Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a los continuos de Peano

Tesis que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

presenta

Nancy Márquez Lázaro

Directores de tesis

Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

Puebla, Pue.
11 de agosto de 2017

A mis padres, Zenaido y Rafaela.
A la luz más hermosa en mi camino, Leonardo.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mis padres, Zenaido y Rafaela, quienes me han apoyado en todas las maneras que han podido y a lo largo de toda mi vida. Gracias por sus consejos, por sus palabras de aliento, y por su guía. Sobretodo gracias por no perder la fe en mí, aún en las etapas donde yo llegué a perderla. Siempre tendrán mi amor, mi respeto y mi admiración.

Agradezco a mis hermanos, Rossy y Alejandro, por su apoyo, su cariño, por estar conmigo y acompañarme. A todos mis amigos por estar ahí, por escucharme, compartir risas, darme ánimo y regaños cuando hacían falta.

Agradezco al Dr. David Herrera Carrasco y al Dr. Fernando Macías Romero por su guía, su tiempo, sus ánimos y sus consejos. A mis sinodales el Dr. Alexander Bykov, la Dra. Patricia Domínguez Soto y al Dr. Oleg Okunev por sus sugerencias y correcciones.

A mis profesores, por todos los conocimientos impartidos y por la motivación que siempre me brindaron a continuar mi formación académica.

Gracias a todos y cada uno, ya que sin ustedes esta tesis no sería posible.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo se estudia una clase especial de *continuos*, los continuos de Peano que en realidad son continuos localmente conexos, pero mantenemos el nombre en honor a Giuseppe Peano (Spinetta, 27 de agosto de 1858 - Turín, 20 de abril de 1932) matemático, lógico y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín.

El material tratado en este trabajo puede encontrarse, por temas, en algunos libros, por ejemplo en [1] – [11], en esta tesis los presentamos de una forma más desarrollada con la finalidad de hacer más accesible estos conceptos a aquellos interesados en estudiar estos temas.

El Capítulo 1 aborda diversas nociones preliminares que nos sirven para el estudio y mayor comprensión de los conceptos abordados en el Capítulo 2; en este, estudiamos la estructura básica de los continuos de Peano.

En particular, los continuos de Peano son «bien portados» dado que ellos pueden ser descritos como:

(i) unión de un número finito de pequeños y arbitrarios subcontinuos de Peano (Teorema 2.28),

(ii) conexos por trayectorias (Teorema 2.46),

(iii) localmente conexos por trayectorias (Teorema 2.48), y

(iv) son caracterizados por la propiedad de ser la imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$, véase el Teorema 2.32.

Nancy Márquez Lázaro

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo enunciamos algunas definiciones y conceptos que son de utilidad para el desarrollo del capítulo 2; pero primero presentamos la notación que usamos a lo largo de este trabajo.

Las letras X y Y denotan, por lo general, espacios topológicos, aunque también pueden representar espacios métricos, en cuyo caso se indicará explícitamente.

En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ e $\mathrm{int}(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\overline{A}^{Y}$, $Fr_Y(A)$ e $\mathrm{int}_Y(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se denota por $|A|$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales, respectivamente.

Sean X un espacio métrico con métrica d, $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. La *bola abierta* en X con centro en p y radio ε, denotada por $B_\varepsilon(p)$, es el conjunto $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(p,x) < \varepsilon\}$.

1.1. Continuos

Iniciamos el estudio de este capítulo con la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico. Un par (U,V) de subconjuntos no vacíos, abiertos en X es una **separación** de X si $X = U \cup V$ donde*

*$U \cap V = \emptyset$. Si existe una separación de X, decimos que X es **disconexo**. Si no existe una separación de X, decimos que X es **conexo**.*

Observación 1.2. *Si X es un espacio topológico y (U, V) es una separación de X, entonces los conjuntos U y V son a la vez, abiertos y cerrados en X.*

Para obtener de manera inmediata una infinidad de conexos en $\mathbb{R}$ enunciamos el resultado que sigue.

Teorema 1.3. *[1, Teorema (2.A.8)] Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es conexo en $\mathbb{R}$ si, y solo si A es un conjunto unitario o A es un intervalo.*

Otro resultado que utilizamos más adelante, en las demostraciones del Ejemplo 1.6 y el Teorema 2.23, es el que damos a continuación.

Teorema 1.4. *[1, Teorema (2.A.13)] Si A es un subespacio conexo de un espacio topológico X y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, la cerradura de un (sub)espacio conexo es conexa.*

El siguiente teorema afirma que la conexidad es invariante bajo funciones continuas.

Teorema 1.5. *[1, Teorema (2.A.14)] Si f es una función continua y supra-yectiva de un espacio conexo X en un espacio topológico Y, entonces Y es conexo.*

Intuitivamente el que un espacio topológico sea conexo, nos hace pensar que este es de «una sola pieza», el siguiente ejemplo nos muestra que el concepto de conexidad es más amplio.

Ejemplo 1.6. *Sean*

$$W = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\} \text{ y } J = \{0\} \times [-1, 1].$$

La cerradura de W en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto $\overline{W} = W \cup J$ (Figura 1.1).

El intervalo $(0, 1]$ es conexo, de acuerdo al Teorema 1.3; como $W = (Id, sen \circ \frac{1}{Id})((0, 1])$, por el Teorema 1.5, tenemos que W es conexo. Luego, por el Teorema 1.4, obtenemos que $\overline{W}$ es conexo.

Uno de los métodos más empleados, en la teoría de los continuos, para construir espacios métricos compactos y no vacíos, muy especiales, es la propiedad de la intersección anidada; dicha propiedad también es usada frecuentemente como idea clave para la demostración de teoremas (por ejemplo el Lema 1.57).

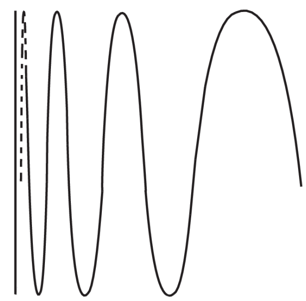

Figura 1.1: El continuo seno (1/x)

Teorema 1.7. *[Propiedad de la intersección anidada]*

Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos contenidos en Z tales que para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $X_i \supset X_{i+1}$ y $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces

(1) Si U es abierto en X_1 y $U \supset X$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N$, es cierto que $U \supset X_i$.

(2) Si para todo $i \in \mathbb{N}$, el conjunto X_i es no vacío, entonces X es no vacío y compacto.

Demostración. (1). Sea $Y = X_1 \setminus U$. Entonces Y es cerrado en X_1, por lo tanto es compacto. Los conjuntos $U_i = X_1 \setminus X_i$, $i \in \mathbb{N}$, son abiertos en X_1 y cubren $X_1 \setminus X$. De $X \subset U$ sigue que la familia $\{U_i : I \in \mathbb{N}\}$ cubre a Y. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Y \subset U_n$, y $X_n \subset U$.

(2). Supongamos ahora que para todo $i \in \mathbb{N}$, cada $X_i \neq \emptyset$ y $X = \emptyset$. Consideremos $U = \emptyset$. El conjunto U es abierto en X y $X \subset U$. Luego, por (1) existe N tal que $X_N \subset U$. Así, $X_N = \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, $X \neq \emptyset$. Note además que X es cerrado en Z y ya que $X \subset X_1$, entonces X es compacto. $\square$

En la siguiente definición abordamos el concepto fundamental de este trabajo.

Definición 1.8. *Un **continuo** es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** es un subespacio de un espacio topológico que es un continuo.*

El primero en tratar con la clase de «continuos» fue George Cantor en 1883, quien se limitó a estudiar los continuos en $\mathbb{R}^n$. Esto se debió a que muchos de los objetos de estudio en el periodo inicial de la Topología eran considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Uno de ellos era el concepto de línea o curva; en ese entonces frecuentemente entendido como la trayectoria de un punto en movimiento continuo. Sobre esta base, la definición original dada por Cantor establecía que un continuo era un subconjunto perfecto (es decir, cerrado y denso en sí mismo) y conexo en $\mathbb{R}^n$. Una definición posterior, dada sobre la misma base, establecía que un continuo era un subconjunto conexo, cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Más adelante, el ser cerrado y acotado se reformuló en ser compacto y el concepto de continuo se generalizó para incluir a los espacios métricos. Lo que nos trae a la definición actual.

Pongamos atención en la siguiente característica.

Teorema 1.9. *La propiedad de ser un continuo es invariante bajo homeomorfismos.*

Demostración. La metrizabilidad (Teorema A.1), la conexidad (Teorema A.2) y la compacidad (Corolario A.4) son invariantes bajo homeomorfismos. □

Enunciamos a continuación algunos ejemplos básicos de continuos.

Ejemplo 1.10. *Por el Teorema 1.3, los únicos subcontinuos de $\mathbb{R}$ son los conjuntos unitarios y los intervalos cerrados y acotados.*

Ejemplo 1.11. *Un **arco** es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado* [0,1]. *Como el $[0,1]$ es un continuo, por el Teorema 1.9 un arco es un continuo.*

Definición 1.12. *Sean A un arco, $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo, $p = h(0)$ y $q = h(1)$, los puntos p y q son los **puntos extremos del arco** A.*

Figura 1.2: Arco

Ejemplo 1.13. *La **circunferencia unitaria** es*

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}.$$

Observemos que S^1 es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto es compacto. Ahora, sea $t \in [0,1]$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$. Notemos que $f([0,1]) = S^1$. Como f es una función continua y $[0,1]$ es un conjunto conexo, S^1 es conexo. Así, S^1 es un continuo.

*Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1. Como S^1 es un continuo, por el Teorema 1.9 toda curva cerrada simple es un continuo.*

Ejemplo 1.14. *El espacio métrico $\overline{W}$, definido en el Ejemplo 1.6, además de ser conexo, es compacto. Así, $\overline{W}$ es un continuo conocido como el **continuo sen** $(1/x)$.*

Ejemplo 1.15. *Sean $\overline{W}$ el continuo $sen(1/x)$ y Z un arco en $\mathbb{R}^2$ que tiene como puntos extremos $(0,-1)$ y $(1, sen(1))$. Cualquier continuo homeomorfo a $V = \overline{W} \cup Z$ es nombrado **Circunferencia de Varsovia** (véase Figura 1.3).*

Como $\overline{W}$ y Z son conexos, y $\overline{W} \cap Z = \{(0,-1),(1, sen(1))\}$, el espacio métrico V es conexo. Además,debido a que $\overline{W}$ y Z son cerrados y acotados en $\mathbb{R}^2$, el conjunto V es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto, compacto. Así, V es un continuo.

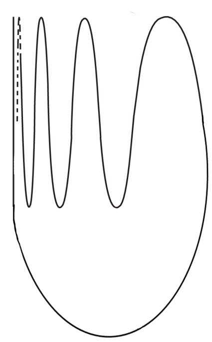

Figura 1.3: Circunferencia de Varsovia

La propiedad de la intersección anidada (veáse el Teorema 1.7) también es utilizada para construir continuos, como vemos en el siguiente teorema y en el ejemplo posterior.

Teorema 1.16. *Sean* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de continuos tal que para todo* $i \in \mathbb{N}$*, es verdad que* $X_i \supset X_{i+1}$*, y*

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Entonces, X *es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.7, el conjunto X es un espacio no vacío, métrico y compacto. Supongamos que X no es conexo. Luego, $X = A \cup B$ donde A y B son conjuntos no vacíos, ajenos y cerrados en X (por lo tanto, compactos). Como X_1 es un espacio métrico, por el [10, Teorema 2.3 pág. 198], X_1 es normal. Así, existen subconjuntos V y W ajenos y abiertos en X_1 tales que $A \subset V$ y $B \subset W$ y por lo tanto $X \subset (V \cup W)$. Sea $U = V \cup W$. Luego, por (1) del Teorema 1.7, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que para todo $i \geq n$, es cierto que $U \supset X_i$. En particular, $U \supset X_n$. Así, $X_n = X_n \cap U = X_n \cap (V \cup W) = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$.

Observe que $(X_n \cap V) \supset (X \cap A)$, $X \cap A = A$ y $A \neq \emptyset$ por lo tanto $X_n \cap V \neq \emptyset$. De igual forma de $(X_n \cap W) \supset (X \cap B)$, $X \cap B = B$ y $B \neq \emptyset$ obtenemos que $X_n \cap W \neq \emptyset$. Notemos además que $(X_n \cap V) \cap (X_n \cap W) = X_n \cap (V \cap W) = X_n \cap \emptyset = \emptyset$. Tomando en cuenta que $X_n \cap V$ y $X_n \cap W$ son abiertos en X_n, tenemos que estos conjuntos forman una separación de X_n. Por lo tanto, X_n no es conexo, pero esto es una contradicción. Así, X es conexo. $\square$

Definición 1.17. *Sean* X *un espacio topológico y* $\mathcal{C} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ *una colección finita de subconjuntos de* X*. La colección* $\mathcal{C}$ *es una* ***cadena simple de*** x ***a*** z ***pasando por*** y*, si satisface las siguientes propiedades:*

(1) si $|i - j| \leq 1$*, entonces* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$*;*

(2) $x \in A_1$ *y* $z \in A_n$*; y*

(3) existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $y \in A_i$*.*

Los elementos A_i *de una cadena simple son conocidos como* ***eslabones*** *y* $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$*.*

Ejemplo 1.18. *Sean* x, y, z *puntos distintos en* $\mathbb{R}^2$ *y para* $n \in \mathbb{N}$*, construimos* $\mathcal{C}_n$ *tales que son cadenas en* $\mathbb{R}^2$*, cuyos eslabones son discos cerrados de diámetro menor que* 2^{-n} *y satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) para toda $n \in \mathbb{N}$, la cadena $\mathcal{C}_{3n+1}$ va de x a z pasando por y, la cadena $\mathcal{C}_{3n+2}$ va de y a z pasando por x, y la cadena $\mathcal{C}_{3n+3}$ va de x a y pasando por z;

(2) para toda $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup \mathcal{C}_n \supset \bigcup \mathcal{C}_{n+1}$.

Por el Teorema 1.16, la intersección anidada de la unión de estas cadenas resulta ser un continuo, es decir,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n).$$

es un continuo (véase Figura 1.4).

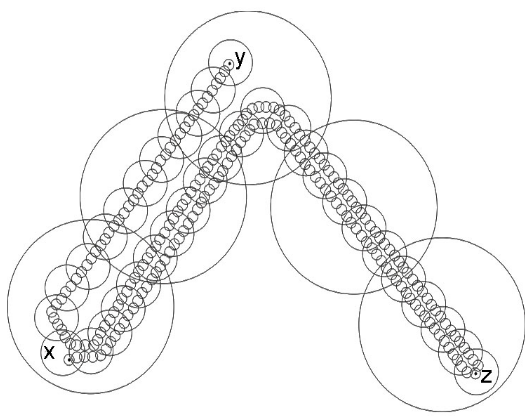

Figura 1.4: $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n)$ es un continuo

Otro método empleado para la construcción de continuos es el de la descomposición semicontinua superior (usc). A continuación vemos cuándo un espacio de descomposición de un continuo es metrizable, nos adentramos un poco en el estudio de la descomposición semicontinua superior y recordamos algunos conceptos relacionados.

Definición 1.19. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico no vacío, sea $\mathcal{D}$ una familia $\{D_i\}_{i\in I}$, en X de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos tales que $\bigcup \mathcal{D} = \bigcup_{i\in I} D_i = X$ ($\mathcal{D}$ es llamada una **partición** de X) y*

$$T(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}.$$

*Notemos que $T(\mathcal{D})$ es una topología para $\mathcal{D}$; de hecho, si $\pi : X \to \mathcal{D}$ denota la **función natural** definida en cada $x \in X$ por*

$$\pi(x) \text{ es el único } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } x \in D,$$

tenemos que $T(\mathcal{D})$ es la topología más grande para $\mathcal{D}$ tal que π es continua.

*El espacio $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es llamado un **espacio de descomposición** de X o, de manera más sencilla, una **descomposición** de X. La topología $T(\mathcal{D})$ es la **topología de la descomposición**. Enfatizamos que el término descomposición se refiere a una partición con la topología de la descomposición. Cuando los miembros de la partición son subconjuntos cerrados de X tal partición es llamada **partición cerrada**.*

En otras palabras, una descomposición es el espacio obtenido a partir del espacio original, al identificar todos los puntos de cada miembro de una partición dada con un solo punto en el nuevo espacio; sin embargo, la descomposición de un continuo X no siempre resulta ser un continuo. En ocasiones, ni siquiera es metrizable. En el Teorema 1.21 vemos cuándo sí lo es. Para llegar a él necesitamos antes un resultado más, el que vemos a continuación.

Lema 1.20. *Si X es un espacio métrico compacto, Y un espacio de Hausdorff, y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio métrico compacto X sobre un espacio de Hausdorff Y. Como Y es un espacio compacto Hausdorff, es suficiente probar que Y tiene una base numerable (Teorema de metrización de Urysohn [3, Cap. IX, Corolario 9.2]).

Sea $\mathcal{C}$ una base numerable para X. Para cada subcolección $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$, sea

$$E(\mathcal{L}) = Y \setminus f(X \setminus \bigcup \mathcal{L}).$$

Sea $\mathcal{P} = \{E(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{C}\}$. Note que $\mathcal{P}$ es numerable. Ya que X es compacto y Y es un espacio de Hausdorff, f es cerrada, es decir, lleva conjuntos cerrados en conjuntos cerrados; luego, cada miembro de $\mathcal{P}$ es un conjunto abierto en Y. Sea U un subconjunto abierto en Y y $q \in U$. Como $f^{-1}(q)$ es un cerrado dentro de un compacto (pues f es continua), tenemos que $f^{-1}(q)$ es compacto. Además, como $f^{-1}(q)$ esta contenido en el abierto $f^{-1}(U)$ y $\mathcal{C}$ es una base, existe una subcolección finita $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$f^{-1}(q) \subset \bigcup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$$

(porque si existe una colección numerable que cubra a $f^{-1}(q)$, por ser compacto, existe una subcolección finita que lo cubre). Luego, $q \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una base numerable para Y, es decir, Y es metrizable. □

Teorema 1.21. *Sean X un espacio métrico compacto y la pareja $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es metrizable si, y solo si $\mathcal{D}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Como la función natural π de X sobre $\mathcal{D}$ es continua y suprayectiva (Definición 1.19), si suponemos que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio de Hausdorff, por el Teorema 1.20, tenemos que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es metrizable. Supongamos ahora que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es metrizable, entonces $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio de Hausdorff. □

Podemos usar la descomposición de espacios métricos para construir otros espacios métricos compactos o continuos. La siguiente definición nos dará una útil condición para poder establecer cuándo una descomposición es metrizable; sin necesidad de verificar en cada ocasión que la descomposición es un espacio de Hausdorff.

Definición 1.22. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es* ***semicontinua superior (usc)*** *si para toda $D \in \mathcal{D}$, y $U \in \mathcal{T}$ tal que $D \subset U$, existe $V \in \mathcal{T}$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.*

Definición 1.23. *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición de X, entonces cualquier subconjunto de X que sea unión de una subcolección de $\mathcal{D}$ es* ***$\mathcal{D}$-saturado****.*

Note que siendo $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural de la Definición 1.19, cualquier $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ para $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ es $\mathcal{D}$-saturado. Además, un $A \subset X$ es $\mathcal{D}$-saturado si, y solo si $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$. Luego, si V es $\mathcal{D}$-saturado y abierto en

X, el conjunto $\pi(V)$ es abierto en $\mathcal{D}$ (usando la definición de π y $T(\mathcal{D})$ en la Definición 1.19).

En el siguiente resultado damos una caracterización de la descomposición usc desde otro punto de vista.

Lema 1.24. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una descomposición de X, y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural de la Definición 1.19. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) $\mathcal{D}$ es una descomposición usc;

(2) π es una función cerrada (es decir, π lleva conjuntos cerrados en X a conjuntos cerrados en $\mathcal{D}$);

(3) Si $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \mathcal{T}$ tal que $D \subset U$, entonces existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $D \subset V \subset U$ y V es $\mathcal{D}$-saturado.

Demostración. Demostraremos que (1) implica (2), (2) implica (3), y (3) implica (1). Supongamos (1). Sea C un subconjunto cerrado en X. Vemos de la Definición 1.19 que $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$ si (y solo si) $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X. Sea $p \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$.

Así, $\pi(p) \in \mathcal{D} \setminus \pi(C)$ y, luego, $\pi(p) \subset X \setminus C$ [ya que si $y \in \pi(p) \cap C$, entonces $\pi(y) \cap \pi(p) \neq \emptyset$ y $\pi(y) = \pi(p)$, por lo tanto $\pi(p) \in \pi(C)$]. Como $X \setminus C \in \mathcal{T}$, existe (por la Definición 1.22) un $V \in \mathcal{T}$ con $\pi(p) \subset V$ tal que si $x \in V$, entonces $\pi(x) \subset X \setminus C$. Así, $p \in V$. Además, $\pi(V) \subset \mathcal{D} \setminus \pi(C)$ ya que si $\pi(x) \in \pi(C)$, entonces para algún $y \in C$ se cumple que $\pi(x) = \pi(y)$ y $y \in \pi(x) \cap C$, luego $\pi(x) \not\subseteq X \setminus C$, por lo tanto, $x \notin V$. Así, $V \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$.Como $p \in V \in \mathcal{T}$, hemos probado que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en $\mathcal{T}$. Luego, $\pi(C)$ es cerrado y hemos probado (2).

Ahora supongamos (2). Sea $D \in \mathcal{D}$ y $U \subset \mathcal{T}$ tales que $D \subset U$. Luego, $X \setminus U$ es cerrado en X y por ser π una función cerrada, $\pi(X \setminus U)$ es un conjunto cerrado en T. De este modo, $\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$ es abierto en $\mathcal{D}$. Sea $V = \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U))$, se sigue por la continuidad de π que V es un conjunto abierto en X. Notemos que $\pi(X \setminus U) = \{A \in \mathcal{D} : A \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$ por lo que $\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) = \{A \in \mathcal{D} : A \subset U\}$ y $V = \{x \in X : \pi(x) \subset U\}$. De esta manera obtenemos $D \subset V \subset U$. Además, por la Definición 1.23, tenemos que V es $\mathcal{D}$-saturado. Por lo tanto, la condición (3) se satisface.

Para terminar supongamos (3). Sea $D \in \mathcal{D}$ y $U \subset \mathcal{T}$ con $D \subset U$. Por (3) existe un $V \in \mathcal{T}$ tal que $D \subset V \subset U$ y V es $\mathcal{D}$-saturado. Si algún $A \in D$ es tal que $A \cap V \neq \emptyset$ entonces $A \subset V \subset U$. Esto completa la prueba. $\square$

Para el siguiente resultado, recordemos que un **espacio $\mathbf{T_1}$** es un espacio topológico X tal que $\{x\}$ es un conjunto cerrado para todo $x \in X$.

Lema 1.25. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Sean $D \in \mathcal{D}$, $x \in D$ y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural de la Definición 1.19. Como X es T_1, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X y por (2) del Lema 1.24, tenemos que $\{D\} = \pi(\{x\})$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$. Luego $D = \pi^{-1}(\{D\})$ es cerrado en X por la continuidad de π, es decir, $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X. □

Observemos que una partición cerrada no necesariamente es usc, pero sí es un espacio T_1.

Teorema 1.26. *Si X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 1.21, es suficiente probar que una descomposición usc es un espacio de Hausdorff. Sea X un espacio métrico compacto con topología $\mathcal{T}$, sea $\mathcal{D}$ una descomposición usc de X, sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural (Definición 1.19). Para probar que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio de Hausdorff, sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tales que $D_1 \neq D_2$. Como D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de X, ajenos (Lema 1.25) y X es normal, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y para todo i se cumple que $D_i \subset U_i$. Como $\mathcal{D}$ es usc, el Lema 1.24 nos da $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ tales que para todo i, tenemos que $D_i \subset V_i \subset U_i$ y V_i es $\mathcal{D}$-saturado. Observemos que para todo i, se tiene que $D_i \in \pi(V_i)$ ya que $D_i \subset V_i$ y $D_i \in \mathcal{D}$. Por el último comentario en la Definición 1.23, los conjuntos $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos en $\mathcal{D}$. Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $V_i \subset U_i$, tenemos $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Luego, para todo i tal que $\pi^{-1}[\pi(V_i)] = V_i$, tenemos que $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$. Por lo tanto, hemos probado que $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ es un espacio de Hausdorff. □

Teorema 1.27. *Si X es un continuo y $\mathcal{D}$ es una descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.26 tenemos que $\mathcal{D}$ es metrizable. Como $\pi : X \to \mathcal{D}$ es continua y suprayectiva (Definición 1.19), sabemos que $\mathcal{D}$ es compacto y conexo. Así, $\mathcal{D}$ es un continuo. □

El siguiente resultado que nos interesa probar es el Teorema 1.30, el cual muestra como obtener todas las descomposiciones usc de un espacio métrico compacto y simultáneamente consigue una útil manera de obtener descomposiciones usc específicas. Para su demostración necesitaremos del Lema de Transgresión 1.29.

Definición 1.28. *Sean X y Y espacios topológicos y $p : X \to Y$ una función suprayectiva. Decimos que p es una **función cociente** cuando $U \subset Y$ es abierto si, y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Por ejemplo, π en la Definición 1.19 es una función cociente, así como cualquier función continua de un espacio compacto sobre un espacio de Hausdorff.

Lema 1.29 (Lema de Transgresión)**.** *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $p : X \to Y$ una función cociente, y $g : X \to Z$ continua. Si g es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(y)$, entonces $g \circ p^{-1}$ es continua.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "g \circ p^{-1}"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(y))$ es un conjunto de un elemento en Z (ya que g es constante sobre $p^{-1}(y)$). Si dejamos que $f(y)$ denote este punto, definimos una función $f : Y \to Z$ tal que para todo $x \in X$, tenemos $f(p(x)) = g(x)$.

Tomemos un conjunto V abierto en Z, como g es continua, el conjunto $g^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$ y ya que p es una función cociente, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en Y, por lo tanto, f es continua, es decir, $g \circ p^{-1}$ es continua. $\square$

Teorema 1.30. *Sea X un espacio métrico compacto. Si f es una función continua de X sobre un espacio métrico compacto Y, entonces*

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : \ y \in Y\}$$

es una descomposición usc de X y es homeomorfa a Y. Recíprocamente, cualquier descomposición usc de X es un espacio métrico compacto que es, además, una imagen continua de X.

Demostración. Sean $D \in \mathcal{D}_f$ y U abierto en X tal que $D \subset U$. Existe $y \in Y$ tal que $D = f^{-1}(y)$. El conjunto $F = f(X \setminus U)$ es cerrado, y $y \notin F$. Sea $W = Y \setminus F$ y sea $V = f^{-1}(W)$, entonces $y \in W$ y V es abierto en Y. Luego $D \subset V \subset U$, y V es abierto y saturado.

Observe que $\mathcal{D}_f$ es un espacio de Hausdorff por el Teorema 1.26. As´í, para probar que $\mathcal{D}_f$ es homeomorfa a Y, es suficiente verificar la continuidad de la función inyectiva h del espacio compacto Y sobre $\mathcal{D}_f$ definida para todo $y \in Y$ por

$$h(y) = \pi[f^{-1}(y)].$$

La continuidad de h se sigue del Lema 1.29 porque f es una función cociente. Por lo tanto, la mitad del Teorema 1.30 esta probado. La otra mitad es sencilla ya que si $\mathcal{D}$ es cualquier descomposición usc de X, entonces $\mathcal{D}$ es un espacio métrico (Teorema 1.26) y, usando $\pi : X \to \mathcal{D}$ (Definición 1.19), vemos que $\mathcal{D}$ es una imagen continua de X, y por lo tanto, compacta (Teorema A.3). Esto completa la prueba. $\square$

Definición 1.31. *Sea $\mathcal{D}$ la partición del cuadrado sólido $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ cuyos miembros son:*

(1) $\{(x,0),\ (1-x,1)\}$ para $x \in [0,1]$;

(2) $\{(x,y)\}$ para $y \in (0,1)$.

*El espacio de descomposición $\mathcal{D}$ de I^2 es la **banda de Moebius**, véase Figura 1.5.*

El espacio de descomposición $\mathcal{D}$ de I^2, por la Definición 1.31, es usc y por el Teorema 1.27, es un continuo y es un ejemplo de superficie de un solo lado en $\mathbb{R}^3$.

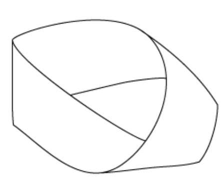

Figura 1.5: Banda de Moëbius

1.2. Hiperespacios

La teoría de los continuos se facilita cuando usamos espacios auxiliares que llamamos hiperespacios. A continuación definimos los siguientes espacios:

Definición 1.32. *Sea X un espacio topológico.*

(1) $2^X = \{A : \ A$ *es un subconjunto no vacío y cerrado en* $X\}$.

(2) $C(X) = \{A \in 2^X : A$ *es conexo*$\}$.

Ahora, sea (X, d) *un espacio métrico compacto. Para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada* $A \in 2^X$ *sea,*

(3) $N(\varepsilon, A) = \{x \in X :$ *existe* $a \in A$ *tal que* $d(x, a) < \varepsilon\}$. *El conjunto* $N(\varepsilon, A)$ *se lee: la* ***epsilon nube*** *de* A.

(4) Sea $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ *la función tal que*

$$H(A, B) = \text{ ínf } \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

La función $H(A, B)$, denotada en adelante como H, que se acaba de definir tiene una propiedad extraordinaria, como se ve a continuación.

Teorema 1.33. *[2, Teorema 2.9] Si* (X, d) *es un espacio métrico compacto, entonces* H *es una métrica para el hiperespacio* 2^X.

Definición 1.34. *Sea* (X, d) *es un espacio métrico compacto. La función* H *es la* ***métrica de Hausdorff*** *inducida por* **d**. *Los espacios* 2^X *y* $C(X)$ *con la topología inducida por* H *son los* ***hiperespacios*** *de* X.

Muchas propiedades de los continuos se pueden examinar por medio de sucesiones de conjuntos, como se vió en el Ejemplo 1.18. La convergencia de conjuntos que usamos para estudiar continuos es la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff, esta convergencia esta en términos de una noción de «convergencia en el espacio original X», como se ve a continuación.

Definición 1.35. *Sean* X *un espacio topológico,* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X *y* A *un subconjunto de* X.

(1) El ***límite inferior*** *de la sucesión* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es*

$\liminf A_i = \{x \in X :$ *para cada* U *abierto en* X, *con* $x \in U$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $i \geq N$, *entonces* $U \cap A_i \neq \emptyset\}$;

(2) *El **límite superior** de la sucesión* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es*

$\limsup A_i = \{x \in X$: *para cada abierto* U *en* X *con* $x \in U$, *y para cada* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $i \geq N$ *tal que* $U \cap A_i \neq \emptyset\}$.

(3) *El **límite** de la sucesión* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es* A *cuando*

$$\liminf A_i = A = \limsup A_i;$$

esto lo denotamos por $\lim A_i = A$.

(Véase Figura 1.6)

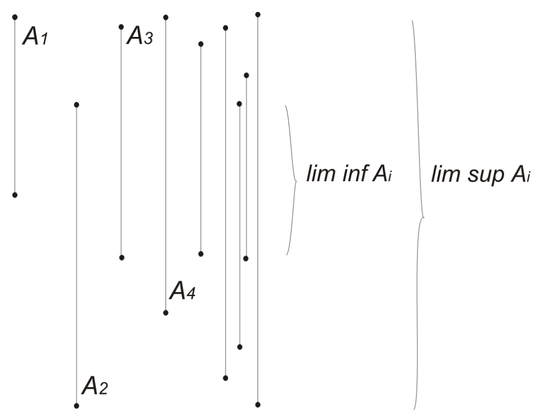

Figura 1.6: Límite superior y límite inferior de una sucesión

Teorema 1.36. *[11, Teorema 4.11] Sean* X *un espacio métrico, y* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X *compactos y no vacíos. Entonces, el* $\lim A_i = A$ *si, y solo si* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a* $A \in 2^X$ *con respecto a la métrica Hausdorff.*

El siguiente resultado nos proporciona una útil equivalencia para realizar demostraciones, por ejemplo, en la demostración del Teorema 1.45.

Teorema 1.37. *[2, Teorema 2.10] Si* X *es un continuo,* $A, B \in 2^X$ *y* $\varepsilon > 0$, *entonces* $H(A, B) < \varepsilon$ *si, y solo si* $A \subset N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Definición 1.38. *Sea* X *un continuo. Una **función de Whitney** para el hiperespacio* 2^X *es una función continua* $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ *tal que:*

(1) *para cada* $x \in X$, *tenemos que* $\mu(\{x\}) = 0$ *y*

(2) para cada A, $B \in 2^X$ tales que $A \subseteq B \neq A$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$.

La función $\mu|_{C(X)} : C(X) \to \mathbb{R}$ es una **función de Whitney** para $C(X)$.

Teorema 1.39. *[2, Teorema 3.3] Si X es un continuo, entonces existe una función de Whitney para el hiperespacio 2^X.*

Los Teoremas 1.40 y 1.42 son resultados claves en el desarrollo de la teoría de los hiperespacios. Aquí los ocupamos, por ejemplo, en la prueba del Teorema 2.46.

Teorema 1.40. *[6, Corolario 6.13] Si X es un continuo, entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son unos continuos.*

Definición 1.41. *Sean X, Y unos continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Denotamos por $2^f : 2^X \to 2^Y$ y por $C(f) : C(X) \to C(Y)$ a las* ***funciones inducidas*** *definidas, respectivamente, para cada $A \in 2^X$ por $2^f(A) = f(A)$ y $C(f)(A) = f(A)$.*

Teorema 1.42. *[2, Teorema 3.33] Si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces la función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es continua.*

Definición 1.43. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos. Un* ***elemento maximal*** *de $\mathcal{C}$ es un $F \in \mathcal{C}$ tal que ningún miembro de $\mathcal{C}$ contiene propiamente a F. Un* ***elemento minimal*** *de $\mathcal{C}$ es un $E \in \mathcal{C}$ tal que ningún miembro de $\mathcal{C}$ esta contenido propiamente en E.*

El resultado que sigue se usará en la prueba del Teorema 2.46.

Teorema 1.44 (Teorema del Máximo-Mínimo)**.** *Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado no vacío de 2^X, entonces existe un elemento maximal de $\mathcal{C}$ y un elemento minimal de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.39, sea $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Como μ es continua y 2^X es compacto, alcanza su máximo y su mínimo. Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado no vacío de 2^μ, como 2^X es compacto, $\mathcal{C}$ es compacto. Además $\mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ es continua porque μ es continua. Así, $\mu|_{\mathcal{C}}$ alcanza su máximo y su mínimo.

Es decir, existen M_1, $M_2 \in \mathcal{C}$ para todo $A \in \mathcal{C}$, tales que $\mu(M_1) \leq \mu(A) \leq \mu(M_2)$ por lo tanto, M_2 es un elemento maximal de $\mathcal{C}$ y M_1 es un elemento minimal de $\mathcal{C}$. $\square$

El siguiente resultado también será requerido en la demostración del Teorema 2.46.

Teorema 1.45. *Sean $I = [0,1]$ y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^I tal que $\text{lím}\ A_i = A$ cuando A_i tiende a A, donde $A \neq I$ y para toda i, tenemos que $A_i \neq I$. Si J es un componente de $I \setminus A$, entonces existe una sucesión $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de componentes de $I \setminus A_i$ tales que $\text{lím}\ \overline{J_i} = \overline{J}$.*

Demostración. Observe que J es un intervalo abierto en I, pues A es cerrado en I. Sea $s < r < t$, donde $\overline{J} = [s,t]$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N$, tenemos que $r \in I \setminus A_i$. Para cada $i \geq N$, sea J_i el componente de $I \setminus A_i$ tal que $r \in J_i$. Sean S_A el componente de A tal que $s \in S_A$ y T_A el componente de A tal que $t \in T_A$. Supongamos que $S_A = [\ell, s]$ y $T_A = [t,h]$. Observe que $S_A \cup J \cup T_A = [\ell, h]$ y $\overline{J} = [s,t]$. Si S_A o T_A son conjuntos unitarios, entonces sean $\ell = r_1 = s$ o $t = r_2 = h$. Si $\ell < s$ y $t < h$, sean $\ell < r_1 < s$ y $t < r_2 < h$.

Como $\text{lím}\ A_i = A$ cuando A_i tiende a A, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N_1$ se cumple que $r_1, r_2 \in A_i$. Para $i \geq N_1$, sean S_{A_i} el componente de A_i tal que $r_1 \in S_{A_i}$ y T_{A_i} el componente de A_i tal que $r_2 \in T_{A_i}$. Observe que $\text{lím}\ S_{A_i} = S_A = [\ell, s]$ cuando S_{A_i} tiende a S_A y $\text{lím}\ T_{A_i} = T_A = [t,h]$ cuando T_{A_i} tiende a T_A.

Si suponemos que $S_{A_i} = [b_{s_i}, a_{s_i}]$ y $T_{A_i} = [a_{t_i}, b_{t_i}]$, entonces $b_{s_i} \to \ell$ y $a_{s_i} \to s$; y $b_{t_i} \to h$ y $a_{t_i} \to t$. Sea $\overline{J_i} = [a_{s_i}, a_{t_i}]$, observe que $S_{A_i} \cup \overline{J_i} \cup T_{A_i} = [b_{s_i}, b_{t_i}]$. Sea $\varepsilon > 0$ para $N_2 > \text{máx}\{N, N_1\}$, si $i \geq N_2$, entonces

$$(*) \qquad d(a_{s_i}, s) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad d(a_{t_i}, t) < \varepsilon.$$

Podemos suponer que $\varepsilon < \frac{\text{diám}(J_i)}{2}$.

Por el Teorema 1.36 nos resta probar que $\{\overline{J_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $\overline{J}$ respecto a la métrica de Hausdorff. Y por el Teorema 1.37 esto equivale a probar que $\overline{J_i} \subset N(\varepsilon, \overline{J})$ y $\overline{J} \subset N(\varepsilon, \overline{J_i})$.

Afirmación 1: $\overline{J_i} \subset N(\varepsilon, \overline{J})$.
Prueba de la Afirmación 1. Sea $p \in \overline{J_i}$, así $a_{s_i} \leq p \leq a_{t_i}$. Por lo tanto, $a_{s_i} \leq p \leq s$ o $p \in \overline{J}$ o $t \leq p \leq a_{t_i}$. Por (*), tenemos que $d(p,s) < \varepsilon$ o $p \in \overline{J}$ o $d(t,p) < \varepsilon$. Así, $\overline{J_i} \subset N(\varepsilon, \overline{J})$. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2: $\overline{J} \subset N(\varepsilon, \overline{J_i})$.
Prueba de la Afirmación 2. Sea $q \in \overline{J}$, así $s \leq q \leq t$. Por lo tanto, $s \leq q \leq a_{s_i}$ o $q \in \overline{J_i}$ o $a_{t_i} \leq q \leq t$. Por (*), tenemos que $d(q,s) < \varepsilon$ o $q \in \overline{J_i}$ o $d(t,q) < \varepsilon$. Así, $\overline{J} \subset N(\varepsilon, \overline{J_i})$. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Luego, por la Afirmación 1 y la Afirmación 2, tenemos que $H(\overline{J_i}, \overline{J}) < \varepsilon$.

$\square$

Definición 1.46. *[2, Teorema (2.16)] Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y U_1, $U_2, \cdots, U_n$ subconjuntos de X. El* ***vietórico*** *de $U_1, U_2, \cdots, U_n$, denotado por $\langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$, es el conjunto*

$$\left\{ A \in 2^X : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \ \text{y para cada } i \in \mathbb{N}, \quad A \cap U_i \neq \emptyset \right\}.$$

Teorema 1.47. *[2, Teorema (2.19)] Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y U_1, $U_2, \cdots, U_n$ abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$, entonces existen V_1, $V_2, \ldots, V_n$ abiertos en X tales que*

$$A \in \langle V_1, V_2, \cdots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$$

y para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{V_i} \subset U_i$.

Teorema 1.48. *[2, Teorema (2.20)] Si X es un continuo y*

$$\mathcal{B} = \{ \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle : U_1, U_2, \cdots, U_n \ \text{son abiertos en } X \ \text{y } n \in \mathbb{N} \},$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.

La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la **topología de Vietoris** que fue introducida, en 1922, por L.Vietoris.

Teorema 1.49. *[2, Teorema (2.22)] Sea X un continuo. La topología de Vietoris, τ_V, y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H, en 2^X son iguales.*

1.3. Puntos de no corte

En la teoría de continuos, la prueba de algunos resultados depende del estudio de los puntos de no corte; por lo que es importante conocer su existencia, cantidad y localización en un continuo.

Definición 1.50. *Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, entonces p es llamado un* ***punto de no corte*** *de X. Si $X \setminus \{p\}$ es disconexo, entonces p es llamado un* ***punto de corte*** *de X.*

El 0 y el 1 en el intervalo unitario $[0,1]$ son puntos de no corte.

Notación.($Y = P \oplus Q$). Si Y es un espacio topológico, escribimos $Y = P \oplus Q$ para denotar que $Y = P \cup Q$, los conjuntos P y Q son no vacíos, $P \cap Q = \emptyset$ y P y Q son abiertos en Y.

Teorema 1.51. *[11, Teorema 6.6][Existencia de puntos de no corte] Sea X un continuo. Supongamos que p es un punto de corte de X, es decir $X \smallsetminus \{p\} = U \oplus V$. Entonces, cada uno de los conjuntos U y V tienen al menos un punto de no corte de X.*

En el periodo 1916-1920 Waclaw Sierpinski, Stefan Strazewicz y Robert Lee Moore obtuvieron caracterizaciones topológicas del arco como el único continuo que contiene exactamente dos puntos de no corte. Por cierto, sobre la lápida de Sierpiński esta la inscripción «Badacz Nieskończoności» (Investigador del infinito).

Como comentamos después de la Definición 1.50, en realidad los puntos extremos son los únicos puntos de no corte en el intervalo unitario $[0,1]$, como lo muestra el siguiente resulado.

Teorema 1.52. *[11, Teorema 6.17] Un continuo X es un arco si, y solo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.*

Teorema 1.53. *Sean X un continuo, $\mathcal{D}$ una descomposición usc de X (con la topología de la descomposición), $D_0 \in \mathcal{D}$, y supongamos que todos los miembros de $\mathcal{D}$ son subcontinuos de X excepto posiblemente por D_0. Entonces D_0 es un punto de no corte de $\mathcal{D}$ si, y solo si $X \smallsetminus D_0$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \smallsetminus D_0$ no es conexo. Así, $X \smallsetminus D_0 = C|H$. Usando la función natural de la Definición 1.19, tenemos que $D_0 = \pi^{-1}(\{D_0\})$. Como $\{D_0\}$ es cerrado en $\mathcal{D}$ y π es continua, D_0 es cerrado en X.

Por otro lado $X = \bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}} D$, así que $\bigcup\limits_{D \in \mathcal{D} \smallsetminus \{D_0\}} D = X \smallsetminus D_0 = C|H$. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ con $D_1 \neq \mathcal{D}_0$ y $D_2 \neq \mathcal{D}_0$. Como D_1 y D_2 son subcontinuos, supongamos que $D_1 \subset C$ y $D_2 \subset H$. Por (3) del Lema 1.24, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ tales que $D_1 \subset V_1 \subset C$, además $D_2 \subset V_2 \subset H$, y V_1 y V_2 son $\mathcal{D}$- saturados. Es decir, $V_1 = \bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}'} D$ y $V_2 = \bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}''} D$, donde $\mathcal{D}', \mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$.

Observe que $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{D}''$ son abiertos en $\mathcal{D}$. Sea $\bigcup_C \mathcal{D}'$ la unión de los $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ que resultan cuando $D_1 \subset C$ y $\bigcup_H \mathcal{D}''$ la unión de los $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$ que resultan cuando $D_2 \subset H$. Así, $\mathcal{D} \setminus \{D_0\} = \left(\bigcup_C \mathcal{D}'\right) \cup \left(\bigcup_H \mathcal{D}''\right)$, es decir, D_0 es un punto de corte de $\mathcal{D}$. Por lo tanto, hemos probado que si D_0 es un punto de no corte de $\mathcal{D}$ entonces $X \setminus \{D_0\}$ es conexo.

Ahora supongamos que $X \setminus \{D_0\}$ es conexo. Como la imagen continua de un espacio conexo es conexa, tenemos que $\pi(X \setminus D_0) = \mathcal{D} \setminus \{D_0\}$ es conexo, es decir D_0 es un punto de corte de $\mathcal{D}$. $\square$

Teorema 1.54. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición usc de X (con la topología de la descomposición). Si $X = [0,1]$ y todos los miembros de $\mathcal{D}$ son subcontinuos propios de X, entonces $\mathcal{D}$ es un arco.*

Demostración. Como $\mathcal{D}$ es una descomposición usc del continuo X, por el Teorema 1.27, tenemos que $\mathcal{D}$ es un continuo. Además, $0, 1 \in X$, así que existen $D_0, D_1 \in \mathcal{D}$ tales que $0 \in D_0$ y $1 \in D_1$. Como D_0 y D_1 son subcontinuos propios, $X \setminus D_0$ y $X \setminus D_1$ son conexos. Por el Teorema 1.53, D_0 y D_1 son puntos de no corte de $\mathcal{D}$.

Sea $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \neq D_0$ y $D \neq D_1$, así $0, 1 \notin D$. De donde $D \subset (0,1)$, así $X \setminus D$ no es conexo. Por el Teorema 1.53, tenemos que D es un punto de corte de $\mathcal{D}$. Por lo tanto, D_0 y D_1 son los únicos puntos de no corte de $\mathcal{D}$ y por el Teorema 1.52 concluimos que $\mathcal{D}$ es un arco. $\square$

1.4. Teorema general para funciones

Esta sección tiene como finalidad, probar el distinguido teorema general para funciones (Teorema 1.58) que es de utilidad en la prueba de uno de los resultados principales de esta tesis, que es el Teorema de Hahn y Mazurkiewicz (Teorema 2.32). Para esto enunciamos una definición y dos lemas necesarios.

Definición 1.55. *Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Dado $p \in X$, una* ***función*** *$F : X \to 2^Y$ es* ***semicontinua superior en un punto*** $\mathbf{p} \in X$*, se denota* ***usc en p****, si dado $U \in \mathcal{T}_2$ tal que $F(p) \subset U$, existe $V \in \mathcal{T}_1$ tal que $p \in V$ y para todo $x \in V$, se tiene que $F(x) \subset U$.*

*Una función $F : X \to 2^Y$ es **semicontinua superior**, se denota **usc**, si F es usc en todo punto de X.*

Lema 1.56. *Sean $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos, y $F : X \to 2^Y$ usc. Si para todo $x \in X$, $F(x)$ es el conjunto unitario $\{y_x\}$, entonces la función $f : X \to Y$ definida para toda $x \in X$ por $f(x) = y_x$ es continua.*

Demostración. Sean $p \in X$, y $U \in \mathcal{T}_2$ tales que $f(p) \in U$. Como $F(p) = \{f(p)\} \subset U$ y F es usc en p, por la Definición 1.55 existe $V \in \mathcal{T}_1$ tal que $p \in V$ y para todo $x \in V$, tenemos que $F(x) \subset U$. Luego, $V \in \mathcal{T}_1$, el punto $p \in V$, y para todo $x \in V$, sabemos que $\{f(x)\} \subset U$, es decir, $f(x) \in U$. Por lo tanto, f es continua en p. □

Lema 1.57. *Sean X y Y espacios métricos compactos no vacíos. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : X \to 2^Y$ usc tal que para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ y $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Entonces*

(1) $G : X \to 2^Y$ definida así es una función y es usc.

(2) Si para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$, entonces $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$.

Demostración. (1)Por (2) del Teorema 1.7, para todo $x \in X$, $G(x)$ es no vacío y cerrado. Luego, $G : X \to 2^Y$. Para probar que G es usc, sea $p \in X$ y sea U un subconjunto abierto en Y tal que $G(p) \subset U$. Luego, por el Teorema 1.7, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $F_N(p) \subset U$. Como F_N es usc en p, por la Definición 1.55 existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V$ y para todo $x \in V$, los $F_N(x) \subset U$. Por lo tanto, G es usc.

(2) Sea $q \in Y$. Luego, por la suposición en (2), para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $q \in F_n(x_n)$. Por la compacidad de X el espacio X es secuencialmente compacto. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_{n_{(i)}}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{x_{n_{(i)}}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X$. Vemos ahora que $q \in G(p)$. Supongamos que $q \notin G(p)$. Sea $U = Y \setminus \{q\}$, así, $G(p) \subset U$ y U es abierto en Y. De este modo, $G(p) = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ donde $X_1 = Y,\ X_2 = F_1(p),\ X_3 = F_2(p), \dots$. Por lo tanto, $U \subset X_1 = Y$. Así, por el Teorema 1.7, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N(p) \subset U$. Como F_N es usc en p, por la Definición 1.55 existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V$ y

$$\text{(a) para todo } x \in V, \qquad F_N(x) \subset U.$$

Como $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p \in V$, existe $k = n(i)$ para algún i tal que $k \geq N$ y $x_k \in V$. Luego, por (a),

$$\text{(b)} \qquad F_N(x_k) \subset U.$$

Debido a que $k \geq \text{N}$, decimos que $F_N(x_k) \supset F_k(x_k)$. Ahora bien, ya que $q \in F_k(x_k)$, tenemos que $q \in F_N(x_k)$. Vemos ahora por (b), que $q \in U$ lo cual es imposible porque $U = Y \setminus \{q\}$. Por lo tanto, hemos probado que $q \in G(p)$ y $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$. □

Teorema 1.58. *[Teorema general para funciones] Sean X y Y espacios métricos compactos no vacíos. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $F_n : X \to 2^Y$ es usc;

(2) para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$;

(3) para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ y $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$;

(4) para todo $x \in X$, $\lim_{n \to \infty}$ diám$[F_n(x)] = 0$.

Entonces para cada $x \in X$, $G(x)$ consta de solo un punto, $G(x) = \{y_x\}$ y la función $f : X \to Y$ dada por $f(x) = y_x$ es continua.

Demostración. Para todo $x \in X$, sea $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ y $f(x)$ es el único punto en $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, luego

(i) para todo $x \in X$, $f(x)$ es el único punto en $G(x)$.

Lo cual nos da una función bien definida por las condiciones (2) y (4) de la hipótesis, y por (2) del Teorema 1.7. Por (1) del Lema 1.57, la función G es usc, por (i) y el Lema 1.56, $f : X \to Y$ es continua. Por (i) y (2) del Lema 1.57, f es suprayectiva. □

Capítulo 2

Conexidad Local

2.1. Continuos de convergencia

En este capítulo exponemos las propiedades básicas de los continuos de Peano, para esto estudiaremos la noción de continuo de convergencia y la propiedad S, para después probar el Teorema 2.32 de Hahn y Mazurkiewicz que afirma: cualquier continuo de Peano es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. Finalmente, estudiaremos arcos en este tipo de espacios topológicos.

Comenzamos enunciando la noción de vecindad.

Definición 2.1. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $p \in X$. Un subconjunto G de X se llama una* ***vecindad de* p** *si existe un $U \in \mathcal{T}$ tal que $p \in U \subset G$.*

Los primeros resultados acerca del concepto que sigue se deben a Pia Nalli, Stefan Mazurkiewicz y Hans Hahn.

Definición 2.2. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo en* p** *($p \in X$), si toda vecindad de p contiene un conjunto conexo y abierto que contiene a p. El espacio X es* ***localmente conexo*** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 2.3. *Un espacio métrico X es llamado un* ***espacio de Peano*** *si es localmente conexo.*

Definición 2.4. *Un* ***continuo de Peano*** *es un espacio de Peano que es a la vez un continuo.*

Definición 2.5. *Un espacio topológico X es* ***conexo en pequeño en un punto*** **p** *si toda vecindad de p contiene una vecindad de p que es un conjunto conexo.*

La conexidad en pequeño es una noción útil en el estudio de la estructura de los continuos y nos sirve para probar, más adelante, el Teorema 2.12 de la existencia de continuos de convergencia.

Notemos que localmente conexo en p implica conexo en pequeño en p. Sin embargo, el recíproco es falso, aún para un continuo.

En 1920, Kazimierz Kuratowski caracterizó a los continuos de Peano como sigue.

Teorema 2.6. *Un espacio topológico X es localmente conexo si, y solo si todo componente de todo conjunto abierto en X es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que los componentes de todo conjunto abierto en X son abiertos en X. Sea $x \in X$ y U una vecindad cualquiera de x. Sea V un abierto en X tal que $x \in V \subset U$. Designamos por T al componente de V que contiene a x. Luego, T es conexo y abierto en X, además $T \subset U$ y T es un conjunto conexo que es vecindad de x. Es decir, X es un espacio localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente conexo y sea A un conjunto abierto. Consideremos un componente C de A y demostremos que es abierto. Tomemos un $x \in C \subset A$, note que A es una vecindad de x. Como X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo U que es vecindad de x tal que $U \subset A$. Además, dado que C es un componente, $U \subset C$. Podemos ver a C como la unión de todos estos conjuntos abiertos U correspondientes a cada uno de sus puntos, así C es abierto. $\square$

De manera global, las nociones de conexidad local y conexidad en pequeño son equivalentes, como veremos a continuación.

Teorema 2.7. *Un espacio topológico es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si, y solo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño. Sea U un abierto en X y sea C un componente de U. Si $x \in C$, entonces como X es conexo en pequeño en x, existe un conjunto conexo V tal que $x \in \operatorname{int}(V) \subset V \subset U$. Como C es el conjunto conexo maximal que contiene a x, tenemos que $V \subset C$.

Así, $\operatorname{int}(V) \subset C$. Por lo tanto, C es un conjunto abierto y, por el Teorema 2.6, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Sea $x \in X$ y U una vecindad de x. Como X es localmente conexo en x, existe un V abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$. Luego, $x \in \operatorname{int}(V) \subset U$. Así, X es conexo en pequeño en x. Como x es arbitraria, X es conexo en pequeño. □

Los Teoremas 2.8, 2.9 y 2.10 son necesarios para demostrar el Teorema 2.12.

Teorema 2.8. *[11, Teorema 4.18] Sea X un espacio métrico compacto. Toda sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión convergente a un subcontinuo de X, y toda sucesión convergente de subcontinuos de X tiene un subcontinuo de X como su límite.*

Teorema 2.9. *[11, Teorema 5.6][Golpes en la frontera II] Sean X un continuo y E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es un componente de E, entonces*

$$\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset.$$

Teorema 2.10 (Golpes en la frontera III)**.** *Sean X un continuo, E un subconjunto propio no vacío de X, y K un componente de E.*

(1) Si E es abierto en X, entonces $\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$, es decir, $\overline{K} \setminus E \neq \emptyset$.

(2) Si E es cerrado en X, entonces $K \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos todas las hipótesis. Luego, por el Teorema 2.9, tenemos que $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$. Así, $\overline{K} \cap \overline{E} \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset$.

Si E es abierto en X, entonces $\overline{X \setminus E} = X \setminus E$. Luego, $\overline{K} \cap \overline{E} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. Como $\overline{K} \cap \overline{E} \cap (X \setminus E) \subset \overline{K} \cap (X \setminus E)$. Concluimos que $\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

Si E es cerrado en X, entonces K es cerrado en X. Luego, $K = \overline{K}$. Como $\overline{K} \subset \overline{E}$, aseguramos que $\overline{K} \cap (\overline{X \setminus E}) \neq \emptyset$. Así, $K \cap \overline{X \setminus E} = \overline{K} \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$. □

La noción que sigue tiene una estrecha relación con los continuos de Peano.

Definición 2.11. *Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo con más de un punto A de X es llamado un* ***continuo de convergencia*** *(de X), si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos A_i de X tal que $\lim A_i = A$ y para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_i \cap A = \emptyset$.*

El teorema que sigue lo usamos en la prueba del Teorema 2.19.

Teorema 2.12 (Continuos de convergencia)**.** *Sean X un continuo, y $N = \{x \in X :\ X$ no es conexo en pequeño en $x\}$. Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.*

Demostración. Como $p \in N$, existe un conjunto cerrado M que es una vecindad de p (Definición 2.5) tal que si C es el componente de p en M, entonces $p \notin \operatorname{int}(C)$ (pues si $p \in C$, tendríamos que X sería conexo en pequeño en p). Así, $p \in \overline{M \setminus C}$, y existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\text{cuando } i \to \infty, \qquad p_i \to p, \tag{2.1.1}$$

$$\text{para toda } i, \qquad p_i \in M \setminus C. \tag{2.1.2}$$

Para toda $i \in \mathbb{N}$, denotemos C_i al componente de p_i en M. Si para algún $i \in \mathbb{N}$, tuviésemos $C \cap C_i \neq \emptyset$, entonces $C \cup C_i$ sería un subcontinuo de M el cual, ya que C es un componente de M, implicaría $C_i \subset C$, luego $p_i \in C$ la cual es una contradicción con (2.1.2). Por lo tanto,

$$\text{para toda } i \in \mathbb{N}, \qquad C \cup C_i = \emptyset. \tag{2.1.3}$$

Ahora, el límite C' de una subsucesión convergente de $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ (Teorema 2.8) debe ser un continuo de convergencia (como puede probarse usando Teorema 2.10 y (2.1.3), tal como hacemos abajo), y $p \in C'$ (por 2.1.1); sin embargo, C' puede no estar contenido en N. Esto es remediado como sigue. Sea Q un conjunto cerrado que es una vecindad de p tal que $Q \subset \operatorname{int}(M)$.

Por (2.1.1), suponemos sin pérdida de generalidad que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $p_i \in Q$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ denotemos por K_i al componente de p_i en Q. Como $Q \subset M$, podemos ver que

$$\text{para toda } i \in \mathbb{N}, \qquad K_i \subset C_i. \tag{2.1.4}$$

Por la Definición 2.8, la sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{K_{i_j}\}_{j=i}^{\infty}$ y su límite K es un subcontinuo de X. Como para todo j tenemos que $p_{i_j} \in K_{i_j}$, se sigue por (2.1.1) y porque K es un continuo, que $p \in K$.

A partir de que $K_{i_j} \subset Q$ y Q es cerrado en X, se sigue de $K = \lim K_{ij}$ que $\overline{K} \subset Q$. Por esto y dado que $Q \subset\ \operatorname{int}(M)$, sabemos que $K \subset M$. Como C es el componente de p en M, se sigue de que K es un continuo y $p \in \overline{K}$ que $K \subset C$.

Así, por (2.1.4) y (2.1.3), cada $j \in \mathbb{N}$, satisface que $K \cap K_{i_j} = \emptyset$. Por la segunda parte del Teorema 2.10, para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $K_{i_j} \cap (\overline{X \setminus Q}) \neq \emptyset$.

Luego, recordando que $K = \text{lím } K_{i_j}$ se sigue que $K \cap (\overline{X \setminus Q}) \neq \emptyset$. Como $p \in K$ y dado que Q es una vecindad de p (así, $p \notin \overline{X \setminus Q}$), K tiene más de un punto. Por lo tanto, hemos probado que K es un continuo de convergencia. Luego, en vista de que $p \in K$, hemos probado este teorema una vez que verifiquemos que $K \subset N$. Supongamos que existe $x \in K \setminus N$. Como $x \in K$ y $\overline{K} \subset Q \subset \text{int}(M)$, tenemos que M es una vecindad de x. Por otro lado, C es el componente de x en M pues $K \subset C$.

Por suposición $x \notin N$, es decir, X es conexo en pequeño en x. Así, existe un conjunto conexo G que es vecindad de x tal que $G \subset M$. Luego, por la definición de C sabemos que $G \subset C$.

Como $x \in K$, tenemos que $K = \text{lím } K_{i_j}$ y por (2.1.4) concluimos que $x \in \text{lím sup } K_i \subset \text{lím sup } C_i$.

Así, dado que G es una vecindad de x, para algún ℓ, tenemos que $G \cap C_\ell \neq \emptyset$. Luego, $C \cap C_\ell \neq \emptyset$, ya que $G \subset C$. Esto contradice a (2.1.3). Por lo tanto, hemos probado que $K \subset N$. Esto completa la prueba del teorema. □

Teorema 2.13. *Un continuo X no puede no ser conexo en pequeño en solo un punto o en una cantidad numerable de puntos; de hecho si no es conexo en pequeño en algún punto, existe un subcontinuo con más de un punto K de X tal que X no es conexo en pequeño en cualquier punto de K.*

Demostración. Sean X un continuo, $N = \{x \in X : \ x$ no es conexo en pequeño en $X\}$ y $p \in X$. Si $p \in N$, por el Teorema 2.12 existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$. Es decir, K es un continuo con más de un punto de X tal que X no es conexo en pequeño en cualquier punto de K. □

Observemos que la propiedad de ser un espacio de Peano no es hereditaria, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14. *Sea $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde τ es la topología del plano euclidiano, y el continuo seno $(1/x)$ definido en el Ejemplo 1.6. Observemos que $\overline{W}$ es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$, los puntos de la forma $(0, x)$, con $-1 \leq x \leq 1$, tienen vecindades no conexas en $\overline{W}$, por lo que este continuo no es localmente conexo.*

Es interesante tratar con continuos de Peano en los que cada subcontinuo siga siendo un continuo de Peano, esto lleva el nombre que sigue.

Definición 2.15. *Un continuo X es* ***hereditariamente localmente conexo****, si todo subcontinuo de X es un continuo de Peano.*

En el Teorema 2.19 vemos cuándo un continuo tiene la propiedad de ser hereditarimente localmente conexo, para probarlo es necesario el Teorema 2.18, pero antes damos el siguiente concepto.

Teorema 2.16. *[5, Teorema 2.42] Sean X un espacio métrico y A un continuo de convergencia de X. Si X es compacto, entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que $\lim B_i = A$, para toda $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_i \cap A = \emptyset$ y para toda $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ tenemos que $B_i \cap B_j = \emptyset$.*

Definición 2.17. *Un espacio topológico X es llamado σ-**conexo** si X no es la unión de una cantidad numerable, mayor que uno, de subconjuntos cerrados, no vacíos y ajenos dos a dos.*

Teorema 2.18. *[11, Teorema 5.16] Todo continuo es σ-conexo.*

En 1927, Urysohn realizó la siguiente caracterización de los continuos que son hereditariamente localmenete conexos; este mismo resultado fue obtenido por K. Zarankiewics en el mismo año.

Teorema 2.19. *Un continuo X es hereditariamente localmente conexo si, y solo si X no contiene continuos de convergencia.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo que contiene continuos de convergencia. Sea A un continuo de convergencia de X. Así, existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que $\lim A_i = A$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $A_i \cap A = \emptyset$. Además, por el Teorema 2.16 podemos elegir a los subcontinuos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ mutuamente ajenos, es decir, para todo $i, j \in \mathbb{N}$, con $i \neq j$ tenemos que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Si X no es un continuo de Peano, entonces X no es hereditariamente localmente conexo. Por lo tanto, supongamos que X es un continuo de Peano.

Sean $p, q \in A$ con $p \neq q$. Dado que X es de Hausdorff, existen U_1 y V_1 abiertos en X tales que $p \in U_1$ y $q \in V_1$ con $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Ahora, como X es un espacio regular, existe U_2 abierto en X tal que $p \in U_2 \subset \overline{U_2}^X \subset U_1$. Además, como X es un continuo de Peano, existe un conjunto U abierto en X tal que U es conexo y $p \in U \subset U_2$. Luego, $p \notin \overline{U}^X \subset \overline{U_2}^X \subset U_1$ y, como $U_1 \cap V_1 = \emptyset$, tenemos que $p \in U$ y $q \notin \overline{U}^X$. Dado que $A = \lim\inf A_i$, vemos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $i \geq N$, tenemos que $A_i \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto, $\overline{U}^X \cap [\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i] \neq \emptyset$. Sea

$$Y = A \quad \cup \quad \overline{U}^X \quad \cup \quad \left[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i\right].$$

Probemos que Y es un subcontinuo de X. Empecemos probando que Y es conexo. Para este propósito notemos que los conjuntos A y $\overline{U}^X$ son conexos y que $p \in A \cap \overline{U}^X$. Luego, por el Teorema (2.A.10) de [1], tenemos que $A \cup \overline{U}^X$ es conexo.

Ahora, para toda $i \geq N$, los A_i son conexos tales que $A_i \cap U \neq \emptyset$, y por lo tanto, $A_i \cap \overline{U}^X \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.9 de [5], vemos que $\left[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i\right] \cup \overline{U}^X$ es conexo. Por el Teorema (2.A.10) de [1], tenemos que $A \cup \overline{U}^X$ y $\left[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i\right] \cup \overline{U}^X$ son conexos. Por lo tanto Y es conexo.

Probemos ahora que Y es compacto. Sea $x \in \overline{Y}^X = \overline{A \cup \overline{U}^X \cup [\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]}^X = A \cup \overline{U}^X \cup \overline{\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i}^X$. Si $x \in A \cup \overline{U}^X$, entonces $x \in Y$. Además, si $x \in \overline{\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i}^X$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i$ tal que $x_i \to x$. Sea $R = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Analicemos los siguientes casos:

Si R es finito, $x_i \to x_{j_0}$ para algún $j_0 \in \mathbb{N}$. Es decir, $x = x_{j_0} \in \bigcup_{i=N}^{\infty} A_i \subset Y$.

Si R es finito, x es el único punto de acumulación de R.

Si existe $j \in \{N, N+1, \dots\}$ tal que $|A_j \cap R| = \infty$, entonces $(R \cap A_j)' \neq \emptyset$. Observemos que $\emptyset \neq (R \cap A_j)' \subset A_j' \subset \overline{A_j}^X = A_j$. Así, $\{x\} \subset A_j \subset Y$. Si por el contrario, para cada $j \in \{N, N+1, \dots\}$, tenemos que $|A_j \cap R| < \infty$, existe $F \subset \{N, N+1, \dots\}$ tal que F es infinito y para todo $j \in F : R \cap A_j \neq \emptyset$. Ahora sean $F = \{n_i, n_2, \dots\}$ y $y_i \in A_{n_i} \cap R$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos que si $i \neq j$, entonces $y_i \neq y_j$. Así, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Luego, $y_i \to x$. Por otro lado, sea U_0 abierto en X con $x \in U_0$. Existe $M \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq M : y_n \in U_0$. Así, para toda $i \geq M : U_0 \cap A_{n_i} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \text{lím sup } A_i = A \subset Y$. Luego, $\overline{Y}^X \subset Y$. Así, Y es un continuo.

Ahora, demostremos que Y no es un continuo de Peano suponiendo lo contrario, es decir, que Y es un continuo de Peano. Observemos que $Y \setminus \overline{U}^X$

es abierto en Y y $q \in Y \setminus \overline{U}^X$. Luego, existe W_1 abierto en Y tal que W_1 es conexo y $q \in W_1 \subset Y \setminus \overline{U}^X$. Como Y satisface el axioma de regularidad, existe V_2 abierto en Y tal que $q \in V_2 \subset \overline{V_2}^X \subset W_1$. Ahora, como suponemos que Y es un continuo de Peano, existe V abierto y conexo en Y tal que $q \in V \subset V_2$. Luego, $q \in V \subset V_2 \subset \overline{V_2}^X \subset W_1$. Notemos que $W_1 \cap \overline{U}^X = \emptyset$ y $\overline{V}^X \subset \overline{V_2}^X \subset W_1$. Porlo tanto, $\overline{V}^X \cap \overline{U}^X = \emptyset$. Y así

$$\overline{V}^X = \left[\overline{V}^X \cap A\right] \quad \cup \quad \left[\bigcup_{i=N}^{\infty} [A_i \cap \overline{V}^X]\right].$$

Luego, $\overline{V}^X \neq \emptyset$ ya que $q \in V \cap A$ y, como $A = \text{lím inf } A_i$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que si $i \geq M$, entonces $A_i \cap V \neq \emptyset$. De esta forma, $\overline{V}^X$ se puede describir como la unión infinita numerable de subconjuntos cerrados y ajenos. Por lo que $\overline{V}^X$ no es σ conexo (vea Definición 2.17) y como $\overline{V}^X$ es un continuo, tenemos una contradicción con el Teorema 2.18. Así, Y no es un continuo de Peano y por lo tanto, X no es hereditariamente localmente conexo.

Para abordar el recíproco, supongamos que X no tiene continuos de convergencia. Sea A un subcontinuo de X. Luego, A no tiene continuos de convergencia, y por el Teorema 2.12, tenemos que A es conexo en pequeño en todo $x \in X$ y además, por el Teorema 2.7, tenemos que A es un continuo de Peano. Así, tenemos que X es hereditariamente localmente conexo. $\square$

2.2. La propiedad *S*

La siguiente noción se debe a Sierpiński. Esta juega un papel crucial en la determinación de la estructura de los continuos de Peano.

Definición 2.20 (Propiedad S)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Y de X tiene la* ***propiedad S*** *si para todo $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de subconjuntos conexos $A_1, \cdots, A_n$ de Y tales que*

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \textit{y para todo } i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \text{diám}(A_i) < \varepsilon.$$

Más adelante veremos que, para espacios métricos compactos, tener la propiedad S es equivalente a ser espacio de Peano. Notemos que en general, sin la presencia de compacidad, la propiedad S no es invariante bajo homeomorfismos (por ejemplo, considere $(0,1)$ y $\mathbb{R}$ con su métrica usual).

Teorema 2.21. *Si un espacio métrico (X,d) tiene la propiedad S, entonces (X,d) es un espacio de Peano.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, es suficiente demostrar que para todo $p \in X$, es cierto que X es conexo en pequeño en p.

Sea $p \in X$, como X tiene la propiedad S, dado $\varepsilon > 0$, existe un número finito de subconjuntos conexos $A_1, \cdots, A_n$ de X tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{y para todo } i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \textit{diám}(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definimos el conjunto siguiente:

$$G = \bigcup \{A_i : p \in \overline{A_i}\}.$$

Observemos que G es no vacío, ya que al menos contiene un A_i que contiene a p, y diám $(G) < \varepsilon$, pues diám$(A_i) =$ diám$(\overline{A_i})$. Para $1 \leq i,\ k \leq n$, el punto $p \in A_i$ y $p \in \overline{A_k}$. Así, $A_i \cap \overline{A_k} \neq \emptyset$. Luego, $A_i \cup \overline{A_k}$ es conexo y por lo tanto, G es conexo.

Notemos que $X \setminus G = \bigcup \{A_j : p \notin \overline{A_j}\}$. Si $p \in \overline{X \setminus G} = \overline{\cup \{A_j : p \notin \overline{A_j}\}} = \overline{\cup \{A_j : p \notin \overline{A_j}\}}$. Luego, para algún j, tenemos que $p \in \overline{A_j}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $p \in \operatorname{int}(G)$.

Sean V una vecindad de p y $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(p,\varepsilon_1) \subset V$. Por lo anterior, existe G tal que $p \in G \subset B(p,\varepsilon_1)$, así G es una vecindad de p. Por lo tanto, hemos probado que X es conexo en pequeño en p. $\square$

Teorema 2.22. *Un espacio métrico compacto no vacío (X,d) es un espacio de Peano si, y solo si (X,d) tiene la propiedad S. En particular, un continuo (X,d) es un continuo de Peano si, y solo si para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que X es la unión de una familia finita de subcontinuos de diámetro menor que ε.*

Demostración. Por el Teorema 2.21, si X tiene la propiedad S, entonces X es un espacio de Peano. Ahora solo queda demostrar el recíproco.

Supongamos que X es un espacio de Peano y sea $\varepsilon > 0$. Luego, consideremos $X = \bigcup_{p\in X} B(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Para cada bola abierta tenemos lo siguiente:

Como X es un espacio de Peano, existe V_p abierto y conexo tal que $p \in V_p \subset B(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Observe que diám$(V_p) < \varepsilon$. Luego, la colección de todos los V_p forman una cubierta abierta de X, y como X es compacto, existe una subcolección finita tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Por lo tanto, para algún $\varepsilon > 0$, hemos cubierto X con un número finito de subconjuntos abiertos conexos de diámetros menores que ε. Es decir, X tiene la propiedad S.

Ahora supongamos que X es además conexo. Observemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$$

y diám(V_i) =diám$(\overline{V_i}) < \varepsilon$, y como los $\overline{V_i}$ son cerrados en un compacto, los V_i son unos subcontinuos. □

Como vemos a continuación, la propiedad S también se comporta como la conexidad.

Lema 2.23. *Sean (X, d) un espacio métrico, y $Y \subset X$ tal que Y tiene la propiedad S. Luego, cada Z tal que $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, tiene la propiedad S y, consecuentemente, Z es un espacio de Peano.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la Definición 2.20 existen subconjuntos conexos A_1, $A_2, \cdots, A_n$, de Y tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{y para todo } i \in \{1, \dots, n\}, \qquad \textit{diám}(A_i) < \varepsilon.$$

Definimos para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ a B_i como la cerradura de A_i en Z. Notemos que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$B_i = \overline{A_i}^Z = \overline{A_i}^X \cap Z \subset Z, \qquad \text{y}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}^Z = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}^Z = \overline{Y}^Z.$$

Por otro lado, como $Z \subset \overline{Y}^X$, tenemos

$$Z = \overline{Y}^X \cap Z = \overline{Y}^Z = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Además, diám$(B_i) \leq$ diám$(\overline{A_i}^X) =$ diám$(A_i) < \varepsilon$, y por el Teorema (2.A.13) de [1], cada B_i es conexo. Por lo tanto, Z tiene la propiedad S, y por el Teorema 2.21, el espacio Z es un espacio de Peano. □

La siguiente definición contiene la clave para probar el Teorema 2.28.

Definición 2.24. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Una **$S(\varepsilon)$-cadena** es una sucesión, finita y no vacía $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_n\}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\quad L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ (cadena débil);*
2. *Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\quad L_i$ es conexo;*
3. *Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, diám$(L_i) < \varepsilon \cdot 2^{-i}$.*

*Si $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ es un $S(\varepsilon)$-cadena, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un **eslabón** de $\mathcal{L}$; si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, entonces $\mathcal{L}$ es un **$\mathbf{S}(\varepsilon)$-cadena de x a y**. Si $A \subset X$, entonces definimos*
$S(A, \varepsilon) = \{y \in X :$ existe una $S(\varepsilon)$-cadena de algún punto de A a $y\}$.

Las propiedades importantes de los conjuntos $S(A, \varepsilon)$ son dadas en el Lema 2.25 y el Lema 2.26. Estos conjuntos proporcionan una manera de obtener pequeños subconjuntos conexos y abiertos que tienen la propiedad S en algún espacio métrico con la propiedad S.

Lema 2.25. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces para cualquier subconjunto no vacío A de X y cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $S(A, \varepsilon)$ tiene la propiedad S.*

Demostración. Para comenzar esta prueba fijemos un $\delta > 0$. Demostremos que existe un número finito de subconjuntos $B_1, \ldots, B_n$ de $S(A, \varepsilon)$ tales que $S(A, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto B_i es conexo y diám$(B_i) < \delta$ (Definición 2.20). Para probar esto, primero elegimos un entero positivo k tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}. \tag{2.2.1}$$

Luego, sea $Y = \{y \in S(A,\varepsilon)$: existe una $S(\varepsilon)$-cadena con a lo más k eslabones de algún punto de A a $y\}$.

Debido a que (X,d) tiene la propiedad S, existe una cubierta finita de X formada por conjuntos conexos cada uno de diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Denotemos por $E_1, \cdots, E_n$ a los miembros de esta cubierta que intersectan a Y. Si ninguno de ellos intersecta a Y, entonces $Y = \emptyset$ y, ya que $A \subset Y$, tenemos que $A = \emptyset$ (lo que resulta en una contradicción con la hipótesis). Por lo anterior podemos afirmar que se satisfacen:

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i; \tag{2.2.2}$$

$$\text{para toda } i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad E_i \cap Y \neq \emptyset; \tag{2.2.3}$$

$$\text{para toda } i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad E_i \text{ es conexo}; \tag{2.2.4}$$

$$\text{para toda } i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \text{diám}(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{2.2.5}$$

Fijemos ahora algún $i \in \{1,\ldots,n\}$. Por (2.2.3), existe un $p \in E_i \cap Y$. Como $p \in Y$, sea $\{L_1, \cdots, L_t\}$ una $S(\varepsilon)$-cadena con $t \leq k$ de algún punto de A a p. Como $t+1 \leq k+1$, tenemos que $2^{t+1} \leq 2^{k+1}$, y, en consecuencia, $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{t+1}}$. Luego, por (2.2.5) vemos que $\text{diám}(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^{t+1}}$. Además, notemos que por (2.2.4) el conjunto E_i es conexo y que $L_t \cap E_i \neq \emptyset$ (pues $p \in L_t$ y $p \in E_i$). De este modo, tenemos que $\{L_1, \cdots, L_t, L_{t+1} = E_i\}$ es una $S(\varepsilon)$-cadena de un punto de A a cualquier punto de E_i. Por lo tanto, hemos probado que

$$\text{para todo } i \in \{1,\ldots,n\}, \quad E_i \subset S(A,\varepsilon). \tag{2.2.6}$$

Luego, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, sea $\mathcal{P}_i$ la colección de conjuntos M que tienen las siguientes propiedades:

$$M \subset S(A,\varepsilon); \tag{2.2.7}$$

$$M \cap E_i \neq \emptyset; \tag{2.2.8}$$

$$M \text{ es conexo}; \tag{2.2.9}$$

$$\text{diám}(M) < \delta/4. \tag{2.2.10}$$

Ahora, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $B_i = \bigcup_{M \in \mathcal{P}_i} M$. Observe que cualquier E_i dado tiene dichas propiedades. Así, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $E_i \in \mathcal{P}_i$, por lo cual

$$\text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad E_i \subset B_i. \tag{2.2.11}$$

Demostremos ahora que $B_1, \cdots, B_n$ tienen las propiedades deseadas establecidas al principio de esta prueba.

Afirmación 1. Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto B_i es conexo y tiene el diámetro menor que δ.

Prueba de la Afirmación 1. Por (2.2.4), (2.2.8), y (2.2.9), cada B_i es conexo. Para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean $b_1, b_2 \in B_i$. Luego, existen $M_1, M_2 \in \mathcal{P}_i$ tales que $b_1 \in M_1$ y $b_2 \in M_2$. Por (2.2.8), existen q_1 y q_2 tales que $q_1 \in M_1 \cap E_i$ y $q_2 \in M_2 \cap E_i$. Luego, $d(b_1, b_2) \leq d(b_1, q_1) + d(q_1, q_2) + d(q_2, b_2)$.
Además, por (2.2.10), tenemos que $d(b_1, q_1) \leq \text{diám}(M_1) < \frac{\delta}{4}$. Análogamente obtenemos $d(q_1, q_2) \leq \text{diám}(E_i) < \frac{\delta}{4}$ (recordemos que $E_i \in \mathcal{P}_i$ y por lo tanto, también se satisface (2.2.10)) y $d(q_2, b_2) \leq \text{diám}(M_2) < \frac{\delta}{4}$. Así,

$$d(b_1, b_2) \leq d(b_1, q_1) + d(q_1, q_2) + d(q_2, b_2) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}.$$

Por lo tanto, $\text{diám}(B_i) \leq \frac{3}{4}\delta < \delta$. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. $S(A, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Prueba de la Afirmación 2. Primero notemos que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $B_i \subset S(A, \varepsilon)$ por (2.2.7). En consecuencia, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset S(A, \varepsilon)$. Por lo tanto, solo resta probar que

$$S(A, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i. \tag{2.2.12}$$

Para conseguir esto, sea $z \in S(A, \varepsilon)$. Por (2.2.2) y (2.2.11), tenemos que

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Si $z \in Y$, entonces $z \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y terminamos. Supongamos ahora que $z \notin Y$. Como $z \in S(A,\varepsilon)$, existe una $S(\varepsilon)$-cadena, $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_m\}$ de un punto de A a z. Ya que $z \notin Y$, tenemos que $m > k$. Sea $H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i$ y tomemos $p \in L_k$. Observe que la colección $\{L_1, \cdots, L_k\}$ es una cadena de algún punto de A a p. Así, por la definición de Y, necesariamente $p \in Y$. Es decir, $L_k \subset Y$. Luego, por (2.2.2), para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, $L_k \cap E_j \neq \emptyset$. Probemos ahora que $H \subset B_j$ demostrando que H tiene las propiedades (2.2.7)-(2.2.10). Comenzemos probando que $H \subset S(A,\varepsilon)$. Sean $r \in \{1, \ldots, m\}$ y $g \in L_r$, la colección $\{L_1, \cdots, L_r\}$ es una $S(\varepsilon)$-cadena de algún punto de A a g. Por la definición de $S(A,\varepsilon)$, tenemos que $g \in S(A,\varepsilon)$, por lo que $L_r \subset S(A,\varepsilon)$, y por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{m} L_i \subset S(A,\varepsilon)$. Así,

$$H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} L_i \subset S(A,\varepsilon).$$

Ahora, como

$$H \cap E_j = \bigcup_{i=k}^{m} L_i \ \cap \ E_j = \bigcup_{i=k}^{m} (L_i \cap E_j)$$

y ya que $L_k \cap E_j \neq \emptyset$, tenemos que $H \cap E_j \neq \emptyset$. Es decir, H satisface (2.2.8).

Por (1) y (2) de la Definición 2.24, el conjunto H satisface (2.2.9). Por (1) de la Definición 2.24,

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \text{diám}(L_i)$$

y, por (3) de la Definición 2.24,

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Así, por (2.2.1), $\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}$. Por lo tanto, H satisface (2.2.10). Así, probamos que $H \subset B_j$.

Luego, recordando que $z \in L_m$, tenemos que $z \in B_j$. Por lo tanto, $S(A,\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. En consecuencia, $S(A,\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Por la Afirmación 1 y la Afirmación 2, el conjunto $S(A,\varepsilon)$ tiene la propiedad S. $\square$

Lema 2.26. *Si (X,d) es un espacio métrico, A es un subconjunto no vacío de X y $\varepsilon > 0$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) diámetro $S(A,\varepsilon) \leq$ diámetro $(A) + 2\varepsilon$;

(ii) si A es conexo, entonces $S(A,\varepsilon)$ es conexo;

(iii) si (X,d) tiene la propiedad S, entonces $S(A,\varepsilon)$ es un subconjunto abierto de X.

Demostración. **(i)** Sean $x_1, x_4 \in S(A,\varepsilon)$. Luego, existen una $S(\varepsilon)$-cadena de x_2 a x_1, con $x_2 \in A$ y una $S(\varepsilon)$-cadena de x_3 a x_4, con $x_3 \in A$. Por (1) de la Definición 2.24, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ existe $a_i \in L_i \cap L_{i+1}$. Podemos elegir $a_1 = x_2$ y un $a_{n+1} = x_1$. Así, por (3) de la Definición 2.24,

$$d(x_1,x_2) \leq d(a_1,a_2) + d(a_2,a_3) + \cdots + d(a_n,a_{n+1})$$
$$\leq \text{diám}(L_1) + \text{diám}(L_2) + \cdots + \text{diám}(L_n) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2^1} + \cdots + \tfrac{\varepsilon}{2^n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2^i} < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} = \varepsilon$$

Como x_1 fue elegida arbitraria, toda $S(\varepsilon)$-cadena tiene diámetro $< \varepsilon$. Y ya que $d(x_2,x_3) \leq \text{diám}(A)$, tenemos

$$d(x_1,x_4) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + d(x_3,x_4) < \text{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

(ii) Por (1) y (2) de la Definición 2.24, todo eslabón de una $S(\varepsilon)$-cadena es conexo y para toda $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$, así toda $S(\varepsilon)$-cadena es un conjunto conexo. Además, como A es conexo y toda $S(\varepsilon)$-cadena intersecta a A, concluimos que $S(A,\varepsilon)$ es conexo.

(iii) Sea $y \in S(A,\varepsilon)$. Luego, por la Definición 2.24, existe una $S(\varepsilon)$-cadena $\{L_1,\cdots,L_n\}$ de algún punto de A a y. Por el Teorema 2.21, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $y \in U$ y diám$(U) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Así, $\{L_1,\cdots,L_n,L_{n+1} = U\}$ es una $S(\varepsilon)$-cadena de un punto de A a un punto de U. Luego, $U \subset S(A,\varepsilon)$. Por lo tanto, $S(A,\varepsilon)$ es abierto. $\square$

El teorema que vemos a continuación señala que para cualquier espacio métrico (X, d) que posea la propiedad S, existe una sucesión de «subdivisiones finitas de mallas cada vez más pequeñas», cada subdivisión consiste de una cantidad finita de conjuntos conexos, los cuales son un refinamiento de la subdivisión anterior.

Teorema 2.27. *Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos cada uno de los cuales tiene la propiedad S y diámetro menor que ε; en adelante, estos conjuntos pueden ser elegidos siendo abiertos en X o cerrados en X.*

Demostración. Por la Definición 2.20, sabemos que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, para algún $n < \infty$, donde cada A_i es conexo y de diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, los conjuntos $S(A_i, \frac{\varepsilon}{3})$ son abiertos en X, conexos y diám $S(A_i, \frac{\varepsilon}{3}) \leq$ diám$(A) + 2\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ [por (3) del Lema 2.26] y por el Lema 2.25 tienen además la propiedad S. Luego, por el Lema 2.23, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ los conjuntos cerrados $\overline{S(A_i, \frac{\varepsilon}{3})}$ tienen la propiedad S, diám $\overline{S(A_i, \frac{\varepsilon}{3})} = S(A_i, \frac{\varepsilon}{3}) <$ ε y son conexos; por lo que también satisfacen las condiciones deseadas. $\square$

Ahora hemos llegado a un resultado fundamental, que queríamos obtener desde que probamos el Teorema 2.22. Como puede ver el lector de esta prueba, todo el trabajo ya ha sido hecho.

Teorema 2.28. *Si (X, d) es un continuo de Peano, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ el continuo X es la unión de una cantidad finita de continuos de Peano, cada uno de los cuales es de diámetro menor que ε.*

Demostración. Por el Teorema 2.22, sabemos que (X, d) tiene la propiedad S. Luego, por el Teorema 2.27, el continuo X es la unión de un número finito de conjuntos conexos $A_i, \cdots, A_n$ cada uno de los cuales tiene la propiedad S, es de diámetro menor que ε, y es cerrado en X. Además, cada A_i es un subcontinuo porque es conexo, compacto (pues es cerrado en un compacto) y no vacío. Por el Teorema 2.21 cada A_i es continuo de Peano. $\square$

2.3. El Teorema de Hahn y Mazurkiewicz

En esta sección, usamos los Teoremas 2.28 y 1.58 para demostrar que todo continuo de Peano es una imagen continua de $[0,1]$ (Teorema 2.32). Este teorema nos sirve para probar unos importantes teoremas en la teoría de los continuos de Peano.

Primero, observemos el siguiente concepto.

Definición 2.29. *Una* ***cadena débil*** *es una sucesión finita* $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_n\}$ *no vacía, de conjuntos tales que para todo* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$*, tenemos que* $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$*.*

Sea $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ *una cadena débil. La colección* $\mathcal{L}$ *es una* ***cadena débil de*** $\mathbf{L_1}$ ***a*** $\mathbf{L_n}$*. Además, si* $x \in L_1$ *y* $y \in L_n$*, la colección* $\mathcal{L}$ *es una* ***cadena débil de*** x ***a*** y*. Cada* $L_i \in \mathcal{L}$ *es nombrado un* ***eslabón*** *de* $\mathcal{L}$*.*

El siguiente resultado es usado en la prueba del Lema 2.31.

Lema 2.30. *Si* $\mathcal{C} = \{C_1, \cdots, C_m\}$ *y* $\mathcal{L} = \{L_1, \cdots, L_n\}$ *son cadenas débiles con* $C_1 = L_1$*, entonces existe una cadena débil* $\mathcal{P}$ *de* C_1 *a* L_n *tal que* $\mathcal{P} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$*.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_{2m+n}\}$ donde para $1 \leq i \leq m$, $P_i = C_i$; para $1 \leq i \leq m$, $P_{m+i} = C_{m-i+1}$; y para $1 \leq i \leq n$, $P_{2m+i} = L_i$.

Observe que para $1 \leq i \leq m$, $P_i \cap P_{i+1} = C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$; para $1 \leq i \leq m$, $P_{m+1} = C_m, P_{2m} = C_1$ y $P_{m+i} \cap P_{m+i+1} = C_{m-i+1} \cap C_{m-i+2} \neq \emptyset$; y para $1 \leq i \leq n$, $P_{2m+i} \cap P_{2m+i+1} = L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{P}$ es una cadena débil de C_1 a L_n. □

Lema 2.31. *Sean* X *un espacio topológico conexo, y* $p, q \in X$*. Si* $\mathcal{C}$ *es una colección finita de subconjuntos cerrados no vacíos de* X *que cubren a* X*, entonces toda la colección* $\mathcal{C}$ *puede ser indexada para formar una cadena débil de* p *a* q*.*

Demostración. Como $\bigcup \mathcal{C} = X$, existe $C_1 \in \mathcal{C}$ tal que $p \in C_1$. Sea $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}$: existe una cadena débil de C_1 a C cuyos eslabones son miembros de $\mathcal{C}\}$. Demostraremos primero que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Para probarlo, consideremos los conjuntos $A = \bigcup \mathcal{C}_0$ y $B = \bigcup(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0)$.

Observe que cualquier miembro de $\mathcal{C}$ que intersecte a un miembro de $\mathcal{C}_0$ es él mismo un miembro de $\mathcal{C}_0$, al ser el último eslabón de una cadena débil desde C_1; por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$. Como A y B son cada uno una unión finita de subconjuntos cerrados de X, los conjuntos A y B son cerrados en

X. Luego, $A \cup B = X$ porque $\bigcup \mathcal{C} = X$. De que $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y $C_1 \neq \emptyset$, tenemos que $A \neq \emptyset$. Por las propiedades establecidas de A y B y por la conexidad de X, concluimos que $B = \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$ pues $\emptyset \notin \mathcal{C}$, y por la construcción, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$. Así, hemos probado que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$, es decir, que todo elemento de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}_0$. Como $\bigcup \mathcal{C} = X$ y $q \in X$, existe $C_m \in \mathcal{C}$ al que $q \in C_n$. Ya que $C_m \in \mathcal{C}_0$, existe una cadena débil $\mathcal{L} = \{C_1, \cdots .C_n\}$ de C_1 a C_n. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{L}$ y sea $C \in \mathcal{D}$, como $C \in \mathcal{C}_0$, existe una cadena débil $\mathcal{C}_1 = \{C_1, \cdots, C\}$ de C_1 a C, y por el Lema 2.30, existe una cadena débil $\mathcal{P}$ de C_1 a C_n tal que $\mathcal{P} = \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}$ es una cadena débil de p a q. $\square$

En 1890, Guiussepe Peano demostró que el cuadrado unitario puede obtenerse como una imagen continua de un intervalo cerrado. Este inesperado ejemplo motivó la investigación de una definición más adecuada de curva, superficie y dimensión de un espacio. Con el cuadrado (y todas sus imágenes continuas) reveladas como imágenes continuas del intervalo cerrado $[0, 1]$ (o de algún segmento de línea cerrado) surgió la pregunta de como sería la estructura general de la imagen continua de un segmento de línea cerrado.

La búsqueda que posteriormente se emprendió de la respuesta a esta pregunta llevó al nuevo concepto topológico de conexidad local y a una respuesta completa encontrada independientemente por Stefan Mazurkiewicz $(1888 - 1945)$ y Hans Hahn $(1879 - 1934)$ en 1913. En esta fecha, de manera independiente, ambos llegaron a una caracterización completa de los conjuntos que son imágenes continuas del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}^n$. Descubrieron que un conjunto es la imagen continua de un segmento de línea cerrado si, y solo si este es compacto, conexo y localmente conexo. Además su criterio se aplicaba no solamente a $\mathbb{R}^n$, sino de manera más general a los espacios Hausdorff.

A continuación demostramos que *todo* continuo de Peano es una imagen continua de $[0, 1]$. El Teorema 2.28 y el Lema 2.31 son los ingredientes necesarios para la demostración del Teorema 2.32.

En la próxima sección, usamos el Teorema 2.32 para probar el Teorema 2.46 de arcoconexidad.

Teorema 2.32 (Hahn y Mazurkiewicz)**.** *Todo continuo de Peano es imagen continua del intervalo cerrado* $[0, 1]$.

Demostración. Sea (X, d) un continuo de Peano. Por el Teorema 2.28, existen subcontinuos de Peano $A_1, \ldots, A_n$ de X que cubren X tales que cada A_i es de diámetro menor que 1. Como cada A_i es cerrado en X, por el Teorema 2.31, podemos reordenar esta colección en una cadena débil $A_1, \cdots, A_n$ de A_1 a A_n. Describimos $[0,1]$ como la unión de n subintervalos cerrados con más de un punto $I_1, \cdots, I_n$ de la siguiente forma: para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ donde $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$.

Recordemos que $C(X) = \{A \subset X : \ A \text{ es no vacío, conexo y cerrado en } X\}$, y sea $F_1 : [0,1] \to C(X)$ definida por

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i, & \text{si} \quad t \in I_i \smallsetminus \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}, \\ A_i \cup A_{i+1}, & \text{si} \quad t = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n-1, \\ A_1, & \text{si} \quad t = 0 \text{ (solo necesario si } n = 1), \\ A_n, & \text{si} \quad t = 1 \text{ (solo necesario si } n = 1). \end{cases}$$

Ahora demostramos que F_1 satisface (1) y (3) del Teorema 1.58.

Afirmación 1. La función $F_1 : [0,1] \to C(X)$ es usc.

Prueba de la Afirmación 1. Sea $p \in [0,1]$ y U un conjunto abierto en X tal que $F(p) \subset U$. Demostraremos que existe un V abierto en $[0,1]$ tal que $p \in V$ y que para todo $t \in V, \ F(t) \subset U$. Para ello consideremos

$$V = \begin{cases} [0, t_1), & \text{si} \quad p = 0, \\ (t_{n-1}, 1], & \text{si} \quad p = 1, \\ (t_{i-1}, t_i), & \text{si} \quad p \in I_i \smallsetminus \{t_0, \ldots, t_n\}, \\ (t_{i-1}, t_{i+1}), & \text{si} \quad p = t_i \text{ y } 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Así, en cada caso V satisface las condiciones deseadas. Por lo tanto, F_1 es usc. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. $\quad X = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_1(t)$.

Prueba de la Afirmación 2. Como para todo $t \in [0,1]$, tenemos que $F_1(t) \subset X$, solo nos queda probar $X \subset \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_1(t)$.

Sea $x \in X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Así, para algún i, tenemos que $x \in A_i$. Además, para cualquier $\ell \in (t_{i-1}, t_i), \ \ F_1(\ell) = A_i$. Luego, para estos i y ℓ dados, $x \in F_1(\ell) \subset \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_1(t)$. Por lo tanto, $X = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_1(t)$. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Luego, sea $p_1 \in A_1$, para $2 \leq i \leq n$ tomemos $p_i \in A_i \cap A_{i-1}$, y $p_{n+1} \in A_n$. Por el Teorema 2.28 y el Lema 2.31 aplicados a cada A_i, existe para cada

$i \in \{1, \ldots, n\}$ una cadena débil $\{A_1^i, \cdots, A_{m(i)}^i\}$ del subcontinuo de Peano A_i de p_i a p_{i+1} que cubren cada A_i tales que cada A_j^i es de diámetro menor que $1/2$. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, escribimos I_i como la unión de $m(i)$ subintervalos cerrados con más de un punto $I_1^i, \cdots, I_{m(i)}^i$ de la forma, para $1 \leq j \leq m(i)$

$$I_j^i = [t_{j-1}^i, t_j^i], \qquad \text{donde } t_0^i = t_i - 1 < t_1^i < t_2^i < \ldots < t_{m(i)}^i = t_i.$$

Definimos $F_2 : [0,1] \to C(X)$ como

$$F_2(t) = \begin{cases} A_j^i, & \text{si} \quad t \in I_j^i \setminus \{t_0^i, \ldots, t_{m(i)}^i\}, \\ A_j^i \cup A_{j+1}^i, & \text{si} \quad t = t_j^i \text{ y } 0 < j < m(i), \\ A_{m(i-1)}^{i-1} \cup A_1^i, & \text{si} \quad t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n), \\ A_1^1, & \text{si} \quad t = 0, \\ A_n, & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Enseguida demostramos que F_2 satisface (1) y (3) del Teorema 1.58.

Afirmación 3. La función $F_2 : [0,1] \to C(X)$ es usc.

Prueba de la Afirmación 3. Sean $p \in [0,1]$ y U abierto en X tales que $F(p) \subset U$. Demostramos que existe un V abierto en $[0,1]$ tal que $p \in V$ y que para todo $t \in V$, $F(t) \subset U$. Para ello consideramos

$$V = \begin{cases} [0, t_1), & \text{si} \quad p = 0, \\ (t_{n-1}, 1], & \text{si} \quad p = 1, \\ (t_{j-1}^i, t_j^i), & \text{si} \quad t \in I_j^i \setminus \{t_0^i, \ldots, t_{m(i)}^i\}, \\ (t_{j-1}^i, t_{j+1}^i), & \text{si} \quad t = t_j^i \text{ y } 0 < j < m(i), \\ (t_{m(i-1)-1}^{i-1}, t_1^i, & \text{si} \quad t = t_0^i \text{ y } 2 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Así, en cada caso V satisface las condiciones deseadas. Por lo tanto, F_2 es usc. Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

Afirmación 4. $X = \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_2(t)$.

Prueba de la Afirmación 4. Como para todo $t \in [0,1]$ tenemos que $F_2(t) \subset X$, solo nos queda probar $X \subset \bigcup\limits_{t \in [0,1]} F_1(t)$.

Si $x \in X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, entonces para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $x \in A_i$. Y como $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m(i)} A_j^i$, para algún j, $x \in A_j^i$. Además, para cualquier

$\ell \in [t^i_{j-1}, t^i_j]$, tenemos que $F_2(\ell) = A^i_j$. Luego, para estos i, j y ℓ dados, $x \in F_2(\ell) \subset \bigcup_{t\in[0,1]} F_2(t)$. Por lo tanto, $X = \bigcup_{t\in[0,1]} F_2(t)$. Esto completa la prueba de la Afirmación 4.

Observamos también que F_1 y F_2 satisfacen (2) del Teorema 1.58, es decir, que para todo $t \in [0,1]$, $F_2(t) \subset F_1(t)$.

Si seguimos definiendo intuitivamente F_n para todo $n \in \mathbb{N}$, haciendo que el diámetro de los subcontinuos siguientes sea menor que $\frac{1}{2^n}$, entonces se satisfacen (1)-(4) del Teorema 1.58.

Por lo tanto, por el Teorema 1.58, existe una función continua de $[0,1]$ sobre X. $\square$

Para ilustrar la existencia de funciones continuas entre el intervalo cerrado $[0,1]$ y algunos continuos de Peano, presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.33. *Sean $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circunferencia unitaria y la función f definida por $f(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$. Sabemos que I es un continuo de Peano y f es continua y suprayectiva; por lo tanto S^1 es un continuo de Peano.*

Ejemplo 2.34. *Sean $Y = ([-1,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ y $f : [0,1] \to Y$ definida de la siguiente forma.*

$$f(t) = \begin{cases} (4t-1,0), & si \quad t \in [0,\frac{1}{4}], \\ (0,4(t-\frac{1}{4})), & si \quad t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}], \\ (0,1-4(t-\frac{1}{2})), & si \quad t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}], \\ (4(t-\frac{3}{4}),0), & si \quad t \in [\frac{3}{4},1]. \end{cases}$$

Como el intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo de Peano y f es continua y suprayectiva, el espacio Y es un continuo de Peano.

La propiedad de ser una imagen continua de $[0,1]$ realmente caracteriza a los continuos de Peano, tal como veremos en el Teorema 2.40.

Lema 2.35. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos, y sea f una función continua de X_1 sobre X_2. Si C es un componente de X_2, entonces $f^{-1}(C)$ es una unión de algunos componentes de X_1.*

Demostración. La demostración se hará probando que $f^{-1}(C) = \bigcup \mathcal{K}$ donde $\mathcal{K} = \{K : K$ es componente de X_1 y $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}$.

Sea $x \in f^{-1}(C)$, luego x es un elemento de algún componente K de X, luego $x \in \bigcup \mathcal{K}$.

Ya que f es continua y C es abierto y cerrado en X_2, $f^{-1}(C)$ es un conjunto abierto y cerrado en X_1. Por otro lado K es un conjunto conexo y $K \cup f^{-1}(C)$ es un conjunto abierto y cerrado en K. Como suponemos que $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$, tenemos que $K \setminus f^{-1}(C) = \emptyset$. Luego, $K \subset f^{-1}(C)$, así $\bigcup \mathcal{K} \subset f^{-1}(C)$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{K} = f^{-1}(C)$. $\square$

Una imagen continua de un espacio de Peano puede no ser un espacio de Peano (más aún si el espacio rango es un espacio métrico). Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.36. *Sean* $Y = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ *y* Z *la unión del conjunto* $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq -1\}$ *y tres arcos convexos en* $\mathbb{R}^2$*, uno de* $(0, -1)$ *a* $(0, -2)$*, otro de* $(0, -2)$ *a* $(1, -2)$*, y uno más de* $(1, -2)$ *a* $(1, sen(1))$*. Sea* $V = Y \cup Z$*, es decir, el continuo Circunferencia de Varsovia.*

Definamos la función $f : [0, 1) \to V$ *como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(x) & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

donde $f_1 : [0, \frac{1}{2}] \to Z$ *y* $f_2 : [\frac{1}{2}, 1) \to Y$*, con* $f_2(x) = sen[(1 - x)/2]$*. La función* f *es continua e inyectiva, el intervalo* $[0, 1)$ *es un espacio de Peano y el continuo Circunferencia de Varsovia no es un continuo de Peano.*

Sin embargo, observe el siguiente resultado.

Lema 2.37. *Si* f *es una función cerrada y continua de un espacio localmente conexo* X *sobre un espacio métrico* Y*, entonces* Y *es localmente conexo.*

Demostración. Demostramos que Y satisface que todo componente de todo subconjunto abierto de Y, es abierto en Y (Teorema 2.6). Sea C un componente de un subconjunto abierto U de Y. Luego, por el Lema 2.35, sabemos que $f^{-1}(C)$ es la unión de algunos componentes de $f^{-1}(U)$. De este modo, ya que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y que X satisface el Teorema 2.6, tenemos que $f^{-1}(C)$ es abierto en X. De este modo, $X \setminus f^{-1}(C)$ es cerrado en X. Dado que f es una función cerrada y $f[X \setminus f^{-1}(C)] = Y \setminus C$, concluimos que $Y \setminus C$ es cerrado en Y. Así, C es abierto en Y. Por lo tanto, hemos probado que Y es localmente conexo. $\square$

Del Lema 1.24 y el Lema 2.37 obtenemos que una descomposición usc metrizable de un espacio localmente conexo es un espacio localmente conexo.

Definición 2.38. *Un espacio topológico X, compacto, conexo, T_2 y no vacío es un **continuo Hausdorff**.*

Corolario 2.39. *Sean X un continuo de Peano, Y un continuo Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es un continuo de Peano.*

Demostración. Si f es una función continua de un espacio de Peano X sobre un espacio Hausdorff Y, entonces f es cerrada, y por el Lema 1.20, el espacio Y es metrizable. Luego, por el Lema 2.37, el espacio Y es un espacio de Peano. □

Ahora, tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 2.40. *Un continuo Hausdorff X, es un continuo de Peano si, y solo si X es una imagen continua de $[0, 1]$.*

Demostración. La necesidad se probó en el Teorema 2.32 (Hahn-Mazurkiewicz). solo queda probar la suficiencia. Como X es un continuo Hausdorff, es imagen de $[0, 1]$ y $[0, 1]$ es un continuo de Peano, por el Corolario 2.39, el continuo X es un continuo de Peano. □

Existen continuos simples tales que ninguno de ellos es una imagen continua de cualquier otro. Sin embargo, esto no sucede con los continuos de Peano.

Teorema 2.41. *Si X y Y son continuos de Peano con más de un punto, entonces, para cualesquiera n puntos distintos $(n < \infty)$ $x_1, \dots, x_n \in X$ y $y_1, \dots, y_n \in Y$, existe una función continua f de X sobre Y tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, cualesquiera dos continuos de Peano no degenerados son imágenes continuas uno de otro.*

Demostración. Empezemos con una función continua y suprayectiva α de $[0, 1]$ sobre Y (Teorema 2.32). Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $t_i \in [0, 1]$ tales que $\alpha(t_i) = y_i$. Luego, sean $p, q \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ con $p \neq q$. Definimos $\beta : \{p, q, x_1, \dots, x_n\} \to [0, 1]$, donde $\beta(p) = 0$, $\beta(q) = 1$, y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, el $\beta(x_i) = t_i$. Por el Teorema de Extensión de Tietze de [8, pág. 127], extendemos β a una función continua $\gamma : X \to [0, 1]$. Observe que γ

lleva X sobre $[0,1]$ ya que X es conexo y $0,1 \in \gamma(X)$. Ahora, sea $f = \alpha \cdot \gamma$, vemos que f tiene las propiedades deseadas. Así probamos la segunda parte del teorema. Para probar la primera parte, observemos que debido a que f es una función continua de X sobre Y, el espacio Y es una imagen continua de X. De manera similar podemos definir una función g continua de Y sobre X. □

Observe que el siguiente teorema es una caracterización de todas las descomposiciones usc de cualquier continuo de Peano.

Corolario 2.42. *Sean X un continuo de Peano con más de un punto, y Y un espacio topológico. El espacio Y es una descomposición usc de X si, y solo si Y es un continuo de Peano.*

Demostración. Primero supongamos que Y es un continuo de Peano. Por el Teorema 2.41, los espacios X y Y son imágenes continuas uno de otro. En particular existe una función continua f de X sobre Y tal que $f(X) = Y$. Siendo

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : \; y \in Y\},$$

por el Teorema 1.30, el conjunto $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X y es homeomorfa a Y. Por lo tanto, Y es una descomposición usc de X.

Ahora supongamos que Y es una descomposición usc de X, luego por la segunda parte del Teorema 1.30, Y es una imagen continua de X y Y es continuo (por el Teorema 1.26 es metrizable) . Por el Corolario 2.39, concluimos que Y es un continuo de Peano. □

2.4. Arcos en continuos de Peano

En esta sección uno de los resultados más interesantes e importantes es que nos dice que los continuos de Peano son arcoconexos (Teorema 2.46). Llegamos a la prueba de este teorema usando algunos resultados que ya hemos visto como Teorema 2.32, Teorema 2.41 y Lema 2.44.

Recordemos que una función f de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ es monótona si para todo $s \leq t$, tenemos que $f(s) \leq f(t)$ o $f(s) \geq f(t)$. Podemos ver que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona si, y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $f^{-1}(t)$ es un conjunto conexo. De esta forma, la siguiente definición es una generalización topológica natural de la noción que ya tenemos de funciones monótonas de valores reales de una variable real.

Definición 2.43. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Una función $f : X_1 \to X_2$ es* ***monótona*** *si f es continua para todo $y \in X_2$, y $f^{-1}(y)$ es un conjunto conexo.*

Lema 2.44. *Si Y es un espacio de Hausdorff con más de un punto y $f : [0,1] \to Y$ es una función monótona y sobreyectiva sobre Y, entonces Y es un arco.*

Demostración. Como $[0,1]$ es compacto y f es continua y sobreyectiva, tenemos que Y es compacto y, por el Lema 1.20, Y es un espacio métrico. Siendo

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : \ y \in Y\},$$

por el Teorema 1.30, el conjunto $\mathcal{D}_f$ es una descomposición usc de X y es homeomorfa a Y. Como $\mathcal{D}_f$ es usc, f es monótona y Y es con más de un punto, vemos que $\mathcal{D}_f$ es un arco (Teorema 1.54). Por lo tanto, Y es un arco (Teorema 1.30). □

Definición 2.45. *Un espacio topológico X es* ***arcoconexo*** *si para cualesquiera $p, q \in X$ (con $p \neq q$) existe un arco A en X con los puntos extremos p y q.*

Enseguida probamos que todo continuo de Peano, es arcoconexo. Este importante hecho fue demostrado, en 1913, por Stefan Mazurkiewicz y en 1916 por Robert Lee Moore. Concluimos además que los continuos de Peano son también localmente arcoconexos (Teorema 2.48). La idea de usar el Teorema 2.32 y el Lema 2.44 para probar el siguiente resultado es debida a John L. Kelley.

Para la demostración del siguiente teorema recordemos que $I = [0,1]$ y $2^I = \{A \subset I : A \neq \emptyset$ y A es cerrado $\}$.

Teorema 2.46 (Conexidad por trayectorias)**.** *Todo continuo de Peano (con más de un punto) es arcoconexo.*

Demostración. Sean X un continuo de Peano con más de un punto, y $p, q \in X$ con $p \neq q$. Por la segunda parte del Teorema 2.41, existe una función continua f de I sobre X tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Sea

$\mathcal{C} = \{A \in 2^I : \; p, q \in f(A)$ y si s y t son los puntos extremos de la cerradura de un componente J de $I \setminus A$, entonces $f(s) = f(t)\}$.

Usemos el Teorema 1.44 del Máximo-Mínimo en $\mathcal{C}$. Para esto, debemos demostrar que las siguientes propiedades son ciertas:

(a) $\mathcal{C} \neq \emptyset$,

(b) $\mathcal{C}$ es cerrado en 2^I.

Como $I \in \mathcal{C}$, (a) es verdad. Para probar (b), sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $A_i \in \mathcal{C}$ y $A_i \to A$ para algún $A \in 2^I$. Por el Teorema 1.40, tenemos que 2^I es continuo. Para la función $f : [0,1] \to X$, definimos $2^f : 2^I \to 2^X$ por $2^f(A) = f(A)$ para cada $A \in 2^I$. Como f es continua, por el Teorema 1.42, la función 2^f es continua. Ya que $A_i \to A$, tenemos que $f(A_i) \to f(A)$. Como para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos $p, q \in f(A_i)$ vemos que $p, q \in f(A)$. Ya que $I \in \mathcal{C}$, podemos suponer para el resto de la prueba de (b) que $A \neq I$ (pues si $A = I$ ya acabamos) y, luego, para algún $i \in \mathbb{N}$, podemos también suponer que $A_i \neq I$. Ahora, sea J un componente de $I \setminus A$ y sean $s < t$ los puntos extremos de $\overline{J}$. Por el Teorema 1.45, existe una sucesión $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ de componentes J_i de $I \setminus A_i$ tales que $\overline{J_i} \to \overline{J}$, vemos que $s_i \to s$ y $t_i \to t$.

Luego, por la continuidad de f, concluimos que $f(s_i) \to f(s)$ y $f(t_i) \to f(t)$.

Como para todo i, $A_i \in \mathcal{C}$, entonces $f(s_i) = f(t_i)$. Luego, $f(s) = f(t)$. Ahora, teniendo verificadas todas las propiedades, hemos probado que $A \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, hemos probado (b). Por (a) y (b), podemos aplicar el Teorema 1.44 del Máximo-Mínimo así obtenemos un elemento minimal M de $\mathcal{C}$. Note que $p, q \in f(M)$ porque $M \in \mathcal{C}$. Vemos que $f(M)$ es un arco demostrando que $f(M)$ es una imagen monótona de I y enseguida aplicamos el Lema 2.44. Primero verificamos que M tiene la siguiente propiedad:

(c) si $s, t \in M$ con $s < t$, y $f(s) = f(t)$, entonces $M \cap [s,t] = \{s,t\}$.

Para probar (c), primero sea $u =$ínf(M) y $v = sup(M)$ (ya que M esta contenido en el intervalo cerrado I, así que tiene ínfimo y supremo). Como $M \in \mathcal{C}$ y dado que $f(0) = p$ y $f(1) = q$, afirmamos que $f(u) = p$ y $f(v) = q$ [pues si $u > 0$, tenemos que $[0, u)$ es un componente de $I \setminus M$, tal que $f(0) = f(u)$; similarmente, podemos obtener que $q = f(v)$]. Ahora, sean s y t que satisfagan la hipótesis de (c). Luego, usando que $u, v \in M \setminus (s,t)$ vemos que $p, q \in f[M \setminus (s,t)]$, es claro que $M \setminus (s,t) \in \mathcal{C}$. Además, por la minimalidad de M, vemos que $M \cap (s,t) = \emptyset$. Así, $M \cap [s,t] = \{s,t\}$ y por lo tanto, hemos probado (c).

Ahora, definamos una función monótona g de I sobre $f(M)$ como sigue, si $r \in M$, sea $g(r) = f(r)$. Si $r \in I \setminus M$, tenemos que $r \in J$ donde J es un componente de $I \setminus M$; entonces, siendo s un punto extremo de $\overline{J}$, sea $g(r) = f(s)$. Debido a que $M \in \mathcal{C}$, la función g esta bien definida. Como $g|_M = f|_M$ y para todo $r \in I \setminus M$ $g(r) \in f(M)$, $g(I) = f(M)$. Para demostrar que g es monótona, sea $z \in f(M)$.

Demostremos que $g^{(-1)}(z)$ es conexo. Como $g|_M = f|_M$, tenemos que existe $t \in M$ tal que $g(t) = f(t) = z$. Así, $t \in M \cap g^{-1}(z)$. Supongamos que $s \in M \cap g^{-1}(z)$ y que $s < t$, entonces $g(s) = z = f(s)$. Así, $f(s) = f(t)$. Por (c), tenemos que $M \cap [s,t] = \{s,t\}$. Ahora supongamos que existe un tercer elemento $\ell \in M \cap g^{-1}(z)$ tal que $\ell < s < t$, luego $M \cap [\ell,t] = \{\ell,t\}$. Lo que resulta en una contradicción porque $s \in M \cap [\ell,t]$. Por lo tanto $M \cap g^{-1}(z)$ tiene a lo más dos elementos.

Supongamos que $M \cap g^{-1}(z) = \{s\}$, y que $g^{-1}(z)$ es con más de un punto. Sea $k \in g^{-1}(z)$ tal que $k < s$. Luego $k \notin M$. Así, $k \in I \setminus M$. Sea J un componente de $I \setminus M$ tal que $k \in J$. Como $s \in M$, tenemos que $\overline{J} \subset [0,s]$. Sea $\overline{J} = [r_1, r_2]$ tal que $0 \leq r_1 < k < r_2 \leq s$. Observe que $r_1 \in M$ o $r_2 \in M$. Por definición $z = g(k) = f(r_1) = f(r_2)$ con $0 \leq r_1 < k < r_2 \leq s$, por lo tanto $r_1 \in M \cap g^{-1}(z)$ o $r_2 \in M \cap g^{-1}(z)$. Luego, $r_1 = 0$ y $r_2 = s$ y así concluimos que $\overline{J} = [0,s]$. De donde para toda $k \in [0,s]$, tenemos que $g(k) = f(s) = g(s) = z$. Luego, $[0,s] \subset g^{-1}(z)$.

Supongamos que existe $\ell \in I$ tal que $s < \ell$ y $\ell \in g^{-1}(z)$ entonces $\ell \notin M$. Como antes, $[s,1] \subset g^{-1}(z)$ por lo tanto $[0,1] \subset g^{-1}(z)$. Así, $M \cap g^{-1}(z) = M \neq \{s\}$. Luego, $g^{-1}(z) = [0,s]$. De este modo, tenemos que $g^{-1}(z)$ es conexo.

Si $M \cap g^{-1}(z) = \{s,t\}$ con $s < t$, entonces $g^{-1}(z) = [s,t]$ (note que los casos en que $s = u > 0$ y $t = v < 1$ son imposibles, por la minimalidad de M). Esto completa la prueba de que g es monótona. Como $p, q \in f(M) = g(M) = g(I)$ y, por el Lema 2.44, tenemos que $g(I)$ es un arco. $\square$

En la siguiente parte de este trabajo usamos el Teorema 2.46 y algunos otros resultados para probar que los continuos de Peano son localmente arcoconexos. Observemos la siguiente definición.

Definición 2.47. *Sea (X,T) un espacio topológico. Si $p \in X$, entonces X es* ***localmente arcoconexo en*** **p**, *si toda vecindad de p contiene una* *vecindad que es un conjunto arcoconexo de p. El espacio X es **localmente arcoconexo**, si X es localmente arcoconexo en todo punto.*

Teorema 2.48. *Si X es un continuo de Peano, y U un subconjunto abierto de X, entonces U es localmente arcoconexo. En particular, todo continuo de Peano es localmente arcoconexo.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de un continuo de Peano X, y supongamos que $U \neq \emptyset$. Si $p \in U$ y $\varepsilon > 0$, entonces, por el Teorema 2.27 existe un $V \subset X$ abierto y conexo tal que $p \in V$ contenido en $\overline{V} \subset U$, el conjunto V tiene la propiedad S, y diám$(V) < \varepsilon$. Por el Lema 2.23, tenemos que $\overline{V}$ tiene la propiedad S. Luego, por el Teorema 2.21 y ya que $\overline{V}$ es un continuo, $\overline{V}$ es un continuo de Peano. Así, del Teorema 2.46 se sigue que $\overline{V}$ es arcoconexo. Luego, $\overline{V}$ es una vecindad de p contenida en U, el cual es arcoconexo. Por lo tanto hemos probado que U es localmente arcoconexo en p. □

Sabemos que existen continuos que pueden ser arcoconexos sin ser localmente arcoconexos, por ejemplo el continuo Circunferencia de Varsovia (Ejemplo 1.15). Sin embargo, como el siguiente resultado prueba, todo continuo localmente arcoconexo es arcoconexo.

Teorema 2.49. *Si X es un continuo de Peano, y U un subconjunto abierto y conexo de X, entonces U es arcoconexo.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano X, y supongamos que $U \neq \emptyset$. Sea $p \in U$, y defina T y E como sigue:

$$T = \{x \in U : \text{ existe un arco en } U \text{ de } p \text{ a } x\} \text{ y}$$

$$E = \{p\} \cup T.$$

Como $p \in E$, el conjunto E no es vacío. Dado que U es abierto en X, el subconjunto U es localmente arcoconexo por el Teorema 2.48.

Sea $t \in E$. Sea $\mathcal{C}$ el componente de U que contiene a t. Como X es un continuo de Peano y U es abierto en X, el componente $\mathcal{C}$ es abierto en X. Así, $\mathcal{C}$ es una vecindad de p. Como $\mathcal{C}$ es localmente arcoconexo, por el Teorema 2.48 existe $V \subset \mathcal{C}$ tal que $p \in V$ y V es arcoconexo.

Afirmación 1. El conjunto E es abierto en U.

Prueba de la Afirmación 1. Para demostrar que E es abierto en X, demostraremos que $V \subset E$. Sea $x \in V$. Si $x = p$, entonces $x \in E$. Ahora supongamos que $x \neq p$. Existe un arco $\alpha_1 \subset V \subset U$ que contiene a x y a t. Si $t = p$, entonces $x \in T$. Supongamos que $t \neq p$. Luego, existe un arco $\alpha_2 \subset U$, que une a t con p. Así, existe un arco $\alpha_2 \circ \alpha_1$ que une a x con p. De donde $x \in T$. Por lo tanto, $t \in \operatorname{int}(V) \subset V \subset T \cup \{p\} = E$. En conclusión, E es abierto en U. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. El conjunto $U \setminus E$ es abierto en U.

Prueba de la Afirmación 2. Sea $\ell \in U \setminus E$. Como $\ell \in U$ y U es localmente arcoconexo, existe un conjunto arcoconexo V que es una vecindad de ℓ tal que $\ell \in V \subset U$. Supongamos $V \not\subseteq U \setminus E$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in E$. Supongamos ahora que $y = p$. Como V es un conjunto arcoconexo, existe un arco contenido en V que une a ℓ con p. Así, ℓ esta en E. Lo que resulta en una contradicción.

Ahora supongamos $y \in T$. Por definición de T, existe un arco α_1 en U, que une a y con p. Como y y ℓ están en V, existe otro arco α_2 en U, que une a y con ℓ. Así, existe un arco $\alpha_2 \circ \alpha_1$ que une a ℓ con p, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $V \subset U \setminus E$. De donde $\ell \in \operatorname{int}(V) \subset V \subset U \setminus E$. Por lo tanto, $U \setminus E$ es abierto en U. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Como U es conexo y $E \neq \emptyset$, debe suceder que $U = E$. $\square$

Corolario 2.50. *Cualquier espacio métrico Z, el cual es separable, localmente compacto, de Peano y conexo, es arcoconexo.*

Demostración. Si además Z es compacto, entonces Z es un continuo de Peano. Por el Teorema 2.46 el espacio Z es arcoconexo. Supongamos que Z no es compacto. Sea Z^* la compactación con un punto de Z, tenemos que $Z^* = Z \cup \{\infty\}$ donde $\infty \notin Z$, el espacio Z^* es un continuo por el Teorema 5 de [9].

Afirmación: Z^* es conexo en pequeño en todo punto de Z^*.

Prueba de la Afirmación. Sea V una vecindad de $p \in Z^*$. Luego, existe U abierto en Z^* tal que $p \in U \subset V$.

Si U es abierto en Z. Como Z es un continuo de Peano, Z es conexo en pequeño en p. Por lo tanto existe una vecindad conexa, W_1 de p tal que $W_1 \subset U$.

Si $U = \{\infty\} \cup Z \setminus F$, donde F es compacto en Z, entonces $Z \setminus F$ es abierto en Z. Luego, $Z \setminus F$ es abierto en Z^* y $p \in Z \setminus F$. Como Z es conexo en pequeño en p, existe una vecindad conexa, W_2 de p tal que $W_2 \subset Z \setminus F \subset U$. Así, en ambos casos Z^* es conexo en pequeño en p.

Por lo tanto, por el Teorema 2.13, el espacio Z^* es conexo en pequeño en todo punto de Z^*. Esto completa la prueba de la Afirmación.

Luego, por el Teorema 2.7, tenemos que Z^* es un continuo de Peano. Así, ya que Z es un subconjunto abierto y conexo de Z^*, por el Teorema 2.49, el espacio Z es arcoconexo . $\square$

Ahora veamos cuándo un continuo de Peano es un arco. Para ello es necesario que primero demos las siguientes definiciones y resultados.

Definición 2.51. *Dos subconjuntos A, B, están* ***mutuamente separados*** *si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap A = \emptyset$, en tal caso la unión $A \cup B$ se denotará por $A|B$.*

Definición 2.52. *Un continuo X es un* ***triodo****, si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{3} U_i$ donde los U_i están mutuamente separados dos a dos.*

Definición 2.53. *Un continuo X es un* ***triodo simple*** *si es homeomorfo a la letra «T», es decir, X es homeomorfo al siguiente espacio*

$$T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

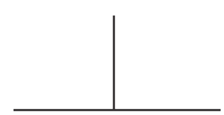

Figura 2.1: Triodo simple

Definición 2.54. *Un continuo X es* ***atriódico*** *si no contiene triodos.*

Lema 2.55. *Sean X un continuo arcoconexo sin curvas cerradas simples, $p \in X$ y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Sea $f : X \to [0, \mu(X)]$ definida como sigue: $f(q) = \mu(A_q)$ donde A_q es el único arco en X que une a p con q. Si Y es un subcontinuo de X localmente conexo, entonces $f|_Y$ es continua.*

Demostración. Demostremos que $f|_Y$ es continua. Sean $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que A_y, el único arco que une a p con y (la unicidad es porque X no contiene curvas cerradas simples).

Por la continuidad de μ, existe $\delta > 0$ tal que si $H(A_y, A) < \delta$ donde $A \in C(X)$, entonces $|\mu(A_y) - \mu(A)| < \varepsilon$; o dicho de otra manera según el Teorema 1.42, si $A_y \subset N(\delta, A)$ y $A \subset N(\delta, A_y)$. Luego, $|\mu(A_y) - \mu(A)| < \varepsilon$. Sea $U = B_{\frac{\delta}{4}}(y) \cap Y$. Note que $U \subset N(\delta, A_y)$. Como U es un conjunto abierto en Y, existe un conjunto V abierto y conexo en Y con $y \in V \subseteq U$. Por el Teorema 2.49, tenemos que V puede ser tomado arcoconexo. Si $s \in V$ entonces existe un arco sy en V que une a s con y. Sea A_s el arco que une a p con s. Note que como X no contiene curvas cerradas simples, $A_s \subset A_y \cup sy$. Además,

$$A_s \quad \subset \quad A_y \cup sy \quad \subset \quad N(\delta, A_y) \cup V \quad \subset \quad N(\delta, A_y) \cup B_{\frac{\delta}{4}}(y) \quad \subset \quad N(\delta, A_y);$$

por lo tanto, $A_s \subseteq N(\delta, A_y)$. Por otro lado vemos que $A_y \subset A_s \cup sy$, como $sy \subset V \subset B_{\frac{\delta}{4}}(y)$, para todo $t \in sy$, es verdad que $d(y,t) < \frac{\delta}{2}$. Así para todo $t \in sy$, tenemos que $d(s,t) \leq d(s,y) + d(y,t) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, por lo tanto, $sy \subseteq N(\delta, A_s) = \bigcup_{x \in A_s} B_{\delta(x)}$ por lo que

$$A_y \quad \subset \quad A_s \cup sy \quad \subset \quad N(\delta, A_s) \cup N(\delta, A_s) \;\; = \;\; N(\delta, A_s)$$

luego $A_y \subseteq N(\delta, A_s)$. Así, $H(A_y, A_s) < \delta$, que por la continuidad de μ implica que $|\mu(A_s) - \mu(A_y)| = |f(s) - f(y)| < \varepsilon$ por lo tanto, para toda $y \in Y$, tenemos que f es continua. En conclusión, $f|_Y$ es continua. □

Lema 2.56. *Si X es un continuo arcoconexo sin triodos simples, ni curvas cerradas simples entonces para $p, q \in X$ y $x \in X$ con $x \notin pq$ se tiene que:*

$$pq \subset xq \quad o \quad pq \subset px$$

Demostración. Sean $p, q, x \in X$ tales que $x \notin pq$. Como X no tiene curvas cerradas simples ni triodos, el punto x se une por medio de un arco, con el arco pq en p o en q. Por lo tanto, $pq \subset xq$ o $pq \subset px$. □

Ahora demostramos una caracterización del arco.

Teorema 2.57. *Sea X un continuo de Peano, atriódico y sin curvas cerradas simples es un arco.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to X$ una función de Whitney. Para cada punto $x \in X$, definamos $f_x : X \to [0, \mu(X)]$ por $f_x(y) = \mu(xy)$, donde xy es el único arco que une a x con y. La función f_x esta bien definida, ya que si X es un continuo de Peano, entonces X es arcoconexo.

Sea $x_0 \in X$, como X es un continuo de Peano, tenemos que f_{x_0} es continua según el Lema 2.55. Además, sabemos que toda función continua que esta definida de un compacto a $\mathbb{R}$ alcanza su máximo. Sea $p \in X$ tal que

$$f_{x_0}(p) = \text{máx}\{f_{x_0}(y) : y \in X\}.$$

Análogamente, sea $q \in X$ tal que

$$f_q(p) = \text{máx}\{f_q(y) : y \in X\}.$$

Afirmamos que $X = pq$. Evidentemente $pq \subseteq X$. Notemos que $x_0 \notin pq$, por el Teorema 2.56, ocurren dos casos:

$$x_0p \subset x_0q \quad \text{o} \quad pq \subset x_0p.$$

Si ocurre $x_0p \subset x_0q$ entonces $\mu(x_0p) < \mu(x_0q)$ esto es $f_{x_0}(p) < f_{x_0}(q)$ contradiciendo la elección de p. O bien si ocurre $pq \subset x_0p$ entonces $\mu(pq) < \mu(x_0p)$ esto es $f_p(q) < f_p(x_0)$ contradiciendo la elección de q. Por lo tanto, $x_0 \in pq$.

Ahora probamos que para toda $z \in X$, tenemos que $z \in pq$. Supongamos que $z \notin pq$. Como anteriormente se hizo, hay dos casos:

$$pq \subset zp \quad \text{o} \quad zp \subset zq.$$

Si ocurre $pq \subset zp$, entonces $\mu(pq) < \mu(zp)$, es decir $f_p(q) < f_p(z)$, contradiciendo la elección de q. O bien si ocurre $zp \subset zq$ entonces $p \in zq$ por lo que $pq \subset zq$ pero $x_0 \in pq$ luego $x_0 \in zq$ por lo tanto, $px_0 \subset zx_0$, así $\mu(px_0)$; es decir, $f_{x_0}(z) > f_{x_0}(p)$ contradiciendo la elección de p. Por lo que para toda $z \in X$, el punto $z \in pq$; es decir, $X \subseteq pq$ y como $pq \subseteq X$, tenemos que $X = pq$. Por lo tanto, X es un arco. $\square$

Otra forma de probar la misma caracterización es como sigue:

Teorema 2.58. *Sea X un continuo de Peano. Si X no es un arco, entonces X contiene curvas cerradas simples o triodos.*

Demostración. Por el Teorema 1.51, existen puntos que son de no corte. Sean p y q dos puntos que son de no corte, así $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son conexos y abiertos. Por el Teorema 2.46, el continuo X es arcoconexo. Sea A un arco que une a p con q. Así, $X \setminus A \neq \emptyset$, porque por hipótesis X no es un arco;

sea $r \in X \setminus A$. Debido a que $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son abiertos y conexos, se tiene por el Teorema 2.49, que ambos conjuntos son arcoconexos.

Si B es un arco que va de r a q entonces se tienen dos posibilidades,

$$B \cap A = \{q\} \text{ o } B \cap A \neq \{q\}.$$

Si $B \cap A \neq \{q\}$ entonces sea R el punto tal que B intersecta a A por primera vez entonces el conjunto $A \cup rR$ es un triodo simple (rR es el arco que une a r con R).

Análogamente, si C es un arco que une a r con p tenemos dos posibles casos:

$$C \cap A = \{p\} \text{ o } C \cap A \neq \{p\}.$$

Si ocurre $C \cap A = \{p\}$ y $B \cap A = \{q\}$, tenemos un curva cerrada simple en $C \cup B \cup A$. Si ocurre $C \cap A \neq \{p\}$ con un análisis similar a la parte anterior obtenemos un triodo simple. □

Definición 2.59. *Un espacio métrico X es **suave** en p siempre que para todo $x \in X$, para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X que converge a x y para todo continuo $K \subseteq X$ que contiene a p y a x, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que $x_n, p \in K_n$ para toda n y $K_n \to K$.*

Lema 2.60. *Sea X un espacio métrico. Si X es suave en p, entonces X es conexo en pequeño en p.*

Demostración. Sea U una vecindad de p. Sea C el componente de U que contiene p.

Supongamos que $p \in C^0$. Esto significa que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\epsilon(p) \cap (X \setminus C) \neq 0$. Es decir, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in \overline{X} \setminus C$ y $x_n \to p$. Para $K = \{p\}$ existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $K_n \in C(\overline{X})$ tal que $p, x_n \in K_n$ y $K_n \to K$.

Sea $\varepsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(p) \subset U$. Como $K_n \to K$, existe N_0 tal que $K_{N_0} \subset N(\varepsilon, \{p\}) = B_\epsilon(p)$. Esto implica que $K_{N_0} \cup C$ es un subconjunto conexo de U. Por lo tanto, $(K_{N_0} \cup C) \subset C$.

Luego $x_{N_0} \in C$. Esto contradice la elección de las x_n. Por lo tanto, $p \in C^0$.
□

Corolario 2.61. *Sea X un espacio métrico. Si X es suave en p para cada $p \in X$, entonces X es un espacio de Peano.*

Demostración. Si X es suave en p para cada $p \in X$, entonces X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Por lo tanto X es localmente conexo (Teorema 2.7). $\square$

Lema 2.62. *Si X es un continuo de Peano, entonces X es suave en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sean $p, x \in X$, $K \in C(\overline{X})$ un conjunto con $p, x \in K$, y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$.

Por la conexidad local podemos construir una sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos y conexos de X tales que $V_1 = \overline{X}$ y para $n \geq 2$, tenemos que $x \in V_n \subset B_{\frac{1}{n}}(x) \cap V_{n-1}$.

Sea n tal que $x_n \neq x$. Luego, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{M} < d(x, x_n)$. Si $m \geq M$, entonces $V_m \subset B_{\frac{1}{m}}(x)$. Así, para toda $m \geq M$, tenemos que $x_n \neq V_m$. Por otra parte, $x_n \in V = X$. De este modo, está bien definido $m(n) = \text{máx}\{r : X_n \in V_r\}$. Construimos la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ como sigue:

$$K_n = \begin{cases} K, & \text{si} \quad x_n = x, \\ K \cup \overline{V_{m(n)}}, & \text{si} \quad x_n \neq x. \end{cases}$$

Afirmamos que $K_n \to K$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que $V_N \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Como $x \in V_N$, existe N_0 tal que $X_n \in V_N$ a partir de N_0, vamos a probar que, para toda $n \geq N_0$, $K_n \subset N(\varepsilon, K)$.

Sea $n \geq N_0$. Si $x_n = x$, entonces $K_n = K$ y por lo tanto, $K_n \subset N(\varepsilon, K)$. Si $x_n \neq x$, entonces $K_n = K \cup \overline{V}_{m(n)}$. Ya que $x_n \in V_N$ y $m(n) = \text{máx}\{r : x_n \in V_r\}$, observemos que $m(n) \geq N$. Así, $V_{m(n)} \subset V_N \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Por lo tanto, $\overline{V}_{m(n)} \subset B_{\epsilon}(x) \subset N(\varepsilon, K)$. Finalmente, para $n \geq N_0$, tenemos que $K_n \subset N(\varepsilon, K)$, y como para todo n el conjunto K está contenido en $N(\varepsilon, K_n)$, concluimos que para $n \geq N_0$, tenemos que $H(K_n, K) < \varepsilon$. Como esto ocurre para toda $\varepsilon > 0$, obtenemos que $K_n \to K$. $\square$

Corolario 2.63. *Sea X un espacio métrico. Entonces X es un espacio de Peano si, y solo si X es suave en cada uno de sus puntos.*

Demostración. La necesidad se prueba en el Lema 2.62; y la suficiencia en el Corolario 2.61. $\square$

Teorema 2.64. *[2, Teorema 3.28] Si X es un continuo, $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X.*

Teorema 2.65. *[2, Teorema 3.29] Sean X un continuo y A_1, $A_2, \cdots, A_n$ unos subcontinuos de X con más de un punto. Entonces*

(1) $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle$ es conexo en 2^X.

(2) Si $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle \cap C(X)$ es conexo en $C(X)$.

Los primeros resultados obtenidos sobre hiperespacios de continuos de Peano se deben a L. Vietoris y T. Wasewski quienes demostraron en 1923 que la conexidad local de X equivale a la de 2^X y a la de $C(X)$.

Teorema 2.66. *Sea X un continuo con más de un punto, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) X un continuo de Peano,

(2) 2^X es un continuo de Peano,

(3) $C(X)$ es un continuo de Peano.

Demostración. Sea X un continuo con más de un punto.

Afirmación 1. Si X es un continuo de Peano, el hiperespacio 2^X es un continuo de Peano.

Prueba de la Afirmación 1. Por el Teorema 2.7, es suficiente demostrar que 2^X es conexo en pequeño. Sean $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en 2^X tales que $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 1.48, tenemos que $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle : U_1, U_2, \cdots, U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología del hiperespacio 2^X. Por lo tanto, existen $U_1, U_2, \cdots, U_n$ abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Así, por el Teorema 1.47, existen abiertos $V_1, V_2, \cdots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, V_2, \cdots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$ y para cada $i \in \mathbb{N}$. Tomemos $a \in A$. Dado a que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, para alguna $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $a \in V_j$. Sea C_a el componente de V_j que contiene a a. Luego, $A \subset \bigcup \{C_a : a \in A\}$. Ya que X es un continuo de Peano, por el Teorema 2.6, para cada $a \in A$ tenemos que C_a es abierto en X.

Ahora, dado que X es compacto y A es cerrado en X, tenemos que A es compacto. Luego, existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_{a_i}$. Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $C_{a_i} \subset \overline{C_{a_i}} \subset U_j$.

Además, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $x_i \in A \cap V_i$ y C_{x_i} el componente de V_i que contiene a x_i. Como X es un continuo de Peano, por el Teorema 2.6, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que C_{x_i} es abierto en X. Observemos también que para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $C_{x_i} \subset \overline{C_{x_i}} \subset U_i$.

Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea

$$J_i = \{\ell \in \{1, 2, \ldots, m\} : C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}.$$

Ahora, notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ sabemos que $J_i \neq \emptyset$. Además, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $W_i = C_{x_i} \cup \bigcup_{\ell \in J_i} C_{a_k}$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que W_i es conexo y abierto en X, ya que es unión de conjuntos conexos y abiertos en X. De manera que $\langle W_1, W_2, \cdots, W_n \rangle$ es abierto en 2^X, y $A \in \langle W_1, W_2, \cdots, W_n \rangle$.

Por otro lado, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$. Así,

$$A \in \langle W_1, W_2, \cdots, W_n \rangle \subset \left\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \cdots, \overline{W_n} \right\rangle \subset \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle .$$

Observemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, el componente C_{x_i} tiene más de un punto. En efecto, si existen $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $C_{x_k} = \{x\}$, entonces C_{x_k} es abierto y cerrado en X. De manera que $C_{x_k} = X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo con más de un punto de X. Luego, aplicando el Teorema 2.65, obtenemos que $\left\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \cdots, \overline{W_n} \right\rangle$ es un conjunto conexo tal que

$$A \in \operatorname{int}(\left\langle \overline{W_1}, \overline{W_2}, \cdots, \overline{W_n} \right\rangle) \subset \mathcal{U}.$$

Esto prueba que 2^X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 2.7, tenemos que 2^X es un continuo de Peano. Esto concluye la prueba de la Afirmación 1.

De manera análoga se muestra que si X es un continuo de Peano, entonces $C(X)$ es un continuo de Peano.

Afirmación 2. Si 2^X *es un continuo de Peano,* X *es un continuo de Peano.*

Prueba de la Afirmación 2. Sean $p \in X$ y U abierto en X tal que $p \in U$. Así, $\{p\} \in \langle U \rangle$. Observemos que $\langle U \rangle$ es abierto en 2^X. Tomemos un abierto $\mathcal{W} \in 2^X$ tal que $p \in \mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \langle U \rangle$. Como 2^X es un continuo de Peano, existe un conjunto $\mathcal{V}$ conexo y abierto en 2^X tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Luego, por el Teorema 1.48, existen $U_1, U_2, \cdots, U_n$ abiertos en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$. Así, por el Teorema 1.47, existen $V_1, V_2, \cdots, V_n$ abiertos en X tales que

$$\{p\} \in \langle V_1, V_2, \cdots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$$

y para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{V_i} \subset U_i$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i} \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$. Como $\langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U \rangle$, tenemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V_i} \subset \bigcup \overline{\mathcal{V}} \subset U$. Debido a que $\{p\} \in \overline{\mathcal{V}} \cap C(X)$, obtenemos que $\overline{\mathcal{V}} \cap C(X) \neq \emptyset$. Además, como $\overline{\mathcal{V}}$ es un subcontinuo de 2^X, por el Teorema 2.64, tenemos que $\bigcup \overline{\mathcal{V}}$ es un conjunto conexo de X. Sea $V = \bigcup \overline{\mathcal{V}}$, así, $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i \subset V \subset U$. Luego, como $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ es abierto en X, se sigue que $p \in \operatorname{int}(V) \subset V \subset U$. Por lo tanto, X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 2.7, concluimos que X es un continuo de Peano. Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

De manera análoga se muestra que si $C(X)$ es un continuo de Peano, entonces X es un continuo de Peano.

Por la Afirmación 1 y la Afirmación 2 tenemos que *(1)* y *(2)* son equivalentes. $\square$

Conclusión

En el presente trabajo hemos estudiado un caso particular de continuos, los continuos localmente conexos, también conocidos como continuos de Peano. Describimos ejemplos de ellos, herramientas y espacios auxiliares para estudiarlos, y algunas caracterizaciones.

En el capitulo 1 presentamos a los espacios continuos, los definimos como espacios métricos conexos, compactos y no vacíos. Vimos que aunque el que un espacio sea conexo nos hace pensar en que este es de «una sola pieza», en realidad el concepto es más amplio. Descubrimos que la propiedad de ser un continuo es una propiedad topológica, es decir, se conserva bajo homeomorfismos; que la propiedad de la intersección anidada y la descomposición usc son utilizadas como herramientas para construir continuos; y presentamos a los hiperespacios 2^X y $C(X)$ como espacios auxiliares para estudiar a los continuos.

En el capitulo 2 estudiamos las nociones de conexidad local y conexidad en pequeño, y vimos que, de manera global, ambas nociones son equivalentes. Además que un continuo X no puede no ser conexo en pequeño en solo un punto o en una cantidad numerable de puntos. Descubrimos también que la propiedad de ser localmente conexo no es una propiedad hereditaria; pero un continuo X es hereditariamente localmente conexo si, y solo si X no contiene continuos de convergencia. Más adelante vimos que para espacios métricos compactos, tener la propiedad S equivale a ser localmente conexo. Uno de los resultados más importantes que estudiamos es el teorema de Hahn y Mazurkiewicz que dice que todo continuo de Peano es una imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$. También obtuvimos algunas útiles caracterizaciones como que todo continuo de Peano es arcoconexo, es localmente arcoconexo y suave en cada uno de sus puntos. Finalmente vimos que el que X sea un continuo de Peano es equivalente a que 2^X sea un continuo de Peano y que $C(X)$ sea un continuo de Peano.

Esperemos que los temas abordados aquí y las aportaciones que presentamos en las demostraciones para facilitar su compresión, hayan animado al lector lo suficiente para seguir profundizando en esta interesante teoría.

Apéndice

Teorema A.1. *[1, Teorema (1.G.7)] Sean X, Y espacios topológicos. Si X es homeomorfo a Y y X es metrizable, entonces Y es metrizable.*

Teorema A.2. *[1, Teorema (2.A.15)] La conexidad es un invariante topológico.*

Teorema A.3. *[1, Teorema (2.G.9)] Si X es un espacio topológico y $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es compacto.*

Corolario A.4. *[1, Corolario (2.G.10)] La compacidad es un invariante topológico.*

Bibliografía

[1] Charles O. Christenson y William L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[2] Vianey Córdova Salazar, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 26 de agosto de 2011, http://www.fcfm.buap.mx/index.php?id=30.

[3] James Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[4] Lázaro Flores De Jesús *Continuos Localmente Conexos*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 4 de diciembre de 2015.

[5] Luis Alberto Guerrero Méndez, *Clases de Continuos Localmente Conexos*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 26 de junio de 2009.

[6] Alejandro Illanes, *Hiperespacios de Continuos*. Textos 28. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana.

[7] Alejandro Illanes, Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*. Volume 216 de Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1999.

[8] Kazimierz Kuratowski, *Topology, Vol. I*, Academic Press, New York, N.Y., 1966.

[9] Kazimierz Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[10] James R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Editorial Prentice Hall. Madrid, España, 2002.

[11] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Índice alfabético