La retícula de clases conaturales $(R - conat)$

por

Oscar Pérez López

Tesis presentada en cumplimiento parcial de los requisitos
para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de
Ciencias Físico Matemáticas

Asesor:
Dr. César Cejudo Castilla

México, Puebla, Julio de 2017

A mis padres Minerva y Gregorio

Introducción

En los últimos años el estudio de retículas de clases de módulos ha sido de gran importancia para obtener información de un anillo y su categoria de módulos asociada.

En este trabajo estudiaremos la retícula de clases naturales introducida por Dauns en [6] y las retículas de clases conaturales estudiadas por Alejandro García Alvarado, Hugo Rincón y José Ríos Montes en [1] y [2].

En el capítulo 1 introducimos algunas propiedades importantes de la teoría de módulos y la teoría retículas que nos serán de ayuda para el estudio de las retículas de clases naturales y conaturales.

En el capítulo 2 damos la definición de clases de módulos y retículas de clases de módulos, así como la definición de esqueleto de una retícula para demostrar que el esqueleto de la retícula de clases hereditarias y el esqueleto de clases cohereditarias coincide con la retícula de clases naturales y la retícula de clases conaturales respectivamente. También damos la condición CN que nos ayudará a decidir cuándo una clase de módulos es conatural y damos una caracterización de esta retícula de clases, así como algunas propiedades de cerradura.

Por último, en el capítulo 3 damos la definición y propiedades de un átomo en la retícula de clases hereditarias para posteriormente estudiar bajo qué propiedades una clase conatural generada por una clase de módulos es un átomo. Finalmente, establecemos una caracterizamos para los anillos MAX izquierdos y anillos perfectos izquierdos por medio de clases conaturales.

—

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis padres Minerva y Gregorio por todo el cariño, apoyo y paciencia, a mis hermanas Fabiola y Mari por todos sus consejos y no dejar de creer en mi y a mi hermano Guillermo por todo su apoyo.

Agradezco al Dr. César Cejudo Castilla por confiar en mi para la realización de está tesis, por todo el tiempo dedicado a su elaboración y por todos los conocimientos que me ha inculcado.

Por último agradezco a mis sinodales: Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo, Dr. David Villa Hernández y Dr. Iván Martínez Ruíz, por las contribuciones y correcciones para la mejora de la tesis.

Índice general

Lista de símbolos

$N \leq M$	N es un submódulo de M.
$N \lneq M$	N es un submódulo propio de M.
$E(M)$	cápsula inyectiva de un módulo M.
$Hom_R(M, N)$	grupo de morfismos entre dos módulos.
$End_R(M)$	anillo de endomorfismos de un módulo M.
$R - mod$	la clase de todos los módulos izquierdos.
${}_RM$	módulo izquierdo M.
M_R	módulo derecho M.
${}_SM_R$	bimódulo M.
$M \rightarrowtail N$	monomorfismo entre dos módulos M y N.
$M \twoheadrightarrow N$	epimorfismo entre dos módulos M y N.
$M^{(I)}$	suma directa de I copias de M.
$N \ll M$	N es un submódulo superfluo de M.
$N \leq_{es} M$	N es un submódulo esencial de M.
$J(R)$	radical de un anillo R.
$Rad(M)$	radical de un módulo M.
$(0 : m)$	anulador izquierdo de un elemento m.

Capítulo 1

Preliminares

En está sección omitimos las demostraciones pues ya están desarrolladas en [3], [4], [5] y [8]. Sin embargo, mencionamos donde encontrarlas.

1.1. Teoría de Módulos

1.1.1. Módulos, submódulos y cociente de módulos

Definición 1.1.1. Sea M un grupo abeliano aditivo y sea R un anillo con uno. Decimos que M es un $R-$ *módulo izquierdo* si existe una función

$$\begin{array}{rcl} \cdot : R \times M & \to & M \\ (a, x) & \mapsto & ax \end{array}$$

que satisface

1) $(a+b)x = ax + bx$

2) $a(x+y) = ax + ay$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$

para todo $a, b \in R$ y para todo $x, y \in M$.

De manera análoga se definen los $R-$ *módulos derechos* pero con los elementos del anillo operando del lado derecho de los elementos de M. Si S y R son dos anillos, decimos que M es un $(S,R)-$ *bimódulo* si M es un $S-$ *módulo izquierdo* y M es un $R-$ *módulo derecho* que cumple que $a(xb) = (ax)b$ para cada $a \in S$, $x \in M$ y $b \in R$.

Ejemplo 1. Si R es un campo (semicampo o un anillo con división), entonces los $R-$ *módulos* son los $R-$ *espacios vectoriales*. (Ver [8]).

Ejemplo 2. La clase de los grupos abelianos coincide con la clase de los $\mathbb{Z}-$ *módulos*.

Ejemplo 3. Si R es un anillo, podemos pensar en R como un $R-$ *módulo* con el producto de R.

Sea M un $R-$ *módulo izquierdo*. Decimos que un subconjunto no vacío N de M es un *submódulo* de M si N es un subgrupo aditivo de M y para todo $a \in R$, $x \in N$ se cumple que $ax \in N$.

Proposición 1.1.1. Sea N un subconjunto no vacío de M, con M un $R-$ *módulo izquierdo*. Entonces N es un submódulo de M si y sólo si $x + y \in N$ y $ax \in N$ para todo $a \in R$ y $x, y \in N$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 1.4.2]. ■

Si N es un submódulo de un $R-$ *módulo izquierdo* M y N es distinto de M, entonces N es un *submódulo propio* de M.

Ejemplo 4. *La suma finita de submódulos.* Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son submódulos de un $R-$ *módulo* M, entonces $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid x_i \in M_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n\}$ es un submódulo de M para cada entero $n \geq 1$.

Ejemplo 5. *Los ideales izquierdos y derechos como submódulos.* El anillo R es un $R-$*módulo izquierdo* y un $R-$*módulo derecho* bajo la operación de multiplicación definida en R. Además, notemos que A es un ideal izquierdo (derecho) de R si y sólo si A es un submódulo de R cuando R es visto como un $R-$ *módulo* izquierdo (derecho).

Si R es un anillo, entonces R es un ${}_RR_R$ − *bimódulo*.

Ejemplo 6. *El anulador de un módulo.* Si M es un $R-$ *módulo izquierdo* y

$$A = ann_l(M) = \{a \in R \mid am = 0 \text{ para toda } m \in M\}$$

entonces A es un ideal de R, denominado como el anulador de M en R.
Si I es un ideal de R tal que $I \subseteq ann_l(M)$, entonces M es un $R/I-$ *módulo* con la suma de M y el producto dado por $(a+I)m = am$ para toda $a + I \in R/I$ y $m \in M$.

Ejemplo 7. *El módulo cíclico.* Si M es un $R-$ *módulo* y $x \in M$, entonces $Rx = \{ax \mid a \in R\}$ es un submódulo de M llamado el *submódulo cíclico de M generado por x*. Si $M = Rx$, entonces M se dice ser un *módulo cíclico.*

Definición 1.1.2. Sea N un submódulo de un $R-$ *módulo* M y supongamos que S es un subconjunto de N. Si todo elemento $x \in N$ puede ser expresado como $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, donde $a_i \in R$ y $x_i \in S$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces decimos que S es un conjunto de *generadores* de N o que N es generado por S. Si N es generado por S , escribimos $N = \sum_S Rx$ y cuando S es un conjunto finito, decimos que N es *finitamente generado.*

Si N es un submódulo de un $R-$ *módulo* M, entonces

$$M/N = \{x + N \mid x \in M\}$$

donde la operación suma es la suma usual de grupos cocientes aditivos y la multiplicación por escalar está definida como $a(x + N) = ax + N$ para todo $a \in R$ y todo $x + N \in M/N$, es llamado *módulo cociente de M sobre N.*

Definición 1.1.3. Todo $R-$*módulo* distinto de cero tiene al menos dos submódulos, a saber M y el submódulo $\{0\}$, denotado por 0. Un $R-$ *módulo* distinto de cero S que únicamente tiene a 0 y S como sus submódulos se dice que es un *módulo simple*. El conjunto de todos los submódulos de un $R-$ *módulo* M está parcialmente ordenado por la inclusión. Sobre este orden un *submódulo mínimo* de M es sólo un submódulo simple de M. Un submódulo propio N de M se dice *submódulo máximo* de M si para cualquier submódulo N' de M tal que $N \subseteq N' \subseteq M$, se sigue que $N = N'$ o $N' = M$. Claramente A es un ideal izquierdo mínimo de R si y sólo si ${}_RA$ es un $R-$ *módulo* simple.

La siguiente proposición nos servirá para demostrar más adelante que el radical de un módulo finitamente generado es propio.

Proposición 1.1.2. Si M es un $R-$ *módulo izquierdo* finitamente generado distinto de cero, entonces M tiene submódulos máximos.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.2]. ■

A partir de ahora todo anillo del que hablemos será un anillo con uno no conmutativo y nos vamos a referir a los $R-$ *módulos izquierdos* por *módulos*. En caso contrario se hará la aclaración.

1.1.2. Homomorfismos de módulos

Definición 1.1.4. Sean M y N dos módulos, decimos que una función $f : M \to N$ es un *homomorfismo* (o *morfismo*) de módulos si se cumplen para cualesquiera $a \in R$ y $x, y \in M$:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2) $f(ax) = af(x)$.

Ejemplo 8. (1) El *morfismo nulo*. Definimos el morfismo nulo por

$$\begin{aligned} \overline{0} : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

(2) El *morfismo inclusión*. Si N un submódulo de M, definimos el morfismo inclusión por

$$\begin{aligned} \iota : N &\rightarrow M \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

(3) El *morfismo canónico*. Si N un submódulo de M, definimos el morfismo canónico por

$$\begin{aligned} \upsilon : M &\rightarrow M/N \\ x &\mapsto x + N. \end{aligned}$$

(4) El *morfismo identidad*. Sea M un módulo, definimos el morfismo identidad por

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Si N es submódulo de M, denotamos el morfismo inclusión entre N y M por $N \hookrightarrow M$.

Al conjunto de todos los morfismos de M a N con M y N módulos, lo denotamos por $Hom_R(M, N)$ y cuando $M = N$, $Hom_R(M, N)$ será escrito como $End_R(M)$. También notamos que $Hom_R(M, N)$ es un grupo abeliano aditivo, pero no un módulo.

La siguiente observación se puede consultar en [4].

Observación 1.1. (1) Si M es un $(S,R)-$*bimódulo* y N es un $S-$*módulo izquierdo*, entonces $Hom_R({}_SM_{R},{}_S N)$ es un $R-$ *módulo izquierdo*.

(2) Si M es un $(S,R)-$ *bimódulo* y N es un $R-$ *módulo derecho*, entonces $Hom_R({}_SM_R, N_R)$ es un $S-$ *módulo derecho*.

(3) Si N es un $(S,R)-$ *bimódulo* y M es un $S-$ *módulo izquierdo*, entonces $Hom_R({}_SM.{}_SN_R)$ es un $R-$ *módulo derecho*.

(4) Si N es un $(S,R)-$ *bimódulo* y M es un $R-$ *módulo derecho*, entonces $Hom_R(M_{R},{}_S N_R)$ es un $S-$ *módulo izquierdo*.

De la Observación anterior (1), tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1.3. Si M es un módulo, entonces $Hom_R(R,M) \cong M$ como módulos.

Demostración. Ver la demostración en [4, 1.5.4]. ■

Si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos y M', N' son submódulos de M, N respectivamente, entonces se definen

$$\begin{aligned} f(M') &= \{f(m') \mid m' \in M'\}. \\ f^{-1}(N') &= \{m \in M \mid f(m) \in N'\}. \end{aligned}$$

Proposición 1.1.4. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos.

(1) Si M' es un submódulo de M, entonces $f(M')$ es un submódulo de N.

(2) Si N' es un submódulo de N, entonces $f^{-1}(N')$ es un submódulo de M.

Demostración. Ver la demostración en [8, 3.1.2]. ■

Definición 1.1.5. Si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{m \in M \mid f(m) = 0\}. \\ Coker(f) &= N/Im(f). \end{aligned}$$

Observación 1.2. Si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces $Ker(f)$ es submódulo de M.

Definición 1.1.6. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos.

(1) Decimos que f es un *monomorfismo* si y sólo si para todo módulo L y para todo $g_1, g_2 \in Hom_R(L, M)$ tal que $fg_1 = fg_2$, ocurre que $g_1 = g_2$.

(2) Decimos que f es un *epimorfismo* si y sólo si para todo módulo L y para todo $h_1, h_2 \in Hom_R(N, L)$ tal que $h_1 f = h_2 f$, se cumple que $h_1 = h_2$.

(3) Decimos que f es un *bimorfismo* si y sólo si f es monomorfismo y epimorfismo.

(4) Decimos que f es un *isomorfismo* si y sólo si existe $f' : N \to M$ con $f' \in Hom_R(N, M)$ tal que $f'f = id_M$ y $ff' = id_N$.

El siguiente teorema nos dice que en la clase $R - mod$, la definición de monomorfismo y la definición de epimorfismo son equivalentes a la definición de inyectivo y suprayectivo respectivamente.

Teorema 1.1.1. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos, entonces

(1) f es inyectiva si y sólo si f es monomorfismo.

(2) f es suprayectiva si y sólo si f es epimorfismo.

(3) f es biyectiva si y sólo si f es bimorfismo si y sólo si f es isomorfismo.

Demostración. Ver la demostración en [8, 3.1.5]. ■

Denotamos un monomorfismo y un epimorfismo entre dos módulos M y N por: $M \rightarrowtail N$ y $M \twoheadrightarrow N$ respectivamente.

Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos, si f es un epimorfismo, entonces decimos que N es la imagen homomorfa de M. Y si f es un isomorfismo, entonces decimos que M y N son isomorfos y lo denotamos por $M \cong N$.

Lema 1.1.1. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) f es monomorfismo si y sólo si $Ker(f) = 0$.

(2) Si M' es submódulo de M, entonces $f^{-1}(f(M')) = M' + Ker(f)$.

(3) Si N' es submódulo de N, entonces $f(f^{-1}(N')) = N' \cap Im(f)$.

(4) Sea $g : N \to L$, entonces

  (i) $Ker(gf) = f^{-1}(Ker(g))$.

  (ii) $Im(gf) = g(Im(f))$.

Demostración. Ver la demostración en [8, 3.1.8]. ■

Teorema 1.1.2. (Primer Teorema de Isomorfismos para Módulos). Si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos, entonces $M/Ker(f) \cong Im(f)$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 1.5.6 (3)]. ■

Como consecuencia del Teorema anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.1. Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces $M/Ker(f) \cong N$.

Si $f : M \to N$ es un monomorfismo, entonces $f(M)$ es un submódulo de N que es isomorfo a M. Cuando este es el caso decimos que M se sumerge en N y N contiene una copia isomorfa de M.

Teorema 1.1.3. (Segundo teorema de Isomorfismos para Módulos). Si M_1 y M_2 son submódulos de un módulo M, entonces $M_1/(M_1 \cap M_2) \cong (M_1 + M_2)/M_2$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 1.5.9]. ■

Teorema 1.1.4. (Tercer Teorema de Isomorfismos para Módulos). Si M_1 y M_2 son submódulos de un módulo M tales que $M_1 \subseteq M_2$, entonces M_2/M_1 es un submódulo de M/M_1 y $(M/M_1)/(M_2/M_1) \cong M/M_2$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 1.5.8]. ■

Teorema 1.1.5. (Teorema de Correspondencia para Módulos). Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces existe una corresponedencia biyectiva entre los submódulos de M que contienen a $Ker(f)$ y a los submódulos de N.

Demostración. Sean $\mathscr{A} = \{A \leq M \mid Ker(f) \subseteq A\}$ y $\mathscr{B} = \{B \mid B \leq N\}$. Definamos $\hat{f} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ por $\hat{f}(A) = f(A)$. Notemos que $\hat{f}$ está bien definida ya que por la Proposición 1.1.4 (1), $f(A)$ es submódulo de N.
Veamos que $\hat{f}$ es inyectiva. Sean $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ tales que $f(A_1) = f(A_2)$, entonces por el Lema 1.1.1 (2), $A_1+Ker(f) = f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2)) = A_2+Ker(f)$. Como $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ se sigue que $Ker(f) \subseteq A_1$ y $Ker(f) \subseteq A_2$ por lo que $A_1+Ker(f) = A_1$ y $A_2 + Ker(f) = A_2$, esto es, $A_1 = A_2$. Por lo tanto $\hat{f}$ es inyectiva.
Ahora veamos que $\hat{f}$ es suprayectiva. Sea $B \in \mathscr{B}$ y sea $A = f^{-1}(B)$. Entonces por la Proposición 1.1.4 (2), A es submódulo de M y además $Ker(f) \subseteq A$ por lo que $A \in \mathscr{A}$. Entonces por el Lema 1.1.1 (3) y el hecho de que f es epimorfismo, se sigue que $f(A) = f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f) = B \cap N = B$. Es decir, f es suprayectiva.
Así hemos mostrado que $\hat{f}$ es biyectiva. ■

1.1.3. Productos directos y sumas directas de módulos

Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces el producto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i$ junto con las operaciones

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \text{ y } r(x_i) = (rx_i)$$

para cada $(x_i), (y_i) \in \prod_{i\in I} M_i$ y para cada $r \in R$ es un módulo. La función $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ tal que $\pi_j((x_i)) = x_j$ para cada $(x_i) \in \prod_{i\in I} M_i$ es un epimorfismo llamado la $j-$*ésima proyección canónica* y la función $\iota_j : M_j \to \prod_{i\in I} M_i$ definida por $\iota_j(x) = (x_i)$, donde $x_i = 0$ si $i \neq j$ y $x_j = x$ si $i = j$, es un monomorfismo llamado la $j-$*ésima inclusión canónica*. El módulo $\prod_{i\in I} M_i$ junto con la familia de proyecciones canónicas $\{\pi_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i\}_{i\in I}$ se dice el *producto directo* de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$. A tal producto lo denotamos por $(\prod_{i\in I} M_i, \pi_i)$. De aquí en adelante nos referimos a $\prod_{i\in I} M_i$ como el producto directo de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$.

Teorema 1.1.6. (Propiedad Universal del Producto). Si $\{M_i \mid i \in I\}$ es una familia de módulos, entonces el producto directo $(\prod_{i\in I} M_i, \pi_i)$ tiene la propiedad de que para todo módulo N y para toda familia $\{f_i : N \to M_i\}_{i\in I}$ de morfismos existe un único morfismo $f : N \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que para cada $i \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto es, $f_i = \pi_i f$ para toda $i \in I$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 2.1.1]. ■

Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces

$$\coprod_{i\in I} M_i = \{(x_i) \in \prod_{i\in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I\}$$

es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$. Además, para cada $j \in I$, existe un monomorfismo $\iota_j : M_j \to \coprod_{i\in I} M_i$ dada por $\iota_j(x) = (x_i)$, donde $x_i = 0$ si $i \neq j$ y $x_j = x$ si $i = j$. La función ι_j es llamada la $j-$ *ésima inclusión canónica* en $\coprod_{i\in I} M_i$.

El módulo $\coprod_{i\in I} M_i$ junto con la familia $\{\iota_i\}_{i\in I}$ de inclusiones canónicas se dice la *suma directa externa* de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ y se denota por $\coprod_{i\in I} M_i$.

Teorema 1.1.7. (Propiedad Universal del Coproducto). Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces $(\coprod_{i\in I} M_i, \iota_i)$ tiene la propiedad de que para todo módulo N y para toda familia $\{f_i : M_i \to N\}_{i\in I}$ de morfismos existe un único morfismo $f : \coprod_{i\in I} M_i \to N$ tal que para cada $i \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, $f_i = f\iota_i$ para cada $i \in I$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 2.1.5]. ■

Notación 1. Si I es un conjunto no vacío y $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces

$$\begin{aligned} M^I &:= \prod_{i\in I} M_i \text{ tal que } M_i = M \text{ para cada } i \in I \text{ producto directo de } M. \\ M^{(I)} &:= \coprod_{i\in I} M_i \text{ tal que } M_i = M \text{ para cada } i \in I \text{ suma directa de } M. \end{aligned}$$

Definición 1.1.7. Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M, decimos que $M = \bigoplus_{i\in I} B_i$ es una *suma directa interna* si se cumple lo siguiente:

(1) $M = \sum_{i\in I} B_i$.

(2) $B_i \cap (\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} B_j) = 0$.

Teorema 1.1.8. Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces tenemos que

$$\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i' \text{ y } M_i \cong M_i',$$

con M_i' submódulo de $\coprod_{i\in I} M_i$.

Demostración. Ver la demostración en [8, 4.2.1]. ■

Observación 1.3. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos. Si I es finito, entonces

$$\prod_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} M_i.$$

Proposición 1.1.5. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos. Entonces

(1) $Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, N)$ (como grupos abelianos) y

(2) $Hom_R(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(N, M_i)$ (como grupos abelianos)

para cualquier módulo N.

Demostración. Ver la demostración en [4, 2.1.12]. ■

1.1.4. Módulos libres

Recordemos que si N es un submódulo de un módulo M, entonces el subconjunto X de N tal que $N = \sum_X Rx$ se dice *conjunto de generadores* para N y decimos que N es generado por X. Si X es un conjunto finito, entonces N se dice *finitamente generado*. Recordar también que si N es generado por X y si $\{N_i\}_{i\in I}$ es la familia de todos los submódulos de M que contienen a X, entonces $N = \cap_{i\in I} N_i = \sum_X Rx$.

Definición 1.1.8. Si M es un módulo, entonces un conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de M se dice *linealmente independiente* si la única manera en que una suma finita $\sum_{i\in I} a_i x_i$ de elementos de $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$, es que $a_i = 0$ para cada $i \in I$. Si existe una suma finita $\sum_{i\in I} a_i x_i$ de elementos de $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$ con al menos un $a_i \neq 0$, entonces el conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ es *linealmente dependiente*. Si un módulo F tiene un conjunto linealmente independiente de generadores $\{x_i\}_{i\in I}$, entonces $\{x_i\}_{i\in I}$ se dice ser una base para F y F se dice ser un módulo libre con base $\{x_i\}_{i\in I}$.

Ejemplo 9. El conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto linealmente independiente para todo módulo M, por lo que el módulo 0 es generado por el $\emptyset$. Por lo tanto el módulo 0 es libre y tiene por base al $\emptyset$.

Ejemplo 10. El anillo R visto como módulo es libre con base $\{1\}$.

Proposición 1.1.6. Un módulo F es libre si y sólo si existe un conjunto I tal que $F \cong R^{(I)}$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 2.2.4]. ■

Proposición 1.1.7. Todo módulo M es la imagen homomorfa de un módulo libre. Además, si M es finitamente generado, entonces el módulo libre puede ser elegido finitamente generado.

Demostración. Ver la demostración en [4, 2.2.6]. ■

1.1.5. Sucesiones exactas de módulos

Definición 1.1.9. Una sucesión $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ de módulos y morfismos de módulos se dice exacta en M si $Im(f) = Ker(g)$, mientras que una sucesión de la forma

$$\mathrm{S} : \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots ,$$

con $n \in \mathbb{Z}$, se dice una *sucesión exacta* si es exacta en M_n para cada $n \in \mathbb{Z}$. Una sucesión

$$\mathrm{S} : 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

que es exacta en M_1, en M y en M_2 es llamada *sucesión exacta corta*.

Observación 1.4. (1) Si $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta, entonces f es un monomorfismo y g es un epimorfismo.

(2) Si N es un submódulo de M, entonces $0 \to N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{v} M/N \to 0$, es una sucesión exacta corta, donde ι es la inclusión canónica y v es el epimorfismo natural.

Lema 1.1.2. Si $f : M \to N$ y $g : N \to M$ son morfismos de módulos tales que

$$fg = id_N,$$

entones f es un epimorfismo, g es un monomorfismo y

$$M = Ker(f) \oplus Im(g).$$

Demostración. Ver la demostración en [3, 5.1]. ■

Corolario 1.1.2. Si $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta de módulos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Existe $f' : M \to M_1$ tal que $f'f = id_{M_1}$.

(2) Existe $g' : M_2 \to M$ tal que $gg' = id_{M_2}$.

(3) $M \cong M_1 \oplus M_2$.

Definición 1.1.10. Sea $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ una sucesión exacta corta de módulos. Decimos que la sucesión exacta corta se escinde si sucede cualquiera de las tres condiciones equivalentes del Corolario 1.1.2.

1.1.6. Módulos inyectivos y proyectivos

Definición 1.1.11. Un módulo I se dice inyectivo si dado cualquier diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \\ & I & \end{tikzcd}$$

de módulos y morfismos de módulos con fila exacta, existe un morfismo de módulos $g : N_2 \to I$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.1.8. Si M es submódulo de un módulo inyectivo I, entonces M es sumando directo de I.

Demostración. Ver la demostración en [4, 5.1.2]. ■

Definición 1.1.12. Un submódulo distinto de cero N de un módulo M se dice submódulo *esencial* de M, si $N \cap N' \neq 0$ para todo submódulo no nulo N' de M. Si N es submódulo esencial de M, entonces M se conoce como una *extensión esencial* de N.

Ejemplo 11. Todo submódulo distinto de cero de $\mathbb{Z}$ es esencial.

Definición 1.1.13. Un módulo P se dice proyectivo si dado cualquier diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ N_2 \arrow[r, "h"] & N_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de módulos y morfismos de módulos con fila exacta, existe un morfismo de módulos $g : M \to N_2$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\ N_2 \arrow[r, "h"] & N_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.1.9. Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es proyectivo si y sólo si M_i es proyectivo para cada $i \in I$.

Demostración. Ver la demostración en [8, 5.3.4]. ■

Lema 1.1.3. El anillo R es un módulo proyectivo.

Demostración. Ver la demostración en [4, 5.2.5]. ■

Corolario 1.1.3. Si R es un anillo, entonces ${}_RR$ es proyectivo.

Corolario 1.1.4. Todo módulo es la imagen homomorfa de un módulo proyectivo.

Demostración. Ver la demostración en [4, 5.2.7]. ■

Proposición 1.1.10. Si P es un módulo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(1) P es proyectivo.

(2) Toda sucesión exacta corta $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} P \to 0$ se escinde.

(3) Existe un módulo libre F y un módulo K tal que $F \cong K \oplus P$.

Demostración. Ver la demostración en [3, 17.2]. ■

1.1.7. El Radical de Jacobson

Definición 1.1.14. (1) El *radical de Jacobson* de un anillo R, denotado por $J(R)$, es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de R. Si $J(R) = 0$, entonces R se dice ser un *anillo semisimple de Jacobson.*

(2) Si M es un módulo, entonces el radical de M, denotado por $Rad(M)$, es la intersección de todos los submódulos máximos de M. Si M no tiene submódulos máximos, entonces $Rad(M) = M$.

Proposición 1.1.11. Si M es un módulo distinto de cero finitamente generado, entonces $Rad(M) \neq M$.

Demostración. Consecuencia de la Proposición 1.1.2. ∎

La siguiente proposición la encontramos en [8, 9.1.5(c)].

Proposición 1.1.12. Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de módulos, entonces

$$Rad(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i).$$

Proposición 1.1.13. Las siguientes condiciones se satisfacen para todo anillo R.

(1) $J(R)$ es un ideal de R que coincide con la intersección de los ideales anuladores izquierdos de módulos simples.

(2) $J(R)$ es el conjunto de todos los $a \in R$ tal que $1 - ra$ tiene inverso izquierdo para todo $r \in R$.

(3) $J(R)$ es el mayor ideal de R tal que para todo $a \in J(R)$, $1 - a$ es unidad en R.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.7]. ∎

Lema 1.1.4. Si A es un ideal izquierdo de R tal que $A \subseteq J(R)$, entonces $AM \subseteq Rad(M)$ para todo módulo M.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.9]. ■

Lema 1.1.5. (Lema de Nakayama). Sea A un ideal izquierdo de R tal que $A \subseteq J(R)$ y M es un módulo finitamente generado.

(1) Si N es un submódulo de M tal que $N + AM = M$, entonces $N = M$.

(2) Si $AM = M$, entonces $M = 0$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.10]. ■

Definición 1.1.15. Un submódulo K de un módulo M se dice superfluo en M si para todo submódulo N de M tal que $K + N = M$, entonces $N = M$.

Proposición 1.1.14. Un ideal izquierdo A es superfluo en R si y sólo si $A \subseteq J(R)$. Además, si M es un módulo finitamente generado, entonces AM es superfluo en M para todo ideal izquierdo A contenido en $J(R)$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.2]. ■

La siguiente proposición establece que el radical de un módulo M puede ser descrito como la suma de de submódulos superfluos en M.

Proposición 1.1.15. Si M es un módulo y $\{K_i\}_{i\in I}$ es la familia de todos los submódulos superfluos de M, entonces $Rad(M) = \sum_{i\in I} K_i$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.1.4]. ■

Corolario 1.1.5. Para todo módulo M, $Rad(M)$ contiene todos los submódulos superfluos de M.

Ejemplo 12. (1) Como el único submódulo superfluo de $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ es el 0, entonces por la Proposición 1.1.15, $Rad(\mathbb{Z}_\mathbb{Z}) = 0$.

(2) Como $\mathbb{Q}$ no tiene submódulos máximos, entonces $Rad(\mathbb{Q}_\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

Además por [8, 9.2.1]. El radical de un anillo es bilateral.

1.1.8. Módulos semisimples

Definición 1.1.16. Se dice que un módulo M es semisimple si $M = \bigoplus_{i\in I} A_i$ con A_i submódulo simple de M para cada $i \in I$. Un anillo R es semisimple si es semisimple como módulo.

Definición 1.1.17. Un conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de idempotentes de un anillo R se dice *conjunto de idempotentes ortogonales* de R, si $e_ie_j = 0$ para toda i, j con $i \neq j$ y $e_ie_i = e_i$ si $i = j$. Si $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, entonces $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es llamado un *conjunto completo de idempotentes* de R. Un elemento idempotente e de un anillo R se dice *idempotente central* de R si e está en el centro de R, esto es, $ae = ea$ para todo $a \in R$.

Proposición 1.1.16. Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo semisimple R

(1) Existen ideales izquierdos mínimos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de R tales que

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

(2) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ son ideales izquierdos mínimos de R tales que

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \text{ y } R = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m,$$

entonces $n = m$ y existe una permutación $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A_i \cong B_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(3) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un conjunto de ideales izquierdos mínimos de R tales que

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n,$$

entonces existe un conjunto completo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales de R tal que

$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_n$$

y $A_i = Re_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, los idempotentes en $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ son únicos.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.4.11]. ■

Lema 1.1.6. (Lema de Schur). Sean M y S dos módulos, con S simple. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.

(1) Si $f : S \to M$ es un morfismo no nulo, entonces f es un monomorfismo.

(2) Si $f : M \to S$ es un morfismo no nulo, entonces f es un epimorfismo.

(3) $End_R(S)$ es un anillo con división.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.4.13]. ■

Sea $\mathcal{S}$ la clase de todos los módulos simples, definamos la relación $\sim$ en $\mathcal{S}$ por $S \sim S'$ si y sólo si S y S' son isomorfos, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$. Una clase de equivalencia $[S]$ en $\mathcal{S}$ determinada por $\sim$ se dice que es una clase de isomorfismos de módulos simples.

Proposición 1.1.17. Si R es un anillo semisimple, entonces sólo hay un número finito de clases de isomorfismos de módulos simples.

Demostración. Ver la demostración en [4, 6.4.14]. ■

1.1.9. Cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas

Recordemos que una extensión esencial de un módulo M es un módulo E que contiene M tal que todo submódulo distinto de cero de E intersecta, no trivialmente, a M.

Definición 1.1.18. Una *cápsula inyectiva* de un módulo M es un módulo inyectivo $E(M)$ junto con un monomorfismo $\varphi : M \rightarrowtail E(M)$ tal que $E(M)$ es una extensión esencial de $\varphi(M)$. Una cápsula inyectiva $\varphi : M \rightarrowtail E(M)$ de M se dice *única salvo* *isomorfismos* si dada $\varphi' : M \rightarrowtail E(M)'$ otra cápsula inyectiva de M, existe un isomorfismo $f : E(M)' \to E(M)$ tal que $f\varphi' = \varphi$.

Teorema 1.1.9. Todo módulo tiene cápsula inyectiva.

Demostración. Ver la demostración en [8, 5.6.4]. ■

Definición 1.1.19. Una *cubierta proyectiva* de un módulo M es un módulo proyectivo $P(M)$ junto con un epimorfismo $\varphi : P(M) \to M$ tal que $Ker(\varphi)$ es superfluo en $P(M)$. Una cubierta proyectiva $\varphi : P(M) \to M$ de M se dice única salvo isomorfismos si dada $\varphi' : P(M)' \to M$ otra cubierta proyectiva de M, existe un isomorfismo $f : P(M)' \to P(M)$ tal que $\varphi f = \varphi'$. El módulo proyectivo $P(M)$ será denotado por P, cuando M es conocido.

Observación 1.5. No todo módulo tiene cubierta proyectiva.

Ejemplo 13. El $\mathbb{Z} - $ *módulo* $\mathbb{Z}_2$ no tiene cubierta proyectiva. En efecto, supongamos que $\varphi : P \to \mathbb{Z}_2$ es una cubierta proyectiva de $\mathbb{Z}_2$. Entonces $Ker(\varphi) \subseteq Rad(P) \subseteq J(R)P = 0$, es decir, φ es monomorfismo. Por lo tanto φ es un isomorfismo. Pero como $\mathbb{Z}$ es libre, existe un conjunto I tal que $P = \mathbb{Z}^{(I)}$ y como φ es un isomorfismo, se sigue que $\mathbb{Z}_2$ es libre que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{Z}_2$ no tiene cubierta proyectiva.

En caso de existir, las cubiertas proyectivas son únicas salvo isomorfismos.

1.1.10. El radical de un módulo proyectivo

Proposición 1.1.18. Si M es un módulo proyectivo, entonces $Rad(M) = J(R)M$.

Como todo módulo libre es proyectivo, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.6. Si F es un módulo libre, entonces $Rad(F) = J(R)F$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.4]. ■

Recordemos que para dos módulos M y N, el grupo aditivo $Hom_R(M,N)$ puede ser considerado un módulo izquierdo sobre $End_R(M)$ y módulo derecho sobre $End_R(N)$ en la forma canónica:

$$End_R(M) \times Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N), (\alpha, f) \mapsto \alpha f = f \circ \alpha,$$
$$Hom_R(M,N) \times End_R(N) \to Hom_R(M,N), (f, \beta) \mapsto f\beta = \beta \circ f,$$

para $f \in Hom_R(M,N)$, $\alpha \in End_R(M)$, $\beta \in End_R(N)$.

Proposición 1.1.19. Si P es un módulo proyectivo, entonces $f \in J(End_R(P))$ si y sólo si $Im(f)$ es superfluo en P.

Demostración. Ver la demostración en [3, 17.11]. ■

Corolario 1.1.7. Si P es un módulo proyectivo y $J(R)P$ es superfluo en P, entonces

(1) $J(End_R(P) = Hom_R(P, J(R)P)$.

(2) $End_R(P)/J(End_R(P)) \cong End_R(P/J(R)P)$.

Demostración. Ver la demostración en [3, 17.12]. ■

Corolario 1.1.8. Para un a anillo R tenemos que $J(\mathbb{M}_n(R)) = \mathbb{M}_n(J(R))$.

Demostración. Ver la demostración en [3, 17.13]. ■

Proposición 1.1.20. Si P es un módulo proyectivo diferente de cero, entonces P tiene un submódulo máximo.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.8]. ■

Como consecuencia de la Proposición anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.9. Si M es un módulo proyectivo, entonces $Rad(M) \neq M$.

1.1.11. Anillos semiperfectos

Definición 1.1.20. Un anillo R se dice *semiperfecto izquierdo* si todo módulo finitamente generado tiene cubierta proyectiva.

La siguiente proposición la encontramos en [4, 7.2.11].

Proposición 1.1.21. La siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

(1) R tiene un único ideal izquierdo máximo.

(2) $J(R)$ es el único ideal izquierdo máximo de R.

(3) $R/J(R)$ es un anillo con división.

(4) $J(R) = \{a \in R \mid a \text{ no es unidad en } R\}$.

(5) Si $a \in R$, entonces a o $1 - a$ es una unidad.

(6) R tiene un único ideal derecho máximo.

(7) $J(R)$ es el único ideal derecho máximo de R.

(8) Si $U(R)$ es el grupo de las unidades de R, entonces $a + b \in U(R)$ implica que $a \in R$ o $b \in R$.

Definición 1.1.21. Un anillo R se dice un *local* si R satisface alguna de las equivalencias de la Proposición 1.1.21.

Ejemplo 14. Si R es un anillo divisible, entonces R es un anillo local.

Observación 1.6. Los únicos idempotentes de un anillo local son 0 y 1.

Recordemos que un ideal izquierdo (derecho, ideal) A de R es un *ideal izquierdo (derecho, ideal) nilpotente*, si existe un entero positivo n tal que $A^n = 0$. Un ideal izquierdo (derecho, ideal) A de R se dice *nil ideal izquierdo (derecho, nil ideal)* si todo elemento de A es nilpotente.

Definición 1.1.22. Si I es un ideal bilateral de R y $\bar{g}$ es un idempotente en el anillo R/I, entonces decimos que $\bar{g}$ se puede levantar a R si existe un idempotente $e \in R$ tal que $\bar{g} = e + I$. Si e es un idempotente de R tal que $\bar{g} = e + I$, entonces decimos que e levanta a $\bar{g}$ módulo I o que $\bar{g}$ puede ser levantado a R módulo I.

Proposición 1.1.22. Si I es un nil ideal de R, entonces los idempotentes de R/I se pueden levantar a R.

Demostración. Ver la demostración en [3, 27.1]. ■

En general, si $\bar{g}_1$ y $\bar{g}_2$ son idempotentes ortogonales de R/I, que son levantados por los idempotentes e_1 y e_2 de R, no nos garantiza que e_1 y e_2 sean ortogonales. Sin embargo si $I \subseteq J(R)$, la ortogonalidad se preserva.

Proposición 1.1.23. Si los idempotentes de R/I se pueden levantar a R módulo un ideal bilateral I contenido en $J(R)$, entonces todo conjunto numerable de idempotentes ortogonales de R/I se puede levantar a un conjunto numerable de idempotentes ortogonales de R. Además, un conjunto completo $\{\bar{f}_2, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n\}$ de idempotentes ortogonales de R/I se puede levantar a un conjunto completo $\{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales de R.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.15]. ■

Lema 1.1.7. Un módulo cíclico M tiene cubierta proyectiva si y sólo si existe un idempotente $e \in R$ y un ideal izquierdo A de R contenido en $J(R)$ tal que $M \cong Re/Ae$. Bajo estas condiciones, el epimorfismo canónico $v : Re \to Re/Ae$ compuesto con el isomorfismo $M \cong Re/Ae$ produce una cubierta proyectiva para M.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.17]. ■

Proposición 1.1.24. Las siguientes condiciones acerca de un módulo proyectivo P distinto de cero son equivalentes.

(1) P es una cubierta proyectiva de un módulo simple.

(2) $J(R)P$ es un submódulo máximo superfluo en P.

(3) $End_R(P)$ es un anillo local.

Más aún, si estas condiciones se mantienen, entonces $P \cong Re$ para algún idempotente e de R.

Demostración. Ver la demostración en [3, 17.19]. ∎

Corolario 1.1.10. Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R y un elemento idempotente e de R.

(1) $Re/J(R)e$ es un módulo simple.

(2) $J(R)e$ es el único submódulo máximo de Re.

(3) eRe es un anillo local.

Proposición 1.1.25. Si I es un ideal bilateral de R tal que $I \subseteq J(R)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) Los idempotentes de R/I levantan a R.

(2) Todo sumando directo del módulo R/I tiene una cubierta proyectiva.

(3) Todo conjunto de idempotentes ortogonales de R/I se levanta a un conjunto completo de idempotentes ortogonales de R.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.22]. ∎

Proposición 1.1.26. Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

(1) R es semiperfecto.

(2) $R/J(R)$ es semisimple y los idempotentes de $R/J(R)$ se pueden levantar a R.

(3) R tiene un conjunto completo $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ de idempotentes ortogonales tal que e_iRe_i es un anillo local para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(4) Todo módulo simple tiene cubierta proyectiva.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.23]. ■

1.1.12. Anillos perfectos

Lema 1.1.8. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de elementos de R. Si F es un módulo libre con base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sea $y_n = x_n - a_nx_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si M es un submódulo de F generado por $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

(1) M es un módulo libre con base $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y

(2) $M = F$ si y sólo si para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un entero $n \geq k$ tal que $a_ka_{k+1}\cdots a_n = 0$.

Demostración. Ver la demostación en [4, 7.2.24]. ■

Definición 1.1.23. Un subconjunto K de R se dice $T-$ *nilpotente izquierdo* si para toda sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de K existe un natural n tal que $a_1a_2\cdots a_n = 0$.

Observación 1.7. Si A es un ideal izquierdo de R con A $T-$*nilpotente izquierdo* o *derecho*, entonces A es nil. En efecto, si $a \in A$, entonces $a, a, \ldots$ es una sucesión en A, por lo que $a^n = 0$ para algún natural n.

Lema 1.1.9. Si A es un ideal izquierdo de R, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) A es $T-$ *nilpotente izquierdo*.

(2) Para todo módulo M con $AM = M$ se sigue que $M = 0$.

(3) Para todo módulo M, AM es superfluo en M.

(4) AF es un submódulo superfluo de todo módulo libre $F = R^{(\mathbb{N})}$.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.26]. ■

Definición 1.1.24. Un anillo R se dice *anillo perfecto izquierdo*, si todo módulo tiene cubierta proyectiva.

El siguiente corolario lo encontramos en [8, 11.6.2].

Corolario 1.1.11. Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

(1) R es perfecto izquierdo.

(2) $R^{(\mathbb{N})}$ es semiperfecto como $R-módulo\ izquierdo$.

(3) R es semiperfecto y todo $R-módulo\ izquierdo$ libre tiene radical superfluo.

Proposición 1.1.27. (Bass). Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

(1) R es un anillo perfecto izquierdo.

(2) $R/J(R)$ es semisimple y todo módulo distinto de cero contiene un submódulo máximo.

(3) $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es $T-nilpotente$ izquierdo.

Demostración. Ver la demostración en [4, 7.2.28]. ■

La siguiente Observación la encontramos en [3, 28.5].

Observación 1.8. Si todo módulo tiene submódulos máximos, entonces $J(R)$ es $T-nilpotente$ izquierdo.

1.2. Teoría de Retículas

Definición 1.2.1. Un conjunto parcialmente ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria sobre A que satisface:

(1) Ley reflexiva: $a \leq a$.

(2) Ley transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

(3) ley antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

para todo $a, b, c \in A$.

Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que dos elementos $a, b \in (A, \leq)$ son *comparables* si $a \leq b$ o $b \leq a$. En caso contrario se dice que a y b son *incomparables.*

Definición 1.2.2. Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces

(1) El *elemento mayor (menor)* de un subconjunto X de A, es un elemento $m \in X$ tal que para todo $x \in X$ $x \leq m$ (respectivamente $m \leq x$).

(2) Un elemento $m \in X$ es llamado *máximo (mínimo)* en X si no existe un elemento en X mayor (menor) que m, es decir, si para todo $x \in X$ tal que $m \leq x$ (respectivamente $x \leq m$), entonces $m = x$.

Observación 1.9. En caso de existir el elemento mayor o menor de un conjunto, este es único por antisimetría.

Definición 1.2.3. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea X un subconjunto de A.

(1) Un elemento $a \in A$ es una *cota superior (inferior)* de X, si para todo $x \in X$ se cumple que $x \leq a$ (respectivamente $a \leq x$).

(2) Un elemento $a \in A$ es llamado *supremo* o *yunta* de X, si es la menor de las cotas superiores de X. Y lo denotamos por *sup* X o $\bigvee X$.

De manera dual, se dice que un elemento $a \in A$ es el *ínfimo* o *cuña* de X, si a es la mayor de las cotas inferiores de X. Y lo denotamos por *ínf* X o $\bigwedge X$.

Como caso particular, *sup* $\{a, b\} = a \vee b$ e *ínf*$\{a, b\} = a \wedge b$.

Observación 1.10. En caso de existir el supremo y el ínfimo, estos son únicos.

Definición 1.2.4. Un *retícula* es un conjunto parcialmente ordenado en el cual, cada par de elementos tienen supremo e ínfimo.

Proposición 1.2.1. En cualquier retícula $(\mathscr{L}, \leq)$, las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ son asociativas, conmutativas y satisfacen la *propiedad de absorcón*:

$$(a \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee a = a,$$

para todo $a, b \in \mathscr{L}$.

Lema 1.2.1. Si $(\mathscr{L}, \leq)$ es una retícula, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para cualesquiera $a, b \in \mathscr{L}$

(1) $a \leq b$

(2) $a \wedge b = a$

(3) $a \vee b = b$.

Lema 1.2.2. Si $(\mathscr{L}, \leq)$ es una retícula, entonces para todo $a, b, c \in \mathscr{L}$ se cumple lo siguiente

(1) Si $b \leq c$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge c$ y $a \vee b \leq a \vee c$.

(2) Si $a \leq b$ y $a \leq c$, entonces $a \leq b \vee c$ y $a \leq b \wedge c$.

(3) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

(4) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

(5) Si $a \leq c$, entonces $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

(6) Si $c \leq a$, entonces $(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$.

Definición 1.2.5. Una retícula $\mathscr{L}$ se dice *completa*, si cada subconjunto S de $\mathscr{L}$ tiene supremo e ínfimo.

En una retícula completa $\mathscr{L}$ existe un elemento mayor denotado por $\mathbf{1}$ y un elemento menor denotado por $\mathbf{0}$.

Teorema 1.2.1. Sea $\mathscr{L}$ un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto no vacío S de $\mathscr{L}$ tiene ínfimo. Entonces $\mathscr{L}$ es una retícula completa.

1.2.1. Retículas modulares y distributivas

Definición 1.2.6. Una retícula $\mathscr{L}$ se dice *modular* si para cada $a, b, c \in \mathscr{L}$, con $a \leq c$, se cumple que

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Teorema 1.2.2. Una retícula $\mathscr{L}$ es modular si y sólo si para todo $a, b, c \in \mathscr{L}$ tales que $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$ y $a \vee b = c \vee b$ implica que $a = c$.

Recordemos que en cualquier retícula $\mathscr{L}$, si $a, b, c \in \mathscr{L}$ siempre se cumple que

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Sin embargo la otra desigualdad no siempre ocurre.

Definición 1.2.7. Una retícula $\mathscr{L}$ se dice *distributiva* si para cualesquiera $a, b, c \in \mathscr{L}$ se cumple que

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Proposición 1.2.2. Toda retícula distributiva es modular.

Lema 1.2.3. Una retícula $\mathscr{L}$ es distributiva si y sólo si para cualesquiera $a, b, c \in \mathscr{L}$ se cumple que $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ y por lo tanto se cumple la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

1.2.2. Retículas complementadas y pseudocomplementadas

Definición 1.2.8. Sea $\mathscr{L}$ una retícula con 0 y 1. Si $a \in \mathscr{L}$, entonces un *complemento* de a en $\mathscr{L}$ es un elemento $c \in \mathscr{L}$ tal que

$$a \wedge c = 0 \text{ y } a \vee c = 1.$$

Una retícula $\mathscr{L}$ se dice *complementada* si cada elemento de $\mathscr{L}$ tiene complemento en $\mathscr{L}$.

Proposición 1.2.3. Sea $\mathscr{L}$ una retícula distributiva con 0 y 1 y sea $a \in \mathscr{L}$. Si b es un complemento de a en $\mathscr{L}$, entonces b es único.

Definición 1.2.9. Sea $\mathscr{L}$ una retícula modular con 0 y 1, entonces

(1) Si $a \in \mathscr{L}$, definimos el *pseudocomplemento* de a en $\mathscr{L}$ como un elemento c tal que $a \wedge c = 0$ y c es máximo con esta propiedad.

(2) Si $a \in \mathscr{L}$, definimos el *pseudocomplemento fuerte* de a en $\mathscr{L}$ como un elemento c tal que $a \wedge c = 0$ y c es elemento mayor con esta propiedad.

Lema 1.2.4. En una retícula modular con 0 y 1, todo complemento es un pseudocomplemento.

Como consecuencia tenemos el siguiente Corolario:

Corolario 1.2.1. Toda retícula modular complementada es pseudocomplementada.

Capítulo 2

Algunas retículas de clases de módulos

Definición 2.0.1. Sea $\mathscr{C}$ una subclase en $R - mod$. Decimos que $\mathscr{C}$ es *abstracta* si es cerrada bajo isomorfismos, esto es, si $N \cong M$ y $M \in \mathscr{C}$, entonces $N \in \mathscr{C}$.

De aquí en adelante toda clase de módulos de la que hablemos será abstracta.

En este trabajo vamos a estudiar las retículas de clases de módulos cerradas bajo submódulos, cocientes, sumas directas y capsulas inyectivas, denotadas por $\leq, \twoheadrightarrow$ $, \oplus$ y E respectivamente.

Si P es un subconjunto de $\{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus\ E\}$, denotamos por $\mathscr{L}_P$ a la retícula de clases de módulos cerrada bajo propiedades de P.

Definición 2.0.2. Sea P un subconjunto de $\{\leq, \twoheadrightarrow, \oplus\ E\}$.

(1) Definimos un orden parcial en $\mathscr{L}_P$ por $\mathscr{C}_1 \leq \mathscr{C}_2$ si y sólo si $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2$.

(2) Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ es una familia en $\mathscr{L}_P$, definimos el ínfimo de la familia por $\bigwedge\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i = \bigcap\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$.

De la Definición anterior y el Teorema 1.2.1, tenemos que $\mathscr{L}_P$ es una gran retícula completa. Donde usamos el termino gran, para referirnos a una clase y no necesariamente a un conjunto.

A continuación definimos algunas de clases de módulos:

Definición 2.0.3. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos.

(1) Decimos que $\mathscr{C}$ es una *clase de pretorsión hereditaria* si es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas.

(2) Decimos que $\mathscr{C}$ es *libre de pretorsión* si es cerrada bajo submódulos y productos directos.

(3) Decimos que $\mathscr{C}$ es una clase *libre de torsión* si es libre de pretorsión y cerrada bajo extensiones exactas.

(4) Decimos que $\mathscr{C}$ es una *clase abierta* si es cerrada bajo submódulos y cocientes.

(5) Decimos que $\mathscr{C}$ es una *clase de Serre* si es cerrada bajo submódulos, cocientes y extensiones

Los siguientes son ejemplos de las clases de módulos definidas arriba:

Ejemplo 15. (1) La clase de módulos semisimples es una clase de pretorsíon hereditaria.

(2) La clase de todos los módulos M tal que $Zoc(M) = 0$ es un ejemplo de clase libre de pretorsión.

(3) La clase de los módulos no singulares es una clase libre de torsión.

(4) La clase de los módulos superfluos en su capsula inyectiva es un ejemplo de clase abierta.

(5) La clase de todos los módulos artinianos y la clase de todos los módulos neterianos son ejemplo de clases de Serre.

Definición 2.0.4. Sea P un conjunto de propiedades de cerradura y sea $\mathscr{C}$ una clase en $R-mod$. Entonces $\xi_P(\mathscr{C})$ es la menor clase de módulos que contiene a $\mathscr{C}$ cerrada bajo propiedades de P.

Los siguientes enunciados acerca de una retícula $\mathscr{L}_P$ nos ayudarán a demostrar algunas propiedades de las retículas de clases hereditarias y cohereditarias:

Definición 2.0.5. Sea P un conjunto de propiedades de cerradura y $\mathscr{L}_P$ una retícula de clases cerrada bajo propiedades de P.

(1) Decimos que $\mathscr{D}$ es un pseudocomplemento para $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_P$, si $\mathscr{D}$ es máximo con la propiedad de que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$. Si $\mathscr{C}$ está en $\mathscr{L}_P$, denotamos a su pseudocomplemento por $\mathscr{C}^{\perp_P}$.

(2) Un pseudocomplemento $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ es llamado fuerte, si es el mayor elemento en $\mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$.

(3) Denotamos por $Skel(\mathscr{L}_P)$ a la clase de todos los pseudocomplementos de $\mathscr{L}_P$.

Proposición 2.0.1. Si $\mathscr{L}_P$ es fuertemente pseudocomplementada, con P un conjunto de propiedades de cerradura, entonces:

(1) Para cada $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_P$ tenemos que $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$.

(2) Si $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{B}^{\perp_P} \subseteq \mathscr{A}^{\perp_P}$.

Demostración. (1). Sea $\mathscr{C}^{\perp_P}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_P$ y sea $(\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$ el pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}^{\perp_P}$ en $\mathscr{L}_P$. Como $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_P} = 0$ y $(\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$ es el mayor elemento en $\mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{C}^{\perp_P} \cap (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P} = 0$ se sigue que $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_P})^{\perp_P}$.

(2). Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ y sean $\mathscr{A}^{\perp_P}, \mathscr{B}^{\perp_P}$ sus pseudocomplementos fuertes en $\mathscr{L}_P$ respectivamente. Entonces $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}^{\perp_P} = 0$ y como $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ se tiene que $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}^{\perp_P} = 0$. Pero $\mathscr{A}^{\perp_P}$ es el mayor elemento en $\mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}^{\perp_P} = 0$. Por lo tanto $\mathscr{B}^{\perp_P} \subseteq \mathscr{A}^{\perp_P}$. ■

2.0.1. Clases hereditarias y cohereditarias de módulos

Definición 2.0.6. Una clase $\mathscr{C} \subseteq R-mod$ es llamada clase hereditaria si es cerrada bajo submódulos. Denotamos por $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ a la clase de todas las clases hereditarias en $R - mod$.

Los siguientes son ejemplos de clases hereditarias de módulos:

Ejemplo 16. (1) Las clases de pretorsión hereditaria.

(2) Las clases libres de torsión.

(3) Las clases de Serre.

(4) Las clases abiertas.

Definimos un orden parcial en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ como sigue:

$$\text{Si } \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2 \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}, \text{ decimos que } \mathscr{C}_1 \leq \mathscr{C}_2 \text{ si y sólo si } \mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2.$$

Observación 2.1. Sea $\mathscr{F}$ una familia de clases hereditarias, entonces

1) $\bigcap \mathscr{F}$ y $\bigcup \mathscr{F}$ son clases hereditarias.

2) $\bigwedge \mathscr{F} = \bigcap \mathscr{F}$ y $\bigvee \mathscr{F} = \bigcup \mathscr{F}$.

3) $R - mod$ y $\{(0)\}$ son clases hereditarias.

Demostración. 1) Sea $M \in \bigcap \mathscr{F}$ y sea $N \leq M$. Entonces $M \in \mathscr{C}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$. Y como $N \leq M$ tenemos que $N \in \mathscr{C}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$. De donde $N \in \bigcap \mathscr{F}$. Por lo tanto $\bigcap \mathscr{F} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$.
De manera similar si $M \in \bigcup \mathscr{F}$ y $N \leq M$, entonces existe $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$ tal que $M \in \mathscr{C}$. Y como $N \leq M$ tenemos que $N \in \mathscr{C}$. De donde $N \in \bigcup \mathscr{F}$. Por lo tanto $\bigcup \mathscr{F} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$.

2) Es fácil ver que $\bigcap \mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$, entonces $\mathscr{A} \subseteq \bigcap \mathscr{F}$. Por lo tanto $\bigwedge \mathscr{F} = \bigcap \mathscr{F}$.

Ahora veamos que $\bigvee \mathscr{F} = \bigcup \mathscr{F}$. Notemos que $\mathscr{C} \subseteq \bigcup \mathscr{F}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{B} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ para toda $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$, entonces $\bigcup \mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$. Por lo tanto $\bigvee \mathscr{F} = \bigcup \mathscr{F}$. ■

Escribimos 0 y 1 para denotar $\{(0)\}$ y $R - mod$ respectivamente.

Como consecuencia de la Observación anterior tenemos que $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ es una gran retícula completa.

Proposición 2.0.2. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ es la clase de todos los módulos N tal que existe un monomorfismo distinto de cero de N a algún elemento de $\mathscr{C}$.

Demostración. Sea $\mathscr{K} = \{N \mid \text{existe un monomorfismo distinto de cero } N \rightarrowtail C \text{ con } C \in \mathscr{C}\}$.

- Primero veamos que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Sea $N \in \mathscr{K}$ y sea $M \leq N$. Veamos que $M \in \mathscr{K}$. Como $M \leq N$ podemos considerar el morfismo inclusión $M \hookrightarrow N$ que es un monomorfismo distinto de cero. Y dado que $N \in \mathscr{K}$, tenemos que existe un monomorfismo distinto de cero $N \rightarrowtail C$ con $C \in \mathscr{C}$. Entonces la composición $M \hookrightarrow N \rightarrowtail C$ es un monomorfismo distinto de cero con $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $M \in \mathscr{K}$ y entonces, $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Notemos también que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$ ya que si $C \in \mathscr{C}$, podemos considerar el morfismo identidad $id_C : C \to C$ el que es un monomorfismo. Luego $C \in \mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$.

- Ahora veamos que $\mathscr{K}$ es la menor clase que contiene a $\mathscr{C}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y sea $N \in \mathscr{K}$, entonces existe un monomorfismo distinto de cero $N \rightarrowtail C$ con $C \in \mathscr{C}$, entonces $C \in \mathscr{D}$ y como $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, se sigue que $N \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$, es decir, $\mathscr{K}$ es la menor clase que contiene a $\mathscr{C}$.

Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{\leq}(\mathscr{C})$. ■

En la siguiente proposición vamos a demostrar que cada $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tiene un único pseudocomplemento.

Proposición 2.0.3. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Entonces $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ es la clase $\mathscr{A}$ de todos los módulos M tal que si $N \in \mathscr{C}$ y $f : N \to M$ es un monomorfismo, entonces $N = 0$. Más aún $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ es un pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ y sea $\mathscr{A} = \{M \mid N \rightarrowtail M \text{ con } N \in \mathscr{C}, \text{ entonces } N = 0\}$.

- Veamos por contradicción que $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Sea $M \in \mathscr{A}$ y supongamos que existe $N \leq M$ tal que $N \notin \mathscr{A}$, entonces existe un monomorfismo distinto de cero $N' \rightarrowtail N$ tal que $N' \in \mathscr{C}$ y $N' \neq 0$. Como $N \leq M$ podemos considerar el morfismo inclusión $N \hookrightarrow M$ que es un monomorfismo. Entonces tenemos que la composición $N' \rightarrowtail N \hookrightarrow M$ es un monomorfismo. Pero como $M \in \mathscr{A}$ y $N' \in \mathscr{C}$, se sigue que $N' = 0$ que es una contradicción. Entonces $N \in \mathscr{A}$ y por lo tanto $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$.
- Ahora veamos que $\mathscr{C} \cap \mathscr{A} = 0$. Sea $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{A}$, entonces $M \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathscr{A}$. Consideremos el morfismo identidad $M \rightarrowtail M$, y como $M \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathscr{A}$, entonces $M = 0$. Por lo tanto $\mathscr{C} \cap \mathscr{A} = 0$.
- Por último veamos que $\mathscr{A}$ es pseudocomplemento fuerte, es decir, $\mathscr{A}$ es la mayor clase en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{A} = 0$. Por contradicción, sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ pseudocomplemento de $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{D} \nsubseteq \mathscr{A}$, entonces existe $M \in \mathscr{D}$ tal que $M \notin \mathscr{A}$. Entonces existe $0 \neq N \leq M$ con $N \in \mathscr{C}$, y como $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, se sigue que $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, es decir, $N = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}$

Por lo tanto $\mathscr{A} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. ■

Proposición 2.0.4. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Entonces $(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$ es la clase de todos los módulos N, tal que para cada monomorfismo distinto de cero de un $R-$*módulo* K a N, existe $U \in \mathscr{C}$ y un monomorfismo distinto de cero de U a K.

Demostración. Por la Proposición 2.0.3 tenemos que

$$(\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} = \{N \in R-mod \mid f : K \rightarrowtail N \text{ con } K \in \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}, \text{ entonces } K = 0\}.$$

Sea $N \in (\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, entonces dado $f : K \rightarrowtail N$ con $K \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$ se cumple que $K = 0$. Como $K \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$, dado $g : K' \rightarrowtail K$ con $K' \in \mathscr{C}$, entonces $K' = 0$. Entonces

$$(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \left\{ N \in R-mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{El único monomorfismo} \\ K \rightarrowtail N \text{ con } K \in \mathscr{C}^{\perp_\leq} \text{ es el cero} \end{array} \right\},$$

entonces

$$(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \left\{ N \in R-mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Para cada monomorfismo diferente del cero} \\ K \rightarrowtail N, K \notin \mathscr{C}^{\perp_\leq} \end{array} \right\}$$

Notemos que $K \notin \mathscr{C}^{\perp_\leq}$ si y sólo si existe un monomorfismo diferente del cero $U \rightarrowtail K$ tal que $U \in \mathscr{C}$. ■

Definición 2.0.7. Una clase $\mathscr{C}$ de módulos es llamada clase cohereditaria si es cerrada bajo cocientes (imágenes homomorfas). Denotamos por $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ a la clase de las clases de $R-módulos$ cerrados bajo cocientes.

Los siguientes son ejemplos de clases cohereditarias:

Ejemplo 17. La clase de los módulos finitamente generados.

Ejemplo 18. La clase de los grupos abelianos divisibles.

Existe un orden parcial en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ definido por: $\mathscr{C}_1 \leq \mathscr{C}_2$ si y sólo si $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2$.

Sea $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases cohereditarias. Definimos el ínfimo de la familia por

$$\bigwedge_{i\in I} \mathscr{C}_i = \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i.$$

Así tenemos que $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es una gran retícula completa.

Además notamos que si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases cohereditarias, entonces

$$\bigvee_{i\in I} \mathscr{C}_i = \bigcup_{i\in I} \mathscr{C}_i.$$

Proposición 2.0.5. La clase cohereditaria generada por la clase $\mathscr{C} \subseteq R-mod$, denotada por $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es la clase de todos los módulos N tal que existe un epimorfismo de algún elemento $M \in \mathscr{C}$ a N.

Demostración. Consideremos $\mathscr{K} = \{N \mid \text{existe un epimorfismo } M \twoheadrightarrow N \text{ con } M \in \mathscr{C}\}$.

- Primero veamos que $\mathscr{K}$ es una clase cohereditaria. Sea $U \in \mathscr{K}$ y sea V un cociente de U. Veamos que $V \in \mathscr{K}$. Como $U \in \mathscr{K}$, entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow U$ con $M \in \mathscr{C}$ y como V es un cociente de U se sigue que la composición $M \twoheadrightarrow U \twoheadrightarrow V$ es un epimorfismo con $M \in \mathscr{C}$. Entonces $V \in \mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Notemos también que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$ ya que si $M \in \mathscr{C}$, podemos considerar la función identidad de M, $id_M : M \to M$ que es un epimorfismo. Entonces $M \in \mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$.

- Ahora veamos que $\mathscr{K}$ es la menor clase en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{K}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y sea $N \in \mathscr{K}$, entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow N$ con $M \in \mathscr{C}$, entonces $M \in \mathscr{D}$, entonces $N \in \mathscr{D}$ ya que $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}$.

Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. ■

Proposición 2.0.6. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $\mathscr{C}$ tiene un único pseudocomplemento $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, el cual es la clase $\mathscr{K}$ de todos los módulos N, tal que si $f : N \twoheadrightarrow C$ es un epimorfismo con $C \in \mathscr{C}$, entonces $C = 0$. Más aún, $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es un pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$.

Demostración. Sea $\mathscr{K} = \{N \mid N \twoheadrightarrow C \text{ con } C \in \mathscr{C} \text{ entonces } C = 0\}$.

- Veamos que $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Sea $N \in \mathscr{K}$ y A un cociente de N. Veamos que $A \in \mathscr{K}$. Esto es, dado un epimorfismo $A \twoheadrightarrow C$ con $C \in \mathscr{C}$, entonces $C = 0$. Como A es un cociente de N, se sigue que la composición $N \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow C$ es un epimorfismo. Pero $N \in \mathscr{K}$, de donde $C = 0$. Entonces $A \in \mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{K} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

- Ahora veamos que $\mathscr{C} \cap \mathscr{K} = 0$. Sea $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{K}$, entonces tomando el morfismo identidad $N \twoheadrightarrow N$ que es un epimorfismo y como $N \in \mathscr{C}$, se sigue que $C = 0$. Por lo tanto $\mathscr{C} \cap \mathscr{K} = 0$.

- Por último veamos que $\mathscr{K}$ es pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, es decir, $\mathscr{K}$ es la mayor clase cohereditaria tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{K} = 0$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = 0$. Tomemos $D \in \mathscr{D}$ y un epimorfismo $D \twoheadrightarrow E$ con $E \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tenemos que $E \in \mathscr{D}$. Entonces $E \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, entonces $E = 0$, de donde se sigue que $D \in \mathscr{K}$. Por lo tanto $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{K}$.

Por lo tanto $\mathscr{K} = \mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow}$. ∎

Observación 2.2. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $N' \notin \mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow}$ si y sólo si existe un epimorfismo distinto de cero $N' \twoheadrightarrow N''$, con $N'' \in \mathscr{C}$.

Teorema 2.0.1. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow}$ es la clase de todos los módulos N, tal que todo cociente diferente distinto de cero M de N tiene un cociente distinto de cero en $\mathscr{C}$.

Demostración. Por la Proposición 2.0.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} &= \{N \mid N \twoheadrightarrow M \text{ con } M \in \mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow}, \text{ entonces } M = 0\} \\
&= \{N \mid N \twoheadrightarrow M \text{ con } M \neq 0, \text{ entonces } M \notin \mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow}\}.
\end{aligned}$$

Y por la Observación 2.2 como $M \notin \mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow}$, existe un cociente distinto de cero L de M con $L \in \mathscr{C}$. ∎

2.0.2. Clases naturales y conaturales de módulos

Definición 2.0.8. Una clase $\mathscr{C} \subseteq R-mod$ es una clase natural si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Denotamos por $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ a la retícula de todas las clases naturales en $R - mod$.

Observación 2.3. Toda clase natural es una clase hereditaria.

Teorema 2.0.2. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es una clase natural.

Demostración. En la Proposición 2.0.3 se demostró que $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo submódulos. Veamos que $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, es decir, si $N \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$, entonces $E(N) \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$. Sea $K \in \mathscr{C}$ tal que existe un monomorfismo $f : K \rightarrowtail E(N)$, veamos que $K = 0$. Supongamos que $K \neq 0$, entonces $0 \neq f(K) \leq E(N)$ y como $E(N)$ es la cápsula inyectiva de N, se sigue que $f(K) \cap N \neq 0$. Luego, como $f(K) \cap N \leq N \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$, podemos considerar el morfismo inclusión $f(K) \cap N \hookrightarrow N$ que es monomorfismo. Además $f(K) \cong K$ por lo que $f(K) \in \mathscr{C}$, y como $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, se sigue que $f(K) \cap N \in \mathscr{C}$ lo que implica que $f(K) \cap N = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $K = 0$ y en consecuencia $E(N) \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$. Ahora veamos que $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo sumas directas, es decir, veamos que si $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia en $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ entonces $\bigoplus_{\alpha \in I} N_\alpha \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia en $\mathscr{C}^{\perp_\leq}$ y supongamos que existe $K \rightarrowtail \bigoplus_{\alpha \in I} N_\alpha$ con $K \in \mathscr{C}$. Si $K = 0$ terminamos. Si $K \neq 0$, sea $k \in K \backslash \{0\}$ tal que $k = n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + \cdots + n_{\alpha_s}$ con $s = min\{r \in \mathbb{N} \mid k = n_{\alpha_1} + \cdots + n_{\alpha_r} \text{ con } n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i} \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, r\}\}$. Sea $t \in R$ tal que $tk = 0$, entonces $tn_{\alpha_1} + tn_{\alpha_2} + \cdots + tn_{\alpha_s} = 0$ y por la elección de k se tiene que $tn_{\alpha_1} = tn_{\alpha_2} = \cdots = tn_{\alpha_s} = 0$, es decir, $(0 : n_{\alpha_1}) = (0 : n_{\alpha_2}) = \cdots = (0 : n_{\alpha_s})$. Ya que en caso contrario si existiera $u \in (0 : n_{\alpha_i})$ tal que $u \notin (0 : n_{\alpha_j})$ con $i \neq j$ tendríamos que $uk = un_{\alpha_1} + un_{\alpha_2} + \cdots + un_{\alpha_i} + \cdots + un_{\alpha_j} + \cdots + un_{\alpha_s} \in K$, lo cual sería una contradicción pues uk tendría una representación menor a la de k. También notemos que $(0 : k) = \bigcap_{i=1}^{s} (0 : n_{\alpha_i})$. Entonces se sigue que $(0 : k) = (0 : n_{\alpha_1})$, de donde $Rk \cong \dfrac{R}{(0 : k)} = \dfrac{R}{(0 : n_{\alpha_1})} \cong Rn_{\alpha_1} \leq N_{\alpha_1} \in \mathscr{C}^{\perp_\leq}$, entonces existe $Rk \rightarrowtail N_{\alpha_1}$, entonces $Rk = 0$, entonces $k = 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $K = 0$. ■

Corolario 2.0.1. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es una clase natural.

Demostración. Por la Proposición 2.0.3 tenemos que $\mathscr{C}^{\perp_\leq} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces por el Teorema 2.0.2 $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \in \mathscr{L}_{\{\leq, \bigoplus, E\}}$. ■

Recordemos que una clase de módulos $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones esenciales si dado $N \in \mathscr{C}$ y $N \leq_{es} M$, entonces $M \in \mathscr{C}$.

Corolario 2.0.2. Toda clase natural es cerrada bajo extensiones esenciales.

Proposición 2.0.7. Si $\mathcal{N}$ es una clase natural, entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Por la Observación 2.3 tenemos que si $\mathcal{N} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$, entonces $\mathcal{N} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ y además por la Proposición 2.0.3 $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ está fuertemente pseudocomplementada. Luego por la Proposición 2.0.1 (1), $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.

Ahora veamos que $\mathcal{N} \supseteq (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Sea $M \in (\mathcal{N}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, entonces por la Proposición 2.0.4 para cada $0 \neq L \leq M$ existe $0 \neq K \leq L$ tal que $K \in \mathcal{N}$. Consideremos $\{K_\alpha\}_{\alpha\in X}$ la familia de todos submódulos de M tales que K_α está en $\mathcal{N}$ para cada $\alpha \in X$. Como $\mathcal{N} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$, entonces $\bigoplus\limits_{\alpha\in X} K_\alpha \in \mathcal{N}$. Luego, por el Corolario 2.0.2 es suficiente demostrar que $\bigoplus\limits_{\alpha\in X} K_\alpha \leq_{es} M$. Sea $0 \neq U \leq N$, entonces existe $0 \neq U' \leq U$ tal que U' está en $\mathcal{N}$, entonces $U' \cap \bigoplus\limits_{\alpha\in X} K_\alpha \neq 0$, entonces $U \cap \bigoplus\limits_{\alpha\in X} K_\alpha \neq 0$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{\alpha\in X} K_\alpha$ es esencial en M. ■

Observación 2.4. Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$. Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{B}^{\perp_\leq} \subseteq \mathscr{A}^{\perp_\leq}$.

Demostración. Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$. Como $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ es fuertemente pseudocomplementada, por la Proposición 2.0.1 (2), $\mathscr{B}^{\perp_\leq} \subseteq \mathscr{A}^{\perp_\leq}$. ■

Proposición 2.0.8. Dado $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es la clase natural generada por $\mathscr{C}$.

Demostración. Por la Proposición 2.0.7 tenemos que $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Sea $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Entonces por la Observación 2.4 $\mathscr{D}^{\perp_\leq} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_\leq}$. Por lo tanto $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \subseteq (\mathscr{D}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Pero por Proposición 2.0.7, como $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ se sigue que $\mathscr{D} = (\mathscr{D}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Luego $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $(\mathscr{C}^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es la clase natural generada por $\mathscr{C}$. ■

Proposición 2.0.9. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$, entonces $\mathscr{C}^{\perp_\leq} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}}$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. Como $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ está fuertemente pseudocomplementada, existe un elemento mayor $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}}$ en $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}} =$

0. Por otro lado $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$, de donde existe un elemento mayor $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ tal que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq}} = 0$. Notemos que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$ ya que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ y la mayor clase que cumple $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}} = 0$ en $\in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ es $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}}$. De manera análoga se demuestra que $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\oplus,E}}$. Por lo tanto $\mathscr{C}^{\perp_{\leq}} = \mathscr{C}^{\perp_{\leq,\bigoplus,E}}$. ■

Teorema 2.0.3. $\mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}} = Skel(\mathscr{L}_{\{\leq\}})$

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. Por la Proposición 2.0.7 tenemos que $\mathscr{C} = (\mathscr{C}^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$, es decir, $\mathscr{C}$ es el pseudocomplemento de un elemento en $\mathscr{L}_{\leq}$. Por lo tanto $\mathscr{C} \in Skel(\mathscr{C}_{\{\leq\}})$. Ahora, si $\mathscr{C} \in Skel(\mathscr{L}_{\{\leq\}})$, entonces existe $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ tal que $\mathscr{C} = \mathscr{A}^{\perp}$. Entonces por el Teorema 2.0.2 se sigue que $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$. ■

Definición 2.0.9. Denotamos al esqueleto de $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ por $R-conat$. Los elementos de $R-conat$ son llamados clases conaturales.

A continuación damos una condición que nos ayudará a decidir cuando una clase de módulos es conatural.

Definición 2.0.10. Sea $\mathscr{A}$ una clase de módulos, decimos que $\mathscr{A}$ satisface la condición (CN) si, siempre que cada cociente distinto de cero de M comparta un cociente distinto de cero con algún módulo en $\mathscr{A}$, se sigue que $M \in \mathscr{A}$. Es decir,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ A \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K \end{tikzcd}$$

con $A \in \mathscr{A}$ y $K \in R-mod$, entonces $M \in \mathscr{A}$.

Teorema 2.0.4. Sea $\mathscr{A} \subseteq R-mod$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1) $\mathscr{A} \in R-conat$.

2) $\mathscr{A}$ satisface (CN).

3) $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathscr{A} \in R - conat$, entonces existe $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{A} = \mathscr{D}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{M \mid M \twoheadrightarrow L \text{ con } L \in \mathscr{D}, \text{ entonces } L = 0\} \\ &= \{M \mid M \twoheadrightarrow L \text{ con } L \neq 0, \text{ entonces } L \notin \mathscr{D}\}. \end{aligned}$$

Sea M' un cociente distinto de cero de M y supongamos que $M' \in \mathscr{D}$, entonces por hipótesis existe $A \in \mathscr{A}$, $0 \neq X \in R - mod$ y epimorfismos $M' \twoheadrightarrow X \twoheadleftarrow A$. Como $A \in \mathscr{A}$, se sigue que $X \notin \mathscr{D}$. Pero $M' \in \mathscr{D}$ y $\mathscr{D} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Entonces $X \in \mathscr{D}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M' \notin \mathscr{D}$ y en consecuencia $M \in \mathscr{A}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Primero veamos que $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Sea $C \in \mathscr{A}$ y sea B diferente de cero un cociente de C. Veamos que $B \in \mathscr{A}$, es decir, para cada cociente distinto de cero N de B, existe $A \in \mathscr{A}$, $0 \neq K \in R - mod$ y epimorfismos $N \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow A$. Notemos que si hacemos $A = C$ y $K = N$ tenemos que $N \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C$. Por lo tanto $B \in \mathscr{A}$ y entonces $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Ahora veamos que $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Por La Proposición 2.0.1 (1) tenemos que $\mathscr{A} \subseteq (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Por lo que resta probar que $\mathscr{A} \supseteq (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Sea $N \in (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, entonces por Teorema 2.0.1, para cada cociente distinto de cero H de N existe un cociente distinto de cero A de H tal que $A \in \mathscr{A}$. Entonces $N \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow A \twoheadleftarrow A$, de donde $N \in \mathscr{A}$. Por lo tanto $\mathscr{A} \supseteq (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ con $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Como $\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \in Skel(\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}})$, entonces $\mathscr{A}$ es el pseudocomplemento fuerte de $\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Entonces $\mathscr{A} \in R{-}conat$. ■

Lema 2.0.1. (Propiedad Universal del Conúcleo). Consideremos la sucesión exacta corta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ y un morfismo distinto de cero $h : B \to D$ tal que $hf = 0$. Entonces existe un morfismo $\varphi : C \to D$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & 0 \\ & & D & & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Afirmamos que $Ker(g) \subseteq Ker(h)$. En efecto, sea $b \in Ker(g)$. Como la sucesión es exacta, tenemos que $Ker(g) = Im(f)$, por lo que existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Entonces, $0 = h(f(a) = h(b)$, es decir, $b \in Ker(h)$. Por lo tanto $Ker(g) \subseteq Ker(h)$.

Definamos $\varphi : C \to D$ por $\varphi(c) = h(b)$, con $g(b) = c$. Veamos que φ está bien definida. Sean $c_1, c_2 \in C$ tal que $c_1 = c_2$, entonces existen $b_1, b_2 \in B$ tal que $g(b_1) = c_1$ y $g(b_2) = c_2$. Luego, $g(b_1) = g(b_2)$, de donde $g(b_1 - b_2) = 0$, es decir, $b_1 - b_2 \in Ker(g)$. Como $Ker(g) \subseteq Ker(h)$, se sigue que $b_1 - b_2 \in Ker(h)$, es decir, $h(b_1 - b_2) = 0$. Por lo tanto $h(b_1) = h(b_2)$ y en consecuencia φ está bien definida.

Ahora veamos que φ es morfismo. Sea $r \in R$ y sean $c_1, c_2 \in C$, entonces existen $b_1, b_2 \in B$ tal que $g(b_1) = c_1$ y $g(b_2) = c_2$. Entonces $\varphi(rc_1 + c_2) = \varphi(rg(b_1) + g(b_2)) = \varphi(g(rb_1 + b_2)) = h(rb_1 + b_2) = rh(b_1) + h(b_2) = r\varphi(c_1) + \varphi(c_2)$. Por lo tanto φ es morfismo.

Por último veamos que $\varphi g = h$. Sea $b \in B$, entonces $(\varphi g)(b) = \varphi(g(b)) = h(b)$. Por lo tanto $\varphi g = h$. ■

Teorema 2.0.5. Sea $\mathscr{C}$ una clase conatural, entonces $\mathscr{C}$ es cerrada bajo:

1) Imágenes homomorfas.

2) Extensiones.

3) Epimorfismos superfluos.

Demostración. 1) Por Definición 2.0.7.

2) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta con A, $C \in \mathscr{C}$. Veamos que $B \in \mathscr{C}$. Sea $B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B'$ un epimorfismo diferente de 0, entonces tenemos dos casos: a) $h \circ f$ no es suprayectiva, o b) $h \circ f$ es suprayectiva.
Si ocurre a), entonces podemos tomar el epimorfismo canónico $B' \overset{v}{\twoheadrightarrow} \frac{B'}{(h \circ f)(A)}$ que es distinto de cero. Notemos que $0 \to f(A) \xrightarrow{h} B' \xrightarrow{v} \frac{B'}{(h \circ f)(A)} \to 0$ es una sucesión exacta corta ya que $Im\, h = h(f(A)) = (h \circ f)(A) = Ker\, v$. Entonces $v \circ (h \circ f) = 0$.

Así, por la Propiedad Universal del Conúcleo existe un morfismo diferente de cero $C \xrightarrow{\varphi} \frac{B'}{(h \circ f)(A)}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] \arrow[ddl, "\varphi"] & 0 \\
 & & B' \arrow[d, two heads, "v"] & & \\
 & & \frac{B'}{(h \circ f)(A)} & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, $\varphi \circ g = h \circ v$. Como $h \circ v$ es epimorfismo tenemos que $\varphi \circ g$ es epimorfismo, de donde φ es epimorfismo. Así hemos probado que un cociente distinto de cero B' de B comparte un cociente distinto de cero con un elemento $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $B \in \mathscr{C}$.

Si ocurre b), entonces tenemos que B' es un cociente de un elemento en $\mathscr{C}$ y por lo tanto $B \in \mathscr{C}$.

3) Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta con $C \in \mathscr{C}$ y $f(A) << B$, es decir, $f(A)$ es superfluo en B. Veamos que $B \in \mathscr{C}$. Consideremos un epimorfismo diferente de cero $B \overset{h}{\twoheadrightarrow} B'$. Entonces tenemos dos casos: a) $h \circ f = 0$, o b) $h \circ f \neq 0$.

Si ocurre a), entonces por la Propiedad Universal del Conúcleo existe un morfismo $C \xrightarrow{\varphi} B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & 0 \\
 & & B' & &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $h = \varphi \circ g$. Como h es un epimorfismo, entonces $\varphi \circ g$ es un epimorfismo. Luego φ es un epimorfismo. Entonces B' comparte un cociente distinto de cero con un elemento en $\mathscr{C}$. Por lo tanto $B \in \mathscr{C}$.

Si ocurre b), entonces f no es un epimorfismo. En efecto, si f fuera un epimorfismo, entonces $f(A) = B$, pero $Ker\ h \leq B$, luego $f(A) + Ker\ h = B$. Y dado que $f(A) \ll B$ tenemos que $Ker\ h = B$, así que $h = 0$, lo cual es una contradiccin. Por lo que si $h \circ f \neq 0$, entonces $h \circ f$ no es un epimorfismo, entonces $\frac{B'}{(h \circ f)(A)}$ es un cociente distinto de cero de B', y así un cociente distinto de cero de B. Por lo que estamos en el caso 3a). $\blacksquare$

Capítulo 3

El álgebra de boole $R - conat$

Lema 3.0.1. Sea $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases conaturales. Entonces $\bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$ es una clase conatural.

Demostración. Veamos que $\bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$ satisface la condición CN. Supongamos que $M \in R - mod$ es tal que cada cociente distinto de cero N de M comparte un cociente distinto de cero X con algún elemento $A \in \bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$. Como $A \in \bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$, entonces $A \in \mathscr{C}_i$ para cada $i \in I$ y como $\mathscr{C}_i \in R - conat$ para cada $i \in I$, se sigue que $M \in \mathscr{C}_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $M \in \bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$. ■

Definición 3.0.1. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, denotamos por $\xi_{R-conat}(\mathscr{C})$ a la clase conatural generada por $\mathscr{C}$.

Proposición 3.0.1. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} = \xi_{R-conat}(\mathscr{C})$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Como $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ está fuertemente pseudocomplementada, por la Proposición 2.0.1 (1), $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow}$. Además $(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} \in R - conat$. Sea $\mathscr{D} \in R - conat$ tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Entonces por la Proposición 2.0.1 (2) tenemos que $(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} \subseteq (\mathscr{D}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow}$. Pero por el Teorema 2.0.4 como $\mathscr{D} \in R - conat$, entonces $\mathscr{D} = (\mathscr{D}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $(\mathscr{C}^{\perp_\twoheadrightarrow})^{\perp_\twoheadrightarrow} \subseteq \mathscr{D}$. ■

Observación 3.1. $R - conat$ es una gran retícula completa, donde:

1. $\mathscr{C}_1 \leq \mathscr{C}_2$ si y sólo si $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2$,

2. $0 = \{(0)\}$,

3. $1 = R - mod$,

4. $\bigwedge_{i \in I} \mathscr{C}_i = \bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$ y

5. $\bigvee_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)$.

Demostración. Veamos que $\bigvee_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)$. Dado que $\mathscr{C}_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i$ para cada $i \in I$, se sigue que $\mathscr{C}_i \subseteq \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)$ para cada $i \in I$. Supongamos que existe $\mathscr{D} \in R - conat$ tal que $\mathscr{C}_i \subseteq \mathscr{D}$ para cada $i \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i \subseteq \mathscr{D}$, pero como $\xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)$ es la menor clase conatural que contiene a $\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i$ tenemos que $\xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right) \subseteq \mathscr{D}$. Por lo tanto $\bigvee_{i \in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)$. ∎

Proposición 3.0.2. Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i \in I}$ es una familia de clase conaturales, entonces

$$\bigvee_{\substack{R-conat \\ i \in I}} \mathscr{C}_i = \left\{ N \in R - mod \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall N \twoheadrightarrow M \neq 0, \exists M \twoheadrightarrow M' \neq 0 \\ \text{con } M' \in \mathscr{C}_\rho \text{ para algún } \rho \in I \end{array} \right\}.$$

Demostración. Por la Observación 3.1 y la Proposición 3.0.1 tenemos que

$$\bigvee_{\substack{R-conat \\ i \in I}} \mathscr{C}_i = \xi_{R-conat}\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right) = \left(\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}},$$

pero por el Teorema 2.0.1

$$\left(\left(\bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}}\right)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \left\{ N \in R - mod \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall N \twoheadrightarrow M \neq 0, \exists M \twoheadrightarrow M' \neq 0 \\ \text{con } M' \in \mathscr{C}_\rho \text{ para algún } \rho \in I \end{array} \right\}.$$

∎

Teorema 3.0.1. $R - conat$ es una gran retícula complementada y distributiva.

Demostración. Veamos que $R - conat$ es complementada. Afirmamos que $\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es el complemento de $\mathscr{C}$ en $R - conat$. En efecto, si $\mathscr{C} \in R - conat$, entonces $\mathscr{C} \in Skel(\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}) \subseteq \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$, es decir, $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y por la Proposición 2.0.6 se sigue que $\mathscr{C} \bigwedge \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = 0$. Ahora, si $M \notin \mathscr{C} \bigvee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, entonces por la Proposición 3.0.2 existiría un cociente distinto de cero N de M tal que todo cociente distinto de cero de N no estaría en $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Pero que $N \notin \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ implica que existe un cociente distinto de cero N' de N, con $N' \in \mathscr{C}$. Así que N tiene un cociente distinto de cero en $\mathscr{C}$, que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{C} \bigvee \mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = 1$.
Más aún, para toda $\mathscr{C} \in R - conat$ los siguientes enunciados son verdaderos:

1) $\mathscr{C} = (\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

2) $\mathscr{C} \bigwedge \mathscr{D} = 0$ si y sólo si $\mathscr{D} \leq \mathscr{C}^{R-conat}$.

En efecto, sea $\mathscr{C} \in R - conat$, entonces $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Luego por la Proposición 2.0.1 (1), $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Por otro lado, como $\mathscr{C} \in R - conat$, entonces existe $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{C} = \mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Y como $\mathscr{C} \subseteq (\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ entonces tenemos que $\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq ((\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Ahora, puesto que $((\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es el pseudocomplemento cohereditario de $(\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y $\mathscr{A} \subseteq (\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ tenemos que $\mathscr{A} \cap ((\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = 0$, pero $\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es el mayor elemento en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = 0$. Luego $(\mathscr{C}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = ((\mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \mathscr{A}^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \mathscr{C}$. Por lo tanto se cumple 1).
Para 2), se sigue de la definición de pseudocomplemento.
También notemos que si $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in R - conat$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para $\mathscr{B} \in R - conat$:

a) $\mathscr{C} \bigwedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$.

b) $\mathscr{C} \bigwedge \mathscr{B} \bigwedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}} = 0$.

En efecto, supongamos que $\mathscr{C} \bigwedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$ y sea $M \in \mathscr{C} \bigwedge \mathscr{B} \bigwedge \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}$, entonces $M \in \mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}$ y $M \in \mathscr{C} \bigwedge \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$. Luego, puesto que M es un cociente de si

mismo, se sigue que $M=0$. Por lo tanto $a)\Rightarrow b)$.
Ahora supongamos que $\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}=0$ y que existe $M\in\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}$ tal que $M\notin\mathscr{D}$, entonces por el Teorema 2.0.4 existe un cociente distinto de cero N de M tal que para cada cociente distinto de cero N' de N, $N'\notin\mathscr{D}$. Por lo tanto $N\in\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}$. Pero $M\in\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}$, de donde $N\in\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}$ y por lo tanto $N\in\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}=0$ que es una contradicción. Por lo tanto $M\in\mathscr{D}$, y así $b)\Rightarrow a)$.
Por lo tanto existe un elemento mayor $\mathscr{B}=\left(\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}\right)^{\perp_{R-conat}}$ tal que $\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{B}\leq\mathscr{D}$.
Por último veamos que $R-conat$ es distributiva. Sean $\mathscr{A},\mathscr{K},\mathscr{C}\in R-conat$ y consideremos $\mathscr{D}=(\mathscr{A}\bigwedge\mathscr{C})\bigvee(\mathscr{K}\bigwedge\mathscr{C})$. Como $\mathscr{A}\bigwedge\mathscr{C}\leq\mathscr{D}$ y $\mathscr{K}\bigwedge\mathscr{C}\leq\mathscr{D}$ se sigue que $\mathscr{A}\bigwedge\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}=0$ y $\mathscr{K}\bigwedge\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}=0$, entonces $\mathscr{A}\leq\left(\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}\right)^{\perp_{R-conat}}$ y $\mathscr{K}\leq\left(\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}\right)^{\perp_{R-conat}}$. Así $\mathscr{C}\bigwedge(\mathscr{A}\bigvee\mathscr{K})\leq\mathscr{C}\bigwedge\left(\mathscr{C}\bigwedge\mathscr{D}^{\perp_{R-conat}}\right)^{\perp_{R-conat}}\leq\mathscr{D}=(\mathscr{A}\bigwedge\mathscr{C})\bigvee(\mathscr{K}\bigwedge\mathscr{C})$. Luego $R-conat$ es distributiva ya que la otra desigualdad siempre se cumple. ■

Proposición 3.0.3. La siguientes condiciones son equivalentes par un anillo R.

1) $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es distributiva y complementada.

2) $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}=R-conat$.

3) R es el anillo trivial.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Supongamos que $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es distributiva y complementada, entonces $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ coincide con su esqueleto. Por lo tanto $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}=R-conat$.

2) $\Rightarrow$ 1). Se sigue del Teorema 3.0.1.

3) $\Rightarrow$ 1). Es claro.

2) $\Rightarrow$ 3). Supongamos que $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}=R-conat$. Si $\mathscr{M}\subseteq R-mod$, entonces

$$\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{M})=\{N\in R-mod\mid\exists\ M\twoheadrightarrow N \text{ con } M\in\mathscr{M}\}$$

y por otra parte

$$\xi_{R-conat}(\mathscr{M}) = \left\{ N \in R - mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\ N \twoheadrightarrow N' \neq 0, \exists\ N' \twoheadrightarrow N'' \twoheadleftarrow M \\ \text{con } M \in \mathscr{M},\ N'' \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Afirmamos que si $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}} = R - conat$, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) = \xi_{R-conat}(M)$ para cada $M \in R - mod$. En efecto, como $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}} = R - conat$, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ es una clase conatural que contiene a M, pero $\xi_{R-conat}(M)$ es la menor clase conatural que contiene a M. Luego $\xi_{R-conat}(M) \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$. De manera similar, si $\xi_{R-conat}(M) \in R{-}conat = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$, entonces $\xi_{R-conat}(M)$ es una clase cohereditaria que contiene a M, pero $\xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ es la menor clase cohereditaria que contiene a M. De donde $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) \subseteq \xi_{R-conat}(M)$.
Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \{N \in R - mod \mid \exists\ M \twoheadrightarrow N \text{ con } M \in \mathscr{M}\} &= \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{M}) = \xi_{R-conat}(\mathscr{M}) \\ &= \left\{ N \in R - mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\ N \twoheadrightarrow N' \neq 0, \exists\ N' \twoheadrightarrow N'' \twoheadleftarrow M \\ \text{con } M \in \mathscr{M},\ N'' \neq 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En particular, si $\mathcal{S}$ es la clase de módulos simples, entonces

$$\mathcal{S} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{S}) \text{ y } \xi_{R-conat}(\mathcal{S}) = \{M \in R - mod \mid M \text{ es un módulo MAX}\}.$$

donde un módulo distinto de cero M se llama módulo MAX si cada submódulo distinto de cero N de M tiene submódulos máximos. En efecto, primero veamos que $\mathcal{S} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{S})$. Sea $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{S})$, entonces existe un epimorfismo distinto de cero $f : S \to M$ con $S \in \mathcal{S}$. Como S es simple, por el Lema de Schur 1.1.6, $f : S \to M$ es un monomorfismo. Luego $S \cong M$ y en consecuencia M es simple. Por lo tanto $M \in \mathcal{S}$. Así, hemos mostrado que $\mathcal{S} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{S})$.
Ahora veamos que $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) = \{M \in R - mod \mid M \text{ es un módulo MAX}\}$. Sea $M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$ distinto de cero y sea N un submódulo propio distinto de cero de M. Veamos que N está contenido en un submódulo máximo de M. Como

$M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & M/N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ S \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K \end{tikzcd}$$

con $S \in \mathcal{S}$ y $K \in R - mod$. Como S es simple, entonces por el Lema de Schur 1.1.6, $S \cong K$. Luego K es simple y como es cociente de M, $K = M/N'$ con N' submódulo máximo de M. Así, N está contenido en N'. Por lo tanto $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) = \{M \in R - mod \mid M \text{ es un módulo MAX}\}$.
Luego

$$\mathcal{S} = \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathcal{S}) = \xi_{R-conat}(\mathcal{S}) = \{M \in R - mod \mid M \text{ es un módulo MAX}\}.$$

Como todo módulo finitamente generado es un módulo MAX, cada uno es simple. Pero esto sólo es posible si R es el anillo trivial. ■

Proposición 3.0.4. Sea $\mathcal{S}$ la clase de módulos simples. Entonces $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) = \xi_{R-conat}(R)$.

Demostración. Primero veamos que $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) \subseteq \xi_{R-conat}(R)$. Sea $M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$, entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ S \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K \end{tikzcd}$$

con $S \in \mathcal{S}$ y $K \in R - mod$. Como S es simple, entonces $S = Rx$ con x en S distinto de cero. Luego tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ R \arrow[r, two heads, "v \neq 0"] & Rx = S \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $M \in \xi_{R-conat}(R)$, es decir, $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) \subseteq \xi_{R-conat}(R)$.

Ahora veamos que $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) \supseteq \xi_{R-conat}(R)$. Sea $M \in \xi_{R-conat}(R)$, entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ R \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K. \end{tikzcd}$$

Como K es cociente de R, tenemos que $K = Rx$. Y además, Rx tiene cocientes simples. De donde tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ R \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K = Rx \arrow[d, "v \neq 0"] \\ S \arrow[r, two heads, "id_S"] & S \end{tikzcd}$$

con S simple. Así $M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$. Por lo tanto $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) \supseteq \xi_{R-conat}(R)$. ∎

3.0.1. Los átomos en $R - conat$

Definición 3.0.2. Sea P un conjunto de propiedades de cerradura. Decimos que $0 \neq \mathscr{A} \in \mathscr{L}_P$ es un átomo si dado $0 \neq \mathscr{B} \in \mathscr{L}_P$ tal que $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$ se tiene que $\mathscr{B} = \mathscr{A}$.

Proposición 3.0.5. Si $\mathscr{A}$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces para cualquier submódulo distinto de cero N de cualquier módulo M en $\mathscr{A}$, se cumple que $\xi_{\leq}(N) = \mathscr{A}$.

Demostración. Sea N un submódulo distinto de cero de M, con $M \in \mathscr{A}$. Notemos que $0 \neq \xi_{\leq}(N)$ pues $N \in \xi_{\leq}(N)$. Además como $\mathscr{A} \in \mathscr{L}_{\{\leq\}}$ se sigue que $N \in \mathscr{A}$. Pero $\xi_{\leq}(N)$ es la menor clase en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ que contiene a N. De donde $\xi_{\leq}(N) \leq \mathscr{A}$. Por lo tanto $\xi_{\leq}(N) = \mathscr{A}$. ∎

En particular, existe un monomorfismo $M \rightarrowtail N \leq M$ y por lo tanto M es comprimible, donde M es llamado comprimible si genera un átomo en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

Notemos que si $\mathscr{A}$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$, entonces todo elemento en $\mathscr{A}$ es comprimible.

Por lo tanto, los átomos en $\mathscr{L}_{\{\leq\}}$ son de dos tipos: Los generados por módulos simples y los generados por módulos comprimibles no simples.

Notemos que existen comprimibles que no son simples: por ejemplo $\mathbb{Z}$ es un módulo comprimible que no es simple.

Proposición 3.0.6. Para un módulo distinto de cero M, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) M es comprimible.

2) M es un cociente de cualquiera de sus cocientes distintos de cero.

3) Para cada cociente distinto de cero C de M, $\xi_{\twoheadrightarrow}(C) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que M es comprimible y sea C un cociente distinto de cero de M. Como $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) \in \mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ se sigue que $C \in \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$. Pero $\xi_{\twoheadrightarrow}(C)$ es la menor clase cohereditaria tal que $C \in \xi_{\twoheadrightarrow}(C)$. De donde tenemos que $\xi_{\twoheadrightarrow}(C) \leq \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$. Y como M es comprimible, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. Por lo tanto $\xi_{\twoheadrightarrow}(C) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Sea C un cociente distinto de cero de M. Como $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$, entonces $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(C)$, lo cual implica que M es un cociente de C.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $0 \neq \mathscr{A} \leq \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$, entonces existe un elemento distinto de cero A en $\mathscr{A}$. Entonces $A \in \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$, es decir, A es un cociente de M. Pero por hipótesis M es un cociente de A. De donde $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(A)$, y como $\xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ es la menor clase cohereditaria tal que $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ se sigue que $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) \leq \xi_{\twoheadrightarrow}(A)$. También notemos que $\xi_{\twoheadrightarrow}(A) \leq \mathscr{A}$ ya que $A \in \mathscr{A}$ y $\xi_{\twoheadrightarrow}(A)$ es la menor clase cohereditaria tal que $A \in \xi_{\twoheadrightarrow}(A)$. Por lo tanto $\xi_{\twoheadrightarrow}(M) \leq \mathscr{A} \leq \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$. En consecuencia $\xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\{\twoheadrightarrow\}}$. ∎

Proposición 3.0.7. Si $M \in R - mod$, entonces $\xi_{R-conat}(M)$ es la clase de todos los módulos N tal que para cada cociente distinto de cero N' de N, existe un submódulo propio M' de M y un epimorfismo $\varphi : N' \twoheadrightarrow \frac{M}{M'}$.

Demostración. Sea $M \in R - mod$ y consideremos $\mathscr{K} = \{N \in R - mod \mid \forall\ N \twoheadrightarrow N' \neq 0, \exists\ M' \lneq M$ y un epimorfismo $\varphi : N' \twoheadrightarrow \frac{M}{M'}\}$.

- Veamos que $M \in \mathscr{K}$. Es decir, veamos que si M' un cociente arbitrario distinto de cero de M, entonces existen M'' submódulo propio de M y un epimorfismo $\varphi : M' \to M/M''$. Como M' es un cociente distinto de cero de M tenemos que existe un epimorfismo distinto de cero $f : M \to M'$. Entonces por el Corolario 1.1.1, $M/Ker(f) \cong M'$, es decir, existe un isomorfismo $g : M/Ker(f) \to M'$. Notemos también que $Ker(f)$ es un submódulo propio de M ya que si $Ker(f) = M$ entonces $f = 0$ que es una contradicción. Luego si $M'' = Ker(f)$ y $\varphi = g^{-1}$ se sigue que $M \in \mathscr{K}$.

  También notemos que $\mathscr{K} \in R - conat$ ya que si $N \in \mathscr{K}$ entonces tenemos que para todo $f : N \twoheadrightarrow N'$ distinto de cero, existen M' submódulo propio de M y un epimorfismo $\varphi : N' \twoheadrightarrow M/M'$, es decir, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N' \arrow[d, "\exists \varphi \neq 0"] \\ N \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & M/M' \end{tikzcd}$$

  entonces por la Definición 2.0.10, $\mathscr{K}$ satisface la condición (CN) y por el Teorema 2.0.4 se sigue que $\mathscr{K} \in R - conat$.

- Ahora veamos que $\mathscr{K}$ es la menor clase conatural tal que $M \in \mathscr{K}$. Sea $\mathscr{A} \in R - conat$ tal que $M \in \mathscr{A}$ y sea $N \in \mathscr{K}$, entonces para cada cociente distinto de cero N' de N, existe un submódulo propio M' de M y un epimorfismo $\varphi : N' \twoheadrightarrow \frac{M}{M'}$, de donde tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N' \arrow[d, "\exists \varphi \neq 0"] \\ M \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & M/M' \end{tikzcd}$$

con $M \in \mathscr{A}$. Y puesto que $\mathscr{A}$ es una clase conatural, entonces por la Definición 2.0.10 se sigue que $N \in \mathscr{A}$. Así hemos mostrado que $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{A}$ y como consecuencia tenemos que $\mathscr{K}$ es la menor clase conatural tal que $M \in \mathscr{K}$.

Por lo tanto $\mathscr{K} = \xi_{R-conat}(M)$. ■

Proposición 3.0.8. Sea M un módulo distinto de cero. Entonces $\xi_{R-conat}(M)$ es un átomo de $R-conat$ si y sólo si $\xi_{R-conat}(M) = \xi_{R-conat}(\frac{M}{M'})$ para cada submódulo propio M' de M.

Demostración. ($\Rightarrow$) Veamos que $\xi_{R-conat}(\frac{M}{M'}) \leq \xi_{R-conat}(M)$. Sean M un módulo distinto de cero y M' un submódulo propio de M y consideremos el epimorfismo canónico $v : M \twoheadrightarrow \frac{M}{M'}$. Como $\xi_{R-conat}(M)$ es un átomo de $R-conat$, entonces por el Teorema 2.0.5 (1), $v(M) \in \xi_{R-conat}(M)$. Pero $v(M) = \frac{M}{M'}$ ya que v es epimorfismo. Luego $\xi_{R-conat}(\frac{M}{M'}) \leq \xi_{R-conat}(M)$. Por lo tanto $\xi_{R-conat}(\frac{M}{M'}) = \xi_{R-conat}(M)$.

($\Leftarrow$) Sean M un módulo distinto de cero y $0 \neq \mathscr{A} \in R-conat$ tal que $\mathscr{A} \leq \xi_{R-conat}(M)$. Sea $0 \neq N \in \mathscr{A}$, entonces $N \in \xi_{R-conat}(M)$. Luego por la Proposicin 3.0.7 existe un submódulo propio M' de M y un epimorfismo $\varphi : N' \twoheadrightarrow \frac{M}{M'}$ para cada cociente distinto de cero N' de N. Entonces por el Teorema 2.0.5 (1), $\frac{M}{M'} \in \xi_{R-conat}(N)$, es decir, $\xi_{R-conat}(M) = \xi_{R-conat}(\frac{M}{M'}) \leq \xi_{R-conat}(N)$. También notemos que $\xi_{R-conat}(N) \leq \mathscr{A}$ ya que $N \in \mathscr{A}$ y $\xi_{R-conat}(N)$ es la menor clase conatural tal que $N \in \xi_{R-conat}(N)$. Por lo tanto $\mathscr{A} \leq \xi_{R-conat}(M) \leq \mathscr{A}$ y en consecuencia $\xi_{R-conat}(M)$ es un átomo de $R-conat$. ■

Definición 3.0.3. Un módulo M se llama hueco si todo submódulo propio de M es superfluo.

Ejemplo 19. Como en $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ todo submódulo propio es superfluo, tenemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un ejemplo de módulo hueco.

Proposición 3.0.9. Si M es un módulo hueco, entonces $\xi_{R-conat}(M)$ es un átomo de $R-conat$.

Demostración. Por la Proposición 3.0.8 es suficiente demostrar que si N es un submódulo superfluo de M, entonces $\xi_{R-conat}(M) = \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$. Por el Teorema

2.0.5 (1), $\xi_{R-conat}(\frac{M}{N}) \leq \xi_{R-conat}(M)$. Y como el epimorfismo canónico $v : M \twoheadrightarrow \frac{M}{N'}$ es un epimorfismo superfluo, por el Teorema 2.0.5 (3), $M \in \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$. Por lo tanto $\xi_{R-conat}(M) \leq \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$. ■

Como todo módulo simple es hueco, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.0.1. Si S es un $R-$*módulo* simple, entonces $\xi_{R-conat}(S)$ es un átomo de $R - conat$.

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 3.0.9. ■

3.0.2. Caracterización de anillos mediante clases conaturales

Definición 3.0.4. Decimos que un anillo R es un anillo MAX izquierdo, si cada $R - $*módulo* distinto de cero tiene submódulos máximos.

Teorema 3.0.2. Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) R es MAX izquierdo.

2) Toda clase conatural en $R - mod$ es generada por una familia de módulos simples.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Sea $\mathscr{C}$ una clase conatural no trivial. Tomemos $\mathcal{S}$ la clase de todos los módulos simples que pertenecen a $\mathscr{C}$. Afirmamos que $\mathscr{C} = \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$. En efecto, como $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{C}$ y $\xi_{R-conat}(\mathcal{S})$ es la menor clase conatural que contiene a $\mathcal{S}$ se sigue que $\xi_{R-conat}(\mathcal{S}) \subseteq \mathscr{C}$. Ahora veamos que $\mathscr{C} \subseteq \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$. Sean $0 \neq M \in \mathscr{C}$ y N es un cociente distinto de cero de M, entonces por (1), N tiene un submódulo máximo N', de donde $\frac{N}{N'}$ es un cociente simple de N y además pertenece a $\mathscr{C}$. Por lo tanto M y cada uno de sus cocientes distintos de cero tienen cocientes simples. Así hemos mostrado que $M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$, es decir, $\mathscr{C} \subseteq \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$. Por lo tanto $\mathscr{C} = \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Hagamos la demostración por contradicción. Supongamos que R no es MAX izquierdo y sea M un módulo distinto de cero. Como R no es MAX izquierdo M no tiene submódulos máximos, de donde M no tiene cocientes simples. Pero por (2) $\xi_{R-conat}(M) = \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$ con $\mathcal{S}$ una familia de módulos simples. Por lo que $M \in \xi_{R-conat}(\mathcal{S})$, es decir, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\forall f \neq 0"] & N \arrow[d, "\exists g \neq 0"] \\ S \arrow[r, two heads, "\exists h \neq 0"] & K \end{tikzcd}$$

con $S \in \mathcal{S}$ y $K \in R - mod$ diferente de cero. Luego como S es simple y $h : S \twoheadrightarrow K$ es un epimorfismo diferente de cero, por el Lema de Schur 1.1.6, h es un monomorfismo por lo que $S \cong K$, de donde K es simple. Así tenemos que M tiene un cociente simple K que es una contradicción. Por lo tanto R es MAX izquierdo. ∎

Recordemos que un anillo R es un $V-$*anillo izquierdo* si todo $R-$*módulo izquierdo* simple es inyectivo o equivalentemente, si para todo $R -$ *módulo izquierdo* M se cumple que $Rad(M) = 0$.

Ejemplo 20. Sea R un $V -$ *anillo izquierdo*, entonces por el Corolario [9, 3.75], todo $R -$ *módulo izquierdo* distinto de cero tiene un submódulo máximo. Luego R es MAX izquierdo.

Como todo anillo perfecto izquierdo es MAX izquierdo, concluimos lo siguiente:

Corolario 3.0.2. Si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces toda clase conatural en $R - mod$ es generada por una familia de módulos simples.

Demostración. Consecuencia del Teorema 3.0.2. ∎

Recordemos que un anillo R es semilocal si $R/J(R)$ es semisimple.

Teorema 3.0.3. Si R es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es un anillo perfecto izquierdo.

(2) R es un anillo semilocal y $|R - conat| = 2^k$, donde $k \in \mathbb{N}$ es el número de clases de isomorfismos de $R - módulos$ simples.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que R es un anillo perfecto izquierdo. Primero veamos que R es un anillo semilocal. Como R es un anillo perfecto izquierdo, por la Proposición 1.1.27, tenemos que $R/J(R)$ es semisimple. De donde R es un anillo semilocal.
Ahora veamos que si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces $| R - conat |= 2^k$, donde $k \in \mathbb{N}$ es el número de clases de isomorfismos de $R - módulos$ simples. Como R es un anillo perfecto izquierdo, por el Corolario 3.0.2, toda clase conatural es generada por una familia de módulos simples. Luego por la Proposición 1.1.17, sólo hay un número finito de clases de isomorfismos de $R - módulos$ simples.

(2) $\Rightarrow$ (1). Como $|R - conat| = 2^k$ y k es el número de clases de isomorfismos de $R - módulos$ simples, toda clase conatural es generada por una familia de módulos simples. En particular, todo módulo distinto de cero tiene cocientes simples, es decir, R es MAX izquierdo y por la Observación 1.8, $J(R)$ es $T - nilpotente$ izquierdo. Luego, como R es un anillo semilocal, se sigue que $R/J(R)$ es semisimple. Así, por la Proposición 1.1.27, tenemos que R es un anillo perfecto izquierdo. ■

Proposición 3.0.10. Si R es un anillo semiperfecto y R no es perfecto izquierdo, entonces existe una clase conatural que no es generada por una clase de módulos simples.

Demostración. Sea R un anillo semiperfecto que no es perfecto izquierdo, entonces por el Corolario 1.1.11, existe un módulo libre $R^{(X)}$ tal que $J(R^{(X)})$ no es superfluo, es decir, existe un submódulo propio K de R^X tal que $J(R^{(X)}) + k = R^{(X)}$.
Afirmamos que $\xi_{R-conat}(R) \subsetneq \xi_{R-conat}(R^{(X)})$. En efecto, es claro que R es cociente de $R^{(X)}$. Así que vamos a demostrar que la contención es propia. Para esto es suficiente demostrar que $R^{(X)}$ tiene un cociente sin submódulos máximos. Como $J(R^{(X)}) + K = R^{(X)}$, tenemos que K no está contenido en ningún submódulo máximo de $R^{(X)}$, pues de ser así $K = J(R^{(X)}) + K = R^{(X)}$, es decir, $K = R^{(X)}$ que

es una contradicción. Entonces $R^{(X)}/K$ no tiene submódulos máximos, de donde $R^{(X)}/K$ no tiene cocientes simples. ■

Bibliografía

[1] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2006). *On some lattices of modules classes.* Journal of algebra and its applications, 5(1), 105-117.

[2] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2001). *On the lattices of natural and conatural classes in R-mod.* Communications in algebra, 29(2), 541-556.

[3] Anderson F. y Fuller K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules.* Berlin Heidelber New York: Springer-Verlag.

[4] Bland Paul E. (2011) *Rings and their modules.* Berlin: De Gruyter.

[5] Cejudo, G. (2016) *Introducción a las retículas modulares.* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[6] Dauns J. y Zhou Y. (2006). *Classes of modules.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

[7] Grätzer G. (2009). *Lattice theory: first concepts and distributive lattices.* New York: Dover ed.

[8] Kasch F. (1982). *Modules and rings.* London: Academic Press.

[9] Lam T. Y. (1999) *Lectures on Modules and Rings.* Berlin Heidelber New York: Springer-Verlag.

[10] Stenström B. (1975). *Rings of Quotients.* Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.