BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Continuos, hiperespacios y funciones de Whitney”

Tesis para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta

Noemi Sampayo Paredes

Directores de Tesis

Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado y
Dr. David Herrera Carrasco

Puebla, Pue., 19 de junio de 2015.

Con cariño y agradecimiento.

A mis padres.
Paredes Aparicio Asunción
Sampayo Romero Joaquin

A mis hermanos.
Enriqueta, Humberto, Joaquin, Diego, Sonia y Fabian

A mis amores.
Gonzalo y S. Sarmiento Sampayo

Noemi

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios por permitirme lograr este proyecto, por la vida y por la bella familia que me prestó. A mis padres en especial, a mi madre por su gran ejemplo de lucha, persistencia y esfuerzo, por ser mi principal consejera y soporte durante la vida y en mi carrera, a mi padre por su cariño, paciencia y comprensión.

Agradezco a mis hermanos por tener siempre una palabra alentadora cuando más lo necesité. A Queta por su apoyo incondicional, a Beto por su gran ejemplo y consejos recibidos, a Quin por su apoyo y comprensión, a Diego por su hospilatilidad y cariño, a Soni por compartir tantas vivencias buenas y no tan buenas, por llorar, reír y salir adelante a mi lado, a Faby por que a pesar de ser el más pequeño nos ha dado grandes ejemplos. A todos ustedes les dedico con mucho amor esta tesis.

También dedico este trabajo a Gonzalo por compartir la última étapa de mi carrera, por su apoyo, confianza y paciencia.

Nada de esto se hubiera logrado sin la aportación de cada maestro desde mi nivel básico, gracias a todos los profesores que fueron parte de mi formación académica, en especial al ingeniero José Orlando Santillán Castillo, pero sobre todo agradezco infinitamente a Vianey y a los doctores David Herrera Carrasco y Fernando Macías por su enorme paciencia, apoyo y amistad. Agradezco también el tiempo dedicado a la revisión de mis sinodales.

No podría olvidar a esa familia que me tocó elegir, claro mis amigos universitarios, en especial a las chicas: Anahí, Cecy y Pily, gracias por compartír locuras, tristezas y alegrías, así como también a Anabel y familia por su hospitalidad, amistad y cariño, a Huguito por ser mi asesor durante la carrera, a Arturo

y Mayra y por supuesto a mis entrañables amigos Marcos y Oli, no podría olvidar las aventuras con Lulú y su bella amistad, así como también a Mary, Germán, Lázaro, Emanuel, Toñitos, Abraham, Vivi, Andrea y Delfino, una disculpa a quienes haya olvidado mencionar.

Y claro con mucho cariño a mis primos, casi hermanitos Gloria y Leo.

Introducción

La presente tesis está enfocada a una rama de la topología conocida como teoría de los continuos. Al hablar de los continuos, hacemos referencia a espacios métricos no vacíos, compactos y conexos. La tesis está divida en dos capítulos y para la elaboración de este trabajo se recurrió a la bibliografía señalada.

En el primer capítulo iniciamos con conceptos preliminares, también analizamos algunas propiedades de los continuos, así como los ejemplos más comunes dentro de la topología.

Además este capítulo está enfocado a los hiperespacios y la topología de Vietoris y algunos resultados relacionados con dicho tema. Dado un continuo X, los hiperespacios de X son familias de subconjuntos que satisfacen algunas propiedades particulares. A estas familias de subconjuntos de X se les dota de una topología mediante la métrica de Hausdorff. El estudio de la teoría de los hiperespacios tiene sus inicios en los primeros años del siglo XX, con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris, ver [2]
Los hiperespacios con los que trabajamos con mayor énfasis a través de la tesis son los siguientes: El hiperspacio 2^X, que consiste de todos los conjuntos no vacíos y cerrados en X, es decir, $2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\}$. Otro hiperespacio es $C(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\}$, el cual es conocido como el hiperespacio de todos los subcontinuos de X. El Capítulo 2 está dividido en tres subtemas. El primero es un método para construir un tipo especial de funciones llamadas funciones de Whitney, las cuales se definen de la siguiente manera.

Dado un continuo X y una función continua $\mu \colon 2^X \to \mathbb{R}$, se dice que μ es una función de Whitney para el hiperespacio 2^X si satisface las condiciones siguientes.

(a) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$.

(b) Para cada $A, B \in 2^X$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$ es una función continua de $C(X)$ en $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones (a) y (b).

El segundo subtema del Capítulo 2 está dedicado a los arcos ordenados y algunos teoremas relacionados. Dado un continuo X y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, una función continua $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ es un arco ordenado si cumple las condiciones siguientes.

(1) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

(2) Si $u, v \in [0,1]$ tales que $u < v$, entonces $\alpha(u) \subsetneq \alpha(v)$.

Finalmente el tercer subtema, el cual es más importante del Capítulo 2, es el de propiedades de Whitney, donde se describen teoremas que nos permiten adentrarnos en dicho tema, llamamos propiedad de Whitney a toda propiedad topológica P que cumple que si X es un continuo con la propiedad topológica P, entonces para cada función de Whitney de $C(X)$ y para cada $t \in [0, \mu(X)]$ se cumple que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P.

Existen varias propiedades topológicas que cumplen ser propiedades de Whitney, en este trabajo hacemos el análisis de las cinco propiedades siguientes.

Teorema 2.27. La propiedad de ser un continuo es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.33. La propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney.

Teorema 2.34. La propiedad de ser un continuo arco conexo es una propiedad de Whitney.
Teorema 2.35. La propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney.
Teorema 2.39. La propiedad de ser un continuo descomponible es una propiedad de Whitney.

Noemi Sampayo Paredes,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
19 de junio de 2015.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

La presente tesis requiere recordar definiciones y resultados necesarios para abordar el tema de las funciones de Whitney, por lo que iniciaremos el capítulo con las definiciones siguientes . En este trabajo, X representa un espacio topológico. El interior de un conjunto $Y \subset X$ es el conjunto de todos los puntos interiores de Y, y se le denota como $int_X(Y)$. Un conjunto $Y \subset X$ es abierto si todo punto de Y es un punto interior de Y.

Definición 1.1. *Una **métrica** d en un conjunto X es una función*

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

(1) Para todo x, y de X, se cumple que $d(x, y) \geq 0$.

(2) Para todo par de puntos x y y de X, se cumple que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(3) Para todo par de puntos x y y de X, se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$.

(4) Para toda x, y y z de X, se cumple que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 1.2. *Un **espacio métrico** es la pareja ordenada (X, d), donde X es un conjunto y d una métrica en X.*

Definición 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico, una **bola abierta** de centro x y radio r, es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.*

Un concepto importante en este trabajo es el de compacidad, previamente enunciaremos la definición de cubierta, un concepto que nos permitirá definir lo que es un espacio compacto.

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Una **cubierta** de X es una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Si cada $C \in \mathcal{C}$ es abierto en X, entonces decimos que $\mathcal{C}$ es una **cubierta abierta** de X. Una **subcubierta** de $\mathcal{C}$ es una subcolección de $\mathcal{C}$ que también es una cubierta de X.*

Ejemplo 1.5. *Sean $\mathcal{C}_1 = \{B(p, 1) : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{B(p, \frac{1}{2}) : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$. Notemos que $\mathcal{C}_1$ es una cubierta de $\mathbb{R}^2$, mientras que $\mathcal{C}_2$ no lo es, porque por ejemplo, el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ no pertenece a ningún elemento de $\mathcal{C}_2$.*

Definición 1.6. *Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta abierta de X contiene una subcubieta finita.*

Ejemplo 1.7. *Si A es un subconjunto finito de un espacio topológico X, por ejemplo $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces A es compacto, porque si $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de A, tenemos que existen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $a_1 \in C_1, \ldots, a_n \in C_n$. Luego, $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, es decir, $\mathcal{C}$ contine una subcubierta finita.*

Definición 1.8. *Un espacio topológico X es **conexo** si no es la unión de dos subconjuntos no vacíos de X, disjuntos y abiertos en X.*

Definición 1.9. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$, la* ***distancia*** *entre los conjuntos A y B es*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \colon a \in A \ y \ b \in B\}.$$

Definición 1.10. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, el* ***diámetro*** *de A es*

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(a, b) \colon a \in A \ y \ b \in A\}.$$

Definición 1.11. *Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$. La* ***ε-nube*** *alrededor de A en X, es*

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X \colon \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Definición 1.12. *Sean (X, d) un espacio métrico, compacto. La* ***Métrica de Hausdorff*** *se define por $H \colon 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$, definida para cada $A, B \in 2^X$ por, $H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon \colon A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)\}$.*

1.1. Continuos

Esta sección tiene como objetivo resaltar propiedades importantes de los continuos así como los ejemplos más comunes. Iniciaremos dando la deficinión de continuo.

Definición 1.13. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Definición 1.14. *Un* ***subcontinuo*** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es continuo. Es decir, es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo.*

Definición 1.15. *Un subcontinuo U de X es* ***subcontinuo propio*** *de X si $U \neq X$.*

A continuación mencionaremos ejemplos esenciales de continuos.

El continuo más sencillo es el arco.

Definición 1.16. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Sean $f\colon [0,1] \to A$ un homeomorfismo, $p = f(0)$ y $q = f(1)$, los puntos p y q son los* ***puntos extremos del arco*** *A. Un arco de p a q es un arco con puntos extremos p y q.*

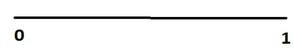

Figura 1.1: arco [0, 1]

Otros continuos básicos son:

Definición 1.17. *La* ***circunferencia unitaria****, denotada por S^1, es $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Una* ***curva cerrada simple*** *es una copia topológica de la circunferencia unitaria S^1.*

Definición 1.18. *Dado $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0,1]$ se denota con I^n. Es decir,*

$$I^n = \prod_{k=1}^{n} I_k,$$

donde $I_k = [0,1]$, para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Una ***n-celda*** *es un espacio topológico homeomorfo a I^n.*

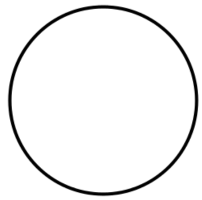

Figura 1.2: Circunferencia unitaria

Definición 1.19. *Dado $n \in \mathbb{N}$, una* ***n-esfera*** *es un espacio homeomorfo a la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R},^{n+1}$ donde*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}.$$

Definición 1.20. *Consideremos en el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, los subconjuntos siguientes: $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$ y $Y = \{0\} \times [-1, 1]$. El espacio topológico $X = W \cup Y$ es el* ***continuo*** *$sen(\frac{1}{x})$.*

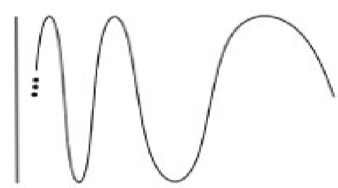

Figura 1.3: Continuo $sen(\frac{1}{x})$

Definición 1.21. *Un* ***cubo de Hilbert*** *es cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio*

$$\prod_{i=1}^{\infty} I_i,$$

para toda i, donde $I_i = [0, 1]$, con la topología producto, .

Definición 1.22. ***Circunferencia de Varsovia*** *es el nombre del continuo homeomorfo a $Y \cup Z$, donde Y es el continuo $sen(\frac{1}{x})$*

y Z es la unión de tres arcos convexos en $\mathbb{R}^2$ uno de $(0,-1)$ a $(0,-2)$, otro de $(0,-2)$ a $(1,-2)$ y el tercero de $(1,-2)$ a $(1, sen(1))$.

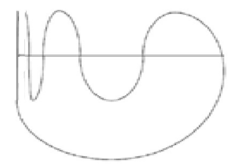

Figura 1.4: Circunferencia de Varsovia

A continuación mencionamos algunas propiedades y resultados relacionados con los continuos. Una propiedad de los continuos es la noción de descomponible

Definición 1.23. *Un continuo X es* ***descomponible*** *si puede ser puesto como la unión de dos subcontinuos propios.*

Definición 1.24. *El espacio topológico Y es* ***conexo por trayectorias*** *si para cualesquiera dos elementos $p, q \in Y$, existe una función continua $\gamma\colon [0,1] \to Y$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.*

Definición 1.25. *Un continuo X es* ***arco conexo*** *si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un arco en X de x a y.*

Definición 1.26. *Si X es un continuo y p es un punto en X, entonces X es* ***localmente conexo*** *en el punto p, si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un abierto y conexo V en X tal que $p \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo, si lo es en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.27. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es* ***conexo en pequeño en*** *x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un conexo V en X tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$.*

Diremos que X es conexo en pequeño, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Teorema 1.28. *[3, Teorema 1.17] Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si toda componente de cada abierto en X es un abierto en X.*

Teorema 1.29. *[3, Teorema 1.18] Sea X un continuo. Entonces X es conexo en pequeño si y solo si X es localmente conexo.*

Teorema 1.30. *[3, Teorema 2.2] Si X es un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces*

(1) $A \subset N(\varepsilon, A)$,

(2) $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$,

(3) $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ *para cada* $\delta > 0$ *tal que* $\delta < \varepsilon$, *y*

(4) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) \colon \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$.

Observación 1.31. *Por el inciso (2) del teorema anterior podemos afirmar que $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X.*

1.2. Hiperespacios

Dado un continuo X, los **hiperespacios** de X son familias de subconjuntos que satisfacen algunas propiedades particulares. A estas familias de subconjuntos de X se les dota de una topología mediante la métrica de Hausdorff. A continuación enunciamos los hiperespacios más estudiados:

Definición 1.32. *Dado un continuo X, el* **hiperspacio** 2^X *consiste de todos los subconjuntos de X no vacíos y cerrados en X, es decir,*

$$2^X = \{A \subset X \colon A \textit{ es cerrado y no vacío } \}.$$

Definición 1.33. *Dado un continuo* X, *el* **hiperespacio** $C(X)$, *consiste de todos los subcontinuos de* X, *es decir,*

$$C(X) = \{A \in 2^X \colon A \textit{ es conexo}\}.$$

Definición 1.34. *Dados un continuo* X *y* $n \in \mathbb{N}$, *el* **n-ésimo producto simétrico de** X *es*

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ puntos}\}.$$

Definición 1.35. *Dados un continuo* X *y* $n \in \mathbb{N}$, *el* **n-ésimo hiperespacio de** X *es*

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes}\}.$$

Observemos que, todos estos espacios se definen como subespacios de 2^X. También $C(X)$ es lo mismo que $C_1(X)$ y $F_1(X) = \{\{p\} \in 2^X \colon p \in X\}$. Además, para $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$.
A continuación enunciamos algunos resultados importantes relacionados con los hiperespacios. Observemos que todo los hiperespacios de un continuo los podemos considerar con la topología inducida por la métrica de Hausdorff o con la topología de Vietoris, es por eso que a continuación enunciamos la definición de vietórico y algunos resultados relacionados.

Definición 1.36. *Sean* X *un continuo,* $n \in \mathbb{N}$ *y* $U_1, \ldots, U_n$ *subconjuntos no vacíos de* X. *El* ***vietórico*** *de* $U_1, \ldots, U_n$, *denotado por* $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, *es el conjunto*

$$\Big\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \textit{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \textit{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}.$$

Definición 1.37. *Dado un subconjunto A de un continuo X. Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X.*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Teorema 1.38. *Si X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. Las afirmaciones se siguientes cumplen.*

(1) $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$,

(2) para cada $A \subset X$, tenemos que $\Gamma(A) = \langle A \rangle$,

(3) cada $A \subset X$, tenemos que $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.

Demostración. Para ver que se cumple *1*, notemos que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle =$$

$$\{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^n U_i\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$
$$= \Gamma(\cup_{i=1}^n U_i) \cap [\cap_{i=1}^n \Lambda(U_i)].$$

Por lo tanto, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$.

Los demás incisos se demuestran de manera análoga. □

Teorema 1.39. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_m$ subconjuntos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, entonces*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle =$$

$$\langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$

$$= \Gamma(U) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)\Big] \cap \Gamma(V) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^m \Lambda(V_i)\Big].$$

Así, $A \subset U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U)$

$$= \Big[U \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_i)\Big] \cup \Big[V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\Big]$$

$$= \Big[\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)\Big].$$

Por otro lado, como $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $A \subset V$, tenemos que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. También para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se puede probar de manera análoga a lo anterior $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$. De manera que

$$A \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Por lo tanto, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subset \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m \rangle$.

Para probar la otra contención, sea

$$A \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle.$$

Entonces, $A \subset U \cap V$. Es decir, $A \subset U$ y $A \subset V$. Así, $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_i) = A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $A \in \Lambda(V_i)$. Así, de manera análoga se puede ver que $A \in \Lambda(U_i)$. Por tanto, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. $\square$

Teorema 1.40. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que*

$$A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $a \in U_i$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Luego, como X es regular, existe un abierto V_a en X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_i$.

Así, $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $b_i \in A \cap U_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea W_i abierto en X tal que $b_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.

Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean

$$J_i = \{k \in \{1, 2, \ldots, m\} : \overline{V_{a_k}} \subset U_i\} \text{ y } V_i = W_i \cup \big(\textstyle\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k}\big).$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que V_i es abierto en X, con $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$.

Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así, $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.

Por tanto, existen abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

El siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X de un continuo X dado.

Teorema 1.41. *[3, Teorema 2.20] Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Teorema 1.42. *[3, Teorema 3.28] Si X es un continuo, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X.*

Teorema 1.43. *[3, Teorema 3.29] Sean X un continuo y $A_1, A_2,$- $\ldots, A_n$ subcontinuos no degenerados de X. Tenemos que*

(1) $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ es un subconjunto conexo de 2^X.

(2) Si $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \cap C(X) \neq \emptyset$, *entonces* $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle \cap C(X)$ *es un subconjunto conexo de* $C(X)$.

Teorema 1.44. *Sea* X *un continuo no degenerado. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) X *es localmente conexo,*

(2) 2^X *es localmente conexo,*

(3) $C(X)$ *es localmente conexo.*

Demostración. Sea X localmente conexo. Veamos que 2^X lo es. Por el Teorema 1.29, basta probar que 2^X es conexo en pequeño. Sea $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ un abierto en 2^X tales que $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 1.41, tenemos que $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_1, \ldots, U_n$ *son abiertos en* X, $n \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología del hiperespacio 2^X. Así, existen $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$.

Luego, por el Teorema 1.40, existen abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $a \in A$. Entonces para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $a \in V_j$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Consideremos la componente C_a de V_j tal que $a \in C_a$. Así, $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} C_a$. Dado que X es localmente conexo, por el Teorema 1.28, para cada $a \in A$, tenemos que C_a es abierto en X.

Como X es compacto y A es un cerrado en X, inferimos que A es compacto, luego, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^r C_{a_i}$. Observemos que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, tenemos que $C_{a_i} \subset \overline{C_{a_i}} \subset U_j$, para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $A \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $x_i \in A \cap V_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea C_{x_i} la componente de V_i tal que $x_i \in C_{x_i}$. Como X es localmente conexo, por el Teorema 1.28, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, inferimos que C_{x_i} es un abierto en X. Notemos que $C_{x_i} \subset \overline{C_{x_i}} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$J_i = \{k \in \{1, \ldots, r\} : C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $J_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $W_i = C_{x_i} \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} C_{a_k}\right)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que W_i es conexo y abierto en X, ya que es unión de conexos y abiertos en X. De manera que $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ es abierto en 2^X, y $A \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$.

Además, $W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego,

$$A \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle \subset \langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \ldots, \overline{W_n} \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

Notemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la componente C_{x_i} tiene más de un punto. En efecto, si existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in X$ tal que $C_{x_l} = \{x\}$, entonces C_{x_l} es abierto y cerrado en X. De manera que $C_{x_l} = X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo no degenerado de X. Luego, por el Teorema 1.43, inferimos que $\langle \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_n} \rangle$ es un conexo tal que $A \in int_{2^X}(\langle \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_n} \rangle) \subset \mathcal{U}$. Esto prueba que 2^X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.29, se sigue que 2^X es localmente conexo.

De manera análoga se prueba que si X es localmente conexo, entonces $C(X)$ es localmente conexo. Ahora, supongamos que 2^X es localmente conexo, veamos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U un abierto en X tal que $p \in U$. Se sigue que

$\{p\} \in \langle U\rangle$. Notemos que $\langle U\rangle$ es abierto en 2^X. Consideremos un abierto $\mathcal{W}$ en 2^X tal que $p \in \mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \langle U\rangle$. Como 2^X es localmente conexo, existe un conexo y abierto $\mathcal{V}$ en 2^X tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Por el Teorema 1.41, existen abiertos $U_1, \ldots, U_n$ en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{V}$. Luego, por el Teorema 1.40, existen abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que

$$\{p\} \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Así, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Como $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U\rangle$, se sigue que $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \subset \bigcup \overline{\mathcal{V}} \subset U$. Dado que $\{p\} \in \overline{\mathcal{V}} \cap C(X)$, tenemos que $\overline{\mathcal{V}} \cap C(X) \neq \emptyset$. Como $\overline{\mathcal{V}}$ es un subcontinuo de 2^X, por el Teorema 1.42, tenemos que $\bigcup \overline{\mathcal{V}}$ es un conexo de X. Sea $V = \bigcup \overline{\mathcal{V}}$, por lo tanto, $p \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset V \subset U$. Como $\bigcup_{i=1}^n V_i$ es abierto en X, concluimos que $p \in int_X(V) \subset V \subset U$. Así, X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.29, tenemos que X es localmente conexo.

De manera similar de demuestra que si $C(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo. $\square$

Teorema 1.45. *[5, Lema 2.1]Si (X, d) un espacio métrico, entonces se cumple lo siguiente.*

(a) Si $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces $A \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$.

(b) Sean $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

(c) Para cada $m \in \mathbb{N}$, sean $A_m, B_m \in 2^X$ tales que $A_m \subset B_m$ y las sucesiones $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen a A y B en 2^X, respectivamente. Entonces $A \subset B$.

Teorema 1.46. *[8, Observación 0.9] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos.*

Capítulo 2

Propiedades de Whitney

2.1. Funciones de Whitney

Las funciones de Whitney resultan en la actualidad una herramienta esencial para el estudio de los hiperespacios, la primera construcción de las funciones de Whitney se realizó en los años 1930's por Hassley Whitney, pero en el año 1942, Kelley fue el primero en usar este tipo de funciones, ver [7].

Definición 2.1. *Sea X un continuo. Una **función de Whitney para el hiperespacio** 2^X es una función continua $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones siguientes.*

(a) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$.

(b) Para cada $A, B \in 2^X$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

*Una **función de Whitney para el hiperespacio C(X)** es una función continua de $C(X)$ en $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones (a) y (b).*

A continuación mostramos un ejemplo de una función que no es función de Whitney.

Ejemplo 2.2. *La función diámetro diám*: $2^{[0,1]} \to [0,1]$ *no es una función de Whitney para* $2^{[0,1]}$*, recordemos que diám*$([0,1]) =$ *diám*$(\{0,1\})$*. En cambio, si restringimos esta función a* $C([0,1])$*, si es una función de Whitney.*

Demostración. Sean $\{0,1\},[0,1] \in 2^{[0,1]}$ tal que $\{0,1\} \subsetneq [0,1]$, pero como *diám*$([0,1]) =$ *diám*$(\{0,1\})$ no se cumple la segunda propiedad de una función de Whitney. Por tanto, *diám*: $2^{[0,1]} \to [0,1]$ no es una función de Whitney. Sin embargo, si usamos la función *diám*: $C([0,1]) \to [0,1]$, observemos que se cumplen las dos propiedades:

(a) Sea $[0,1] \in C([0,1])$, como $[0,1]$ es cerrado y conexo al aplicar la función *diám* se tiene: *diám*$(\{[0,1]\}) = 0$.

(b) Dada la función *diám*: $C([0,1]) \to [0,1]$ y si $[a,b],[c,d] \in C([0,1])$ tal que $[a,b] \subsetneq [c,d]$ deducimos que *diám*$([a,b]) <$ *diám*$([c,d])$.

Por tanto, *diám*: $C([0,1]) \to [0,1]$ si es una función de Whitney. □

Teorema 2.3. *Si* X *es un continuo arco conexo y la función diámetro es una función de Whitney para* $C(X)$*, entonces* X *es un arco.*

Demostración. Tomemos $a,b \in X$ tales que *diám*$(X) = d(a,b)$. De acuerdo a la hipótesis existe un arco A en X que une a los puntos a y b; observe que *diám*$(A) =$ *diám*(X). Por tanto, como la función es de Whitney y $A \subset X$ se tiene que $A = X$. □

Teorema 2.4. *[1, Teorema 2.5] Sean* X *un continuo y* μ *una función de Whitney para* 2^X*. Para cada* $m \in \mathbb{N}$*, sean* $A_m, B_m \in 2^X$ *tales que* $A_m \subset B_m$ *y* $\mu(B_m) - \mu(A_m) < \frac{1}{m}$*. Si las sucesiones*

$\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen a A y B en 2^X, respectivamente, entonces $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) = 0$. En particular $A = B$.

Así como el teorema anterior, necesitamos hacer algunas observaciones y plantear la notación y definiciones, como antecedentes para la construcción de una función de Whitney.

Notación 2.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mu_n \colon 2^X \to \mathbb{R}$, para cada $A \in 2^X$ por, $\mu_n(A) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, ..., x_n \in X$, tal que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, ..., x_n\})\}$.*

Definición 2.6. *Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones definidas en $D \subset \mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$ es **uniformemente acotada** si existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| < M$ para todo $x \in D$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

A continuación se describe el criterio M de Weierstrass, este nos permitirá una forma de construir funciones continuas a partir de sucesiones de funciones continuas. Además, servirá para dar una expresión explícita de algunas funciones de Whitney.

Teorema 2.7. *[6, Teorema 10.5] Si $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tales que $|\mu_n(x)| < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in X$, entonces la función $\mu \colon X \to \mathbb{R}$ definida por $\mu(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(x)}{2^n}$ es una función continua.*

Teorema 2.8. *Si para cada $n \in A$ y $\mu_n \colon 2^X \to \mathbb{R}$ es una función definida para cada $A \in 2^X$ por $\mu_n(A) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, ..., x_n\})\}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la función μ_n es continua y la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}, A \in 2^X$ y $\eta > 0$. Tomemos $\delta = \frac{\eta}{2}$. Para probar que μ_n es continua veremos que si $B \in 2^X$ y $H(A, B) < \delta$, entonces $\mid \mu_n(A) - \mu_n(B) \mid < \eta$.

Sea $B \in 2^X$ tal que $H(A,B) < \delta$ y consideremos $\varepsilon > 0$, notemos que B es compacto, es decir, $B \subset \bigcup B(x,\varepsilon)$, para cada $x \in B$, luego, $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$, así, para cada $\{x_1,...,x_n\} \subset X$, tenemos $B \subset N(\varepsilon,\{x_1,...,x_n\})$.

Afirmamos que $\mu_n(A) \leq \delta+\varepsilon$; para ello veremos que $A \subset N(\varepsilon+\varepsilon,\{x_1,...,x_n\})$. En efecto, como $H(A,B) < \delta$, y por el Teorema 1.45 (a), tenemos que $A \subset N(\delta,B)$ y $B \subset N(\delta,A)$, luego, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$, por lo tanto, para tal $b \in B$ existe $j \in \{1,...,n\}$ tal que $d(b,x_j) < \varepsilon$. Utilizando la desigualdad del triángulo, obtenemos que $d(a,x_j) \leq d(a,b) + d(b,x_j) < \delta+\varepsilon$. Por lo tanto, $A \subset N(\delta+\varepsilon,\{x_1,\ldots,x_n\})$.

En consecuencia $\mu_n(A) \leq \delta+\varepsilon$, es decir, $\mu_n(A)-\delta \leq \varepsilon$ para cualquier ε que cumpla la definición de $\mu_n(B)$. Así,

$$\mu_n(A)-\delta \leq \mu_n(B). \tag{2.1.1}$$

Notemos que $\mu_n(A)-\eta \leq \mu_n(A)-\delta$, luego, de la ecuación (2.1.1), tenemos que $\mu_n(A)-\eta < \mu_n(A)-\delta < \mu_n(B)$, entonces $\mu_n(A)-\mu_n(B) < \eta$.

De manera análoga, obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad, $\mu_n(B)-\mu(A) < \eta$. Por lo tanto, $\mid \mu_n(A)-\mu_n(B) \mid < \eta$. En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función μ_n es continua.

Ahora veamos que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada, es decir, para cada $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $M > 0$ tal que $\mid \mu_n(A) \mid \leq M$. Consideremos $M = di\acute{a}m(X)+1$, entonces para cualquier $A \in 2^X$ y cualquier subconjunto de n puntos en X, digamos $\{x_1,...,x_n\}$, se tiene que $A \subset X = N(M,\{x_1,...,x_n\})$. Así, para cualquier $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\mid \mu_n(A) \mid = \mu_n(A) \leq M$. $\square$

El siguiente resultado, es de los más importantes en este trabajo, ya que nos muestra la existencia de funciones de Whitney, en este caso, haremos uso de Teoremas 2.7 y 2.8 para demostrar (a), para (b) aplicaremos ε-nubes y para (c) lo realizaremos mediante seis pasos.

Teorema 2.9. *Si X es un continuo y $\mu\colon\ 2^X \to \mathbb{R}$ una fun-cioń definida, para cada $A \in 2^X$, por*

$$\mu(A) = \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A)}{2^n},$$

entonces la función μ es una función de Whitney para 2^X.

Demostración. Verifiquemos las siguientes afirmaciones:

(a) μ es continua.

(b) Para toda $x \in X$, se cumple que $\mu(\{x\}) = 0$.

(c) Si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Observemos que se cumple (a) por Teorema 2.8 y Teorema 2.7, tenemos que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas, es uniformemente acotada y μ es una función continua.

Verifiquemos que para todo $x \in X$, se cumple que $\mu(\{x\}) = 0$. Sean $x \in X, n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\{x\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})$ con $x_i = x$, donde $i = 1, \ldots, n$, notenemos que $\{x\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})$, así, $0 = d(x, x) < \varepsilon$. Por lo tanto, $0 = \inf\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_n$, tales que $\{x\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\}$, es decir $\mu_n(\{x\}) = 0$. Por lo tanto, por definición $\mu(\{x\}) = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$

Veamos que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

(c.1) Para cada $A \in 2^X$, y cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in$

X, tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})$. Sea $x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $d(x_{n+1}, A) < \varepsilon$, entonces $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$. Por definición de $\mu_n(A)$ afirmamos que $\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$, tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\} \subset \{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$, tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_{n+1}\})\}$ de aquí,

$$\mu_{n+1}(A) \leq \mu_n(A).$$

(c.2) Verifiquemos que para cada $A \in 2^X$, la sucesión $\{\mu_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$, converge a cero.
Sean $\varepsilon > 0$ y $\bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ es una cubierta abierta de A, como A es compacto, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Por Teorema 1.45(a), $\bigcup_{i=1}^{N} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) = N(\frac{\varepsilon}{2}, \{a_1, \ldots, a_N\})$.

Además por definición de μ_n inferimos que $\mu_N(A) \leq$

$\frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $\mu_n(A) < \varepsilon$, por (c.1), así para cada $n \geq N$, se cumple lo siguiente:

$$\mu_n(A) \leq \mu_N(A).$$

Entonces, $\mu_n(A) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{\mu_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

(c.3) Si $A \subset B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $B \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\}$.

Como $A \subset B$, entonces $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\}$, luego $\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $B \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\} \subset \{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})\}$.

Por lo tanto, $\mu_n(A) = \inf\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$

X tales que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, ..., x_n\})\} \leq \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $B \subset N(\varepsilon, \{x_1, ..., x_n\})\} = \mu_n(B)$, es decir $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

(c.4) Si $|A| \geq n \geq 2$, entonces $\mu_{n-1}(A) > 0$.

Sea $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ y tomemos $\alpha = \text{mín}\{d(a_i, a_j)\colon 1 \leq i, j \leq n$ con $i \neq j\}$. Notemos que $\alpha > 0$.

Supongamos que $\mu_{n-1}(A) < \frac{\alpha}{4}$, así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$ usando la definición de $\mu_n(A)$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subset X$ tal que $A \subset N(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_{n-1}\})$, por Teorema 1.45(a), existen i, j, k con $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k \leq n-1$ tales que $a_i, a_j \in B(x_k, \varepsilon)$, así $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, x_k) + d(x_k, a_j) < \varepsilon + \varepsilon < \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} < \alpha$. Esto contradice la definición de α.

Por lo tanto

$$\mu_{n-1}(A) \geq \frac{\alpha}{4} > 0.$$

(c.5) Si $|A| = n$, entonces $\mu_n(A) = 0$.

Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$.

Luego, por definición de $\mu_n(A)$, se tiene que

$$\mu_n(A) = 0.$$

Observemos que: $\mu_k(A) = 0$ para cada $k \geq n$.

(c.6) Si A es infinito, entonces $\mu_n(A) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto se sigue de (c.4).

Ahora demostraremos que si $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Para esto consideremos los casos siguientes.

Caso 1. Si A es finito, digamos $|A| = n$, entonces por (c.3), $\mu_k(A) \leq \mu_k(B)$, para cada $1 \leq k \leq n-1$ y como $|B| \geq n+1$, por (c.5) y por (c.4), tenemos que, $0 = \mu_n(A) \leq \mu_n(B)$, usando una vez más (c.3), obtenemos que $\mu_k(A) \leq \mu_k(B)$, para cada $k \geq n+1$; por lo tanto $\mu(A) < \mu(B)$.

Caso 2. Si A es infinito, sean $b_0 \in B \backslash A$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(b_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Por (c.2), $\{\mu_n(A)\}$ converge a cero, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ y así, $\mu_N(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como A es infinito, por (c.5), tenemos que $\mu_N(A) > 0$. Usando (c.2) y (c.1), existe $r \in \mathbb{N}, r > N$ tal que $\mu_r(A) < \mu_N(A)$.
Tomemos $m = \min\{r > N \colon \mu_r(A) < \mu_N(A)\}$, así, tenemos que $m > N$ y $\mu_m(A) < \mu_N(A)$.

Se tiene que $m-1 \geq N$, luego, $\mu_{m-1}(A) = \mu_N(A)$. Por lo tanto $\mu_m(A) < \mu_{m-1}(A)$. Sea $\alpha > 0$ tal que $\mu_m(A) < \alpha < \mu_{m-1}(A)$, entonces para todo conjunto de $m-1$ elementos $\{x_1, \ldots x_{m-1}\} \subset X$ se tiene que $A \not\subset N(\alpha, \{x_1, \ldots x_{m-1}\})$.

Demostremos que $\alpha \leq \mu_m(B)$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, $\alpha \geq \mu_m(B)$; entonces, existe $\{y_1, \ldots y_m\} \subset X$ tal que

$$B \subset N(\alpha, \{y_1, \ldots y_m\}) = \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \alpha)$$

Como $b_0 \in B \backslash A$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $b_0 \in B(y_j, \alpha)$, usando que $\mu_n(A) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N$, de esta desigualdad, tenemos:

$$d(b_0, y) \leq d(b_0, y_j) + d(y_j, y) < \alpha + \alpha < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es decir, $y \in B(b_0, \varepsilon)$. Por lo que $B(y_j, \alpha) \subset B(b_0, \varepsilon)$ y así, gracias a la elección de ε, tenemos que $B(y_j, \alpha) \cap A = \emptyset$.

Por otro lado como $B \subset N(\alpha, \{y_1, y_2, \ldots y_m\}) = \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \alpha)$,

así, $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \alpha)$.
Por lo tanto $A \subset \bigcup^{m}_{\substack{k \neq j \\ k=1}} B(y_k, \alpha)$.

En consecuencia, por Teorema 1.45(a) se sigue que $A \subseteq N(\alpha, \{y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{y+1}, \ldots, y_m\})$ es decir, existe un conjunto de $m-1$ puntos que contiene a A en su α-nube, pero esto contradice la afirmación que hicimos en principio, pues se dijo que para todo conjunto de $m-1$ elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\} \subset X$, entonces $A \not\subset N(\alpha, \{x_1, x_2, \ldots x_{m-1}\})$. De esta forma $\alpha \leq \mu_m(B)$. Así $\mu_m(B) \geq \alpha > \mu_m(A)$, de lo que concluimos que $\mu(A) < \mu(B)$. Como podemos observar en cualquier caso obtenemos que $\mu(A) < \mu(B)$. Por lo tanto μ es una función de Whitney. □

La noción de propiedad Whitney no ha sido formalizada hasta ahora. Usando resultados anteriores, analizaremos cinco de las propiedades esenciales de Whitney.

Antes de describir la definición de propiedad de Whitney, enunciaremos una definición que es parte esencial en una propiedad, es decir la definición de nivel de Whitney.

Definición 2.10. *Sea Xun continuo, $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el **nivel de Whitney para** 2^X en t es el conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.*

Definición 2.11. *Sea Xun continuo, $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el **nivel de Whitney para** $C(X)$ en t es el conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.*

Definición 2.12. *Una propiedad topológica P es una **propiedad de Whitney**, si cada vez que el continuo X tiene la propiedad P, para cada función de Whitney de $C(X)$ y para cada $t \in [0, \mu(X)]$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P.*

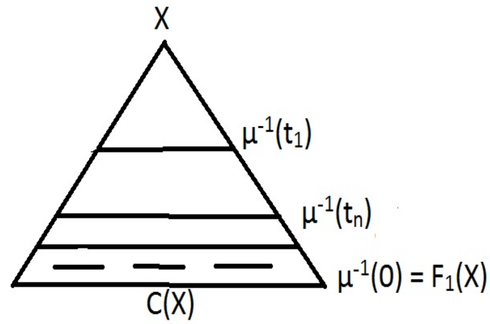

Figura 2.1: Niveles de Whitney

2.2. Arcos ordenados

De acuerdo a lo que estudiaremos sobre las propiedades de Whitney es necesario recordar y mencionar resultados básicos e importantes de los arcos ordenados. Iniciaremos con la definición siguiente.

Definición 2.13. *Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ es un* ***arco ordenado*** *de A a B si cumple las condiciones siguientes.*

(1) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

(2) Si $u, v \in [0,1]$ tales que $u < v$, entonces $\alpha(u) \subsetneq \alpha(v)$.

El teorema siguiente y sus consecuencias o corolarios, serán de gran utilidad para demostrar las propiedades de Whitney.

Teorema 2.14. *Si X es un continuo, $\Lambda \subset 2^X$ es tal que para todo $A, B \in \Lambda$, se cumple que $A \subset B$ o $B \subset A$ y $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney, entonces μ es una función uno a uno respecto a Λ.*

Demostración. Sean $A \neq B$; por hipótesis $A, B \in \Lambda$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Como $A, B \in \Lambda$, tales que $A \neq B$, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$, por definición de función de Whitney si $A \subset B$, implicamos que $\mu(A) < \mu(B)$ o si $B \subset A$, entonces $\mu(B) < \mu(A)$, así $\mu(A) \neq \mu(B)$. Por lo tanto, la función μ es uno a uno con respecto a Λ. $\square$

Teorema 2.15. *Sean X es un continuo, $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney y Λ un conjunto compacto en 2^X, tal que para cualesquiera $A, B \in \Lambda$, se cumple que $A \subset B$ o $B \subset A$. Enntonces la restricción de μ a Λ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $\mu_0 = \mu|_\Lambda\colon \Lambda \to \mu(\Lambda)$, la función restringida al conjunto Λ, observemos que $\mu(\Lambda) \subset \mathbb{R}$. Notemos que $\mu|_\Lambda$ es suprayectiva, además por Teorema 2.14, sabemos que la función μ es inyectiva, por lo tanto, $\mu|_\Lambda$ es biyectiva. Como μ es continua, tenemos que $\mu|_\Lambda$ es continua, luego, $\mu(\Lambda)$ es compacto y $\mathbb{R}$ es métrico, entonces $\mu|_\Lambda$ es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 2.16. *[1, Teorema 1.39] Sea X es un continuo y α un arco ordenado en 2^X iniciando con $A_0 \in C(X)$, entonces el arco ordenado está contenido en $C(X)$, es decir, $\alpha([0,1]) \subset C(X)$.*

Definición 2.17. *Sea X un continuo, μ una función de Whitney fija para 2^X y $A_0, A_1 \in 2^X$. Una función $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$, es un **segmento**, con respecto a μ, de A_0 a A_1, si cumple las condiciones siguientes.*
(a)La función σ es continua en $[0,1]$.
(b) $\sigma(0) = A_0$ y $\sigma(1) = A_1$.
(c) Para cada $t \in [0,1]$, se cumple que $\mu[\sigma(t)] = (1-t)\cdot\mu[\sigma(0)] + t\cdot\mu[\sigma(1)]$.
(d) Si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, entonces $\sigma(t_1) \subset \sigma(t_2)$.

Observación 2.18. *Cualquier función constante que va de* $[0,1]$ *a* 2^X *es un segmento con respecto a alguna función de Whitney para* 2^X.

Teorema 2.19. *Si* X *es un continuo y si* $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$ *es un segmento no constante, con respecto a* μ, *de* A_0 *a* A_1, *entonces* $[0,1]$ *es homeomorfo a* $\sigma[0,1]$.

Demostración. Sea $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$ es un segmento no constante, veamos primero que $\sigma(0) \neq \sigma(1)$.

Sea $\sigma(0) = \sigma(1)$ y B un valor común, es decir, $\sigma(0) = B = \sigma(1)$. Si $0 \leq t \leq 1$, por la Definición 2.17(d), tenemos que $B = \sigma(0) \subset \sigma(1) = B$. Por lo tanto, para cada $t \in [0,1]$, como $\sigma(0) = B \subset \sigma(t) \subset B = \sigma(1)$, concluimos que $\sigma(t) = B$. Así, σ es un segmento constante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\sigma(0) \neq \sigma(1). \tag{2.2.1}$$

Ahora verificaremos que σ es uno a uno. Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $\sigma(s) = \sigma(t)$, sabemos que μ es una función de Whitney para 2^X, además σ es un segmento con respecto a μ, entonces $\mu[\sigma(s)] = \mu[\sigma(t)]$, así, usando Definición 2.17(c), deducimos que $(1-s)\cdot\mu[\sigma(0)] + s\cdot\mu[\sigma(1)] = (1-t)\cdot\mu[\sigma(0)] + t\cdot\mu[\sigma(1)]$, realizando las operaciones concluimos que

$$(t-s)\cdot\mu[\sigma(0)] = (t-s)\cdot\mu[\sigma(1)]. \tag{2.2.2}$$

Por Definición 2.17(d), tenemos que:

$$\sigma(0) \subset \sigma(1). \tag{2.2.3}$$

Así, por las ecuaciones (2.2.1), (2.2.3) y la definición de función de Whitney deducimos lo siguiente:

$$\mu[\sigma(0)] < \mu[\sigma(1)]. \tag{2.2.4}$$

Además por ecuaciones (2.2.2) y (2.2.4), tenemos que $(t-s) = 0$, es decir, $s = t$. Lo cual prueba que el segmento σ es uno a uno. Por Definición 2.17(a), sabemos que σ es continua, por lo tanto, σ es un homeomorfismo. $\square$

Definición 2.20. *Un espacio topológico es* ***no degenerado****, siempre que conste de más de un punto.*

Teorema 2.21. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney fija para 2^X. Un subconjunto Ω no degenerado de 2^X es el rango de un segmento con respecto a μ si y sólo si Ω es un arco ordenado.*

Demostración. Sea $\Omega \subset 2^X$ no degenerado y supongamos que existe un segmento $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$ con respecto a μ tal que $\sigma([0,1]) = \Omega$. Como Ω es no degenerado, σ no es un segmento constante. Por Teorema 2.19, tenemos que σ es un homeomorfismo, así Ω es un arco. Usando la Definición 2.17(b), obtenemos (1) de la Definición 2.13, por Definición 2.17(d) y como σ es uno a uno, tenemos (2) de la Definición 2.13 así concluimos que Ω es un arco ordenado.

Por otro lado, supongamos que Ω es un arco ordenado y sea μ_0 la función restringida de μ a Ω. Como Ω es un arco ordenado, por Teorema 2.14, tenemos que Ω es un arco, así Ω es un continuo, así deducimos que

$$\mu_0 \text{ es un homeomorfismo.} \tag{2.2.5}$$

Sean $a, b \in [0,\infty)$ tales que $\mu(\Omega) = [a,b]$ y $\rho\colon [0,1] \to [a,b]$ una función definida por $\rho(t) = (1-t)\cdot a + t\cdot b$, para cada $t \in [0,1]$. Sea $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$ la función determinada por $\sigma = \mu_0^{-1} \cdot \rho$.

Observemos que la función ρ va de $[0,1]$ a $[a,b]$ y como la función μ_0^{-1} esta determinada de $[a,b]$ a Ω, entonces

$$\sigma([0,1]) = \Omega. \tag{2.2.6}$$

Verifiquemos que σ es un segmento con respecto a μ. Por afirmación (2.2.5), sabemos μ_0 es un homeomorfismo, así μ_0^{-1} es continua. Como ρ es continua, tenemos que $\sigma = \mu_0^{-1} \cdot \rho$ es continua en $[0,1]$. Así, σ satisface la Definición 2.17(a). Observemos que para cada $t \in [0,1]$, tenemos

$$\mu[\sigma(t)] = \rho(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b. \tag{2.2.7}$$

y

$$\mu[\sigma(0)] = \rho(0) = a \text{ y } \mu[\sigma(1)] = \rho(1) = b. \tag{2.2.8}$$

Por tanto, combinando las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8), determinamos que para cada $t \in [0,1]$

$$\mu[\sigma(t)] = (1-t) \cdot \mu[\sigma(0)] + t \cdot \mu[\sigma(1)]. \tag{2.2.9}$$

Luego, usando la ecuación (2.2.9), concluimos que σ satisface la Definición 2.17(a). Ahora, para verificar σ que satisface la Definición 2.17(d), proponemos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, como $a \leq b$, entonces

$$(1-t_1) \cdot a + t_1 \cdot b \leq (1-t_2) \cdot a + t_2 \cdot b. \tag{2.2.10}$$

Por lo tanto por las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8), concluimos

$$\mu[\sigma(t_1)] \leq \mu[\sigma(t_2)]. \tag{2.2.11}$$

Sea $\sigma(t_1) \not\subset \sigma(t_2)$. Como Ω es un arco ordenado y $\sigma(t_1), \sigma(t_2) \in \Omega$, además $\sigma(t_2) \subset \sigma(t_1)$ y $\sigma(t_2) \neq \sigma(t_1)$. Así por definición de función de Whitney $\mu[\sigma(t_2)] < \mu[\sigma(t_2)]$. Lo cual contradice la ecuación (2.2.7) por lo tanto, $\sigma(t_1) \subset \sigma(t_2)$.

Así se ha demostrado que σ satisface los siguientes incisos de la Definición 2.17(a), 2.17(b) y 2.17(c). Por lo tanto por Definición 2.17 concluimos que σ es un segmento con respecto a μ que inicia en $\sigma(0)$ y concluye en $\sigma(1)$. También por la ecuación (2.2.6) podemos asegurar que Ω es el rango de σ. □

Teorema 2.22. *Sea μ una función fija para 2^X y $\Lambda \subset 2^X$, es el rango de un segmento con respecto a μ si y solo si Λ un arco ordenado o $\Lambda = \{A\}$ para algún $A \in 2^X$.*

Demostración. Si $\Lambda \subset 2^X$ es el rango de un segmento con respecto a μ y si Λ es no degenerado, entonces por Teorema 2.21, tenemos que Λ es un arco ordenado.

Ahora, si consideramos que Λ es un arco ordenado, por consecuencia de Teorema 2.21 y observación 2.18 conclumos que $\Lambda \subset 2^X$ es el rango de un segmento con respecto a μ. □

Teorema 2.23. *[1, Teorema 2.29] Sean X un continuo y μ alguna función de Whitney para $C(X)$. Si $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado.*

Teorema 2.24. *[8, Teorema 3.12] Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tal que $A_0 \neq A_1$, entonces, las dos proposiciones siguientes son equivalentes.*

(i) Existe un arco ordenado con 2^X de A_0 a A_1.

(ii) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Definición 2.25. *Un continuo X es* ***unicoherente*** *si para todo par de subcontinuos A, B de X, tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo.*

Teorema 2.26. *[8, Corolario 1.176] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son unicoherentes.*

2.3. Propiedades de Whitney

Existen varias propiedades de Whitney, en esta sección, trabajaremos algunas de las más esenciales.

Teorema 2.27. *La propiedad de ser un continuo es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo y $\mu\colon C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$.

Si $t = 0$, entonces $\mu^{-1}(0) = \{\{x\}: x \in X\} = F_1(X)$ el cual es homeomorfo a X. Así, $\mu^{-1}(0)$ es un continuo.

Ahora si $t \neq 0$, veamos que $\mu^{-1}([0, t])$ es un continuo.

Sean $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Por Teorema 2.24, existe un arco ordenado $\alpha_A\colon [0, \mu(X)] \to 2^X$ tal que $\alpha_A(0) = \{a\}$ y $\alpha_A(\mu(X)) = A$. Como $\{a\} \in C(X)$, por Teorema 2.16, tenemos que $\alpha_A([0, \mu(X)]) \subset C(X)$.

Veamos que $\mu^{-1}([0, t]) = \displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A([0, \mu(X)]) \cup F_1(X)$.

Sea $L \in \mu^{-1}([0, t])$, luego, existe $r \in [0, t]$, tal que $\mu(L) = r$.

Si $r = 0$, entonces $\mu(L) = 0$, así $L = \{p\}$ y por lo tanto, $L \in F_1(X)$.

Ahora, si $r \in (0, t)$, entonces $L \in \mu^{-1}(r)$, con $r < t$. Sea $e \in L$. Por Teorema 2.24, existe un arco ordenado $\sigma_L\colon [0, r] \to 2^X$ tal que $\sigma_L(0) = \{e\}$ y $\sigma_L(r) = L$. Como $\{e\} \in C(X)$, por Teorema

2.16, tenemos que $\sigma_L([0,r]) \subset C(X)$.

Por Teorema 2.15, podemos tomar $\mu \mid_{\sigma_{L([0,r])}} : \sigma([0,r]) \to [0,r]$ un homeomorfismo, así existe un inverso $h\colon [0,r] \to \sigma_L$ tal que $h(0) = \{e\}$ y $h(r) = L$. Si $t, s \in [0,r]$ tales que $r < s$, entonces $h(t) \subsetneq h(s)$.

Como $L \in C(X)$, y así $L \in 2^X$, por Teorema 2.24, existe un arco ordenado $\varphi_L\colon [r, \mu(X)] \to 2^X$ tal que $\varphi_L(r) = L$ y $\varphi_L(\mu(X)) = X$.

Por Teorema 2.24, tenemos que $\varphi_L([r,\mu(X)]) \subset C(X)$; ya que $L \in C(X)$. Por Teorema 2.15, tenemos que $\mu \mid_{\varphi_{L([r,\mu(X)])}} : \varphi_{L([r,\mu(X)])}$ $\to [\mu(L), \mu(X)]$, es un homeomorfismo.
Además $\mu \mid_{\varphi_{L([r,\mu(X)])}}$ es suprayectiva y $t \in [r, \mu(X)]$, tenemos que existe $T \in \varphi_{L([r,\mu(X)])}$ tal que $\mu(T) = t$. Por lo tanto, $T \in \mu^{-1}(t)$.

Sea $\gamma = \varphi_L \mid_{[r,t]} : [r,t] \to 2^X$, notemos que γ es un arco ordenado con puntos extremos L y T, además $\gamma([r,t]) \subset \varphi_L([r,\mu(X)])$. Por Teorema 2.15, tenemos que $\mu \mid_{\gamma([r,t])} : \gamma([r,t])$ $\to [\mu(L), \mu(T)]$ es un homeomorfismo, entonces existe su inverso $h_1\colon [r,t] \to \gamma([r,t])$ tal que $h_1(r) = L$ y $h_1(t) = T$, si $q, s \in [r,t]$ tales que $q < s$, entonces $h_1(q) \subsetneq h_1(s)$.
Sea $\alpha_T\colon [0,t] \to C(X)$.

$$\alpha_T(X) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in [0,r] \\ h(x), & \text{si } x \in [r,t] \end{cases}$$

Tal que, $\alpha_T(0) = \{e\}$ y $\alpha_T(t) = T$, si $q, s \in [0,t]$ con $q < s$, entonces $\alpha_T(q) \subsetneq \alpha_T(s)$.

Así, $L \in \alpha_T([0,t])$, luego, $L \in \bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)])$.

Por lo tanto $\mu^{-1}([0,t]) \subset \bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)]) \cup F_1(X)$.

Verifiquemos que $\bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)]) \cup F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Si $B \in F_1(X)$, entonces $\mu(B) = 0$, así $B \in \mu^{-1}(0)$. Como $\mu^{-1}(0) \subset \mu^{-1}([0,t])$, implicamos que $B \in \mu^{-1}([0,t])$. Por lo tanto, $F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Si $B \in \bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)])$, entonces $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Tomamos $\alpha_A([0,\mu(X)])$ el arco ordenado, contenido en $C(X)$, con extremos en $\{a\}$ y A. Así para cada $B \in \alpha_A([0,\mu(X)])$, tenemos que $\{a\} \subset B \subset A$.

Así, $\mu(\{a\}) = 0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = t$, es decir, $\mu(B) = r$ con $r \in [0,t]$. Luego, $B \in \mu^{-1}(r)$, con $r \in [0,t]$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([0,t])$, tenemos que $B \in \mu^{-1}([0,t])$. Por tanto $\alpha_A([0,\mu(X)]) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Podemos concluir que $\mu^{-1}([0,t]) = \bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)]) \cup F_1(X)$. Para cada $A \in \mu^{-1}(t)$, el arco ordenado $\alpha_A([0,\mu(X)])$ es conexo. Así $\alpha_A([0,\mu(X)]) \cap F_1(X) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)]) \cup F_1(X)$ es conexo. Como $\alpha_A([0,\mu(X)]) \cap F_1(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A([0,\mu(X)]) \cup F_1(X)$ es conexo. Así, $\mu([0,t])$ es conexo.

Como μ^{-1} es una función continua y $[0,t]$ es cerrado deducimos que $\mu^{-1}([0,t])$ es un conjunto cerrado, en $C(X)$; además por Teorema 1.46, tenemos que $C(X)$ es compacto. Por lo tanto $\mu^{-1}([0,t])$ es compacto.

Notemos que $\mu([0,t]) \subset C(X)$, entonces $\mu^{-1}([0,t])$ es métrico. Así $\mu^{-1}([0,t])$ es continuo.

Verifiquemos que $\mu^{-1}([t,\mu(X)])$ es continuo.

Sea $A \in \mu^{-1}(t)$ por Teorema 2.24, existe un arco ordenado $\beta_A\colon [t, \mu(X)] \to 2^X$ tal que $\beta_A(t, \mu(X)) = A$ y $\beta_A(\mu(X)) = X$. Como $A \in C(X)$, por Teorema 2.16, tenemos que $\beta_A \subset C(X)$. La demostración de que $\mu^{-1}([t, \mu(X)]) = \bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \beta_A(t, \mu(X))$ es similar a demostrar que $\mu^{-1}([0, t]) = \bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} (\alpha_A)([0, \mu(X)]) \cup F_1(X)$.

Para cada $A \in \mu^{-1}(t)$, el arco ordenado $\beta_A(t, \mu(X))$ es conexo. Como $x \in \beta_A(t, \mu(X))$, tenemos que $\bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \beta_A(t, \mu(X))$ es conexo.Así, $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es conexo.

El conjunto $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es cerrado en $C(X)$, ya que μ es una función continua y $[t, \mu(X)]$ es cerrado. Y como $C(X)$ es compacto, entonces $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es compacto.

De manera análoga, argumentamos que $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es un continuo.

Verifiquemos que $\mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)]) = C(X)$. Por definición, tenemos que $\mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)]) \subset C(X)$. Tomemos $A \in C(X)$, luego, $\mu(A) = r$, con $r \in [0, \mu(X)]$. Si $r \in [0, t]$, entonces $A \in \mu^{-1}(r)$, con $r \leq t$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([0, t])$, implicamos que $A \in \mu^{-1}([0, t])$. Si $r \in [t, \mu(X)]$, entonces $A \in \mu^{-1}(r)$, con $t \leq r \leq \mu(X)$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([t, \mu(X)])$, tenemos que $A \in \mu^{-1}([t, \mu(X)])$. Por lo tanto $A \in \mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)])$ y así $C(X) \subset \mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)])$. Luego, $C(X) = \mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)])$.
Sea $A \in \mu^{-1}([0, t]) \cap \mu^{-1}([t, \mu(X)])$, Luego, $A \in \mu^{-1}([0, t])$ y $A \in \mu^{-1}([t, \mu(X)])$. Así $0 \leq \mu(A) \leq t$ y $t \leq \mu(A) \leq \mu(X)$, por lo que $\mu(A) = t$. Luego, $A \in \mu^{-1}(t)$. Por lo tanto, $\mu^{-1}([0, t]) \cap \mu^{-1}([t, \mu(X)]) = \mu^{-1}(t)$.

Luego, $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Además como $\mu^{-1}([0,t])$ y $\mu^{-1}([t,\mu(X)])$ son cerrados en $C(X)$, implicamos que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado, en $C(X)$ y así compacto. Luego, $\mu^{-1}(t) \subset C(X)$, así $\mu^{-1}(t)$ es métrico, hereda la métrica de Hausdorff. Por Teorema 2.23 tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado y por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es un continuo. □

Definición 2.28. *Sea X un continuo y $\psi \in \{2^X, C(X)\}$. Una **función de Whitney normailzada** para ψ, es una función de Whitney μ en ψ tal que $\mu(X) = 1$ (y entonces $0 \leq \mu(A) \leq 1$ para todo $A \in \psi$).*

Teorema 2.29. *Toda función de Whitney puede ser normalizada.*

Demostración. Sea X un continuo no degenerado, por el Teorema 2.9, existe la función de Whitney $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$. Además por Teorema 1.46, sabemos que 2^X es compacto. Sea $A_1 \in 2^X$, como μ es continua, entonces para cada $A \in 2^X$, tenemos que $\mu(A) \leq \mu(A_1)$. Como, $X \in 2^X$, entonces $\mu(X) \leq A_1$. Si $A_1 \subsetneq X$, entonces $\mu(A) < \mu(X)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_1 = X$. Ahora, dado $x \in X$, si $\{x\} \subsetneq X$. Aplicando la función de Whitney $\mu(\{x\}) < \mu(X)$. Es decir, $0 < \mu(X)$. Así, para cada $A \in 2^X$, obtenemos que $0 \leq \mu(A) \leq \mu(X)$.

Sea $\mu_1\colon 2^X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in 2^X$ se cumple que $\mu_1(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$. Observemos que μ_1 es continua. También, para cada $x \in X$, obtenemos $\mu_1(\{x\}) = \frac{\mu(\{x\})}{\mu(X)}$.

Si $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Así $\frac{\mu(A)}{\mu(X)} < \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$. Luego, $\mu_1(A) < \mu_1(B)$. Por lo tanto, μ_1 es una función de Whitney para 2^X. Además, $\mu(X) = \frac{\mu(X)}{\mu(X)} = 1$. Para finalizar, sea $\mu_2 = \mu_1 |_{C(X)}$.

Así podemos concluír que para funciones de Whitney $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ o $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ se cumple $\mu(X) = 1$. $\square$

Teorema 2.30. *Sea X un continuo. Si $\sigma\colon [0,1] \to 2^X$ es un segmento tal que $\sigma(t_0) \in C(X)$ para algún $t_0 \in [0,1]$, entonces para toda $t \in [t_0, 1]$ $\sigma(t) \in C(X)$. Si $\sigma(0) \in C(X)$, entonces $\sigma([0,1]) \subset C(X)$.*

Demostración. Sea σ un segmento no constante y $t_0 < 1$. Por Teorema 2.19,

$$\sigma \text{ es un homeomorfismo.} \tag{2.3.1}$$

Proponemos $\alpha = \sigma([0,1])$ y $\beta = \sigma([t_0, 1])$. Como σ es un homeomorfismo y por Teorema 2.22,

$$\sigma \text{ es un arco ordenado.} \tag{2.3.2}$$

Recordemos que un subarco de un arco ordenado es un arco ordenado y como $t_0 < 1$, por (2.3.1) y (2.3.2), tenemos que

$$\beta \text{ es un arco ordenado.} \tag{2.3.3}$$

Por Definición 2.17(d), sabemos que para toda $t \in [t_0, 1]$ se cumple que $\sigma(t_0) \subset \cap\beta$. Además, como $\sigma(t_0) \in \beta$, entonces

$$\cap\, \beta = \sigma(t_0). \tag{2.3.4}$$

Así por (2.3.3) y (2.3.4), además por Observación 2.18, tenemos que β es un arco ordenado que inicia en $\sigma(t_0)$ y por hipótesis $\sigma(t_0) \in C(X)$. Por lo tanto, por Teorema 2.16 concluimos que $\beta \subset C(X)$. $\square$

Teorema 2.31. *Sean X un continuo y $0 \leq t_0 \leq \mu(X)$. Si $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$, entonces existe un arco $\alpha \subset [\mu^{-1}(t_0) \cap C(A \cup B)]$, tal que α tiene como puntos extremos A y B.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos afirmar que $\mu(X) = 1$.

Ahora, si k es una componente de $A \cap B$. Por Teoremas 2.24 y 2.30 existen segmentos $\sigma_1 \colon [0,1] \to C(A)$ de k a A y $\sigma_2 \colon [0,1] \to C(B)$ de k a B. Tomemos $t \in [0,1]$ de tal forma que $\mu[\sigma_1(t) \cup \sigma_2(0) = \mu[\sigma_1(t)] \leq \mu(A) = t_0$ y $t_0 = \mu(B) \leq \mu[\sigma_1(t) \cup B] = \mu[\sigma_1(t) \cup \sigma_2(1)]$, de esto deducimos que para todo $t \in [0,1]$, existe un s tal que $\mu[\sigma_1(t) \cup \sigma_2(s)] = t_0$. Luego, consideremos la función $g \colon [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ y consideremos $t \in [0,1]$ de tal forma que $g(t) = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(s_t)$. A continuación demostraremos que g es continua. Sea $t \in [0,1]$ y $\{t(n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $t(n) \to t$ cuando $n \to \infty$. Como la sucesión correspondiente contiene una subsucesión $\{s_{t(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, sin pérdida de generalidad asumimos que $\{s_{t(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, es convergente y contiene un límite r. Luego, por continuidad de σ_1 y σ_2 y definición de g, tenemos:

(i) $g(t(n)) = \sigma_1(t(n)) \cup \sigma_2(s_{t(n)}) \to \sigma_1(t) \cup \sigma(r)$, cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, como $\mu(t_0)$ es compacto y $\mu[g(t(n))] = t_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Por definición de g, tenemos que $\mu[\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)] = t_0$.

(iii) Si $r \leq s_t, [\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)] \subset g(t)$,

(iv) Si $s_t \leq r, g(t) \subset [\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)]$.

Luego, por (ii) observemos que $\sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)$ y $g(t)$ son subcontinuos de X, con el mismo μ-valor tal que almenos uno de ellos está contenido en el otro. Además por definición de función de Whitney, obtenemos la siguiente igualdad : $g(t) = \sigma_1(t) \cup \sigma_2(r)$.

Así usando (i), concluimos:
(v) $g(t(n)) \to g(t)$ cuando $n \to \infty$.
Por lo tanto g es continua. Luego, si $g(0) = B$ y $g(1) = A$, obtenemos que $\alpha \subset g([0,1]) \subset \mu^{-1}(t_0)$ es un arco con puntos A y B. □

Teorema 2.32. *Si* $g\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$, *definida por* $g([a,b]) = a$, *para cada* $[a,b] \in C([0,1])$, *entonces* g *está bien definida y es continua.*

Demostración. Sea $A \in C([0,1]$. Supongamos que $A = \{a\}$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $\lim A_n = \{a\}$. Veamos que $\lim g(A_n) = g(A)$. Sea $\varepsilon > 0$, luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, se tiene que $A_n \in B_{C([0,1])}(\{a\}, \varepsilon)$, si $n > N$, se tiene que $H(A_n, \{a\}) < \varepsilon$, es decir, $\{a\} \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, \{a\})$. Supongamos que $A_n = [a_n, b_n]$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \in A_n$, tenemos que $|g(A_n) - g(\{a\})| = |a_n - a| < \varepsilon$; para $n > N$. Así, $\lim g(A_n) = g(\{a\})$.

Supongamos que $A = [a,b]$ con $a < b$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $\lim A_n = A$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, tenemos que $A_n \in B_{C([0,1])}(A, \varepsilon)$. Además para $n > N$ se cumple que $H(A, A_n) < \varepsilon$, es decir, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$. Supongamos que $A_n = [a_n, b_n]$ para $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \in A_n$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$, tenemos que existe $p_n \in A$ tal que $|a_n - p_n| < \varepsilon$ y como $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ existe $q_n \in A_n$ tal que $|a - q_n| < \varepsilon$.

Supongamos que $n_1 > N$ y que $0 < a_{n_1} - a$. Como $a_{n_1} < q_{n_1}$, tenemos que $a_{n_1} - a \leq q_{n_1} - a$. Así, $|a_{n_1} - a| \leq |q_n - a|$. Luego, $|a_{n_1} - a| < \varepsilon$.

Supongamos que $n_2 > N$ y que $0 \leq a - a_{n_2}$. Como $a < p_{n_2}$, tenemos que $a - a_{n_2} \leq p_{n_2} - a_{n_2}$. Luego, $|a - a_{n_2}| \leq |p_{n_2} - a_{n_2}|$; por lo tanto $|a_{n_2} - a| < \varepsilon$, para $n > N$, tenemos que $\lim g(A_n) = g(A)$. Por lo tanto g es continua. $\square$

Teorema 2.33. *La propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean $\mu\colon C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu([0,1]))$, definimos $f\colon \mu^{-1}(t) \to [0, \mu([0,1])]$ por $f(A) = \min\{A\}$ (notemos que $f = \mu\mid_{\mu^{-1}(t)}\colon \mu^{-1}(t) \to [0,1]$). Por Teorema 2.32, tenemos que f es continua. Veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $f(A) = f(B)$, luego, $A = [a,c]$ y $B = [a,d]$, así, $A \subset B$ o $B \subset A$, como $\mu(A) = \mu(B) = t$, así, obtenemos que $A = B$. Por lo tanto f es inyectiva.

Por Teorema 2.27, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ es compacto, así, f es un homeomorfismo sobre su imagen, es decir, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $f(\mu^{-1}(t))$, de esto deducimos que $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo de $[0,1]$, además $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado, entonces $f([\mu^{-1}(t)])$ es no degenerado.

Por lo tanto, $f(\mu^{-1}(t))$ es un subintervalo no degenerado de $[0,1]$. Así $f(\mu^{-1}(t))$ es un arco, de esto concluimos que $\mu^{-1}(t)$ es un arco. $\square$

Teorema 2.34. *La propiedad de ser un continuo arco conexo es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo arco conexo y μ una función de Whitney para $C(X)$, además consideremos $0 < t_0 < \mu(X)$. Por Teorema 2.27, tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo, falta demostrar que $\mu^{-1}(t_0)$ es un arco conexo. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$. Si $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \neq B$, entonces por Teorema 2.32, existe un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos extremos A y B. Sea $A \cap B = \emptyset$.

Donde X es arco conexo γ en X con puntos que inician desde $a \in A$ hacia $b \in B$. Para esto consideremos dos casos:

Caso 1. $\mu(\gamma) \leq t_0$. Luego, usando Teorema 2.24 y Teorema 2.31, además la continuidad de μ, deducimos que existe un subcontinuo B_0 de B tal que $b \in B_0$ y $[\gamma \cup B_0] \in \mu^{-1}(t_0)$. Luego, aplicando dos veces el Teorema 2.31, una vez para A y $\gamma \cup B_0$ y otra para $\gamma \cup B_0$ y B, de lo que concluimos que existe un arco $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos A y B.

Caso 2. $t_0 < \mu(\gamma)$. En este caso proponemos los arcos γ_a y γ_b de γ tales que $a \in \gamma_a$ y $b \in \gamma_b$, además $\gamma_a, \gamma_b \in \mu^{-1}(t_0)$. Dado que la restricción de μ a $C(\gamma)$ es una función de Whitney para $C(\gamma)$, por Teorema 2.31, tenemos que $\mu^{-1}(t_0 \cap C(\gamma))$ es un arco con puntos γ_a y γ_b. Sea $A \neq \gamma_a$ y usando Teorema 2.32, para aplicar un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos A y γ_a. Supongamos $\gamma_b \neq B$. Así mismo usando Teorema 2.32, con un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos γ_b y B. De las afirmaciones anteriores, obtenemos un arco en $\mu^{-1}(t_0)$ con puntos A y B. □

Teorema 2.35. *La propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo y $0 < t_0 < \mu(X)$. Por Teorema 2.27, tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo. Por lo que sólo falta probar que $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo. Sean $A_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ y $\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$ una sucesión con elementos A_n de $\mu^{-1}(t_0)\backslash\{A_0\}$ tal que $A_n \to A_0$ cuando $n \to \infty$. Luego, usando la conexidad de X y por ser subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es necesario que existan arcos γ_n en X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$.
(i) $\gamma_n \cap A_n \neq \emptyset \neq \gamma_n \cap A_0$ y el diámetro de γ_n es lo suficientemente pequeño para que:
(ii) $\mu(\gamma_n) < [2^{-n}] \cdot t_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = A_n \cup \gamma_n \cup A_0$. Observemos que por (ii), $\mu(\gamma_n) < t_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así por Teorema 2.31, deducimos que $\Gamma_n \subset [\mu^{-1}(t_0) \cap C(X_n)]$ son arcos con puntos A_n y A_0 para cada $n \in \mathbb{N}$. Donde $A_n \to A_0$ y por (ii) $di\acute{a}m(\gamma_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de esto $X_n \to A_0$. Observemos que

$$C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0) \to \{A_0\} \tag{2.3.5}$$

cuando $n \to \infty$. Para probar (2.3.5), primero analizaremos $A_0 \in [C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente:
(a) $A_0 \in \text{lím ínf}[C(X_n) \cap \mu^{-1}(t_0)]$. Luego, si $B \in \text{lím sup}[C(X_n) \cap \mu{-}1(t_0)]$. Entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a B, donde $B_i \in [C(X_{n(i)}) \cap \mu^{-1}(t_0)]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Además $B_i \in \mu^{-1}(t_0)$, con $i \in \mathbb{N}$ y $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $X_{n(i)} \to A$ cuando $i \to \infty$, y $B_i \subset X_{n(i)}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $B \subset A$. Así, $\mu(B) = t_0 = \mu(A_0)$ con $B \subset A_0$. Por lo tanto, por definición de función de Whitney, $B = A_0$, de lo cual aseguramos:
(b) $\text{lím sup}[C(X_n) \cap \mu{-}1(t_0)] \subset \{A_0\}$. Observemos que de (a) y (b), obtenemos (2.3.5). Así deducimos que $di\acute{a}m(\gamma_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además A es un elemento arbitrario de $\mu^{-1}(t_0)$, y como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria, tomada en $\mu^{-1}(t_0) \setminus \{A_0\}$ convergente a A_0, de esto concluimos que $\mu^{-1}(t_0)$ es localmente conexo. $\square$

Los siguientes tres resultados, nos permiten construir la prueba de que la propiedad de ser un continuo descomponible es una propiedad de Whitney.

Definición 2.36. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, con $A \in C(X)$ y $t \in [0, \mu(X)]$. El conjunto $X(A, \mu, t) = \{k \in \mu^{-1}(t) \colon k \cap A \neq \emptyset\}$.*

Teorema 2.37. *Sean X un continuo y sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $A \in C(X)$, $t \in [0, \mu(X)]$ y $X(A, \mu, t) = \{k \in \mu^{-1}(t) : k \cap A \neq \emptyset\}$, entonces:*

(1) $X(A, \mu, t)$ es compacto.

(2) Si X es un continuo descomponible, entonces existe un subcontinuo propio A de X tal que $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$, para algún $t_0 < \mu(X)$.

Demostración. (1) Sea B un elemento de la cerradura del conjunto $X(A, \mu, t)$, entonces existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ de tal forma que $\{A_m\} \subset X(A, \mu, t_0)$, con $A_m \in \mu^{-1}(t)$, tal que $A_m \to B$; para toda $\mu^{-1}(A_m) = t$. Por lo tanto $B \in \mu^{-1}(t)$ y $A_m \bigcap A \neq \emptyset$.
De esto concluimos que $B \cap A \neq \emptyset$. Así $B \in X(A, \mu, t_0)$. Por lo tanto como $X(A, \mu, t_0)$ es cerrado, entonces $X(A, \mu, t_0) \subset \mu^{-1}(t)$, por lo que $X(A, \mu, t_0)$ es compacto.

(2) Sea $X = A \cup B$, donde $A, B \in C(X)$. Supongamos que $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$ de tal forma que $t_0 < \mu(X)$. Sea $M \in C(B)$ tal que $M \subsetneq B$, además $M \cap A \neq \emptyset$ y $\mu(B) < \mu(M \cup A)$. Notemos que, para toda $L \in C(B)$, se cumple que $\mu(L) \leq \mu(B) \leq \mu(M \cup A) = r$. Por otro lado, sea $r < t_0 < \mu(X)$. Supongamos que $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$. Sea $s \in \mu^{-1}(t_0)$, con $\mu(s) = t_0$ y $t_0 > r$, donde $r = \mu(A \cup M)$. Luego, si $S \cap A = \emptyset$ y $\mu(s) > r$, entonces $s \subset B$, así $\mu(s) \leq \mu(B) \subset r$. Pero hemos llegado a una contradicción, por lo que $s \cap A \neq \emptyset$. Así concluimos que $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$, para algún $t_0 < \mu(X)$.

$\square$

Teorema 2.38. *Sean X un continuo, $A \in C(X)$ y $0 \leq t_0 \leq \mu(X)$. Si consideramos $X(A, \mu, t_0) = \{M \in \mu^{-1}(t) \colon M \cap A \neq \emptyset\}$. Entonces $X(A, \mu, t_0)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$. Las afirmaciones siguientes se cumplen.*
(1) Si $\mu(A) \leq t_0$, entonces $X(A, \mu, t_0)$ es un subcontinuo arco conexo de $\mu^{-1}(t_0)$;
(2) Si $\mu(A) \leq t_0$, entonces $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A)$ es un subcontinuo de $X(A, \mu, t_0)$ y cada elemento de $X(A, \mu, t_0) \backslash \Lambda$ se puede unir a un elemento de Λ por un arco $\alpha \subset X(A, \mu, t_0)$.

Demostración. Por Teorema 2.37, deducimos que $X(A, \mu, t_0)$ es compacto. Así, como $X(A, \mu, t_0)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_0)$, por lo que falta probar (1) y (2).
Para probar (1), supongamos que $\mu(A) \leq t_0$, luego, usando Teorema 2.27 y Teorema 2.16, observemos que, existe $A \subset M_0$ tal que $m_0 \in \mu^{-1}(t_0)$. Notemos que $M_0 \in X(A, \mu, t_0)$. Ahora, sea $M \in X(A, \mu, t_0)$. tal que $p \in M \cap A$. Entonces como $A \subset M_0$ con $p \in M \neq M_0$. Por lo tanto $M, M_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ y $M \neq M_0$, por Teorema 2.30, existe un arco γ en μ, t_0 con puntos M y M_0 tal que $p \in L$ para cada $L \in \gamma$. Así $p \in A$ y $\gamma \subset X(A, \mu, t_0)$. Por lo tanto M es un elemento arbitrario de $X(A, \mu, t_0)$ diferente de M_0. Así queda probado (1).

Para verificar (2), afirmamos que $\mu(A) > t_0$. Consideremos $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A)$. Sea μ' la resticción de μ a $C(A)$. Obsevemos que μ' es una función de Whitney para $C(A)$ y $\Lambda = (\mu')(t_0)$ y por Teorema 2.27 deducimos que Λ es un subcontinuo de $X(A, \mu, t_0)$.

Ahora, sea $M_1 \in X(A, \mu, t_0) \setminus \Lambda$. Como $M_1 \in X(A, \mu, t_0)$ y $M_1 \cap A \neq \emptyset$, luego, tomando en cuenta que μ' es una función de Whitney para $C(A)$ y $\Lambda = (\mu')(t_0)$, entonces $\bigcup \Lambda = A$. Por lo tanto, existe $M_2 \in \Lambda$ tal que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Sea $p \in M_1 \cap M_2$. Por Teorema 2.30deducimos que $X(A, \mu, t_0)$ es un arco de M_1 a

M_2. Por tanto, como $M_2 \in \Lambda$, así queda probado (2). $\square$

Teorema 2.39. *La propiedad de ser un continuo descomponible es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Por Teorema 2.27 $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo, así que solo falta verificar que $\mu^{-1}(t_0)$ es descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de X tal que $X = A \cup B$. Sea

$$(a) \begin{cases} X(A, \mu, t_0) = \{k \in \mu^{-1}(t_0 \colon k \cap A \neq \emptyset)\} \\ X(B, \mu, t_0) = \{k \in \mu^{-1}(t_0 \colon k \cap B \neq \emptyset)\} \end{cases}$$

Como $X = A \cup B$, entonces $\mu^{-1}(t_0) = X(A, \mu, t_0) \cup X(B, \mu, t_0)$. También, por Teorema 2.37, tenemos que $X(A, \mu, t_0)$ y $X(B, \mu, t_0)$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t_0)$. Luego, si $X(A, \mu, t_0) \neq \mu^{-1}(t_0) \neq X(B, \mu, t_0)$ concluiriamos la prueba. Pero si consideramos que uno de los conjuntos de (A) sea todo $\mu^{-1}(t)$, entonces usando Teorema 2.37, afirmamos que: $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$.

Si $\mu(A) < t_0$, entonces por (1) del Teorema 2.37, tenemos que $X(A, \mu, t_0)$ es un arco conexo. Como $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$ deducimos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un continuo arco conexo y por lo tanto es descomponible.

Sigue considerar el caso cuando $\mu(A) > t_0$. Sea $\Lambda = \mu^{-1}(t_0) \cap C(A)$ un subcontinuo de $X(A, \mu, t_0)$, como $A \neq X$, entonces $\Lambda \neq \mu^{-1}(t_0)$. Por lo tanto usando (2) del Teorema 2.38 y que $X(A, \mu, t_0) = \mu^{-1}(t_0)$, concluimos que $\mu^{-1}(t_0)$ es descomponible. $\square$

Bibliografía

[1] María Castro Sánchez, *Introducción a las Funciones de Whitney*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 9 de agosto de 2013,

[2] Janusz J. Charatonik, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus hiperespacios, capítulo*: *Bosquejo de la historia de la Teoría de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana 2006.

[3] Vianey Córdova Salazar, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 26 de agosto de 2011, http : //www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/VianeyCordovaSalazar.pdf.

[4] Betsy C. Cuevas Martínez, *Propiedades Básicas del n-ésimo Hiperespacio de un Continuo*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 22 de junio de 2012, http : //www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/BetsyChristianCuevasMartinez.pdf.

[5] Raúl Escobedo, María de Jesús López, Patricia Pellicer Covarrubias y Alicia Santiago-Santos, *Introducción a las funciones de Whitney Topología y Sistemas Dinámicos II,*

caítulo I, Textos científicos, Primera Edición. BUAP, Puebla, Pue. Febrero de 2009.

[6] James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.

[8] Sam B. Nadler, *Hyperspaces of sets*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, New York.

[9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory An introduction.* Marcel Dekker Inc., New York,10016, 1992.

Índice alfabético