



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LA EVOLUCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE CURVA Y TANGENTE A TRAVÉS DE COMENTARIOS HISTÓRICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
MODEMAR CAMPOS CANO

DIRECTOR DE TESIS
**DR. AGUSTÍN CONTRERAS
CARRETO**

PUEBLA, PUE.

16 de Octubre de 2018

“Me gusta que se equivoquen. En esto radica la superioridad del hombre sobre los demás organismos. Así llega uno a la verdad. Yo soy un hombre, y lo soy precisamente porque me equivoco. Nadie llega a una verdad sin haberse equivocado catorce veces, o ciento catorce, y esto es, acaso, un honor para el género humano”.

Fiódor Mijáilovich Dostoyevski

DEDICATORIA

A aquellos dos seres que me dieron la vida y un nombre tan peculiar; mis
padres: Modesto y Marcelina.

Agradecimientos

En estas cortas líneas quiero expresar de la manera más raquítica posible mi sincero y profundo agradecimiento a mis padres Modesto y Marcelina por todo el apoyo a lo largo de mis años de vida, por dejar a mi alcance desde pequeña, libros de Química, Física y Matemáticas entre tantos. Agradezco por todas las enseñanzas, por el aprecio al esfuerzo y dedicación, mis palabras no alcanzan para mostrar mi gratitud hacia ustedes que me han enseñado tanto.

A mis hermanos, Cruz, Walker, con los cuales he compartido tantas aventuras desde la infancia hasta en nuestros tiempos, y a mis hermanas, Oyuki, Mari, Luz por ser parte de mi vida y por brindarme tantos momentos.

A mis amigos Óscar y Eduardo por compartir tantos saberes, por apoyarme en momentos extraños y complejos, por darme la confianza de preguntar cosas absurdas sobre matemáticas que, al final no eran tan absurdas.

A mi director de tesis, el doctor Agustín Contreras Carreto por todo su apoyo en la elaboración de este trabajo, por enseñarme que siempre se puede aprender más, por haber sido mi profesor de las geometrías y que gracias a eso tomé el gusto por ellas. Por todo el tiempo que me dedicó para la revisión de este trabajo, por todas las charlas y por ser más que un profesor, un compañero, un amigo.

A los profesores Raúl Linares Gracia, Julio Erasto Poisot Macías y Jaime Badillo Márquez por aceptar amablemente ser mi jurado, por el tiempo dedicado a la revisión y observaciones hechas al presente trabajo que finalmente mejoró la versión final. Y agradezco especialmente al profesor Badillo, por los comentarios, aportes y bibliografía que me sugirió.

Finalmente, te agradezco a ti, Antonio; por enseñarme la alegría de la vida, por todo el tiempo que caminamos juntos, por tener ese átomo de locura y revolucionar mi vida. Por hacerme ver las primaveras e inviernos con otros ojos, porque de todo el Cosmos me fui a estrellar justo en tu órbita.

Introducción

Las curvas son útiles en matemáticas y en otras áreas, como ciencias exactas, Biología, Química, Física, Psicología, Fisiología, etc. El interés en las curvas comenzó mucho antes de que fueran objeto de estudio matemático. Esto se puede ver en numerosos ejemplos, como el uso decorativo en el arte y en objetos cotidianos que datan de tiempos prehistóricos. Un concepto geométrico cuya definición exacta y al mismo tiempo bastante general, presenta considerables dificultades y con diferentes maneras en distintas ramas de la geometría.

Tenemos la idea intuitiva de lo que es una curva plana. Podemos coincidir en que objetos matemáticos como: elipses, círculos y espirales, son curvas; mientras que una esfera, el conjunto de un solo punto o el conjunto vacío, no son curvas. Sin embargo, todas estas “figuras” pueden describirse mediante una ecuación $F(x, y) = 0$, con F un polinomio, por ejemplo: $x^2 + y^2 = 0$ es una “ecuación del origen” en $\mathbb{R}^2$, mientras que $x^2 + y^2 = -1$ es “una ecuación” del conjunto vacío. Por lo tanto, una curva no puede definirse simplemente mediante una ecuación $F(x, y) = 0$.

Para tratar objetos geométricos más complicados, es necesario tener una definición satisfactoria de una curva. Dicha definición debe incluir todos los objetos, que la mayoría concuerden, son curvas y excluir los objetos que todos concuerden que no son curvas. Los matemáticos necesitaron hasta la década de 1920 para llegar a una definición satisfactoria de una curva. En este trabajo esbozaremos algunos de los puntos destacados en la lucha por responder a la pregunta “¿qué es una curva?”.

Utilizaremos la teoría de las derivadas para definir una tangente. Así como enlazar argumentos desarrollados en el pasado y hasta en nuestros días con el enfoque que se dan específicamente hoy en día para dominar algunas nociones geométricas como la tangente, en particular para desarrollar una intuición para las definiciones contemporáneas de estas nociones. Notaremos que desde el comienzo de la geometría analítica, se prestó especial atención a la ecuación de la tangente a una curva dada por una ecuación polinómica. El problema de la tangente se generalizó un siglo después al caso de las curvas arbitrarias, a través del desarrollo del cálculo diferencial; estudiaremos este problema en el último capítulo de este trabajo.

Nuestro propósito es explicar de dónde proviene la noción de curva y

tangente en geometría diferencial, por qué elegimos esta o aquella definición precisa y no otra posible. Queremos aclarar que este trabajo no es una investigación estrictamente histórica, sino pretende ser una contribución al estudiar la génesis de una idea o concepto matemático útil en algunos cursos como los de cálculo y geometría diferencial.

En el capítulo 1 serán revisados algunos antecedentes del concepto de curva, por lo cual daremos una breve sección dedicada al concepto de función, pues este es primordial en el concepto de curva. Trataremos las representaciones paramétricas, así como algunos problemas que tuvieron los matemáticos acerca de la continuidad y la inyectividad.

En el capítulo 2 se introducen las coordenadas paramétricas y cartesianas, algunos teoremas de análisis real, hablaremos acerca de funciones de clase C^1 . Una noción importante es la consideración de ecuaciones paramétricas, siguiendo una idea de Euler. Una mirada más cercana a tales ecuaciones sugiere que deberíamos ver una curva no como el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen alguna ecuación, sino como una deformación continua de la línea real en $\mathbb{R}^2$. Cuando un parámetro t varía en la línea real, las ecuaciones paramétricas describen sucesivamente todos los puntos de la curva. Cabe señalar que habrá algunos resultados que no serán demostrados, pues no es uno de nuestros objetivos. También se hablará de singularidades para hacer notar que la ecuación $F(x, y) = 0$ también es usada para definir una curva en este campo de curvas algebraicas.

En el capítulo 3 se desarrollan algunas nociones acerca de tangentes a curvas, se verán ejemplos del método de Fermat para calcular tangentes, así como el de Barrow.

Finalmente en el capítulo 4, estudiaremos la noción de tangentes con un enfoque diferencial.

Índice general

Introducción	I
1. Antecedentes de la noción de “curva”	1
1.1. Acerca de funciones	1
1.2. La noción de “curva” de los Griegos	6
1.3. Noción estática de “curvas”	11
1.4. Descartes y Fermat	15
1.5. La noción dinámica de “curva”	19
2. Definiendo una curva	33
2.1. Coordenadas cartesianas y coordenadas paramétricas	33
2.2. Acerca de singularidades	41
3. Definiendo la tangente	49
3.1. Estática de la tangente a curvas	49
3.2. Fermat y su método para la tangente a una curva	51
3.3. Tangentes a ciertas curvas	59
3.4. Barrow y su método para tangentes	64
3.5. Leibniz y su noción de derivada	68
3.6. La noción de derivada de newton	70
4. Tangentes	75
4.1. Sentido diferencial	75
Conclusiones	83
A. Conceptos básicos	85
A.1. Definiciones	85
A.2. Límites y derivadas	85

A.3. Aspectos de la geometría griega	87
A.4. Algunos aspectos sobre tangente	88
B. Curvas algebraicas y Polinomios	91
B.1. Círculo como lugar geométrico	91
B.2. Definiciones básicas	94
Bibliografía	100

LA EVOLUCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE CURVA Y TANGENTE A TRAVÉS DE COMENTARIOS HISTÓRICOS

Modemar Campos Cano

Capítulo 1

Antecedentes de la noción de “curva”

En este capítulo estudiaremos los intentos de los griegos por definir lo qué es una “curva”, y la evolución que tuvo de ser un concepto estático a uno dinámico. Algunos ejemplos y definiciones están basadas en [5], [6], [7]. Dedicaremos una sección sobre el concepto de “función”, un concepto que necesitamos para definir lo que es una “curva”. La mayoría de definiciones que daremos en esta sección se pueden encontrar en [30].

1.1. Acerca de funciones

El concepto de función tuvo una evolución histórica larga y laboriosa. Según Youschkevitch [33], hay tres etapas principales del desarrollo del concepto de función hasta la mitad del siglo XIX.

- La Antigüedad: En la cual considera principalmente la Matemática Babilónica (2000 a.C. - 600 a.C.) y la Griega.
- La Edad Media: La cual se divide en dos fases; la Fase Latina (500-1200) y la no Latina (1200-1500).
- Período Moderno: En el que se distingue a partir del siglo XVIII cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función.

En la época antigua no existía una idea abstracta de variable, y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. Sin embargo, en

este período, se desarrollan algunos indicios que implícitamente contienen la noción de función. En las tablas numéricas babilónicas se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la de la suma de n términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos. A pesar de que no manejaban aún el concepto de función, este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, ya que éstas reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol.

Más tarde, (500 a.C. - 500 d.C.), durante la época de la cultura helénica, aparecen los problemas “clásicos”, como por ejemplo: la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. Los esfuerzos para resolver estos problemas trajeron consigo la creación de diferentes curvas por parte de Apolonio, Arquímedes y Pappus, entre otros.

Puede decirse que los estudios de los griegos sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, si bien no respondían explícitamente al concepto de función, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura helénica.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron sin dar definiciones específicas sobre cantidades variables independientes y dependientes. La evolución de la noción de función se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban las fórmulas.

El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas, realizó un uso sistemático de diagramas para representar magnitudes variables en un plano como: velocidad/tiempo, volumen/densidad. Por ejemplo en la representación gráfica del cambio de la velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo (longitud), y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en líneas verticales (latitud).

Ejemplo 1.1.1. *En la figura 1.1 se observa la representación de una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O , a cero en B ,*

quedando dibujado un triángulo. El rectángulo $OBDC$, determinado por E (punto medio de AB) tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo.

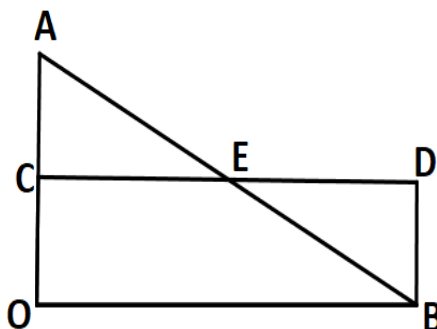


Figura 1.1: movimiento uniforme en un intervalo de tiempo.

Kleiner [24], señala que desde 1450 a 1650 se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de función:

- La extensión del concepto de número al de números reales, e incluso a números complejos (Bombelli, Stifel).
- La creación del Álgebra simbólica (Vieta, Descartes).
- El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo).
- La unión entre el Álgebra y la Geometría (Fermat, Descartes).

Descartes buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras y a su vez buscaba darle significado al Álgebra por medio de la Geometría. Estableció que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica. Fue el primero en poner en claro que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable. La distinción de Descartes entre curvas “geométricas” y “mecánicas” (véase sección 1.4) dio lugar a que Gregory (1638 -

1675) realizara la distinción entre funciones “algebraicas” y “trascendentes”. En 1667, Descartes dio la definición más explícita de una función: “una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable”.

La palabra “función” apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz en agosto de 1673, la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva, coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva ([33], pág. 56) y en 1718 Johan Bernoulli en un artículo dio la primera definición formal de función como: “Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes”.

A partir del siglo XVIII se perciben cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función.

En la primera etapa Euler definió una función siguiendo la definición dada por Bernoulli como: “Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes”.

Euler se enfrenta al problema de si a toda función le corresponde una curva, también si toda línea curva debería representarse por una función. De esta manera admite como funciones a las llamadas “curvas mecánicas”, y al ampliar el concepto de “función” distingue entre las “continuas” y las “discontinuas”.

Para Euler, una función “continua” es la que puede ser representada por una sola ecuación, aún cuando su dibujo conste de más de un trazo, como el caso de la hipérbola. Las “discontinuas” por su parte, son las “curvas mecánicas”, es decir, son aquellas para las que no hay una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido.

A partir de 1720, y hasta 1820, comenzó a desarrollarse una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis.

En la segunda etapa encontramos a Fourier, quien en 1822 dio una definición de función donde daba a notar que la asignación de valores para la función era lo principal, que esta asignación fuera llevada por una o varias fórmulas no era importante:

“En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x , hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra,

de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única".

En la tercera etapa, encontramos a Dirichlet (1805 - 1859) quien tenía la noción de función como una "correspondencia arbitraria", y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. En 1829 Dirichlet definió una función, aunque fue demasiado general:

" y es una función de una variable x , definida en el intervalo $a < x < b$, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y . Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia".

Presenta el primer ejemplo explícito de una función que no es una expresión analítica, no posee gráfica o curva que la represente. Además esta función es discontinua en todas partes (en el sentido actual).

Ejemplo 1.1.2. *Es una función de variable real, definida en el intervalo $[0, 1]$, no es continua en ningún punto de la recta. Se define como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1.1)$$

La representación gráfica se puede ver como: entre dos puntos racionales cualesquiera de $[0, 1]$ hay infinitos puntos irracionales, y la recíproca también es cierta. Destaquemos que gracias a los trabajos de Dirichlet surgió el camino a la completa separación de los conceptos de función y de su representación analítica.

La Teoría de Conjuntos iniciada por Cantor (1845 - 1918) produce una nueva evolución del concepto de función: "toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos o no numéricos".

La evolución continuó, desde el concepto de correspondencia, los matemáticos pasaron al concepto de relación. Desde 1900 hasta 1920 se introdujeron conceptos como: espacio métrico, espacio topológico, espacio de Hilbert y espacio de Banach. Estos desarrollos condujeron a nuevas definiciones de función basadas en conjuntos arbitrarios que ya no son los números reales.

La cuarta y última etapa es asociada con Bourbaki en 1939, dio un formulación general de función como una regla de correspondencia (semejante a la de Dirichlet) entre el dominio y el rango:

"Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F , se llama relación funcional en y , si para todo x en E , existe un único y en F el cual

está en la relación dada con x . Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x , se dice que y es el valor de la función en el elemento x , y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función.”

Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus palabras: “una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano $E \times F$ ”.

La forma de ver una función por Bourbaki difiere del punto de vista de Dirichlet en que el dominio y el codominio no están restringidos al conjunto de números reales. En la definición de Dirichlet el dominio de la función es un intervalo finito de números reales y el codominio está formado por números reales.

Fueron necesarios siglos para llegar al desarrollo del concepto como tal.

1.2. La noción de “curva” de los Griegos

Originalmente, la geometría griega se ocupaba esencialmente del estudio de dos curvas: la línea y el círculo.

- La línea es lo que no tiene longitud y ancho, y está bien equilibrada alrededor de cada uno de sus puntos.
- El círculo es el lugar geométrico de aquellos puntos del plano que están a una distancia fija R de un punto fijo O del plano.

El matemático presocrático, Hipócrates (470-410 a.C.) fue uno de los primeros en abordar los problemas clásicos de geometría, en específico la duplicación del cubo. En esa época se sabía convertir un rectángulo de lados a y b en un cuadrado, lo cual era equivalente a encontrar la media proporcional entre los segmentos a y b , verificando la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Se aprendió a generalizar este problema, interpolando dos medias proporcionales entre magnitudes dadas a y b , para lo cual se debían construir dos segmentos x y y que cumplieran $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Hipócrates se dio cuenta que este problema era equivalente al de la duplicación del cubo.

En esa época los geómetras griegos tenían dos nociones de “curvas”:

- Una curva era considerada como un punto moviéndose por medio de combinaciones de movimientos independientes.

- Una curva era definida como la intersección por un plano de cierta superficie geométrica conocida (cono, esfera, cilindro).

Hipias (449-350 a.C.), introdujo la trisectriz que un siglo después fue usada por Dinostrato (véase 1.2). En un inicio fue introducida para resolver el problema de la trisección del ángulo, lo cual no se logró. A pesar de no haber resuelto dos de los problemas clásicos, esta curva fue la primera que se construye diferente a lo que era una recta y una circunferencia. Gracias a que se define de manera mecánica, abrió camino para nuevas curvas, lo cual fue usando conceptos como movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento circular uniforme, y conceptos de geometría como lo son las rectas, la perpendicularidad, el paralelismo, etc.

Platón (428 a.C. -347 a.C.) consideró al universo físico en términos geométricos, para lo cual construyó un modelo a través de círculos, poliedros regulares y esferas.

Aristóteles estableció que para probar la existencia de un ente, debería ser por medio de la construcción de regla y compás, esto fue un método que siguieron la mayoría de los griegos. De esta manera, los resultados así obtenidos tendrían el carácter de verdad necesaria, al poseer unos cimientos suficientemente sólidos y rigurosos.

Los griegos descubrieron las secciones cónicas entre los años 600 y 300 a.C., se interesaron mucho por las propiedades geométricas de las cónicas. Además de las rectas, círculos y planos, los griegos sabían las propiedades de las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano que, de acuerdo con la posición del “plano de corte”, se llama: elipse, parábola e hipérbola.

Aunque diversos autores otorgan a Menecmo (380-320 a.C.) la vanguardia de las secciones cónicas, Coolidge [11] señala que esta vinculación con el origen de estas curvas no implica que él haya sido el primero en trabajarlas, más bien, el primero sobre el cual se tiene registro. Boyer [8] menciona que aproximadamente en el año 350 a.C., Menecmo tuvo un acercamiento a estas curvas en un intento de resolver el problema de la duplicación del cubo. González Urbaneja [20] explica que la elipse, hipérbola y parábola fueron conocidas como la Triada de Menecmo, lo que indica una fuerte asociación de Menecmo con estas curvas.

Aristeo (370-300) en su trabajo “Solid Loci” o bien, “Lugares Sólidos” compuesto por cinco libros, trabajó con secciones cónicas. Se refería a la elipse, parábola y la hipérbola como “sección del cono de ángulo agudo”, “sección del cono de ángulo recto” y “sección del cono de ángulo obtuso” respectivamente.

El contenido esencial de la matemática griega hasta el 300 a.C., estaba recopilado en “Los Elementos de Euclides”, paradigma del método axiomático-deductivo (véase A.3. Euclides(325-265 a.C.)). Consideraba al cono como una figura geométrica que se obtiene como resultado de hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus lados, esta noción es independiente de las secciones que se obtienen de él, es decir, de las secciones cónicas. Y en cuanto a la noción de círculo esta es muy diferente a la manera como definió el cono ya que consideró un círculo como una figura plana que cumple ciertas propiedades.

Para Euclides una curva es una línea continua que tiene longitud y no tiene anchura. A estas curvas se les puede trazar otras curvas que cumplan algunas propiedades como la tangencia, la perpendicularidad, la semejanza y el paralelismo. Las curvas pueden ser rectas o no rectas y pueden ser cerradas o abiertas. Estas curvas pueden formar figuras tales como triángulos, círculos, cuadrados y paralelogramos. De igual forma, al hacer girar las curvas con respecto a un eje generan sólidos, tal es el caso cuando se pone a girar un círculo sobre un eje que genera una esfera o cuando al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus lados se genera un cono. Son ejemplos de curvas cerradas los contornos de las figuras, tales como los contornos de los círculos (circunferencias), los contornos de los triángulos, los contornos de los cuadrados y los contornos de los paralelogramos.

También surgieron otras ideas acerca de la noción de “curva” de los griegos, no todas las “curvas” fueron aceptadas como tal, existía una especie de recelo hacia las “curvas mecánicas”, pues estas no entraban en lo que ellos llamaban “curvas”, es decir, no podían ser construídas con regla y compás.

De Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), se conocen dos libros sobre la geometría plana, uno dedicado a la circunferencia, “De la medida del círculo”, y una de sus aproximaciones más usadas hasta nuestros días; y otro dedicado a la espiral uniforme, “De las espirales”. En esta obra Arquímedes define, tal vez por primera vez en la historia, una “curva mecánica”, una curva basada en el movimiento.

Definición 1.2.1. *Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral.*

Tal vez el interés por esta curva estaba motivado por el problema de la trisección del ángulo. Arquímedes, gracias a la espiral uniforme, descubrió un

método para dividir un ángulo en tres partes iguales, y en general en n partes iguales. A pesar de que Arquímedes fue el primero en definir con precisión una “curva mecánica”, no fue el primero en utilizar curvas raras para resolver uno de los tres problemas clásicos: cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de cualquier ángulo. Los geómetras griegos para entonces tenían asumido que estos problemas no podían resolverse con el concepto que tenían de “curva”, a pesar de no probar esto, concluyeron que era necesario otro tipo de “curvas” más generales o de carácter más mecánico.

Por el año 390 a.C. Dinóstrato descubrió una curva generada por el movimiento uniforme de dos rectas, y que también servía para trisecar el ángulo. De ahí que lleve el nombre de cuadratriz o trisectriz de Dinóstrato (trisectriz de Hípías). Los geómetras griegos ya consideraban a esta como “curva” además de la circunferencia y la recta como una “curva mecánica”.

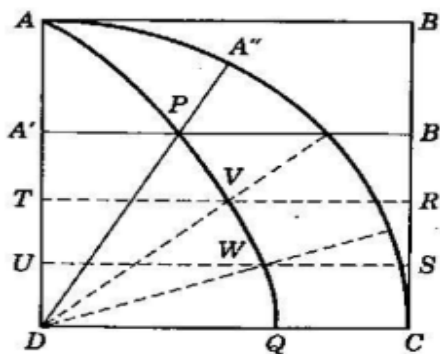


Figura 1.2: cuadratriz.

La construcción es la siguiente (Figura 1.2): Considere un cuadrado $ABCD$ donde el lado AB se traslada paralelamente a sí mismo y con velocidad uniforme desde su posición inicial a llegar a coincidir con DC . Durante el mismo intervalo de tiempo, el lado DA gira con velocidad uniforme en el sentido de las agujas del reloj, hasta coincidir también con DC . La cuadratriz es precisamente el lugar geométrico de los puntos P de intersección de los dos segmentos móviles en cada instante: $P = A'B' \cap DA$.

Utilizando solamente consideraciones geométricas, Dinóstrato probó que el lado a del cuadrado generatriz es media proporcional entre el segmento DQ y el arco de circunferencia AC . Por tanto, $AC/AB = AB/DQ$, en notación moderna, $DQ = 2a/\pi$. Así, conocido el segmento DQ y AB , mediante

una sencilla construcción geométrica se puede construir un segmento del término que falta en la proporción geométrica, es decir, de longitud el arco de circunferencia AC .

La espiral de Arquímedes es una de las “curvas mecánicas” más famosas, la cual permite resolver los problemas de la trisección de un ángulo y también en de la rectificación de la circunferencia (que implica la cuadratura del círculo), debido a la propiedad de la subtangente (véase sección 3.2).

Los trabajos de Arquímedes son ejemplos de originalidad y precisión y, a pesar de la falta de un sistema de numeración y una notación simbólica manejable de su época, constituyen un ejemplo de ingenio, inspiración y creatividad.

Según Pappus [11], Euclides escribió cuatro libros acerca de secciones cónicas, que fueron completados por Apolonio (262-190 a.C.). Boyer menciona que los trabajos de Aristeo y Euclides sobre cónicas se perdieron, que tal vez fue por el trabajo tan notorio de Apolonio, “Las Cónicas” que constaba de ocho volúmenes, lo que opacó los trabajos previos. Más tarde, hacia finales del periodo Alejandrino, Hypatia escribió un texto titulado “Sobre las cónicas de Apolonio”. Su muerte marcó el final de los grandes descubrimientos matemáticos en Europa por varios siglos.

Apolonio mostró que a partir de un mismo cono se pueden obtener las tres secciones, variando el ángulo formado entre el eje del cono y el plano sección, es decir, no importaba el tipo de cono que se tomara. También demostró que las propiedades de estas curvas se mantienen, independientemente de las características del cono (circular, recto u oblicuo) a considerar. Lo interesante es que los antecesores hasta Arquímedes no tenían claras las ideas sobre la generación y propiedades de las secciones cónicas, a pesar de que ya en tiempos de Platón se conocieran muchas propiedades de las secciones cónicas y existieran instrumentos mecánicos para dibujar dichas curvas (compás parabólico).

Con la teoría de las secciones cónicas de Apolonio, encontramos dos consideraciones de orden estrictamente matemático: el problema de la resolución cuadráticas, que desde la época de Pitágoras se había desarrollado como “álgebra geométrica” con las “aplicaciones” de superficie, y el grupo de los tres problemas clásicos, cuya solución exigía ecuaciones de grado mayor a dos. A todo esto se unieron las proporciones continuas y lugares geométricos. En efecto, una curva que satisface esta o aquella condición algebraica, y viceversa, una condición algebraica que ha de corresponder en todo momento a este o aquel lugar geométrico, en esencia, no son más que una función y

su curva representativa. Pero fueron necesarios muchísimos pasos antes de adquirir plena conciencia de estas relaciones.

La obra de Apolonio tenía un germen de estas cosas, y logró llevar a cabo una coordinación entre el álgebra y la geometría, pero no del todo, pues el álgebra griega estaba envuelta por la geometría. Así, entre el álgebra de corte geométrico y la geometría propiamente dicha vino a intercalarse un estrato de relaciones puramente geométricas donde a veces, surgieron descubrimientos sorprendentes.

El concepto de lugar geométrico era conocido desde hace tiempo por la geometría griega, y significaba conjunto de distancias o relaciones. La concepción de figura como “lugar geométrico” surge del modo estático de considerar las cosas utilizado por la escuela eleática. Por ejemplo, una circunferencia es el “lugar geométrico” de todos los puntos equidistantes de un punto determinado (el centro). Mientras que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los lados del ángulo, y así sucesivamente. Como es natural, existen condiciones bastante complejas para los lugares geométricos, pero por ahora no nos adentraremos más en la noción de este concepto.

1.3. Noción estática de “curvas”

Hasta aquí con el trabajo de Apolonio se obtuvo una nueva forma de obtener las cónicas, se dedujo que las secciones cónicas se podían obtener de un cono cualquiera siempre y cuando se realice una variación al plano seccionador. Los estudios desarrollados de Apolonio sobre secciones cónicas constituyen el primer paso de una tematización que realizó posteriormente Descartes, quien definió algebraicamente las secciones cónicas.

“La Geometrie” de Descartes (1596-1650) fue publicada en 1637 como uno de tres apéndices de su “Discurso del Método”. En el mismo año, Fermat (1601-1665) envió su “Introducción a los Lugares Planos y Sólidos” a París, el cual fue publicado hasta 1679 a pesar de ser un trabajo más sistemático en ciertos aspectos. La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación $F(x, y) = 0$ y el lugar geométrico (generalmente una curva) que consistía de todos aquellos puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes fijos perpendiculares satisfacen la ecuación. Ni Fermat, ni Descartes utilizaron un sistema explícito de dos ejes de coordenadas en la forma que la conocemos y usamos actualmente.

Los matemáticos del siglo XVII aceptaban que una coordenada tenía que

ser un número positivo, así era imposible, por ejemplo, elegir el centro de un círculo como origen para expresar la ecuación del círculo completo. Sin embargo, es interesante observar cómo algunas ideas básicas de la geometría algebraica moderna o la geometría diferencial ya estaban presentes, desde el principio, en el trabajo de Fermat y Descartes.

En este trabajo nos enfocaremos en el estudio de curvas en el plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.3.1. *Si tomamos un círculo de radio R con centro en el origen, sabemos que admite la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, que pasando el término r^2 a la izquierda, obtenemos $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.*

Ejemplo 1.3.2. *La ecuación de la elipse con centro en el origen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que equivale a $\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 - 1 = 0$.*

Podríamos llegar a pensar en introducir una teoría general de curvas al permitir ecuaciones de la forma $F(x, y) = 0$ donde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria.

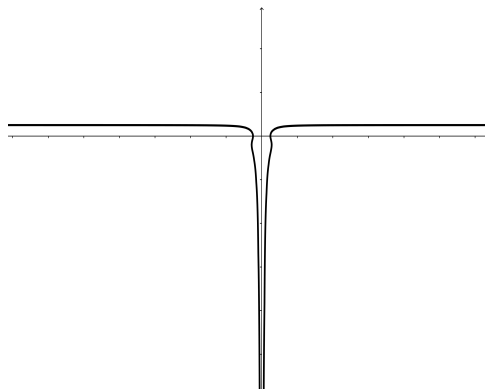


Figura 1.3: $(x^2 - y^2 - 1)^3 - x^2y^3 + (x^2 - 2y^2 - 2) = 0$.

Observación 1.3.3. *¿Pero qué sucede con el conjunto de un sólo punto o el conjunto vacío que sabemos no son curvas? De hecho estamos pensando en que el conjunto de un sólo punto y el conjunto vacío no son curvas, así como estamos pensando en que una hipérbola, parábola y elipse son curvas. Tratamos de llegar a una definición y si notamos que:*

- $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$, obtenemos la ecuación de un solo punto: el origen.

- $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$, describe al conjunto vacío.

La función $F(x, y)$ en estos casos no nos da un buen camino para lo que queremos concluir.

Ejemplo 1.3.4. Sea $(x^2 - y^2 - 1)^3 - x^2y^3 + (x^2 - 2y^2 - 2) = 0$ cuya figura es 1.3, que nuevamente será de la forma $F(x, y) = 0$ con F un polinomio. Pero notamos que esta ecuación da lo que por ahora llamaremos “imagen”, con dos curvas lo que intuitivamente conocemos como “curva”. Entonces, ¿realmente es una curva o son dos curvas?

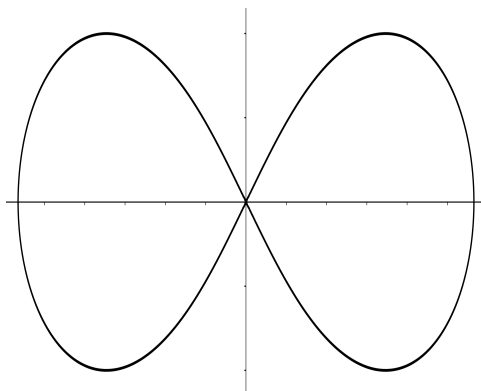


Figura 1.4: $((x+2)^2 + y^2)((x-2)^2 + y^2) = 2^4$

Ejemplo 1.3.5. Sea $((x+2)^2 + y^2)((x-2)^2 + y^2) = 2^4$. La ecuación parece que representa a dos curvas o probablemente una. Si decidimos que el primer ejemplo es una curva, entonces aceptamos que una curva puede tener ramas disjuntas, así podemos asumir que esa es una curva con dos ramas. Lo contrario sería que no es una curva, sino la unión de dos curvas (Figura 1.4).

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.6. Existen funciones continuas $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$ es un cuadrado completo. Véase Figura 1.5.

Demostración:

Sea $F(x, y) = (x - |x|)^2 + ((1-x) - |1-x|)^2 + (y - |y|)^2 + ((1-y) - |1-y|)^2$.
Veamos lo que sucede con los términos.

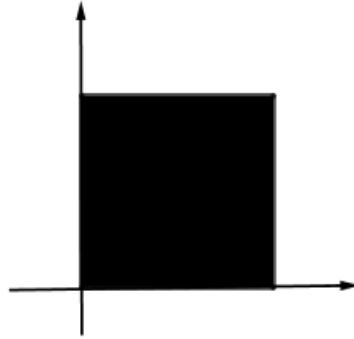


Figura 1.5:

- Si $(x - |x|)^2 = 0$, entonces $x - |x| = 0$, por lo tanto $|x| = x$.
 Si $(x - |x|)^2 = 0$, entonces $x - |x| = 0$, por lo tanto $|x| = x$.
 Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, por lo tanto $(x - |x|)^2 = (x - x)^2 = 0$. Lo cual nos dice que es válida para cualquier $x \in \mathbb{R}$.
 Si $x \leq 0$, entonces $|x| = -x$, por lo tanto $(x - |x|)^2 = (x - (-x))^2 = (x + x)^2 = (2x)^2 = 4x^2 = 0$. La solución a esta ecuación es $x = 0$. Con esto concluimos que para $(x - |x|)^2$, sus soluciones son $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} = 0$
- Sea $((1 - x) - |1 - x|)^2$, entonces $1 - x - |1 - x| = 0$, por lo tanto $|1 - x| = -x + 1$.
 Si $1 - x \geq 0$ para $x \leq 1$, tenemos que $|1 - x| = 1 - x$. Si $1 - x < 0$ para $x > 1$, tenemos que $|1 - x| = -(1 - x)$. Ahora evaluemos la expresión en $x < 1$, $x \geq 1$, $x < 1$ tenemos $((1 - x) - |1 - x|)^2 = ((1 - x) - (1 - x))^2 = 0$ entonces sus soluciones son todas las x en la recta real.
 Para $x \geq 1$, tenemos $((1 - x) - |1 - x|)^2 = (1 - x - (-(1 - x)))^2 = (1 - x + 1 - x)^2 = (2 - 2x)^2 = 0$, entonces $x = 1$.
 Con esto concluimos que $((1 - x) - |1 - x|)^2 = 0$ es válida para todas las $x \leq 1$. De manera análoga para los otros dos términos restantes. Así la condición $F(x, y) = 0$ es equivalente a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 - x \geq 0$, $1 - y \geq 0$. $\triangleleft$

Hemos encontrado una función con la condición $F(x, y) = 0$, una “curva”, pero sabemos por conocimiento que no queremos que eso sea algo que llamemos “curva”.

Intentar definir una “curva” a través de una ecuación tan general como $F(x, y) = 0$ no es tan fácil o incluso puede ser imposible.

Notemos que cada ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ determina un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. $\{(x, y) | F(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ¿Qué condiciones en F podríamos imponer para que este subconjunto sea digno de llamarse “curva”? Veamos un poco de historia.

1.4. Descartes y Fermat

Hoy en día se piensa a menudo que la idea original de la geometría analítica plana era identificar un punto del plano a través de dos coordenadas. Esto es ciertamente parte de la verdad, pero solo una parte muy pequeña. El problema en el origen de la geometría analítica fue mucho más profundo: cada ecuación en dos variables representa una curva en el plano, y viceversa.

La geometría analítica plana fue introducida independientemente por Fermat y Descartes alrededor de 1630. Fermat y Descartes demostraron que varios problemas geométricos podrían resolverse en su lugar mediante cálculos algebraicos rutinarios. Sin embargo, en aquellos días, las técnicas algebraicas eficientes aún no se habían inventado y todavía no se habían descubierto buenos sistemas de coordenadas. La ausencia de estos ingredientes esenciales condujo rápidamente a cálculos y pruebas bastante “indigeribles”, en particular cuando los matemáticos intentaron cambiar al caso tridimensional.

“La Géométrie”, el tercer apéndice del “Discurso del método”, se divide en tres partes. El propósito de Descartes era encontrar el lugar geométrico de un punto tal que satisface una condición específica. Además de identificar la curva solución y que ésta sea construible. Un antecedente del trabajo de Descartes fue la invención del álgebra simbólica, la cual fue reconocida desde su descubrimiento por Viète en 1591, como una clase de análisis.

Sin embargo, ésta álgebra se basaba en la teoría de magnitudes geométricas, creada por los griegos y expuesta por Euclides, 300 a.C. En esta teoría, una variable correspondería a la longitud de algún segmento rectilíneo, el producto de dos variables al área de algún rectángulo, y el producto de tres variables al volumen de algún paralelepípedo rectangular. Los griegos no tenían cómo dar significado al producto de más de cinco variables.

Descartes decidió interpretar el producto de dos líneas como una línea (véase [13] para detalles), no como un área, lo que le permitió interpretar cualquier potencia arbitraria de X como una longitud, con lo cual pudo aritmetizar y reducir las magnitudes geométricas a magnitudes lineales. Para

ello Descartes se fijó en proposición 12 del Libro VI de “Los Elementos” de Euclides: “Encuentre el cuarto segmento proporcional a tres segmentos dados. Es decir, dados tres segmentos α , β , α' , encontrar un segmento β' tal que α , β tienen la misma proporción que α' y β' ”.

Por ejemplo, Descartes tomó un segmento de longitud unitaria y dado un segmento de longitud X , encontró la cuarta proporcional entre 1, X y X , la cuál llamó X^2 , es decir, $\frac{1}{X} = \frac{X}{X^2}$. De esta manera Descartes incluyó y reglamentó operaciones algebraicas como la suma, resta, división y multiplicación.

En el libro I de “La Géométrie” tomó un segmento de longitud X sobre un eje dado, y un segmento de longitud Y formando un ángulo fijo con dicho eje, para poder construir puntos cuyas longitudes $X's$, $Y's$ satisficieran cierta relación.

“Asignando un valor a y , tenemos x , y por lo tanto x se puede encontrar con regla y compás, por un método ya explicado. Si entonces, tomamos sucesivamente un número infinito de valores diferentes para la línea y , deberíamos obtener un número infinito de valores para la línea x , y, por lo tanto, una infinidad de puntos diferentes, como C , por medio de los cuales se puede dibujar la curva requerida.”

Ejemplo 1.4.1. Si la relación entre X y Y fuera la expresada por $Y = X^2$, entonces para cada valor de X podríamos construir cada Y como el cuarto término de la proporción $\frac{1}{X} = \frac{X}{X^2}$.

Como una aplicación de su método, Descartes discutió el problema general de Pappus al final del libro I de “La Geometrie”. El enunciado le fue dado en latín, reproduciéndolo de la traducción de Commandino de las obras de Pappus, puede enunciarse como sigue y cuya figura es 1.6:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que las razones siguientes son iguales a la razón dada β : Para tres rectas $(d_1)^2 = d_2d_3$; para cuatro rectas $d_1d_2 = d_3d_4$; para cinco rectas $d_1d_2d_3 = d_4d_5$. De manera genérica: Para un número par $2k$ rectas: $d_1 \cdots d_k = d_{k+1} \cdots d_{2k}$. Para un número impar $2k + 1$ rectas: $d_1 \cdots d_{k+1} = d_{k+2} \cdots d_{2k+1}$.

Mientras Descartes empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente. Por ejemplo, él comenzó con la ecuación de segundo grado en dos variables: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, que por medio de técnicas de traslación y rotación (usados por Viète) el lugar geométrico de tal ecuación es una sección cónica (excepto para casos degenerados), y las clasificó como elipse, hipérbola o parábola.

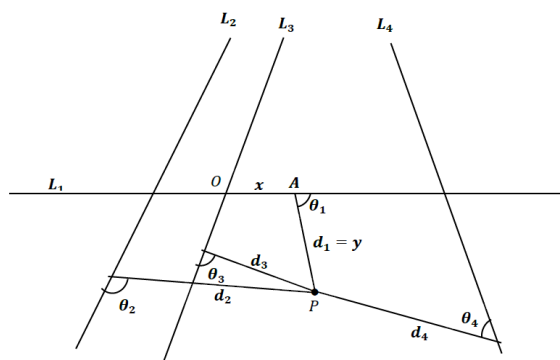


Figura 1.6: del problema de Pappus.

Llama la atención cómo el enfoque de Fermat hacia la geometría analítica todavía es bastante cercano a los tratamientos elementales de esta cuestión considerados hoy en día.

Así, los trabajos de Descartes y Fermat tomaron los dos aspectos complementarios de la geometría analítica, uno estudiando ecuaciones a través del significado de las curvas y el otro estudiando curvas definidas por ecuaciones.

Se ha dicho que el intento de Descartes por resolver el problema general de Pappus fue lo que lo llevó a inventar el método de la geometría analítica. Lo esencial en este método, cuando se aplica al plano, es el establecimiento de una correspondencia entre los pares ordenados de números reales y los puntos del plano, con lo cual se hace posible una correspondencia entre las curvas del plano y las ecuaciones en dos variables, de modo que a cada curva del plano le corresponde una ecuación definida, de la forma $F(x, y) = 0$, y a cada ecuación algebraica en dos variables le corresponde una curva o un conjunto de puntos del plano. Así se establece también una correspondencia entre las propiedades analíticas y algebraicas de la ecuación $F(x, y) = 0$, por un lado, y las propiedades geométricas de la curva conocida, por otro lado. Pero es bueno recalcar que, a los ojos de Descartes, el álgebra no era una en sí misma, sino un instrumento para resolver los problemas de la geometría; convencido de ello, sostuvo la idea de la reducibilidad última de todos los problemas geométricos a un tipo singular de problema, a saber, el de encontrar las raíces de una ecuación.

Descartes, en su libro II de “La Geometrie” al tratar con las líneas curvas, se extrañaba de la denominación a unas curvas como “curvas geométricas”

y “curvas mecánicas”. Las primeras eran aceptadas en la geometría, pero las segundas fueron excluidas de ella. Descartes opinaba que se podría entender por geométrico la que era exacto y por mecánico lo que no lo era. Que no se debería de excluir a curvas complejas generadas por movimiento o composición de varios. Esto supuso un avance en la concepción de “curva” de los matemáticos Griegos.

Algunas de los aportes de Descartes a la noción de “curva” fueron: La clasificación de las curvas por géneros, la clasificación de los problemas geométricos por clases, de la siguiente manera:

- Clase 1: Aquellos que conducen a ecuaciones cuadráticas y pueden ser contruidos por medio de rectas, circunferencias, parábolas, hipérbolas o elipses.
- Clase 2: Aquellos que conducen a ecuaciones cúbicas y cuárticas, cuyas raíces se pueden construir por medio de la conchoide.
- Clase 3: Aquellos que conducen a ecuaciones de grados cinco o seis, que pueden construirse introduciendo una curva cúbica auxiliar, tal como el tridente o la parábola cubica.

Realizó una distinción entre las curvas de dos tipos:

- Curvas geométricas: son las curvas que están descritas de una manera exacta, es decir, mediante una ecuación en términos de Descartes, las cuales son ecuaciones polinómicas. Estas curvas son: las rectas, las circunferencias, las cónicas, el tridente, etc.
- Curvas mecánicas: son curvas que se tienen que imaginar cómo descritas por dos movimientos separados e independientes, cuya relación no admite una determinación exacta, esto es, una ecuación polinómica. Estas curvas son: la cuadratriz, la espiral, entre otras.

Así para Descartes las curvas pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de líneas, cada uno siendo determinado por el anterior, lo que implica que, las curvas se consideran como variaciones. Una curva es el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera continua y que representa la solución de una ecuación polinómica que ha sido obtenida mediante definiciones o propiedades de las figuras geométricas, es decir, para Descartes una curva es el lugar geométrico de un punto que es solución de una ecuación polinómica.

1.5. La noción dinámica de “curva”

Los matemáticos del siglo XVII tenían la idea de que una coordenada tenía que ser un número positivo: así era imposible, por ejemplo, elegir el centro de un círculo como origen para expresar la ecuación del círculo completo. Además, manejar los cambios de coordenadas siglos antes del descubrimiento de matrices y determinantes ciertamente no fue un trabajo fácil.

Durante el siglo XVIII Euler tuvo la idea de expresar las diversas coordenadas de los puntos de una curva en términos de un solo parámetro: estas llamadas ecuaciones paramétricas, las cuales constituyen un ingrediente básico de la geometría diferencial moderna. También durante el mismo siglo se consideraron otros sistemas de coordenadas no cartesianos: polares, bipolares, cilíndricos, esféricos, etc. Aunque estos no tienen el carácter “universal” de las coordenadas cartesianas.

La introducción de coordenadas en el plano por Fermat y Descartes (generalmente se le atribuye la técnica de coordenadas cartesianas), hizo uso de un eje formando un cierto ángulo distinto de cero; midiendo las distancias en las direcciones de estos ejes se obtuvieron las coordenadas. Por lo tanto, se aceptó de inmediato que el plano estaba equipado con dos nociones de distancia y ángulo, que se usaron intensivamente. Tomó otro siglo antes de que los matemáticos comenzaran a reconocer y usar sistemáticamente este nuevo enfoque algebraico a la geometría en términos de coordenadas.

Un avance importante fue reconocer coordenadas negativas; es decir una coordenada no es una distancia positiva y por lo tanto pueden ser números negativos, es una distancia equipada con un signo, que es, después de todo, un número arbitrario. El matemático británico Wallis (1616-1703) fue uno de los primeros en usar coordenadas negativas. Pero es esencialmente el trabajo del famoso matemático y físico británico Isaac Newton (1642-1734), en particular un trabajo sobre las curvas de mayor grado publicado en 1676, que popularizó el uso de coordenadas negativas.

En la obra de Euler “Introductio in analysin infinitorum” de 1748, Euler menciona en el artículo 8 que, las curvas se pueden describir mecánicamente por el movimiento continuo de un punto, pero que es preferible considerarla como resultado de una función. Luego en el artículo 12 menciona que la “naturaleza de la línea curva, cuando es continua dependerá de la función o de la manera como las constantes y las cantidades x, y se combinan entre ellas”.

En el capítulo II de “Introductio in analysin infinitorum”, Euler estudia la

manera en que afecta a la ecuación de la curva los cambios de coordenadas, a pesar de que curvas diferentes dan ecuaciones diferentes, en el caso de una línea curva se podrían encontrar innumerables ecuaciones, por lo que no siempre se podía concluir las curvas que representan. Euler da un método para el cual dada una ecuación de una curva poder encontrar respecto de cualquier otro eje y otro origen de abscisas, una ecuación entre las coordenadas, que expresa la naturaleza de la curva.

Euler resuelve el problema de probar si dos ecuaciones representan la misma curva o pertenecen a curvas diferentes, el cual mediante un cambio de coordenadas resuelve de manera más o menos extensa la cuestión.

Ejemplo 1.5.1. *Estudiar si las ecuaciones siguientes representan la misma curva. $yy - ax = 0$ y $16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0$*

Euler busca un cambio de coordenadas: $x = mu + nt - f$, $y = nu - mt - g$, que aplicado a la primera ecuación la transforme en la segunda, y tras algunos cálculos obtiene: $n = \frac{4}{5}$, $m = \frac{3}{5}$, $g = a$, $f = -a$. Por consiguiente: “las dos ecuaciones propuestas representan la misma curva”. Pero está claro que esta operación sólo se ensaya cuando las ecuaciones son del mismo grado porque en otro caso representan necesariamente curvas diferentes.

Así la idea de “separar las variables” de una ecuación se debe a Leonhard Euler, que en lugar de considerar una ecuación con dos variables x, y , escribe estas dos variables por separado en términos de algún parámetro.

En términos modernos, queremos trazar el camino de una partícula que se mueve en un plano. Esta ruta parece una curva, pero no podemos trazarla como si trazáramos cualquier otro tipo de curva en el plano cartesiano. La razón de esto es el hecho de que no podemos expresar y directamente en términos de x o x en términos de y . Para evitar este problema, podemos describir el camino de la partícula con un par de ecuaciones, $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

La Figura 1.7 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy . La trayectoria no se puede describir como la gráfica de una función de la variable x . Sin embargo, algunas veces la trayectoria se describe con un par de ecuaciones. De hecho si x y y se dan como funciones continuas $x = f(t)$, $y = g(t)$ sobre un intervalo de valores t entonces el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una curva en el plano de coordenadas. Las ecuaciones son ecuaciones paramétricas para la curva. La variable t es un parámetro para la curva y su dominio I es el intervalo de parámetro I . Si I es un intervalo cerrado, $a \leq t \leq b$, el punto

$(f(a), g(a))$ es el punto inicial de la curva, y $(f(b), g(b))$ es el punto terminal de la curva.

Ecuaciones como estas describen curvas más generales que las descritas por una sola función y , además de la gráfica de la trayectoria recorrida, indican la posición $(x, y) = (f(t), g(t))$ de la partícula en cualquier tiempo t .

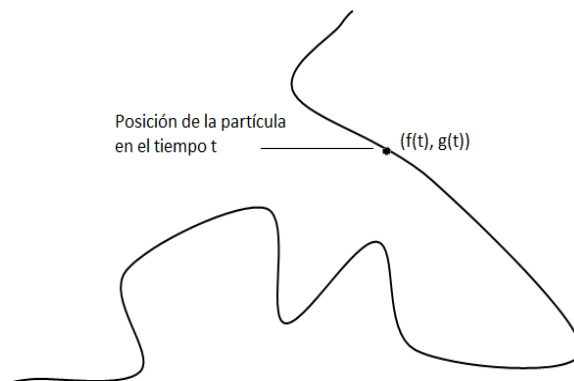


Figura 1.7: trayectoria de una partícula

Definición 1.5.2. Una trayectoria es una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 1.5.3. Si x y y están expresadas como funciones

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1.2)$$

en un intervalo I de valores t , entonces, el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una curva parametrizada. Las ecuaciones son ecuaciones paramétricas de la curva.

Definición 1.5.4. Una curva es la imagen de una trayectoria. Es decir, $G \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una trayectoria $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $G = g([a, b])$.

Los puntos $g(a)$ y $g(b)$ se llaman extremos de la trayectoria, $g(a)$ es el extremo inicial y $g(b)$ el extremo final. Si indicamos cuál es la curva G , cuáles son su extremo inicial y final. Indicamos la dirección en que fue recorrida G . A la trayectoria g se le suele llamar parametrización de la curva G .

Ejemplo 1.5.5. La ecuación de la circunferencia, es $x^2 + y^2 = r^2$, que puede ser descrita por $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$. Véase Figura 1.8.

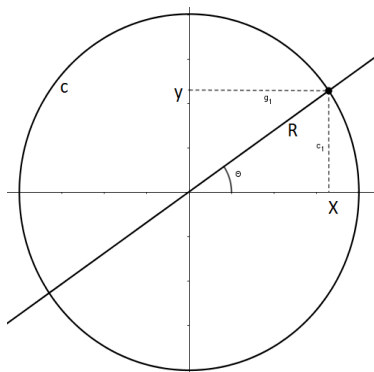


Figura 1.8: circunferencia.

Antes de presentar un sistema de ecuaciones paramétricas, es importante identificar claramente el parámetro. Si θ es un parámetro variable mientras $R > 0$ es fijo, los pares (x, y) para todos los valores posibles de θ describen una circunferencia de radio R . Sin embargo, si θ es constante y R es el parámetro variable con el mismo sistema de ecuaciones se describen todos los puntos (x, y) de una línea que forman un ángulo θ con el eje horizontal. La eliminación del parámetro R entre las dos ecuaciones es ahora directa:

$$x \operatorname{sen}(\theta) = y \operatorname{cos}(\theta)$$

Obtenemos así una descripción dinámica del círculo: cuando θ corre de $-\infty$ a $+\infty$, repetidamente viajamos alrededor de la circunferencia. En este punto estaríamos tentados a definir una curva plana “dinámicamente” como una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t = f(t)$.

Nota 1. Otra técnica útil fue aclarar las reglas por las cuales las coordenadas se transforman al pasar a otro sistema de coordenadas. Como hemos visto, Fermat había usado métodos de este tipo para estudiar las cónicas empíricamente. Pero nuevamente fue Euler quien desarrolló la teoría general de “cambios coordenados”. En particular, observó la forma muy especial que adoptan estas fórmulas en el caso de los sistemas de coordenadas rectangulares: “Por un sistema rectangular de coordenadas en el plano o en el espacio se entiende un sistema cartesiano de coordenadas en el que dos ejes siempre son perpendiculares”.

Una curva se vuelve una “deformación de la línea real en el plano”, pues a todos los puntos en $\mathbb{R}$ nos lo envía a un punto en el plano $\mathbb{R}^2$; podemos

suponer que tal deformación debería ser continua. Pues en nuestra cabeza no podemos imaginar llamar “curvas” a funciones de tipo

$$f(t) = \begin{cases} (t, 1) & \text{si } t \text{ es racional} \\ (t, 0) & \text{si } t \text{ es irracional} \end{cases}$$

Observemos que si queremos ver una curva como una deformación continua de la línea real, entonces, por continuidad, cada curva tendrá una sola “rama”. Así, fijándonos en la sección anterior, la hipérbola no es una deformación continua de la línea real, sino que cada una de sus dos ramas es. En un primer enfoque “dinámico”, veamos una curva como una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t = f(t)$.

La curva se considera como la trayectoria de un punto (Figura 1.9), la trayectoria expresada en términos de un parámetro t que se ejecuta a lo largo de la recta real. Como si un objeto se moviera en un plano y, a medida que transcurre el tiempo, se describe un camino. Así este parámetro t podría ser considerado el “tiempo” calculado desde un origen de tiempo dado (instante t), hasta donde el punto ha alcanzado la posición $f(t)$ en el plano. Mientras t se podría considerar como “la distancia recorrida en la curva” desde un origen fijo de la curva. Después de haber recorrido una distancia t , el punto ha alcanzado la posición $f(t)$. Cada valor de t determina un punto (x, y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de números reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.

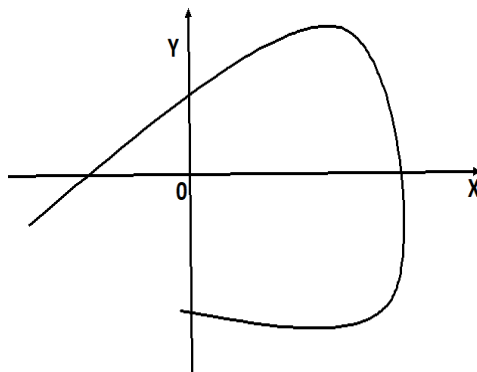


Figura 1.9: trayectoria de un punto.

En cálculo, uno introduce la noción de continuidad para describir las funciones sin “saltos”. En términos más generales, necesitamos definir la noción

de un límite de una función vectorial a medida que el parámetro t se aproxima a un valor fijo.

Definición 1.5.6. Sea $\vec{x}$ una función vectorial para un subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Decimos que el límite de $\vec{x}(t)$ cuando t se acerca a a es un vector $\vec{w}$, y escribimos $\lim_{t \rightarrow a} \vec{x}(t) = \vec{w}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $0 < |t - a| < \delta$ implica $\|\vec{x}(t) - \vec{w}\| < \varepsilon$.

Definición 1.5.7. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, sea $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial, y $a \in I$. Decimos que $\vec{x}(t)$ es continua para a si el límite cuando t se acerca a $\vec{x}(t)$ existe y $\lim_{t \rightarrow a} \vec{x}(t) = \vec{x}(a)$.

Proposición 1.5.8. Sea $\vec{x}$ una función vectorial para un subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^n$ que se define sobre un intervalo que contiene a a , aunque tal vez no en sí mismo. Supongamos que tenemos $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ dondequiera que $\vec{x}$ esté definido. Si $\vec{w} = (w_1, w_2)$, entonces $\lim_{t \rightarrow a} \vec{x}(t) = \vec{w}$ si y sólo si $\lim_{t \rightarrow a} x(t) = w_1$ y $\lim_{t \rightarrow a} y(t) = w_2$.

Corolario 1.5.9. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, sea $a \in I$, consideremos una función vectorial $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$. Entonces $\vec{x}(t)$ es continua para $t = a$ si y sólo si $x(t)$ y $y(t)$ son continuas para $t = a$.

De la Definición 1.5.7 y el Corolario 1.5.9, nos motiva a la siguiente definición:

Definición 1.5.10. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una curva parametrizada (o curva paramétrica) en el plano es una función continua $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si escribimos $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$, entonces las funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ son llamadas funciones coordenadas o ecuaciones paramétricas de la curva parametrizada. Llamamos lugar geométrico de $\vec{x}(t)$ la imagen de $\vec{x}(t)$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Dado que varias funciones en términos de varios parámetros pueden describir la misma curva, cada una de estas funciones debiera llamarse “representación paramétrica” de una curva. Sin embargo aún no hemos resuelto el problema de los ejemplos de la sección anterior que sabemos que no son curvas. O tenemos casos en que una misma curva puede admitir varias “representaciones paramétricas”.

Ejemplo 1.5.11. Si C es la semirrecta abierta de $\mathbb{R}^2$ que determina el eje positivo de abscisas, $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, entonces podemos considerar las siguientes “representaciones paramétricas” de C :

$$\begin{aligned}
f &: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto f(t) = (t, 0); \\
\varphi &: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \varphi(t) = (t^3 + 1, 0); \\
\phi &: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto f(t) = \begin{cases} (1-t, 0) & \text{si } 0 < t < 1 \\ (t, 0) & \text{si } 1 \leq t \end{cases}
\end{aligned}$$

Notamos que los primeras dos “representaciones paramétricas” son continuas, pero la tercera no lo es. Entonces, sigamos en nuestro camino a reconocer lo que se necesita para ser realmente una “curva”.

El primero que intentó dar una definición rigurosa de curva fue Camille Jordan en 1887, llamó curva a la trayectoria de un punto en movimiento, dicho punto debía moverse de manera continua y sin saltos. Definió una curva como el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ donde f y g son funciones continuas en algún intervalo cerrado que tomamos sin pérdida de generalidad $[0, 1]$. Esto porque el movimiento ocurre en un intervalo finito de tiempo y para la posición de un punto en movimiento necesitamos especificar las coordenadas en cada momento. Es útil considerar t como el tiempo y la curva como la ruta de una partícula que comienza en $(f(0), g(0))$ en $t = 0$ y termina en $(f(1), g(1))$ en $t = 1$. Como solo se necesita un parámetro real para definir una curva, parece razonable que esto obligue a la curva a ser “unidimensional”.

En otras palabras, una curva (con puntos extremos) es una función continua cuyo dominio es el intervalo unitario $[0, 1]$.

Ejemplo 1.5.12. *Tomemos una circunferencia de radio 1, con longitud 2π . El punto se debe mover con velocidad 2π para recorrer toda la circunferencia en una unidad de tiempo. Así, en un tiempo t el punto recorrerá el arco de longitud $2\pi t$.*

Las coordenadas en el instante t están dadas por las ecuaciones paramétricas: $x = \cos(2\pi t)$ y $y = \sin(2\pi t)$.

Esta definición tuvo gran aceptación en su época, todas las curvas que fueron estudiadas por los matemáticos hasta entonces eran “curvas” en el sentido de Jordan. Sin embargo, en 1890, G. Peano en su artículo “Sur une courbe qui remplit toute une aire plane” define una curva de relleno del espacio, es decir, una curva que pasa a través de cada punto de un cuadrado al menos una vez.

Peano define la curva que hoy en día lleva su nombre como contraejemplo a la hipótesis de que una curva puede encerrarse en un conjunto tan pequeño

como se quiera. Previamente, en 1878, G. Cantor demostró que había una correspondencia de uno a uno entre el intervalo de la unidad y el cuadrado de la unidad. En 1879, E. Netto demostró que tal mapeo no podía ser continuo. Por lo tanto, la curva de Peano debe tener puntos múltiples, es decir, puntos que son imágenes de dos o más valores distintos de t . En 1891 D. Hilbert descubrió otra curva de llenado del espacio. Mientras que la curva de Peano se definía puramente analíticamente, el enfoque de Hilbert era geométrico.

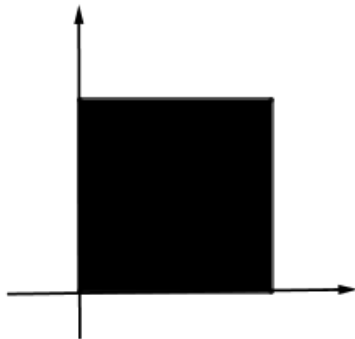


Figura 1.10:

Veamos el siguiente ejemplo de [7]:

Ejemplo 1.5.13. *Existen funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen cubre un cuadrado completo (Figura 1.10).*

Demostración:

Bosquejemos la construcción de un ejemplo propuesto por el matemático italiano Peano en 1890. Él define una secuencia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$ de funciones continuas, que convergen uniformemente a funciones sobreyectivas continuas.

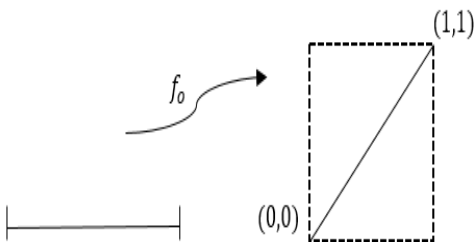
$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

Desde luego

$$f(0) = (0, 0), \quad f(1) = (1, 1).$$

Consideramos un primer camino (Figura 1.11) f_0 en el cuadrado unidad que consiste en recorrer la diagonal orientada desde $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Ahora dividimos el cuadrado unidad en nueve partes iguales, llamados de primera aproximación y tomamos el camino f_1 entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ definido

Figura 1.11: $f_1(t)$

al dividir el intervalo unidad en ocho intervalos iguales y seguir en ellos de acuerdo con la Figura 1.12;

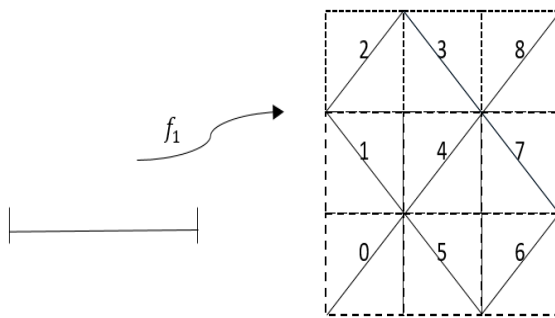


Figura 1.12:

es suficiente para extender la definición por

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t \leq 0 \\ (t, 1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

para obtener el contraejemplo esperado como en la Figura 1.10.

La sucesión comienza con la función de identidad: $f_0(t) = t$. El gráfico de la función $f_1(t)$ está dado por la Figura 1.11. Simplemente siga el camino de

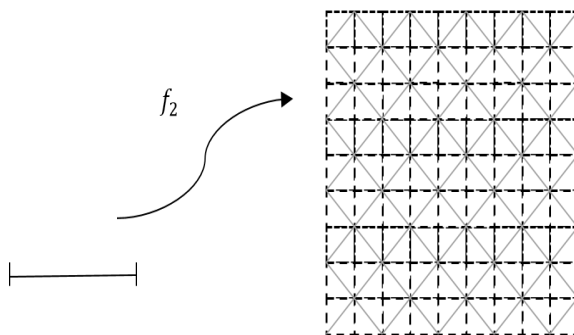


Figura 1.13:

acuerdo con la numeración de los subcuadrados 0 a 8. Para obtener $f_2(t)$, reemplazamos cada diagonal de un cuadrado pequeño en el gráfico de f_1 por un zigzag análogo de nueve segmentos (Figura 1.13) más pequeños, comenzando y terminando en los mismos puntos que la diagonal pequeña. Repetimos el proceso para pasar de f_2 a f_3 , y así sucesivamente. Reiterando el proceso, se obtiene una sucesión de funciones continuas $f_n : I \rightarrow I \times I$, $n \geq 0$ tales que f_n transforma el intervalo I en una línea poligonal, que contiene las diagonales de cada uno de los 9^n cuadrados de n -ésima aproximación. Además $f_n(I) \subseteq f_{n+1}(I)$ para toda $n \geq 0$; cada función $f_n(t)$ es continua y la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, ya que en cada nivel, las demás variaciones son como máximo la longitud de la diagonal del cuadrado más pequeño ya construido. Es entonces un resultado estándar en el análisis que la función límite $f(t)$ es aún continua.

Para demostrar que f es sobreyectiva, expresamos t en base 9. Por construcción notamos que, escribiendo $a, b, c, d, \dots$ para los dígitos sucesivos de la expansión de t en la base 9, $t = 0,abcde \dots$ entonces

- I) $f_1(t)$ está en el cuadrado numerado a ;
- II) $f_2(t)$ está en el subcuadrado del cuadrado anterior numerado b ;
- III) $f_3(t)$ está en el sub-sub-cuadrado numerado c ;
- IV) y así sucesivamente...

Cada sucesión de cuadrado- subcuadrado -sub-sub-cuadrado- $\dots$ determina un punto único P del cuadrado, y cada punto P del cuadrado se puede

determinar de este modo. Esta sucesión no es única ya que (a excepción de $(0, 0)$ y $(1, 1)$) cada vértice de un cuadrado pequeño, en cualquier nivel, pertenece a varios cuadrados. Sin embargo, eligiendo una de las posibles sucesiones de cuadrado-subcuadrado-sub-sub-cuadrado- $\dots$ que determina el punto P , la lista de los números 0 a 8 adjunta a cada término de esta sucesión es entonces la base 9 expansión de un número $t \in [0, 1]$ tal que $f(t) = P$. Por lo tanto f es sobreyectiva. Pero como hemos observado, tal número t generalmente no es único, por lo tanto, f no es inyectiva.

Ahora veamos que convergen uniformemente.

Por construcción, para toda $t \in [0, 1]$, la distancia euclídea $d(f_n(t), f_{n+1}(t))$ no supera el diámetro del cuadrado de n -ésima aproximación donde están ambos puntos. Así $d(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq \frac{\sqrt{3}}{3^n}$, y por consiguiente si $m > n$

$$d(f_n(t), f_m(t)) \leq \frac{\sqrt{3}}{3^n} + \frac{\sqrt{3}}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{3^m} < \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}$$

Sean $f_n^1(t)$ y $f_n^2(t)$ las proyecciones de $f_n(t)$, tenemos para $j = 1, 2$

$$|f_n^j(t) - f_m^j(t)| \leq d(f_n(t), f_m(t)) < \frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}$$

Así, $f_{ni \geq 1}^j$ es una sucesión de Cauchy en la recta real, y es convergente a cierto punto $x_t^j \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

Observación 1.5.14. *Está función no da lugar a una transformación uno a uno del segmento en el cuadrado, pues pasa por algunos puntos del cuadrado varias veces.*

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto f(t)$ una representación paramétrica de una curva, donde esta es la trayectoria de un punto que se mueve en el plano, entonces cuando t varía, $f(t)$ también debería variar. Para evitar los ejemplos donde sabemos que no son “curvas”, vamos a imponer que f es inyectiva. Así la función constante $f(t) = (a, b)$ y el ejemplo 1.5.13 quedan excluidos de esta aproximación a lo que es “curva” en el sentido que buscamos.

Vamos a dar la siguiente definición:

Definición 1.5.15. *Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ es localmente inyectiva cuando cada punto $x \in U$ posee una vecindad en la que f es inyectiva.*

Veamos la siguiente definición que trata sobre el concepto de inyectividad, cuando se quiere que una “curva” sea llamada como tal, incluso si la trayectoria pasa dos veces por el mismo punto.

Definición 1.5.16. Una representación paramétrica de una curva plana es una función continua

$$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) \quad a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

que es localmente inyectiva, es decir, inyectiva en una vecindad de cada punto.

En esta definición, hemos tomado la noción de un intervalo abierto en su sentido más general. Esto nos permite ver la línea real completa, así como las medias líneas abiertas, como intervalos abiertos. La inyectividad local significa que para cada $t_0 \in]a, b[$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ contenido en $]a, b[$ y $f :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva. Permitir que a y b tomen “valores infinitos” es una forma rápida de decir que permitimos que f se defina en $\mathbb{R}$, en una semi-recta o en un intervalo abierto.

Ejemplo 1.5.17. El ejemplo 1.5.13 no es localmente inyectiva.

Demostración:

Tómese la diagonal de un cuadrado pequeño en el nivel n , la cual es la imagen inyectiva bajo f_n de un pequeño subsegmento de $[0, 1]$. Digamos que este es el subsegmento de origen u y longitud v . Por construcción del zigzag, observamos que todos los f_i con $i > n$ son tales que

$$f_i \left(u + \frac{1}{9}v \right) = f_i \left(u + \frac{5}{9} \right), \quad f_i \left(u + \frac{4}{9}v \right) = f_i \left(u + \frac{5}{9} \right).$$

En el límite tenemos

$$f \left(u + \frac{1}{9}v \right) = f \left(u + \frac{5}{9} \right), \quad f \left(u + \frac{4}{9}v \right) = f \left(u + \frac{8}{9} \right)$$

Lo que demuestra que siempre se pueden encontrar puntos en todo el intervalo $[0, 1]$, tan cerca como uno quiera, los cuales están mapeados por f en el mismo punto. Por lo tanto, f no es localmente inyectiva. $\triangleleft$

Concluimos con este ejemplo que no son lo que queremos llamar “curva”, pues no satisfacen la definición 1.5.16. Otra vez estamos a la deriva, no sabemos a ciencia cierta si esta definición es buena o no, si hay otras que también lo sean.

Por ejemplo, no se puede considerar a la hipérbola una “curva”, ya que tiene dos ramas. Para superar este problema, en la definición 1.5.16, podríamos permitir como dominio la unión de intervalos abierto. Excluir uniones

infinitas y optar por uniones finitas de intervalos. Pero no es precisamente lo que se quiere, que la unión de cierto número de líneas rectas sea considerada una “curva”. Incluso podríamos decidir permitir intervalos cerrados como dominios los cuales no podrían reducirse a puntos individuales.

En la definición 1.5.16, se podría querer imponer que f sea derivable, incluso de clase C^∞ , o alguna otra clase. Pero por el momento no nos complicaremos con estos conceptos hasta que sea el momento en necesitarlos en algunos otros resultados. Así, tratar de definir una “curva” es cuestión de elección, pero hay que ser perpicaz en el momento de elegir.

Capítulo 2

Definiendo una curva

En este capítulo trataremos algunos conceptos sobre las distintas trayectorias que puede tomar una curva, la representación paramétrica regular de una curva, la ecuación cartesiana de una curva plana. Por otro lado, abordaremos ciertas ideas del capítulo y sección anterior para trabajar con singularidades, y así hacer notar que en otras áreas de la matemática existen nociones muy similares en cuanto a definiciones.

2.1. Coordenadas cartesianas y coordenadas paramétricas

En 1.2 hemos intentado determinar una curva a través de una ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$, donde una curva es el lugar geométrico de los puntos en los que el polinomio se anula. Con esto llegamos que podía ser vista como “un subconjunto del plano” de manera estática.

Por otro lado, en la sección 1.5 la definición de una curva se trató como “una trayectoria en el plano” mediante representaciones paramétricas. Donde podemos elegir un par de funciones generadoras $x(t)$, $y(t)$ que producen una secuencia ordenada de puntos de la curva cuando se evalúan en valores sucesivos de una “variable auxiliar” continua o parámetro t . La forma paramétrica nos ofrece una caracterización más “dinámica” de curvas, pues incorpora la sugerencia de movimiento a lo largo de la curva, incurrida por un aumento constante del parámetro t .

$$f :]a, b[\rightarrow, \quad t \mapsto (f_1(t), f_2(t)).$$

Sin embargo, una curva considerada como un subconjunto del plano, se puede obtener a través de trayectorias diferentes.

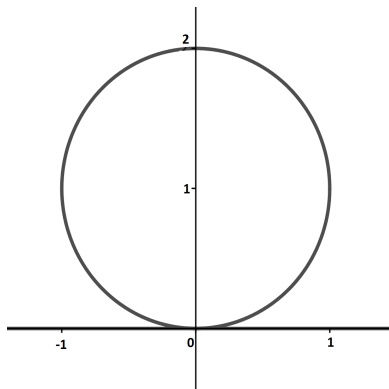


Figura 2.1: $y(x^2 + (y - 1)^2 - 1) = 0$

Ejemplo 2.1.1. La Figura 2.1 presenta una curva que comprende el eje x y una circunferencia de radio 1 con centro $(0, 1)$. Esta “curva” admite la ecuación $y(x^2 + (y - 1)^2 - 1) = 0$.

Se puede ver como la trayectoria “suave” de un punto alrededor de la circunferencia que viene de $(-\infty, 0)$; después girando en sentido contrario a las agujas del reloj, se recorre la circunferencia y, finalmente el intervalo $(0, +\infty)$. O bien, girar en el sentido de las agujas del reloj, la cual es otra trayectoria y llegar al mismo punto.

Entonces, ¿cómo podemos dar un salto de una descripción “estática” a una descripción “dinámica”, y viceversa?

Dado el sistema de ecuaciones paramétricas

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t)$$

Necesitamos eliminar el parámetro t entre las dos ecuaciones que terminan con una ecuación cartesiana. Pero no siempre es fácil de hacer cuando f_1 y f_2 son funciones complicadas. Para esto, recordemos un resultado de análisis que nos servirá para involucrarnos en este aspecto sobre las representaciones paramétricas.

El concepto de “localmente invertible” puede ser difícil. Primero, debe darse cuenta de que una propiedad que es “local” en un conjunto simplemente significa que cada punto de ese conjunto está contenido en una vecindad

en el que se encuentra la propiedad. A diferencia de “puntual”, que solo debe mantenerse en cada punto: la continuidad es un ejemplo de propiedad puntual. Algunos ejemplos pueden ayudar a explicar por qué la invertibilidad local es un concepto tan importante.

Ejemplo 2.1.2. Considere la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

r y θ como coordenadas polares en el plano cartesiano r, θ .

Las líneas verticales del sistema $r - \theta$, o sea, $r = k$ se asignan a círculos centrados en el origen de radio k ($\theta = \theta_0$); las líneas horizontales se asignan a los rayos a través del origen. Tenga en cuenta que f no es 1-1: aumentando la coordenada θ por 2π , nos lleva al mismo lugar. Además, todo el eje $r = 0$ se asigna al origen.

Primero encontremos el Jacobiano

$$Df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

así el Jacobiano es

$$\Delta_f = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

asumiendo que $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Lo que esto dice es que en cualquier punto fuera del eje θ , hay una inversa local, cuyo Jacobiano será $\frac{1}{r}$. Veamos el punto $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Al cual la aplicación le asigna el punto $x = 1$, $y = 1$. La matriz de la derivada total en $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema 2.1.3.1, hay una inversa local, cuyo jacobiano en el punto $x = 1$, $y = 1$ debe ser $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De hecho, sabemos que la inversa explícita es: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$. La matriz de la derivada total de la inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Para $x = 1$, $y = 1$, esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tenga en cuenta que $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{9\pi}{4}$ se asigna a $x = 1$, $y = 1$ también. También hay una inversa local de esta aplicación: es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$. Otro punto asignado a $x = 1$, $y = 1$ es $r = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$. La inversa local es $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$. Por supuesto, en general no se puede resolver explícitamente la inversa.

Ejemplo 2.1.3. *Considere el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} u &= x^2 - xy \\ v &= y - x \end{aligned}$$

Mostrar que cerca de (x_0, y_0) (donde $x_0 \neq y_0$), (x, y) puede escribirse como función diferenciable de (u, v) .

Solución: Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (u, v) = (x^2 - xy, y - x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

Claramente, todas estas derivadas parciales existen y son continuas en todas partes. Entonces la función es C^1 en todas partes (en particular cerca de (x_0, y_0)).

Ahora verifiquemos que $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$.

$$\det F'(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} = \det \begin{vmatrix} 2x_0 - y_0 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - y_0 \neq 0.$$

Por lo tanto por el Teorema 2.1.3.1, una C^1 inversa $F^{-1}(u, v) = (x, y)$ existe y (x, y) puede expresarse como función diferenciable de (u, v) .

Teorema 2.1.3.1 (Teorema de la inversa local). *Considere la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k ($k \geq 1$). Si la matriz es regular en $(a_1, \dots, a_n)$, entonces la función g es invertible en una vecindad del punto $(a_1, \dots, a_n)$ y su inversa todavía es de clase C^k .*

Por supuesto, cuando $n = 1$, la condición en el Teorema 2.1.3.1 se reduce a $g'(a) \neq 0$. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.1.4. Una representación paramétrica de una curva $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ es regular cuando es de clase C^1 y $f'(t) \neq (0, 0)$ para cada $t \in]a, b[$.

Tenga en cuenta que una función $y = h(x)$ siempre se puede considerar como una curva a través de la representación paramétrica $f(t) = (t, h(t))$.

Proposición 2.1.5. Sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ una representación paramétrica regular de una curva. Para cada t_0 en $]a, b[$:

- I) existe una vecindad V de t_0 en el que la curva admite una ecuación cartesiana de la forma $F(x, y) = 0$;
- II) la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en la vecindad V ;
- III) en cada punto de la curva en la vecindad V , al menos una de las derivadas parciales de F es distinta de cero.

Demostración:

Supongamos, por ejemplo, que $f'_1(t_0) = 0$. Por el Teorema 2.1.3.1 podemos escribir $t = f^{-1}(x)$ en una vecindad V de t_0 . Esto da $y = f_2(f^{-1}(x))$ y es suficiente para definir

$$F(x, y) = f_2(f^{-1}(x)) - y.$$

Note en particular que $\frac{\partial F}{\partial y} = -1 \neq 0$. $\triangleleft$

El ejemplo 1.5.11 de la sección 1.5 las dos primeras parametrizaciones son regulares, mientras que la tercera parametrización no es ni de clase C^0 . Aunque todas las parametrizaciones de clase C^1 del 1.5.11 son aplicaciones inyectivas, no es cierto que toda parametrización de clase C^1 sea inyectiva (ni aunque sea regular). Por ejemplo, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $t \mapsto (cost, sent)$ es una representación paramétrica regular de la circunferencia de radio 1 de $\mathbb{R}^2$ centrada en el origen. Cuando el parámetro t recorre $\mathbb{R}$, el punto $\phi(t)$ se mueve sobre dicha circunferencia en el sentido contrario al de las agujas del reloj, de modo que cuando t avanza un intervalo de longitud 2π , $\phi(t)$ completa una vuelta: para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple $\phi(t) = \phi(t + 2k\pi)$.

Temporalmente daremos una definición que surge a raíz de la 2.1.5.

Definición 2.1.6. Una ecuación cartesiana de una curva plana se refiere a una ecuación $F(x, y) = 0$ que satisface los siguientes requisitos:

- la ecuación admite soluciones;
- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 ;
- en cada punto (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$, al menos una de las derivadas parciales de F es distinta de cero.

La curva cartesiana correspondiente es el conjunto de esos puntos (x, y) que son soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$.

Definición 2.1.7. Considere una ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$ de una curva plana (en el plano cartesiano). Definimos como:

- Un punto de la curva es múltiple cuando ambas derivadas parciales de F se anulan en este punto.
- Un punto de la curva plana es simple cuando al menos una derivada parcial de F no se anula en este punto.

Ejemplo 2.1.8. La curva con la ecuación cartesiana $y^2(1 - x) = x^2(1 + x)$ el llamado “estrofoide derecho” (Fig. 2.2) admite el origen como un punto múltiple.

Demostración:

Escribamos la ecuación cartesiana como, $F(x, y) = y^2(1 - x) - x^2(1 + x)$. Sus parciales correspondientes son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y^2 - x(2 + 3x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y(1 - x).$$

Ambas parciales se anulan en $(0, 0)$, lo cual nos da un punto múltiple. De hecho es el único punto múltiple, la parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ desaparece cuando $y = 0$ o $x = 1$.

- Si $y = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ se anula para $x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$, pero este último punto no es un punto de la curva.
- Si $x = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ es estrictamente negativo, cualquiera que sea el valor de y .

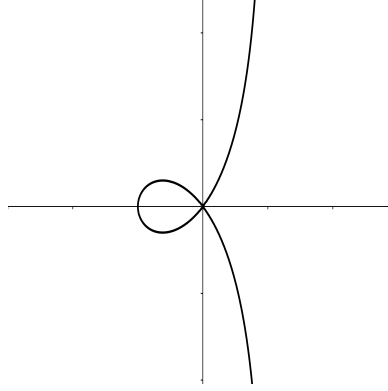


Figura 2.2: estrofoide derecho.

Por lo tanto, $F(x, y) = 0$ es la ecuación cartesiana de una curva plana. $\triangleleft$

Debe quedar claro que “ser un punto múltiple” es una propiedad de la ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$, no de la curva plana (en el plano cartesiano) correspondiente. En particular, para una ecuación cartesiana arbitraria $F(x, y) = 0$, ser un punto múltiple ciertamente no es equivalente a la idea intuitiva de “una curva que pasa por este punto varias veces”.

Ahora nos preguntamos, ¿cómo podemos pasar de una ecuación cartesiana a una representación paramétrica? Recordemos un resultado de análisis.

Teorema 2.1.8.1 (Teorema de la Función Implícita). *Considere una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k ($k \geq 1$). Si $F(a_0, \dots, a_n) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ entonces existen:*

- una vecindad V de $(a_0, \dots, a_{n-1})$ y una función $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que
- $\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_n$;
- $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in V \quad F(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$

Además, la vecindad V se puede elegir de tal manera que una función φ como en el enunciado sea necesariamente única. La función implícita inferida de F es, por lo tanto, $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Proposición 2.1.9. *Considere una ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$ de una curva plana (como en la definición 2.1.6) y un punto (x_0, y_0) que satisface esta ecuación. En una vecindad de (x_0, y_0) , existe una representación paramétrica regular de una curva $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que cada punto $(x, y) = (f_1(t), f_2(t))$ satisface la ecuación $F(x, y) = 0$.*

Demostración:

Supongamos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ es distinta de 0. Con la notación del teorema basta con definir $f(x) = (x, \varphi(x))$. El parámetro es $t = x$ y $f'(x) = (1, \varphi'(x))$ y es distinto de $(0, 0)$. Considerando su primer componente, notamos que f es inyectiva. Pues si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(1, \varphi(x_1)) = (1, \varphi(x_2))$, implica que $x_1 = x_2$. $\triangleleft$

De las proposiciones 2.1.5 y 2.1.9 podemos pensar que: En buenos casos, uno puede cambiar localmente de un sistema de ecuaciones paramétricas a una ecuación cartesiana, y viceversa. Localmente es sin duda el punto a destacar aquí, pero no es el único. Los dos procesos parecen ser “el inverso el uno del otro”, pero esta es definitivamente una impresión falsa.

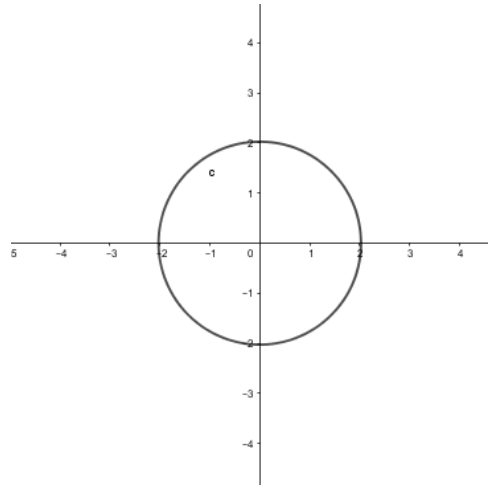


Figura 2.3:

Ejemplo 2.1.10. *Considere primero la circunferencia de la Figura 2.3 y sus ecuaciones paramétricas $x = R\cos(\theta)$, $y = R\sin(\theta)$. Al eliminar θ , obtenemos $x^2 + y^2 = R^2$. Que también podría ser $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. observe que cada*

elección del signo le dará la mitad del círculo (la “mitad superior” o la “mitad inferior”). Con esto, se obtiene

$$f :]-R, +R[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$$

como una representación paramétrica de la mitad superior de la circunferencia. Trabajando con $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ daría la “mitad izquierda” o la “mitad derecha”. Entonces, a partir de las ecuaciones paramétricas, ha obtenido la ecuación cartesiana “global” de la circunferencia, pero a partir de esa ecuación cartesiana usted ha reconstruido, sólo localmente, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

2.2. Acerca de singularidades

Veamos lo qué sucede con la definición 2.1.6 y algunas curvas algebraicas. Vimos que en la sección 1.2 que no todos los polinomios $F(X, Y)$ pueden ser escritos de la forma $F(x, y) = 0$ para una curva en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la ecuación $x^3 - 3xy^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$ cuya Figura es 2.4.

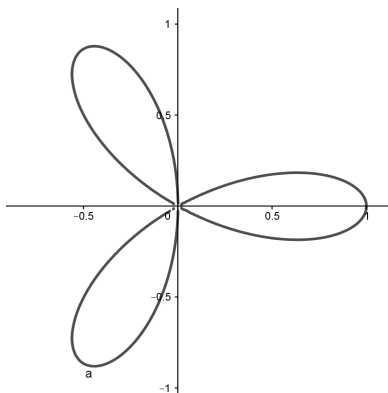


Figura 2.4: polinomio.

Esta ecuación puede ser escrita como $F(x, y) = 0$, es decir; $F(x, y) = x^3 - 3xy^2 - (x^2 + y^2)^2$. Por conocimientos sabemos que este polinomio produce una “curva”, pero no en el sentido de la definición 2.1.6 pues sus dos parciales se anulan en el punto $(0, 0)$.

Ejemplo 2.2.2. El subconjunto $F(X, Y, Z) = x^2 + y^2 + z^2$ define una curva algebraica sobre $\mathbb{R}$, pero no tiene puntos reales.

Definición 2.2.3. Un polinomio $F \in k[x]$ es irreducible si no es una constante, y si el que podamos escribir $f(x) = f(x)g(x)$ implica que uno de los dos factores sea una unidad (una constante).

Definición 2.2.4. Sea $F \in k[x]$ un polinomio.

- Si F tiene factores múltiples, entonces F y F' no son primos entre sí.
- En característica cero ($k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), si F y F' no son primos entre sí, entonces F tiene factores múltiples

Teorema 2.2.4.1 (Factores múltiples de un polinomio). Sea $f(x) \in k[x]$ un polinomio, donde $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Entonces $f(x)$ tiene factores múltiples si y sólo si $f(x)$ y $f'(x)$ no son primos entre sí.

La condición de no tener factores múltiples es asegurar que el polinomio sea determinado de forma única (hasta un múltiplo escalar) por la curva C (obviamente $F(X, Y, Z)$ y $P^2(X, Y, Z)$ definen el mismo subconjunto. El hecho de que con esta condición los ceros determinen F se sigue de Hilbert's Nullstellensatz [B.2], el cual no abordaremos en este trabajo.

Recordemos algunas nociones sobre coordenadas homogéneas y puntos múltiples.

Fije una base arbitraria e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$. Una línea vectorial de $\mathbb{R}^3$, es decir, un punto proyectivo del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, está completamente determinada por uno de sus puntos $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Por supuesto, todos los otros puntos de la línea vectorial tienen coordenadas $(a', b', c') = k(a, b, c)$, con $k \in \mathbb{R}$.

La propiedad de que dos “terciadas” distintas de cero son proporcionales, es trivialmente una relación de equivalencia y, por lo tanto, todos los miembros de una clase de equivalencia determinan la misma línea vectorial, es decir, el mismo punto proyectivo.

De manera más general, sea K un campo. En

$$\{(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1} | (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)\}$$

considere la relación de equivalencia

$$(a_0, \dots, a_n) \approx (b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow \exists k \in K, \quad k \neq 0, \quad (a_0, \dots, a_n) = k(b_0, \dots, b_n).$$

Denotaremos la clase de equivalencia de $(a_0, \dots, a_n)$ como:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Definición 2.2.5. Considere una base arbitraria $e_0, \dots, e_n$ de K^{n+1} , para algún campo K . Dado un punto con coordenadas $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ con respecto a esta base, la clase de equivalencia

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

se llama sistema de coordenadas homogéneas con respecto a la base $e_0, \dots, e_n$ del punto proyectivo correspondiente de $\mathbb{P}_n(K)$.

Proposición 2.2.6. Fijar un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}_n(K)$. Cada subespacio proyectivo se puede caracterizar como el conjunto de aquellos puntos cuyas coordenadas homogéneas satisfacen algún sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Tal sistema es único hasta una constante multiplicativa distinta de cero. Por el contrario, las soluciones distintas de cero de dicho sistema (siempre que existan tales soluciones) son siempre las coordenadas homogéneas de los puntos de un subespacio proyectivo.

Notar que las coordenadas homogéneas permiten hacer geometría analítica en el plano proyectivo. Las líneas proyectivas corresponden a planos por el origen de $\mathbb{R}^3$. Si el plano tiene ecuación $Ax + By + Cz = 0$ entonces la línea proyectiva tiene la misma ecuación, pero con coordenadas homogéneas. Las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ envían líneas por el origen en líneas por el origen y envían planos por el origen en planos por el origen, así que cada transformación lineal L de $\mathbb{R}^3$ determina una transformación proyectiva: $L[x, y, z] = [L(x, y, z)]$.

Definición 2.2.7. Sea A un punto de una curva algebraica C que admite la ecuación $P(X, Y, Z) = 0$ en un sistema de coordenadas homogéneas. Supongamos que:

- todas las parciales de $P(X, Y, Z)$, hasta el orden $k - 1$, en el punto A , son cero;

- *al menos una derivada parcial de orden k de $P(X, Y, Z)$ no es cero en el punto A . Entonces:*
- *El punto A se llama punto de multiplicidad k de la curva.*
- *Las k líneas (iguales o distintas) a través de A que tienen con la curva una intersección de multiplicidad $k + 1$ se llaman tangentes a la curva en A .*

Por supuesto, como de costumbre, utilizaremos la terminología:

- *punto simple para el punto de multiplicidad 1;*
- *punto doble para el punto de multiplicidad 2;*
- *punto triple para el punto de multiplicidad 3.*

Proposición 2.2.8. *Si una curva B de grado $n \geq 2$ admite los puntos $A_1, \dots, A_k$ con sus respectivas multiplicidades $l_1, \dots, l_k$, entonces*

$$\sum_{i=1}^k l_i(l_i - 1) \leq n(n - 1).$$

Proposición 2.2.9. *Sea $f(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ un polinomio no constante y además sin factores múltiples. Entonces hay a lo mucho un número finito de puntos (X, Y) tal que $f(X, Y) = 0$ y las derivadas de f se anulan en (X, Y) .*

Demostración: Sea $(a_i, b_i)_{i \in I}$ la familia de puntos tales que $f(a_i, b_i) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial X}(a_i, b_i) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial Y}(a_i, b_i) = 0$. Hay que probar que sólo hay un número finito de tales puntos. Sea $F(X, Y, Z)$ el polinomio homogéneo asociado a F . Así $f(X, Y) = F(X, Y, Z)$ y los factores de los polinomios f y F se corresponden término a término. Los polinomios f y F tienen el mismo grado, a decir; n .

Por la fórmula de Euler

$$nF = X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z}.$$

Aplicando la fórmula de Euler (B.2.18) a los puntos $(a_i, b_i, 1)$ obtenemos $\frac{\partial F}{\partial Z}(a_i, b_i, 1) = 0$. Por lo tanto, los puntos $(a_i, b_i, 1) = 0$ son puntos múltiples de la curva proyectiva compleja $F(X, Y, Z) = 0$.

Por suposición, $f(X, Y)$ y $F(X, Y, Z)$ no tienen puntos múltiples, por lo tanto $F(X, Y, Z)$ no tienen ningún factor múltiple como polinomios reales. Si

podemos demostrar que análogamente $F(X, Y, Z)$ no tiene factores múltiples en $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, entonces el número de puntos múltiples de $F(X, Y, Z)$ está limitado por $n(n-1)$. Por lo tanto, hay como mucho $n(n-1)$ puntos (a_i, b_i) como arriba.

Recordemos que dividiendo todos los coeficientes en sus partes reales y sus imaginarias, cada polinomio complejo $\alpha(X, Y, Z)$ puede escribirse como $\alpha(X, Y, Z) = \beta(X, Y, Z) + i\gamma(X, Y, Z)$ donde α y β son polinomios con coeficientes reales. Esto muestra de inmediato que dado un polinomio real no constante $\delta(X, Y, Z)$, si $\alpha\delta$ es un polinomio real, entonces $\gamma(X, Y, Z) = 0$. En otras palabras, si un real no constante El polinomio $\delta(X, Y, Z)$ divide otro polinomio real en $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, lo divide en $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

Sustituir los coeficientes de α por sus conjugados produce $\bar{\alpha}(X, Y, Z) = \beta(X, Y, Z) - i\gamma(X, Y, Z)$. De inmediato se deduce que, al igual que para los números complejos $\alpha(X, Y, Z)\bar{\alpha}(X, Y, Z) = \beta(X, Y, Z)^2 + \gamma(X, Y, Z)^2$, es decir, un polinomio con coeficientes reales.

Escribimos $F(X, Y, Z) = G_1(X, Y, Z) \cdots G_m(X, Y, Z)$ donde $G_k(X, Y, Z)$ es irreducible. Hay que probar que cada factor G_k es simple. Como F tiene coeficientes reales, al pasar los conjugados obtenemos

$$F(X, Y, Z) = \bar{G}_1(X, Y, Z) \cdots \bar{G}_m(X, Y, Z).$$

Es claro que los $\bar{G}_k$ siguen siendo irreducibles, porque la conjugación es un homomorfismo de campos. Si algún G_k tiene coeficientes reales, divide $F(X, Y, Z)$ en $\mathbb{R}[X, Y, Z]$. Por lo tanto, por suposición, es un factor simple.

De lo contrario, por unicidad de la descomposición en factores irreducibles, existe un índice j distinto de k tal que $G_j = \bar{G}_k$. Entonces $G_k G_j = G_k \bar{G}_j$ es un polinomio con coeficientes reales que divide a $F(X, Y, Z)$. Por suposición, es un factor simple. Dividir por este polinomio y repetir el argumento permite concluir que todos los G_k no reales también son factores simples. $\triangleright$ Reemplazar un factor múltiple de $f(x, y)$ por el mismo factor con el grado 1 no modifica el conjunto de puntos (x, y) tal que se siga cumpliendo la ecuación $f(x, y) = 0$. Esta proposición no es realmente una restricción, en lo que respecta al estudio de las curvas. Lo cual sugiere modificar la definición 2.1.6.

Recordemos que una función es de clase C^1 si sus derivadas parciales de orden uno son continuas.

Definición 2.2.10. *Por una ecuación cartesiana de una curva plana, se entiende una ecuación $F(x, y) = 0$ donde:*

- $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ es una función de la clase C^1
- existen soluciones (x, y) donde al menos una derivada parcial de F no se anula;
- hay a lo más un número finito de soluciones (x, y) donde ambas derivadas de F se anulan.

Definición 2.2.11. Sea $F(x, y) = 0$ una ecuación cartesiana de una curva plana. Los puntos (x, y) de la curva donde ambas derivadas parciales de F desaparecen se llaman puntos múltiples de la curva.

En el ejemplo 2.2.1, el punto $(0, 0)$ es un punto múltiple (B.2). Pues las parciales desaparecen en ese punto. Si definimos puntos múltiples cuando la curva está dada por una ecuación cartesiana, nos enfrentamos al desafío de definir una noción correspondiente para una representación paramétrica. Pues en la proposición 2.1.9 se considera que al menos una de las parciales es distinta de 0, por lo que no se estaría cumpliendo esta proposición. Para el caso de una representación paramétrica, podríamos considerar aquellos puntos donde que cumple:

Definición 2.2.12. Dada una representación paramétrica $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}^2$ de clase C^1 de una curva, un punto de parámetro t es singular cuando $f'(t) = (0, 0)$.

Observación 2.2.13. “Ser un punto singular” es una propiedad de la representación paramétrica que no necesariamente exhibe una “singularidad” del subconjunto correspondiente de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo la cúspide puede definirse como una curva algebraica $x^3 - y^2 = 0$, o como una curva parametrizada, $g(t) = (t^2, t^3)$. Con cualquiera de las definiciones que tenemos sobre puntos singulares, encontramos un punto singular en $(0, 0)$. Sin embargo, un nodo como el de $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ en $(0, 0)$ es una singularidad de la curva considerada como curva algebraica, pero si usamos la parametrización $g(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$, $g'(t)$ nunca se anula, por lo tanto el nodo no es singularidad de la curva parametrizada.

Observación 2.2.14. Ser un “punto singular” para una representación paramétrica no es en absoluto equivalente a ser un “punto múltiple” para una ecuación cartesiana correspondiente.

Ejemplo 2.2.15. Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, definida como $f(t) = (t^3, 0)$, una representación paramétrica de clase C^∞ de el eje x , además admite la ecuación cartesiana $y = 0$. Así, $f'(t) = (3t^2, 0)$, evaluando en el punto $(0, 0)$ obtenemos $f'(0) = (0, 0)$. Entonces el punto $(0, 0)$ es un punto singular de la representación paramétrica f . Pero el punto $(0, 0)$ no es un punto múltiple de la curva algebraica $y = 0$ cuando se parametriza por $g(t) = (t, 0)$.

Hemos notado que las representaciones paramétricas no son adecuadas para el estudio de puntos múltiples en el sentido de la teoría de las curvas algebraicas. Al trabajar con una representación paramétrica f , podríamos tratar de decir que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es múltiple si $P = f(t)$ para varios valores del parámetro t . Pero luego todos los puntos del círculo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por $f(\theta) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ son múltiples, e incluso tiene multiplicidad ∞ .

De hecho para puntos múltiples en representaciones paramétricas f , son cuando existen $t_1, t_2 \in [a, b)$ o $t_1, t_2 \in (a, b]$ tales que $f(t_1) = f(t_2)$ con t_1 distinto de t_2 . Ahora sabemos que definir una curva es cuestión de elección, pues si fortalecemos condiciones o hacemos ciertas restricciones es imposible mantener a todos los ejemplos que queramos conservar. Pues las definiciones en el ámbito de ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas no son equivalentes.

En nuestro caso, nos quedaremos con las definiciones 1.5.16 y 2.2.10.

Capítulo 3

Definiendo la tangente

En este capítulo abordaremos los intentos por construir tangentes a curvas. Desde la noción de los griegos hasta algunos matemáticos del siglo XVII. Daremos algunos ejemplos de los intentos por construir tangentes, hablaremos del método de Fermat, y el Barrow. También abordaremos la idea de Newton con su teoría de fluxiones, para esto nos basaremos principalmente en [21] y en [14].

Hacia 1640 aún no había una definición de tangente aceptada por los matemáticos de la época. Se manejaba a la tangente desde varios puntos de vista o con definiciones diferentes, algunos con aspectos geométricos, otras en aspectos dinámicos y otras en la idea de límite.

3.1. Estática de la tangente a curvas

Rescatemos la idea de Descartes de “curva”, él distinguía entre “curvas matemáticas” que podían ser definidas mediante una ecuación algebraica indeterminada de dos incógnitas, que correspondían a segmentos rectilíneos variables, y “curvas mecánicas” que para su definición requieren longitudes de arco de otras curvas.

Utilizar el término de mecánica aplicado a algunas curvas es ambiguo ya que muchas “curvas matemáticas” pueden obtenerse de forma mecánica mediante un movimiento continuo o una superposición de movimientos continuos. Por ejemplo, la elipse se puede obtener mediante composición de dos movimientos continuos, de alejamiento y acercamiento a los focos. Se debe entender como hace Descartes en “La Geometrie”, que una curva es matemática cuando la relación de los movimientos que la definen “es exacta”, es

decir, puede ser expresada algebraicamente; en otro caso la curva será mecánica. Fermat coincide plenamente con Descartes en estas concepciones sobre curvas. Las del primer tipo tienen la propiedad específica expresable solo mediante líneas rectas. Para las segundas la propiedad específica requiere ser expresada no sólo mediante segmentos de rectas sino también mediante segmentos curvilíneos.

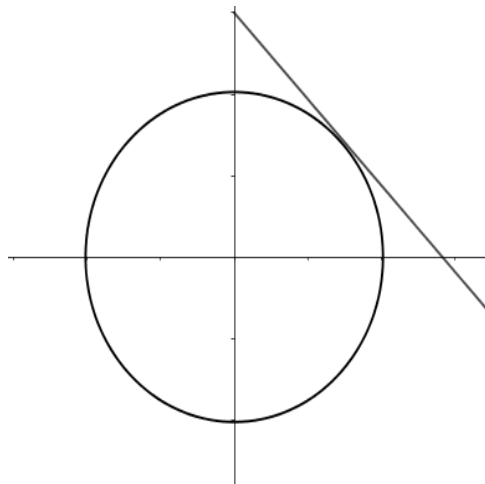


Figura 3.1: tangente a un círculo.

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. Ellos definían la tangente a un círculo como la recta que tiene un punto en común con el círculo y además esta recta no corta a la curva (Figura 3.1). A finales del siglo IV a.C., Euclides presentó en los Elementos de Geometría los resultados relativos a la tangente al círculo, destacamos los siguientes:

Definición 3.1.1. “Se dice que es tangente a un círculo la recta que, tocando el círculo y siendo prolongada, no corta el círculo.” ([15], p.105)

Proposición 3.1.2. “La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.”

Proposición 3.1.3. *“En un punto dado de un círculo existe una tangente única, a saber, la perpendicular al diámetro.”*

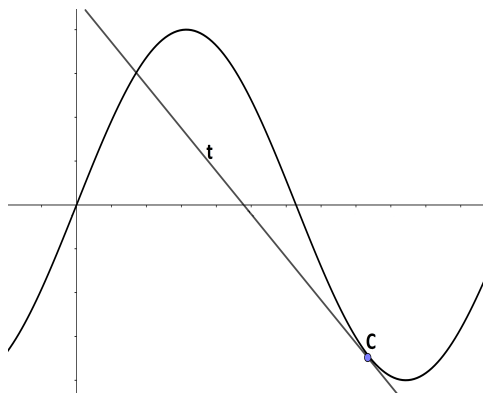


Figura 3.2:

El concepto de tangente de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Pero esta definición no era satisfactoria para otro tipo de curvas. Por ejemplo en la Figura 3.2, observamos que la recta tangente t en el punto D corta a la representación gráfica de la curva en otro punto.

Una tangente a una línea recta debería ser ella misma, por lo que no tendríamos un punto único de intersección. Por ejemplo tenemos la Figura 3.3, donde tenemos un solo punto en la curva, pero varias rectas que podrían ser tangentes.

3.2. Fermat y su método para la tangente a una curva

En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica como la recta trazada por el extremo de un diámetro paralelamente a las ordenadas al diámetro, y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la conoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad. Arquímedes sabía trazar las tangentes a su espiral y se cree que para ello consideró el problema desde un punto de vista cinemático,

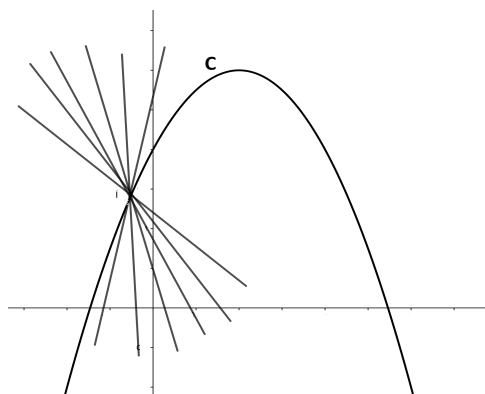


Figura 3.3: tangentes.

calculando la dirección instantánea del movimiento de un punto que genera la espiral.

Arquímedes ya había dado el salto conceptual de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil, y en este contexto trató la tangente de la siguiente manera:

Definición 3.2.1. *La tangente a una curva es la línea en la dirección del movimiento instantáneo de un punto que viaja en esa curva.*

O bien, la tangente a la curva es la línea que pasa por el punto y se dibuja en la dirección del movimiento instantáneo del punto.

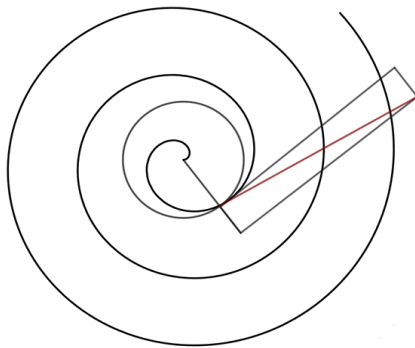


Figura 3.4: espiral de Arquímedes.

Arquímedes luego calculó la tangente a ciertas curvas “descomponiendo” el movimiento en una combinación de movimientos lineales y circulares, y suponiendo que la dirección de la tangente se puede descomponer de manera análoga. Arquímedes en su tratado titulado “Sobre las espirales”, describe la espiral de Arquímedes (Figura 3.4), basada en el movimiento de un punto, de la siguiente manera:

Definición 3.2.2. *Si una línea recta que permanece fija en un extremo, se la hace girar en el plano con velocidad constante y, al mismo tiempo, se mueve un punto sobre la recta con velocidad constante comenzando por el extremo fijo, el punto describe en el plano una espiral.*

Esta definición tiene naturaleza dinámica, a diferencia de las definiciones estáticas del círculo o las cónicas. Esta definición anticipa la definición moderna de una curva en términos de una representación paramétrica.

Ejemplo 3.2.3. *La construcción de Arquímedes de la tangente a su espiral.*

Construcción:

El movimiento global tiene dos componentes de movimientos uniformes, el resultante del movimiento lineal del punto en la línea y el resultante del movimiento circular de la línea.

La componente resultante del movimiento lineal uniforme del punto en la línea se expresa mediante un segmento orientado a lo largo de esta línea. Su longitud es la distancia recorrida en la línea durante una unidad de tiempo, durante el tiempo necesario para que la línea haga media vuelta. Esta longitud es entonces la mitad de la distancia entre dos vueltas de la espiral.

Para obtener la componente del movimiento resultante del movimiento circular uniforme, consideramos el círculo centrado en el centro de la espiral y que pasa por el punto en el que desea calcular la tangente;

La componente circular del movimiento es un segmento en la dirección de la tangente a este círculo, esta componente tiene una longitud igual a la distancia recorrida en este círculo durante una unidad de tiempo, es decir, la mitad de la longitud del círculo.

Al agregar estos dos componentes mediante la regla del paralelogramo, Arquímedes obtiene la dirección de la tangente. De hecho este paralelogramo es un rectángulo pues por la proposición 18 [15]: “En un punto dado de un círculo existe una tangente única, a saber, la perpendicular al diámetro.” $\triangleleft$

Los geómetras griegos no podían mediante construcciones de regla y compás dibujar un segmento cuya longitud es igual a la longitud del círculo. En la Figura 3.5, se tiene un punto en la espiral que se puede mover, la tangente a la espiral en ese punto, el radio que une el origen con ese punto en la espiral, la circunferencia con centro en el origen y ese radio, la perpendicular al radio por el origen y el punto de intersección de esa perpendicular con la tangente. La subtangente polar es el segmento naranja entre esa intersección y el origen.

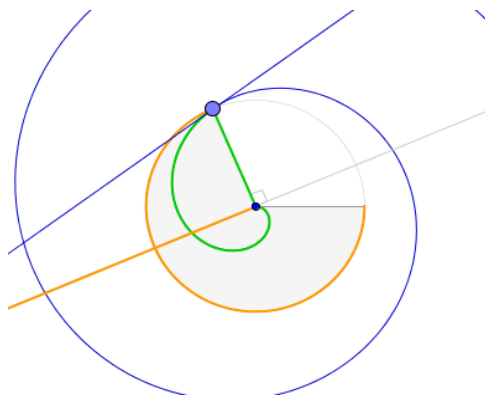


Figura 3.5: espiral.

Arquímedes tenía como objeto el estudio de la espiral como medio para el cálculo del perímetro de la circunferencia y problemas como la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo.

En 1636, el matemático francés Roberval sistematizó la idea de Arquímedes de calcular lo que llamó la línea conmovedora. Aplicó este método a una amplia variedad de curvas: varias espirales, los conoides, la cicloide, etc. En la década de 1630, Fermat y Descartes propusieron métodos para calcular la tangente a una curva dada por una ecuación polinómica $F(x, y) = 0$. La idea era que una tangente es una línea que tiene un “punto de intersección doble” con la curva. En esa época era algo de manera idónea para resolver el problema de la tangente, hoy en día la geometría algebraica ha formalizado esta idea (véase definición 2.2.7).

Fermat, como una aplicación de su método de máximos y mínimos, determinó en el “Methodus” la tangente a una parábola. La tangente será conocida si, dado el punto de tangencia, puede determinarse el punto de intersección de la tangente con el eje de la parábola. Para determinar este punto basta

con encontrar la proyección sobre el eje, del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de intersección; esta proyección es llamada la subtangente.

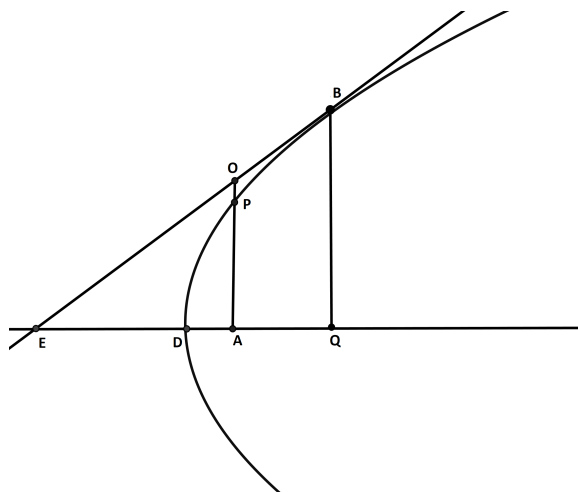


Figura 3.6: tangente a la parábola

Ejemplo 3.2.4. *Vamos a estudiar el ejemplo del cálculo de la tangente a la parábola.*

Solución: Consideremos la parábola DB de eje DQ , como en la Figura 3.6. La idea de Fermat es aplicar su método de máximos y mínimos para hallar la tangente a la parábola en el punto B . Notemos que el segmento EA es la subtangente a la parábola en un punto dado B , el vértice de la parábola es E .

Supongamos que BE es la recta que buscamos, tomemos un punto arbitrario B sobre BE y tracemos el segmento AO paralelo a la ordenada QB , donde P es el punto de intersección de este segmento con la parábola.

De la desigualdad $AO > AP$ y de la propiedad característica de la parábola que se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{DQ}{DA} = \frac{QB^2}{AP^2} \quad (3.1)$$

obtenemos

$$\frac{DQ}{DA} > \frac{QB^2}{AO^2}. \quad (3.2)$$

Como los triángulos EAQ y EQB son semejantes, tenemos

$$\frac{QB^2}{AO^2} = \frac{EQ^2}{EA^2} \quad (3.3)$$

por lo tanto,

$$\frac{DQ}{DA} > \frac{EQ^2}{EA^2}. \quad (3.4)$$

Por comodidad renombraremos $EQ = a$, donde a es incógnita, $DQ = d$ y $AQ = e$, aplicando en 3.4, tenemos

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}. \quad (3.5)$$

así

$$a^2d + e^2d - 2aed > a^2d - a^2e. \quad (3.6)$$

Ahora siguiendo a Fermat, adiguálamos

$$a^2d + e^2d - 2aed \sim a^2d - a^2e. \quad (3.7)$$

Siguiendo el método, elimina términos comunes para obtener,

$$e^2d - 2aed \sim -a^2e. \quad (3.8)$$

Se dividen todos los términos de 3.8 por e , se obtiene

$$ed - 2ad \sim -a^2. \quad (3.9)$$

En la adigualdad 3.9 Fermat ignora el término ed , que es el único que contiene e , se obtiene

$$-2ad \sim -a^2. \quad (3.10)$$

Reemplaza 3.9 por

$$-2ad = -a^2 \quad (3.11)$$

Finalmente, resuelve 3.11, para obtener $a = 2d$; es decir, $EQ = 2DQ$. $\triangleleft$

Descartes en una carta dirigida a Mersenne en enero de 1638, criticó el trabajo de Fermat “el Methodus”, pues según Descartes, Fermat no había resuelto allí ningún problema de máximos y mínimos cuando determinó la tangente a la parábola, y que a pesar de haber obtenido el resultado correcto,

el método empleado no podía ser aplicado en general. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló una memoria en junio del mismo año, la cual está contenida en “Méthode expliquée”.

Descartes había interpretado que la tangente era encontrada como la recta que en algún sentido da el máximo desde un punto del eje de las abscisas a la curva. Sin embargo Fermat en esta obra, utiliza la normal, tal vez influido por Descartes quien había establecido un procedimiento general para el cálculo de la normal a una curva algebraica. Fermat calcula la normal caracterizándola como la recta que da la longitud mínima. En efecto, dado un punto P sobre la curva $y = f(x)$, O hasta la curva, entonces la recta OP es la normal a la curva en P (Figura 3.7).

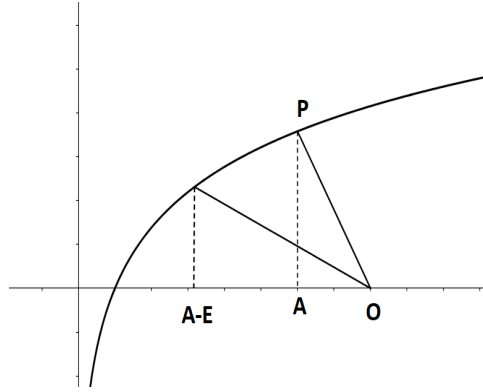


Figura 3.7: normal.

Veamos un ejemplo de la explicación dada por Fermat de su procedimiento para encontrar la tangente en un punto dado a una curva cuya ecuación es conocida.

Ejemplo 3.2.5. *Supongamos dada la curva, que la ecuación de esta es $F(x, y) = 0$ y que su representación gráfica es la Figura 3.8. Queremos encontrar la tangente a la curva en el punto B de coordenadas (u, v) .*

Solución:

Hagamos $EC = a$, la cual es la subtangente en el punto B y $IC = e$. Como los triángulos EOI y EBC son semejantes, entonces $\frac{OI}{BC} = \frac{a+e}{a}$, de donde $\frac{OI}{v} = \frac{a+e}{a}$, por lo tanto

$$IO = v \frac{a+e}{a}. \quad (3.12)$$

Observamos que cuando O está muy cerca de B , IO es casi igual a PI y, por lo tanto, es muy próximo a x y $v\frac{a+e}{a}$ es muy próximo a v . Así planteando la adigualdad (A.4),

$$f\left(u + e, v\frac{a+e}{a}\right) \sim f(u, v). \quad (3.13)$$

Pero como $f(x, y) = 0$ se tiene que $f\left(u + e, v\frac{a+e}{a}\right) \sim 0$. Esta es la adigualdad a la que Fermat aplica su método de máximos y mínimos para encontrar a , en términos de u y v . $\triangleleft$

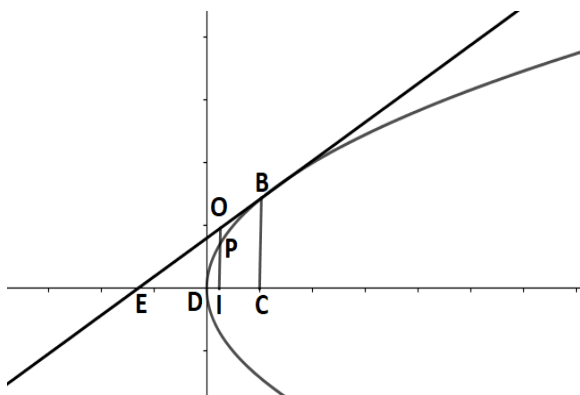


Figura 3.8: $F(x, y) = 0$

El enfoque de Fermat tiene la ventaja de ser aplicable a curvas de grado arbitrario, sin siquiera la necesidad de utilizar ejes rectangulares (ejes del plano cartesiano). Para determinar la tangente en algún punto (x, y) de una curva, Fermat considera un punto de la curva “cerca de (x, y) ” y cuyas coordenadas están escritas $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Cuando el segundo punto está “infinitamente cerca” del primero, el radio $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ es la pendiente de la tangente (Figura 3.9).

El método de Fermat es prácticamente el mismo que usamos hoy en día, con la diferencia que ahora usamos límites. Descartes también inventó un método para encontrar la tangente a una curva (para más información ver [1]) el cual es semejante al de Fermat, pero que no trataremos en este trabajo. Su método era de carácter puramente algebraico y aplicable para algunas curvas para las cuales el método de Fermat funcionaba.

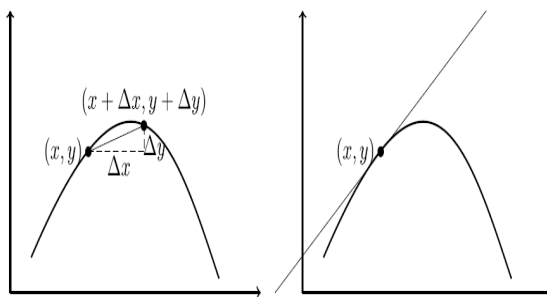


Figura 3.9: tangente.

3.3. Tangentes a ciertas curvas

En la memoria “Doctrinam tangentium”, Fermat presenta una versión más sofisticada del método de las tangentes, obteniendo tangentes a curvas clásicas como la cisoide, conchoide, cicloide y cuadratriz. Pero los éxitos de Fermat se verían limitados ya que la expresión de la curva $F(x, y) = 0$ debe ser tal que permita el desarrollo de las operaciones que deben realizarse para implementar el método de máximos y mínimos, que en un principio no era posible para “curvas mecánicas”. En esta sección veremos algunos ejemplos de tangentes para algunas curvas de esta naturaleza.

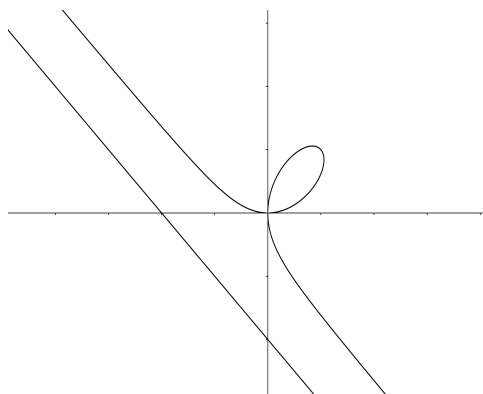


Figura 3.10: folio de Descartes.

Ejemplo 3.3.1. *El folio de Descartes, que tiene como representación gráfica a la Figura 3.10 y cuya ecuación puede escribirse en coordenadas rectangulares como hoy en día así:*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - nxy = 0.$$

Solución: En la ecuación anterior, $n = 3b$, con b un parámetro. Sea B el punto de la curva con coordenadas (u, v) en donde queremos encontrar la tangente.

Tenemos

$$\begin{aligned} f\left(u + e, v \frac{a+e}{a}\right) &= (u+e)^3 + \left[v \frac{a+e}{a}\right]^3 - n(u+e)v \left(\frac{a+e}{a}\right) \\ &= u^3 + 3u^2e + 3ue^2 + e^3 + \frac{v^3(a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3)}{a^3} - \frac{(nuv + nev)(a+e)}{a} \\ &= u^3 + 3u^2e + 3ue^2 + e^3 + v^3 + \frac{3ev^3}{a} + \frac{3e^2v^3}{a^2} \\ &\quad + \frac{e^3v^3}{a^3} - nuv - \frac{enuv}{a} - env - \frac{e^2nv}{a} \\ &= (u^3 + v^3 - nuv) + \left(3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right)e + \\ &\quad \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e^2 + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^3. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Como B está en la curva, se cumple que $u^3 + v^3 - nuv = 0$ y, por tanto

$$\begin{aligned} f\left(u + e, v \frac{a+e}{a}\right) &= \left(3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right)e \\ &\quad + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e^2 + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^3. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Ahora aplicando el método de máximos y mínimos a la adigualdad

$$\left(3u^3 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right)e + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e^2 + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^3 \sim 0. \quad (3.16)$$

Dividimos por e , para obtener

$$\left(3u^3 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right) + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^2 \sim 0. \quad (3.17)$$

Hacemos $e = 0$ y seguido de igualar todo a cero, tenemos

$$3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv = 0. \quad (3.18)$$

Despejando el término a , obtenemos

$$\begin{aligned} 3u^2 - nv &= -\left(\frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a}\right) \\ a(3u^2 - nv) &= -(3v^3 - nuv) \\ a &= -\frac{3v^3 - nuv}{3u^2 - nv} \\ a &= -v \frac{3v^2 - nu}{3u^2 - nv}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Que es la subtangente del folio. $\triangleleft$

Fermat desarrolla un método paralelo al trazado de las tangentes de las curvas mecánicas. Fermat, sabía que a la cicloide a la que llama la “Curva de Roberval” no se le pueden aplicar directamente los métodos desarrollados hasta ahora, porque es una curva de naturaleza esencialmente diferente a la parábola, elipse, cisoide, concoide, folium, etc., ya que en su definición interviene una longitud de arco. El concepto de “adigualdad” sufre una metamorfosis profunda hacia la noción infinitesimal de “aproximadamente igual”, con el establecimiento de dos principios ([19], p.178):

- “Se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes ya halladas.”
- “Se pueden sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas.”

El primer principio viene a ser la consideración por “adigualdad” de la propiedad específica de la curva, no sobre la propia curva sino sobre la tangente, mientras que el segundo, es un verdadero principio de rectificación.

Definición 3.3.2. *La cicloide (Figura 3.11) es la trayectoria de un punto fijo de un círculo, este círculo rueda sobre una línea.*

Ejemplo 3.3.3. *Veamos cómo con base en estos principios, Fermat realiza la admirable construcción de la tangente a la cicloide.*

Por otro lado, sea $MA = d$, la tangente a la circunferencia CMF , que corta a NE en V , y sea $AD = b$, la subtangente a ésta en el punto M . De la Figura 3.11, vemos que el triángulo MDA es semejante al triángulo VEA , por lo tanto $\frac{MD}{VE} = \frac{DA}{EA}$, es decir $\frac{g(x)}{VE} = \frac{b}{b-e}$, por lo tanto

$$VE = g(x) \frac{(b-e)}{b}. \quad (3.23)$$

Una vez más aplicamos el primer principio, así

$$g(x) \frac{(b-e)}{b} \sim g(x-e). \quad (3.24)$$

Por el segundo principio, podemos reemplazar ahora las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas y, por lo tanto, $\text{arc}(OM) \sim MV$. Por semejanza de los triángulos MDA y VEA tenemos $MV = \frac{de}{b}$, así

$$\text{arc}(OM) \sim MV = \frac{de}{b}. \quad (3.25)$$

Reemplazando 3.25 y en , tenemos

$$f(x-e) \sim \text{arc}(CM) - \frac{de}{b} + g(x) \frac{(b-e)}{b}. \quad (3.26)$$

Y reemplazando 3.20 y 3.26 en 3.21, tenemos

$$\frac{(\text{arc}(CM) + g(x))(a-e)}{a} \sim \text{arc}(CM) - \frac{de}{b} + g(x) \frac{(b-e)}{e}$$

$$\frac{(\text{arc}(CM))}{a} - e \frac{(\text{arc}(CM))}{a} + \frac{a}{a} g(x) - \frac{e}{a} g(x) \sim \text{arc}(CM) - \frac{de}{b} + \frac{b}{b} g(x) - \frac{e}{b} g(x). \quad (3.27)$$

Eliminamos términos comunes,

$$-e \frac{(\text{arc}(CM))}{a} - \frac{e}{a} g(x) \sim -\frac{de}{b} - \frac{e}{b} g(x). \quad (3.28)$$

Ahora, dividimos todos los términos por e , obtenemos $-\frac{\text{arc}(CM)}{a} - \frac{g(x)}{a} \sim -\frac{d}{b} - \frac{g(x)}{b}$. Igualando $-\frac{\text{arc}(CM)}{a} - \frac{g(x)}{a} = -\frac{d}{b} - \frac{g(x)}{b}$, es decir,

$$\frac{\text{arc}(CM) + g(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (3.29)$$

Reemplazamos 3.20 en 3.29,

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (3.30)$$

Por el Teorema de Pitágoras, tenemos $d^2 = g(x)^2 + b^2$, de donde $b^2 = d^2 - g(x)^2 = (d + g(x))(d - g(x))$. Así

$$\frac{b}{d - g(x)} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (3.31)$$

Sea S en centro de la circunferencia generatriz y r el radio. Como AMS y SMD son triángulos semejantes, entonces

$$\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)} = \frac{g(x)}{r - x}. \quad (3.32)$$

Por proporciones de la primera y tercera fracción, obtenemos $\frac{d - g(x)}{r - (r - x)} = \frac{d}{r}$. De donde

$$\frac{d - g(x)}{x} = \frac{d}{r}. \quad (3.33)$$

Pero como en 3.32 $\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)}$, obtenemos en 3.33 $\frac{d - g(x)}{x} = \frac{b}{g(x)}$. Por lo tanto,

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{b}{d - g(x)}. \quad (3.34)$$

Igualando 3.31 y 3.34 obtenemos

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{d + g(x)}{b}. \quad (3.35)$$

Por último, igualando 3.30 y 3.35, tenemos $\frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{x}$. $\triangleleft$

La construcción de Fermat de la tangente a la cicloide es un ejemplo de utilización de todas las técnicas desarrolladas por Fermat sobre el tema de máximos y mínimos y tangentes. El método de tangentes de Fermat tuvo gran importancia para la invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton.

3.4. Barrow y su método para tangentes

Según Boyer, hacia 1652, René Francois de Sluse (1622-1685) obtuvo un método para determinar la recta tangente a una curva dada por una ecuación

de la forma $F(x, y) = 0$. Este procedimiento se basaba en la determinación de las subtangente como el cociente obtenido situando en el numerados los términos del polinomio $F(x, y)$ que contengan la variable y , y en el denominador los términos en los que aparece la variable x , multiplicando cada uno de ellos por el exponente de x y divididos todos ellos por x .

Isaac Barrow (1630-1677) preparaba sus obras como “*Lectioes opticae*” de 1669 y “*Lectioes geometricae*” de 1670. En estas obras ofreció un panorama de los métodos infinitesimales en su época, obteniendo teoremas geométricos, que representaron un gran avance para el cálculo. Encontramos problemas de cuadraturas, de tangentes o de rectificación de curvas, así como la primera demostración de lo que hoy en día llamamos Teorema Fundamental del Cálculo Integral, es decir, el carácter inverso de los problemas de tangentes cuadraturas. El método de tangentes de Barrow se incluye como apéndice a la Lección X de sus “*Lectioes Geometricae*”.

El método de Barrow para calcular tangentes inicia de la siguiente manera (Figura 3.12):

“Sean AP y PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M , y supongamos que MT corta a la curva en M y a la recta AP en T .”

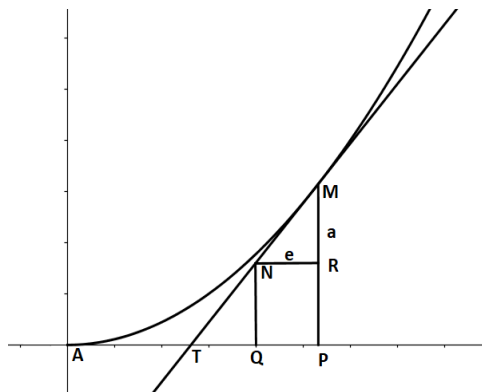


Figura 3.12: $F(x, y) = 0$ y su tangente.

Primero hay que encontrar el segmento PT (subtangente) para esto, consideramos un arco de la curva (Figura 3.13) MN infinitamente pequeño. Trazamos NQ y NR paralelas a MP y QP respectivamente. Sean $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$ y $NR = e$. Comparamos el segmento MR con el segmento NR y observamos las siguientes reglas:

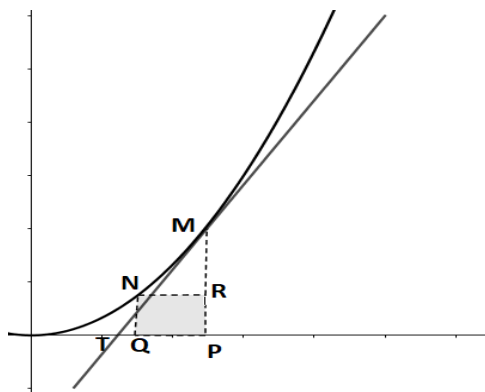


Figura 3.13: $F(x, y) = 0$ y su tangente.

- En el cálculo se omitirán todos los términos conteniendo potencias (superiores a uno) de a o e , o productos de ellos. Esto ocurre porque estos términos se consideran infinitesimales respecto a los restantes y, por tanto, pueden omitirse.
- Después de formar la ecuación, descartaremos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen a o e (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).
- Se sustituye m por a y t por e , de aquí se encontrará la cantidad PT .

Ahora aplicando estas reglas, denotamos $AP = p$, entonces, las coordenadas de los puntos M y N son $M(p, m)$ y $N(p - e, m - a)$ respectivamente. Como estos puntos están sobre la curva $F(x, y) = 0$ deben cumplir que

$$F(p, m) = F(p - e, m - a) = 0.$$

Aplicando la primera regla y segunda regla a $F(p - e, m - a) = 0$, tenemos $F(p, m) = 0$. Por la regla tres, sustituimos m por a y t por e . Usando que el triángulo MTP y el triángulo infinitesimal MNR son semejantes y, por tanto, $\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$ de donde, como m es un dato del problema, podemos hallar la subtangente t .

Observamos que si N está en la curva, el triángulo MNR no es “exactamente” semejante a MTP y realmente estamos identificando el punto N con el punto sobre la tangente que corta al segmento NR y que está “muy

próximo" a N . Por otro lado, notamos que Barrow está aplicando el triángulo característico bajo la idea de que la tangente es la posición límite en el primer paso cuando elimina los infinitésimos de orden superior.

Veamos unos ejemplos de este método.

Ejemplo 3.4.1. *Consideremos la hipérbola con la ecuación $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ y el punto $P(x, y)$ que pertenece a la curva. Queremos calcular la pendiente de la recta tangente a la hipérbola.*

Sea $P_1 = (x_1 + e, y_1 + a)$ otro punto cualquiera de la hipérbola, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 + e)^2}{c^2} - \frac{(y_1 + a)^2}{d^2} &= 1, \\ \frac{(x_1 + 2ex_1 + e^2)^2}{c^2} - \frac{y_1^2 + 2ay_1 + a^2}{d^2} &= 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como

$$\frac{x_1^2}{c^2} - \frac{y_1^2}{d^2} = 1, \quad (3.37)$$

Igualando 3.36 y 3.37, y cancelando términos tenemos:

$$\frac{2ex_1}{c^2} + \frac{e^2}{c^2} - 2\frac{ay_1}{d^2} - \frac{a^2}{d^2} = 0.$$

Eliminado potencias de a y e de grado mayor que uno, se sigue que

$$\frac{2ex_1}{c^2} - \frac{2ay_1}{d^2} = 0,$$

de donde la pendiente:

$$\frac{a}{e} = \frac{d^2 x_1^2}{c^2 y_1^2}.$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta con pendiente $\frac{a}{e}$ en el punto (x_1, y_1) está dada por

$$y - y_1 = \frac{d^2 x_1^2}{c^2 y_1^2} (x - x_1).$$

Finalmente obtenemos la ecuación de la recta tangente de la hipérbola.

$$\frac{xx_1}{c^2} - \frac{yy_1}{d^2} = 1.$$

Ejemplo 3.4.2. Sea el Folium de Descartes dada por la ecuación $x^3 + y^3 = nxy$. Queremos encontrar la subtangente.

Sea $(x - e)^3 + (y - a)^3 = n(x - e)(y - a)$. Desarrollando tenemos:

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = nxy - nxa - ney + nea.$$

Eliminamos términos con potencias superiores a uno de e o de a , así como los productos de e o de a o sus potencias:

$$x^3 + 3x^2e + y^3 - 3y^2a = nxy - nxa - ney.$$

Como $x^3 + y^3 = nxy$ se sigue que

$$-3x^2e - 3y^2a = -nxa - ney \iff a(nx - 3y^2) = e(3x^2 - ny),$$

es decir,

$$\frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}.$$

Finalmente tenemos que

$$m = \frac{y}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}.$$

De donde $t = \frac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}$ que es la subtangente, la misma que había obtenido Fermat por su método de Máximos y Mínimos. $\triangleleft$

El método de Barrow es lo que hoy en día utilizamos en cálculo diferencial, donde las letras a y e son sustituidas por dy y dx , respectivamente. En este método juega un papel importante el triángulo característico (triángulo de lados infinitesimales), que es la clave sobre la que Leibniz construyó poco después su teoría.

3.5. Leibniz y su noción de derivada

Las ideas de Leibniz sobre el cálculo evolucionaron gradualmente y, como Newton, escribió varias versiones, expresando sus pensamientos maduros. Para todos ellos era fundamental el concepto de “diferencial”, aunque esa noción también tenía diferentes significados para él en diferentes momentos. Leibniz ve una curva como un polígono con infinitos lados, cada uno de longitud infinitesimal. (Recuerde la concepción griega del círculo como un polígono

de infinitos lados, con tal curva se asocia una secuencia infinita (discreta) de abscisas $x_1, x_2, x_3, \dots$, y una secuencia infinita de ordenadas $y_1, y_2, y_3, \dots$, donde (x_i, y_i) son las coordenadas de los puntos de la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x se llama el “diferencial” de x y se denota por dx ; de manera similar para dy . La diferencial dx es una cantidad fija no nula, infinitesimalmente pequeña en comparación con x ; en efecto, un infinitesimal. Hay una secuencia de diferenciales asociados con la curva, es decir, la secuencia de diferencias $x_i - x_{i-1}$, asociada con las abscisas $x_1, x_2, x_3, \dots$ de la curva.

Los lados del polígono que constituyen la curva se denotan por ds (de nuevo, hay infinitos de tales infinitesimales ds 's). Esto da lugar al famoso triángulo característico de Leibniz con lados infinitesimales dx , dy , ds que satisfacen la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (ver Figura 3.14).

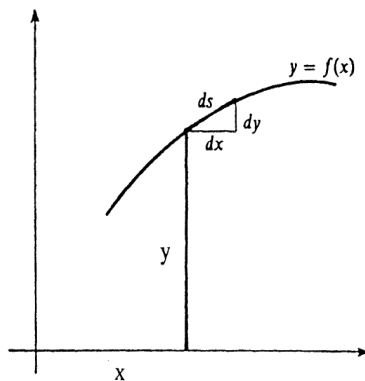


Figura 3.14:

El lado ds de la curva (polígono) se toma como coincidente con la tangente a la curva (en el punto x). Como lo expresa Leibniz ([23], p. 234-235): “Sólo debemos tener en cuenta que para encontrar una tangente significa dibujar una línea que conecta dos puntos de la curva a una distancia infinitamente pequeña, o el lado continuo de un polígono con un número infinito de ángulos, que para nosotros ocupa el lugar de la curva. Esta distancia infinitamente pequeña siempre puede expresarse mediante un diferencial conocido como ds ”.

La pendiente de la tangente a la curva en el punto (x, y) es entonces $\frac{dy}{dx}$, un cociente real de diferenciales, que Leibniz denomina cociente diferencial.

El esfuerzo de Leibniz por una notación eficiente para su cálculo fue parte

integral de su esfuerzo por encontrar una “característica universal”, un lenguaje simbólico capaz de reducir todo discurso racional al cálculo rutinario. Edwards ([14] p. 232) “El cálculo infinitesimal de Leibniz es el ejemplo supremo en toda la ciencia y las matemáticas, de un sistema de notación y terminología tan perfectamente emparejado con su tema como para reflejar fielmente lo básico Operaciones lógicas y procesos de la asignatura”.

Una buena notación ayuda no sólo en la prueba de los resultados, sino también en su descubrimiento. El cálculo de Leibniz prevaleció sobre el de Newton en gran parte debido a su bien escogida notación, que, según él, ofrece verdades sin ningún esfuerzo de la imaginación ([8], p. 208).

A pesar de los grandes logros de Newton y Leibniz, sus respectivas versiones de cálculo consistían en gran parte de métodos y problemas poco conectados, y no eran de fácil acceso para el público matemático. La primera introducción sistemática al cálculo leibniziano (diferencial) fue dada en 1696 por L'Hospital en su texto “El análisis de lo infinitamente pequeño”, para la comprensión de las líneas curvas. El cálculo se desarrolló aún más durante las primeras décadas del siglo XVIII, especialmente por los hermanos Bernoulli, Jakob y Johann.

La principal preocupación contemporánea del cálculo era la geometría de las curvas: tangentes, áreas, volúmenes y longitudes de arcos. Por supuesto, Newton y Leibniz introdujeron un aparato algebraico (simbólico), pero su motivación y los problemas a los que se aplicó fueron geométricos o físicos, relacionados con las curvas. En particular, esto fue un cálculo de variables relacionadas por ecuaciones, en lugar de un cálculo de funciones.

3.6. La noción de derivada de newton

Newton (1642-1727) concebía el cálculo diferencial en términos de problemas e ideas de la Física y consideraciones geométricas, mientras Leibniz (1646-1716) lo enfocaba de una manera más puramente matemática, en términos de analogías con otras situaciones matemáticas y haciendo énfasis en su generalidad, estructuración y aspectos combinatorios y simbólicos.

Newton introdujo el concepto de las fluxiones lo que hoy se conoce como derivadas imponiendo así su punto de vista físico para obtener la recta tangente a una curva como el cociente entre las fluxiones. Mientras Leibniz interpreto la tangente a una curva como en cociente de los infinitésimos .

Durante todo el siglo XVII, las funciones fueron estudiadas más bien como curvas. Incluso las funciones trascendentes elementales como las logarítmicas,

exponenciales o trigonométricas.

Newton da otra versión de su cálculo en “Methodus Fluxiorum er Serierum Infinitorum” en 1671, que fue publicado en 1736. dio a su cálculo el nombre de teoría de fluxiones. Según Grattan Guinness [21], Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades que aparecen x, y, z eran “fluentes”, y las derivadas (velocidad) las llamaba “fluxiones”, estas últimas las denotaba: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$. Los infinitesimales los llamaba momentos de fluxiones y los denotaba: $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$, donde “ o ” es una “cantidad infinitamente pequeña”. El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente.

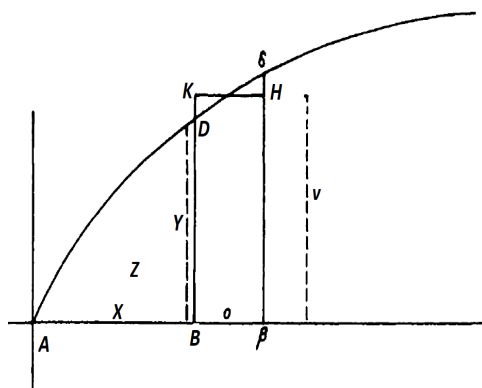


Figura 3.15:

Ejemplo 3.6.1. En la Figura 3.15, Newton suponía que el punto genérico D se mueve a lo largo de la curva, mientras que su correspondiente ordenada y , su abscisa x , el valor z de la cuadratura o en general cualquier otra cantidad variable relativa a la curva aumentaría o disminuiría, es decir, cambiaría o “fluiría”.

Siguiendo a Grattan Guinness: “la manera en que las fluentes varían con el tiempo es arbitraria. Newton a menudo hace, por simplicidad, una suposición adicional sobre el movimiento de las variables, suponiendo que una de las variables, digamos x , se mueve uniformemente, de modo que $\dot{x} = 1$. Tales suposiciones se pueden hacer porque los valores de las fluxiones en sí no son de interés, sino más bien de otro tipo, tal como $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que da la pendiente de la tangente.

Newton pensaba que las dificultades de fundamentación que planteaba el uso de incrementos “pequeños” de las variables, se solucionaba al considerar cantidades que se mueven en el tiempo. Estos incrementos por ser tan pequeños podían despreciarse, no son nulos y se puede dividir con ellos. Los incrementos correspondientes que experimentan las variables los podemos expresar en términos de fluxiones: sea o un incremento de tiempo infinitesimal, entonces los incrementos correspondientes de las fuentes $x, y, z, \dots$ son respectivamente $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$.

En el siguiente ejemplo se verá cómo calcular la razón de $\dot{y}$ a $\dot{x}$.

Ejemplo 3.6.2. *Consideremos la curva de ecuación*

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \quad (3.38)$$

Sustituimos en 3.38 x e y por $x + \dot{x}$ e $y + \dot{y}$ respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} (x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) \\ + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) \\ - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Eliminando $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero, por 3.38, dividiendo por a y despreciando los términos en que figure el factor o , tenemos

$$3\dot{x}x^2 - ax\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0,$$

de donde se puede despejar la razón de $\dot{y}$ a $\dot{x}$,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

◁

Notamos que el numerador y el denominador en 3.6 son (excepto por un signo) las derivadas parciales f_x y f_y de $f(x, y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$, el lado derecho de la ecuación de la curva. Así

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_x}{f_y}. \quad (3.40)$$

Esta relación está implícita en los algoritmos con los que Newton resolvió problemas de tangentes, máximos y mínimos, y curvatura.

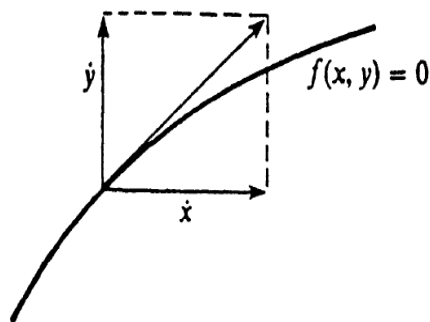
En “Principia mathematica philosophiae naturalis” (1686), Newton hace una presentación del cálculo bajo la forma de demostraciones geométricas de tipo sintético y casi con total prescindencia de cálculos analíticos. Boyer ([9], p. 197) menciona que Newton continúa influido por las concepciones del siglo XVII con respecto a los indivisibles geométricos últimos, aunque es conciente de las dificultades involucradas en un punto de vista ingenuo sobre los infinitesimales.

Newton consciente de las dificultades de rigor que tienen estos conceptos, posteriormente refina su interpretación en “De Quadratura Curvarum”, escrito en 1676 y publicado en 1704. Aquí habla de “ultimas proporciones” (“ultimate ratios”). Dice: “Por ultima proporción de cantidades evanescentes debemos entender el cociente de cantidades, no antes de que desvanezcan, ni después, pero tal como van desvaneciéndose”. Lo que intuitivamente viene a ser nuestro concepto de derivada interpretada como límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Así vemos como Newton desde un primer momento, por influencia cartesiana, había puesto en relación la geometría analítica con la mecánica. Ya de su profesor Barrow, había aprendido a considerar las curvas desde un punto de vista cinemático: su análisis de curvas era un análisis de puntos en movimiento. Es importante notar que el cálculo de Newton (y de Leibniz) es un cálculo de variables y ecuaciones que relacionan estas variables; no es un cálculo de funciones. De hecho, la noción de función como un concepto matemático explícito surgió solo a principios del siglo XVIII (véase sección 1.1).

Newton considera el movimiento de un punto en una curva, con la ecuación $f(x, y) = 0$ dice, como la composición de los movimientos horizontales y verticales con velocidades x e y respectivamente (ver Figura 3.16), y desde la dirección del movimiento de un punto en la curva a lo largo de la tangente a la curva, se deduce que la pendiente de la tangente a la curva $f(x, y) = 0$ en un punto (x, y) en la curva es $\frac{y}{x}$. Pero $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, por lo tanto $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$ (nuestra notación). Es decir, la pendiente de la tangente, la derivada, es un cociente de fluxiones.

Euler logró un avance conceptual fundamental, a mediados del siglo XVIII. Fue para hacer del concepto de función la pieza central del cálculo. Así, el cálculo no se trata de curvas, afirmó Euler, sino de funciones. La derivada (cociente diferencial) y la integral no son simplemente abstracciones de las nociones de tangente o velocidad instantánea por un lado, y de área o volumen por el otro, son los conceptos básicos del cálculo, que deben ser investigados

Figura 3.16: $f(x, y) = 0$

y estudiados por derecho propio. Euler no fue el primero en introducir la noción de función, pero fue el primero en hacerlo central considerando que el cálculo es la rama de la matemática que se ocupa de las funciones. Pero un “decreto”, incluso por un Euler, no podría cambiar la práctica matemática de la noche a la mañana. Los matemáticos del siglo XVIII no adoptaron fácilmente las funciones como algo central en su materia, especialmente porque las variables parecían servirles bien.

Capítulo 4

Tangentes

En este último capítulo daremos la definición de tangente en geometría diferencial.

4.1. Sentido diferencial

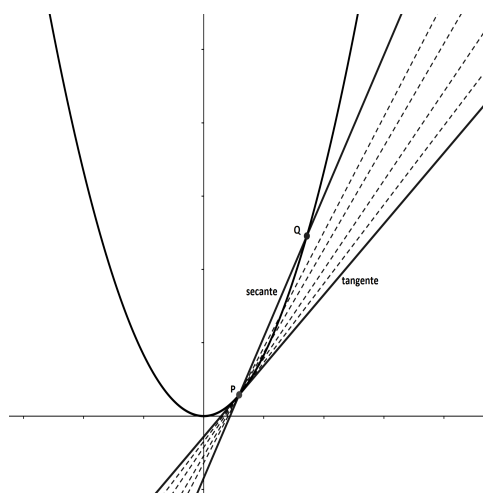


Figura 4.1:

En el capítulo anterior recorrimos un poco el camino histórico de cómo calcular las tangentes a curvas. En Geometría euclidiana, la noción de una

tangente a un círculo se define como la línea recta que toca el círculo en un solo punto P . Mientras que en general sabemos que:

Definición 4.1.1. *La tangente a una curva arbitraria en uno de sus puntos P es el límite de la secante a través de P y otro punto Q de la curva, ya que Q converge a P (Figura 4.1).*

Desarrollando esto:

Sea la ecuación de una curva plana cualquier C , $F(x, y) = 0$, y sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos (Figura 4.2) cualquiera diferentes de la curva C tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir, Q puede moverse hacia P permaneciendo siempre sobre la curva. La recta que pasa por P y Q se llama *secante*. Tenemos que P es un punto fijo mientras que Q se mueve a lo largo de C hacia P . Entonces, a medida que Q se aproxima a P la secante gira en torno a P , en general, tiende a una posición límite representada por la recta PT que se define como la *tangente a la curva C en el punto P* . El punto P se llama *punto de tangencia o punto de contacto con la tangente*.

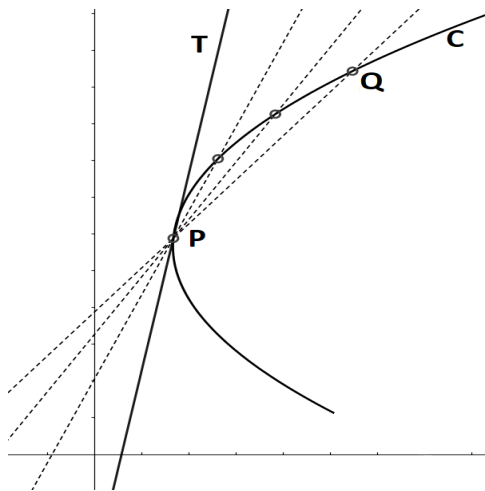


Figura 4.2: tangente a una curva arbitraria.

¿Pero qué sucede si tomamos cada vez más cerca Q de P ? No podemos establecer que $P = Q$, porque entonces P y Q no determinan una línea, pues para determinar una línea necesitamos dos puntos. Mientras que si elegimos P diferente de Q , entonces no obtenemos la tangente, pero en el mejor de

los casos, algo que está “cerca” de ella. Algunos han sugerido que uno debe tomar Q infinitamente cerca de P , pero no está claro lo que eso significaría. El concepto de límite está destinado a resolver este problema confuso.

Esta definición “dinámica”, muestra lo que intuitivamente debería ser una tangente. En casos como 2.2.1 se deberían considerar por separado las ramas de la curva, ya que contamos con un punto múltiple en este caso.

¿Existe una tangente en cada punto de la cima de una cicloide o no existe? Deberíamos decidir este tipo de situaciones.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $k \in \mathbb{N}$ la representación paramétrica de una curva, definida como sigue,

$$t \mapsto \begin{cases} (t, t^k \operatorname{sen}(\frac{1}{t})) & \text{si } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

¿Podríamos encontrar una tangente en el origen de esta curva? ¿Cómo podemos saber qué curvas tienen tangente y qué curvas no? El problema con la anterior definición es que podemos definir el límite de una familia de puntos en $\mathbb{R}$ y el límite de una familia de vectores en $\mathbb{R}^2$, pero ¿cómo podemos definir con precisión el límite de una familia de líneas?

Tomemos una representación paramétrica de la curva $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ y considere el punto $P = f(t_0)$. Cuando t converge a t_0 , el punto $Q = f(t)$ converge a $P = f(t_0)$. La secante a través de P y Q es la línea pasando por $P = f(t_0)$ de dirección $\overrightarrow{PQ} = f(t) - f(t_0)$. Mientras que la tangente será la línea que pasa a través de $P = f(t_0)$ de dirección $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) - f(t_0))$.

Infortunadamente, esto no tiene ningún sentido porque por la continuidad de f , el límite es simplemente $f(t_0) - f(t_0)$, que es el vector cero. Para superar este problema, tomemos dos vectores en la misma dirección, que además definen la misma secante, de esta manera trabajaremos con vectores de longitud 1, de modo que el límite debe permanecer de longitud 1.

La tangente debería ser la línea que pasa por $P = f(t_0)$, de dirección $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$, siempre que este límite exista, y sabemos por experiencia que no siempre existe.

Ejemplo 4.1.2. El círculo con representación paramétrica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ (Figura 4.3).

Si consideramos el punto con parámetro 0, el límite no existe para el Ejemplo 4.1.2, pues tenemos que:

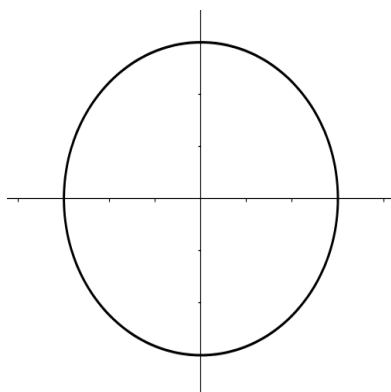


Figura 4.3: círculo

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{(f(t) - f(t_0))}{\|(f(t) - f(t_0))\|} = (-1, 0) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{(f(t) - f(t_0))}{\|(f(t) - f(t_0))\|} = (1, 0).$$

Y por nuestros conocimientos, cuando los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

Ejemplo 4.1.3. Sea la curva constituida por dos semicírculos, cuya representación paramétrica está dada por $g :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \sqrt{1 - t^2})$ (Figura 4.4).

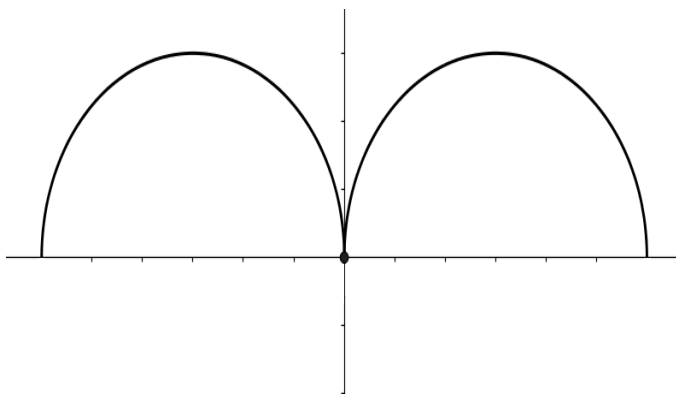


Figura 4.4: dos semicírculos.

Para el Ejemplo 4.1.3, tomando la misma idea que usamos anteriormente, notamos que el límite sí existe: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g(t) - g(t_0))}{\|(g(t) - g(t_0))\|} = (1, 0)$.

Aunque intentamos definir una tangente a una curva como un “límite de secantes”, cuando tratamos de precisar lo que significa este “límite de secantes” encontramos problemas. El Ejemplo 4.1.2 no tiene una tangente, mientras que la curva del Ejemplo 4.1.3 sí tiene tangente.

Así, esta definición que hemos dado encuentra casos como el del círculo donde no es aceptable esta definición. Notemos que los límites para $t < t_0$ y $t > t_0$ son vectores opuestos, por lo tanto, definen la misma línea. Entonces uno podría modificar nuestra definición de la tangente diciendo que ambos límites a la derecha y a la izquierda deberían existir, ser distintos de cero y ser vectores proporcionales.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \frac{(f(t) - f(t_0))}{\|(f(t) - f(t_0))\|} = (-1, 0), \quad \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{(f(t) - f(t_0))}{\|(f(t) - f(t_0))\|} = (1, 0)$$

Lo más prudente es que reemplacemos el vector $f(t) - f(t_0)$ por un vector proporcional a él, pero no un vector de longitud 1. Considerar en su lugar

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(t) - f(t_0))}{(t - t_0)}$$

que, cuando existe, es simplemente $f'(t_0)$. Para que este enfoque sea eficiente, no solo debe existir la derivada, sino que debe ser distinta de cero. Por lo tanto, hacemos la siguiente definición:

Definición 4.1.4. *Considere una representación paramétrica regular de una curva plana de clase C^1 $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$.*

- *La tangente a la curva en un punto regular con el parámetro t_0 es la recta que contiene $f(t_0)$ y de dirección $f'(t_0)$.*
- *La normal a esta curva en el punto con el parámetro t_0 es la perpendicular a la tangente en este punto.*

Dado que una curva puede describirse mediante varias representaciones paramétricas, se debe verificar que la Definición 4.1 de la tangente no dependa de la elección de la representación. Recordemos que nuestra intención es buscar buenas definiciones, no queremos demostrar resultados y explicar a detalle ciertos aspectos que estamos usando.

Veamos lo que sucede cuando la curva está dada por una ecuación cartesiana.

Proposición 4.1.5. *Considere una representación paramétrica $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 de una curva plana. La tangente a la curva en un punto regular del parámetro t_0 admite la ecuación cartesiana $f'_2(t_0)(x - f_1(t_0)) - f'_1(t_0)(y - f_2(t_0)) = 0$. La normal a la curva en un punto regular del parámetro t_0 admite la ecuación cartesiana $f'_1(t_0)(x - f_1(t_0)) - f'_2(t_0)(y - f_2(t_0)) = 0$.*

Proposición 4.1.6. *Considere una ecuación cartesiana $F(x, y) = 0$ de una curva plana cartesiana. La tangente a esa curva en un punto simple (x_0, y_0) es la línea con la ecuación*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Demostración:

Consideremos el caso $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. La curva admite una representación paramétrica regular $f(x) = (x, \varphi(x))$ en una vecindad de x_0 . Por lo tanto, la tangente es la línea (x_0, y_0) con dirección $(1, \varphi'(x_0))$ por definición. Tenemos que determinar el valor de $\varphi'(x_0)$.

La diferencial de $F(x, \varphi(x)) = 0$ con respecto a x es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dx}(x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{d\varphi}{dx}(x_0) = 0$$

es decir,

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la tangente son :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha \cdot 1 \\ y &= y_0 - \alpha \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

Introduciendo el valor $\alpha = x - x_0$ en la segunda ecuación se obtiene la fórmula del enunciado. $\triangleleft$

Definir la tangente es una cuestión de elección, claro que, en la definición 4.1, nuestra representación paramétrica f del círculo ahora produce una tangente en cada punto, porque es regular.

En nuestro primer intento, la curva del Ejemplo 4.1.3 tiene una tangente en cada punto, pero la representación paramétrica g de esta curva no es

diferenciable en $t = 0$. Usando la definición 4.1, la curva representada por g no tiene una tangente en el origen. Tal vez queramos modificar nuevamente la definición de la tangente a una curva para obtener el mejor de los dos intentos. Por ejemplo, al requerir solo la proporcionalidad de la derivada izquierda y la derivada derecha, no la existencia de la derivada. Entonces la curva representada por g también tendría una tangente en el origen.

Si consideramos la representación paramétrica $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, 0)$ del eje x , observamos que $h'(0) = (0, 0)$, por lo tanto, en vista de la Definición 4.1, el eje x , cuando se representa por h , no tiene una tangente en el origen, que es menos que satisfactoria. De nuevo, uno podría querer revisar la definición de una tangente para evitar tal situación. Sin embargo, no entraremos en estas consideraciones: adoptamos de una vez por todas Definición 4.1. Ahora somos muy conscientes de que al hacerlo, excluimos ejemplos en los que una definición más complicada habría producido una “tangente sensible”.

En las líneas precedentes se han planteado cuestiones, algunas resueltas de manera muy intuitiva. Sin embargo, invito al lector a reflexionar acerca de esas delicadas cuestiones. ¿Qué es una buena definición? Para los científicos es una definición que se aplica a ellos; que satisface las reglas de la lógica, pero no en todos los ámbitos esto es así. ¿Entender la definición es solamente reconocer que se conoce el sentido de todos los términos empleados y verificar que ello no implica ninguna contradicción? Sí, para algunos, que cuando hayan hecho esa verificación dirán: he comprendido. No para la mayor parte.

Muchos se preguntarán para qué sirve esto. No habrán comprendido si no encuentran alrededor, en la práctica o en la naturaleza, la razón de ser de tal explicación matemática. Bajo cada palabra quisieran tener una imagen sensible; es preciso que la definición evoque esta imagen, que a cada etapa de la demostración ellos la vean transformarse y evolucionar.

Conclusiones

En este trabajo se describieron algunas dificultades que tuvieron los matemáticos de diversas épocas para dar definiciones adecuadas a los conceptos de curva y tangente, para trabajar en relación a la geometría diferencial.

Concluimos que estos conceptos, quizá de apariencia sencilla en estos tiempos, no nacieron de la noche a la mañana ni son el producto del trabajo de un solo matemático, sino que fueron modificándose conforme avanzaba la matemática de manera global. No fueron de fácil asimilación, se tenía que entender qué propiedades deberían tener para ser conceptos útiles. Así, estas ideas evolucionaron y en algunos casos se ha requerido de mucho tiempo y esfuerzo para llevarlas a su forma actual.

Otra aportación de este trabajo, es de interés heurístico, pues presentamos algunas soluciones históricas, como la construcción de Peano de una curva que llena todo un cuadrado o la construcción de la tangente dada por Fermat que contribuyen a comprender mejor estos conceptos y las relaciones con otras nociones. Mostramos que hay varias maneras de enfocar, entender y manejar una misma idea matemática o resolver un problema, cada una con posibilidades y limitaciones determinadas por la época.

La noción de función estaba inmersa en el concepto de curva hasta el siglo XVIII donde hubo una separación entre estos dos conceptos. Es sorprendente el trabajo de los matemáticos que iniciaron el camino al cálculo diferencial, pues hacían cálculo sin funciones, como lo hicieron Newton, Leibniz, por mencionar algunos, donde las curvas jugaban un papel importante. La geometría y la cinemática llegan a ser una motivación, junto a las ecuaciones y variables; son una combinación bastante fuerte que ayudaron a la comprensión de la noción de curva.

Apéndice A

Conceptos básicos

A.1. Definiciones

Definición A.1.1. Una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, I intervalo de $\mathbb{R}$, se dice que es localmente inyectiva, si $\forall t_0 \in I, \exists \delta > 0$ tal que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$ y $\alpha|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ es inyectiva.

Nota 1. Si t_0 coincide con uno de los extremos del intervalo, por ejemplo el inferior, sea este a , se requiere que exista un $\delta > 0$ tal que $\alpha|_{[a, a + \delta]}$ sea inyectiva.

Definición A.1.2. Se llama curva a la imagen de un intervalo mediante una aplicación continua localmente inyectiva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definición A.1.3. La aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ que define la curva se denomina representación paramétrica de la curva.

Definición A.1.4. Un homomorfismo $\phi : K \mapsto K'$ de un cuerpo K en un cuerpo K' , con $X, Y \in K$ se define como:

- $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$
- $\phi(X \cdot Y) = \phi(X) \cdot \phi(Y)$

A.2. Límites y derivadas

Fermat descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica “antecedente del concepto de la derivada”.

Método que se puede reducir al cálculo del siguiente límite.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

Aproximación similar a la que Newton (introdujo el concepto de fluxiones lo que hoy se conoce como derivadas) y Leibniz (interpretó la tangente a una curva como un cociente de infinitésimos) desarrollaron posteriormente.

Leibniz, bajo la influencia de Huygens, le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas estando seguro que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes a través de sumas. En julio de 1677 Leibniz ofreció las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones. Su método se trataba de una aproximación geométrica y no cinemática como en Newton. El artículo contenía los símbolos dx , dy que representaban para cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con las cuales construyó su cálculo diferencial “cálculo de tangentes”. y las reglas:

$$\begin{aligned} d(xy) &= xdy + ydx \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ d(x^n) &= nx^{n-1}dx. \end{aligned}$$

Introduciendo el término de “cálculo diferencial” (de diferencias) pero antes había usado la expresión “methodus tangentium directa”. Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores de todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son “incomparables” porque con respecto a las cantidades finitas son “como granos de arena con relación al mar”.

En el siglo XIX la función derivada logra su reconocimiento matemático con mayor rigor a partir de Niels Abel (1802-1829), Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) entre los más reconocidos.

Fue Bolzano (1817) quien definió por primera vez la derivada como un límite: la cantidad a la que la razón

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

En nuestros días, podemos definir la derivada como:

Definición A.2.1. Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b) , y supongamos que $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite existe. El límite, designado por $f'(c)$ se llama derivada de f en c .

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Este método de calcular límites define una nueva función f' , cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que existe el límite. La función f' se llama primera derivada de f . La n -ésima derivada de f designada por f^n .

A.3. Aspectos de la geometría griega

El libro I de “Los Elementos” de Euclides [15] afirma que:

Definición A.3.1. Un punto es lo que no tiene partes.

Definición A.3.2. Una línea es longitud sin anchura.

Definición A.3.3. Los extremos de una línea son puntos.

Definición A.3.4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Definición A.3.5. Superficie es lo que sólo tiene largo y ancho.

Definición A.3.6. Los extremos de las superficies son líneas.

Definición A.3.7. Figura es lo comprendido por uno o varios límites.

Definición A.3.8. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (Circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto interior son iguales entre sí.

Definición A.3.9. Y el punto se llama centro del círculo.

Euclides utiliza un método que asume algunas afirmaciones previas como evidentes, de igual forma, algunas construcciones que se consideran conocidas tal como las definiciones, los axiomas y los postulados, y a partir de éstas, mediante deducciones lógicas, se obtienen los resultados. Éste método se conoce como el método axiomático-deductivo, en el que primero se definen

unos objetos, luego se dan unas propiedades de éstos mediante postulados (o axiomas) y nociones comunes, que posteriormente se utilizan para deducir teoremas o en este caso proposiciones.

Apolonio en su libro de Cónicas I, realiza las siguientes definiciones:

Definición A.3.10. *Si desde un punto no situado en el plano de un círculo se traza a la circunferencia de éste una recta, se prolonga en sus dos direcciones y, permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo superficie cónica a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz; y llamo vértice de la superficie al punto fijo, y eje a la recta trazada por éste y el centro del círculo.*

Definición A.3.11. *Llamo cono a la figura limitada por el círculo y por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo; vértice del cono al que lo es de su superficie; eje a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo, y base a este.*

Definición A.3.12. *Llamo cono recto al que tiene el eje perpendicular a la base y oblicuo al que no tiene el eje perpendicular a la base.*

Las anteriores definiciones presentadas por Apolonio corresponden a lo que es una superficie cónica, a lo que es un cono en sus dos modalidades, recto y oblicuo.

A.4. Algunos aspectos sobre tangente

En el método de Máximos y Mínimos de Fermat, por primera vez aparece la idea de incrementar una magnitud (variable independiente de una función), lo que hoy en día es la esencia del cálculo diferencial. Fermat explica su método como sigue:

“Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- I) Sea A una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga el enunciado).
- II) Sea expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A en términos que pueden ser de cualquier grado.

- III) Se sustituirá a continuación la incógnita original A por $A + E$ y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A y de E , en términos que pueden ser de cualquier grado.
- IV) Se adigualará, para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
- V) Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que en los dos miembros habrá términos afectados de E o de una de sus potencias.
- VI) Se dividirán todos los términos por E , o por alguna potencia superior de E , de modo que desaparezca la E de, al menos, uno de los términos de cualquiera de los dos miembros.
- VII) Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparezca la E o una de sus potencias, y se igualará lo que queda, o bien, si en uno de los dos miembros no queda nada, se igualará lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
- VIII) La resolución de esta última ecuación dará el valor de A , que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original”.

La adigualdad viene a significar algo así como “tan aproximadamente iguales como sea posible” o, para no asociarlo directamente con infinitesimal, o entenderla como Fermat, como una pseudoigualdad [9] que llega a ser igualdad cuando E se hace cero.

Apéndice B

Curvas algebraicas y Polinomios

B.1. Círculo como lugar geométrico

El análogo de círculos en geometría proyectiva es la idea de secciones cónicas. Estas incluyen todas las secciones tradicionales del cono: círculo, elipse, hipérbola y parábola. En Geometría proyectiva, todas estas son figuras equivalentes bajo la transformación proyectiva apropiada. Las secciones cónicas se definirán usando propiedades de transformaciones proyectivas. El haz de puntos con eje l es el conjunto de todos los puntos en l . El haz de líneas con centro O es el conjunto de todas las líneas a través del punto O . Asumiremos que los lugares geométricos de puntos y líneas consisten únicamente de puntos y líneas euclidianas. Nos preocupará cómo se transforman los lugares geométricos de puntos y líneas bajo isometrías. El lugar geométrico de líneas con el centro O se transforma bajo la composición de dos isometrías euclidianas.

Definición B.1.1. *Un conjunto de puntos se denomina un lugar geométrico si cada punto del conjunto satisface alguna condición geométrica. Un punto es un miembro del lugar geométrico de puntos si y solo si satisface la condición.*

Ejemplo B.1.2. *Sea r la isometría de reflexión a través de la línea $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura B.1). Considere el haz de líneas con el centro O . Bajo la isometría r , una de estas líneas, $\overleftrightarrow{OP}$, se asignará a la aplicación $\overleftrightarrow{O'P}$, donde P es el punto de intersección de las líneas en $\overleftrightarrow{AB}$ y $r(O) = O'$. Decimos que $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{O'P}$ son líneas correspondientes bajo la transformación r .*

Considere el conjunto de todos los puntos de intersección de las líneas correspondientes. Estos incluirían los puntos P , Q y R como se muestra arriba.

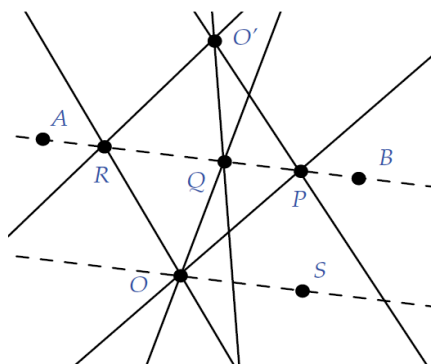


Figura B.1:

Este conjunto de puntos es el lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas correspondientes de dos haces (el de O y el de O') que están relacionados por la reflexión r .

Así, un punto está en el lugar geométrico de los puntos si cumple la condición de que es un punto de intersección de las líneas correspondientes de los dos haces. Claramente, este conjunto de puntos es la línea $\overleftrightarrow{AB}$. Hay una línea única que no genera un elemento en este lugar geométrico: la línea $\overleftrightarrow{OS}$ que es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ en O . Sin embargo, si consideramos este ejemplo en el plano Euclidiano extendido, con puntos en infinito unidos, entonces $\overleftrightarrow{OS}$ y $r(\overleftrightarrow{OS})$ se cruzan en un punto en el infinito, que luego tendríamos que agregar al lugar geométrico de los puntos.

Ahora veamos cómo podemos construir una sección cónica particular, el círculo, como un lugar de puntos (B.2).

Ejemplo B.1.3. *El círculo como un lugar bajo dos reflexiones.*

Construya el punto O que será el centro para un haz de líneas. Construye un pequeño círculo centrado en O con radio en el punto R .

Para facilitar, adjunte el punto P al círculo y construya $\overleftrightarrow{OP}$. Al mover el punto P podemos generar todas las diferentes líneas posibles en el haz de líneas en O . A continuación, creamos dos líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ para que sirvan como dos líneas de reflexión, y establece $\overleftrightarrow{AB}$ como una línea de reflexión. Seleccione $\overleftrightarrow{AB}$ y luego refleje esta línea. La línea m es la línea reflejada. Seleccionar O y refleja esto también, creando el punto O' .

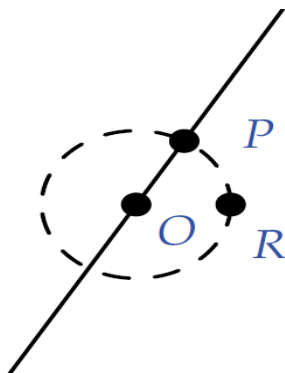


Figura B.2:

Ahora, llevaremos a cabo la segunda reflexión. El conjunto $\overleftrightarrow{CD}$ será como una línea de reflexión y refleja m a través de esta línea para crear la línea n (Figura B.3). Además, refleja O' para señalar O'' . Sea f la isometría que es la composición de estas dos reflexiones. Debajo de f la línea $\overleftrightarrow{OP}$, desde el haz de líneas en O , se mapea a la línea n , desde el haz de líneas en O'' . Construya la intersección X de $\overleftrightarrow{OP}$ y n .

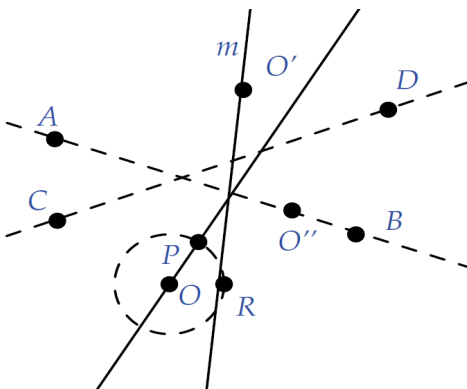


Figura B.3:

Ahora, considere el lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas correspondientes de los dos lápices en O y O'' . Este será precisamente el conjunto de puntos generados a partir de las posiciones que toma X a

medida que movemos el punto P . Mueva el punto P alrededor del círculo en O y vea qué pasa con X . ¡Parece barrer un círculo! (Figura B.4)

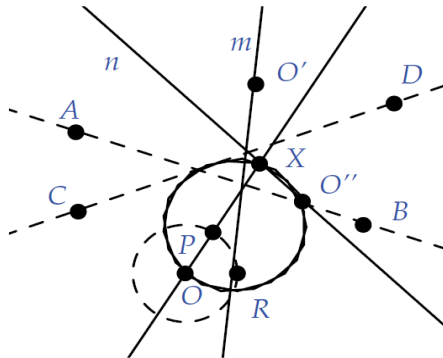


Figura B.4:

B.2. Definiciones básicas

Definición B.2.1. Sea A un anillo conmutativo y sean $a_0, \dots, a_n$ son elementos de A y $a_n \neq 0$. Un polinomio de grado n en la variable X con coeficientes en el anillo A es una expresión de la forma:

$$F = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

Definición B.2.2. Sea A un anillo conmutativo. Llamaremos conjunto de polinomios con coeficientes en A , y lo denotaremos por $A[x]$, al conjunto de las expresiones de la forma

$$F(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

con los $a_i \in A$ y $n \in \mathbb{N}$

Definición B.2.3. El grado de un polinomio $a(x)$, notado $\text{grado}(a(x))$, es el mayor entero n tal que $a_n \neq 0$. El polinomio cuyos coeficientes son todos nulos se llama polinomio nulo y se denota por 0 . Por convención, su grado es $\text{grado}(0) = -\infty$.

Definición B.2.4. Sea $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in k[x]$ un polinomio no nulo con $a_n \neq 0$ (de grado n). Llamaremos término líder de $a(x)$ al término $a_n x^n$, coeficiente líder a a_n y término constante a a_0 . Un polinomio es mónico si su coeficiente líder es 1. Los polinomios se dicen constantes cuando su grado es cero, así como el polinomio nulo.

Definición B.2.5. Un polinomio $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ es homogéneo de grado d si todos sus monomios tienen grado d .

Definición B.2.6. Un polinomio $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ es homogéneo de grado d si y sólo si $F(TX_0, \dots, TX_n) = T^d F(X_0, \dots, X_n)$ en $k[X_0, \dots, X_n]$.

Observación B.2.7. P es un polinomio mónico si el coeficiente $a_n = 1$. Además un polinomio del tipo $a_i x^i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ recibe el nombre de monomio.

Nota 2. El anillo $A[x_1, \dots, x_n]$ recibe el nombre de anillo de polinomios en n variables sobre A .

Definición B.2.8. Sea D un dominio polinomial sobre un campo K . Un polinomio $P(X_1, \dots, X_m)$ en $D[X_1, \dots, X_n]$ es homogéneo sobre D si todos sus monomios tienen el mismo grado sobre D .

Proposición B.2.9. Sea D un dominio polinomial sobre el campo K . Un polinomio $P(X_1, \dots, X_m)$ sobre D es homogéneo de grado n sobre D si y sólo si $P(tX_1, \dots, tX_m) = t^n P(X_1, \dots, X_m)$ como polinomios en $D[t, X_1, \dots, X_m]$.

Prueba:

La necesidad de la condición es obvia.

Por el contrario, en el polinomio $P(X_1, \dots, X_m)$, agrupamos todos los términos del mismo grado, para que

$$P(X_1, \dots, X_m) = P_n(X_1, \dots, X_m) + P_{n-1}(X_1, \dots, X_m) + \dots + P_0(X_1, \dots, X_m)$$

en suma de polinomios homogéneos con $P_i(X_1, \dots, X_m)$ homogéneos de grado i . Así

$$P(tX_1, \dots, tX_m) = t^n P_n(X_1, \dots, X_m) + t^{n-1} P_{n-1}(X_1, \dots, X_m) + \dots + P_0(X_1, \dots, X_m)$$

Por lo tanto

$$P(tX_1, \dots, tX_m) = t^n P(X_1, \dots, X_m)$$

Por suposición, tenemos que

$$\begin{aligned} t^n P_n(X_1, \dots, X_m) + t^{n-1} P_{n-1}(X_1, \dots, X_m) + \dots + P_0(X_1, \dots, X_m) = \\ t^n P_n(X_1, \dots, X_m) + t^n P_{n-1}(X_1, \dots, X_m) + \dots + t^n P_0(X_1, \dots, X_m). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias de t en cada miembro obtenemos que $P = P_n$. Además $P_i(X_1, \dots, X_m) = 0$ si i es distinto de n . Entonces $P(X_1, \dots, X_m) = P_n(X_1, \dots, X_m)$ y por lo tanto $P(X_1, \dots, X_m)$ es homogéneo de grado n . $\triangleright$

Definición B.2.10. Sea V un espacio vectorial. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de V es el conjunto de subespacios vectoriales 1-dimensionales de V .

O bien,

Definición B.2.11. El espacio proyectivo $\mathbb{P}_n(K)$ de dimensión n sobre un campo K es el conjunto de todas las líneas vectoriales del espacio K^{n+1} . Cada una de tales líneas vectoriales se llama un punto del espacio proyectivo.

Si el espacio vectorial V tiene dimensión $n + 1$, entonces $\mathbb{P}(V)$ es un espacio proyectivo de dimensión n . Un espacio proyectivo unidimensional se denomina línea proyectiva y un plano bidimensional un plano proyectivo. Por supuesto, “línea vectorial” significa subespacio vectorial de dimensión 1.

Definición B.2.12. Una transformación proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ a $\mathbb{P}(W)$ es la aplicación definida por una transformación lineal invertible $T : V \mapsto W$.

A partir de ahora, trabajaremos en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ y usaremos coordenadas homogéneas $[x, y, z]$. La ecuación de una línea es $ax + by + cz = 0$ y esto da un subconjunto bien definido de $\mathbb{P}_2$.

Definición B.2.13. Un polinomio $F(X, Y, Z)$ es un polinomio de grado d si $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d F(X, Y, Z)$

Claramente $F(X, Y, Z) = 0$ es un subconjunto bien definido de $\mathbb{P}_2$.

Definición B.2.14. Sea $F(X, Y, Z)$ un polinomio homogéneo de grado $d > 0$ sin factores repetidos, entonces $F(X, Y, Z) = 0$ define una curva plana proyectiva $C \in \mathbb{P}_2$.

Definición B.2.15. Una curva algebraica es un subconjunto $B \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ del plano proyectivo complejo que, en algún sistema de coordenadas homogéneas, puede ser descrito como el conjunto de esos puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación $P(X, Y, Z) = 0$. Con $P(X, Y, Z)$ distinto de cero y homogéneo.

Definición B.2.16. Sea k un campo. Una (plana, proyectiva) curva algebraica definida sobre k es una ecuación de la forma $P(X, Y, Z) = 0$ donde $P(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ es un polinomio homogéneo no nulo sin ningún factor múltiple.

Notar que estamos trabajando con el plano proyectivo complejo, $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Ejemplo B.2.17. Las curvas de grado 1 se llaman líneas proyectivas. Notamos que de inmediato podemos definir las por una ecuación lineal $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$, $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}_k^2$.

Proposición B.2.18 (Fórmula de Euler). Si $P(X_1, \dots, X_m)$ es un polinomio homogéneo arbitrario de grado n sobre un campo K , entonces

$$X_1 \frac{\partial P(X_1, \dots, X_m)}{\partial X_1} + \dots + X_m \frac{\partial P(X_1, \dots, X_m)}{\partial X_m} = \text{grad} P \cdot P(X_1, \dots, X_m).$$

Prueba:

Descomponemos $P(X_1, \dots, X_m)$ en todos los sumandos

$$P_i(X_1, \dots, X_m) = a_i X_1^{b_i} \dots X_m^{d_i}$$

con $b_i + \dots + d_i = \text{grad} P$. Entonces

$$\begin{aligned} X_1 \frac{\partial P_i}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial P_i}{\partial X_2} + \dots + X_m \frac{\partial P_i}{\partial X_m} &= a_i (b_i + \dots + d_i) X_1^{b_i} \dots X_m^{d_i} \\ &= P_i \cdot \text{grad} P. \triangleright \end{aligned}$$

Definición B.2.19. Sean dos polinomios $f(x), g(x) \in k[x]$. Un polinomio $p(x) \in k[x]$ es un máximo común divisor de $f(x)$ y $g(x)$ si verifica:

- $p(x) | f(x)$ y $p(x) | g(x)$
- Si $q(x)$ es otro polinomio que divide a $f(x)$ y a $g(x)$ entonces $q(x) | p(x)$

Observación B.2.20. *El máximo común divisor de dos polinomios no es único. Si $p(x) = \text{mcd}(f(x), g(x))$, entonces, para cualquier $a \in k \setminus \{0\}$, $ap(x) = \text{mcd}(f(x), g(x))$. Por eso cuando hablamos de un máximo común divisor, podremos acordar que estamos tomando un polinomio mónico y, en esas condiciones, sí que es único.*

Definición B.2.21. *Un polinomio $p(X)$ no constante sobre un campo K es irreducible cuando no puede escribirse como el producto de dos polinomios no constantes.*

Proposición B.2.22. *Sea $p(x) \in k[x]$ un polinomio irreducible. Si $f(x)$ es un polinomio que no es divisible por $p(x)$, entonces el máximo común divisor de $p(x)$ y $f(x)$ es 1 (una constante).*

Demostración:

Sea $d(x) = \text{mcd}(p(x), f(x))$. Como $d(x) | p(x)$, existirá un polinomio $p'(x)$ de modo que podamos escribir $p(x) = d(x)p'(x)$. Ahora bien, por la definición de irreducibilidad, o $d(x)$ o $p'(x)$ es constante. Si el polinomio constante es $d(x)$, tendríamos el resultado. Veamos pues qué pasa cuando el que fuera constante fuera $p'(x)$. En ese caso $p(x) | d(x)$, por lo que $p(x)$ dividiría a $f(x)$, que no es posible. Por consiguiente $d(x)$ no puede ser nada más que una constante. $\triangleleft$

Teorema B.2.22.1 (Descomposición en factores irreducibles). *Cualquier polinomio no constante de $k[x]$ es irreducible o factoriza en producto de polinomios irreducibles. Este producto es único en tanto que si tenemos dos factorizaciones de $f(x)$ en producto de polinomios irreducibles en $k[x]$ de la forma $f(x) = p_1(x) \cdots p_s(x) = q_1(x) \cdots q_t(x)$ necesariamente $s = t$ y existe una correspondencia uno a uno entre los factores $p_1(x), \dots, p_s(x)$ y $q_1(x), \dots, q_t(x)$ donde si $p_i(x)$ se corresponde con $q_j(x)$, existe un $\alpha \in k \setminus \{0\}$ tal que $p_i(x) = \alpha q_j(x)$.*

Proposición B.2.23. *Sea $I = (f(x)) \subset k[x]$ un ideal. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

- *I es maximal;*
- *I es primo;*
- *$f(x)$ es irreducible.*

Teorema B.2.23.1. *Sea k sea un campo y K una extensión de campo que sea finita generada como una k -álgebra. Entonces K es algebraica sobre k .*

Teorema B.2.23.2 (Weak, Nullstellensatz). *Sea k un campo algebraicamente cerrado. Entonces, cada ideal máximo en el anillo de polinomios $R = k[x_1, \dots, x_n]$ tiene la forma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ para algunos $a_1, \dots, a_n \in k$. Como consecuencia, una familia de funciones polinomiales en k^n sin ceros comunes generan el ideal unidad de R .*

Demostración:

Si m es un ideal máximo de R , entonces R/m es un campo que se genera finitamente como k -álgebra. Según el teorema anterior, es una extensión algebraica de k , por lo tanto igual a k . Por lo tanto, cada x_i se asigna a algunos $a_i \in k$ bajo el mapa natural $R \rightarrow R/m = k$, por lo que m contiene el ideal $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Este es un ideal máximo, por lo que es igual a m . Para ver la segunda afirmación, considere el ideal generado por algunas funciones polinomiales dadas sin ceros comunes. Si estuviera en algún ideal máximo, digamos $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, entonces todas las funciones desaparecerían en $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$, contrariamente a la hipótesis. Como no se encuentra en ningún ideal máximo, debe ser todo R . $\triangleleft$

Teorema B.2.23.3 (Nullstellensatz). *Supongamos que k es un campo algebraicamente cerrado y g y $f_1, \dots, f_m$ son miembros de $R = k[x_1, \dots, x_n]$, considerado como funciones polinomiales en k^n . Si g se anula en el punto cero común de las f_i , entonces cierta potencia de g reside en el ideal que generan.*

Bibliografía

- [1] Alarcon, S., *El método de Descartes para determinar la tangente a una curva*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, XIX (1), 103-114.
- [2] Ayerbe, M., *Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes*. 2017. Revista electrónica, Vol. VII, disponible en <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6268910.pdf>.
- [3] Bobadilla, M., *El teorema Fundamental del Cálculo: Una perspectiva histórica*. Unicauca CIENCIA, 2018.
- [4] Bôcher, M., *Plane Analytic Geometry*. New York, Henry Holt and Company, 2005.
- [5] Borceux, F., *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy I*. Switzerland, Springer, 2014.
- [6] Borceux, F., *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy II*. Switzerland, Springer, 2014.
- [7] Borceux, F., *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy III*. Switzerland, Springer, 2014.
- [8] Boyer, C., *Historia de la matemática*. Estados Unidos de América. Alianza Editorial, 2007.
- [9] Boyer, C., *The History of Calculus and its Conceptual Development (the Concepts of the Calculus)*. New York, Dover, 1949.
- [10] Colerus, E., *Breve historia de las matemáticas*. España, Doncel, 1972.
- [11] Coolidge, J. I., *A history of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York, Dover Publication, 1968.

- [12] De la Torre, G., *El método cartesiano y la geometría analítica*. Colombia, Escuela Regional de Matemáticas, Universidad del Valle, 2006.
- [13] Descartes, R., *The Geometry*. (Traducido por Eugene, D. y Latham, M). New York, Dover, 1954.
- [14] Edwards, C., *The Historical Development of the Calculus*. New York, Springer-Verlag, 1994.
- [15] Euclides., *Los elementos*. (Traducido por Puertas, M.). España, BIBLIOTECA GREDOS, 2015.
- [16] Fishback, W., *Projective and Euclidean Geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1969.
- [17] George, B., *Cálculo: Una variable*. México, Pearson Educación, 2006.
- [18] González, P., *Euler y la Geometría Analítica*. España, Universidad Politécnica de Cataluña, 2008.
- [19] González, P., *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid, España, Alianza Editorial, 1992.
- [20] González, P., *Raíces Históricas y Trascendencia de la Geometría Analítica*. Revista SIGMA, 2007, pág. 205-236.
- [21] Guinness, G., *From the Calculus to Set Theory*. Princeton, New Jersey, Princeton university Press, 2000.
- [22] Hernández, V., *La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Apolonio?*. Disponible en <http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf>
- [23] Kitcher, O., *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York, Oxford, Oxford University Press, 1983.
- [24] Kleiner, I. *Evolution of the function concept: A brief survey*. The college Mathematics Journal, 1989. Pág. 282-300.
- [25] Kleiner, I. *History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus*. Springer-Verlag, 2001, pág. 137-174.

- [26] Lafuente, J., *Geometría diferencial de curvas en el plano*. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID. Disponible en <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas>
- [27] Larson, R., *Cálculo II de varias variables*. México, D.F., Mc Graw Hill, 2010.
- [28] Lehmann, C., *Geometría Analítica*. New York, Limusa, 1989.
- [29] Mateus, E., *Breve reseña histórica de la evolución del cálculo infinitesimal y sus dos grandes ramas: El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral*. Bogotá, Colombia, Doctorando en Educación Matemática.
- [30] Rüting, D., *Some definitions of the Concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6, No. 4, 1984.
- [31] Salazar, W., *Introducción al cálculo a través de algunas curvas especiales*. Medellín, Colombia. Tesis de Maestría, 2011.
- [32] Torre, A., *El método cartesiano y la geometría analítica*. Colombia, Universidad del Valle, 2004.
- [33] Youschkevitch, P., *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16, 1976. Pag. 37-85.
- [34] Wall, C. *Singular Points of Plane Curves*. New York, Cambridge University Press, 2004.