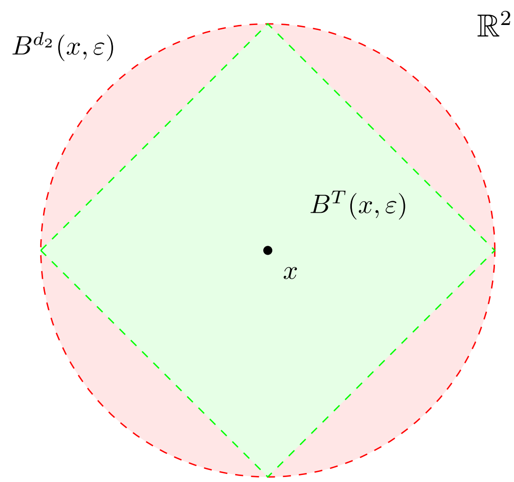


Figura 1.2: Las bolas $B^T(x, \varepsilon)$ y $B^{d_2}(x, \varepsilon)$ de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.13. *Sea* X *con la métrica discreta y sea* $x \in X$*, entonces* $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\} = \{x\}$*, para todo* $0 < \varepsilon \leq 1$ *y* $B(x, \varepsilon) = X$*, si* $\varepsilon{>}1$*.*

Ejemplo 1.14. *En el espacio métrico* $C([0, 1], d_0)$*, la bola abierta es de la forma*

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in C[0, 1] \colon \text{máx}\{|f(x) - g(x)| \colon x \in [0, 1]\} < \varepsilon\},$$

donde el centro de la bola abierta es la función f *y el radio es* ε*, véase la Figura 1.3.*

Definición 1.15. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* X *converge a un punto* $x \in X$ *si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \in B(x, \varepsilon)$ *cuando* $n \geq N$*. En este caso,* x *es llamado el punto límite de la sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

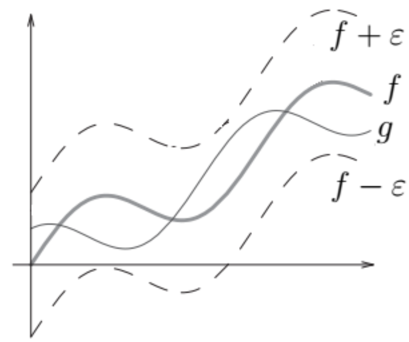


Figura 1.3: Bola con centro en f y radio ε.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, se denotará por $x_n \to x$.

Definición 1.16. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es un **conjunto abierto** en X si para cada $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Un subconjunto E de X es un **conjunto cerrado** en X si su complemento $X - E$ es un conjunto abierto en X.*

Observemos que existen conjuntos que no son abiertos o cerrados, pero podemos definir conjuntos a partir de estos que si lo sean, como se presenta a continuación.

Definición 1.17. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$.*
*Definimos el **interior** de A como:*

$$\mathrm{int}(A) = \{x \in X \colon \textit{existe } \varepsilon > 0 \textit{ tal que } B(x,\varepsilon) \subset A\}$$

*la **cerradura** de A como:*

$$\mathrm{cl}(A) = \{x \in X \colon \textit{para todo } \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Observemos de la definición 1.17, que: $\mathrm{int}(A) \subset A \subset \mathrm{cl}(A)$. Más aún, $\mathrm{int}(A)$ es un conjunto abierto.

Definición 1.18. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. La **frontera** de A, se define por:*

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(X - A).$$

Definición 1.19. *Sea A un subconjunto no vacío y acotado de un espacio métrico X. El **diámetro** de A, se define por:*

$$\textit{diám}(A) = \sup\{d(x,y) \colon x, y \in A\}.$$

Proposición 1.20. *Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces* $\mathrm{cl}(A)$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Probaremos que $X - \mathrm{cl}(A)$ es abierto. Sea $x \in X - \mathrm{cl}(A)$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Observemos que $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x, \varepsilon)$. Sea $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y supongamos que $y \in \mathrm{cl}(A)$. Luego, $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$. Así, existe $z \in A$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. De la desigualdad del triángulo, obtenemos:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto implica que $z \in B(x, \varepsilon)$, esto es una contradicción, porque $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Así, $y \in X - \mathrm{cl}(A)$. Dado que y fue arbitrario, se tiene que, $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset X - \mathrm{cl}(A)$. Por lo tanto, $X - \mathrm{cl}(A)$ es abierto, en consecuencia $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado. □

Teorema 1.21. *Sea X un espacio métrico. Entonces $x \in \mathrm{cl}(A)$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $x_n \to x$.*

Demostración. Supongamos que $x \in \mathrm{cl}(A)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A. Veamos que $x_n \to x$. Sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Así, si $n \geq N$, entonces $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon)$. Por lo tanto, $x_n \to x$.

Ahora supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $x_n \to x$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. En consecuencia, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}(A)$. □

Proposición 1.22. *Sean X un espacio métrico, A y F subconjuntos de X. Las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) A es abierto si y solo si $A = \mathrm{int}(A)$.

(ii) F es cerrado si y solo si $F = \mathrm{cl}(F)$.

Demostración. (i) Supongamos que A es abierto, entonces para cada $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$, esto es, $A = \mathrm{int}(A)$. Ahora, supongamos que $A = \mathrm{int}(A)$, entonces A es abierto.

(ii) Sean F cerrado y $x \in \mathrm{cl}(F)$. Supongamos que $x \in X - F$. Como $X - F$ es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset X - F$. Luego,

$B(x,\varepsilon)\cap F = \emptyset$, que es una contradicción, porque $x \in \mathrm{cl}(A)$. En consecuencia, $x \in F$. Así, $\mathrm{cl}(F) \subset F$. Además, dado que $F \subset \mathrm{cl}(F)$, se concluye que $F = \mathrm{cl}(F)$. Ahora, si $F = \mathrm{cl}(F)$, por la proposición 1.20, F es cerrado. $\square$

El resultado que a continuación se presenta, demuestra que la bola abierta en un espacio métrico es un conjunto abierto, véase la Figura 1.4.

Proposición 1.23. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x \in X$ y radio $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que para cualquier $w \in B(x,\varepsilon)$, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(w,\varepsilon_0) \subset B(x,\varepsilon)$. Sean $\varepsilon_0 = \varepsilon - d(x,w)$ y $z \in B(w,\varepsilon_0)$. Así, tenemos que $d(w,z) < \varepsilon_0 = \varepsilon - d(x,w)$, de esto, tenemos que $d(w,z) + d(x,w) < \varepsilon$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $d(x,z) \leq d(w,z) + d(x,w)$, así, $d(x,z) < \varepsilon$, es decir, $B(w,\varepsilon_0) \subset B(x,\varepsilon)$, para todo $w \in B(x,\varepsilon)$. Por tanto, $B(x,\varepsilon)$ es un conjunto abierto en X. $\square$

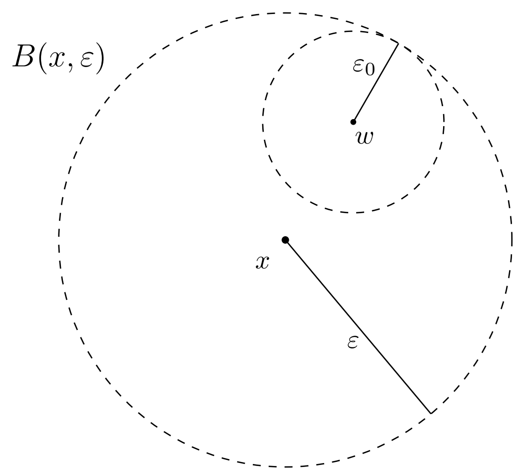


Figura 1.4: Representación intuitiva de la proposición 1.23.

Ejemplo 1.24. *Sea (X,d) el espacio métrico discreto. Recordemos que $B(x,1) = \{x\}$ para cualquier punto $x \in X$. Así, cada conjunto singular es un conjunto abierto en X. Además, como cada subconjunto de X es la unión de sus puntos, se sigue que cada subconjunto de X es un conjunto abierto en X. Observe que el complemento de un subconjunto de X es abierto porque es subconjunto de X. Así, los subconjuntos de X son abiertos y cerrados.*

El teorema 1.25 menciona algunas propiedades que satisfacen los conjuntos abiertos en un espacio métrico.

Teorema 1.25. *Si (X, d) un espacio métrico. Entonces*

(i) Los conjuntos $\emptyset$ y X son conjuntos abiertos.

(ii) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(iii) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Demostración. (i) Como el conjunto vacío carece de elementos, la propiedad de ser abierto se cumple por vacuidad. El conjunto X es abierto porque para cada punto $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \subset X$.

(ii) Sea $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de X. Probaremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un conjunto abierto en X. Para esto, sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como A es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Como $A \subset \bigcup \mathcal{A}$, tenemos que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup \mathcal{A}$. Dado que x es arbitrario, tenemos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un conjunto abierto en X.

(iii) Sean $A_1, ..., A_m$ subconjuntos abiertos de X. Probaremos que $\cap_{i=1}^m A_i$ es abierto en X. Sea $x \in \cap_{i=1}^m A_i$, entonces $x \in A_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Como cada A_i es abierto, entonces existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i \colon i \in \{1, ..., m\}\}$, entonces $B(x, \varepsilon) \subset A_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$, luego $B(x, \varepsilon) \subset \cap_{i=1}^m A_i$. Por lo tanto, $\cap_{i=1}^m A_i$ es un conjunto abierto. □

En el teorema 1.25, se demuestra que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, sin embargo esto no ocurre con la intersección arbitraria de conjuntos abiertos. A continuación se ejemplifica este hecho con un caso particular, donde la intersección infinita de conjuntos abiertos no es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.26. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Observemos que cada A_n es abierto en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana, pero $\cap_{n=1}^\infty A_n = \{0\}$ no es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ porque para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(0, \varepsilon) \not\subset \{0\}$. También, podemos observar que $\{0\}$ es cerrado puesto que su complemento*

$$\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\}$$

es un conjunto abierto.

Definición 1.27. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, definimos la función*

$$d_A \colon A \times A \to \mathbb{R}$$

tal que si $x, y \in A$ se tiene que $d_A(x, y) = d(x, y)$. La función d_A es una métrica para el conjunto A. Esta función es llamada la ***métrica inducida*** *por d en A.*

Definición 1.28. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Una función $f \colon X \to Y$ es una* ***función continua en un punto*** *$x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B^{d_1}(x, \delta)$, entonces $f(y) \in B^{d_2}(f(x), \varepsilon)$. Si f es continua en cada punto $x \in X$, decimos que f es una* ***función continua*** *en X.*

Teorema 1.29. *Sean $(X, d_1), (Y, d_2)$ espacios métricos. Una función $f \colon X \to Y$ es continua en un punto $x \in X$ si y solo si para cada conjunto abierto V en Y que contiene a $f(x)$, existe un conjunto abierto U en X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$.*

Demostración. Sean $f \colon X \to Y$ una función continua y V un conjunto abierto de Y que contiene a $f(x)$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^{d_2}(f(x), \varepsilon) \subset V$. Dado que f es continua, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B^{d_1}(x, \delta)$, entonces $f(y) \in B^{d_2}(f(x), \varepsilon) \subset V$. Así, considerando $U = B^{d_1}(x, \delta)$, tenemos que $f(U) \subset B^{d_2}(f(y), \varepsilon)$, lo cual implica que $f(U) \subset V$.

Ahora, supongamos que para cada conjunto abierto V en Y que contiene a $f(x)$, existe un conjunto abierto U en X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $B^{d_2}(f(x), \varepsilon) = V$ el conjunto abierto que contiene a $f(x)$. Luego, existe un conjunto abierto U en X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. Puesto que $x \in U$ y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B^{d_1}(x, \delta) \subset U$. Así, $f((B^{d_1}(x, \delta)) \subset B^{d_2}(f(x), \varepsilon)$. Esto es, si $y \in B^{d_1}(x, \delta)$, se tiene que $f(y) \in B^{d_2}(f(x), \varepsilon)$. Por lo tanto, f es continua en x. $\square$

Definición 1.30. *Sea X un conjunto. Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ a la colección de todos los subconjuntos de X. Una* ***topología*** *en X es una subcolección τ de $\mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in K}$ es una coleción finita de elementos de τ, entonces $\bigcap_{\alpha \in K} U_\alpha \in \tau$.*

(iii) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es una colección arbitraria de elementos de* τ*, entonces* $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$.

Definición 1.31. *Un* ***espacio topológico*** *es un conjunto* X *con una topología* τ *y lo denotamos por* (X,τ)*. Si no se presta a confusión, escribiremos simplemente* X *en lugar de* (X,τ)*.*

Observación 1.32. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Definamos la colección* $\tau_d = \{A\colon A \text{ es abierto en } X\}$*. Por el teorema 1.25,* τ_d *es una topología para* X*. De esto obtenemos que un espacio métrico es un espacio topológico. A* τ_d *se le conoce como la topología métrica.*

En general, si tenemos un espacio topológico (X,τ), a los elementos de τ les llamamos conjuntos abiertos.

Observación 1.33. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $x_0 \in X$*. Entonces* $\{x_0\}$ *es un cerrado en* X*.*

Hemos visto que un espacio métrico es un espacio topológico, pero no todo espacio topológico es un espacio métrico. Veamos este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.34. *Sea* $X = \{a,b,c\}$ *y* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$*. La pareja* (X,τ) *es un espacio topológico, pero no es métrico ya que si lo fuera, por la observación 1.33, cualquier conjunto singular de* X *es cerrado y por lo tanto su complemento pertenecería a* τ*, lo cual en este caso no se cumple porque* $X - \{a\} = \{b,c\} \notin \tau$*.*

Nuestro interés son los espacios métricos y solo nos interesaran los espacios topológicos que sean métricos, los cuales se enuncian a continuación.

Definición 1.35. *Un espacio topológico* (X,τ) *es un espacio métrico (o metrizable) si existe una métrica* d *en* X *tal que* $\tau_d = \tau$*.*

Ejemplo 1.36. *Dado cualquier conjunto* X *no vacío, la colección* $\{X,\emptyset\}$*, es una topología sobre* X*, la cual es llamada* ***topología indiscreta****. Si* X *tiene más de un punto, por argumentos similares al ejemplo 1.34, este tipo de espacios no es metrizable.*

Ejemplo 1.37. *La colección* $\mathcal{P}(X)$ *forma una topología para* X*, la cual es llamada* ***topología discreta*** *y el conjunto* X *con esta topología es llamado espacio discreto. Por el ejemplo 1.13, podemos ver que la métrica discreta genera a la topología discreta y por tanto este espacio es metrizable.*

Definición 1.38. *Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. f es abierta (cerrada) si para cada conjunto abierto (cerrado) A en X, se cumple que $f(A)$ es un conjunto abierto (cerrado) en Y.*

Definición 1.39. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Un conjunto $V \subset A$ es abierto en A si $V = U \cap A$ para algún $U \in \tau$. La colección*

$$\tau_A = \{U \cap A\colon U \in \tau\}$$

*es llamada la **topología relativa de** A con respecto a X. Si A tiene la topología relativa, A es llamado un subespacio de (X, τ).*

Ejemplo 1.40. *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, el conjunto $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en el conjunto $[0, 1]$, porque $[0, \frac{1}{2}) = (-1, \frac{1}{2}) \cap [0, 1]$, donde $(-1, \frac{1}{2})$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.*

Definición 1.41. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $x_0 \in X$, entonces una **base local** para τ en x_0 es una subcolección $\mathcal{B}_{x_0}$ de τ con las siguientes propiedades:*

(i) Para cada $U \in \tau$ y $x_0 \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $x_0 \in V \subset U$.

(ii) $x_0 \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}_{x_0}} V$.

Ejemplo 1.42. *En $\mathbb{R}$, la colección de todos los intervalos abiertos que contiene al punto x_0 de $\mathbb{R}$ forman una base local. En general, en cualquier espacio métrico X la colección de todas las bolas abiertas sobre los puntos $x \in X$ forman una base local para el punto x.*

Definición 1.43. *Un espacio topológico (X, τ) se dice que tiene una **base local numerable** en el punto $x \in X$ si existe una base local $\mathcal{B}_x$ en x tal que $\mathcal{B}_x$ es un conjunto numerable. Un espacio X que tiene una base local numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el primer axioma de numerabilidad o que es **primero numerable**.*

Ejemplo 1.44. *En $\mathbb{R}$ con la topología usual, para cada $x \in \mathbb{R}$, la colección $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n})\colon x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable para el punto x, por lo tanto $\mathbb{R}$ es primero numerable.*

Ejemplo 1.45. *En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la colección $\mathcal{B} = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \times (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable para (x, y), por lo tanto $\mathbb{R}^2$ es primero numerable.*

Ejemplo 1.46. *En general, para cualquier espacio métrico* (X, d)*, la colección de bolas abiertas forma una base local numerable para cada* $x \in X$*. Así, la colección* $\mathcal{B}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) \colon x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ *es una base local numerable para* x*. Concluimos que todo espacio métrico es primero numerable.*

En algunos casos es conveniente caracterizar la continuidad de una función mediante la topología, para esto veamos las siguientes equivalencias.

Definición 1.47. *Supongase que* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *son espacios topológicos y sea* $f \colon X \to Y$*. entonces* f *es continua en un punto* $c \in X$ *si y solo si para cada* $f(c) \in V \in \tau_Y$*, existe* $U \in \tau_X$ *que contiene a* c *tal que* $f(U) \subset V$*. Si* f *es continua en cada punto, decimos que* f *es continua.*

Teorema 1.48. *[3, Teorema 1.A.4] Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos y sea* $f \colon X \to Y$*. Entonces* f *es continua si y solo si para cada* $V \in \tau_Y$*,* $f^{-1}(V) \in \tau_X$*.*

Teorema 1.49. *[3, Teorema 1.F.9] Sean* $(X, d_1), (Y, d_2)$ *espacios métricos. La función* $f \colon X \to Y$ *es continua en* x *si y solo si para cada sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *que converge a* x*, se cumple que la sucesión* $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $f(x)$*.*

1.2. Homeomorfismos

Definición 1.50. *Sean* X, Y *espacios topológicos, una función* $f \colon X \to Y$ *es un* ***homeomorfismo*** *si* f *es continua, biyectiva y la inversa* $f^{-1} \colon Y \to X$ *es continua. Si existe un homeomorfismo entre los espacios* X *y* Y *diremos que estos son homeomorfos.*

Teorema 1.51. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos, una función* $f \colon X \to Y$ *es un homeomorfismo si y solo si* f *es biyectiva, continua y abierta.*

Demostración. Supongamos que f es un homeomorfismo. Solo falta probar que f es abierta. Para esto sea U abierto de X. Como f^{-1} es continua, $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto de Y. Como la imagen inversa de U bajo la función f^{-1} es igual a la imagen de U bajo la función f, esto implica que $f(U)$ es abierto de Y. Por lo tanto f es abierta.

Ahora, supongamos que f es continua, biyectiva y abierta. Bastará probar que f^{-1} es continua. Sea U abierto de X, entonces $f(U)$ es abierto de Y. Como $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, tenemos que $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto de Y, por lo tanto f^{-1} es continua. $\square$

Del teorema 1.51, podemos observar que un homeomorfismo es una correspondencia biyectiva que preserva la estructura topológica. De esta manera, dos espacios topológicos se consideran iguales desde un punto de vista topológico si son homeomorfos. Para entender mejor esto, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.52. *En $\mathbb{R}$, los intervalos cerrados son homeomorfos.*
Sea $h\colon [a,b] \to [c,d]$. Definida por $h(x) = m(x-b)+d$, donde $m = \frac{d-c}{b-a}$, $a < b$ y $c < d$.

Veamos que h es un homeomorfismo.
Solución: Dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $h(x_1) = h(x_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} m(x_1 - b) + d &= m(x_2 - b) + d \\ m(x_1 - b) &= m(x_2 - b) \\ (x_1 - b) &= (x_2 - b) \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Es decir, h es inyectiva. Además, para cada $y \in [c,d]$ existe $\frac{1}{m}(y-d)+b$ en $[a,b]$ tal que $h(\frac{1}{m}(y-d)+b) = y$, por lo tanto h es sobreyectiva. Más aún, $h^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ está dada por $h^{-1}(y) = \frac{1}{m}(y-d)+b$.
Veamos que h es continua. Dado $x_0 \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|} > 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} |h(x_0) - h(x)| &= |m(x_0 - b) + d - (m(x-b)+d)| \\ &= |m \cdot x_0 - m \cdot b + d - m \cdot x + m \cdot b - d| \\ &= |m \cdot x_0 - m \cdot x| \\ &= |m(x_0 - x)| \\ &= |m||x_0 - x|. \end{aligned}$$

Así, si $|x_0 - x| < \delta$, entonces $|h(x_0) - h(x)| < \varepsilon$. Por tanto, h es continua. De manera análoga se prueba que h^{-1} es continua.
De esto, concluimos que h es un homeomorfismo y por lo tanto, $[a,b]$ y $[c,d]$ son homeomorfos.

Ejemplo 1.53. *En $\mathbb{R}$, los intervalos abiertos son homeomorfos.*
Del ejemplo 1.52, se tiene que $h[a,b] \to [c,d]$ es un homeomorfismo. Además, $h(a) = c$ y $h(b) = d$. Así, $h|_{(a,b)}\colon (a,b) \to (c,d)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto (a,b) es homeomorfo a (c,d).

Los ejemplos anteriores son relativamente sencillos e intuitivos, porque los intervalos cerrados y abiertos se parecen mucho entre sí, pero hay espacios que parecen ser distintos a simple vista, pero son iguales topológicamente, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1.54. *El conjunto $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un intervalo abierto.*
Considerando el ejemplo 1.53, bastará probar que $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo $(-1,1)$. Sea $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$, véase la Figura 1.5.

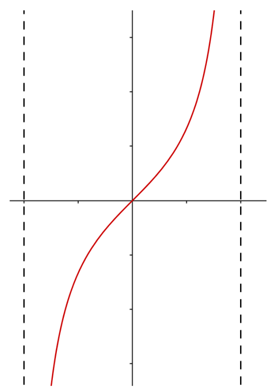


Figura 1.5: Homeomorfismo entre el intervalo (-1,1) y $\mathbb{R}$.

Veamos que f es un homeomorfismo.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in (-1,1)$ tales que $f(x_1)=f(x_2)$, entonces $\frac{x_1}{1-|x_1|}=\frac{x_2}{1-|x_2|}$, esto es $x_1-x_1|x_2|=x_2-x_2|x_1|$. Observemos que x_1 y x_2 tienen el mismo signo, entonces $x_1|x_2|=x_2|x_1|$, en consecuencia, $x_1=x_2$. Por lo tanto f es inyectiva. Además, dado $y\in\mathbb{R}$, existe $\frac{y}{1+|y|}\in(-1,1)$ tal que $f(\frac{y}{1+|y|})=y$. Por lo tanto f es sobreyectiva. Es decir, es biyectiva. Más aún, la función inversa está dada por $f^{-1}(y)=\frac{y}{1+|y|}$.

Veamos que f es continua. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(-1,1)$ tal que $x_n\to x$, probaremos que $f(x_n)\to f(x)$. Dado que $x_n\to x$, entonces $|x_n|\to|x|$. Luego se tiene que $1-|x_n|\to 1-|x|$. Así, $\frac{x_n}{|1-x_n|}\to\frac{x}{1-|x|}$. Por lo tanto f es continua. De manera análoga usando sucesiones se prueba que f^{-1} es continua. De esta manera hemos probado que f es un homeomorfismo y por tanto los espacios $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos.

Ejemplo 1.55. *En* $\mathbb{R}^3$*. La superficie de un cubo es homemorfo a la esfera unitaria* S^2*. Sean* $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *la esfera unitaria y* $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ *el cubo en* $\mathbb{R}^3$ *con centro en* $\boldsymbol{0}$*. Sea* $SC = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^3}(C)$ *y* $\|p\| = d^3(p, \boldsymbol{0})$*. La función* $h \colon SC \to S^2$ *definida por* $h(p) = \frac{p}{\|p\|}$ *es un homeomorfismo, véase la Figura 1.6.*

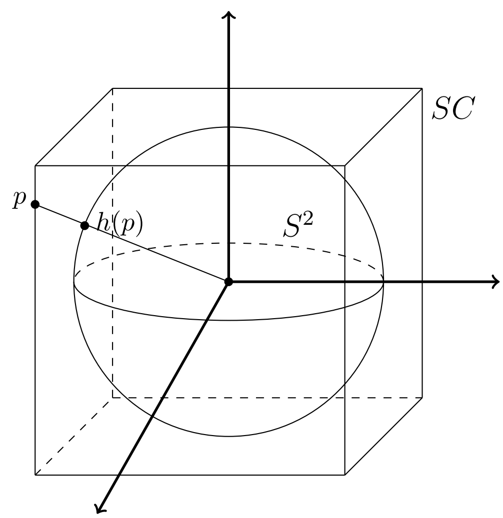


Figura 1.6: Homeomorfismo entre la superfice del cubo SC y la esfera S^2.

Para verificar que h es una biyección usaremos que una recta que pasa por el origen $\mathbf{0}$ intersecta a SC en exactamente dos puntos de la forma $\mathbf{a}, \mathbf{-a}$. Este hecho no es difícil de probar, aunque tampoco corto de escribir. Veamos que h es un homeomorfismo. **Solución:** Veamos que h es inyectiva. Sean $p, q \in SC$. Supongamos que $h(p) = h(q)$, entonces $\frac{p}{\|p\|} = \frac{q}{\|q\|}$. Luego, $p = \frac{\|p\|}{\|q\|} \cdot q$. Así, p y q pertenecen a la recta:

$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \text{ existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} = t \cdot p\}.$$

Dado que L intersecta a SC en exactamente dos puntos y $p \in L \cap SC$, entonces $L \cap SC = \{p, -p\}$. Como $q \in SC$ y $q = \frac{\|q\|}{\|p\|} \cdot p$, entonces $q \in L \cap SC$. Observemos que q no puede ser $-p$ puesto que $\frac{\|q\|}{\|p\|} > 0$. Por lo tanto $q = p$, lo que implica que h es inyectiva.

Veamos que h es sobreyectiva. Sea $w_o \in S^2$, definimos la recta que pasa por w_0 y $\mathbf{0}$ como

$$L_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{ existe } t_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x} = t \cdot w_0\}.$$

Sabemos que $L_0 \cap SC = \{a, -a\}$. Como $a \in L_0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a = t_0 \cdot w_0$. Así,

$$L_0 \cap SC = \{t_0 w_0, -t_0 w_0\} = \{|t_0| w_0, -|t_0| w_0\}.$$

Sea $p_0 = |t_0| \cdot w_0$, luego

$$h(p_0) = \frac{|t_0| \cdot w_0}{\||t_0| \cdot w_0\|} = \frac{|t_0|}{|t_0|} \cdot \frac{w_0}{\|w_0\|} = w_0.$$

Por lo tanto h es sobreyectiva.

Veamos que h es continua. Sea $p \in SC$ y sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p_n \to p$. Veamos que $h(p_n) \to h(p)$, es decir, $\frac{p_n}{\|p_n\|} \to \frac{p}{\|p\|}$. Será suficiente probar que $\|p_n\| \to \|p\|$. Haciendo uso de la desigualdad triangular, observemos que

$$\|p\| = \|p - p_n + p_n\| \leq \|p - p_n\| + \|p_n\| \text{ y}$$

$$\|p_n\| = \|p_n - p + p\| \leq \|p_n - p\| + \|p\|,$$

entonces

$$\|p\| - \|p_n\| \leq \|p - p_n\| \text{ y}$$

$$\|p_n\| - \|p\| \leq \|p_n - p\|,$$

de esto se tiene que

$$|\|p_n\| - \|p\|| \leq \|p_n - p\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $p_n \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\|p_n - p\| < \varepsilon$. De lo anterior se tiene:

$$|\|p_n\| - \|p\|| \leq \|p_n - p\| < \varepsilon, \text{ entonces } \|p_n\| \to \|p\|.$$

Por lo tanto h es continua.

Ejemplo 1.56. ***La proyección estereográfica***. *Sea $N = (0, 0, 1)$, construiremos una función de $S^2 - \{N\}$ sobre $\mathbb{R}^2$, para esto usaremos de manera auxiliar al plano $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$, al cual denotaremos por P. Para cada $p \in S^2 - \{N\}$, la recta que pasa por p y N, este punto de intersección define unívocamente a la proyección, véase la Figura 1.7.*

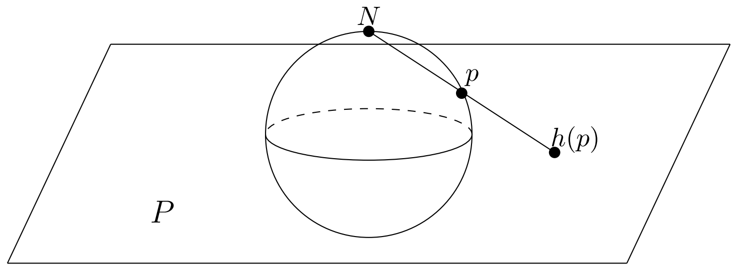


Figura 1.7: La proyección estereográfica.

Dado $p=(x,y,z)\in S^2-\{N\}$, la recta que pasa por p y N es

$$L=\{(0,0,1)+t(x,y,z-1)\colon t\in\mathbb{R}\}.$$

Sea $(x_0,y_0,0)$ el punto de intersección de L con P. Entonces existe $t\in\mathbb{R}$ tal que $(tx,ty,t(z-1)+1)=(x_0,y_0,0)$. Así, $t=\frac{1}{1-z}$, en consecuencia, $x_0=tx=\frac{x}{1-z}$ y $y_0=ty=\frac{y}{1-z}$. Por lo tanto, $(x_0,y_0,0)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$.

Así, tenemos que el punto de intersección de L con el plano P es, $\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$. Observemos que cualquier punto de S^2, excepto N, satisface que su tercera coordenada es diferente de 1, por lo que este punto existe. Así podemos definir la función

$$\begin{aligned} P_E\colon S^2-\{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\tfrac{x}{1-z},\tfrac{y}{1-z}\right). \end{aligned}$$

Veamos que P_E es un homeomorfismo.

Solución: Primero probemos que P_E es inyectiva. Sean $p,q\in S^2-\{N\}$, donde $p=(x,y,z)$ y $q=(u,v,w)$.

Supongamos $P_E(p)=P_E(q)$, entonces $(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z})=(\frac{u}{1-w},\frac{v}{1-w})$. Luego se tiene

$$\tfrac{x}{1-z}=\tfrac{u}{1-w} \text{ y } \tfrac{y}{1-z}=\tfrac{v}{1-w}. \tag{1.1}$$

Además, como $p,q\in S^2$, se tiene:

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ y } u^2+v^2+w^2=1 \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se tiene:

$$\tfrac{x^2+y^2}{(1-z)^2}=\tfrac{1-z^2}{(1-z)^2}=\tfrac{(1-z)\cdot(1+z)}{(1-z)^2}=\tfrac{1+z}{1-z} \text{ y } \tfrac{u^2+v^2}{(1-w)^2}=\tfrac{1-w^2}{(1-w)^2}=\tfrac{(1-w)\cdot(1+w)}{(1-w)^2}=\tfrac{1+w}{1-w}.$$

Esto es,

$$\tfrac{1+z}{1-z} = \tfrac{1+w}{1-w}.$$

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{1+z}{1-z} &= \tfrac{1+w}{1-w} \\ (1+z)(1-w) &= (1+w)(1-z) \\ 1+z-w-zw &= 1+w-z-zw \\ 2z &= 2w \\ z &= w \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.1), se obtiene $x = u$ y $y = v$, de esta manera, $(x, y, z) = (u, v, w)$. Por lo tanto, P_E es inyectiva.

Ahora, veamos que P_E es sobreyectiva. Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, buscamos un punto $(a, b, c) \in S^2 - \{N\}$ tal que $P_E(a, b, c) = (x_0, y_0)$, es decir

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a}{1-c} \\ y_0 &= \frac{b}{1-c}. \end{aligned}$$

De esto, obtenemos el siguiente sistema:

$$S = \begin{cases} a = x_0 \cdot (1-c) \\ b = y_0 \cdot (1-c) \\ 1 = a^2 + b^2 + c^2. \end{cases}$$

Para exhibir la existencia del punto (a, b, c) hay que encontrar la solución del sistema S, esto es, poner a a, b, c en función de x_0 y y_0. Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= x_0^2(1-c)^2 + y_0^2(1-c)^2 + c^2 \\ &= (x_0^2 + y_0^2)(1-c)^2 + c^2 \\ &= (x_0^2 + y_0^2)(1-2c+c^2) + c^2 \\ &= (x_0^2 + y_0^2 + 1)c^2 + (x_0^2 + y_0^2)(1-2c). \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene la siguiente ecuación cuadrática

$$(x_0^2 + y_0^2 + 1)c^2 - 2(x_0^2 + y_0^2)c + (x_0^2 + y_0^2 - 1) = 0.$$

Tomando a $s = x_0^2 + y_0^2$ y usando la fórmula de segundo grado, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4(s+1)(s-1)}}{2(s+1)} \\ &= \frac{2s \pm \sqrt{4}}{2(s+1)} \\ &= \frac{2s \pm 2}{2(s+1)} \\ &= \frac{s \pm 1}{s+1}. \end{aligned}$$

Como (a, b, c) no puede ser el punto N, entonces $c \neq 1$. Así, $c = \frac{s-1}{s+1}$. Sustituyendo c en el sistema S, tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 = & \quad x_0 \left(1 - \frac{s-1}{s+1}\right) \\ = & \quad x_0 \left(\frac{s+1-(s-1)}{s+1}\right) \\ = & \quad x_0 \left(\frac{2}{s+1}\right) \\ = & \quad \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0 + 1}. \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene que $b = \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}$. Observe que $c = 1 - \frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}$. Así, tenemos que

$$(a, b, c) = \left(\tfrac{2 \cdot x_0}{x_0^2+y_0^2+1}, \tfrac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}, 1 - \tfrac{2}{x_0^2+y_0^2+1}\right) \in S^2 - \{N\}.$$

Además, podemos comprobar que

$$\begin{aligned} P_E(a, b, c) &= P_E\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 1}, 1 - \frac{2}{x_0^2 + y_0^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2+1}}{\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}}, \frac{\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2+1}}{\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}}\right) \\ &= \left(\frac{2x_0}{2}, \frac{2y_0}{2}\right) \\ &= (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_E es sobreyectiva.

La función P_E es continua, porque las funciones $h_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z}$ y $h_2(x,y,z) = \frac{y}{1-z}$ son funciones continuas.

De la sobreyectividad, se puede ver que la inversa de la función P_E es:

$$P_E^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\},$$
$$(x,y) \mapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1}\right)$$

Las funciones $f_1(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, $f_2(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ y $f_3(x,y) = 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1}$ son continuas, tenemos que P_E^{-1} es continua. Por lo tanto, P_E es un homeomorfismo.

Definición 1.57. *Una propiedad de espacios topológicos se llama **propiedad topológica** (o invariante topológico) si se preserva bajo homeomorfismos*

La propiedad de ser primero numerable es una propiedad topológica. Las siguientes secciones trataran de propiedades de compacidad y conexidad, las cuales son propiedades topológicas.

Definición 1.58. *Sean X, Y espacios métricos. Si $f\colon X \to f(X) \subseteq Y$ es un homeomorfismo, entonces decimos que f es una **inmersión** de X en Y.*

Definición 1.59. *Decimos que un conjunto X es **aplanable** si existe una inmersión de X en $\mathbb{R}^2$.*

1.3. Compacidad

Definición 1.60. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de A si*

$$A \subset \bigcup \mathcal{U}.$$

*Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ también es una cubierta de A, entonces $\mathcal{U}'$ es una subcubierta de A. Si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de A son subconjuntos abiertos de X, entonces $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta** de A.*

Definición 1.61. *Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto K de X es **compacto** si para toda cubierta abierta de K existe una subcubierta finita de K.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de conjuntos compactos y no compactos.

Ejemplo 1.62. *Cualquier subconjunto finito A de un espacio métrico X es un conjunto compacto. En efecto, sean $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Entonces existen $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tales que $x_i \in U_i$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $\mathcal{U}' = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es subcubierta finita de A. Por lo tanto A es compacto.*

Ejemplo 1.63. *El conjunto $\mathbb{R}$ no es un conjunto compacto, puesto que la cubierta abierta, $\mathcal{U} = \{(-n, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, no contiene una subcubierta finita para $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\{(-n_k, n_k) \colon k = \{1, ..., m\}\}$ una subcolección de $\mathcal{U}$, tomemos $M = \text{máx}\{n_k \colon k = \{1, ..., m\}\}$. Entonces*

$$\bigcup_{k=1}^{m} (-n_k, n_k) = (-M, M),$$

de donde se sigue que $\mathbb{R} \not\subset (-M, M)$ y por lo tanto, $\mathbb{R}$ no es compacto.

Ejemplo 1.64. *Sea (X, d) espacio métrico y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a x_0, entonces $L = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de L. Como $x_0 \in \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_0$. Luego, por la convergencia de $\{x_n\}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x_n \in U_0$. Además, para $x_1, x_2, ..., x_N$ existen $U_1, U_2, ..., U_N \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in U_i$. Así, $\mathcal{U}' = \{U_0, U_1, ..., U_N\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, L es compacto.*

Ejemplo 1.65. *El intervalo $(0, 1]$ no es compacto, ya que la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{(\frac{1}{n}, 1] \colon n \in \mathbb{N}\}$, no contiene una subcubierta finita que contenga al intervalo $(0, 1]$.*

Definición 1.66. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de X, es acotado si existe $M > 0$ tal que para toda $x, y \in A$, se cumple que $d(x, y) \leq M$.*

Teorema 1.67. *[1, Teorema 11.3][**Teorema de Heine-Borel**] Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Ejemplo 1.68. *Todo intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es compacto.*

A continuación se presentan algunos resultados de compacidad.

Definición 1.69. *Un espacio topológico X es un espacio T_2 (o **espacio de Hausdorff**) si para cualquier par de puntos distintos x, y en X, existen conjuntos abiertos y ajenos U, V en X, tales que $x \in U$, $y \in V$.*

Teorema 1.70. *Cualquier espacio métrico (X, d) es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean x, y puntos distintos en X. Luego, consideremos $\varepsilon = d(x, y) > 0$. Entonces las bolas $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ son conjuntos abiertos y ajenos que contienen a x y y, respectivamente. □

El teorema de Heine -Borel nos da una equivalencia de compacidad en $\mathbb{R}^n$, sin embargo una de esas implicaciones siempre es cierta para cualquier espacio métrico, como se muestra a continuación.

Teorema 1.71. *Sean (X, d) un espacio métrico y K un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Para demostrar que K es cerrado, demostraremos que $X - K$ es abierto. Para esto, fijemos un elemento $y \in X - K$. Por el teorema 1.69, para cada $x \in K$, existen dos abiertos ajenos U_x y V_x tales que $x \in U_x$ y $y \in V_x$. Luego, la colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_x \colon x \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ digamos, $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_k}$ que contiene a K. Luego, sea V la intersección de los abiertos correspondientes $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_k}$, entonces V es un abierto que contiene a y. Observemos que $V \cap (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_k}) = \emptyset$, lo cual implica $V \cap K = \emptyset$. Así, $y \in V \subset X - K$. Dado que esto ocurre para cualquier elemento de $X - K$, tenemos que $X - K$ es abierto y por lo tanto, K es cerrado.

Probemos que K es acotado. Sean $x_0 \in K$ y $\mathcal{U} = \{B(x_0, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $n_1, n_2, .., n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_0, n_i).$$

Sea ahora $M = \max\{n_1, ...n_m\}$, entonces tenemos que $K \subset B(x_0, M)$. Por lo tanto, se concluye que K es acotado. □

Ejemplo 1.72. *En $\mathbb{R}$ con la métrica ususal*

Definición 1.73. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$, diremos que $x \in X$ es* ***punto de acumulación (o punto límite)*** *del conjunto A, si todo abierto U de x contiene puntos de A distintos de x.*

Definición 1.74. *Un espacio métrico X tiene la* ***propiedad de Bolzano-Weierstrass*** *si cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.*

Teorema 1.75. ***[Teorema de Bolzano-Weierstrass]****. Cualquier espacio métrico compacto X tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto y A un subconjunto infinito de X. Supongamos que A no tiene puntos de acumulación en X, entonces por la definición 1.73, para cada punto $x \in X$ existe un abierto U_x el cual no contiene puntos de A diferentes de x, es decir $U_x \cap A \subset \{x\}$. Observemos que la colección $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tal que $X \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, en particular $A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Luego,

$$A = A \cap (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}) = (A \cap U_{x_1}) \cup \cdots \cup (A \cap U_{x_n}) \subset \{x_1, ..., x_n\}.$$

En consecuencia, A es finito, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, A tiene puntos de acumulación en X. □

Teorema 1.76. *[9, Teorema 5.2] Sean X un espacio topológico compacto y A un subconjunto cerrado de X, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de K. Dado que K es un conjunto cerrado en X, tenemos que $X - K$ es un conjunto abierto en X. La familia $\mathcal{U} \cup \{X - K\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tal que $X \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup (X - K)$. Puesto que $K \subset X$, tenemos que $\{U_1, ..., U_n\}$ es una subcubierta finita de K, lo cual implica que K es compacto. □

Teorema 1.77. *Sea X un espacio topológico. Si $K_1, ..., K_n$ son subconjuntos compactos de X, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ es compacto.*

Demostración. Sean $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de K. Veamos que K tiene una subcubierta finita. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K, en particular $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K_i, para $i = \{1, ..., n\}$. Como K_i es un conjunto compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{U}_i'$ de K_i, para $i = \{1, ..., n\}$. Así, la cubierta abierta $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1' \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n'$ es una subcubierta finita de K. Por lo tanto, K es compacto. □

El siguiente teorema nos garantiza que dado un espacio métrico compacto, la imágen de éste bajo una función continua es un conjunto compacto.

Teorema 1.78. *[9, Teorema 5.5] Sean X, Y espacios topológicos. Si X es compacto y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(X)$. Por teorema 1.48, para cada $U \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $\mathcal{U}' = \{f^{-1}(U)\colon U \in \mathcal{U}\}$. Como $f(X) \subset \bigcup \mathcal{U}$, entonces $X \subset \bigcup \mathcal{U}'$, es decir, $\mathcal{U}'$ es cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de X, digamos $f^{-1}(U_1), ..., f^{-1}(U_k)$ tales que $X \subset f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_k)$. De esto, $f(X) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$, es decir $\{U_1, ..., U_k\}$ es una subcubierta finita de $f(X)$. Por lo tanto $f(X)$ es compacto. $\square$

Teorema 1.79. *Sea F un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Si $m = \inf F$ y $M = \sup F$ existen, entonces m, M pertenecen a F.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $M = \sup F$, entonces, para todo $x \in F$ se tiene que $x \leq M$. Dado que M es la cota superior más pequeña de F, tenemos que $M - \frac{1}{n}$ no es cota superior de F. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto x_n tal que $M - \frac{1}{n} < x_n < M$. Así, tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos en F tales que $d(M, x_n) < \frac{1}{n}$. Esto es, si $n > N$, $x_n \in B(M, \frac{1}{n})$. En consecuencia $x_n \to M$, luego por el teorema 1.21, $M \in \mathrm{cl}(F)$. Luego, como F es cerrado, por la proposición 1.22, $F = \mathrm{cl}(F)$. Por lo tanto, $M \in F$. De manera análoga se prueba que $m = \inf F$ pertenece a F. $\square$

Teorema 1.80. *[9, Teorema 6.4] Si X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo, es decir, existen puntos x_m y x_M en X tales que:*

$$f(x_m) = m = \min\{f(x)\colon x \in X\}.$$

$$f(x_M) = M = \max\{f(x)\colon x \in X\}.$$

Demostración. Dado que $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una función continua y X es compacto, entonces por el teorema 1.78, tenemos que $f(X)$ es compacto, además, por teorema de Heine-Borel, teorema 1.67, es cerrado y acotado. Como $f(X)$ es acotado, entonces existen ínfimo y supremo. Sea $m = \inf f(X)$ y $M = \sup f(X)$. Como $f(X)$ es cerrado, por el teorema 1.79, este contiene a m

y M. Así m y M son el mínimo y el máximo de $f(X)$, respectivamente. Como $m, M \in f(X)$, existen puntos x_m y x_M en X tal que $f(x_m) = m$ y $f(x_M) = M$. $\square$

El resultado que a continuación se presenta, nos garantiza que cualquier subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Teorema 1.81. *[9, Teorema 5.3] Si X es un espacio de Hausdorff y K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto del espacio de Hausdorff X. Si K es X o $\emptyset$, entonces K es cerrado. Supongamos que $K \neq X$ y no vacío, veamos que $X - K$ es abierto en X. Sea $x_0 \in X - K$. Como X es un espacio de Hausdorff, para cada $y \in K$ existen U_y y V_y abiertos de X y ajenos que contiene a y y x_0, respectivamente. Observemos que $K \subset \bigcup_{y \in K} U_y$, es decir, $\bigcup_{y \in K} U_y$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $y_1, .., y_n \in K$ tales que $K \subset U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$. Sean $U = U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$ y $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$. Observemos que V es un abierto de X que contiene a x_0 y $V \cap U = \emptyset$. Como $K \subset U$, se tiene que $K \cap V = \emptyset$. Así $x_0 \in V \subset X - K$, en conecuencia, $X - K$ es abierto. Por lo tanto, K es cerrado. $\square$

El siguiente teorema será de gran utilidad, cuando necesitemos probar que una función es un homeomorfismo, ya que solo bastará probar continuidad y biyectividad.

Teorema 1.82. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f\colon X \to Y$ es continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea E un subespacio cerrado de X. Como X es compacto, por el teorema 1.76, E es compacto. Así, por el teorema 1.78, $f(E)$ es compacto. Puesto que Y es un espacio de Hausdorff, por el teorema 1.81, se concluye que $f(E)$ es cerrado. $\square$

Se ha probado que la unión finita de compactos es un compacto, sin embargo, esto no se cumple para una cantidad numerable, por ejemplo $\mathbb{R}$ no es compacto y $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n]$. En cambio para el producto numerable si se tiene este hecho, es decir, el producto numerable de espacios métricos compactos es compacto, este resultado se cita en el siguiente teorema.

Teorema 1.83. *[8, Teorema 1.1.11.] Si $(X_n, d_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de espacios métricos compactos, entonces $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es métrico compacto.*

1.4. Conexidad

Definición 1.84. *Un espacio métrico X es* ***disconexo*** *si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales que $X = U \cup V$. El conjunto X se dice que es* ***conexo*** *si no es disconexo.*

Observación 1.85. *Si X es un espacio métrico disconexo, observemos que los conjuntos U y V de la definición 1.84 también son cerrados, ya que $U = X - V$ y $V = X - U$. Es decir, ambos son complementos de conjuntos abiertos. Así por la definición 1.16, tenemos que U, V son abiertos y cerrados en X. De esta manera, X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en X son $\emptyset$ y X.*

Veamos algunos ejemplos de conjuntos conexos.

Ejemplo 1.86. *Cualquier espacio indiscreto es conexo, ya que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X, son el propio conjunto X y $\emptyset$.*

Ejemplo 1.87. *En intervalo $I = [0, 1]$ es un conjunto conexo.*

Supongamos lo contrario, es decir, que el intervalo I es disconexo, esto es, existen subconjuntos $U \cap I$ y $V \cap I$ abiertos, ajenos, no vacíos de I tales que $I = (U \cap I) \cup (V \cap I)$. Supongamos sin perdida de generalidad que $1 \in V$. Sea $c = \sup U \cap I$, luego $c > 0$ y $c \in I$. Si $c \in U$, entonces $c \in U \cap I$. Luego, $c < 1$.

Como U es abierto, entonces existen puntos de $U \cap I$ los cuales son mayores que c, lo cual contradice la definición de que $c = \sup U \cap I$. Supongamos que $c \in V$. Como V es abierto, existe un punto $c_1 < c$ tal que el intervalo $[c_1, c]$ está contenido en $V \cap I$, de esto, se tiene que $(U \cap I) \cap [c_1, c] \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $U \cap I, V \cap I$ son ajenos. Por lo tanto, I es conexo.

Ejemplo 1.88. *En $\mathbb{R}^2$, consideremos el conjunto $X = G \cup F$, donde $G = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R},\ y = 0\}$ y $F = \{(x, y) \colon y = \frac{1}{x},\ x > 0\}$. El conjunto X es disconexo, véase la Figura 1.8.*

Es claro que F, G son ajenos y no vacíos. Veamos que G es cerrado en $\mathbb{R}^2$, para esto, sea una sucesión $\{(x_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ en G tal que $(x_n, 0) \to (a, b)$. Sea $\varepsilon > 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + b^2} < \varepsilon.$$

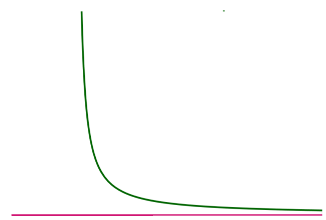


Figura 1.8: Conjunto disconexo X

Como $b^2 \leq (x_n - a)^2 + b^2$, tenemos que $|b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + b^2}$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, $|b| < \varepsilon$. Entonces $|b| = 0$, por lo tanto, $b = 0$. Así, tenemos que $(a, b) \in G$. Por el teorema 1.21, G es cerrado.

Ahora veamos que F es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Para esto, sea una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en F tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

y

$$|y_n - y| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon$ y $|y_n - y| < \varepsilon$, lo cual implica que $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

Como $x_n > 0$, tenemos que $x \geq 0$. Supongamos que $x = 0$. Entonces para $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_m}| < \frac{1}{m}$, o bien, $\frac{1}{x_{n_m}} > m$. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_m} > m$. Lo cual es una contradicción, puesto que $y_n \to y$. Por lo tanto, $x > 0$. Luego $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$, es decir, $y_n \to \frac{1}{x}$. Como el límite es único, tenemos que $y = \frac{1}{x}$. Por lo tanto, $(x, y) \in F$. Así, por el teorema 1.21, F es cerrado.

Por lo tanto, concluimos que $X = F \cup G$ es disconexo.

Ejemplo 1.89. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo, para esto veamos que los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos singulares. En efecto, si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ que contiene dos puntos p, q, donde $p < q$, podemos elegir un número irracional i tal que $p < i < q$. Luego, $Y = (Y \cap (-\infty, i)) \cup (Y \cap (i, +\infty))$. Por tanto Y es disconexo.*

A continuación se presentan algunos resultados de conexidad, los cuales serán de gran importancia para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.90. *[9, Lema 1.2] Sean X es un espacio métrico, U, V abiertos de X, ajenos y no vacíos. Si Y es conexo tal que $Y \subset U \cup V$, entonces $Y \subset U$ o $Y \subset V$.*

Demostración. Sea Y conexo tal que $Y \subset U \cup V$. Supongamos que $Y \cap U \neq \emptyset$ y $Y \cap V \neq \emptyset$. Así, $Y \cap U$, $Y \cap V$ son abiertos de Y, ajenos y no vacíos tales que, $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V)$. Es decir, Y es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Y \cap U = \emptyset$ o $Y \cap V = \emptyset$. O bien, $Y \subset X - U$ o $Y \subset X - V$. Como $Y \subset U \cup V$, se tiene $Y \subset V$ o $Y \subset U$. $\square$

Teorema 1.91. *[9, Teorema 1.3] La unión de conjuntos conexos en un espacio métrico cuya intersección es no vacía es conexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una familia de conexos de X tales que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Sea $Y = \bigcup \mathcal{C}$. Veamos que Y es conexo. Supongamos lo contrario, es decir, que existen conjuntos U, V abiertos en X tales que, $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$, $U \cap Y \neq \emptyset$ y $V \cap Y \neq \emptyset$.

Como $U \cap Y \neq \emptyset$, existe un $C_1 \in \mathcal{C}$, tal que $C_1 \cap U \neq \emptyset$. Similarmente, como $V \cap Y \neq \emptyset$, entonces existe $C_2 \in \mathcal{C}$, tal que $C_2 \cap V \neq \emptyset$. Observemos que $C_1 \subset U \cup V$ y $C_2 \subset U \cup V$, así, por el teorema 1.90, se tiene que $C_1 \subset U$ y $C_2 \subset V$. Luego $C_1 \subset Y \cap U$ y $C_2 \subset Y \cap V$, esto implica que $C_1 \cap C_2 \subset (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$, es decir, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. lo cual es una contradicción puesto que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Por lo tanto, Y es conexo. $\square$

Teorema 1.92. *[9, Teorema 1.5] Si X, Y son espacios métricos, X es conexo y $f\colon X \to Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Sean X, Y espacios métricos y X conexo. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Supongamos que $f(X)$ es disconexo, entonces existen U, V conjuntos abiertos, ajenos y no vacíos en $f(X)$ tales que $f(X) = U \cup V$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son ambos abiertos, ajenos y no vacíos, más aún, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Es decir, X es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(X)$ es conexo. $\square$

Ejemplo 1.93. $\mathbb{R}$ *es conexo. En efecto: Sea* $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$, *con* $n \in \mathbb{N}$. *Por el teorema 1.4, sabemos que el intervalo* $[0, 1]$ *es conexo y como* $[-n, n]$ *es homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$, *tenemos que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $[-n, n]$ *es conexo. Además, la intersección* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1]$ *no es vacío. Así, por el teorema 1.91, tenemos que* $\mathbb{R}$ *es conexo.*

Ejemplo 1.94. *$\mathbb{R}^2$ es conexo, pues es la unión de las familias de todas las lineas rectas que pasan por el orígen. Además, cada línea recta es homeomorfa a $\mathbb{R}$. La intersección de todas las lineas rectas es el punto $(0,0)$. Así, por el teorema 1.91, tenemos que $\mathbb{R}^2$ es conexo.*

Teorema 1.95. *[9, Teorema 1.4] Sean X un espacio métrico, A y B subconjuntos de X. Si A es conexo y $A \subset B \subset \mathrm{cl}(A)$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, luego existen subconjuntos U, V abiertos de X, ajenos y no vacíos tales que $U \cap B$ y $V \cap B$ son ajenos, $U \cap B \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset$ y $B = (U \cap B) \cup (V \cap B)$. Como A es conexo, entonces por el teorema 1.90, $A \subset U \cap B$ o $A \subset V \cap B$. Sin perdida de generalidad supongamos que $A \subset U \cap B$. Luego $A \cap V = \emptyset$, de esto, $A \subset X - V$ y como $X - V$ es cerrado, se tiene que $\mathrm{cl}(A) \subset X - V$, entonces $B \subset X - V$, lo cual implica que $B \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, B es un conjunto conexo. $\square$

Teorema 1.96. *[11, Teorema 26.10] Sea $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una colección arbitraria de espacios topológicos. Donde*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X es conexo si y solo si X_α es conexo para cada $\alpha \in \Lambda$.

Veamos algunas definiciones y resultados relacionadas con conexidad, los cuales seran de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.97. *Un **arco** es cualquier espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$, definido por $h \colon [0,1] \to \mathcal{A}$, donde $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Los puntos p, q son llamados puntos extremos del arco $\mathcal{A}$, véase la Figura 1.9. Un espacio métrico X es **arco-conexo** si todo par de puntos de X pueden ser unidos por un arco en X.*

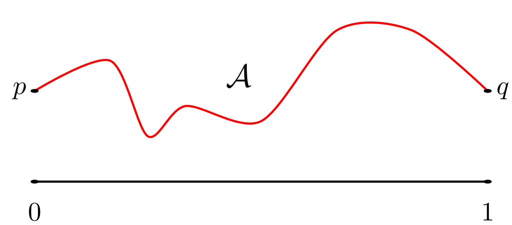


Figura 1.9: Un arco.

Observación 1.98. *Por el teorema 1.92, un arco en X es un subconjunto conexo de X, puesto que es la imagen bajo una función continua del conexo* $[0,1]$.

Teorema 1.99. *Todo espacio métrico arco-conexo es conexo.*

Demostración. Sean X un espacio métrico arco-conexo y $p \in X$. Sea $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$, donde $\mathcal{A}_x$ es un arco que une a x con p para toda x en X. Por la observación 1.98, $\mathcal{A}_x$ es conexo para cada $x \in X$ y por el teorema 1.91, X es conexo ya que es una unión de conexos cuya intersección es p. $\square$

Ejemplo 1.100. *Sea $B^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_n \leq 1\}$, donde*

$$\|\boldsymbol{x}\|_n = \|(x_1, ..., x_n)\|_n = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dados $x, y \in B^n$, definimos $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por $f(t) = (t)\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$. Como

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_n &= \|t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}\|_n \\ &\leq t\|\boldsymbol{x}\|_n + (1-t)\|\boldsymbol{y}\|_n \\ &\leq t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 \\ &= t + 1 - t \\ &= 1, \end{aligned}$$

tenemos que $f([0,1]) \subset B^n$. Así, $f \colon [0,1] \to f([0,1])$ es biyectiva y continua. Por el teorema 1.82, f es cerrada, lo cual implica que f es abierta. Por el teorema 1.51, f es un homeomorfismo. Luego, $f([0,1])$ es un arco que une a $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$. Por lo tanto, B^n es arco-conexo y en particular, conexo.

Ahora, veamos un espacio conexo que no es arco-conexo, implicando así que un espacio conexo no necesariamente es arco-conexo.

Ejemplo 1.101. *Sean $W = \{(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$ y $I = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq y \leq 1\}$. La cerradura de W es definida por,*

$$\mathrm{cl}(W) = W \cup I.$$

El espacio $\mathrm{cl}(W)$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ es frecuentemente llamada ***La curva senoidal del topólogo****. Como W es la imagen continua del conjunto conexo $(0,1]$, por teorema 1.92, W es conexo. Por teorema 1.95, $\mathrm{cl}(W)$ es conexo. No es arco-conexo, ya que si $x \in I$ y $y \in W$, entonces no existe un arco que los una, véase la Figura 1.10.*

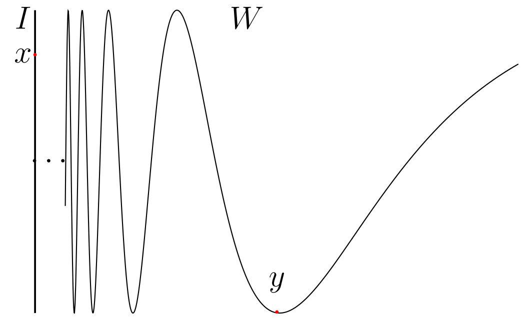


Figura 1.10: Curva senoidal del topólogo.

Definición 1.102. *Si X es un espacio topológico. Una **componente** de X es un subconjunto conexo maximal de X. Dado $p \in X$, la componente de p en X es*
$$C_p = \bigcup \{A \subset X : A \text{ es conexo y } p \in A\}.$$

Teorema 1.103. *[3, Teorema 2.D.4] Si X es un espacio topológico. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Las componentes de X son cerradas.

(b) Las componentes de X son ajenas dos a dos.

Demostración. Veamos que (a) se satisface. Sea C una componente de X. Como C es conexo, entonces $\mathrm{cl}(C)$ es conexo. Dado que $C \subset \mathrm{cl}(C)$ y que C es conexo maximal, se tiene que $C = \mathrm{cl}(C)$. Por lo tanto C es cerrada.

Veamos que (b) se satisface. Sean C_1 y C_2 componentes de X tales que C_1 y C_2 son diferentes. Supongamos que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, luego por teorema 1.91, $C_1 \cup C_2$ es conexo. Además $C_1 \subset C_1 \cup C_2$, luego como C_1 es conexo maximal, se tiene que $C_1 = C_1 \cup C_2$. De esto, $C_2 \subset C_1$, de manera análoga, como C_2 es conexo maximal, entonces $C_2 = C_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, las componentes son ajenas. $\square$

Ejemplo 1.104. *En $\mathbb{R}^2$, sea $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1]) \cup (\{2\} \times [0,1])$. Las componentes de X son $\{l\} \times [0,1]$, con $l \in \{0,1,2\}$.*

Ejemplo 1.105. *En $\mathbb{R}^2$, sea $A_n = \{(x, \frac{1}{n}) : 0 \leq x \leq 1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_0 = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$. Las componentes de $X = A_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ son los conjuntos A_0, $A_1, \ldots$.*

Observación 1.106. *Un conjunto X es conexo si y solo si posee una única componente, la cual es el mismo X.*

1.5. Límite de conjuntos.

Definición 1.107. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\{A_i\}_{i=i}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. El **límite inferior** de la sucesión $\{A_i\}_{i=i}^{\infty}$ es:*

$$\text{lím ínf } A_i = \{x \in X\colon \text{ para cada } U \in \tau \text{ con } x \in U, \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que para cada } i \geq j,\ U \cap A_i \neq \emptyset\}.$$

*Y el **límite superior** de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es:*

$$\text{lím sup } A_i = \{x \in X\colon \text{ para cada } U \in \tau \text{ con } x \in U, \text{ y para cada } j \in \mathbb{N} \text{ existe } i \geq j \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset\}.$$

Ejemplo 1.108. *Sea $X = [0, 3] \times [0, 1]$. Para todo $i \in \mathbb{N}$, sea $A_i = [1, 3] \times \{\frac{1}{i}\}$ si i es impar y $A_i = [0, 2] \times \{\frac{1}{i}\}$ si i es par, véase la Figura 1.11. Asi, el lím ínf $A_i = [1, 2] \times \{0\}$ y el lím sup $A_i = [0, 3] \times \{0\}$.*

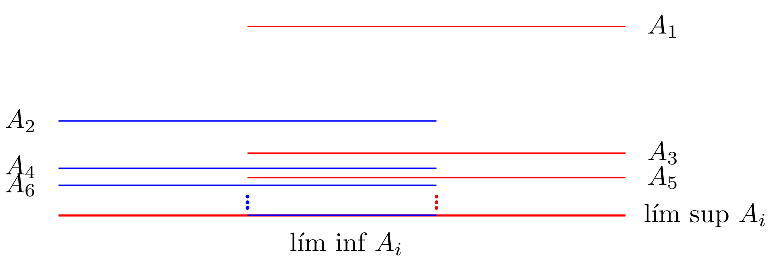


Figura 1.11: Representación de la sucesión de los conjuntos A_i.

Podemos observar de la definición 1.107 que lím ínf $A_i \subset$ lím sup A_i, cuando se cumple la otra contención, decímos que el límite existe. Veamos la siguiente definición.

Definición 1.109. *Sean (X, τ) un espacio topológico, sea $\{A_i\}_{i=i}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y sea $A \subset X$. El **límite** de la sucesión denotado por lím $A_i = A$, existe cuando*

$$\text{lím inf } A_i = A = \text{lím sup } A_i.$$

Ejemplo 1.110. *Sean* $X = [0,1] \times [0,1]$ *y para cada* $i \in \mathbb{N}$, *consideremos,* $A_i = [0,1] \times \{\frac{1}{i}\}$ *si* i *es par y* $A_i = [0,1] \times \{0\}$ *si* i *es impar, véase la Figura 1.12. Puesto que* $\text{lím sup } A_i \subset \text{lím ínf } A_i$, *el límite existe y por tanto,* $\text{lím } A_i = [0,1] \times \{0\}$.

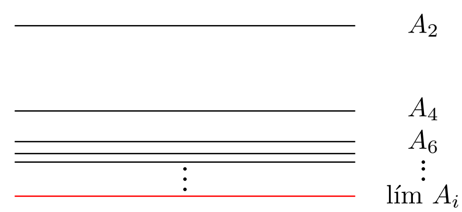


Figura 1.12: El límite de la sucesión es, lím $A_i = [0,1] \times \{0\}$.

En el ejemplo 1.108 podemos observar que el límite no existe, porque lím sup $A_i \not\subset$ lím ínf A_i.

Proposición 1.111. *[7, Lema 3.5] Sean* X *un espacio topológico y* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X. *Las siguientes condiciones se satisfacen:*

(1) *lím inf* $A_i \subset$ *lím sup* A_i.

(2) *El lím sup* A_i *es cerrado.*

(3) *El lím inf* A_i *es cerrado.*

Demostración. (1) Esta condición se satisface inmediatamente de la definición. En efecto, si $x \in \text{lím inf } A_i$, entonces para cada $U \in \tau$, con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_i \neq \emptyset$ para $i \geq N$. Así, considerando $L = \{i \in \mathbb{N} \colon i \geq N\}$, el cual es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, se concluye que $x \in \text{lím sup } A_i$.

(2) Veamos que lím sup A_i es cerrado. Para esto, bastará probar que $\text{cl}(\text{lím sup } A_i) \subset \text{lím sup } A_i$. En efecto, sean $x \in \text{cl}(\text{lím sup } A_i)$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Luego $U \cap \text{lím sup } A_i \neq \emptyset$. Sea $z \in U \cap \text{lím sup } A_i$, luego existe un subconjunto infinito F de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in F$. Por lo tanto, $x \in \text{lím sup } A_i$.

(3) Veamos que $\liminf A_i$ es cerrado. Para esto, bastará probar que $\mathrm{cl}(\liminf A_i) \subset \liminf A_i$. En efecto, sean $x \in \mathrm{cl}(\liminf A_i)$ y U un conjunto abierto, con $x \in U$. Luego $U \cap (\liminf A_i) \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap (\liminf A_i)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, entonces $U \cap A_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \liminf A_i$.

□

Dado que $\limsup A_i$ es cerrado, concluimos que $\lim A_i$ cuando exista, es cerrado.

Proposición 1.112. *[7, Lema 3.5] Si X es compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\limsup A_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_j} \to x$.

Veamos que $x \in \limsup A_n$. En efecto, sea U abierto de X con $x \in U$. Como $x_{n_j} \to x$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq J$, entonces $x_{n_j} \in U$. Sea $F = \{n_j \in \mathbb{N} \colon j \geq J\}$. Luego, F es subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, por lo tanto, $x \in \limsup A_n$. Así, $\limsup A_n$ es no vacío. □

En la proposición 1.112, se probó que $\limsup A_i$ es no vacío siempre que los elementos de la sucesión sean no vacíos sobre un compacto. Sin embargo, aún bajo estas condiciones el límite inferior si puede ser vacío. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.113. *En $\mathbb{R}$, sea $X = [0, 1]$. Definimos*

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{1}{3}], & \textit{si } n \textit{ es par} \\ [\frac{2}{3}, 1], & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Veamos que $\liminf A_i = \emptyset$.

Caso 1. Sea $a \in [0, \frac{1}{3}]$, entonces $B(a, \frac{1}{3}) \cap A_{2n+1} = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $a \notin \liminf A_i$.

Caso 2. Sea $a \in (\frac{1}{3}, 1]$, entonces $B(a, r) \cap A_{2n} = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $r = a - \frac{1}{3} > 0$.

De los casos 1 y 2 se tiene que $\liminf A_i = \emptyset$. Observemos que $\limsup A_i = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Teorema 1.114. *[7, Lema 3.5] Sean X un espacio compacto, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones que convergen a A y B, respectivamente. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A_n \cap B_n$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en X. Como X es compacto, por [9, Teorema 7.4], existe $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente, es decir, existe $x \in X$ tal que $x_{n_m} \to x$.

Veamos que $x \in A \cap B$. Sea U abierto que contiene a x. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M$, entonces $x_{n_m} \in U$. Sea $T = \{n_m \colon m \geq M\}$. Así, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in T$. De esto, $x \in \text{lím sup} A_n = A$. Similarmente $x \in B$. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 2

Continuos

En este capítulo, se enuncia la noción de un continuo, además, se dan algunos ejemplos interesantes de estos. También, se presentan algunos resultados relacionados con los continuos.

Definición 2.1. *Un **continuo** es un espacio métrico, compacto y conexo que consta de más de un punto. Un subcontinuo es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo.*

Antes de presentar algunos ejemplos de continuos, consideremos las siguientes definiciones.

Definición 2.2. *Sea $\mathbb{R}^n$ el n-espacio Euclidiano y, para cada punto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, sea*

$$\|x\|_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

*Una n-**celda** es un espacio en cual es homeomorfo a la bola cerrada B^n, donde $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_n \leq 1\}$ con $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 2.3. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_2 = 1\}$. Véase la Figura 2.1.*

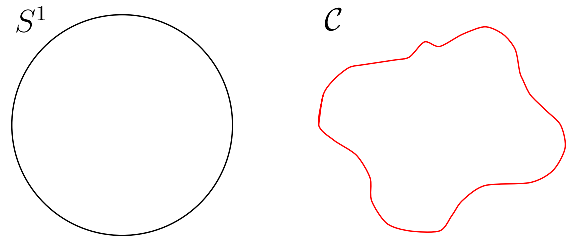


Figura 2.1: Una curva cerrada simple.

Definición 2.4. *Una n-**esfera** es un espacio homeomorfo a la esfera S^n, donde $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\|_{n+1} = 1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Observemos que una 1-esfera es llamada una curva cerrada simple.

Definición 2.5. *Un **cubo de Hilbert** es un espacio topológico que es homeomorfo al producto cartesiano numerable $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde cada $I_i = [0, 1]$.*

Definición 2.6. *Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, un n-**odo simple** es la unión de n arcos los cuales se intersectan dos a dos en un único punto llamado vértice .*

A un $3-$odo lo llamaremos **triodo simple**, véase la Figura 2.2.

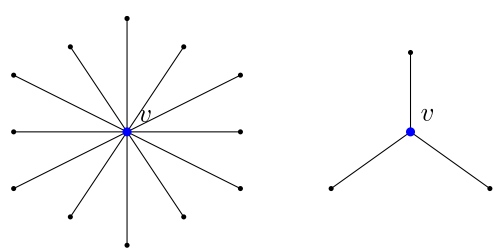


Figura 2.2: Un n-odo simple y un $3-$ odo simple.

Los espacios definidos anteriormente, serán considerados en un espacio métrico, por lo que para que sean continuos, solo se probará compacidad y conexidad. A continuación se presentan algunos continuos.

Observación 2.7. *Un arco es un continuo.*

Por el teorema 1.4, sabemos que el intervalo $[0,1]$ es conexo. Por el teorema 1.78, el intervalo $[0,1]$ es compacto. Por tanto, el intervalo $[0,1]$ es un continuo. Como un arco es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$, concluimos que un arco es un continuo.

Observación 2.8. *Una curva cerrada simple es un continuo.*

Para probar esto, primero probaremos que S^1 es un continuo. Usaremos el teorema de Heine-Borel, teorema 1.67, para probar que S^1 es compacto.

S^1 es acotado, puesto que para todo $x, y \in S^1$, $d(x,y) \leq 2$.

Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S^1 tal que $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Como $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Luego $x_n^2 \to x^2$ y $y_n^2 \to y^2$, Así, $x_n^2 + y_n^2 \to x^2 + y^2$. Observemos que $x_n^2 + y_n^2 = 1$, entonces $x^2 + y^2 = 1$. Luego, por el teorema 1.21, S^1 es cerrado. Probando así la compacidad de S^1.

Ahora veamos que S^1 es conexo.

La función $\phi \colon [0, 2\pi] \to S^1$, talque $\phi(\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ es continua, ya que las funciones sen y cos son continuas. Como $[0, 2\pi]$ es conexo, por el teorema 1.92, S^1 es conexo.

Por lo tanto S^1 es un continuo. Como una curva cerrada simple es un espacio homeomorfo a S^1, tenemos que también es un continuo.

Observación 2.9. *Una n-celda es un continuo.*

Para esto, primero veamos que B^n es un continuo. Tenemos que B^n está acotada por 2, es decir, para cualesquiera puntos $x, y \in B^n$, tenemos que $d(x,y) \leq 2$. La prueba de que B^n es cerrado es similar a como se prueba que S^1 es cerrado en el ejemplo 2.8. Así, por el teorema de Heine-Borel, teorema 1.67, tenemos que B^n es compacto. En el ejemplo 1.100, se probó que B^n es conexo. Por lo tanto, concluimos que B^n es un continuo. Dado que una n-celda es un espacio homeomorfo a B^n, entonces B^n es un continuo.

Observación 2.10. *Un cubo de Hilbert es un continuo.*

En proposición 2.7, se vió que el intervalo $[0,1]$ es compacto y conexo. Por el teorema 1.96, sabemos que $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ es conexo. Por el teorema 1.83, sabemos que $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ es compacto. Así, tenemos que $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$ es un continuo. Dado que un cubo de Hilbert es homeomorfo a $Q = \prod_{i=1}^{\infty} I_i$, tenemos que un cubo de Hilbert es un continuo.

Observación 2.11. *Un n-odo simple es un continuo.*

Por proposición 2.7, sabemos que un arco es un continuo. Por teorema 1.77, un n-odo simple es compacto, pues es la unión finita de compactos. Por teorema 1.91, un n-odo simple es conexo pues es la unión de conexos cuya intersección es no vacía. Por tanto es un continuo.

Observación 2.12. ***La curva senoidal del topólogo***, cl(W), *definida en 1.101 es un continuo.*

Veamos que cl(W) es un continuo. Como W es la imágen de la función $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, sen\left(\frac{1}{x}\right))$, la cual es una función continua en el intervalo $(0,1]$, el cual es conexo, entonces por el teorema 1.92, tenemos que W es conexo. Luego, por el teorema 1.95, cl(W) es conexo.

El conjunto cl(W) es cerrado. También cl(W) es acotado, pues no es muy difícil demostrar que cl$(W) \subset [0,1] \times [-1,1] \subset B(\mathbf{0}, \sqrt{2})$. Por el teorema de Heine-Borel, teorema 1.67, tenemos que cl(W) es compacto.

Por lo tanto, cl(W) es un continuo.

Observación 2.13. *Este continuo es llamado el* ***círculo de Varsovia****, este nombre se le da a cualquier continuo homeomorfo a $Y \cup Z$, donde Y es la curva senoidal del topólogo y Z es el arco que une a $(0,-1)$ con $(1, \sin(1))$ tal que $Y \cap Z = \{(0,-1), (1, \text{sen}(1))\}$, véase la Figura 2.3.*

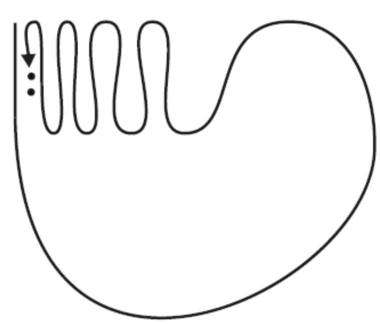


Figura 2.3: Continuo círculo de varsovia.

2.1. Algunas propiedades relacionadas con continuos

Teorema 2.14. *Sean X, Y espacios métricos. Supongamos X es un continuo y $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva, entonces Y es un continuo.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función continua y X un continuo, es decir, es un espacio métrico compacto y conexo. Luego, por teorema 1.78, $f(X)$ es compacto y por teorema 1.92, $f(X)$ es conexo, por lo tanto $f(X)$ es un continuo. Como f es sobreyectiva, se tiene que $f(X) = Y$, por tanto Y es continuo. □

Teorema 2.15. *El producto numerable de continuos es continuo.*

Demostración. Por teorema 1.83, tenemos que el producto numerable de métricos compactos es métrico compacto y por el teorema 1.96, tenemos que el producto arbitrario de conexos es conexo, en particular el producto numerable. Lo cual implica que el producto numerable de continuos es un continuo. □

Definición 2.16. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Decimos que X es* ***localmente conexo*** *en p si para cualquier abierto U de X que contiene a p, existe un conjunto conexo y abierto V de X tal que $p \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo, si X es* ***localmente conexo*** *en cada uno de sus puntos.*

De la definición 2.16, podemos observar que X es localmente conexo si existe una base local en cada punto de X que consiste de conjuntos conexos y abiertos.

Ejemplo 2.17. *En $\mathbb{R}$ cualquier intervalo es localmente conexo. Sean p un punto en un intervalo A y sea U un conjunto abierto en el intervalo A que contiene al punto p, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset U$. Además $B(p, \varepsilon) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ es un intervalo abierto y conexo.*

Ejemplo 2.18. *El subespacio $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ no es conexo. Sin embargo, si es localmente conexo. En efecto, sea $p \in Y$ y U abierto de Y. Luego $p \in [-1, 0)$ o $p \in (0, 1]$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $p \in [-1, 0)$. Luego $U \cap [-1, 0)$ es abierto de $[-1, 0)$. Como $[-1, 0)$ es localmente conexo, entonces existe un V abierto y conexo de $[-1, 0)$ tal que $p \in V \subset U \cap [-1, 0) \subset U$. Observemos que $[-1, 0)$ es abierto de Y. Así, V es abierto de Y.*

Ejemplo 2.19. ***La curva senoidal del topólogo*** *definida en el ejemplo 1.101, no es localmente conexo ya que para cualquier punto* p *en el segmento* $\{(0,0)\} \times [-1,1]$ *existe un conjunto abierto* U *que contiene al punto* p *tal que todo abierto en* U *y que contiene a* p *es disconexo.*

Ejemplo 2.20. *En* $\mathbb{R}^2$*, sean* $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* A_n *el segmento con puntos extremos* $(0,0)$ *y* a_n*. Sea* $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$*. El espacio* X *es un continuo conocido como el* ***espacio escoba****. Este continuo no es localmente conexo, pues para todo punto* $p \in (0,1] \times \{0\}$ *existe un conjunto abierto* U *que contiene a* p *tal que todo abierto contenido en* U*, es disconexo. Sin embargo, si* $q \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$*, observamos que para todo abierto que contenga al punto* q*, existe un arco que contiene al punto* q *en su interior, es decir, el continuo* X *es localmente conexo en* q*, véase la Figura 2.4.*

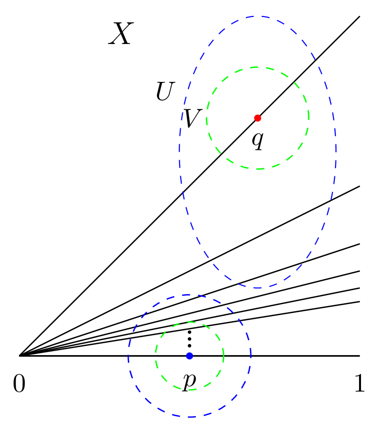


Figura 2.4: El espacio escoba.

Teorema 2.21. *[3, Teorema (2.E.2)]* X *es localmente conexo si y solo si para cualquier subconjunto abierto* U *en* X*, cada componente de* U *es abierta en* X*.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sea U cualquier conjunto abierto en X no vacío. Sea C una componente de U y $x \in C$. Luego existe un conjunto abierto y conexo V tal que $x \in V \subset U$, pues X es localmente conexo. Como C es un conjunto conexo maximal, entonces $x \in V \subset C$. Como V es abierto, se tiene que C es abierta.

Sea X tal que para cualquier abierto U de X, cada componente de U es abierto. Sean $x \in X$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Supongamos que C la componente de U que contiene a x, es decir, $x \in C \subset U$. Como C es conexo y abierto, se tiene que X es localmente conexo en x. Como x fue arbitrario, X es localmente conexo. □

Definición 2.22. *Sea X espacio topológico. Dado $p \in X$, se dice que X es* ***conexo en pequeño*** *en p, si cualquier conjunto abierto U de X que contiene a p, contiene un conjunto conexo V de X que contiene a p en su interior, es decir, $p \in int(V) \subset V \subset U$. Diremos que X es conexo en pequeño, si X es* ***conexo en pequeño*** *en cada uno de sus puntos.*

Teorema 2.23. *Si X es localmente conexo en p, entonces X es conexo en pequeño en p.*

Demostración. Sea $p \in X$ tal que X es localmente conexo en p. Luego sea U un abierto de X tal que $p \in U$. Así, existe una conjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Dado que V es abierto, se tiene que $V = int(V)$, por lo tanto, $p \in \mathrm{int}(V) \subset V \subset U$. Así, X es conexo en pequeño en p. □

El regreso del teorema 2.23 no siempre se cumple, como se muestra a continuación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.24. *Veamos un espacio que es conexo en pequeño en un punto p, pero que no es localmente conexo en este punto. Para esto, sean*

$$v_0 = (0,0) \text{ y } v_n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 0\right) \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

y para cada $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$e_{(n,m)} = \left(2 - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+m}}\right).$$

Sea $A_{(n,m)}$ el segmento que une a v_n con $e_{(n,m)}$. Definimos el espacio $X_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{(n,m)}$. Consideremos $Y = \mathrm{cl}(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n)$. Observemos que cada $\mathrm{cl}(X_n)$ es un espacio escoba con vértice v_n, véase la Figura 2.5.

Veamos que Y es conexo en pequeño en el punto $p = (2,0)$. En efecto, sea U un abierto de Y con $p \in U$. Así, existe $r > 0$, tal que $B(p,r) \subset U$. Como la sucesión $\frac{1}{2^n}$ converge a 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < r$. Observemos que $\|v_N - p\| = |2 - \frac{1}{2^{N-1}} - 2| = \frac{1}{2^{N-1}} < r$. Así, $v_N \in B(p,r)$.

Por otro lado, observemos que $\|e_{(N,0)} - p\| \leq |\frac{1}{2^N}| + |\frac{1}{2^N}| = \frac{1}{2^{N-1}} < r$. *De esta manera, se tiene que* $e_{(N,0)} \in B(p,r)$. *En consecuencia,* $X_n \subset B(p,r)$, *para todo* $n \geq N$. *Sea* $Y' = \mathrm{cl}(\bigcup_{n=M}^{\infty} X_n)$. *Luego,* Y' *es un conexo contenido en* U *tal que* $p \in \mathrm{int}(Y')$. *Por lo tanto* Y *es conexo en pequeño en* p.

Ahora veamos que Y *no es localmente conexo en* p. *Para esto, observemos que* $B(p,1)$ *no es conexo. Sea* $V \subsetneq B(p,1)$ *abierto. Si quisieramos que* V *sea conexo, debería tener al menos un vértice. Sea* v_N *el primer vértice tal que* $v_N \in V$. *Como* V *es abierto, existe* $r > 0$ *tal que* $B(v_N, r) \subset U$. *Como la sucesión* $\frac{1}{2^n}$ *converge a* 0, *existe* $M \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{2^M} < r$. *Así, para* $m \geq M$, *se tiene que*

$$||e_{(N-1,m)} - v_N|| = \frac{1}{2^{N-1+m}} < r.$$

En consecuencia, $e_{(N-1,m)} \in B(v_N, r)$ *para* $m \geq M$. *En consecuencia,* V *no sería conexo. Por lo tanto* Y *no es localmente conexo en* p.

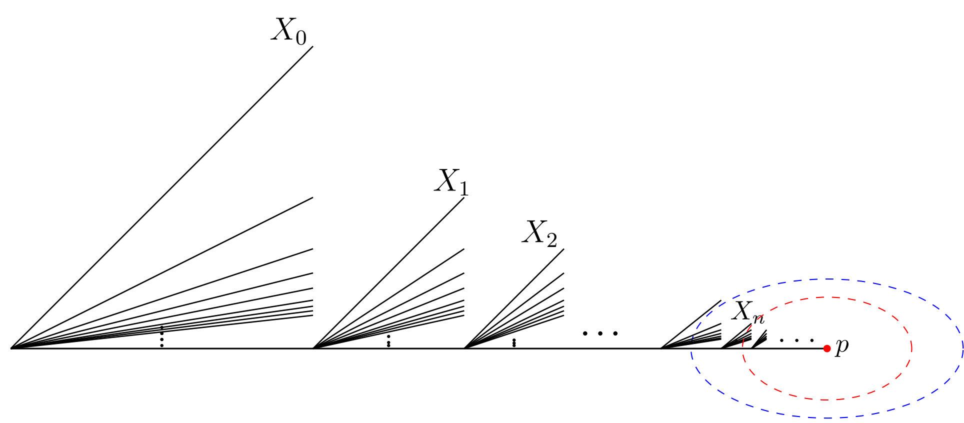


Figura 2.5: Sucesión de espacios escoba.

Como hemos visto, las propiedades de conexo en pequeño y localmente conexo no son equivalentes de manera puntual, sin embargo de manera global si lo son como se muestra a continuación en el siguiente teorema.

Teorema 2.25. *X es conexo en pequeño si y solo si es localmente conexo.*

Demostración. Sea X conexo en pequeño en cada punto. Sea U un abierto de X y C la componente de U que contiene a x, demostraremos que C es abierta. Sea $y \in C$. Como $y \in U$, entonces existe un conjunto conexo V

tal que $y \in int(V) \subset V \subset U$, entonces $y \in int(V) \subset C$. Por tanto C es abierto, luego por el teorema 2.21, X es localmente conexo. El regreso es trivial, considerando el teorema 2.23. $\square$

Teorema 2.26. *Sean X un continuo y $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ dos arcos de X diferentes. Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ coinciden en sus puntos extremos, entonces existe una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ contenida en X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.*

Demostración. Sean $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{A}_1$ y $\beta\colon [0,1] \to \mathcal{A}_2$ homeomorfismos tales que $\alpha(0) = p = \beta(0)$, $\alpha(1) = q = \beta(1)$. Observemos que $\alpha \neq \beta$, es decir, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha(t_0) \neq \beta(t_0)$.

Sea $t_p < t_0$ tal que $\alpha(t_p) = \beta(t_p)$, y para cada $t \in (t_p, t_0], \alpha(t) \neq \beta(t)$ y sea $t_0 < t_q$ tal que $\alpha(t_q) = \beta(t_q)$ y para cada $t \in [t_0, t_q)$, $\alpha(t) \neq \beta(t)$. Sea $\mathcal{C} = \alpha([t_p, t_q]) \cup \beta([t_p, t_q])$.

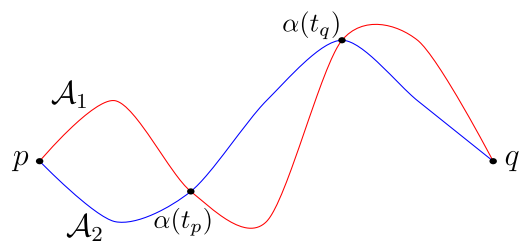


Figura 2.6: Curva cerrada simple $\mathcal{C} = \alpha([t_p, t_q]) \cup \beta([t_p, t_q])$.

Veamos que $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple. Para esto, sean $h_1\colon [t_p, t_q] \to [0, \pi]$, donde $h_1(t) = \pi\left(\frac{t-t_p}{t_q-t_p}\right)$ y $h_2\colon [t_p, t_q] \to [\pi, 2\pi]$, donde $h_2(t) = \pi\left(1 + \frac{t_q-t}{t_q-t_p}\right)$. Observemos que h_1 y h_2 son homeomorfismos. Sea $h\colon \mathcal{C} \to S^1$ dada por

$$h(a) = \begin{cases} (\cos(h_1(\alpha^{-1}(a))), \operatorname{sen}(h_1(\alpha^{-1}(a)))), & a \in \alpha([t_p, t_q]) \\ (\cos(h_2(\beta^{-1}(a))), \operatorname{sen}(h_2(\beta^{-1}(a)))), & a \in \beta([t_p, t_q]). \end{cases}$$

Como h es composición de funciones continuas, tenemos que h es continua. Más aún, h es biyectiva. Por lo tanto, h es un homeomorfismo. Así, $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple contenida en $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. $\square$

Teorema 2.27. *[10, Teorema 8.23] Cualquier continuo X localmente conexo no degenerado es arco-conexo.*

Teorema 2.28. *[10, Teorema 8.26] Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco-conexo.*

Definición 2.29. *Sean (X, τ) un espacio conexo y $p \in X$. Si $X - \{p\}$ es conexo, entonces p es llamado un* ***punto de no corte*** *de X. Si $X - \{p\}$ es disconexo, entonces p es llamado un* ***punto de corte*** *de X. Véase la Figura 2.7.*

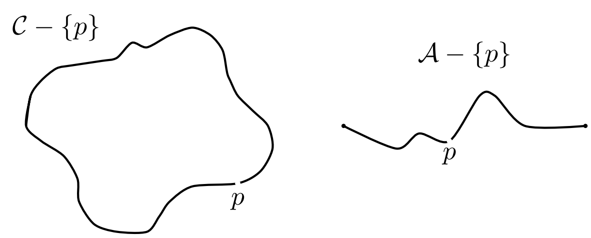


Figura 2.7: Puntos de no corte y de corte.

El teorema que a continuación se presenta, nos garantiza que todo continuo no degenerado tiene al menos dos puntos que no son de corte.

Teorema 2.30. *[10, Teorema 6.6] Sea X un continuo no degenerado. Supongamos que X tiene un punto de corte p, esto es*

$$X - \{p\} = U|V.$$

Entonces, existe un punto de no corte de X en U y existe un punto de no corte de X en V. Por lo tanto, X tiene al menos dos puntos de no corte.

Corolario 2.31. *Si X es un continuo no degenerado, entonces X contiene al menos dos puntos de no corte.*

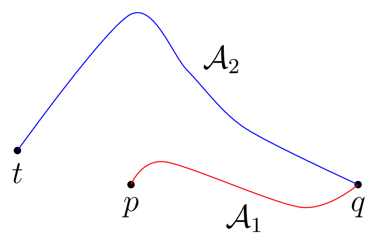
Demostración. Sean $a, b \in X$. Si a y b son de no corte, se satisface la hipótesis. Si a o b son de corte, por el teorema 2.30, se cumple lo deseado. $\square$

Teorema 2.32. *Sea X un continuo localmente conexo no degenerado. Si X no es un arco, entonces X contiene una curva cerrada simple o un triodo simple.*

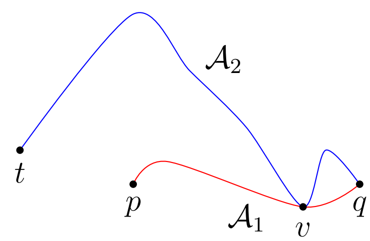
Demostración. Por el corolario 2.31, X tiene al menos dos puntos de no corte, digamos p y q. Como X es localmente conexo, entonces por el teorema 2.27, X es arco-conexo. Luego, existe un arco $\mathcal{A}_1$ en X que une a p con q. Como X no es un arco, existe $t \in X - \mathcal{A}_1$. Además, como p es de no corte, $X - \{p\}$ es abierto y conexo. Así, por el teorema 2.28, $X - \{p\}$ es arco-conexo. Sea $\mathcal{A}_2$ un arco en $X - \{p\}$ que une a t con q. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{q\}$.

Caso 2 : $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ tiene más de un punto, véase la Figura 2.8.



Caso 1: $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{q\}$



Caso 2 : $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| \geq 2$.

Figura 2.8: Intersección de los arcos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$.

Supongamos que ocurre caso 1. Observemos que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un arco con puntos extremos p y t. Como q es de no corte, tenemos que $X - \{q\}$ es abierto y conexo. Luego, por el teorema 2.28 es arco-conexo. Sea $\mathcal{A}_3$ el arco en $X - \{q\}$ que une a t con p, véase la Figura 2.9.

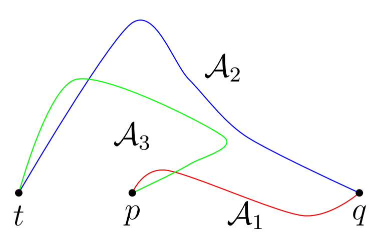


Figura 2.9: Unión de los arcos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ que contiene una curva cerrada simple.

Observemos que $\mathcal{A}_3$ es diferente de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ y coinciden en sus puntos extremos. Por el teorema 2.26, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ contiene una curva cerrada simple.

Supongamos que ocurre caso 2. Sean $\beta_1\colon [0,1] \to \mathcal{A}_1$, donde $\beta_1(0) = p$, $\beta_1(1) = q$ y $\beta_2\colon [0,1] \to \mathcal{A}_2$, donde $\beta_2(0) = q$, $\beta_2(1) = t$.

Sea $F = \{l \in [0,1]\colon \beta_2(l) \in \mathcal{A}_1\}$. Observemos que $F = (\beta_2)^{-1}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$. Como $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son cerrados y β_2 es continua, tenemos que F es cerrado. Más aún, F es no vacío y acotado. Luego, por el teorema 1.79, F tiene máximo, a saber L. Sea $v = \beta_2(L)$. Se tiene que $v \neq q$, pues en caso contrario, $F = \{0\}$, es decir, la intersección de los arcos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ sería un solo punto, esto contradice nuestra hipótesis. Observemos que p y t son distintos de v.

Sean $\mathcal{A}_p$ el arco en $\mathcal{A}_1$ que une a p con v, $\mathcal{A}_q$ el arco en $\mathcal{A}_1$ que une a q con v y $\mathcal{A}_t$ el arco en $\mathcal{A}_2$ que une a t con v, véase la figura 2.10.

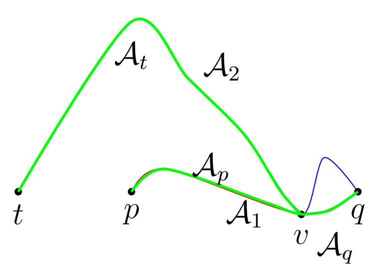


Figura 2.10: Unión de los arcos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ que contiene un triodo simple.

Observemos que $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{A}_q = \{v\}$.

Veamos que $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{A}_t = \{v\}$. Sea $a \in \mathcal{A}_p \cap \mathcal{A}_t$. Entonces, $a \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Luego existe $l \leq L$ tal que $\beta_2(l) = a$. Como $a \in \mathcal{A}_t$, $\beta_2(l) \in \mathcal{A}_t$. Así, $l \geq L$. de esto, $l = L$. Por lo tanto, $a = v$. De manera análoga, se prueba que $\mathcal{A}_q \cap \mathcal{A}_t = \{v\}$. Así, hemos encontrado tres arcos, $\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_q$ y $\mathcal{A}_t$ que se intersectan dos a dos en un único punto v, los cuales forman un triodo simple. $\square$

Corolario 2.33. *Sea X un continuo localmente conexo distinto de un arco. Si X no contiene un triodo simple, entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Por teorema 2.32, X contiene una curva cerrada simple o un triodo simple. Por hipótesis tenemos que X no contiene triodos simples, por lo tanto X contiene una curva cerrada simple. Sea $\mathcal{C}$ dicha curva cerrada simple. Supongamos que $\mathcal{C} \neq X$. Como X es localmente conexo, por teorema

2.27, tenemos que X es arco-conexo. Sean $p \in X - \mathcal{C}$ y $q \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{A}_q \subset X$ el arco que une a p con q. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{A}_q \cap \mathcal{C} = \{q\}$. Como $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathcal{C}$ arcos tal que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{q\}$.

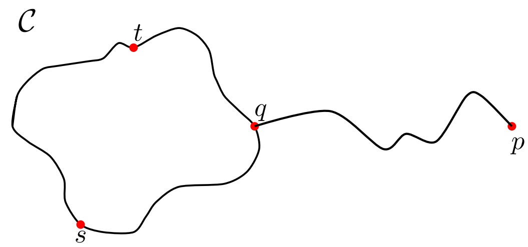


Figura 2.11: Continuo que contiene un triodo simple.

Así, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_q$ es un triodo simple, véase la Figura 2.11, el cual está contenido en X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{C} = X$. $\square$

Teorema 2.34. *[10, Teorema 5.2][**Teorema del cable cortado**] Sean (X, d) un espacio métrico compacto y sean A, B subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta a A y B (es decir, ninguna componente intersecta a ambos), entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados y ajenos de X tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Teorema 2.35. *[**Teorema de golpes en la frontera I**].[10, Teorema 5.4] Sea X un continuo y U un subconjunto propio de X abierto y no vacío. Si K es una componente de $\mathrm{cl}(U)$, entonces $K \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$ (equivalentemente, como $K \subset \mathrm{cl}(U)$ y U es abierto, luego $\mathrm{cl}(X - U) = (X - U)$, así, $K \cap (X - U) \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $K \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$. Sea A un subconjunto conexo de $\mathrm{cl}(U)$. Si $A \cap K \neq \emptyset$, entonces $A \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$ puesto que $A \subset K$, es decir, para cualquier conjunto conexo A en $\mathrm{cl}(U)$, tenemos que $A \cap K = \emptyset$ o $A \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$. Así, por el teorema del cable cortado, 2.34, existen subconjuntos cerrados y ajenos X_1, X_2 de $\mathrm{cl}(U)$, tales que $\mathrm{cl}(U) = X_1 \cup X_2$, $K \subset X_1$ y $\mathrm{Fr}(U) \subset X_2$.

Sea $X_3 = X_2 \cup (X - U)$.

Probaremos que X no es conexo usando X_1 y X_3. Para esto, observemos que se cumple lo siguiente:

(1) Dado que $\mathrm{cl}(U) = X_1 \cup X_2$, entonces

$$X_1 \cup X_3 = X_1 \cup X_2 \cup (X - U) = \mathrm{cl}(U) \cup (X - U) = X.$$

(2) X_1, X_2 y X_3 son cerrados en X, puesto que $\mathrm{cl}(U)$ es cerrado en X y X_1, X_2 son subconjuntos cerrados de $\mathrm{cl}(U)$. Ahora, como U es abierto, $X - U$ es cerrado en X, por lo tanto X_3 es cerrado en X, pues es la unión de cerrados en X.

(3) X_1 y X_3 no son vacíos.

(4) Dado que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, se tiene :

$$X_1 \cap X_3 = X_1 \cap (X_2 \cup (X - U)) = (X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap (X - U)) = X_1 \cap (X - U).$$

Dado que $X_1 \subset \mathrm{cl}(U)$ y $(X - U) \subset \mathrm{cl}(X - U)$, se obtiene

$$X_1 \cap (X - U) \subset \mathrm{cl}(U) \cap \mathrm{cl}(X - U) = \mathrm{Fr}(U) \subset X_2.$$

Esto es, $X_1 \cap (X - U) \subset X_2$. Si $x \in X_1 \cap (X - U)$, entonces $x \in X_1 \cap X_2$, que es una contradicción. Así, $X_1 \cap (X - U) = \emptyset$, por lo tanto, $X_1 \cap X_3 = \emptyset$.

De esta manera, tenemos que X_1 y X_3 son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X tales que $X = X_1 \cup X_3$, es decir, X no es conexo. Lo cual es una contradicción, por lo tanto, tenemos que $K \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$. □

Haciendo uso del teorema de golpes en la frontera I, teorema, 2.35, a continuación se presenta el siguiente corolario, el cual nos garantiza que todo continuo contiene un subcontinuo propio no degenerado.

Corolario 2.36. *[10, Corolario 5.5]Sea X un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Además, si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto propio y abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo propio B de X tal que*

$$A \subsetneq B \subset U.$$

Demostración. Probaremos la segunda parte. Sea V un subconjunto abierto de X tal que $A \subset V$, $\mathrm{cl}(V) \subset U$ y $V \neq X$. Sea B la componente de $\mathrm{cl}(V)$ tal que $A \subset B$ (B existe ya que A es un subconjunto conexo de $\mathrm{cl}(V)$).

Observemos que B es conexo. Como B es cerrado en $\text{cl}(V)$ y $\text{cl}(V)$ es cerrado en X, entonces B es cerrado en X. Como X es compacto, por el teorema 1.76, B es compacto. Por lo tanto B es un subcontinuo de X. Como $B \subset \text{cl}(V)$ y $\text{cl}(V) \subset U$, tenemos que $B \subset U$. Así, B es subconjunto própio. Ahora, por el teorema de golpes en la frontera I, teorema 2.35, tenemos que $B \cap (X - V) \neq \emptyset$. Como $A \subset V$, se tiene, $B \neq A$. Por lo tanto, B es un subcontinuo de X no degenerado. La prueba de la primera parte se sigue inmediatamente, considerando $p \in X$ y $A = \{p\}$ y tomando U un abierto propio en X tal que $p \in U$. $\square$

Teorema 2.37. *[10, Teorema 5.6]**[Teorema de golpes en la frontera II]**.[10, Teorema 5.6] Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces* $\text{cl}(K) \cap \text{Fr}(E) \neq \emptyset$ *(equivalentemente, como* $\text{cl}(K) \subset \text{cl}(E)$*,* $\text{cl}(K) \cap \text{cl}(X - E) \neq \emptyset$*).*

Demostración. Supongamos lo contrario, esto es, $\text{cl}(K) \cap \text{cl}(X - E) = \emptyset$. Además, como $K \neq \emptyset$, entonces $\text{cl}(K) \neq \emptyset$ y como E es un subconjunto propio de X, entonces $X - E \neq \emptyset$, luego $\text{cl}(X - E) \neq \emptyset$. De esto, $\text{cl}(K) \subsetneq X$. Como K es conexo, por teorema 1.95, $\text{cl}(K)$ es conexo. Dado que $\text{cl}(K)$ es cerrado en X, por teorema 1.76, $\text{cl}(K)$ es compacto. Así, $\text{cl}(K)$ es un subcontinuo propio de X.

Sea $U = X - \text{cl}(X - E)$, observemos que U es abierto de X.

Como $\text{cl}(K) \cap \text{cl}(X - E) = \emptyset$, entonces $\text{cl}(K) \subset X - \text{cl}(X - E)$. Así, $\text{cl}(K) \subset U$.

Dado que $X - E \subset \text{cl}(X - E)$, entonces $X - \text{cl}(X - E) \subset X - (X - E) = E$, luego $U \subset E$.

Así, $\text{cl}(K) \subset U \subset E$. Por el corolario 2.36, existe un continuo B en X tal que $\text{cl}(K) \subset B$, $\text{cl}(K) \subsetneq B$ y $B \subset U$. Esto es, B es un subconjunto conexo en E, (ya que $U \subset E$), el cual contiene propiamente a K. Esto contradice el hecho de que K es una componente de E. Por lo tanto se concluye que $\text{cl}(K) \cap \text{cl}(X - E) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.38. *[10, Teorema 5.7]* ***[Teorema de golpes en la frontera III]****. Sean X un continuo, E un subconjunto propio no vacío de X y sea K una componente de E. Si E es abierto en X, entonces* $\text{cl}(K) \cap (X - E) \neq \emptyset$*, es decir,* $\text{cl}(K) - E \neq \emptyset$*. Si E es cerrado en X, entonces* $K \cap \text{cl}(X - E) \neq \emptyset$*.*

Demostración. Supongamos que E es abierto en X, entonces $X - E$ es cerrado en X, luego por el teorema de golpes en la frontera II, teorema 2.37, tenemos que $\mathrm{cl}(K)\cap(X-E)\neq\emptyset$. Ahora supongamos que E es cerrado en X, entonces K es cerrado en X. Entonces, por el teorema de golpes en la frontera II, teorema 2.37, tenemos que $K\cap\mathrm{cl}(X-E)\neq\emptyset$. $\square$

Definición 2.39. *La cardinalidad de A es menor o igual a la cardinalidad de B si existe una función inyectiva de A en B.*

Proposición 2.40. *Sea X un continuo y sea A un subconjunto propio cerrado de X. Entonces, la cardinalidad de la colección de todas las componentes de A es menor o igual a la cardinalidad de la colección de todas las componentes de* $\mathrm{Fr}(A)$.

Demostración. Sean $\mathcal{A}=\{K\colon K \text{ es componente de } A\}$ y $\mathcal{B}=\{C\colon C \text{ es componente de } \mathrm{Fr}(A)\}$. Demostraremos que $|\mathcal{A}|\leq|\mathcal{B}|$.

Sea $K\in\mathcal{A}$. Por el teorema de golpes en la frontera II, teorema 2.37, $\mathrm{cl}(K)\cap\mathrm{Fr}(A)\neq\emptyset$. Como A es cerrado de X y K es cerrado en A, entonces K es cerrado en X. Así, $K=\mathrm{cl}(K)$ y $K\cap\mathrm{Fr}(A)\neq\emptyset$.

Observemos que $\mathrm{Fr}(A)=\bigcup\mathcal{B}$, luego $K\cap(\bigcup\mathcal{B})\neq\emptyset$, entonces existe $C_K\in\mathcal{B}$ tal que $K\cap C_K\neq\emptyset$.

Afirmación: Para toda $L\in\mathcal{A}$, tal que $L\neq K$ se tiene que, $L\cap K=\emptyset$. Como $C_K\cap K\neq\emptyset$ y como K es un conexo maximal, entonces $C_K\subset K$. Si $L\in\mathcal{A}$ y $L\neq K$, entonces $L\cap K=\emptyset$, por lo tanto, $L\cap C_K=\emptyset$. Definamos la función $G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ por $G(K)=C_K$ para toda $K\in\mathcal{A}$. De la afirmación, tenemos que G es inyectiva. En efecto, si $K,L\in\mathcal{A}$, luego $K\cap L=\emptyset$. Como $C_K\subset K$ y $C_L\subset L$, entonces $C_K\cap C_L\subset K\cap L$. En consecuencia $C_K\cap C_L=\emptyset$ por lo tanto, $G(K)\cap G(L)=\emptyset$. Así, por la definición 2.39, concluimos que $|\mathcal{A}|\leq|\mathcal{B}|$. $\square$

Definición 2.41. *Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo no degenerado A de X es llamado un* ***continuo de convergencia*** *de X si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, de subcontinuos A_i de X tal que $A=\lim A_i$, $A\cap A_i=\emptyset$ para cada $i\in\mathbb{N}$.*

Proposición 2.42. *Sea X un espacio métrico compacto. Sea A un continuo de convergencia de X. Entonces los subcontinuos A_m pueden ser elegidos de tal manera que $A_m\cap A_n=\emptyset$ para cada $m\neq n$.*

Demostración. Sea A un continuo de convergencia de X. Luego existe una sucesión de continuos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim B_n=A$ y $B_n\cap A=\emptyset$.

Afirmación: Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > m$ tal que $B_m \cap B_n = \emptyset$. En efecto, supongamos lo contrario. Sea $m \in \mathbb{N}$, supongamos que para toda $n > m$, $B_m \cap B_n \neq \emptyset$. Luego, por el teorema 1.114, tenemos que $B_m \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Así, considerando la afirmación, para $m = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B_1 \cap B_{n_1} = \emptyset$. Luego, para n_1 existe $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > n_1$ tal que $B_1 \cap B_{n_2} = \emptyset$. Siguiendo con este proceso, obtenemos una subsucesión de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, a saber, $\{B_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Renombrando a $B_{n_m} = A_m$, tenemos que $A_m \cap A_n = \emptyset$ y $\lim A_m = A$. □

Algunos continuos no contienen un continuo de convergencia, por ejemplo, un arco, una curva cerrada simple y un triodo simple. Por otro lado, en la curva senoidal del topólogo, definido en 1.101, todo subarco de I es un continuo de convergencia, véase la Figura 2.12. A continuación presentamos un resultado que nos da una condición suficiente para la existencia de continuo de convergencia.

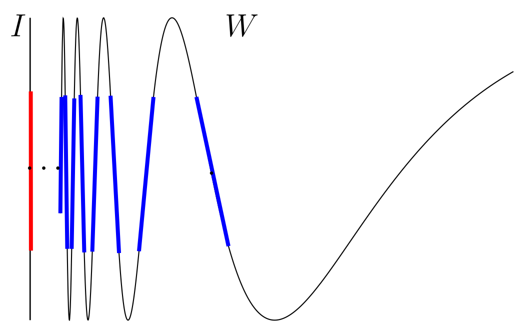


Figura 2.12: Continuo de convergencia en la curva senoidal del topólogo.

Teorema 2.43. *[10, Teorema 5.12]* ***Teorema de continuo de convergencia.*** *Sea X un continuo, y sea*

$N = \{p \in X : X$ *no es conexo en pequeño en* $p\}$.

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

Ilustremos este teorema con el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.44. *Sea X como se definió en el ejemplo 2.24. Denotemos por $p = (2, 0)$ y $q = (0, 0)$. Observemos que en este caso, $N = \{(x, 0) : x \in (0, 2)\}$,* *es decir, X no es conexo en pequeño en todos los puntos que están en el arco que une a p con q, a excepción de estos. Por el teorema 2.43, existe un continuo de convergencia K contenido en N, como se observa en la Figura 2.13. Es fácil ver que para q existe un continuo de convergencia K_q tal que $q \in K_q$, sin embargo $K_q \not\subset N$.*

Por otro lado, p no pertenece a ningún continuo de convergencia, puesto que si $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos ajenos tal que $K_n \to K$ con $p \in K$, entonces $K = \{p\}$.

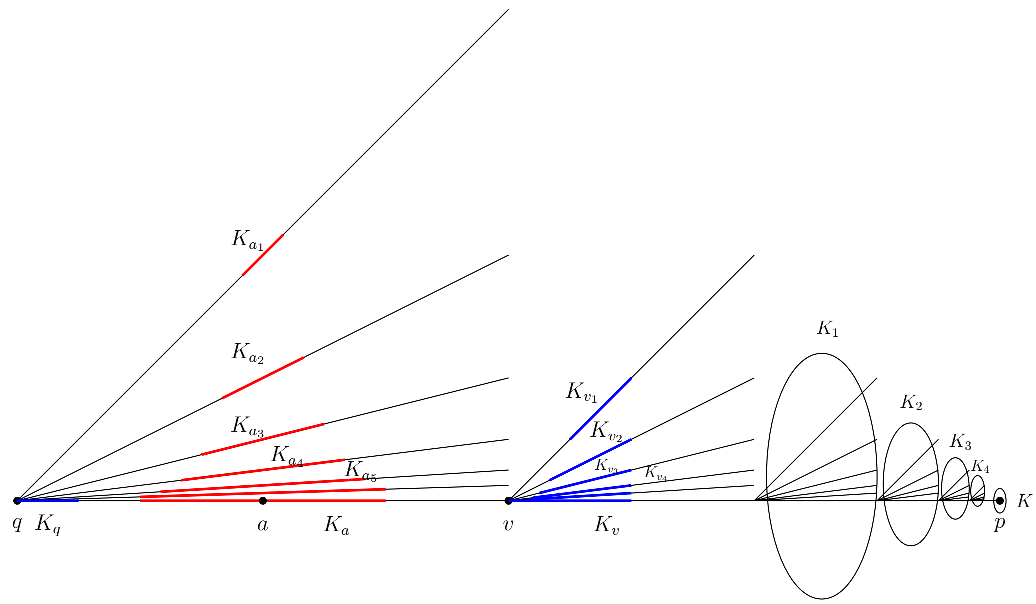


Figura 2.13: Continuos de convergencia en la sucesión de espacios escoba.

2.2. Construcción de continuos, continuos encadenables

Una técnica importante para construir ejemplos interesantes de continuos es el de las intersecciones anidadas. Una base teórica para estas construcciones es un teorema (demostrado en el periodo inicial de la teoría de continuos) el cual dice que la intersección de una sucesión decreciente de continuos es un continuo. Este resultado (en una forma ligeramente diferente) fue probado en 1902 por P. Pailenvé $(1863 - 1933)$, véase [4], pag.226.

Definición 2.45. *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio es* T_4 *o* ***normal*** *si para cada par de cerrados y ajenos* $F, G \subset X$*, existen* U, V *abiertos de* X *y ajenos tales que* $F \subset U$ *y* $G \subset V$*.*

Teorema 2.46. *[9, Teorema 2.3] Cualquier espacio métrico es normal.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico, F, G subconjuntos cerrados y ajenos de X . Como $F \subset X - G$ y dado que $X - G$ es abierto, en particular, para cada $a \in F$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset X - G$. Similarmente, como $G \subset X - F$ y dado que $X - F$ es abierto, entonces para cada $b \in G$, existe $r_b > 0$ tal que $B(b, r_b) \subset X - F$. Sean $U = \bigcup_{a \in F} B(a, \frac{r_a}{2})$ y $V = \bigcup_{b \in G} B(b, \frac{r_b}{2})$. Los conjuntos U, V son abiertos de X que contienen a F y G respectivamente. Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap V$, luego existen $a \in F$ y $b \in G$ tal que $x \in B(a, \frac{r_a}{2}) \cap B(b, \frac{r_b}{2})$. Observemos que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r_a}{2} + \frac{r_b}{2} \leq \text{máx}\{r_a, r_b\}.$$

Se tienen los siguientes casos:

Si $d(a, b) < r_a$, entonces $b \in X - G$, lo cual es una contradicción puesto que $b \in G$.

Si $d(a, b) < r_b$, entonces $a \in X - F$, también es una contradicción puesto que $a \in F$.

De esto, concluimos que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es normal. $\square$

A continuación se enuncia el teorema que nos permitirá construir continuos.

Teorema 2.47. *[10, Teorema 1.8] Sea* X *un continuo,* $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión decreciente de subcontinuos de* X*, es decir,* $K_n \supseteq K_{n+1}$*, entonces* $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ *es un continuo.*

Demostración. Primero veamos que K es compacto. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es compacto y por tanto cerrado. Como la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, concluimos que K es cerrado en X. Por teorema 1.76, tenemos que K es compacto.

Ahora veamos que K es conexo. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que K es disconexo. Luego existen conjuntos A, B cerrados de K ajenos y no vacíos tales que $K = A \cup B$. Dado que X es un espacio métrico, por 2.46, X es normal. Así, existen subconjuntos U, V abiertos de X ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Sea $W = U \cup V$, el cual es abierto, así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset W$. Luego, $K_n = (K_n \cap U) \cup (K_n \cap V)$. Como $A \cup B = K \subset K_n$ y como $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, tenemos que $K_n \cap U \neq \emptyset$ y $K_n \cap V \neq \emptyset$, lo cual implica que K_n no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se concluye que K es conexo. □

Ejemplo 2.48. *Consideremos el cuadrado sólido* $S = [0,1] \times [0,1]$ *y lo dividimos en nueve cuadrados congruentes y sea* $X_1 = S - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. *Similarmente, dividimos cada uno de los ocho cuadrados restantes entre nueve cuadrados congruentes, y sea* X_2 *el continuo obtenido mediante la eliminación de los interiores de cada uno de los ocho cuadrados resultantes centrales. Se continua de esta manera para definir* $X_3, X_4, \ldots$ *Sea*

$$X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i.$$

Entonces, por el teorema 2.47, tenemos que X *es un continuo. Este continuo es conocido como la* ***Curva Universal de Sierpiński***, *véase la Figura 2.14.*

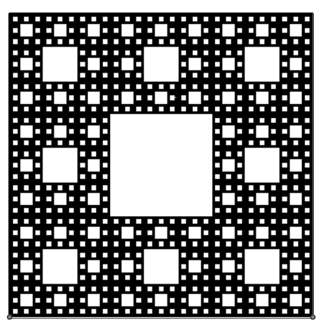


Figura 2.14: La curva universal de Sierpiński.

Ejemplo 2.49. *Consideremos el cubo* $I_3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. *Dividimos cada una de las caras de* I_3 *en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de cada cuadrado central de cada cara, lo que se obtiene será el continuo* X_1. *Dividimos cada uno de los cuarenta y ocho cuadrados restantes en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero* *a través del interior de los cuadrados centrales, de esta manera se obtiene el continuo, X_2. De esta manera, seguimos repitiendo este proceso, así obtenemos una sucesión anidada de continuos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por el teorema 2.47, tenemos que X es un continuo. Este continuo es conocido como **Curva universal de Menger**, véase la Figura 2.15.*

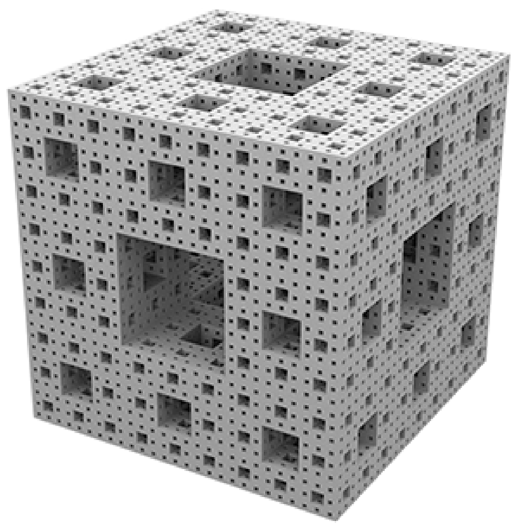


Figura 2.15: Curva universal de Menger.

Los continuos encadenables se construyen con cadenas anidadas

Definición 2.50. *Una familia finita $\{A_1, ..., A_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una **cadena simple** en X si se tiene que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$. Cada conjunto A_i es llamado un eslabón de la cadena simple. Una cadena simple $\mathcal{C} = \{A_1, ..., A_n\}$ conecta los puntos a y b en X si $a \in A_1$ y $b \in A_n$.*

Frecuentemente, los eslabones de una cadena simple son conjuntos abiertos. Un procedimiento para la construcción de una cadena simple de este estilo es empezar con una familia de conjuntos abiertos y de ahí extraer la cadena simple, esto se puede hacer debido al siguiente teorema.

Teorema 2.51. *[3, Teorema 2.F.2] Sea X un espacio métrico y conexo. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y $a, b \in X$, entonces existe una cadena simple que conecta a con b cuyos eslabones son elementos de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea D el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales existe una cadena simple, con eslabones en $\mathcal{U}$ que va de a a x. Como $a \in D$, $D \neq \emptyset$. Vamos a demostrar que D es tanto abierto como cerrado en X, lo que implicará debido a la conexidad de X, que $D = X$. Sea $x \in D$, asi que existe una cadena simple $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$, con eslabones en $\mathcal{U}$ tal que $a \in U_1$ y $x \in U_n$. Por la definición de D, se tiene que $U_n \subset D$, por lo tanto, D es abierto.

Veamos que D es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en D tal que $x_n \to x$. Probaremos que $x \in D$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in U$. Sea $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_m\}$ una cadena simple tal que $a \in U_1$ y $x_N \in U_m$. Observemos que $U \cap U_m \neq \emptyset$. Sea $l = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \colon U_n \cap U \neq \emptyset\}$. Luego $\mathcal{C}' = \{U_1, ...U_l, U\}$ es una cadena simple entre a y x. Por lo tanto, $x \in D$. Así, D es cerrado. □

Definición 2.52. *Una cadena simple $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos en un espacio métrico (X, d) es llamada una ε-**cadena** si el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{C}$ es menor que ε.*

Definición 2.53. *Un espacio métrico (X, d) es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena que cubre a X. Si $a, b \in X$, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ que cubre a X tal que $a \in U_1$ y $b \in U_n$.*

Ejemplo 2.54. *El intervalo $[0, 1]$ es encadenable de 0 a 1, véase la Figura 2.16.*

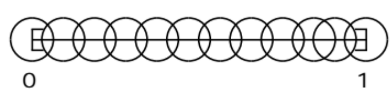


Figura 2.16: $\varepsilon-$cadena que cubre a $[0, 1]$.

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\mathcal{C} = \{B(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}) \colon m = \{0, 1, ..., n\}\}$.

Observemos que diám$[B(\frac{m}{n}, \frac{1}{n})] = \frac{2}{n} < \varepsilon$. Sean $i, j \in \{0, ..., n\}$, veamos que $|j - i| \leq 1$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $j > i$. Luego, $B(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}) \cap B(\frac{j}{n}, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ si y solo si

$$\frac{i}{n} + \frac{1}{n} > \frac{j}{n} - \frac{1}{n}$$

si y solo si $i+1 > j-1$ si y solo si $j-i < 2$ si y solo si $|j-i| \leq 1$.

Finalmente, veamos que $[0,1] \subset \bigcup_{m=0}^{n} B(\frac{m}{n}, \frac{1}{n})$.

Si $p \in [0, \frac{1}{n})$, entonces $p \in B(0, \frac{1}{n})$.

Si $p \in [\frac{1}{n}, 1]$ y $M = \text{máx}\{m \in \mathbb{N}\colon \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq p\}$. Así,

$$\frac{M}{n} + \frac{1}{n} \leq p \leq \frac{M+1}{n} + \frac{1}{n}.$$

O bien,

$$\frac{M+1}{n} - \frac{1}{n} < p < \frac{M+1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Así, $p \in B(\frac{M+1}{n}, \frac{1}{n})$.

Ejemplo 2.55. *La curva senoidal del topólogo es encadenable, véase la Figura 2.17.*

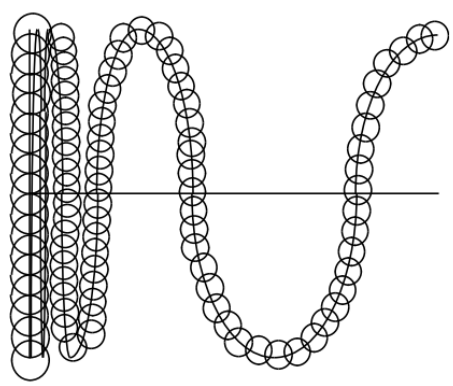


Figura 2.17: $\varepsilon-$cadena que cubre a $\text{cl}(W)$.

De manera similar al ejemplo anterior se puede ver que $\text{cl}(W)$ es encadenable.

Definición 2.56. *Sea X un continuo encadenable. Una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X es* ***una sucesión definitoria de cadenas*** *para X si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:*

(i) $\mathcal{C}_n$ *es una* $\frac{1}{2^n}$*-cadena con la propiedad de que los eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas, y*

(ii) $\mathcal{C}_{n+1}$ *es un refinamiento propio de* $\mathcal{C}_n$*, es decir, la cerradura de cada eslabón de* $\mathcal{C}_{n+1}$ *está contenida en algún eslabón de* $\mathcal{C}_n$*.*

A continuación se presenta la construcción de un continuo encadenable.

Ejemplo 2.57. *Sean a, b, c, tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^2$. Construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_1$ cuyos eslabones son 2-celdas con diámetro menor que 1, empezando en a, pasando por b y terminando en c. Dentro de $\mathcal{C}_1$ construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_2$ cuyos eslabones son 2-celdas de diámetro menor que $\frac{1}{2}$, que empiece en b, que pase por c y termine en a, de tal forma que $\mathcal{C}_2$ sea un refinamiento propio de $\mathcal{C}_1$. Dentro de $\mathcal{C}_2$, construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_3$ cuyos eslabones son 2-celdas de diámetro menor que $\frac{1}{3}$, empezando por c, pasando por a y terminando en b de tal manera que $\mathcal{C}_3$ sea un refinamineto propio de $\mathcal{C}_2$. Nuevamente se inicia el procedimiento con una cadena simple $\mathcal{C}_4$ que está contenida en $\mathcal{C}_3$ y sigue el patrón $a - b - c$. En general para cualquier $n \in \mathbf{N}$, se construyen cadenas simples las cuales satisfacen:*

(i) $\mathcal{C}_{3n-2}$ *que empieza en a, pasa por b y termina en c,* $\mathcal{C}_{3n-1}$ *que empieza en b, pasa por c y termina en a, y* $\mathcal{C}_{3n}$ *que empieza en c, pasa por a y termina en b.*

(ii) $\bigcup \mathcal{C}_{n+1} \subset \bigcup \mathcal{C}_n$.

(iii) *El diámetro de cada eslabón de* $\mathcal{C}_n$ *es menor que* $\frac{1}{n}$.

Sea X la intersección anidada de las uniones de los eslabones de cada cadena, es decir,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{C}_n \right).$$

Por el teorema 2.47, X es un continuo, véase la Figura 2.18.

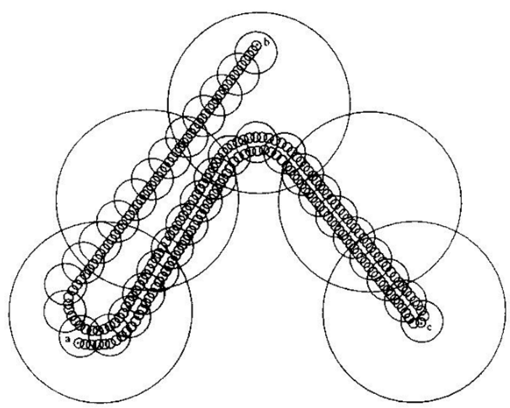


Figura 2.18: Continuo encadenable.

Bibliografía

[1] Robert G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Department of Mathematics, University of Illinois. Urbana-Champaign. John Wiley and Sons., New York. London. Sidney. Toronto. Second Edition.

[2] Janusz J. Charatonik, *Bosquejo de la Historia de la teoría de continuos.* Traducción al español del trabajo inédito del profesor J. J. Charatonik titulado *Outline of the History of Continuum Theory.* Traducción por Raúl Escobedo y Héctor Méndez.

[3] Charles O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[4] Raúl Escobedo, Sergio Macías y Hector Méndez, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 31, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3591-1, 2006.

[5] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos.* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N.13, Sociedad Matemática Mexicana, Segunda Edición 1998.

[6] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodriguez *Continuos con hiperespacio rígido* $C_n(X)$ (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 141-161. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0. Tiraje de 500 ejemplares. 164 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

[7] Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero *Génesis del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión de un conti-*

nuo Capítulo 3 Matemáticas y sus aplicaciones 10, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 51-71. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-521-7. Tiraje de 500 ejemplares. 176 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

[8] Sergio Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applics Mathematics, Series, Vol. 275, Chapman, Hall/CRC, Taylor, Francis Group, Boca Raton, 2005.

[9] James R. Munkres, *Topology A first course*, Massachusetts Institute of Technology, Prentice-Hall. Año 1974.

[10] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An Introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[11] Stephen Willard, *General Topology*, University of Alberta. Addison-Wesley Publishing Company. Series in Mathematics.

Índice alfabético