Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias físico-matemáticas
licenciatura en matemáticas

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO PARA LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MISSAEL MEZA MUÑOZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA

DR. IVÁN HERNÁNDEZ ORZUNA

PUEBLA,PUE., MAYO DEL 2018.

Dedicado a
mi familia.

II

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, sus consejos y la paciencia que me han tenido para poder traerme hasta este punto de mi vida.

Tambien quiero agradecer a mis hermanos que tambien me han aportado cosas buenas en situaciones que han sido difíciles para mi.

A mi tutora M.C. Maria Guadalupe Raggi Cárdenas quién desde el primer día que la conocí ha estado al pendiente de mí.

A mis asesores de tesis, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y Dr. Ivan Hernández Orzuna, que me han dado la oportunidad de trabajar con ellos y hacer posible la realización de esta tesis, además de darme valiosos consejos para crecer profesionalmente.

A mis sinodales Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. Jacobo Oliveros Oliveros, M.C. Julio Erasto Poisot Macías (en orden de aparición por orden alfabético), por aceptar revisar este trabajo de tesis y hacer de este trabajo algo mucho mejor.

A todos mis amigos de la facultad, que hicieron de esta experiencia algo mucho más agradable de lo que ya era.

Introducción

La integral de Riemann-Stieltjes fue introducida por primera vez en 1894 por el matemático holandés Thomas J. Stieltjes (1856-1894). Surge por el estudio de las fracciones continuas y el problema de los momentos (veáse [14]). Esta integral es una generalización de la integral de Riemann y tomó más interés cuando el matemático F. Riesz (1880,1956) la utilizó para representar un funcional lineal continuo en el espacio de las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$.

Un Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Riemann

El Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Riemann dice lo siguiente: Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$, si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Un Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Riemann-Stieltjes

Queremos hallar una igualdad análoga a (1) para la integral de Riemann-Stieltjes en términos de algún concepto análogo a la derivada usual. Generalmente en los textos clásicos no se encuentra tal igualdad, es decir, no se encuentra un teorema de la siguiente forma: Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-Stieltjes integrable en $[a, b]$ con respecto a una función $\Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en algún sentido y $F'_\Omega(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f\, d\Omega = F(b) - F(a).$$

Por lo anterior, surge la siguiente pregunta ¿Existirá un concepto que generalice la derivada usual de tal forma que permita obtener una fórmula semejante a (1) del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes?

Algunos matemáticos han trabajado con generalizaciones del concepto de derivada usual para resolver diversos problemas, más precisamente se habla de la derivada de una función f con respecto a otra función estrictamente creciente u. Por ejemplo, Feller en [5] y [6] trata problemas relacionados con operadores diferenciales, algunos de los cuales sirven para resolver un problema de la Teoría de Difusión y mostrar que tales operadores son también útiles para problemas clásicos.

Regresando a la pregunta que hicimos anteriormente, la respuesta es sí. Basados en el articulo [4], desarrollamos un teorema análogo al del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes a través del concepto de la Ω-derivada.

Cabe mencionar que existen conceptos más generales que el de Ω-derivada, por ejemplo, los tratados en los artículos de Feller antes mencionados, [7] y [9].

Por supuesto, también se pueden tratar cosas referentes a la integración numérica para el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, aunque ese no es nuestro objetivo, para alguien interesado en este tema puede consultar [11] y [3].

También mencionamos algunos artículos donde se trabajan con otras generalizaciones relacionadas con la integral de Riemann-Stieltjes como en [2] y [12].

A continuación se realiza un esbozo general de los capítulos que contiene esta tesis.

En el capítulo 1 estudiamos los conceptos necesarios para estudiar la integral de Riemann-Stieltjes con la definición que originalmente propuso Stieltjes (veáse [8]), se desarrollan las propiedades básicas de esta y algunos teoremas relevantes que involucran esta integral, cabe mencionar que también sirve como una introducción al estudio de la misma, basándonos en la integral de Riemann.

En el capítulo 2 se sigue con el estudio de esta integral, pero visto desde otros enfoques, uno de ellos es con la definición que propuso Pollard (veáse [10]), que también es tratada en [1]. En el caso de la integral de Riemann muchos de estos enfoques si son equivalentes.

En el capítulo 3 se define el concepto de Ω-derivada y se desarrollan sus propiedades elementales, además de teoremas que generalizan algunos de los ya conocidos del cálculo diferencial usual, por supuesto basándonos en el concepto de derivada usual.

Finalmente en el capítulo 4 se presenta El Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes a través del concepto de Ω-derivada.

Índice general

Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes

Missael Meza Muñoz

Mayo del 2018

Capítulo 1

La integral de Riemann-Stieltjes

En este primer capítulo estudiaremos algunos conceptos que nos servirán para el estudio de la integral de Riemann-Stieltjes y demostrar algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.1. *Una partición del intervalo* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *es un conjuntos finito de puntos* $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *que satisface*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Con $\mathcal{P}([a, b])$ *se denota el conjunto de todas las particiones del intervalo* $[a, b]$.

Definición 1.2. *Sea* $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$*, definimos la norma de* P *de la siguiente forma:*

$$||P|| = máx\{x_k - x_{k-1} | k = 1, \ldots, n\}.$$

Definición 1.3. *Sean* $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ *y* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *para cada* $k = 1, \ldots, n$*. Sean* $f, \Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones. Definimos una suma de Riemann-Stieltjes de* f *con respecto a* Ω*, denotada por* $S(P, f, \Omega)$*, como*

$$S(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})).$$

La definición que daremos a continuación es la que originalmente propuso Stieltjes, después se dieron algunas modificaciones de está, algunas de ellas resultaron equivalentes. Todo esto se discutirá más adelante.

Definición 1.4. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a una función $\Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en $[a, b]$ si, existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ que cumple la siguiente propiedad: $\forall P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ y cada $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$,*

$$\textit{si } ||P|| < \delta, \ \textit{entonces } |S(P, f, \Omega) - A| < \epsilon.$$

Con el simbolo $\mathcal{R}(\Omega, [a, b])$ denotamos el conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que son Riemann-Stieltjes integrables con respecto a la función $\Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Observación: Para cada $\delta > 0$, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que $||P|| < \delta$.

Teorema 1.1. *Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$, entonces existe un único número real A que cumple con la Definición 1.4.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que existen $A, B \in \mathbb{R}$ que cumplen con la Definición 1.4. Entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para cada $P, Q \in \mathcal{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta_1$ y $||Q|| < \delta_2$ se cumple que

$$|S(P, f, \Omega) - A| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } |S(Q, f, \Omega) - B| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $T \in \mathcal{P}([a, b])$ con $||T|| < \delta$, entonces

$$0 \leq |A - B| \leq |S(T, f, \Omega) - B| + |S(T, f, \Omega) - A| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $A = B$. □

Observaciones:

1. El número A del Teorema 1.1 se denotará como $\int_a^b f \, d\Omega$ y se llamará la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a Ω sobre $[a, b]$. Por brevedad diremos también la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a Ω cuando esté claro quien es el intervalo. f se llama integrando y Ω integrador.

2. Si $\Omega(x) = x$ para cada $x \in [a, b]$ se recupera el concepto de la integral de Riemann.

1.1. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes

Sabemos que en el caso de la integral de Riemann se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.2. *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones Riemann-integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Teorema 1.3. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable en $[a,b]$, entonces para cada $r \in \mathbb{R}$ la función $rf : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable en $[a,b]$, y*

$$\int_a^b (rf)\,dx = r\int_a^b f\,dx.$$

Si se quiere conocer las demostraciones de los resultados anteriores, puede consultarse [13]. El siguiente resultado nos dice que los Teoremas 1.2 y 1.3 son válidos para la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.4. *Si $f, g \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$ y*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\,d\Omega = c_1 \int_a^b f\,d\Omega + c_2 \int_a^b g\,d\Omega.$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ y $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$. Entonces

$$S(P, h, \Omega) = c_1 S(P, f, \Omega) + c_2 S(P, g, \Omega).$$

Sea $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta_1$, se tiene que

$$\left| S(P, f, \Omega) - \int_a^b f\,d\Omega \right| < \frac{\epsilon}{2(|c_1| + 1)}.$$

Como $g \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta_2$, se tiene que

$$\left| S(P, g, \Omega) - \int_a^b g \, d\Omega \right| < \frac{\epsilon}{2(|c_2| + 1)}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $||P|| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| S(P, h, \Omega) - c_1 \int_a^b f \, d\Omega - c_2 \int_a^b g \, d\Omega \right| &\leq |c_1| \left| S(P, f, \Omega) - \int_a^b f \, d\Omega \right| + \\ |c_2| \left| S(P, g, \Omega) - \int_a^b g \, d\Omega \right| &< \frac{(|c_1| + 1)\epsilon}{2(|c_1| + 1)} + \frac{(|c_2| + 1)\epsilon}{2(|c_2| + 1)} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) \, d\Omega = c_1 \int_a^b f \, d\Omega + c_2 \int_a^b g \, d\Omega.$$

$\square$

Teorema 1.5. *Sean* $\Omega, \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones.*
Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b]) \cap \mathcal{R}(\alpha, [a,b])$ *y* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *entonces* $f \in \mathcal{R}(c_1\Omega + c_2\alpha, [a,b])$ *y*

$$\int_a^b f \, d(c_1\Omega + c_2\alpha) = c_1 \int_a^b f \, d\Omega + c_2 \int_a^b f \, d\alpha.$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ y $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = c_1\Omega(x) + c_2\alpha(x)$. Entonces

$$S(P, f, h) = c_1 S(P, f, \Omega) + c_2 S(P, f, \alpha).$$

Sea $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta_1$, se tiene que

$$\left| S(P, f, \Omega) - \int_a^b f \, d\Omega \right| < \frac{\epsilon}{2(|c_1| + 1)}.$$

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a,b])$, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta_2$, se tiene que

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2(|c_2| + 1)}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\left|S(P,f,h) - c_1\int_a^b f\,d\Omega - c_2\int_a^b f\,d\alpha\right| &\leq |c_1|\left|S(P,f,\Omega) - \int_a^b f\,d\Omega\right| + \\ |c_2|\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| &< \frac{(|c_1|+1)\epsilon}{2(|c_1|+1} + \frac{(|c_2|+1)\epsilon}{2(|c_2|+1)} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f\,d(c_1\Omega + c_2\alpha) = c_1\int_a^b f\,d\Omega + c_2\int_a^b f\,d\alpha.$$

□

Teorema 1.6. *Si $f \in \mathcal{R}(\Omega,[a,b])$, y Ω es estrictamente creciente en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ y cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\text{si } ||P|| < \delta, \text{ entonces } \left|S(f,\Omega,P) - \int_a^b f\,d\Omega\right| < \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

Fijemos una partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ y los puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1,\ldots,n$ que satisfaga (1.1). Definimos

$$M := \textit{máx}\{|f(t_i)||i = 1,\ldots,n\} \text{ y } m := \textit{mín}\{\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1})|i = 1,\ldots,n\}.$$

Sea $x \in [a,b]$ y sea j el índice más pequeño tal que $x \in [x_{j-1}, x_j]$, consideremos $T = \{t_1, \ldots t_{j-1}, x, t_{j+1}, \ldots, t_n\}$.

Notemos que

$$|f(x)(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1})) - f(t_j)(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1}))| = |S(f,\Omega,P_T) - S(f,\Omega,P)|,$$

donde P_T es la misma que P solo que las elecciones de los puntos en cada subintervalo que determina P son los puntos de T, entonces

$$|S(f,\Omega,P) - S(f,\Omega,P_T)| \leq \left|S(f,\Omega,P) - \int_a^b f\,d\Omega\right| + \left|\int_a^b f\,d\Omega - S(f,\Omega,P_T)\right| < 1,$$

de aqui que

$$|f(x)(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1})) - f(t_j)(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1}))| < 1,$$

así $|f(x)|(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1})) - |f(t_j)|(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1})) < 1$, entonces

$$|f(x)|(\Omega(x_j)-\Omega(x_{j-1})) < |f(t_j)|(\Omega(x_j)-\Omega(x_{j-1}))+1 \leq M(\Omega(x_j)-\Omega(x_{j-1}))+1.$$

Se concluye que $|f(x)| \leq M + \frac{1}{m}$.

Por lo tanto, f es una función acotada. $\square$

Observación: Si $f, \Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones, $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$ y Ω es creciente en $[a, b]$, entonces para cada $P \in \mathcal{P}([a, b])$ se tiene que $S(P, f, \Omega) \geq 0$.

Teorema 1.7. *Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$ con $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$, Ω es creciente en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f\, d\Omega \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $\int_a^b f\, d\Omega < 0$. Sea $\epsilon = -\int_a^b f\, d\Omega > 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta$ se tiene que $\left|S(P, f, \Omega) - \int_a^b f\, d\Omega\right| < \epsilon$. De aquí que

$$\int_a^b f\, d\Omega < S(P, f, \Omega) - \int_a^b f\, d\Omega < -\int_a^b f\, d\Omega,$$

entonces $S(P, f, \Omega) < 0$, que es una contradicción por la observación anterior. $\square$

Teorema 1.8. *Sean $f, g \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$, donde Ω es creciente en $[a, b]$, si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces $\int_a^b f\, d\Omega \leq \int_a^b g\, d\Omega$.*

Demostración. Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$, entonces $h(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$. Además $h \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$, entonces por el Teorema 1.7 y el Teorema 1.4 se tiene que

$$\int_a^b h\, d\Omega = \int_a^b (g - f)\, d\Omega = \int_a^b g\, d\Omega - \int_a^b f\, d\Omega \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f\, d\Omega \leq \int_a^b g\, d\Omega.$$

$\square$

Teorema 1.9. *Sea $r \in \mathbb{R}$ y definamos $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = r$. Entonces $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$ para cada función $\Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y*

$$\int_a^b f\, d\Omega = r(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$, y $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Entonces

$$S(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) = r \sum_{k=1}^{n} (\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1}))$$

$= r[(\Omega(x_1) - \Omega(x_0) + \Omega(x_2) - \Omega(x_1) + \ldots + \Omega(x_{n-1}) - \Omega(x_{n-2}) + \Omega(x_n) - \Omega(x_{n-1})]$
$= r(\Omega(b) - \Omega(a)).$ □

Teorema 1.10. *Sea $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, donde Ω es creciente en $[a,b]$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ para cada $x \in [a,b]$, entonces*

$$\alpha(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq \int_a^b f\, d\Omega \leq \beta(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ para cada $x \in [a,b]$. Por el Teorema 1.8 se tiene que

$$\int_a^b \alpha\, d\Omega \leq \int_a^b f\, d\Omega \leq \int_a^b \beta\, d\Omega,$$

entonces por el Teorema 1.9 se tiene que

$$\alpha(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq \int_a^b f\, d\Omega \leq \beta(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

□

1.2. Condiciones equivalentes de integrabilidad de Riemann-Stieltjes

En esta sección veremos algunas equivalencias que nos dicen cuándo se cumple que una función definida sobre un intervalo cerrado es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a otra función, también definida sobre el mismo intervalo.

Teorema 1.11. *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Entonces son equivalentes:*

a) $\int_a^b f\, d\Omega = A$,

b) *(Criterio de Cauchy) Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$ y $||Q|| < \delta$ se tiene que $|S(P,f,\Omega) - S(Q,f,\Omega)| < \epsilon$,*

c) *Para cada sucesión de particiones $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ tales que $\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Omega) = A$.*

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)*
Sean $A = \int_a^b f\, d\Omega$ y $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $T \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $||T|| < \delta$ se tiene que

$$|S(T,f,\Omega) - A| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.2}$$

Sean $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ tales que $||P|| < \delta$ y $||Q|| < \delta$, entonces por (1.2) se tiene que

$$|S(P,f,\Omega) - S(Q,f,\Omega)| \leq |S(P,f,\Omega) - A| + |S(Q,f,\Omega) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

b) $\Rightarrow$ *c)*
Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0$.
Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$ y $||Q|| < \delta$, entonces

$$|S(P,f,\Omega) - S(Q,f,\Omega)| < \epsilon. \tag{1.3}$$

Como $\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene que $||P_n|| < \delta$. Entonces para cada $n, m \geq n_0$ se tiene que $||P_n|| < \delta$ y $||P_m|| < \delta$, entonces por (1.3) se tiene que

$$|S(P_n,f,\Omega) - S(P_m,f,\Omega)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{S(P_n,f,\Omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} S(P_n,f,\Omega) = A$.
c) $\Rightarrow$ *a)*

Supongamos que $\int_a^b f\,d\Omega \neq A$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $P_\delta \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $||P_\delta|| < \delta$ y

$$|S(P_\delta, f, \Omega) - A| \geq \epsilon.$$

Para $\delta = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de particiones $\{P_n\} \subseteq \mathcal{P}([a,b])$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0$ y

$$|S(P_n, f, \Omega) - A| \geq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Omega) \neq A$. $\square$

Teorema 1.12. *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $[c,d] \subseteq [a,b]$. Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, entonces $f \in \mathcal{R}(\Omega, [c,d])$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$, $||Q|| < \delta$ se cumple que

$$|S(P, f, \Omega) - S(Q, f, \Omega)| < \epsilon.$$

Sean $R, T \in \mathcal{P}([c,d])$ con $||R|| < \delta$ y $||T|| < \delta$, consideremos $P_1 \in \mathcal{P}([a,c])$ y $P_2 \in \mathcal{P}([d,b])$ tales que $||P_1|| < \delta$ y $||P_2|| < \delta$. Si $A = P_1 \cup R \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ y $B = P_1 \cup T \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$, entonces $||A|| < \delta$ y $||B|| < \delta$, entonces

$$|S(A, f, \Omega) - S(B, f, \Omega)| < \epsilon.$$

Tomando las mismas elecciones de puntos en $P_1 \in \mathcal{P}([a,c])$ y $P_2 \in \mathcal{P}([d,b])$ en las sumas $S(A, f, \Omega)$ y $S(B, f, \Omega)$ se tiene que

$$|S(A, f, \Omega) - S(B, f, \Omega)| = |S(P_1, f, \Omega) + S(R, f, \Omega) + S(P_2, f, \Omega) -$$

$$S(P_1, f, \Omega) - S(T, f, \Omega) - S(P_2, f, \Omega)| = |S(R, f, \Omega) - S(T, f, \Omega)| < \epsilon.$$

Entonces por el Criterio de Cauchy se concluye que $f \in \mathcal{R}(\Omega, [c,d])$. $\square$

Teorema 1.13. *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $c \in (a,b)$. Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, entonces $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,c]) \cap \mathcal{R}(\Omega, [c,b])$ y*

$$\int_a^b f\,d\Omega = \int_a^c f\,d\Omega + \int_c^b f\,d\Omega.$$

Demostración. Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $\lim_{x\to\infty} ||P_n|| = 0$, como $f \in \mathcal{R}(\Omega,[a,b])$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} S(P_n, f, \Omega) = \int_a^b f\, d\Omega.$$

Consideremos la sucesión de particiones $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del intervalo $[a,b]$, donde $Q_n = P_n \cup \{c\}$, entonces $0 \leq ||Q_n|| \leq ||P_n||$, de aquí que $\lim_{x\to\infty} ||Q_n|| = 0$, además podemos escribir $Q_n = P_1^{(n)} \cup P_2^{(n)}$, donde $P_1^{(n)} \in \mathcal{P}([a,c])$ y $P_2^{(n)} \in \mathcal{P}([c,b])$ tales que $\lim_{n\to\infty} ||P_1^{(n)}|| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} ||P_2^{(n)}|| = 0$, de donde

$$S(Q_n, f, \Omega) = S(P_1^{(n)}, f, \Omega) + S(P_2^{(n)}, f, \Omega), \text{ entonces}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(Q_n, f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} S(P_1^{(n)}, f, \Omega) + \lim_{n\to\infty} S(P_2^{(n)}, f, \Omega).$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f\, d\Omega = \int_a^c f\, d\Omega + \int_c^b f\, d\Omega.$$

□

1.3. Teorema del Valor Medio para la integral de Riemann-Stieltjes

En el caso de la integral de Riemann se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.14. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces f es Riemann-integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Ver [13]. □

En el caso de la integral de Riemann-Stieltjes se tiene un resultado parecido al anterior.

Teorema 1.15. *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Si f es continua en $[a,b]$ y Ω monótona, entonces $f \in \mathcal{R}(\Omega,[a,b])$.*

Demostración. Supongamos que Ω es creciente en $[a,b]$, el otro caso se hace de manera análoga. Sea $\epsilon > 0$, como f es uniformemente continua en $[a,b]$, entonces existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cada $x, y \in [a,b]$

$$\text{si } |x-y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{\Omega(b) - \Omega(a)}.$$

Sean $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}, Q = \{a = y_0, y_1, \ldots, y_m = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para cada $k = 1, \ldots, n$, $w_k \in [y_{k-1}, y_k]$ para cada $k = 1, \ldots, m$, tales que $||P|| < \frac{\delta}{2}$ y $||Q|| < \frac{\delta}{2}$, entonces

$$S(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1}))$$

y

$$S(Q, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{m} f(w_k) \cdot (\Omega(y_k) - \Omega(y_{k-1})).$$

Consideremos $R = P \cup Q = \{a = z_0, z_1, \ldots, z_r = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$, entonces para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $[z_{k-1}, z_k] \subseteq [x_{j-1}, x_j]$, definimos $t'_k = t_j$, entonces

$$S(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{r} f(t'_k) \cdot (\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})).$$

También para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $[z_{k-1}, z_k] \subseteq [y_{j-1}, y_j]$, definimos $w'_k = w_j$, entonces

$$S(Q, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{r} f(w'_k) \cdot (\Omega(z_j) - \Omega(z_{j-1})).$$

Como $|t'_k - w'_k| < \delta$, entonces $|S(P, f, \Omega) - S(Q, f, \Omega)| =$

$$\left| \sum_{k=1}^{r} f(t'_k) \cdot (\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m} f(w'_k) \cdot (\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})) \right| =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{r} (f(t'_k) - f(w'_k)) \cdot (\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})) \right| \leq \sum_{k=1}^{r} |f(t'_k) - f(w'_k)||\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})|$$

$$< \frac{\epsilon}{\Omega(b) - \Omega(a)} \cdot \sum_{k=1}^{r} (\Omega(z_k) - \Omega(z_{k-1})) = \epsilon.$$

Por lo tanto, por el Criterio de Cauchy se concluye que $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$. $\square$

Teorema 1.16 (Teorema del Valor Medio para integrales de Rieman-Stieltjes). *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que f es continua en $[a,b]$ y Ω es creciente en $[a,b]$. Entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f\,d\Omega = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

Demostración. Por el Teorema 1.15 se tiene que $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, como f es continua en $[a,b]$, entonces existen $x_0, x_1 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ para todo } x \in [a,b]$$

y por el Teorema 1.8 se tiene que

$$f(x_0)(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq \int_a^b f\,d\Omega \leq f(x_1)(\Omega(b) - \Omega(a)). \tag{1.4}$$

Tenemos los siguientes casos:
i) Si $\Omega(a) = \Omega(b)$, entonces Ω es una función constante, entonces por (1.4) se tiene que

$$\int_a^b f\,d\Omega = 0 = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)) \textit{ para cada } c \in [a,b].$$

ii) Si $\Omega(a) < \Omega(b)$, entonces

$$f(x_0) \leq \frac{\int_a^b f\,d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)} \leq f(x_1),$$

por el Teorema del Valor Intermedio, existe c entre x_0 y x_1 tal que

$$\frac{\int_a^b f\,d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)} = f(c).$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f\,d\Omega = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

□

Se puede hacer una modificacion del Teorema del Valor Medio para integrales de Riemann-Stieltjes de la siguiente forma:

Teorema 1.17. *Sea $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$ acotada y Ω es creciente en $[a,b]$. Entonces existe $c \in [m, M]$ donde $m = \text{ínf}\{f(x)|x \in [a,b]\}$ y $M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$ tal que*

$$\int_a^b f\, d\Omega = c(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

Demostración. Como $m \leq f(x) \leq M$ *para cada* $x \in [a,b]$, entonces por el Teorema 1.8 se tiene que

$$m(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq \int_a^b f\, d\Omega \leq M(\Omega(b) - \Omega(a)). \tag{1.5}$$

Tenemos los siguientes casos:
i) Si $\Omega(a) = \Omega(b)$, de (1.5) se tiene que

$$\int_a^b f\, d\Omega = 0 = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)) \text{ para cada } c \in [m, M].$$

ii) Si $\Omega(a) < \Omega(b)$, entonces

$$m \leq \frac{\int_a^b f\, d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)} \leq M.$$

Definiendo

$$c = \frac{\int_a^b f\, d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)}, \text{ c } \in [m, M]$$

se tiene

$$\int_a^b f\, d\Omega = c(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

$\square$

Capítulo 2

Otras definiciones para la integral de Riemann-Stieltjes

En lo que sigue, la teoría de integración de Riemann-Stieltjes se desarrollará para cuando todas las funciones involucradas son acotadas y los integradores son crecientes.

Definición 2.1. *Sean* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función,* $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ *y*

$$M_k(f) = \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$
$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definimos las sumas superior e inferior de Stieltjes de f *con respecto a* Ω *para la partición* P *denotadas como* $U(P, f, \Omega)$ *y* $L(P, f, \Omega)$ *respectivamente como*

$$U(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) \text{ y}$$

$$L(P, f, \Omega) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})).$$

Observación: Para cada $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$ y cada $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se tiene que

$$L(P, f, \Omega) \leq S(P, f, \Omega) \leq U(P, f, \Omega).$$

Teorema 2.1. *Sean* $f, \Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones y supongamos que* Ω *es creciente en* $[a, b]$*. Entonces,* *a) Si $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P \subseteq Q$, entonces $U(f,Q,\Omega) \leq U(P,f,\Omega)$ y $L(P,f,\Omega) \leq L(Q,f,\Omega)$.*

b) Para cada $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ se cumple que $L(Q,f,\Omega) \leq U(P,f,\Omega)$.

Demostración. a)
Supongamos que Q tiene exactamente un punto más que P con $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ y $Q = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, w, x_i, \ldots, x_n = b\}$ y los puntos de Q ordenados de la siguiente forma:

$$a = x_0 < \ldots < x_{i-1} < w < x_i \ldots < x_n = b.$$

Sean $m_{w1} = inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, w]\}$ y $m_{w2} = inf\{f(x)|x \in [w, x_i]\}$, se sigue que

$$L(P,f,\Omega) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1}))$$

y

$$L(Q,f,\Omega) = \sum_{k=1}^{i-1} m_k(f)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) + m_{w1}(\Omega(w) - \Omega(x_{i-1})) +$$

$$m_{w2}(\Omega(x_i) - \Omega(w)) + \sum_{k=i+1}^{n} m_k(f)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})).$$

Así, $L(P,f,\Omega) \leq L(Q,f,\Omega)$ si y sólo si $m_i(f)(\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1})) \leq m_{w1}(\Omega(w) - \Omega(x_{i-1})) + m_{w2}(\Omega(x_i) - \Omega(w))$.

Como $\{f(x)|x \in [x_{i-1}, w]\} \subseteq \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $\{f(x)|x \in [w, x_i]\} \subseteq \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, entonces $m_i(f) \leq m_{w1}$ y $m_i(f) \leq m_{w2}$, entonces

$$\begin{aligned} m_i(f)(\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1})) &= m_i(f)(\Omega(x_i) - \Omega(w)) + m_i(f)(\Omega(w) - \Omega(x_{i-1})) \\ &\leq m_{w2}(\Omega(x_i) - \Omega(w)) + m_{w1}(\Omega(w) - \Omega(x_{i-1})), \end{aligned}$$

de aquí que $L(P,f,\Omega) \leq L(Q,f,\Omega)$.

Análogamente se obtiene que $U(f,Q,\Omega) \leq U(P,f,\Omega)$.

b)
Sean $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$ y $R = P \cup Q \in \mathcal{P}([a,b])$, entonces por a) se tiene que

$$L(Q,f,\Omega) \leq L(R,f,\Omega) \leq U(R,f,\Omega) \leq U(P,f,\Omega).$$

Por lo tanto, $L(Q,f,\Omega) \leq U(P,f,\Omega)$. □

Definición 2.2. *Sean* $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones,* f *es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a* Ω *sobre* $[a,b]$ *en el sentido de refinamientos, si existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para cada* $\epsilon > 0$*, existe una partición* $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ *que cumple la siguiente propiedad: para cada* $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ *y cada* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$\text{si } P_\epsilon \subseteq P, \text{ entonces } |S(P,f,\Omega) - A| < \epsilon.$$

Observación: Sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$, por b) del Teorema 2.1 se tiene que $L(Q,f,\Omega) \leq U(P,f,\Omega)$ para cada $Q \in \mathcal{P}([a,b])$, de aquí que cualquier suma superior $U(P,f,\Omega)$ es una cota superior para $\{L(Q,f,\Omega) | Q \in \mathcal{P}([a,b])\}$, entonces

$$\sup\{L(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq U(P,f,\Omega),$$

de aquí que $\sup\{L(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ es una cota inferior de $\{U(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}$. Por lo tanto,

$$\sup\{L(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq \text{ínf}\{U(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Definición 2.3. *Sean* $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones y* Ω *creciente en* $[a,b]$*. La integral superior de Stieltjes de* f *con respecto a* Ω *se define como*

$$\overline{\int_a^b} f \, d\Omega = \text{ínf}\{U(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

y la integral inferior de Stieltjes de f *con respecto a* Ω *se define como*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\Omega = \sup\{L(P,f,\Omega) | P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Definición 2.4. *Sean* $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones,* Ω *creciente en* $[a,b]$*. Decimos que* f *es Darboux-Stieltjes integrable con respecto a* Ω *en* $[a,b]$ *si*

$$\overline{\int_a^b} f \, d\Omega = \underline{\int_a^b} f \, d\Omega.$$

Definición 2.5. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Decimos que* f *satisface la condición de Riemann respecto a* Ω *en* $[a,b]$ *si para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ *tal que para cada* $P \in \mathcal{P}([a,b])$

$$\text{si } P_\epsilon \subseteq P, \text{ entonces } 0 \leq U(P,f,\Omega) - L(P,f,\Omega) < \epsilon.$$

Lema 2.1. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$*. Entonces para cada* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *se tiene que*

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Demostración. Sean $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f) \text{ y } m_k(f) \leq f(y) \leq M_k(f),$$

de aquí se obtiene

$$f(x) - f(y) \leq M_k(f) - m_k(f).$$

Por lo tanto,

$$\sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq M_k(f) - m_k(f). \tag{2.1}$$

Sea $\epsilon > 0$, como $M_k(f) - \frac{\epsilon}{2} < M_k(f)$ y $m_k(f) < m_k(f) + \frac{\epsilon}{2}$, existen $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ tales que

$$M_k(f) - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \text{ y } f(y) \leq m_k(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$M_k(f) - m_k(f) - \epsilon \leq f(x) - f(y) \leq \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

entonces $M_k(f) - m_k(f) \leq \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} + \epsilon$. Por lo tanto,

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}. \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se obtiene el resultado. □

Lema 2.2. *Sean* $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones y* Ω *es creciente en* $[a,b]$*. Entonces*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\Omega \leq \overline{\int_a^b} f \, d\Omega$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como $\overline{\int_a^b} f \, d\Omega < \overline{\int_a^b} f \, d\Omega + \epsilon$, entonces existe $P_1 \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(P_1, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f \, d\Omega + \epsilon.$$

Por el teorema 2.1 se tiene que

$$L(P,f,\Omega) \leq U(P_1,f,\Omega) < \overline{\int_a^b} f\,d\Omega + \epsilon$$

para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$, entonces $\overline{\int_a^b} f\,d\Omega + \epsilon$ es una cota superior del conjunto de las sumas inferiores $L(P,f,\Omega)$, entonces $L(P,f,\Omega) \leq \overline{\int_a^b} f\,d\Omega + \epsilon$, como ϵ es arbitrario, entonces

$$\underline{\int_a^b} f\,d\Omega \leq \overline{\int_a^b} f\,d\Omega.$$

□

Teorema 2.2. *Sean* $f,\Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones y* Ω *es creciente en* $[a,b]$. *Entonces son equivalentes:*

a) f *es Riemann-Stieltjes integrable en el sentido de refinamientos con respecto a* Ω *en* $[a,b]$,

b) f *satisface la condición de Riemann respecto a* Ω *en* $[a,b]$,

c) $\overline{\int_a^b} f\,d\Omega = \underline{\int_a^b} f\,d\Omega$.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Tenemos los siguientes casos:
i) Si $\Omega(a) = \Omega(b)$, al ser Ω creciente en $[a,b]$, entonces Ω es constante en $[a,b]$. Así, dado $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon \subseteq P$, entonces

$$0 \leq U(P,f,\Omega) - L(P,f,\Omega) = 0 < \epsilon.$$

ii) Supongamos que $\Omega(a) < \Omega(b)$ y sea $\epsilon > 0$.
Como $f \in \mathcal{R}(\Omega,[a,b])$, entonces existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon \subseteq P$ y cada $t_k, r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene que,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) - \int_a^b f\,d\Omega \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

y

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) - \int_a^b f\,d\Omega \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

de aquí que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(t_k)-f(r_k))(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))\right| \leq$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))-\int_a^b f\,d\Omega\right|+\left|\sum_{k=1}^{n} f(r_k)(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))-\int_a^b f\,d\Omega\right| <$$

$$\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\frac{2\epsilon}{3}.$$

Para $h=\frac{\epsilon}{3(\Omega(b)-\Omega(a))}>0$ se tiene que

$$M_k(f)-m_k(f)-h<\sup\{f(x)-f(y)|x,y\in[x_{k-1},x_k]\},$$

entonces existen $t_k, r_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para cada k=1, ..., n tales que

$$M_k(f)-m_k(f)-h<f(t_k)-f(r_k).$$

Se sigue que,

$$0\leq U(P,f,\Omega)-L(P,f,\Omega)=\sum_{k=1}^{n}(M_k(f)-m_k(f))(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))<$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(t_k)-f(r_k))(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))+h\sum_{k=1}^{n}(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(t_k)-f(r_k))(\Omega(x_k)-\Omega(x_{k-1}))+\frac{\epsilon}{3}<\frac{2\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.$$

Por lo tanto,

$$0\leq U(P,f,\Omega)-L(P,f,\Omega)<\epsilon.$$

$b) \Rightarrow c)$

Siempre se cumple que $\underline{\int_a^b} f\,d\Omega \leq \overline{\int_a^b} f\,d\Omega$. Sea $\epsilon>0$, existe $P_\epsilon\in\mathcal{P}([a,b])$ tal que para cada $P\in\mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon\subseteq P$ se tiene que

$$0\leq U(P,f,\Omega)-L(P,f,\Omega)<\epsilon.$$

Entonces

$$\overline{\int_a^b} f\,d\Omega\leq U(P,f,\Omega)<L(P,f,\Omega)+\epsilon\leq\underline{\int_a^b} f\,d\Omega+\epsilon,$$

de aquí que

$$\overline{\int_a^b} f\, d\Omega < \underline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon,$$

Por lo tanto,

$$\overline{\int_a^b} f\, d\Omega \leq \underline{\int_a^b} f\, d\Omega.$$

Así,

$$\overline{\int_a^b} f\, d\Omega = \underline{\int_a^b} f\, d\Omega.$$

c) $\Rightarrow$ *a*)

Supongamos que $\overline{\int_a^b} f\, d\Omega = \underline{\int_a^b} f\, d\Omega = A$ y veamos que $\int_a^b f\, d\Omega = A$. Sea $\epsilon > 0$, como

$$\overline{\int_a^b} f\, d\Omega < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon,$$

existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(P_\epsilon, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon,$$

entonces para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon \subseteq P$ se tiene que

$$U(P, f, \Omega) \leq U(P_\epsilon, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon,$$

se sigue que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon \subseteq P$ se cumple que

$$U(P, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon. \tag{2.3}$$

También

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < \underline{\int_a^b} f\, d\Omega,$$

entonces existe $Q_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < L(P_\epsilon, f, \Omega),$$

así para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $Q_\epsilon \subseteq P$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < L(P_\epsilon, f, \Omega) \leq L(P, f, \Omega),$$

por lo tanto para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $Q_\epsilon \subseteq P$ se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < L(P, f, \Omega). \tag{2.4}$$

Sea $Q = P_\epsilon \cup Q_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$, de (2.3) y (2.4) se sigue que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < L(Q, f, \Omega) \leq S(Q, f, \Omega) \leq U(Q, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon.$$

Como $\overline{\int_a^b} f\, d\Omega = \underline{\int_a^b} f\, d\Omega$, entonces para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $Q \subseteq P$, se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f\, d\Omega - \epsilon < S(P, f, \Omega) < \overline{\int_a^b} f\, d\Omega + \epsilon,$$

de aquí se concluye que

$$\left| S(P, f, \Omega) - \overline{\int_a^b} f\, d\Omega \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f\, d\Omega = A.$$

$\square$

Teorema 2.3 (Teorema del Valor Medio para integrales de Rieman-Stieltjes)**.** *Sean $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que f es continua en $[a,b]$ y Riemann-Stieltjes integrable con respecto a Ω en $[a,b]$, Ω es creciente en $[a,b]$. Entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f\, d\Omega = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

Demostración. Tenemos los siguientes casos:
i) Si $\Omega(a) = \Omega(b)$, entonces para cada $c \in [a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f \, d\Omega = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)) = 0.$$

ii) Si $\Omega(a) < \Omega(b)$, como f es continua en $[a, b]$, entonces existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ para todo } x \in [a, b],$$

entonces

$$f(x_0)(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq L(Q, f, \Omega) \leq U(P, f, \Omega) \leq f(x_1)(\Omega(b) - \Omega(a)),$$

de aquí se sigue que

$$f(x_0)(\Omega(b) - \Omega(a)) \leq \int_a^b f \, d\Omega \leq f(x_1)(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

De esto se obtiene que,

$$f(x_0) \leq \frac{\int_a^b f \, d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)} \leq f(x_1).$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe c entre x_0 y x_1 tal que

$$\frac{\int_a^b f \, d\Omega}{\Omega(b) - \Omega(a)} = f(c).$$

Por lo tanto, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f \, d\Omega = f(c)(\Omega(b) - \Omega(a)).$$

$\square$

Teorema 2.4. *Sean $f, \Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Si $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a, b])$ según la definición de Stieltjes, entonces f es Riemann-Stieltjes integrable en el sentido de refinamientos.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y denotemos con A el valor de la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a Ω en $[a,b]$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que tal que para cada $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ y cada $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$\text{si } ||P|| < \delta, \text{ entonces } |S(P,f,\Omega) - A| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Sea $P\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $||P_\epsilon|| < \delta$, entonces para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\epsilon \subseteq P$ se tiene que $||P|| \leq ||P_\epsilon|| < \delta$. Por lo tanto, para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$

$$\text{si } P_\epsilon \subseteq P, ||P|| < \delta, \text{ entonces por (2.5) se tiene que } |S(P,f,\Omega) - A| < \epsilon.$$

□

Observación: El recíproco del Teorema 2.4 no es verdadero, para ver esto supongamos que $a < b$ y sea $c \in (a,b)$. Consideremos $f, \Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas como $f(x) = \Omega(x) = 0$ si $a \leq x < c$ y $f(x) = \Omega(x) = 1$ si $c < x \leq b, f(c) = 0, \Omega(c) = 1$. Veamos que, f es Riemann-Stieltjes integrable en el sentido de refinamientos y que $\int_a^b f\, d\Omega = 0$.
Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = c, x_{i+1} \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $k = 1, \ldots, n$, entonces

$$S(P,f,\Omega) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1}))$$

$$= f(t_i)(\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1})) + f(t_{i+1})(\Omega(x_{i+1}) - \Omega(x_i)) = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$, existe $P_\epsilon = \{a = x_0, x_1 = c, x_2 = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$, si $P_\epsilon \subseteq P$ y cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ entonces $|S(P,f,\Omega) - 0| < \epsilon$. Por lo tanto, $\int_a^b f\, d\Omega = 0$.

Veamos que $f \notin \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$. Supongamos que $f \in \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$, entonces para $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a,b])$ si $||P|| < \delta$, entonces $S(P,f,\Omega) < \frac{1}{2}$. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que $c \notin P$ y $||P|| < \delta$, supongamos que $c \in (x_{j-1}, x_j)$, entonces

$$S(P,f,\Omega) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\Omega(x_i) - \Omega(x_{i-1})) = f(t_j)(\Omega(x_j) - \Omega(x_{j-1}))$$

Si tomamos $t_i \in (c, x_i)$, entonces $S(P,f,\Omega) = 1$ y no cumple que $S(P,f,\Omega) < \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $f \notin \mathcal{R}(\Omega, [a,b])$.

Capítulo 3

La Ω-derivada

3.1. Definición de la $\Omega-$derivada y ejemplos

En este capítulo consideraremos el concepto de Ω-derivada, que nos permitirá obtener una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo a la integral de Riemann-Stieltjes cuyos integradores son continuos y estrictamente crecientes.

En lo que sigue supondremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que puede ser acotado o no acotado.

Definición 3.1. *Sean f, Ω: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones donde Ω es continua y estrictamente creciente en I. Sea $x_0 \in I$. Decimos que f es Ω-diferenciable en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right) \textit{ existe.}$$

A este limite lo llamaremos la Ω-derivada de f en x_0 y lo denotamos como $D_\Omega f(x_0)$.

Observaciones:

- Notemos que este concepto de Ω-derivada generaliza al concepto de derivada usual, pues si $\Omega(x) = x$, entonces $D_\Omega f(x_0) = f'(x_0)$.

- Si $f'(x_0)$ y $\Omega'(x_0)$ existen y $\Omega'(x_0) \neq 0$, entonces

$$D_\Omega f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{\Omega'(x_0)}.$$

Ejemplos:

- Sea $K \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$, si $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, entonces $D_\Omega f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{K-K}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} \right) = 0$
- Si $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = \Omega(x)$, entonces $D_\Omega f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\Omega(x)-\Omega(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} \right) = 1$

En los teoremas que siguen, vamos a suponer $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones, $x_0 \in (a,b)$ y Ω es como en la Definición 3.1.

Teorema 3.1. *Si f es Ω-diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Notemos que $f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} \right) \cdot (\Omega(x) - \Omega(x_0))$, como f es Ω-diferenciable en x_0 y Ω es continua en x_0 se cumple que

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \cdot (\Omega(x) - \Omega(x_0)) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right) \cdot \lim_{x \to x_0} (\Omega(x) - \Omega(x_0))$$
$$= D_\Omega f(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Así se tiene que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y por tanto f es continua en x_0. □

3.2. Propiedades básicas de la Ω-derivada

En lo que sigue demostraremos propiedades análogas a las de la derivada usual con respecto a las operaciones de suma y producto usual de funciones.

Teorema 3.2. *Sean f,g funciones Ω-diferenciables en x_0 y $K \in \mathbb{R}$, entonces $f + g, f \cdot g$ y $K \cdot f$ son Ω-diferenciables y*

1. $D_\Omega(f + g)(x_0) = D_\Omega f(x_0) + D_\Omega g(x_0)$
2. $D_\Omega(f \cdot g)(x_0) = D_\Omega f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot D_\Omega g(x_0)$
3. $D_\Omega(K \cdot f)(x_0) = K \cdot D_\Omega f(x_0)$

Demostración. 1. Como f y g son Ω-diferenciables en x_0 y

$$\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} + \frac{g(x)-g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right) &= \\ \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right) \\ = D_\Omega f(x_0) + D_\Omega g(x_0). \end{aligned}$$

2.

$$\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\cdot g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\cdot f(x_0),$$

pero f y g son Ω-diferenciables en x_0 y por la continuidad de g en x_0 que se tiene por el Teorema 3.1, se cumple:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\cdot g(x)\right) +$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\cdot f(x_0)\right) = D_\Omega f(x_0)\cdot g(x_0) + D_\Omega g(x_0)\cdot f(x_0)$$

3. Como

$\dfrac{K\cdot f(x)-K\cdot f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)} = K\cdot\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right)$, entonces se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{K\cdot f(x)-K\cdot f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right) = K\cdot\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\Omega(x)-\Omega(x_0)}\right)$$

□

Observación: Una forma alternativa de obtener el resultado anterior es tomar la función $g(x) = K$ y aplicar 2. del teorema.

Definición 3.2. *Una función f es Ω-diferenciable en (a,b) si es Ω-diferenciable en cada $x_0 \in (a,b)$.*

Teorema 3.3. *Sea f una función Ω-diferenciable en (a,b). Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en $x_0 \in (a,b)$, entonces $D_\Omega f(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in (a,b)$, entonces por definición de mínimo relativo existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$.
Si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $\Omega(x) - \Omega(x_0) < 0$ pues Ω es estrictamente creciente en (a,b) y $f(x) - f(x_0) \leq 0$, entonces

$$0 \leq \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right).$$

También si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $\Omega(x) - \Omega(x_0) > 0$ pues Ω es estrictamente creciente en (a,b) y $f(x) - f(x_0) \leq 0$, entonces

$$\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right) \leq 0.$$

Como f es Ω-diferenciable, entonces

$$D_\Omega f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right) = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \right),$$

por lo tanto $D_\Omega f(x_0) = 0$.
Análogamente se obtine que $D_\Omega f(x_0) = 0$ si f tiene un máximo relativo en $x_0 \in (a,b)$. □

Teorema 3.4. *Si f es Ω-diferenciable en x_0 con $D_\Omega f(x_0) > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in (a,b)$ con $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ se cumple que $f(x) < f(x_0) < f(y)$.*

Demostración. Sea $\epsilon = \frac{D_\Omega f(x_0)}{2} > 0$, como f es Ω-diferenciable en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$, cumple que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} - D_\Omega f(x_0) \right| < \frac{D_\Omega f(x_0)}{2}.$$

De aquí se deduce existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$0 < \frac{D_\Omega f(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)}. \tag{3.1}$$

Sean $x, y \in (a,b)$ con $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$, como $x < x_0$, entonces $\Omega(x) - \Omega(x_0) < 0$, de (3.1) se tiene que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} > 0,$$

así de aquí se sigue que $f(x) - f(x_0) < 0$, entonces

$$f(x) < f(x_0). \tag{3.2}$$

También como $x_0 < y$, entonces $\Omega(y) - \Omega(x_0) > 0$ y de (3.2) se tiene que

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{\Omega(y) - \Omega(x_0)} > 0,$$

entonces $f(y) - f(x_0) > 0$, entonces

$$f(x_0) < f(y). \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3) se tiene que

$$f(x) < f(x_0) < f(y).$$

□

La siguiente proposición es análoga a la demostrada anteriormente y dice lo siguiente:

Teorema 3.5. *Sea f una función es Ω-diferenciable en x_0 con $D_\Omega f(x_0) < 0$.Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in (a,b)$ con $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ se cumple que $f(y) < f(x_0) < f(x)$.*

Demostración. Sea $\epsilon = -\frac{D_\Omega f(x_0)}{2} > 0$, como f es Ω-diferenciable en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} - D_\Omega f(x_0) \right| < -\frac{D_\Omega f(x_0)}{2}.$$

De aquí se deduce existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a,b)$ con $\mid x - x_0 \mid < \delta$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} < \frac{D_\Omega f(x_0)}{2} < 0 \tag{3.4}$$

Sean $x, y \in (a, b)$ con $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$, como $x < x_0$, entonces $\Omega(x) - \Omega(x_0) < 0$, de (3.4) se tiene que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} < 0,$$

que de aquí se sigue que $f(x) - f(x_0) > 0$, de donde

$$f(x_0) < f(x). \tag{3.5}$$

También como $x_0 < y$, entonces $\Omega(y) - \Omega(x_0) > 0$ y de (3.4) se tiene que

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{\Omega(y) - \Omega(x_0)} > 0,$$

entonces $f(y) - f(x_0) < 0$, por lo que

$$f(y) < f(x_0). \tag{3.6}$$

De (3.4) y (3.6) se halla que

$$f(y) < f(x_0) < f(x).$$

□

3.3. Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio para la $\Omega-$derivada

Los teoremas que veremos a continuación son una generalización de algunos teoremas del cálculo diferencial clásico y nos muestran como el concepto de Ω-derivada trae consigo propiedades muy parecidas al concepto de derivada usual.

Teorema 3.6 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y Ω-diferenciable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $D_\Omega f(x_0) = 0$.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo en $x_0 \in [a, b]$ y su valor mínimo en $x_1 \in [a, b]$. Tenemos los siguientes casos:

(1) Si $x_0, x_1 \in \{a, b\}$, entonces por hipótesis se tiene que $f(x_0) = f(x_1)$, es decir, el valor máximo y mínimo de f son iguales, así f es una función constante, por lo que $D_\Omega f(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$.
(2) Si $x_0 \in (a, b)$, entonces por el Teorema 3.3 se tiene que $D_\Omega f(x_0) = 0$.
(3) Si $x_1 \in (a, b)$, entonces por el Teorema 3.3 se tiene que $D_\Omega f(x_1) = 0$. □

Teorema 3.7 (Teorema del Valor Medio de Cauchy)**.** *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en [a,b] y Ω-diferenciables en (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a)) \cdot D_\Omega g(x_0) = (g(b) - g(a)) \cdot D_\Omega f(x_0)$.*

Demostración. Definamos la función $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x),$$

entonces h es continua en $[a, b]$ por ser suma y producto de funciones continuas en $[a, b]$, también h es Ω-diferenciable en (a, b) por ser suma y producto de funciones Ω-diferenciables en (a, b).
Además

$$h(a) = h(b) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b),$$

entonces por el Teorema 3.6 se tiene que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$D_\Omega h(x_0) = 0.$$

Por otra parte,

$$D_\Omega h(x_0) = (f(b) - f(a)) \cdot D_\Omega g(x_0) - (g(b) - g(a)) \cdot D_\Omega f(x_0) = 0,$$

entonces

$$(f(b) - f(a)) \cdot D_\Omega g(x_0) = (g(b) - g(a)) \cdot D_\Omega f(x_0).$$

□

Teorema 3.8 (Teorema del Valor Medio)**.** *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y Ω-diferenciable en (a, b). Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$D_\Omega f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{\Omega(b) - \Omega(a)}.$$

Demostración. Por definición sabemos que Ω es continua en (a,b), también es Ω-diferenciable en (a,b) con $D_\Omega \Omega(x) = 1$ para cada $x \in (a,b)$. Entonces por el Teorema 3.7, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$(f(b) - f(a)) \cdot D_\Omega \Omega(x_0) = (\Omega(b) - \Omega(a)) \cdot D_\Omega f(x_0),$$

de aquí que

$$D_\Omega f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{\Omega(b) - \Omega(a)}.$$

□

Teorema 3.9. *(1) Si $D_\Omega f(x) \geq 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces f es creciente en (a,b).*
(2) Si $D_\Omega f(x) \leq 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b).
(3) Si $D_\Omega f(x) = 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, como f es Ω- diferenciable en (a,b), entonces f es continua en (a,b), en particular en continua en $[x_1, x_2]$ y Ω-diferenciable en (x_1, x_2), entonces por el Teorema del valor medio existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = D_\Omega f(x_0) \cdot (\Omega(x_2) - \Omega(x_1)$. Notemos que como Ω es estrictamente creciente se tiene que $\Omega(x_2) - \Omega(x_1) > 0$, así si $D_\Omega f(x) \geq 0$ para cada $x \in (a,b)$, de la igualdad anterior se tendrá que f es creciente en (a,b).
Si $D_\Omega f(x) \leq 0$ para cada $x \in (a,b)$, se tiene que f es decreciente en (a,b).
Si $D_\Omega f(x) = 0$ para cada $x \in (a,b)$, f es constante en (a,b). □

Capítulo 4

El Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Riemann-Stieltjes

Ahora veremos cómo utilizar el concepto de Ω-derivada en la integral de Riemann-Stieltjes, con el fin de obtener una fórmula análoga a la que se tiene en la integral de Riemann.

Definición 4.1. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una Ω-antiderivada de f en I si $D_\Omega F(x) = f(x)$ para cada $x \in I$.*

Denotaremos con $\mathcal{R}(\Omega)$ al conjunto de funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto a $\Omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente.

Teorema 4.1. *Si $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Entonces la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_a^x f \, d\Omega$ es continua en $[a,b]$. Además si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces F es una Ω-antiderivada de f en (a,b).*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x_0 \in [a,b]$, entonces

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f \, d\Omega - \int_a^{x_0} f \, d\Omega = \int_{x_0}^x f \, d\Omega,$$

por el Teorema del Valor Medio para integrales de Riemann-Stieltjes se tiene que

$$F(x) - F(x_0) = c(\Omega(x) - \Omega(x_0)), \text{ para algún } c \in [m, M],$$

donde $m = \text{ínf}\{f(x)|x \in [a,b]\}$ y $M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$. Si $c = 0$, entonces existe $\delta = 1 > 0$ tal que para cada $x \in [a,b]$ con $|x - x_0| < \delta$, se tiene que $|F(x) - F(x_0)| = 0 < \epsilon$. Si $c \neq 0$, como Ω es una función continua en $[a,b]$, entonces es continua en $x_0 \in [a,b]$, por lo que existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $x \in [a,b]$ con $|x - x_0| < \delta_1$ se tiene que $|\Omega(x) - \Omega(x_0)| < \frac{\epsilon}{|c|}$. Por lo tanto, para cada $x \in [a,b]$ con $|x - x_0| < \delta_1$, entonces

$$|F(x) - F(x_0)| = |c||\Omega(x) - \Omega(x_0)| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

De ahi que, F es una función continua en $[a,b]$.
Supongamos ahora que f es continua en $[a,b]$, entonces por el Teorema del Valor Medio para integrales de Riemann-Stieltjes se tiene que

$$F(x) - F(x_0) = f(c)(\Omega(x) - \Omega(x_0)),$$

para algún c entre x y x_0, entonces

$$f(c) = \frac{F(x) - F(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} \text{ para algún } c \text{ entre } x \text{ y } x_0.$$

Veamos que $D_\Omega F(x_0) = f(x_0)$. Sea $\epsilon > 0$, como f es continua en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in [a,b]$ con $|x - x_0| < \delta$ cumple que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Como c está entre x y x_0 se tiene que $|c - x_0| < \delta$, entonces $|f(c) - f(x_0)| < \epsilon$, entonces

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{\Omega(x) - \Omega(x_0)} - f(x_0) \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $D_\Omega F(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Teorema 4.2 (Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes)**.** *Sea $f \in \mathcal{R}(\Omega)$. Si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y $D_\Omega F(x) = f(x)$ para cada $x \in (a,b)$, entonces*

$$\int_a^b f \, d\Omega = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, como F es continua en $[a,b]$, en particular es continua en cada $[x_{k-1}, x_k]$

para cada $k = 1, \ldots, n$ y Ω-derivable en (x_{k-1}, x_k), por el Teorema del Valor Medio, existe $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = D_\Omega F(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) = f(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})),$$

entonces

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)((\Omega_k)-\Omega(x_{k-1})) = S(P, f, \Omega).$$

Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $P \in \mathcal{P}([a, b])$ si $||P|| < \delta$ y cada $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(w_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) - \int_a^b f \, d\Omega \right| < \epsilon.$$

Sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta$ y $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, entonces

$$\left| (F(b) - F(a)) - \int_a^b f \, d\Omega \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f \, d\Omega = F(b) - F(a).$$

□

El teorema anterior es válido con la definición que dio originalmente Stieltjes. En lo que sigue vamos a ver que este resultado sigue siendo válido cuando consideramos la teoría de integración con la definición de refinamientos.

Teorema 4.3. *Sean $f, \Omega : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones, f Riemann-Stieltjes integrable con respecto a Ω sobre $[a, b]$ en el sentido de refinamientos, Ω continua y estrictamente creciente en $[a, b]$. Si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y $D_\Omega F(x) = f(x)$ para cada $x \in (a, b)$, entonces*

$$\int_a^b f \, d\Omega = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, como F es continua en $[a, b]$, en particular es continua en cada $[x_{k-1}, x_k]$ para cada $k = 1, \ldots, n$ y Ω-derivable en (x_{k-1}, x_k), por el Teorema análogo al del Valor Medio, existe $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = D_\Omega F(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})) = f(t_k)(\Omega(x_k) - \Omega(x_{k-1})),$$

entonces

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)((\Omega_k)-\Omega(x_{k-1})) = S(P, f, \Omega).$$

Pero se cumple que

$$L(P, f, \Omega) \leq S(P, f, \Omega) \leq U(P, f, \Omega),$$

entonces

$$L(P, f, \Omega) \leq F(b) - F(a) \leq U(P, f, \Omega),$$

de aquí que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f\, d\Omega. \tag{4.1}$$

Pero f es Riemann-Stieltjes integrable en el sentido de refinamientos, por lo que por el Teorema 2.2 se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\Omega = \overline{\int_a^b} f\, d\Omega = \int_a^b f\, d\Omega.$$

De (4.1) se tiene que

$$\int_a^b f\, d\Omega = F(b) - F(a).$$

$\square$

Conclusiones

La integral de Riemann-Stieltjes es un concepto que generaliza al de integral de Riemann y tiene propiedades analogas como la linealidad del integrando entre otras, vemos que la definición de esta integral no es única y mostramos la relación que hay entre estas definiciones, después se introduce el concepto de $\Omega-$derivada algunas de sus consecuencias y finalmente su aplicación para obtener el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes que fue fundamentalmente el objetivo de este trabajo de tesis.

Bibliografía

[1] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis,* Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

[2] D. Bongiorno, G. Corrao, The Henstock-Kurzweil-Stieltjes type integral for real functions on a fractal subset of the real line, *Boll. di mat. pura ed appl.* , Volumen IV, 2011.

[3] D.H. Bailey, J.M. Borwein, High-precision numerical integration: Progress and challenges, *Journal of Symbolic Computation* , Volumen 46, páginas 741-754, 2011.

[4] Erlín Castillo R., Chapinz Steven A., The fundamental theorem of calculus for the Riemann-Stieltjes integral, *Lecturas Matemáticas*, Volumen 29, páginas 115-122, 2008.

[5] Feller W., On differential Operators and Boundary Conditions, *Communications on pure and applied mathematics*, Volumen VIII, páginas 203-216, 1955.

[6] Feller W., On the intrinsic form for second order differential operators, *Illinois J. Math.*, Volumen 2(1), páginas 1-18, 1958.

[7] Gradinaru M., On the derivative with respect to a function with applications to Riemann-Stieltjes integral, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, preprint. Available at https://perso.univ-rennes1.fr/mihai.gradinaru/drs.pdf

[8] Haaser B.N., Sullivan A.J., *Real Analysis,* The University Series in Mathematics, Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[9] Hedayatian K., A generalized integration by parts, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Volumen 2, páginas 1367-1370, 2007.

[10] Pollard, H., The Stieltjes integral and its generalizations, *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volumen 19, 1920.

[11] R. M. Peter, Hadamard's inequality and Trapezoid Rules for the Riemann–Stieltjes integral, *J. Math. Anal. Appl.* , Volumen 344, páginas 921-926, 2008.

[12] Slavík A., Product Integration its Histroty and its applications, *HISTORY OF MATHEMATICS*, Volumen 29.

[13] Spivak M., *Cálculo infinitesimal,* Segunda edición, Editorial Reverté, S.A, 2012.

[14] Stieltjes, T. J., Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Volumen VIII, páginas 1–122, 1894.