BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de la Convergencia de Sucesiones Dobles y Algunas de sus aplicaciones

Tesis

que para obtener el título de:
Licenciada en Matemáticas

Presenta
Norma Alonso Monje

Director de tesis
Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue. 30 de Junio de 2016

"Nunca olvides que basta una persona o una idea
para cambiar tu vida para siempre,
ya sea para bien o para mal."
J. Brown.

A mi madre y abuelos Celia y Manuel.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi madre por el apoyo que me ha brindado a lo largo de mi vida. A mis abuelos por todas sus enseñanzas y consejos que me dieron.

Al Dr. Francisco Javier Mendoza, por haber aceptado ser mi asesor de tesis, por su paciencia y tiempo, muchas gracias.

A todos mis amigos y conocidos gracias por estar en mis momentos difíciles y por darme esas palabras de aliento, que me ayudaron a salir adelante.

A mis sinodales María Araceli Juárez Ramírez, Gabriel Kantún Montiel, Juan Alberto Escamilla Reyna, les agradezco por haber aceptado revisar mi tesis y hacer observaciones, las cuales enriquecieron mi trabajo.

A la Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Posgrados por el apoyo otorgado durante la realización de este trabajo, gracias.

Gracias por todo.
Norma

Introducción

En la teoria de límites de sucesiones dobles se pueden tratar varios aspectos importantes; uno de ellos es saber cuando la sucesión doble es convergente, otro es saber cuando se pueden intercambiar los límites iterados, y otro es saber cuando los límites iterados y el límite de una sucesión doble son iguales.

Con respecto a los límites iterados debemos analizar dos aspectos, el primero es cuando los límites iterados existen y el segundo cuando podemos intercambiarlos. Con respecto a la relación de los límites iterados y el límite doble un resultado deseable es encontrar condiciones para que el límite doble y los límites iterados sean iguales, ya que existen sucesiones dobles para las cual existe su límite y sin embargo uno de sus límites iterados no existe; o puede suceder que el límite doble exista, los límites iterados existan pero tanto el límite doble y los límites iterados no sean iguales.

Gran parte de la teoría elemental de límites de sucesiones simples puede aplicar al caso de sucesiones dobles. Por ejemplo, el concepto de convergencia, oscilación, subsucesiones, la unicidad del límite de una sucesión (cuando existe), el criterio de Cauchy. Sin embargo, existen algunas diferencias, por ejemplo el concepto de punto cumbre o pico. Sabemos que este concepto tiene una gran importancia para el caso de una variable, ya que se utiliza para demostrar el Teorema de Bolzano-Weierstrass. Su demostración se divide en dos casos; el primer caso es cuando la sucesión tiene infinitos puntos cumbre. El segundo caso es cuando la sucesión tiene solamente un número finito de puntos cumbre. Sin embargo, para el caso de sucesiones dobles, es necesario analizar este caso de manera diferente. Esto se desarrolla en el capítulo de subsucesiones.

Esta tesis está dividida en cinco capítulos. En el primer capítulo proporcionamos conceptos básicos sobre sucesiones dobles, a la vez estos ayudan a desarrollar algunos resultados de los siguientes capítulos. En el segundo capítulo se desarrollan algunos teoremas que nos proporcionan condiciones para intercambiar el orden de los límites iterados, y garantizar la igualdad del límite doble con sus respectivos límites iterados. En el tercer capítulo exponemos el concepto de sucesiones monótonas y el teorema de la convergencia monótona. En el cuarto capítulo proporcionamos el concepto de subsucesión doble y el teorema de Bolzano-Weiestrass. En el quinto capítulo damos aplicaciones a integrales dobles; es decir, algunos resultados que desarrollamos para sucesiones dobles, los aplicamos a la teoría de integrales dobles impropias. Proporcionamos un teorema similar al Teorema de Fubini para integrales dobles impropias.

Índice general

Estudio de la convergencia de sucesiones y algunas de sus aplicaciones

Norma Alonso Monje

30 de Junio de 2016

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo exponemos conceptos básicos como son: convergencia, divergencia, oscilación y algunos ejemplos.

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1. Una ***sucesión doble***, denotada por $s(n,m)$, es una función s que tiene a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como dominio y a $\mathbb{R}$ como contradominio.

Definición 1.2. Decimos que $s(n,m)$ ***converge hacia*** a, cuando satisface la siguiente condición:
Para cada $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|s(n,m) - a| < \epsilon,$$

para cada $n, m \geq N$. El cual denotaremos como

$$\lim_{n,m \to \infty} s(n,m) = a.$$

El número a es llamado el ***límite*** de la sucesión doble. Si no existe tal a, decimos que $s(n,m)$ ***diverge***.

Definición 1.3. Decimos que $s(n,m)$ ***tiende a*** ∞, y se escribe

$$\lim_{n,m \to \infty} s(n,m) = \infty,$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existe $K = K(\alpha) \in \mathbb{N}$ tales que si $n, m \geq K$, entonces $s(n,m) > \alpha$.

Definición 1.4. Decimos que $s(n,m)$ ***tiende a*** $-\infty$, y se escribe

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = -\infty,$$

si para cada $\beta \in \mathbb{R}^-$ existe $K = K(\beta) \in \mathbb{N}$ tales que si $n,m \geq K$, entonces $s(n,m) < \beta$.

Definición 1.5. Se dice que $s(n,m)$ ***es propiamente divergente*** si

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = \infty$$

o

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = -\infty.$$

Definición 1.6. Si $s(n,m)$ no converge a un número finito y no diverge propiamente, entonces decimos que $s(n,m)$ ***oscila finita o infinitamente***.

Observación 1.1. Recordemos que si $a \geq 0$ y si para cada $\epsilon > 0$ $a < \epsilon$, entonces $a = 0$.
Esta propiedad será utilizada en la siguiente prueba.

Teorema 1.2. (*Unicidad de límites dobles*). El límite de una sucesión doble es único.

Demostración. Si

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a_1$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a_2,$$

y $a_1 \neq a_2$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tales que si $n,m > N_1$

$$|s(n,m) - a_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.1}$$

y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n,m > N_2$

$$|s(n,m) - a_2| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Entonces para cada $n,m \geq N$, utilizando (1.1) y (1.2), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_1 - a_2| &= |a_1 - s(n,m) + s(n,m) - a_2| \\ &\leq |a_1 - s(n,m)| + |s(n,m) - a_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ y por la Observación 1.1 concluimos que

$$a_1 = a_2.$$

Así, el límite de $s(n,m)$ es único. $\square$

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.1. Sea $s(n,m) = \frac{1}{n+m}$. Mostraremos que esta sucesión converge.
Demostración. Primero observemos que si $N_0 \in \mathbb{N}$ y $n,m \in \mathbb{N}$ son tales que $n,m \geq N_0$. Entonces

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N_0}.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\epsilon} < N$. Para $n,m \geq N$ se tiene que:

$$|\frac{1}{n+m}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto se tiene que $s(n,m)$ converge a cero. □

Nota. El siguiente ejemplo tiene una relación con la unicidad de límite.

Ejemplo 1.2. Sea $s(n,m) = \frac{n}{n+m}$. Notemos que

$$s(n,n) = \frac{1}{2}$$

y que

$$s(n,2n) = \tfrac{1}{3}.$$

Por lo tanto $s(n,m)$ diverge. □

Ejemplo 1.3. Sea $s(n,m) = n+m$. Mostraremos que $s(n,m)$ es propiamente divergente a ∞.
Demostración. Sea $\alpha > 0$ y sea $N = \alpha$. Se tiene que si $n,m \geq N$, entonces

$$s(n,m) = n+m \geq 2N = 2\alpha > \alpha$$

Y por tanto $s(n,m)$ es propiamente divergente. □

Ejemplo 1.4. Sea $s(n,m) = 1-n-m$. Mostremos que $s(n,m)$ es propiamente divergente a $-\infty$.
Demostración. Sea $\beta < 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1-\beta}{2} < k$. Si $n,m \geq K$, entonces

$$n+m \geq 2k > 1-\beta.$$

Esto nos dice que

$$1-n-m < 1-2k < \beta.$$

Por tanto $s(n,m)$ es propiamente divergente a $-\infty$. □

1.3. Sucesiones dobles acotadas

Definición 1.7. La sucesión doble $s(n,m)$ es ***acotada*** si existe $M > 0$ tal que
$$|s(n,m)| \leq M$$
para $n, m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3. Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración. Supongamos que $s(n,m) \to a$, cuando n, m convergen a ∞. Tomando $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n, m \geq N$

$$|s(n,m) - a| < 1.$$

Como
$$|s(n,m)| - |a| \leq |s(n,m) - a| < 1.$$
Por lo tanto
$$|s(n,m)| < 1 + |a|.$$
Sea $M = \text{máx}\ \{|s(i,j)|, 1 + |a| \text{ donde } 1 < i, j \leq N\}$. Concluimos que
$$|s(n,m)| \leq M \text{ para cada } n, m \in \mathbb{N}.$$

□

1.4. Sucesión doble de Cauchy

Definición 1.8. Una sucesión doble es de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s(p,q) - s(n,m)| < \epsilon \text{ para toda } p > n > N \text{ y toda } q > m > N.$$

Teorema 1.4. (*Criterio de Cauchy para sucesiones dobles.*) Una sucesión doble es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $s(n,m) \to a$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_\epsilon$. Entonces, para cada $p \geq n \geq N_\epsilon$ y $q \geq m \geq N_\epsilon$, se tiene

$$|s(p,q) - s(n,m)| = |s(p,q) - a + a - s(n,m)|$$

$$\leq |s(p,q) - a| + |s(n,m) - a|$$

$$< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto $s(n,m)$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$) Supongamos que $s(n,m)$ es de Cauchy. Por definición, para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tales que para toda $p \geq n \geq N$ y $q \geq n \geq N$,

$$|s(p,q) - s(n,m)| < \epsilon.$$

Supongamos que $n = m$ y denotemos $s(n,n) = b_n$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_p - b_n| < \epsilon \text{ para cada } p \geq n \geq K.$$

Por el criterio de Cauchy para sucesiones simples, la sucesión $\{b_n\}$ converge, digamos a a. Tomando la misma ϵ, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.3}$$

para cada $n \geq N_1$. Siendo $s(n,m)$ sucesión de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s(p,q) - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.4}$$

para cada $p, q \geq n \geq N_2$. Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Por (1.3) y (1.4) tenemos

$$|s(p,q) - a| = |s(p,q) - b_n + b_n - a|$$

$$\leq |s(p,q) - b_n| + |b_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para cada $p, q \geq N$. Por lo tanto $s(n,m)$ converge.

$\square$

Teorema 1.5. (*Teorema del Sandwich.*) Sean $s(n,m)$, $x(n,m)$, $y(n,m)$ sucesiones dobles. Supongamos que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos :

$$x(n,m) \leq s(n,m) \leq y(n,m) \tag{1.5}$$

y supongamos también que:

$$\lim_{n,m \to \infty} x(n,m) = \lim_{n,m \to \infty} y(n,m) = a.$$

Entonces $s(n,m)$ converge y

$$\lim_{n,m \to \infty} s(n,m) = a.$$

Demostración. Tomemos $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$|x(n,m) - a| < \epsilon \text{ y } |y(n,m) - a| < \epsilon.$$

Ahora por (1.5) tenemos que

$$-\epsilon < x(n,m) - a < s(n,m) - a < y(n,m) - a < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\text{lím}_{n,m \to \infty} s(n,m) = a.$$

□

1.5. Límites iterados

Si fijamos cualquiera de las dos variables en la sucesión doble $s(n,m)$, tendremos sucesiones simples. Podemos hallar sus límites de la forma usual y en esta sección estudiaremos la relación entre la existencia del límite de la sucesión doble y los límites simples.

Definición 1.9. Sea $s(n,m)$ una sucesión doble, los límites

$$\text{lím}_{n \to \infty} \text{ lím}_{m \to \infty} s(n,m)$$

y

$$\text{lím}_{m \to \infty} \text{ lím}_{n \to \infty} s(n,m)$$

se llaman ***límites iterados***.

En caso de que existan los límites iterados, ¿ Son iguales entre ellos? Veamos el siguiente ejemplo en donde los límites iterados son distintos.

Ejemplo 1.5. Sea $s(n,m) = \frac{n}{m+n}$. Se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left(\frac{n}{n+m} \right) = \lim_{n \to \infty} (0) = 0$$

y

$$\text{lím}_{m \to \infty} \text{ lím}_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+m} \right) = \text{lím}_{m \to \infty} (1) = 1.$$

□

Si una sucesión doble converge, nos podemos preguntar ¿Existen sus límites iterados? La respuesta a esta pregunta es no, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Consideremos $s(n,m) = (-1)^{n+m}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$.
Sabemos que $a_n = \frac{1}{n}$ converge a cero, cuando $n \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq N$.
Así, si $n, m \geq N$, entonces

$$|(-1)^{n+m}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{lím}_{m \to \infty}(-1)^{n+m}(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}) \text{ no existe.}$$

Lo mismo sucede para cada $n \in \mathbb{N}$, con respecto al límite de $s(n,m)$, cuando $m \to \infty$. Por lo tanto ambos límites iterados no existen. □

En el siguiente ejemplo proporcionaremos una sucesión doble para la cual los límites iterados y el límite de la sucesión doble coinciden.

Ejemplo 1.7. Para $s(n,m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Haciendo unos cambios al ejemplo anterior, se puede mostrar que

$$\lim_{n,m \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = 0.$$

Mientras que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

y

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 0.$$

□

En el siguiente ejemplo proporcionaremos una sucesión doble para la cual existe su límite doble y sin embargo, uno de sus límites iterados no existe.

Ejemplo 1.8. Sea $s(n,m) = (-1)^m(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Entonces dado $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n, m \geq N$:

$$|(-1)^m(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m})| \leq \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} < \epsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n,m\to\infty} (-1)^m(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) = 0.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

no existe. Así

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(n,m) \text{ no existe.}$$

Y para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{(-1)^m}{m}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n,m) = 0.$$

□

Observación 1.6. Podemos tener sucesiones dobles en la que ni el límite de la sucesión ni los límites iterados existan.

Ejemplo 1.9. $s(n,m) = (-1)^{n+m}$.

1.6. Álgebra de Límites

En esta sección se mostrarán algunos resultados que nos permitirán evaluar el límite doble y el límite iterado de una sucesión doble .

1.6.1. Límite doble de un producto

Teorema 1.7. Si $s(n,m) = a_n b_m$ y $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ son tales que

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ y
2. $\lim_{m\to\infty} b_m = l_2$,

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s(n,m)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s(n,m)\\ &= l_1 l_2.\end{aligned}$$

Demostración.

i) $\lim_{n\to\infty}\ \lim_{m\to\infty} s(n,m)$
$= \lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(a_n b_m)]$
$= l_1 l_2.$

ii) $\lim_{m\to\infty}\ \lim_{n\to\infty} s(n,m)$
$= \lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}(a_n b_m)]$
$= l_1 l_2.$

iii) Mostremos que $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = l_1 l_2$.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Por el Teorema 1.3 existe $K > 0$ tal que

$$|a_n| \leq K \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Como $a_n \to l_1$ y $b_m \to l_2$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2b}$ y $|b_m - l_2| < \frac{\epsilon}{2b}$, para toda $n, m \geq N$ y $b := \text{máx}\,\{K, |l_2|\}$.
Entonces tenemos que para cada $n, m \geq N$

$$\begin{aligned}|s(n,m) - l_1 l_2| &= |a_n b_m - a_n l_2 + a_n l_2 - l_1 l_2|\\ &\leq |a_n||b_m - l_2| + |a_n - l_1||l_2|\\ &< \frac{\epsilon}{2b}|a_n| + \frac{\epsilon}{2b}|l_2|\\ &\leq \frac{\epsilon b}{2b} + \frac{\epsilon b}{2b}\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Así $s(n,m) \to l_1 l_2$ cuando $n, m \to \infty$. $\square$

Ejemplo 1.10. Sea $s(n,m) = \frac{1}{nm}$ tal que $n, m \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_m = \frac{1}{m}$ convergen a cero cuando $n \to \infty$ y $m \to \infty$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\,\to\,\infty} s(n,m) &= \lim_{n\,\to\,\infty}\ \lim_{m\,\to\,\infty} s(n,m)\\ &= \lim_{m\,\to\,\infty}\ \lim_{n\,\to\,\infty} s(n,m)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

1.6.2. Límite doble de una suma

Teorema 1.8. Si la sucesión se puede escribir como $s(n,m) = a_n + b_m$ y

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ y
2. $\lim_{m\to\infty} b_m = l_2$,

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{m\,\to\,\infty}\ \lim_{n\,\to\,\infty} s(n,m) &= \lim_{n\,\to\,\infty}\ \lim_{m\,\to\,\infty} s(n,m)\\ &= \lim_{n,m\,\to\,\infty} s(n,m)\\ &= l_1 + l_2.\end{aligned}$$

Demostración.

i) $\lim_{n\,\to\,\infty}\ \lim_{m\,\to\,\infty} s(n,m)$
$= \lim_{n\,\to\,\infty}\ \lim_{m\,\to\,\infty}(a_n + b_m)$
$= l_1 + l_2.$

ii) $\lim_{m\,\to\,\infty}\ \lim_{n\,\to\,\infty} s(n,m)$
$= \lim_{m\,\to\,\infty}\ \lim_{n\,\to\,\infty}(a_n + b_m)$
$= l_1 + l_2.$

iii) Mostremos que $\lim_{n,m\,\to\,\infty} s(n,m) = l_1 + l_2$.

Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|a_m - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n, m \geq N$. Entonces

$$\begin{aligned}|s(n,m) - (l_1 + l_2)| &= |(a_n + b_m) - (l_1 + l_2)|\\ &\leq |a_n - l_1| + |b_m - l_2|\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Así, $s(n,m) \to (l_1 + l_2)$ cuando $n, m \to \infty$. □

Un ejemplo de lo anterior es tomando a $s(n,m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$.

Capítulo 2

Teoremas de Intercambio de límites

En este capítulo analizaremos diversas condiciones que nos permiten intercambiar el orden de los límites iterados y garantizar la igualdad del límite doble con sus límites iterados.

Teorema 2.1. Supongamos que $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$. Entonces:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s(n,m) = a$$

si y sólo si $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ existe para cada $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. La condición necesaria es obvia ya que si,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s(n,m) = a$$

necesariamente debemos tener que

$$\lim_{n\to\infty} s(n,m) \text{ existe.}$$

Ahora, para la condición suficiente asumamos que $\lim_{n\to\infty} s(n,m) = c_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar que $c_m \to a$ cuando $m \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Como $s(n,m) \to a$ cuando $n,m \to \infty$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq N_1$, entonces

$$|s(n,m) - a| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $s(n,m) \to c_m$ cuando $n \to \infty$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces

$$|s(n,m) - c_m| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Ahora tomemos $n \geq \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$. Para $m \geq N_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |c_m - a| &= |c_m - s(n,m) + s(n,m) - a| \\ &\leq |c_m - s(n,m)| + |s(n,m) - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_m \to a$ cuando $m \to \infty$. □

Nota: En el teorema anterior, es importante considerar el orden de las hipótesis. Ya que podemos tener que

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) \text{ existe,}$$

y que

$$\lim_{m\to\infty} s(n,m) \text{ existe.}$$

Y sin embargo tener que

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n,m) = a.$$

Veamos el siguente ejemplo.

Ejemplo 2.1. Tomemos $s(n,m) = \frac{(-1)^n}{m}$. Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que $a_m = \frac{1}{m}$ converge a cero, cuando $m \to \infty$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \epsilon$ si $m \geq N$. Así, si $n, m \geq N$, entonces

$$\left| \frac{(-1)^n}{m} \right| \leq \frac{1}{m} < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = 0.$$

Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{m}$$

no existe, al igual que

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{m}.$$

□

Corolario 2.2. Sea $\lim_{n,m\to\infty} s(n,m) = a$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(n,m) = a$ si y sólo si $\lim_{m\to\infty} s(n,m)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Similar al del teorema anterior. □

Combinando los dos resultados anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3. Supongamos que $\lim_{n,m\,\to\,\infty} s(n,m) = a$. Entonces

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \lim_{m\,\to\,\infty} s(n,m) \text{ y } \lim_{m\,\to\,\infty} \lim_{n\,\to\,\infty} s(n,m)$$

existen y son iguales a a si y sólo si

i) $\lim_{m\,\to\,\infty} s(n,m)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$

y

ii) $\lim_{n\,\to\,\infty} s(n,m)$ existe para cada $m \in \mathbb{N}$.

Ahora nos preguntamos que si los límites iterados existen y son iguales entonces ¿Que sucede con el límite doble de la sucesión?.

Ejemplo 2.2. Sea $s(n,m) = \frac{nm}{n^2+m^2}$. Se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \frac{nm}{n^2+m^2} = 0,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m\,\to\,\infty} \frac{nm}{n^2+m^2} = 0.$$

Sin embargo,

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{nm}{n^2+m^2} \text{ no existe.}$$

Ya que si $n = m$, entonces $s(n,m) = \frac{1}{2}$ y si $n = 2m$, entonces $s(n,m) = \frac{2}{5}$. Podemos concluir que los límites iterados existen y la sucesión no es convergente. □

Definición 2.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, decimos que converge uniformemente a f sobre el conjunto X si para cada $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq N \text{ entonces } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para toda } x \in X.$$

A continuación daremos un resultado asociado al ejemplo anterior, el cual nos proporciona condiciones para que los límites iterados y el límite doble sean iguales.

Teorema 2.4. Sea $s(n,m)$ una sucesión doble. Si

i) $\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} s(n,m) = a$

y

ii) $\lim_{n \to \infty} s(n,m)$ existe y converge uniformemente con respecto a $m \in \mathbb{N}$,

entonces $\lim_{n,m \to \infty} s(n,m) = a$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a f_n sobre $\mathbb{N}$ de la siguiente forma

$$f_n(m) := s(n,m).$$

Se tiene por el Criterio de Cauchy para sucesiones de funciones que para cada $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$

$$|s(n,m) - f(m)| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Ahora, por i)

$$\lim_{m \to \infty} f(m) = a.$$

Dada $\epsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2$, entonces

$$|f(m) - a| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $N := \max\{N_1, N_2\}$ y $n, m \geq N$, entonces

$$\begin{aligned}
|s(n,m) - a| &= |s(n,m) - f(m) + f(m) - a| \\
&\leq |s(n,m) - f(m)| + |f(m) - a| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{n,m \to \infty} s(n,m) = a$. $\square$

Observación 2.5. Es de gran importancia mostrar que la sucesión converge uniformemente, ya que de lo contrario no podremos garantizar la igualdad entre el límite doble y los límites iterados. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Consideremos $s(n,m) = \frac{nm}{n^2+m^2}$.

1) Sabemos que
$\lim_{n\to\infty} s(n,m) = \lim_{n\to\infty} \frac{nm}{n^2+m^2} = 0.$

2) Como consecuencia de 1) tenemos que
$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n,m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{nm}{n^2+m^2} = 0.$

3) La convergencia en 1) no es uniforme con respecto a m, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup{}_{m\in\mathbb{N}}|s(n,m)| = \tfrac{1}{2}.$$

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, definamos

$$f_n(x) = |s(n,m)| = \frac{nx}{n^2+x^2}.$$

Como

$$f'(x) = \tfrac{n^3-nx^2}{(n^2+x^2)^2},$$

entonces $f'(x) = 0$ si y sólo si $n^2 = x^2$, esto es, si $n = x$.
Por el criterio de la segunda derivada f alcanza el supremo cuando $n = x$. Así:

$$\sup{}_{m\in\mathbb{N}}s(n,m) = \tfrac{1}{2}.$$

Por lo tanto $s(n,m)$ no converge uniformemente ya que si tomamos $\epsilon = \frac{1}{4}$, para toda N existe $m = n$ tal que $|f_n - m| = \frac{1}{2} > \epsilon$. $\square$

Capítulo 3

Sucesiones dobles monótonas

En este capítulo exponemos el concepto de una sucesión doble monótona creciente o decreciente de números reales y se probarán algunos teoremas relacionados con la monotonía de las sucesiones dobles.

Definición 3.1. Consideremos el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Una relación binaria $\leq$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es un ***orden parcial*** en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Teorema 3.1. Sea $\leq$ la relación en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida como

$$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2) \text{ si y sólo si } n_1 \leq n_2 \text{ y } m_1 \leq m_2.$$

Entonces $\leq$ es un orden parcial en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Demostración. Mostremos cada uno de las propiedades que definen un orden parcial.

- *Reflexiva:* Sea $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Como

  $$n \leq n \text{ y } m \leq m,$$

  entonces

  $$(n, m) \leq (n, m).$$

- *Antisimétrica:* Sea (n_1, m_1) y (n_2, m_2) dos elementos cualesquiera en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Si suponemos que

  $$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$$
  $$\text{y}$$
  $$(n_2, m_2) \leq (n_1, m_1),$$

entonces

$$n_1 \leq n_2 \text{ y } n_2 \leq n_1$$
$$m_1 \leq m_2 \text{ y } m_2 \leq m_1.$$

Así, por la antisimétria en $(\mathbb{N}, \leq)$ concluimos que $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$.

- *Transitiva:* Sean ahora (n_1, m_1) ,(n_2, m_2) y (n_3, m_3) cualesquiera tres elementos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Supongamos que

$$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$$
$$(n_2, m_2) \leq (n_3, m_3).$$

Entonces,

$$n_1 \leq n_2 \text{ y } n_2 \leq n_3$$
$$m_1 \leq m_2 \text{ y } m_2 \leq m_3.$$

Utilizando la transitividad en $(\mathbb{N}, \leq)$ concluimos que $(n_1, m_1) \leq (n_3, m_3)$.

$\square$

Definición 3.2. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble con valores en los números reales. La sucesión será ***creciente*** si $(n, m) \geq (j, k)$, implicamos que $s(n, m) \geq s(j, k)$.

Definición 3.3. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble con valores en los números reales. La sucesión será ***decreciente*** si suponemos que $(n, m) \leq (j, k)$, implicamos que $s(n, m) \geq s(j, k)$.

Definición 3.4. Si cumple cualquiera de las dos definiciones anteriores, entonces decimos que es una sucesión doble ***monótona***.

Recordemos que si $\{x_n\}$ una sucesión de números reales monótonamente creciente. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge si y sólo si, es acotada. En cuyo caso, $\lim_{n \to \infty} x_n = \sup \{x_n\}$.
Lo anterior se utilizará en la demostración del teorema siguiente.

Teorema 3.2. (*Teorema de convergencia monótona.*) Sea $s(n, m)$ una sucesión monótona. Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. Supongamos que $s(n, m)$ es una sucesión doble creciente. Entonces se tiene que $s(n, m)$ es convergente, si y sólo si está acotada superiormente. En este caso

$$\text{lím}_{n,m \to \infty} s(n,m) = \sup \{s(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} s(n,m) &= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} s(n,m) \\ &= \sup\{s(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

2. Algo similar sucede cuando la sucesión es decreciente.
   Se tiene que $s(n,m)$ es convergente, si y sólo si está acotada inferiormente, es decir

   $$\text{lím}_{n,m \to \infty} s(n,m) = \inf\{s(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.$$

   Además si $s(n,m)$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces

   $$\begin{aligned}\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} s(n,m) &= \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} s(n,m) \\ &= \inf\{s(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostración.

1. Supongamos que $s(n,m)$ es creciente.

$\Rightarrow$) Si $s(n,m)$ es convergente, entonces por el Teorema 1.3 la sucesión doble es acotada.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que la sucesión está acotada superiormente y sea

$$a^* := \sup \{s(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}.$$

Mostremos que la sucesión doble converge a a^*.
Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existen $K(\epsilon), J(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tales que

$$a^* - \epsilon < s(K,J).$$

Como la sucesión es creciente, para cada $(n,m) \geq (K,J)$ se tiene que

$$a^* - \epsilon < s(K,J) \leq s(n,m).$$

Por la definición de supremo tenemos que

$$s(n,m) \leq a^* < a^* + \epsilon \text{ para cada } (n,m) \geq (K,J).$$

Por lo tanto

$$a^* - \epsilon < s(n,m) < a^* + \epsilon,$$

si y sólo si

$$|s(n,m) - a^*| < \epsilon.$$

Esto demuestra que la sucesión converge al punto a^*.

Teniendo en cuenta que dado $s(n,m)$ es acotada superiormente entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ fija, la sucesión simple $\{s(n,m) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada superiormente y creciente. Así, por el teorema de convergencia para sucesiones simples tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} s(n,m) = \sup\{s(n,m) : n \in \mathbb{N}\} =: l_m \text{ para } m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, por el Corolario 2.3 concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s(n,m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s(n,m)\\ &= \lim_{n,m\to\infty} s(n,m)\\ &= a^*.\end{aligned}$$

2. Tomando en consideración las ideas del caso anterior, la demostración se sigue de manera análoga para cuando $s(n,m)$ es decreciente y acotada inferiormente.

□

Capítulo 4

Subsucesiones Dobles

En este capítulo se mostrarán algunas propiedades relacionadas con subsucesiones dobles. Para comenzar daremos su definición.

Definición 4.1. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble. Una ***subsucesión*** es de $s(n, m)$ de la forma $s(p_n, q_m)$, donde $\{p_n\}$,$\{q_m\}$ son sucesiones estrictamente crecientes en $\mathbb{N}$.

Teorema 4.1. Si $s(n, m)$ converge a a, entonces cualquier subsucesión de $s(n, m)$ también converge a a.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|s(n, m) - a| < \epsilon.$$

Sea $s(p_n, q_m)$ una subsucesión de $s(n, m)$. Como $\{p_n\}$, $\{q_m\}$ son sucesiones estrictamente crecientes en $\mathbb{N}$, entonces existe $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_0} \geq N$ y $q_{m_0} \geq N$. Por lo tanto, $p_n \geq N$ y $q_m \geq N$ para toda $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$. Así, si $n, m \geq$ máx $\{n_0, m_0\}$ entonces

$$|s(p_n, q_m) - a| < \epsilon.$$

□

Lema 4.2. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble y sea $s(p_n, q_m)$ una subsucesión doble de ella. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $lim_{m\to\infty} s(n, m) =: f(n)$ existe, entonces

$$\text{lím}_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = f(p_n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Por hipótesis el $\text{lím}_{m\to\infty} s(n, m) =: f(n)$ existe para cada n $\in \mathbb{N}$. Entonces

$$\text{lím}_{m\to\infty} s(p_n, m) =: f(p_n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando a $\{s(p_n, q_m)\}_{m=1}^{\infty}$ como una subsucesión de la sucesión simple $\{s(p_n, m)\}_{m=1}^{\infty}$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = f(p_n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

□

Lema 4.3. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble y sea $s(p_n, q_m)$ una subsucesión doble de ella. Tenemos que si $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(n, m) = a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = a.$$

Demostración. Por hipótesis implicamos que $\lim_{m\to\infty} s(n, m) =: f(n)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$. Por el Lema 4.2

$$\lim_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = f(p_n) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Siendo $\{f(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = a$. Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = a.$$

□

NOTA. Si intercambiamos los papeles de n, m se verifican resultados similares a los Lemas 4.2 y 4.3. Es decir, si

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n, m) = a,$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(p_n, q_m) = a.$$

Los lemas 4.2 y 4.3 nos ayudan a demostrar el siguiente resultado.

Corolario 4.4. Si los límites iterados de una sucesión doble $s(n, m)$ existen y satisfacen que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(n, m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n, m) = a,$$

entonces los límites iterados de cualquier subsucesión doble $s(p_n, q_m)$ existen y satisfacen que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s(p_n, q_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(p_n, q_m) = a.$$

Recordemos que para el caso de una variable, llamamos *punto cumbre* de una sucesión $\{a_n\}$ a un número natural n tal que $a_m < a_n$ para todo $m > n$. El concepto anterior es utilizado para demostrar el siguiente teorema: “Cualquier sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión monótona”. Y así demostrar el teorema de Bolzano-Weiestrass para sucesiones.
Ahora, tratemos de aplicar lo anterior para sucesiones dobles.

Definición 4.2. Sea $s(n, m)$ una sucesión doble. El término (p, q) es un ***punto cumbre*** o *pico* si

$$s(p, q) \geq s(n, m) \text{ para toda } (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ tal que } n < p \text{ y } m < q.$$

Es decir, $s(p, q)$ no es excedido por algún otro termino.

¿Cualquer sucesión doble tendrá puntos cumbre? La respuesta a la pregunta anterior es no, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1. Consideremos a $s(n, m) = n + m$. Utilizando la definición de punto cumbre tenemos que si

$$n < p \text{ y } m < q,$$

entonces

$$n + m < p + q.$$

Por lo que $s(n, m)$ no tiene puntos cumbre. $\square$

Ahora si damos una sucesión acotada, ¿ Tendrá puntos cumbre? La respuesta a esta pregunta es no, como lo muestra el siguente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Sea $s(n, m) = -\frac{1}{n+m}$. Sabemos que

$$|s(n, m)| \leq 1.$$

Si

$$n < p \text{ y } m < q \text{ entonces } -\tfrac{1}{n+m} < -\tfrac{1}{p+q}.$$

Por lo tanto, $s(n, m)$ no tiene puntos cumbre.

Teorema 4.5. Toda sucesión doble $s(n, m)$ tiene una subsucesión doble monótona.

Demostración. Consideremos tres casos.

Caso 1. *La sucesión doble $s(n,m)$ tiene infinitos puntos cumbre.* En este caso, si $p_1 < p_2 < ... < p_n < ...$ y $q_1 < q_2 < ... < q_n < ...$ son los puntos cumbre, entonces $s(p_1,q_1) \geq s(p_2,q_2) \geq ...$, de modo que $s(p_n,q_m)$ es la subsucesión (no creciente) deseada.

Caso 2. *La sucesión doble $s(n,m)$ tiene solamente un número finito de puntos cumbre.* En este caso, sea (p_1,q_1) mayor que todos los puntos cumbre. Puesto que (p_1,q_1) no es un punto cumbre, existe algún $p_2 > p_1$ y $q_2 > q_1$ tal que $s(p_2,q_2) > s(p_1,q_1)$. Puesto que (p_2,q_2) no es un punto cumbre, existe algún $p_3 > p_2$ y $q_3 > q_2$ tal que $s(p_3,q_3) > s(p_2,q_2)$. Continuando de esta forma obtenemos la sucesión (no decreciente) deseada.

Caso 3. *La sucesión doble $s(n,m)$ no tiene puntos cumbre.* Este caso se resuelve de manera similar al caso anterior. □

Corolario 4.6. (*Teorema Bolzano-Weiestrass.*) Toda sucesión doble acotada de números reales tiene una subsucesión monótona convergente.

Demostración. Sea $s(n,m)$ una sucesión doble acotada de números reales. Sabemos por el Teorema 4.5 que $s(n,m)$ tiene una subsucesión doble $s(p_n,q_m)$ monótona. Siendo que $s(p_n,q_m)$, es también acotada, entonces por el Teorema de convergencia monótona (Teorema 3.2) concluimos que $s(p_n,q_m)$ es convergente. □

Corolario 4.7. Si $s(n,m)$ es una sucesión doble acotada, entonces existe una subsucesión convergente $s(p_n,q_m)$ tal que

$$\text{lím}_{n\to\infty}\, lim_{m\to\infty} s(p_n,q_m) \text{ y } \text{lím}_{m\to\infty}\, lim_{n\to\infty} s(p_n,q_m),$$

existen y son iguales a el límite doble

$$\lim_{n,m\to\infty} s(p_n,q_m).$$

Demostración. $s(n,m)$ es una sucesión doble acotada de números reales por hipótesis y sabemos por el Corolario 4.6 que $s(n,m)$ tiene una subsucesión monótona $s(p_n,q_m)$ tal que

$$\text{lím}_{n,m\to\infty} s(p_n,q_m) \text{ existe.}$$

Ya que la subsucesión es acotada, implicamos por el Teorema 3.2 que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \text{lím}_{m\to\infty} s(p_n,q_m) = \text{lím}_{m\to\infty} \text{lím}_{n\to\infty} s(p_n,q_m) = \text{lím}_{n,m\to\infty} s(p_n,q_m).$$

□

Teorema 4.8. (*Criterio de Divergencia.*) Sea $s(n,m)$ una sucesión doble. Entonces las siguientes afirmaciones equivalentes:

i) $s(n,m)$ no converge a a.

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|s(n_0, m_0) - a| \geq \epsilon_0,$$

para cada $n_0, m_0 \geq k$.

iii) Existe $\epsilon_0 > 0$ y una subsucesión $s(p_n, q_m)$ de $s(n,m)$ tal que

$$|s(p_n, q_m) - a| \geq \epsilon_0 \text{ para toda } n, m \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

i)$\Rightarrow$ ii) Negando la definición de convergencia tenemos esta implicación.

ii) $\Rightarrow$ iii) Existe $\epsilon_0 > 0$ y $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1, m_1 \geq 1$, implicamos que

$$|s(n_1, m_1) - a| \geq \epsilon_0.$$

Ahora, sea $n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $(n_2, m_2) \geq (n_1 + 1, m_1 + 1)$, entonces

$$|s(n_2, m_2) - a| \geq \epsilon_0.$$

Continuando con este proceso obtenemos una subsucesión $s(p_n, q_m)$ estrictamente creciente de pares ordenados en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tal que

$$|s(p_n, q_m) - a| \geq \epsilon_0.$$

iii) $\Rightarrow$ i) Es una equivalencia del teorema 4.1. $\square$

Teorema 4.9. Sea $a \in \mathbb{R}$, $s(n,m)$ una sucesión doble acotada y $s(n,m)$ tiene la propiedad que toda subsuceción es convergente. Entonces la sucesión $s(n,m)$ converge a a.

Demostración. Supongamos que $s(n,m)$ no converge a a. Entonces por el Criterio de Divergencia tenemos que existe $\epsilon_0 > 0$ y una subsucesión $s(p_n, q_m)$ tal que

$$|s(p_n, q_m) - a| \geq \epsilon_0, \tag{4.1}$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$.

Siendo $s(n,m)$ acotada, entonces una subsucesión $s(p_n, q_n)$ también lo es. Ahora, por el teorema de Bolzano-Weierstrass $s(p_n, q_m)$ tiene una subsucesión $s(p_k, q_j)$ convergente. Por lo tanto,

$$\text{lím}_{j,k\to\infty} s(p_k, q_j) = a,$$

esto implica que para cada $\epsilon_0 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, j \geq N$ entonces

$$|s(p_k, q_j) - a| < \epsilon_0. \tag{4.2}$$

Ya que todo termino de $s(p_k, q_j)$ es termino de $s(p_n, q_m)$, vemos que (4.2) es una contradicción de (4.1). $\square$

Capítulo 5

Aplicación a la convergencia de integrales

En este capítulo aplicaremos algunos teoremas de sucesiones dobles a la existencia de integrales impropias para funciones definidas en dominios no acotados de $\mathbb{R}^2_+$.
Vamos a recordar la definición de integral de funciones definidas sobre rectángulos compactos.

Definición 5.1. Sean $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f : R \to \mathbb{R}$ f es integrable sobre R si el límite siguiente existe

$$\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, y la suma se extiende a aquellos valores de i, j para los cuales $(x_i, y_j) \in R$. El límite anterior se llama ***integral doble*** sobre R y se denota como $\iint_R f(x, y)\ d(x, y)$.

Definición 5.2. Si f está definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y si, para cada x fija, $f(x, \cdot)$ es una función integrable de y, entonces esta integral define una función g en $[a, b]$ tal que

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\ dy.$$

Si a su vez, g es una función integrable de x, el resultado

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dy\ dx$$

se llama ***integral iterada*** y se denotará por

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dx\ dy.$$

A continución proporcionaremos la definición de una integral impropia sobre un dominio no acotado y una condición de convergencia.

Definición 5.3. Sea Ω un dominio (no acotado) infinito. Una sucesión de subdominios (acotados) finitos

$$\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n, ... \tag{5.1}$$

se dice que es **exhaustiva** si para cualquier $r > 0$ existe un $m = m(r) \in \mathbb{N}$ tal que todos los puntos del dominio Ω que están dentro del círculo de radio r con centro en el origen y pertenecen a todos los Ω_n donde $n > m(r)$.

Definición 5.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio finito. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es integrable impropiamente (en el sentido ordinario) si para cualquier sucesión exhaustiva (5.1) le corresponde la sucesión de integrales

$$\iint_{\Omega_1} f(M)\, d\omega, \iint_{\Omega_2} f(M)\, d\omega, ..., \iint_{\Omega_n} f(M)\, d\omega...$$

que convergenten a un mismo límite finito J. En este caso la integral se denotará como tal y se dirá ***convergente***. Si no existe tal J la integral sobre Ω es **divergente**.

Nota: En la practica es dificil hallar el valor de una integral doble impropia. Lo que se hace es hallar el valor de cierto tipo de integral impropia cuando el $\Omega = \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^2_+$ y la sucesión de subdominios finitos Ω_n son rectángulos de la forma $[-n, n] \times [-m, m]$ o $[0, n] \times [0, m]$ respectivamente.
En el siguiente ejemplo mostraremos que depende del tipo de sucesión elegida encontramos diferentes valores del límite de integrales.

Ejemplo 5.1. Mostrar que

$$lim_{n\to\infty} \iint_{\substack{|x|\leq n \\ |y|\leq m}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, d(x, y)$$

y

$$lim_{n\to\infty} \iint_{x^2+y^2\leq n^2} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, d(x, y)$$

son distintos.

Demostración. Efectuando un cambio a coordenadas polares, esto es, haciendo

$$x = r\cos\ \theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\ \theta.$$

Se tiene que

$$\iint_{\substack{|x|\le n\\|y|\le m}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\ d(x,y) = \iint_{[0,n]\times[0,2\pi]} r\operatorname{sen}(r^2)\ d(r,\theta)\ \text{(por Fubini)}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^n r\operatorname{sen}(r^2)\ dr\ d\theta$$
$$= \pi(-\cos(n^2)+1).$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\substack{|x|\le n\\|y|\le m}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\ d(x,y) = \lim_{n\to\infty}\pi(-\cos(n^2)+1)$$

no existe. Mientras que

$$\iint_{x^2+y^2\le 2\pi n} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\ d(x,y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n r\operatorname{sen}(r^2)\ dr$$
$$= (2\pi)\int_0^n r\operatorname{sen}(r^2)\ dr$$
$$= 2\pi\left(\frac{-\cos 2\pi n}{2}+\frac{\cos 2\pi n}{2}\right)$$
$$= 0.$$

Por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le 2\pi n} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\ d(x,y) = 0.$$
De lo anterior concluimos que la integral impropia no existe. □

Ejemplo 5.2. Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\substack{|x|\le n\\|y|\le n}} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y)$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le n^2} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y)$$

son iguales.

Demostración. Sea
$$I = \int e^{-t^2} dt,$$

entonces

$$I^2 = \left(\int e^{-t^2} dt \right) \left(\int e^{-t^2} dt \right).$$

Tomando un caso particular tenemos que

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int e^{-x^2} dt \right) \left(\int e^{-y^2} dt \right) \\ &= \iint e^{-(x^2+y^2)} d(x,y). \end{aligned}$$

Efectuando un cambio a cooredenas polares, esto es, haciendo

$$\begin{aligned} x &= r \cos\ \theta \\ y &= r \operatorname{sen}\ \theta. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^n r e^{-r^2} dr\ d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \iint e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \pi.$$

Haciendo las mismas operaciones tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{x^2+y^2\leq n^2} e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \pi.$$

De lo que concluimos que la integral impropia existe sin importar la región de integración. □

Tomando los ejemplos anteriores nos rentringiremos a aplicar algunos teoremas sobre sucesiones a la existencia de integrales impropias " De algún tipo " que existe sobre rectángulos.

Teorema 5.1. Sean $f, g, h : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que para cada $(x,y)\ \in \mathbb{R}_+^2$ tenemos:

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

y supongamos también que las integrales

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\ d(x,y) \text{ y } \iint_{\mathbb{R}_+^2} h(x,y)\ d(x,y)$$

son iguales. Entonces g es integrable y además

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\, d(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2_+} g(x,y)\, d(x,y).$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} s_1(n,m) &= \int_0^m \int_0^n f(x,y)\, dx\, dy \\ s_2(n,m) &= \int_0^m \int_0^n g(x,y)\, dx\, dy \\ s_3(n,m) &= \int_0^m \int_0^n h(x,y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\, d(x,y) &= \lim_{n,m\to\infty} \int_0^m \int_0^n f(x,y)\, dx\, dy \\ \iint_{\mathbb{R}^2_+} h(x,y)\, d(x,y) &= \lim_{n,m\to\infty} \int_0^m \int_0^n h(x,y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

Además como

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) \text{ para cada } x,y \in \mathbb{R}^+$$

entonces para cada $n,m \in \mathbb{N}$:

$$s_1(n,m) \leq s_2(n,m) \leq s_3(n,m).$$

Aplicando el Teorema 1.5 se tiene que

$$\lim_{n,m\to\infty} s_2(n,m) = \lim_{n,m\to\infty} s_1(n,m).$$

Es decir,

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} g(x,y)\, d(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\, d(x,y).$$

$\square$

Ejemplo 5.3. Mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2y^2} e^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{xy})}\, dx\, dy = 0$.

Demostración. Tenemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(\frac{\pi}{xy}) \leq 1$ para todo $x,y \in \mathbb{N}$, entonces

$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{xy})} \leq e^1$$

y

$$e^{-1}\int_{-m}^{m}\frac{1}{y^2}\,dy\int_{-n}^{n}\frac{1}{x^2}\,dx=0 \text{ y}$$
$$e^{1}\int_{-m}^{m}\frac{1}{y^2}\,dy\int_{-n}^{n}\frac{1}{x^2}\,dx=0.$$

Así, por el Teorema 5.2 se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2y^2}e^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{xy})}\,dx\,dy=0.$$

□

Teorema 5.2. Sea $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ tal que $\iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\,d(x,y)=a$ y $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ existe para cada $y\in\mathbb{N}$. Se satisface que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=a.$$

Demostración. Sea

$$s(n,m)=\int_0^m\int_0^n f(x,y)\,dx\,dy.$$

Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{n,m\to\infty} s(n,m)=a \text{ y } \lim_{n\to\infty} s(n,m) \text{ existe para cada } m\in\mathbb{N}.$$

Por el Teorema 2.1, se tiene que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s(n,m)=a.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy=a.$$

□

Corolario 5.3. Sea $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ tal que $\iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\,d(x,y)=a$ y $\int_0^\infty f(x,y)\,dy$ existe para cada $x\in\mathbb{N}$. Se satisface que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dy\,dx=a.$$

Demostración. Similar al teorema anterior. □

Combinando los dos resultados anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.4. Sea $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ tal que $\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\ d(x,y) = a$ y

i) $\int_0^\infty f(x,y)\ dx$ existe para cada $y\ \in \mathbb{N}$,

ii) $\int_0^\infty f(x,y)\ dy$ existe para cada $x\ \in \mathbb{N}$.

Entonces
$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dy\ dx$$
existen y son iguales a a.

Definición 5.5. Sea f una función de valor real, definida para (x,y) tal que $x \geq 0$ y $\alpha \leq y \leq \beta$. Supongase que para cada $y \in J = [\alpha, \beta]$ la integral infinita
$$F(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx$$
existe. Decimos que esta convergencia es **uniforme sobre** J si para cada $\epsilon > 0$, existe $M(\epsilon)$ tal que
$$\left| F(y) - \int_0^c f(x,y)\ dx \right| < \epsilon \text{ para cada } y\ \in J$$

A continuación daremos un resultado el cual nos proporciona condiciones para que las integrales iteradas y la integral doble sean iguales.

Teorema 5.5. Sea $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ tal que

i) $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dx\ dy = a$ y

ii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^m \int_0^n f(x,y)\ dx\ dy$ existe uniformemente respecto a $m\ \in \mathbb{N}$,

entonces
$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^m \int_0^n f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\ d(x,y) = a.$$

Demostración. Para $n, m\ \in \mathbb{N}$, $s(n,m) = \int_0^m \int_0^n f(x,y)\ dx\ dy$. Por i) se tiene que
$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s(n,m) = a.$$
Ahora por ii), tenemos que $\lim_{n\to\infty} s(n,m)$ existe uniformemente con respecto a $m\ \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, del Teorema 2.4 obtenemos que
$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)\ d(x,y) = a.$$
$\square$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, Mathematical Analysis, Second edition, Addison Wesley, Massachussetts, U.S.A 1974.

[2] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Second edition, Wiley and Sons, New York. London. Sydney, 1992.

[3] Eissa D. Habil, "Double Sequences and Double Series, the Islamic University Journal", Series of Natural Studies and Engineering, vol. 14, pp. 1-32, 2006.

[4] H. I. Miller and R. F. Patterson," Core Theorems for Double Subsequences and Rearrangements", Acta Math. Hugar.,119 (1-2) (2008), 71-80.

[5] Isabel Marrero,"Integrales Impropias múltiples", Departamento de Análisis Matematico, Universidad de La Laguna, Open Course Ware, 2011/12.

[6] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third edition, McGraw-Hill, U.S.A, 1976.

[7] Yu Takeuchi, Sucesiones y series, Segunda reimpresión, Editorial Limusa, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

Índice alfabético