BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ESTUDIO EXPLORATORIO DEL CONCEPTO DE RECTA REAL EN ALUMNOS DE LA FCFM

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

MISSAEL ANTONIO CAMPECHE LORANCA

DIRECTOR DE TESIS:

M.C. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ

PUEBLA, PUE., DICIEMBRE 2021

Contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

En este trabajo se hace un estudio de tipo exploratorio de la comprensión que tienen los alumnos de segundo semestre de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) sobre la Recta Real. A los alumnos se les explica el concepto de la Recta Real continua en el curso de Matemáticas Básicas, pero a pesar de ello algunos tienden a confundirse al responder preguntas no rutinarias (conceptuales), porque no han desarrollado una buena idea intuitiva al hacer una descripción geométrica de la Recta Real.

El estudio se realizó a través de una serie de preguntas. Al analizar las respuestas brindadas por los encuestados pudimos ver la diversidad de ideas que tienen y se pudo observar que hay algunos problemas de comprensión.

Como conclusión del trabajo se pudo comprobar que las ideas previas de los alumnos son persistentes, en particular, la idea de aproximación.

Introducción

Este trabajo aborda la comprensión que tienen los alumnos de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la BUAP de la Recta Real, la mayoría de segundo semestre. Los alumnos, a pesar de explicarles el concepto de Recta Real continua, en el curso de Matemáticas Básicas, tienden a confundirse al responder preguntas poco comunes porque no han desarrollado una buena idea intuitiva que en este trabajo se denomina concepto imagen.

Tras el análisis de las respuestas a una serie de preguntas, se pudo observar que hay algunos problemas de comprensión, podemos ver la diversidad de ideas que hay y que coinciden con las obtenidas en otros estudios, mismos que se indicarán. Al final de este trabajo se hace una propuesta a nivel bachillerato, de cómo presentar la idea de que la Recta Real es continua, de manera previa al estudio de Cálculo Diferencial.

En muchos países se intenta introducir la Recta Numérica para sumar números naturales desde que se inicia la educación primaria. Por ejemplo, Frykholm (2010) afirma en su libro que "se *proporciona a los profesores una base teórica, un conocimiento práctico y la experticia necesaria para utilizar la Recta Numérica como un modelo potente para los aprendizajes en Matemáticas."*

La enseñanza de la Recta Numérica en secundaria hace crisis principalmente cuando se pide a los alumnos introducir fracciones en un dibujo diseñado previamente, no aciertan, y sería motivo de un estudio específico. De momento solo mencionamos que hay preguntas típicas en los libros de texto.

Una pregunta clásica donde los alumnos no aciertan es: ¿Qué número está justo en medio de 1/8 y 1/10? Un alto porcentaje de respuestas es 1/9. Según el programa oficial de SEP y que es seguido por los libros de texto autorizados, en primer año de secundaria se ve densidad de los racionales en la recta. Existe una tesis sobre la enseñanza de la localización de fracciones en la recta de Herrera (2016), su propuesta es usando GeoGebra para hacer los dibujos correspondientes.

En nuestro caso, como antecedente importante, los alumnos encuestados han pasado por el curso de Matemáticas Básicas, que es el primer curso obligatorio en FCFM, donde se estudian las propiedades de los Números Reales como campo ordenado.

En el curso de Matemáticas Básicas de la FCFM los alumnos tienen dificultades para comprender el ejemplo 1/3= 0.333… En particular, que no creían que, por ejemplo, entre 0.333… y 1/3 existieran más puntos (números), todo ello previo a presentar el Axioma del Supremo. Lo que justifica de manera breve la importancia que tiene la discusión sobre este tema, pensando en la comprensión de los alumnos. La explicación consiste en hacer uso de la densidad de $\mathbb{Q}$ de manera gráfica, indicando que entre cualquier término de la sucesión 0.3, 0.33, 0.333, 0.33…3 (n 3´s) y 1/3 hay una pequeña diferencia, y existe un número racional entre ellos, por comodidad se toma un término que contenga un 3 más. Esta idea es importante, por ejemplo, en bachillerato (Cálculo Diferencial) se explica de manera sencilla cómo calcular el límite de una función cuando x tiende a 1, seleccionando $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.99$, $x_3 = 0.999$, para lo cual, el alumno, sustituye x , por los valores anteriores, usa la calculadora y debe ver el comportamiento de $f(x)$. Se muestra un par de ejemplos tomados de Calculus, Larson- Edwards (11ª. Edición).

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$$

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$				?			

Tabla 1: Tabla de valores del límite cuando *x* tiende a 4

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$				?			

Tabla 2: Tabla de valores del límite cuando *x* tiende a 3.

¿Por qué los autores no ponen algo como: 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.91, 3.912, 3.9123, 3.91234…para aproximarse a 4? Como es común en los textos, equivale a 0.999... tiende a 1. Esto lleva a la necesidad de explicar que entre un número menor a 1 y 1 existen infinitos y se puede mencionar primero la densidad de los números racionales.

Este tipo de preguntas de los textos pueden resultar un tanto extrañas, ¿por qué estoy haciendo esto? ¿Cuál es la razón para estudiar el comportamiento de la función de esta forma? Una actividad común es dar la función y pedir hacer una tabla de valores y graficar los puntos en el plano x, y.

Forma gráfica de explicar que un número real representa la distancia al origen el punto correspondiente:

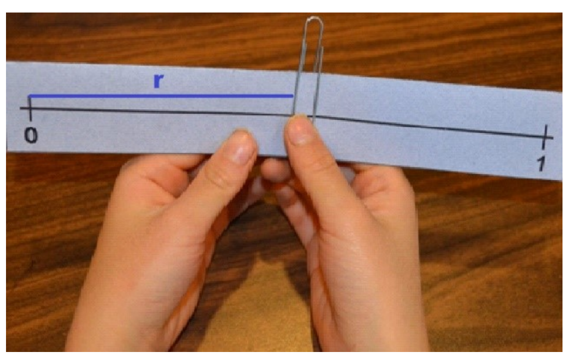


Imagen 1: El número r representa la distancia al origen.

Cuando se mueve el clip "se pasa por todos los números en [0,1]"

1. Formulación del problema

1.1 Pensamiento formal y las concepciones espontáneas de los alumnos

En este párrafo comentaremos brevemente el pensamiento formal y concepciones previas o espontáneas de los adultos jóvenes. Se admite que las concepciones espontáneas de los alumnos son muy resistentes al cambio, a pesar de la enseñanza en ciencias recibida en la escuela, ver por ejemplo Hierrezuelo (1998) donde se hace una amplia explicación. En esta sección nos apoyamos en Pozo y Carretero (1987), donde afirman que el pensamiento formal, según la explicación inicial de J. Piaget, no se alcanza.

Según Piaget en su obra “6 Estudios de Psicología” publicada en español en 1981 que resulta fácil de leer, comparada con su obra de 1958 (en inglés) “desarrollo del pensamiento lógico, de la infancia a la adolescencia” ahí encontramos la afirmación de que “entre los 11 y 12 años tiene lugar una transformación fundamental en el pensamiento del niño”. En esa edad, las operaciones que maneja el niño son concretas, es decir, se refieren a objetos tangibles que pueden manipular. Después de los 11-12 años, el pensamiento formal se hace posible, es decir, las operaciones lógicas comienzan a ser transpuestas del plano de la manipulación concreta al plano de las meras ideas expresadas en un lenguaje cualquiera, pero sin el apoyo de la percepción, ni la experiencia.

Sin embargo, para Keating (1997) la capacidad de razonar depende, en grado crucial, en la familiaridad con el contenido de lo que se está razonando. Los cambios de razonamientos representan un logro potencial en lugar de ser típicos pensamientos cotidianos. El pensamiento espontáneo de los adolescentes (y adultos) rara vez es tan sistemático o reflexivo, su avance entre los adolescentes ocurre cuando el razonamiento está integrado al conocimiento del tema o la materia.

Muy pocos adolescentes y adultos dominan el pensamiento formal, o aun no lo alcanzan, esto es relevante para nuestro trabajo pues la mente de los alumnos universitarios en general no funciona como Piaget (1958) afirmó, es decir no muestran un pensamiento formal pleno y concretamente sobre la representación de los números reales en la recta, como se explicará más adelante. Según Keating no tiene mucho objeto tratar de explicar el razonamiento independiente de un conocimiento del contenido. Más probable parece que el avance de la lógica entre los adolescentes ocurra cuando esté integrado (y no separado) del conocimiento del contenido o de la materia.

1.2 El pensamiento formal

Características generales del pensamiento formal.

En el libro “De la lógica del niño a la lógica del adolescente”, Inhelder y Piaget (1995) establecieron los rasgos fundamentales del pensamiento formal, el cual se alcanza, según los autores, al término de la adolescencia. El pensamiento formal constituye, el último estadio del desarrollo cognitivo, siendo, por tanto, característico de los adolescentes y adultos. Las operaciones formales, surgirían, al comienzo de la adolescencia y en pocos años se alcanza su maduración. La aplicación sistemática del pensamiento formal permitirá que el adolescente pueda razonar lógicamente y consideran esto muy importante para la enseñanza de cualquier cuerpo de conocimiento científico:

a) Los adolescentes (desde los 14-15 años) poseen pensamiento cualitativamente diferente a los niños de menor edad.
b) El pensamiento formal se desarrolla de manera espontánea y es universal al menos en todos aquellos que viven en sociedades escolarizadas.
c) El pensamiento formal se apoya no solo en los objetos o situaciones directamente percibidos, sino en representaciones verbales o proposicionales de dichos objetos, por tanto, atiende a la estructura formal de las relaciones entre los objetos presentes y no al contenido. Puede aplicarse con éxito a contenidos muy diferentes.

De todo lo anterior surge una persona ya madura cognitivamente, dotada de un pensamiento muy potente y susceptible de ser aplicado a problemas y situaciones muy diversos sin pérdida apreciable de efectividad.

Si el pensamiento formal se adquiere con independencia de los contenidos concretos, esto proporcionaría a los alumnos las habilidades de pensamiento formal y estarían en condiciones de entender cualquier conocimiento científico. Pero la experiencia de los docentes indica otra cosa. Queremos resaltar que la utilización exclusiva de la exposición tradicional se basa en la supuesta omnipotencia y homogeneidad del pensamiento formal, implícitamente, los docentes universitarios asumen que explicar el curso de manera formal es suficiente para que los alumnos comprendan el tema expuesto, pero los resultados de los exámenes revelan que los alumnos comprenden menos de lo que ellos esperan. Tal vez sea oportuno discutir, dialogar más con los alumnos en clase a partir de sus ideas, y poco a poco conducirlos a las ideas formales.

1.2.1 Nuevos datos sobre el pensamiento formal: la crisis de la omnipotencia lógica.

Según los datos disponibles parece que el pensamiento formal no es universal en las personas mayores a 18 años, no se desarrolla espontáneamente, requiere instrucción. Tampoco es un pensamiento con una estructura de conjunto, sino un conjunto de estrategias o esquemas para la solución de problemas, que se adquieren lentamente y depende en gran medida del contenido de la tarea. Resultando un cuadro mucho más complejo y confuso de lo que Piaget propuso. El pensamiento formal en desarrollo no les permite a los jóvenes acceder a cuerpos científicos elaborados y esto debe ser tomado en cuenta a la hora de diseñar estrategias para enseñar Ciencias y Matemáticas.

1.2.2 Las concepciones espontáneas

Las concepciones espontáneas de los alumnos surgen de un modo natural en su mente, sin que exista ninguna instrucción o enseñanza específicamente diseñada para producirlas. Generalmente se producen en la interacción cotidiana de los niños y adolescentes con el mundo que los rodea. Las concepciones espontáneas son construcciones más bien personales del niño, es decir, proceden de su propia actividad intelectual. Las concepciones espontáneas se caracterizan por ser científicamente incorrectas, aunque obviamente los niños adquieren espontáneamente muchos conceptos que resultan ser correctos, por experiencias concretas directas, por ejemplo, al soltar un objeto, cae al suelo, el calor se transmite de cuerpos de mayor temperatura a los de menor, etc.

Las concepciones espontáneas suelen ser incorrectas cuando se enfrentan a problemas de cierta complejidad, siendo, sin embargo, eficaces para predecir lo que va a pasar en situaciones cotidianas. Estas concepciones son **implícitas**, muchas veces el alumno ni siquiera es plenamente consciente, siendo incapaz de verbalizarlas correctamente. En otras palabras, el alumno puede predecir correctamente un suceso, pero es incapaz de decirnos por qué ocurre precisamente así.

De hecho, la regularidad de sus predicciones permite descubrir teorías implícitas fuertemente arraigadas. Esta distancia entre lo que Piaget denomina tener éxito (resolver ejercicios) y comprender hace que frecuentemente la predicción correcta preceda evolutivamente a la explicación clara. En nuestro caso concreto, un alumno puede realizar correctamente ejercicios de cálculo de límites, pero no tener una idea clara del concepto, que se manifiesta cuando le hacemos “preguntas conceptuales”. Por ejemplo, algunos libros incluyen preguntas que deben responderse como falso o verdadero, pero el alumno debe justificar su respuesta, y es común encontrar errores.

Cuando el alumno no es consciente de sus propias ideas, en muchas ocasiones, las concepciones espontáneas pueden ser incoherentes o contradictorias entre sí. Problemas que científicamente son similares, pueden ser resueltos de modo distinto por el alumno, situaciones que requieren la misma explicación, pueden ser explicadas de formas diferentes. Cualquiera de estos tipos de contradicciones, es enormemente revelador de la estructura u organización interna de la teoría implícita del alumno. Un rasgo definitorio de la naturaleza de las concepciones espontáneas es, que son prácticamente ubicuas y muy resistentes al cambio, es decir, rara es el área donde no tenemos ideas preconcebidas.

Para que la enseñanza sea eficaz ha de alejarse de la exposición tradicional, adoptando una posición constructivista. Gran parte de lo anterior se aplica, con sus precisiones a la enseñanza de las Matemáticas, que para expresarlo brevemente podemos decir: Enseñar y aprender no es simultáneo, los maestros suponen que con explicar claramente en clase es suficiente para que los alumnos aprendan, pero, ¿Comprenden realmente los conceptos? ¿O solo pueden hacer ejercicios semejantes a los resueltos? Hay que cuestionarlos y oír sus respuestas, dialogar, discutir con ellos.

Usamos libremente el trabajo de Vinner y Tall (1981), quienes usan el *concepto imagen*, en lugar de concepciones espontáneas, para hacer más específico el punto comentado anteriormente y que explicamos en la sección de marco teórico.

Dado que las nociones intuitivas se activan al responder una pregunta, en este trabajo formulamos a los alumnos algunas preguntas poco frecuentes para ellos, para responder a la pregunta:

¿Cuál es la noción intuitiva de la recta numérica en alumnos de FCFM?

1.3 Objetivos

OBJETIVO GENERAL

Analizar la comprensión de la densidad de la recta real que tienen los alumnos de FCFM mediante un estudio exploratorio para conocer sus concepciones sobre la misma.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Analizar las respuestas de los alumnos a un cuestionario que fue diseñado con preguntas relacionadas al concepto de densidad de la recta numérica.

Analizar las respuestas de los alumnos a preguntas diseñadas para indagar sobre las posibles diferencias para representar diferentes números reales en la recta ya sea que el número se represente geométricamente o el número se defina como límite de su sucesión.

2. Marco teórico

2.1 Imagen de un concepto

En esta sección nos basamos en el trabajo de Vinner y Tall (1981).

Proponen un modelo de la estructura cognoscitiva que explica cómo se forman los conceptos en los estudiantes cuando se realiza una tarea, consideran la estructura cognoscitiva como compuesta de 2 celdas: ***imagen del concepto*** y ***definición del concepto***.

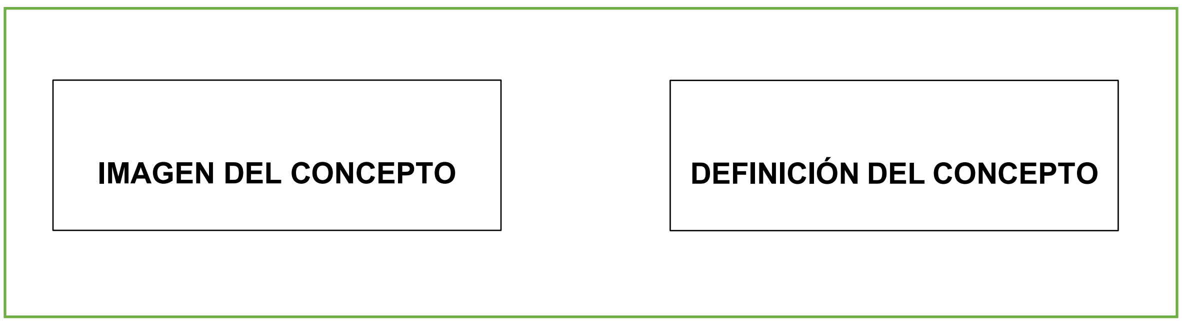


Figura 2.1: Celdas de la Imagen del concepto y la Definición del concepto.

La ***imagen del concepto*** es todo aquello no verbal asociado en nuestra mente con el concepto y puede ser una imagen visual de este. Lo que comúnmente diríamos: *es el concepto expresado con nuestras propias palabras*. Por ejemplo, en caso de niños de primaria, al pedir que explique algunos tipos de cuadriláteros: rectángulo, rombo, trapecio y cuadrado.

La *imagen del concepto* se construye a través de los años por experiencias de todo tipo donde de una u otra forma se usa el concepto y cambia en la medida en que el sujeto madura. En tal sentido, la *imagen del concepto* varía de un individuo a otro. Es más, en un mismo individuo, la imagen en relación con un mismo concepto, aunque sea en un corto periodo de tiempo, puede variar, pues los individuos pueden muy bien reaccionar de manera distinta ante distintas situaciones en las que el concepto es evocado.

Por ***definición del concepto*** entenderemos el conjunto de palabras usadas para precisar, explicar o definir el concepto, según el autor de un libro de texto. Por ejemplo, en el caso del concepto de límite es prácticamente igual en todos los libros de Cálculo, en libros avanzados aparecen pequeñas diferencias al situarse en un contexto más abstracto (vecindades, conjuntos abiertos, etc.).

Ya sea que la *definición del concepto* sea enseñada o construida por el estudiante, este la irá modificando y así podrá diferir de la definición aceptada por la comunidad matemática, esto es, la **definición formal**.

Muchos profesores, sobre todo de niveles medio-superior y superior, creen que la *definición del concepto* controla a la *imagen del concepto*, es decir:

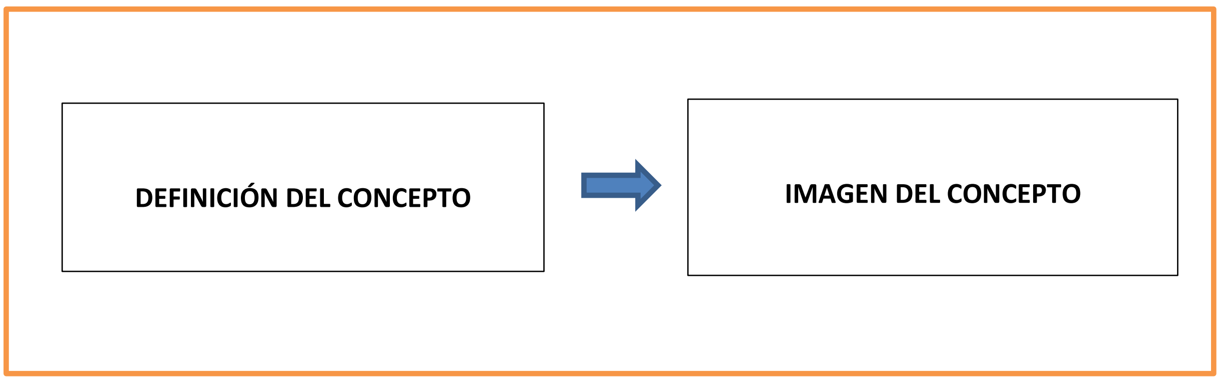


Figura 2.2: La definición del concepto controla la imagen del concepto.

Pero en realidad, suceden cosas muy diferentes, se presentan 3 casos:

1.- La *imagen del concepto* cambia la “definición formal”, cada alumno la interpreta a su manera.

2.- La *imagen del concepto* permanecerá como está. La *definición del concepto* contendrá por un tiempo la definición dada por el profesor, luego será olvidada o distorsionada, y cuando el estudiante sea interrogado responderá de manera errática.

3.- Ambos (*imagen del concepto y definición del concepto*) permanecen como están y en el momento en que al estudiante se le pida la definición la puede repetir.

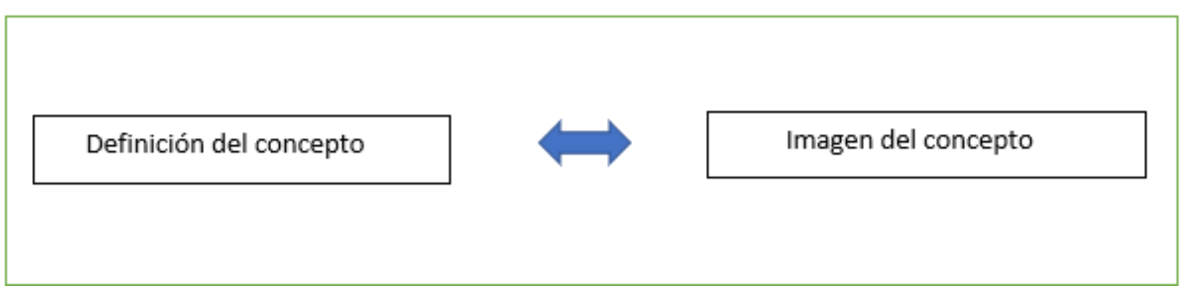


Figura 2.3: Correlación entre la definición del concepto e imagen del concepto.

Aunado a la formación del concepto, está el proceso de su aplicación, que es la resolución de problemas o de ejecución de tareas cognitivas. Los modelos aceptados implícitamente para este proceso se representan en los siguientes esquemas:

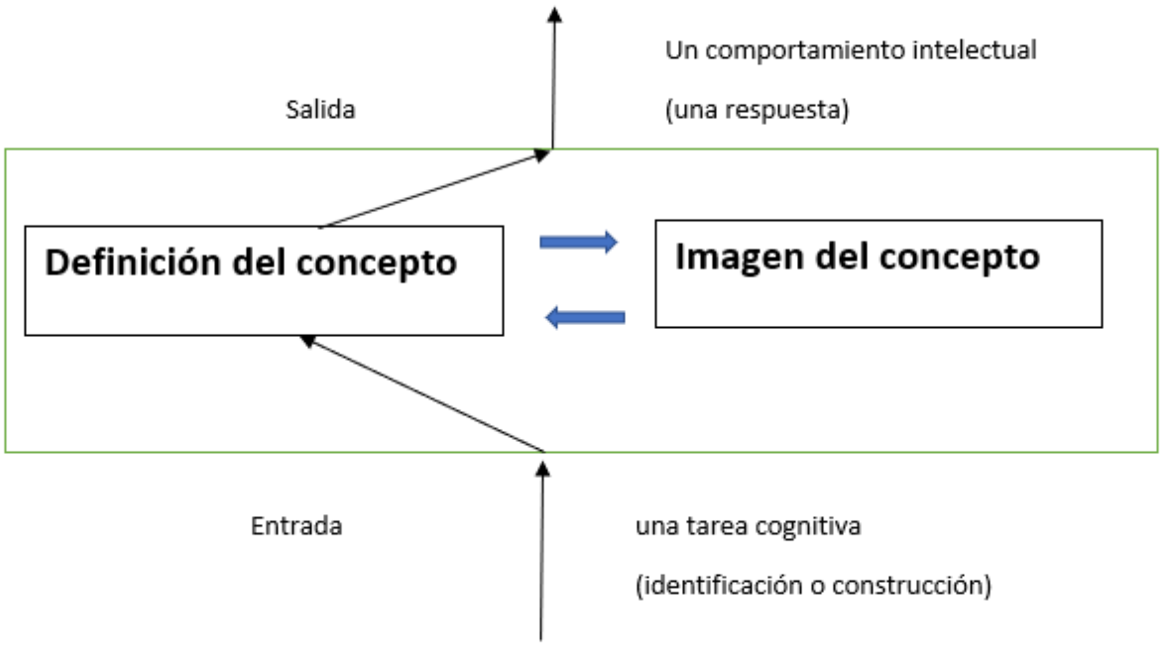


Figura 2.4: Idea intuitiva a través de la definición formal.

El esquema anterior representa la interacción entre la *imagen del concepto* y la *definición del concepto*, que sería lo deseable si los alumnos actuaran reflexivamente. La idea intuitiva se "filtra" a través de la definición formal para dar una respuesta.

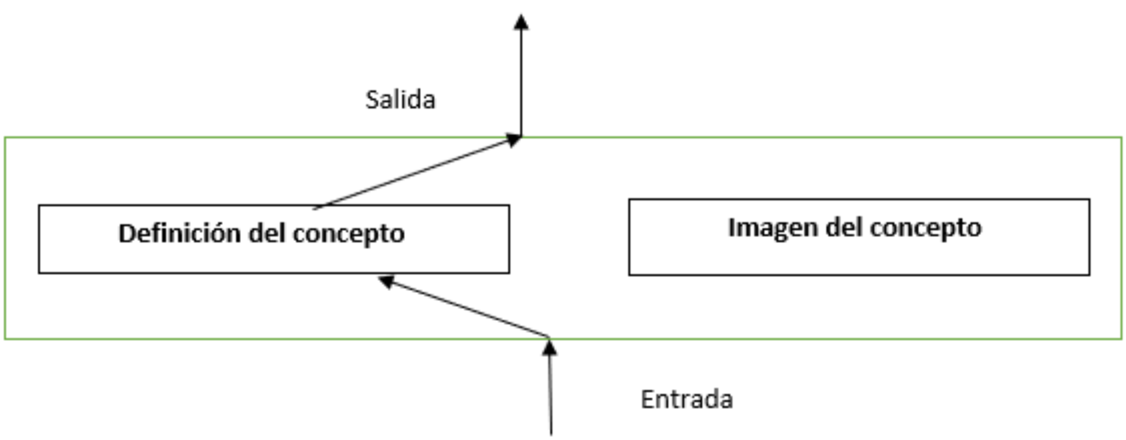


Figura 2.5: Deducción formal pura.

El esquema anterior representa la deducción formal pura, que sería lo que espera el profesor de sus alumnos.

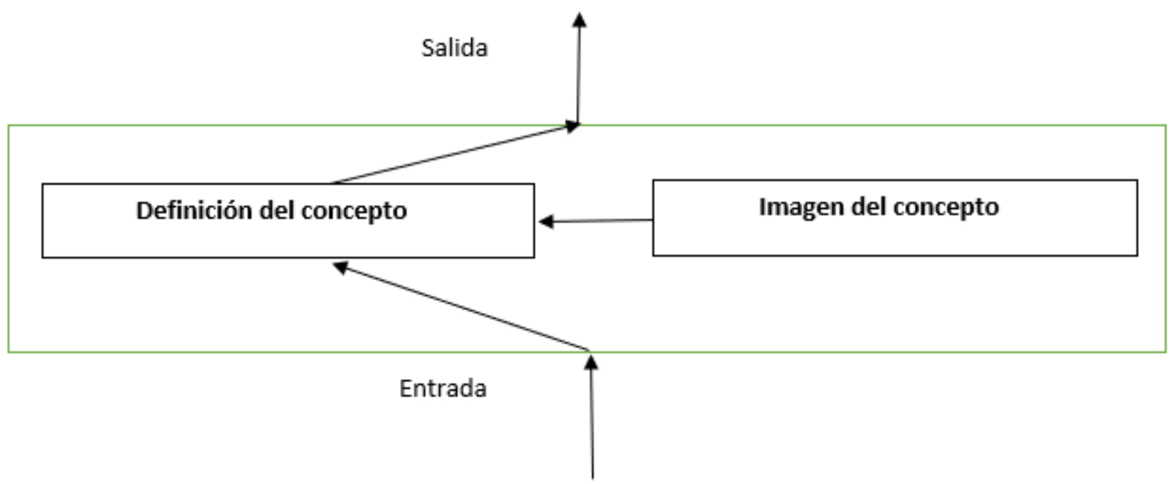


Figura 2.6: Pensamiento intuitivo por deducción.

El esquema anterior representa el pensamiento intuitivo seguido por una deducción.

Así, con los esquemas anteriores, muchos profesores presuponen que el estudiante, antes de formular la solución a un problema, consulta la *definición del concepto*. Aunque eso es deseable, un modelo más cercano a lo que ocurre comúnmente es el siguiente:

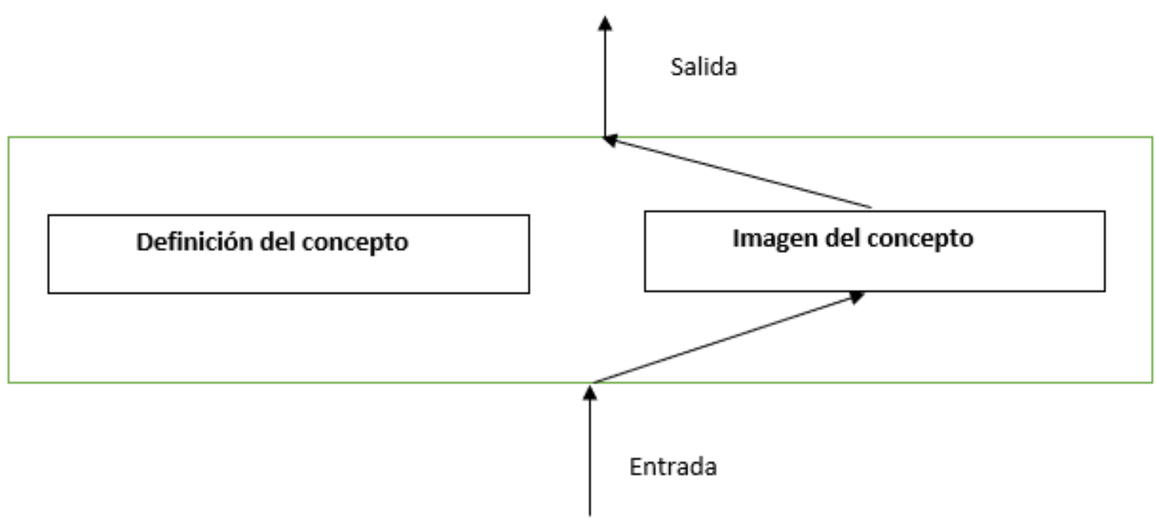


Figura 2.7: Respuesta intuitiva.

Lo anterior representa a la respuesta intuitiva. Con el último esquema vemos que la celda de la *definición del concepto* no se consulta durante el proceso de resolver un problema, aun y cuando no esté vacía. Esta situación predomina porque:

a) Es nuestra manera habitual de proceder en un contexto cotidiano, es propio y se activa al responder a una pregunta, o resolver un problema.

b) El carácter rutinario de la gran mayoría de problemas a los que se enfrentan los estudiantes hace que esta manera usual de proceder sea exitosa. Es importante notar que J Fraleigh (2014) lo señala como error de algunos estudiantes cuando se pide que escriban la definición de grupo en su libro, el cual, trata de Algebra Abstracta varios alumnos no la escriben correctamente, omiten los cuantificadores. Hace preguntas de F –V, el alumno debe justificar en cada sección de ejercicios.

Sin embargo, en los contextos técnicos, la *definición del concepto* juega un papel muy importante. Es de gran ayuda en la formación de la *imagen del concepto* y su papel en la solución de problemas es decisivo. A medida que se desarrolla la imagen conceptual, no es necesario que sea coherente en todo momento. El cerebro no funciona de esa manera. La información sensorial estimula ciertas vías neuronales e inhibe otras. De esta forma, diferentes estímulos pueden activar diferentes partes de la *imagen del concepto*, desarrollándolas de una manera que no necesita formar un todo coherente. Llamaremos a la porción de la imagen conceptual que se activa en un momento particular la *imagen conceptual evocada*.

Sólo cuando se evocan simultáneamente aspectos conflictivos, que pueden coexistir en general sin molestar al alumno, los alumnos perciben su inconsistencia y sienten una sensación de confusión, al intentar responder.

Cada estudiante asocia a un concepto su “propia definición” o “imagen conceptual", no necesariamente coherente con otras partes de su conocimiento previo. Tales factores, evocados al mismo tiempo, son posibles factores de conflicto. Pozo (2013), explica cómo se integra un nuevo conocimiento a nuestros esquemas, ¿qué pasa cuando aprendemos algo nuevo? Lo explica mediante una metáfora: un nuevo alumno llega a un grupo, puede integrarse de diferentes maneras, 1) puede integrarse a uno de los grupos que ya existen, 2) no incorporarse a ninguno, 3) puede provocar una reorganización de los grupos, 4) su llegada puede causar conflictos. Algo parecido pasa con los nuevos conocimientos.

Un tipo serio de conflicto potencial consiste en la coexistencia de una imagen conceptual que es incoherente con la definición formal del concepto en sí, porque el conflicto no se percibe como algo generativo, pero la definición formal se percibe como no relacionada con la imagen conceptual. En otras palabras, para generar un conflicto, la definición formal debe activar definiciones de imagen de concepto que puedan compararse simultáneamente con otras partes de la imagen de concepto.

3. Los números reales, aproximación previa al concepto de límite

3.1 Recta Real y límite

Para poder adentrarnos en el estudio de límites es necesario que los alumnos tengan un "buen" estudio previo de los números reales. Existe una gran variedad de material, por ejemplo, los libros clásicos de Cálculo en varios países de habla hispana y USA, autores como: Anton, Purcell, Stewart, Larson, Leithold, etc. Al revisar varios libros de Cálculo, edición reciente, se encontró que actualmente son muy breves en el tema de números reales previo a límites, ahora dedican mayor espacio a las aplicaciones en Economía, Administración, Química, etc.

En general "límite" y "tender hacia" forman parte del lenguaje común, por ejemplo, "estas llegando al límite de mi paciencia", un café caliente se enfría y tiende a la temperatura ambiente, etc. Pero debemos distinguirla de su uso técnico. La pregunta formulada a los alumnos:

0.999... = 1 ¿Cierto? O bien, ¿0.999... es menor que 1?

Esto se ha explicado en Courant y Robbins (1967), que es un libro de divulgación de las matemáticas muy conocido, actualizado en 2002 por Ian Stewart. Posteriormente nos enteramos que Schwarzenberger y Tall (1978) lo aplicaron a alumnos de primer año de universidad en Inglaterra, en nuestro caso obtuvimos resultados semejantes, que se comentan más adelante. Varios alumnos dijeron que eran iguales porque la diferencia entre ellos era infinitamente pequeña, pero la mayoría de los alumnos pensó que 0.999... era menor que 1, predominando en ellos el carácter inalcanzable del límite. El principal error se produce de la representación de 0.999... como un proceso infinito y no en el que el proceso está terminado.

¿Cómo explicamos por primera vez a jóvenes de bachillerato o en un primer curso de Cálculo, el concepto, idea o noción de limite? En este caso como "x tiende a 1" a través de 0.9, 0.99, 0.999, … etc.

Es inevitable indicar que x se aproxima a 1, se insiste en que es diferente de 1, es decir, x puede tomar valores en (0,1). No basta con explicar esta notación (a, b) abierto y [a, b] cerrado ¡es una sutil diferencia! Que puede ocurrir…. Por este detalle…considere $f(x)$ = 1/x

3.2 Los Números Reales

Todo estudiante que llega a una escuela de nivel medio-superior y superior tiene *ideas previas* de los números reales y su representación en la recta, pero estos no han sido explicados, en particular los números irracionales.

Es importante tener una discusión previa, a nivel intuitivo, de los números reales y límites, para que posteriormente se tenga una discusión rigurosa con vistas a entender mejor la necesidad del Axioma del Supremo en Cálculo Diferencial e Integral.

3.3 Sobre la densidad de los números racionales en niveles educativos pre universitarios

La Densidad de los Números Racionales es un tema que se menciona en Matemáticas de primero de secundaria, según el programa oficial de 2006, 2011, 2016 pero tiene algunos detalles que es necesario comentar.

Comencemos con un problema propuesto en Argentina por Broitman y otros (2003). "El docente anota el número 3 en el pizarrón e indica a los alumnos que deben sumarle la mayor cantidad de números posibles, sin pasarse de 10. Al llegar o pasarse de 10, deben detener las sumas, y entonces, gana quien logre la mayor cantidad de sumandos".

Antes de continuar pensemos:

- ¿Habrá una estrategia que me permita no perder?
- Esta estrategia, ¿me asegura ganar? Comenzado el juego, los niños preguntan: "¿Se puede usar números con punto decimal?", haciendo referencia a los sumandos utilizados:
- ¿Qué sucede si no habilitamos números "con punto"? ¿Cuál sería una buena estrategia?

Como habremos notado, el no habilitar los números con "punto", implica que el juego termine muy rápido. Por otra parte, habilitar el uso de estos números permitiría jugar sin perder nunca: basta para ello sumar números "pequeños". Pero cuidado, utilizar esta estrategia no implica ganar, ya que, si el "contrincante" lo hace de la misma forma, el juego no termina nunca, sin ganadores ni perdedores. Es decir, el juego se podría desarrollar infinitamente. Para analizar más a fondo este problema, pensemos en una posible jugada de un alumno:

Números que va sumando	4	2	0.5	0.1	0.3	0.01	0.02	0.007
Suma obtenida en cada paso	7	9	9.5	9.6	9.9	9.91	9.93	9.937

Tabla 3.1: Cantidades sumadas por los alumnos sin pasarse de 10.

En este caso el alumno obtuvo una suma de ocho sumandos, cuyo resultado es un número entre 3 y 10. Jugada que puede mejorarse sin mucha dificultad. Por ejemplo, si se agrega un sumando igual a 0.01 en cualquier momento de la secuencia, tendríamos nueve sumandos manteniendo un resultado entre 3 y 10. Entonces, como mencionamos antes, se podría seguir jugando, manteniendo un resultado que no supere 10. Si anotamos los resultados (números) de cada suma parcial, en la tabla tendremos infinitos números entre 3 y 10. Podemos concluir entonces que "entre 3 y 10 hay infinitos números".

¿Qué está por detrás de esta conclusión? es la densidad de los números racionales la que permite asegurar la existencia de estos números entre 3 y 10.

La densidad de los Números Racionales nos dice que podemos encontrar siempre un racional intermedio, para explicarlo al alumno podemos usar el siguiente ejemplo:

Resuélvase el siguiente problema

Problema 1.

(a) Entre 1 y 2, ¿hay infinitos números?, ¿Cuáles?

(b) Encuentra algunos números entre 0.5 y 0.6; entre 0.7 y 2¼; entre 1/7 y 1/2.

(c) Intenta encontrar algunos números entre 3/8 y 5/6.

Como se habrá notado en este problema, la solución depende no solo de los extremos, sino de cómo estén dados los números, en fracción, decimal o mixtos.

Con los problemas que siguen nos proponemos analizar ciertas estrategias para hallar estos números intermedios.

Problema 2.

(a) Encuentra algunos números entre 2.5 y 2.9.

(b) ¿Puedes encontrar algún número entre 2.7 y 2.8?

(c) Indica varios números entre 2.03 y 2.1.

Para responder al inciso (a), los números 2.6, 2.7 y 2.8 aparecen sin mucha dificultad. Pero ¿por qué estos números y no otros? Surgen de trasladar a los racionales la idea de siguiente y anterior, heredada de la numeración natural, y son los únicos en el orden de los décimos que hay entre los extremos. Con el objetivo de romper con esa posible (y única) forma de responder (a), que se basa en pensar solo en los decimales con una sola cifra después de la coma, se presenta el apartado (b). Por los números elegidos, no hay decimales con una cifra después de la coma entre ellos. Esto exige pensar en aumentar por lo menos en un orden a los decimales con los que se trabaja, es decir, contar con los centésimos. Así escritos, los extremos son 2.70 y 2.80. ¿Cuántos números con dos cifras decimales hay entre ellos? Esta forma de representación habilita los nueve números de este orden que sirven de respuesta: 2.71; 2.72; ... 2.79. ¿Cuántos podemos encontrar con tres cifras después de la coma? ¿Cómo se pueden obtener más?

A esta altura de análisis nos surgen algunas ideas o conclusiones:

- Entre dos números decimales, existen infinitos decimales.

- Entre dos decimales hay una cantidad finita de decimales que tienen cierta cantidad de decimales (tal vez ninguna).

- Una estrategia para encontrar más decimales intermedios consiste en aumentar la cantidad de cifras después del punto decimal.

Algunas respuestas de los alumnos frente a situaciones como la anterior, dejan rastro sobre la fuerte presencia de características o propiedades de los números naturales que permean el trabajo con racionales.

Problema 3.

(a) Encuentra algunos números entre 4/9 y 8/9. ¿Cuántos encontraste?

(b) ¿Puedes encontrar algún número entre 7/5 y 8/5?

(c) Encuentra varios números entre 3/8 y 5/6.

Después de resolver el problema anterior, podemos notar que el apartado (a) es muy sencillo: los números 5/9, 6/9 y 7/9 son algunos de los que existen entre 4/9 y 8/9. La situación cambia en el apartado (b), pues entre 7/5 y 8/5 no hay ninguna fracción de denominador 5. Una posible estrategia para hallar uno de estos racionales es la siguiente: Hallar la semisuma o promedio de los extremos. En este caso, 7/5 + 8/5 = 15/5 = 3 por lo que el racional 3/2 está entre 7/5 y 8/5. En el apartado (c) los extremos no tienen igual denominador, por lo que no es posible proceder como en el caso (a), pero intentaremos poner en práctica la estrategia utilizada en el apartado (b): en este caso, la suma 3/8 + 5/6 da 29/24, por lo que 29/48 está entre 3/8 y 5/6. Si ubicamos estos números en la recta numérica, obtenemos una representación como la que sigue:

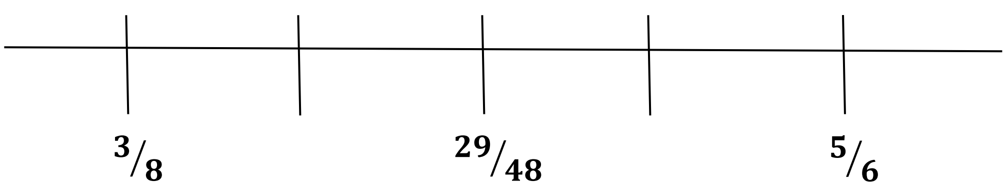


Figura 3.1: Representación gráfica "entre 3/8 y 5/6 podemos encontrar otro número (29/48)".

Utilizando la estrategia anterior, calcula los números marcados en la recta.

Habrás notado que estos cálculos son engorrosos, lo que nos motiva a buscar otro camino para encontrar estos números y otros. Si comparamos esta búsqueda con la realizada en el apartado (a), encontramos una diferencia: en el primer apartado se hizo muy fácil, porque las fracciones de los extremos tenían igual denominador. Podemos entonces pensar en simplificar el problema, escribiendo las fracciones 3/8 y 5/6 con igual denominador.

Si escribimos 3/8 = 18/48 y 5/6 = 40/48, el problema se reduce a encontrar números entre 18/48 y 40/48. De esta forma encontramos veintiún fracciones de denominador 48. Es de notar que "no hay infinitas fracciones de denominador 48 entre 3/8 y 5/6", pero ya mencionamos que hay infinitas entre ellas.

Tenemos que buscar fracciones con otros denominadores. Como puedes observar, ninguna de estas veintiún fracciones es 47/96 ni 79/96, ubicadas en la recta. Podemos entonces escribir 3/8 y 5/6 con denominador 96, lo que nos permitirá encontrar aún más fracciones ¿Cuántas son? Si seguimos aumentando el denominador, la cantidad de fracciones que encontramos entre 3/8 y 5/6 aumenta.

Ante este problema concluimos:

- Entre dos fracciones existen infinitas fracciones.
- Entre dos fracciones existe una cantidad finita de fracciones que tienen un cierto denominador (tal vez ninguna).
- Una estrategia para encontrar más fracciones intermedias consiste en aumentar el denominador.

Para cerrar, intentaremos establecer alguna relación entre los procedimientos puestos en juego en los Problemas 2 y 3. En primer lugar comparemos las conclusiones abordadas en ambos:

Problema 2 - Extremos decimales	**Problema 3 - Extremos fraccionarios**
Entre dos números decimales existen infinitos decimales.	Entre dos fracciones existen infinitas fracciones.
Entre dos decimales hay una cantidad finita de decimales que tienen cierta cantidad de decimales (tal vez ninguna).	Entre dos fracciones existe una cantidad finita de fracciones que tienen un cierto denominador (tal vez ninguna).
Una estrategia para encontrar más decimales intermedios consiste en aumentar la cantidad de cifras después del punto decimal.	Una estrategia para encontrar más fracciones intermedias consiste en aumentar el denominador.

Tabla 3.2: Conclusiones de los problemas 2 y 3.

Las conclusiones obtenidas en ambos problemas son similares. Estas nos indican una relación entre la cantidad de cifras decimales (extremos decimales) y el denominador (extremos fraccionarios), que se ilustra en el siguiente ejemplo donde se buscan números entre 1.5 y 1.6 o de otra forma entre 15/10 y 16/10.

	1.5 – 1.6	
1.50	1.51 - 1.52 - ...- 1.58 – 1.59	1.60
1.500	1.501 - 1.502 - ... - 1.598 - 1.599	1.600

	15/10 – 16/10	
150/100	151/100 – 152/100 - ... – 159/100	160/100
1500/1000	1501/1000 – 1502/1000 - ... -1598/1000 - 1599/1000	1600/1000

Figura 3.2: Comparativa entre decimales y fracciones.

Como se puede observar, ambas estrategias esconden la misma idea: la de “ampliar” los espacios entre extremos con el fin de encontrar cada vez más números intermedios.

La noción de densidad es compleja, se intenta inducir a los niños en varios países desde la primaria. Nuestra intención al reproducir la clase anterior es mostrar este hecho.

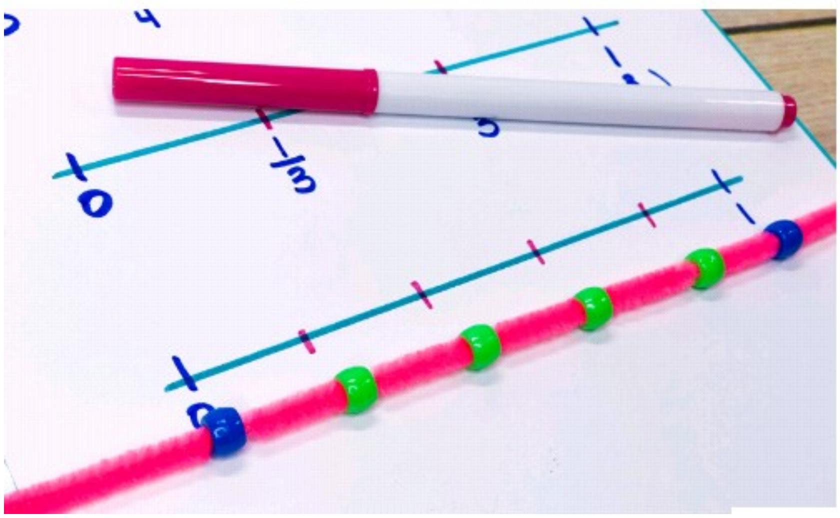


Figura 3.3: Ilustración de la forma tradicional de enseñar la densidad de los números en nivel básico.

Fracciones en la recta “usando materiales concretos”. Pero esto puede conducir a ideas erróneas posteriormente, la enseñanza puede obstaculizar la comprensión.

Recién encontramos en el libro de sexto de primaria para el ciclo escolar 2019-2020, el siguiente ejemplo:

Ubiquen en la recta numérica las siguientes fracciones

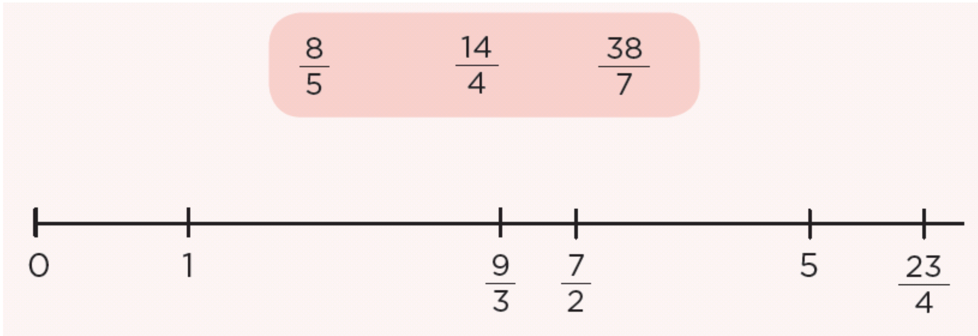
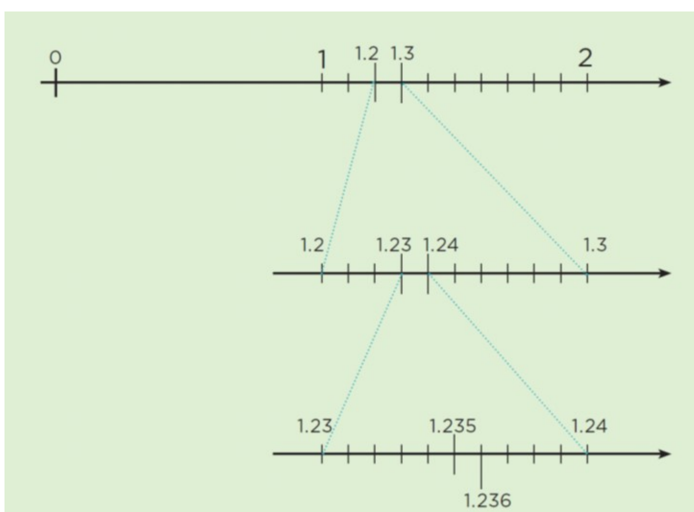


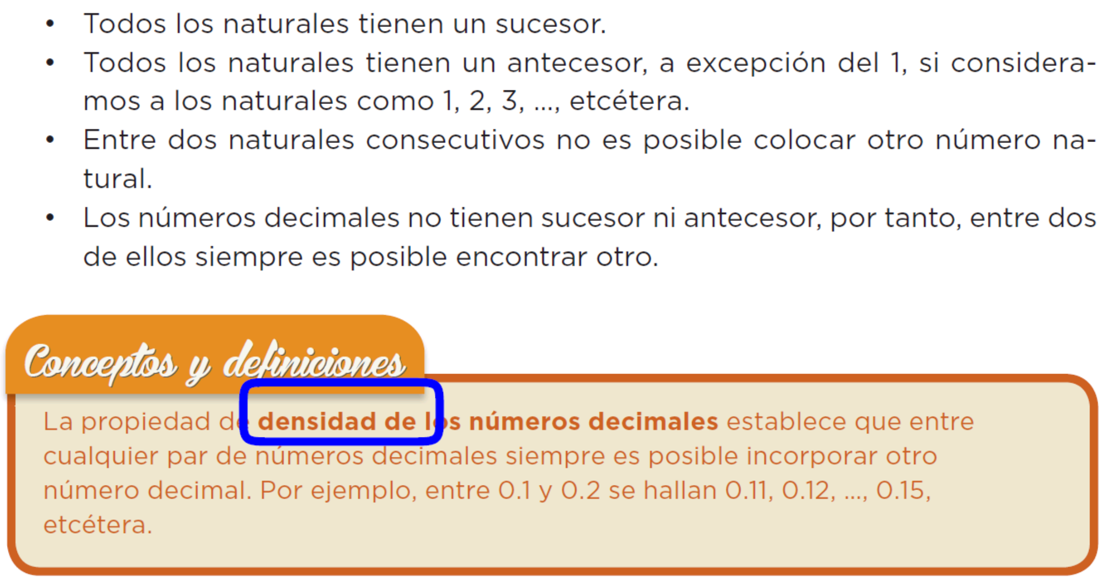
Figura 3.4: Ejemplo de ejercicio obtenido de un libro de sexto grado.

"Las actividades de este desafío están diseñadas para que los estudiantes verifiquen que entre dos números decimales siempre es posible identificar otro decimal, característica que no poseen los números naturales (por ejemplo, entre 4 y 5 no existe otro natural). Es posible que los alumnos piensen que los decimales de cada pareja son consecutivos y, por lo tanto, les cueste trabajo imaginarse que entre ellos haya otros números decimales. Ante esto, se les puede pedir que amplíen los segmentos de recta que los separa y que los subdividan en 10 partes iguales y preguntarles: ¿cada división representa otro número decimal?, ¿cuál?"

Esto último obtenido del libro del docente, donde esta imagen puede ser parte del problema, porque más bien debemos imaginar que un pequeño intervalo se aumenta y nuevas divisiones aparecen. Pero esto no se da en la realidad.

Esto justifica de alguna manera nuestro trabajo. Se trabaja desde primaria, pero los niños no avanzan, es muy abstracto para ellos, todavía batallan con las operaciones con números enteros.





- Todos los naturales tienen un sucesor.
- Todos los naturales tienen un antecesor, a excepción del 1, si consideramos a los naturales como 1, 2, 3, ..., etcétera.
- Entre dos naturales consecutivos no es posible colocar otro número natural.
- Los números decimales no tienen sucesor ni antecesor, por tanto, entre dos de ellos siempre es posible encontrar otro.

Conceptos y definiciones

La propiedad de **densidad de los números decimales** establece que entre cualquier par de números decimales siempre es posible incorporar otro número decimal. Por ejemplo, entre 0.1 y 0.2 se hallan 0.11, 0.12, ..., 0.15, etcétera.

Figura 3.5: Densidad de los números explicada en libros de primaria.

4. La compleja relación entre el continuo y los números reales, algunos apuntes históricos.

4.1 Diferentes continuos en la historia de las matemáticas

Se intentó buscar el origen de ideas sobre la continuidad como “Magnitudes que pueden asumir todas las etapas intermedias posibles”, “Conjunto de infinitos puntos sin dimensiones”, “Lo que podemos rastrear sin interrupciones ni descansos”, pero no logramos obtener su origen. Por ello se comentan brevemente las ideas de algunos autores de relevancia en la historia de las matemáticas, como se resume en la tesis doctoral de Branchetti (2016).

4.1.1 El continuo de Aristóteles

Aristóteles distingue la cantidad discreta (Poson) de la cantidad continua (Suneches). Él incluye líneas, superficies, cuerpos, tiempo y lugar en la última categoría, también distingue la cantidad que es continua de lo que no es continuo, Branchetti (2016).

Walddeg (1993) hace un estudio esclarecedor de las ideas aristotélicas sobre el infinito. Menciona que Aristóteles hace referencia clara al infinito potencial (*el ser en potencia, lo que no se ha terminado de contar, “pasar de n a n+1”)* y el infinito actual *(el ser en acto: el infinito como totalidad*) Indica que Aristóteles da definiciones nominales de diferentes infinitos.

Una magnitud, dice, es la cantidad que se puede medir (en lugar de numerable o contable), y una magnitud es divisible en partes que son continuas (White, 2009).

Aristóteles define el continuo como como una determinación de contiguo, es decir, lo que es consecutivo y en contacto (Giutsi, 2000) por lo que es imposible para un continuo estar compuesto de partes.

Mientras que la concepción de magnitud de Aristóteles (megethos) es fuertemente geométrica, su concepto de lugar (topos) encuentra un empleo más directo en su física: el movimiento es de hecho movimiento con respecto a un lugar. El lugar se clasifica como una especie de cantidad continua ("cuánto" – poson). (Blanco, 2009).

Cualquiera que sea la relación entre la doctrina de Aristóteles del potencial infinito y la práctica matemática antigua contemporánea, la concepción aristotélica se convirtió, a largo plazo, en la visión ortodoxa, particularmente en contextos físicos y matemáticos. A pesar de la dificultad para elaborar los fundamentos del cálculo en términos de infinito potencial "aristotélico" (un problema que finalmente fue resuelto por B. Bolzano, A. Cauchy y K. Weierstrass en el siglo

XIX), la visión aristotélica básica persistió en contextos técnicos hasta el trabajo de Georg Cantor a finales del siglo XIX. En las matemáticas contemporáneas, la influencia aristotélica es detectable en las llamadas tradiciones "intuicionistas" y constructivistas. En palabras que podrían haber sido escritas por el propio Aristóteles, M. A. E. Dummett escribe que "en Matemáticas intuicionistas, todo infinito es infinito potencial; no hay infinito completo. Esto significa, simplemente, que captar una estructura infinita es captar el proceso que la genera; reconocerlo como infinito es reconocer que el proceso es tal que no terminará" (Dummett, 1974)

4.1.2 Continuo Arquimediano

El trabajo de Arquímedes (287 a. C. - 212 a. C.) poco conocido en "documentos originales", hasta el siglo XVII, tanto por los acontecimientos históricos relacionados con el descubrimiento e interpretación de sus escritos y porque algunas de las ideas significativas y revolucionarias que solo recientemente han salido a la luz con el libro de Metz, Noel (2007). Su concepción del continuo era más compleja de lo que podemos pensar si sólo tenemos en mente lo que conocemos hoy como ***el postulado de Arquímedes*** o la ***propiedad Arquimediana,*** Branchetti (2016).

De hecho, de la correspondencia de Arquímedes con Eratóstenes (descubierta por Heiberg en 1906) podemos entender que había al menos "dos Arquímedes": el que estaba trabajando para encontrar resultados y el otro, quien estaba presentando sus resultados en forma pulida. El "segundo" Arquímedes parece ser coherente con la prohibición de infinito, solo parece funcionar con métodos de exhausión y tratar con un infinito potencial. Arquímedes evita así usar cantidades infinitesimales, y solo dice que las partes del continuo que él considera pueden ser tan pequeñas como se elijan.

El postulado de Arquímedes es muy importante también para las teorías modernas de los números reales: fijado por Hilbert (1899) como postulado en su axiomatización de los números reales, la relación con este postulado es un elemento clave para comparar el postulado de continuidad de Cantor y Dedekind.

Según Branchetti (2016), Arquímedes tiene 2 concepciones del continuo:

1.*Continuo práctico*: el infinito actual, compuesto por infinitas partes infinitesimales.

2.*Continuo teórico*: infinito potencial, consistente con el método de agotamiento de Eudoxio y con él, la prohibición de cantidades reales infinitas e infinitesimales.

En los libros de Los Elementos Euclides menciona: "Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra".

Esta afirmación de Euclides fue considerada por Arquímedes como un principio o postulado, de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura matemática. Arquímedes lo enuncia en el postulado 5 del Libro I de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro* [Ver Eecke. Les Oeuvres complètes d'Archimède, I, 1960, p.6]:

"Si $x > 0$, $(x \in \mathbb{R})$ y $y \in \mathbb{R}$, entonces, hay un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$".

4.1.3 Continuo de Ockham

La principal dificultad que presenta el continuo es la infinita divisibilidad del espacio, y en general, de cualquier continuo Branchetti (2016). El tratamiento de la continuidad se basa en la idea de que entre dos puntos en una línea hay un tercero, quizás la primera formulación explícita de la propiedad de densidad, y en la distinción entre un continuo "cuyas partes forman una unidad" de un contiguo de cosas yuxtapuestas (Volterra, 1920).

Ockham (c. 1280 – 1349) reconoce que se deriva de la propiedad de densidad que en arbitrariamente pequeños tramos de una línea deben descansar infinitos puntos, pero se resiste a la conclusión de que las líneas, o el continuo, constan de puntos. Ockham afirma que "ninguna parte de la línea es indivisible, ni ninguna parte del continuo es indivisible".

Si bien Ockham (c. 1280 – 1349) no afirma que una línea esté realmente "compuesta" de puntos, él tuvo la idea, sorprendente, de que una línea punteada y continua se convierte en una posibilidad cuando se percibe como una densa serie de puntos, más que como un conjunto de puntos en una sucesión contigua (Bell, 2004).

El continuo de Ockham es así:

1. Punteado y denso, pero en realidad no compuesto de puntos ni indivisibles.

2. Cuyas partes forman una unidad.

3. No un conjunto de puntos en una sucesión contigua. Pues los alumnos conciben los puntos de la sucesión como un “collar de perlas”, cada perla tiene una perla contigua, sin embargo, entre perla y perla hay espacios, los alumnos consideran a las perlas como los enteros y los espacios entre ellos son los decimales.

4.1.4 Continuo de Galileo Galilei

Galileo Galilei enfrentó el problema de la composición del continuo cuando estaba trabajando en problemas de Física, en particular, movimiento y dinámica (Volterra, 1920).

Su idea de descomponer el movimiento en partes infinitesimales fue un paso revolucionario para la física, ya que permitió considerar localmente la velocidad constante y utilizarla para situaciones generales, leyes que se habían enunciado en casos más simples.

Aristóteles había enfatizado que el continuo no puede estar compuesto por elementos discretos sin perder su caracterización continua, mientras que el continuo de Galileo es fragmentado, atómico, compuesto por elementos infinitos que son resultado del proceso infinito de división Branchetti (2016).

Una característica importante del continuo galileano está estrictamente vinculada a su infinita cardinalidad. Imaginemos comparar dos segmentos usando el número de sus elementos. Como ambos están compuestos por infinitos elementos indivisibles, no hay forma de establecer una relación de orden entre ellos.

En resumen, el continuo de Galileo tenía las siguientes características:

1. Compuesto de infinitas partes elementales e invisibles

2. No se pudieron comparar diferentes segmentos continuos ya que están compuestos de elementos infinitos y todas las cantidades infinitas tienen la misma cardinalidad.

4.1.5 El continuo de Leibniz

Leibniz es uno de los matemáticos más influyentes en la historia del Cálculo. También sus especulaciones filosóficas sobre el mundo (la monadología) se habían entrelazado con las Matemáticas, enriqueciendo su teoría con frecuentes comparaciones con el mundo real, con quienes las teorías matemáticas tenían que ser armonizadas (Giutsi, 1990).

Sobre el tema del *continuo*, la posición de Leibniz fue muy articulada. Leibniz nunca llegó a una única teoría del *continuo*, pero sí a diferentes imágenes de diferentes continuos que cambian una y otra vez dependiendo del caso que se esté analizando.

Al final, individualizaremos al menos tres continuos leibnizianos, cada uno de los cuales coexiste con el otro sin jerarquía y cumple una tarea particular. Los continuos leibnizianos están etiquetados con los siguientes nombres:

1. Continuo con infinitesimales.

2. Continuo clásico formalizado.

3. Continuo hiperdenso.

4.1.6 Continuo Newtoniano

Newton (1665) había llegado a tratar la continuidad al enfrentar tanto el tema de la descripción abstracta del espacio como el tiempo como entidades absolutas, perseguidas a través de herramientas matemáticas, y el análisis de magnitudes, variaciones y movimiento.

La concepción del continuo en Newton era así:

1. Dinámico.

2. Asociado a funciones y variaciones.

3. Relacionado con fenómenos físicos, como movimiento, variación de magnitudes, tiempo transcurrido.

4.1.7 El continuo de Lagrange

Lagrange (1795) enfrentó primero el problema de la fundación del Cálculo con el "rigor de las pruebas antiguas", tratando de proporcionar una solución algebraica (Cinti, 2013). Intenta referir todos los procedimientos y definiciones de Cálculo a Álgebra, alejándolo de las evidencias geométricas que habían dejado espacio a argumentos metafísicos para criticar el análisis diferencial. De esta manera, Lagrange inauguró la temporada de "aritmetización del análisis" eso parecía resolver todos los problemas, dando el rigor deseado al Cálculo.

4.1.8 El continuo de Bolzano

La contribución de Bernhard Bolzano al debate sobre la continuidad es simplemente ponerse del lado de la cuestión de métodos y rigor en el análisis Branchetti (2016).

El cambio de imágenes de continuo de Geometría a Álgebra y Aritmética que podemos observar en el siglo siguiente puede estar directamente relacionado con las declaraciones de Bolzano. Veamos finalmente en profundidad cuál era la concepción del continuo que emerge de las obras de Bolzano. Bolzano, como Galileo, consideró que podría surgir un infinito real a partir de la agregación de puntos infinitos.

Mencionar el teorema de Bolzano que parece obvio, pero poco a poco los matemáticos van viendo la necesidad de dar una demostración, el teorema de Bolzano dice lo siguiente:

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $F(x) = 0$.

El continuo de Bolzano es así:

1. Denso (convencido de que es suficiente para hacer un conjunto continuo).

2. Real infinito y compuesto, a través de la agregación, por infinitos puntos.

3. Admitió la existencia de cantidades infinitesimales como recíprocos de cantidades infinitamente grandes (algebraico).

4. Las cantidades infinitesimales no pueden considerarse como ceros (contrario a la posición de Euler), pero tampoco pueden ser considerados como "entidades geométricas infinitamente pequeñas"; esto era cierto solo para valores aislados.

4.2 Dificultades en los procesos que involucran los números reales y el continuo

En este párrafo resumimos los resultados sobre las dificultades que pueden surgir en los procesos de enseñanza-aprendizaje que involucran números reales; a pesar de que se ha prestado mayor atención a los estudiantes, también hay estudios con maestros y futuros maestros, en nuestro caso consideramos estudiantes de FCFM, por ello los estudios solo sirven como referencia. Los motivos por los que se considera importante estudiar la Recta Real son:

a. La complejidad del tema, que los hace difíciles de comprender por completo incluso en caso de una buena formación matemática.

b. La escasa atención a los problemas epistemológicos, típicos de los números reales, en la escuela secundaria pero también en la universidad y en los cursos de formación;

c. La "reputación" de los números reales como objetos de actividades didácticas, indispensables pero prohibitivas, que lleva a los maestros a tratar de dar sentido a los diferentes aspectos de los números reales basados en libros de texto y manuales solo para enseñarlos.

Esto obtenido de la tesis doctoral de Branchetti (2016).

4.2.1 Dificultades de estudiantes con números reales

La literatura sobre las dificultades de los estudiantes con los números reales es amplia y muchos resultados fueron confirmados por diferentes investigadores desde los años 70.
Los temas principales relacionados con los números reales en la literatura son:

1. Números irracionales
2. Infinito
3. Puntos de una línea
4. Densidad y continuidad
5. Recta numérica (correspondencia entre puntos y números reales)

Presentamos aquí un breve análisis de las dificultades que los agrupan en estas categorías.

Números irracionales

Hay diferentes tipos de investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes con números irracionales. Algunas de estas investigaciones enfatizan la dificultad de dar sentido a las representaciones de números irracionales (como puntos en la recta, como segmentos que se pueden construir con regla y compás y como decimal infinito. Damos por obvio las fracciones, pero para los alumnos puede no resultar obvio trabajar con fracciones fuera de lo común como 17/123, a/b, b puede ser cualquier entero mayor que 1), mientras que en otras investigaciones se destacan las dificultades con la operación. Parece que el concepto de números irracionales en general permanece aislado de la clase más amplia de números reales. Al final de sus investigaciones propias confirmaron que las dificultades de los estudiantes para comprender los números reales estaban relacionadas con la comprensión incompleta de los números racionales, la inconmensurabilidad y la no numerabilidad de los números irracionales.

Siendo el adjetivo "irracional" definido como una negación de "racional", esta observación es ciertamente relevante para interpretar las dificultades de los estudiantes cuando tienen que comprender el significado del número irracional, complejo en sí mismo.

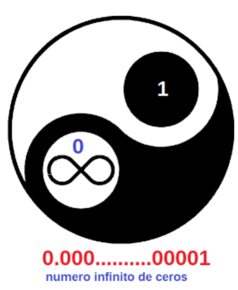
En el campo de la investigación sobre las dificultades con el número racional, uno es particularmente relevante para nosotros: las ideas de los estudiantes sobre la relación entre 0.999 ... y 1(Tall & Schwarzenberger, 1978).

Los estudiantes consideran los dos números "*infinitamente cercanos*" pero no iguales, debido a los problemas en la interpretación de la representación. De hecho, los estudiantes perciben los números irracionales como números no enteros cuando están representados en forma decimal, números que no están completos.

Por lo tanto, es difícil para ellos, aceptar que son iguales a 1 y la prueba habitual que implica su representación como fracciones no convence a los estudiantes de todos modos.

Un fenómeno muy interesante fue reportado por Margolinas (1988): algunos estudiantes, a los que se les pidió que representaran la diferencia entre 0.999... y 1 inventaron un símbolo. El símbolo tenía ceros infinitos, y al final un 1. Esto confirma que algunos estudiantes, frente a una anomalía en la representación decimal de números, de una manera más o menos explícita, intentan representar su percepción de incompletitud. En ese caso se concretó mediante un símbolo: 0. 000 … 1.

Por ejemplo, se nos ocurre la siguiente ilustración con base en la idea de los alumnos de Margolinas:



o como

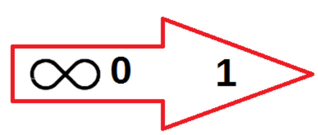


Figura 4.1: Un símbolo para representar “un número con infinitos ceros y al final 1”.

Además de esto, también hay otros obstáculos (cognitivos y epistemológicos) que hacen que la comprensión de los números irracionales sea aún más difícil.

A diferencia de la cantidad de investigaciones sobre las dificultades con los números racionales, la investigación sobre los números irracionales es bastante escasa (Sirotic y Zazkis,2004).

Las investigaciones más relevantes sobre las dificultades de los estudiantes con números reales son Sirotic y Zazkis (2004, 2007).

Los estudiantes consideran que dos números pueden ser "*infinitamente cercanos"* pero no iguales. De hecho, los estudiantes perciben los números irracionales como números no enteros (totalidad) cuando están representados en forma decimal, números que no están completos.

Contrariamente a lo que habían hipotetizado, las dificultades con los números irracionales no se debieron a la falta de intuición. Sirotic y Zazkis llegaron a la conclusión de que prestar atención a las posibles dificultades y discutirlas con los estudiantes, podría reducirlas significativamente y que ignorarlas es un error adicional. Ellos enfrentaron el problema de las representaciones de números irracionales utilizando una herramienta teórica: la distinción entre representaciones opacas y transparentes. "Examinaron cómo la disponibilidad de ciertas representaciones influyó en las decisiones de los participantes con respecto a la irracionalidad" y concluyeron que una parte menor pero significativa de los participantes en su estudio mejoró.

Recordemos que también se hace la siguiente pregunta.

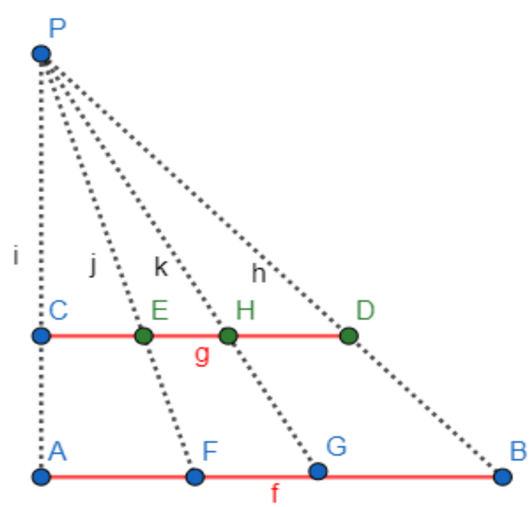


Figura 4.2: En dos líneas de diferente longitud, tenemos la misma cantidad de puntos.

Por ejemplo, Tall (1986) y otros observaron un fenómeno recurrente según el cual "hay más puntos en un segmento largo que en uno más corto". Es decir, los alumnos dan más crédito a lo que ven, más adelante damos las respuestas de los alumnos participantes, donde se confirma la observación de Tall.

La relación entre la línea y el conjunto de Números Reales es uno de los temas más críticos en el campo de los Fundamentos de las Matemáticas. Además, aunque hay muchas maneras de mostrar que una línea se puede dividir con la imaginación todo el tiempo que queramos, no hay acuerdo sobre el hecho de que podamos reconstruir una línea que reúna estos pequeños elementos resultantes.

Lo que puede parecer solo una especulación filosófica resultó ser confirmado por hechos concretos en muchas investigaciones que involucran tanto a estudiantes muy jóvenes como a profesores de secundaria con mucha experiencia. Es tan difícil percibir la línea como un conjunto de puntos infinitos sin dimensión.

Tall (1980) descubrió que un modelo intuitivo de la línea estaba muy extendido entre los estudiantes: tenían una imagen de la línea como un "collar de cuentas" (o perlas), por lo que cada segmento se considera "como un hilo formado por puntos de cuentas uno al lado del otro.

Esto da la idea de puntos contiguos, pero esto no puede ser, si tengo dos puntos diferentes, existe su punto medio.

Densidad y continuidad: el papel crítico de la visualización

David Tall y Giorgio T. Bagni (1978) enfrentaron desde diferentes puntos de vista el problema de comprender hasta qué punto la visualización de las propiedades de los Números Reales podría ser útil o, por el contrario, engañosa. Por supuesto, este tema tiene muchas intersecciones con la concepción de los estudiantes de la recta numérica, pero con una atención más específica a la posibilidad de visualizar propiedades en el caso de cantidades infinitesimales.

Tales propiedades están realmente muy lejos de la intuición, simplemente si la representación que utilizamos es la gráfica.

Tall y Schwarzenberger (1978), hablando de límites y números reales, enfatizaron que pueden surgir algunos conflictos conscientes e inconscientes entre diferentes concepciones de infinito, entre procesos y objetos, entrevistando también a estudiantes con buenos antecedentes matemáticos; en las entrevistas que realizaron con estudiantes universitarios de primer año observaron muchos de estos conflictos.

Este tipo de conflictos entre los diferentes significados asociados con los números reales, infinitos, infinitesimales y continuidad, impregnan muchas otras entrevistas realizadas por Tall para sus investigaciones, tanto, que los conflictos se convirtieron en una herramienta para analizar el conocimiento de los estudiantes sobre los números reales y otras nociones cruciales en el Cálculo.

Según Tall (1991), los estudiantes generalmente tienen habilidades de visualización muy débiles en el Cálculo, lo que causa falta de significado en las formalidades del Análisis Matemático. Tall destacó que lo que es intuitivo para los maestros no debería serlo para los estudiantes, porque a menudo se vuelve intuitivo en los años de estudio y también lo formal, por medio de prácticas adecuadas. Tratando de evitar hacer intuitiva la dimensión formal, el maestro solo puede empeorar la situación. En palabras de Tall: “Mi análisis de la dificultad es que ciertamente no haremos esto simplificando los conceptos. ¡La alternativa es hacerlos más complicados!”

Recta numérica

Lemmo (2015) analizó las soluciones de algunos estudiantes de sexto grado de una tarea sobre diferentes representaciones de números racionales y la recta numérica. La recta numérica se presenta como una herramienta didáctica con un alto potencial, especialmente porque proporciona una manera simple de imaginar conceptos matemáticos: de hecho, la recta numérica se utiliza para contar, para estimaciones y para representar el tiempo, pero también para la representación de diferentes conjuntos de números.

Además, la recta numérica se puede utilizar para proporcionar modelos geométricos de las operaciones aritméticas, para medir y comparar cantidades.

En el mismo trabajo también se señala que muchos estudios informan dificultades y limitaciones en el uso de la recta numérica y proponen actividades educativas para superar estas dificultades.

El potencial de la recta numérica para organizar el pensamiento sobre números y operaciones, por un lado, y las dificultades que surgen de su uso, por otro lado, llevan a muchos investigadores a proponer hilos de aprendizaje y secuencias de enseñanza para su uso en el proceso de enseñanza / aprendizaje de las Matemáticas.

Con respecto a la colocación de números racionales en la recta numérica, inicialmente tenemos que distinguir las dificultades sobre el manejo de decimales y fracciones. Según Butterworth (2011) tanto adultos como niños son más precisos cuando realizan esta tarea con decimales en lugar de fracciones porque los decimales permiten una evaluación de magnitud más fácil que las fracciones.

Los estudiantes también pueden tener dificultades en la conversión entre representaciones en diferentes registros semióticos. Podrían tener problemas para encontrar estrategias para identificar números en la recta numérica porque no tiene sustento concreto, lo más común es medir milímetros con una regla graduada o con un micrómetro que usan en los talleres mecánicos.

Toda operación geométrica puede ser traducida a una operación aritmética y llevado a cabo algorítmicamente y viceversa. Algunos estudios sobre la recta numérica y las fracciones resaltan la distinción entre hacer particiones y leer particiones premarcadas. Los estudiantes pueden tener dificultades si una unidad de longitud se divide en partes: Por ejemplo, algunos estudiantes, para determinar el denominador de la fracción, ignoran el punto final y cuentan solo las marcas internas.

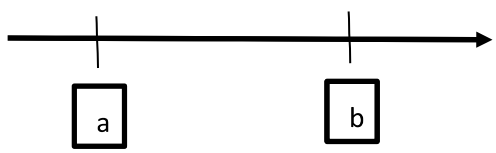
Si los intervalos entre puntos ya dibujados tienen longitudes desiguales, los estudiantes pueden contar el número de puntos ignorando la distancia.

5. Metodología

Se realizaron las siguientes preguntas para este estudio exploratorio:

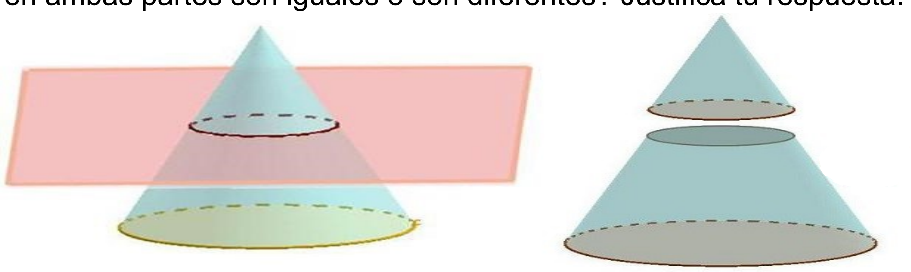
1. ¿0.999… = 1?

2. Considera la recta numérica:



Con $a \neq b$, a, b reales, entre a y b hay infinidad de puntos, explica.

3. Se corta un cono sólido por un plano paralelo a la base se obtienen dos partes, ¿Los círculos en ambas partes son iguales o son diferentes? Justifica tu respuesta.

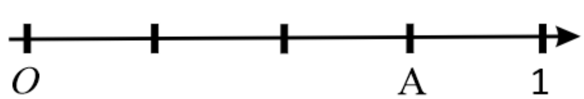


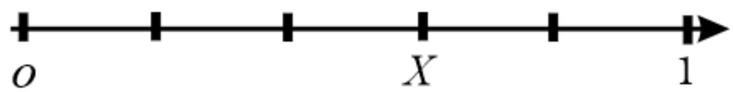
4. Dos segmentos AB y CD de diferentes longitudes "tienen el mismo número de puntos". ¿tú qué opinas?

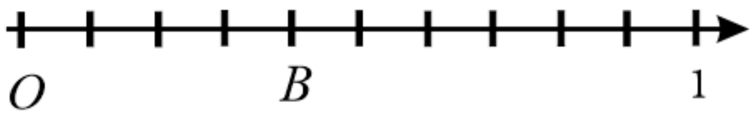
5. Por último, como quinta pregunta, se realizó una serie de ejercicios prácticos que implicaban la comprensión de la densidad en la recta real. Los ejercicios se muestran a continuación:

Ejercicios de densidad en la recta

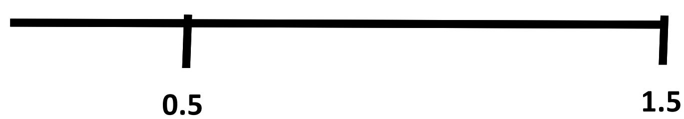
a) Indica la fracción correspondiente al punto indicado con una letra en cada caso:



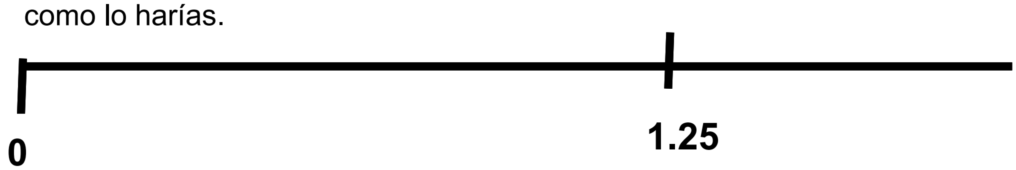




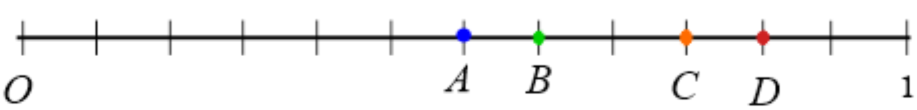
b) Pablito está haciendo su tarea, pero Juanito “el chistoso” borró algunas marcas en la siguiente recta numérica, debes ayudar a Pablito a encontrar el punto que corresponde a cero y la unidad ¿Cómo lo encontrarías? (puedes ayudarte de un compás para encontrar el punto).



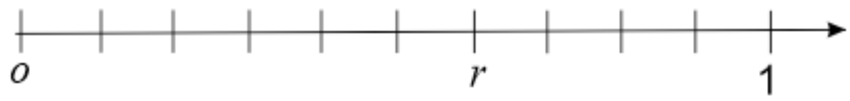
c) En el siguiente dibujo ubica los puntos correspondientes a 0.25, 0.5, 0.75 y 1, explica como lo harías.



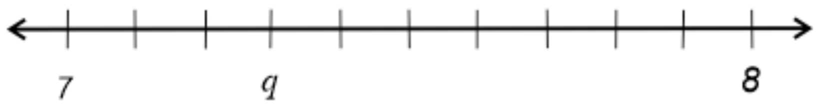
d) Indica la fracción correspondiente a los puntos A, B, C, D, solo se indica el cero y la unidad



e) Dibujar lo que se pide. Observa primero las marcas indicadas:
I. Hallar el número decimal que corresponde al punto r.

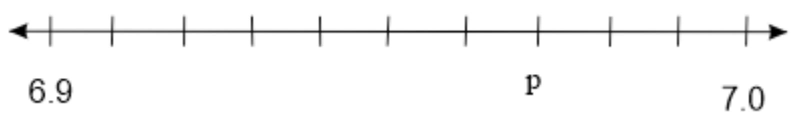


II. Hallar el número decimal que corresponde al punto q.



III. Hallar el número decimal que corresponde al punto v

IV. Hallar el número decimal que corresponde al punto p.



f) Explica en tus propias palabras: “toda sucesión creciente y acotada tiene límite”
g) Encuentra un número entre 3/5 y 1/3.
h) ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

6. Aplicación del instrumento

Las preguntas fueron aplicadas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), a los alumnos de los cursos de Geometría Analítica, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales, grupos que constaban de 30 alumnos cada uno aproximadamente.

Las preguntas se aplicaron en diferentes días para no intervenir con las clases, se les daba una introducción y se procedía a entregar una hoja con la respectiva pregunta, esto, por un periodo de 5 semanas, una pregunta por semana.

A continuación, se muestran algunas de las respuestas obtenidas:

6.1 Resultados

En este estudio exploratorio para analizar la comprensión de la Recta Real entre los alumnos, realicé varias encuestas a alumnos de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla de los cursos de Geometría Analítica, Cálculo Integral en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales, para observar la concepción que tienen sobre el tema a medida que avanzan en la facultad.

Analizando las respuestas del primer grupo (Geometría Analítica) que respondieron la pregunta ¿0.999… = 1?, se pudo observar que, de un total de 30 alumnos, 20 (66.66%) respondieron de manera negativa, 8 (26.66%) de forma afirmativa y 2 (6.66%) no concluyeron algo específico.

A continuación, se transcriben algunas de las respuestas de los alumnos.

Veamos primero las **respuestas negativas** a la pregunta ¿0.999… = 1?

"No, porque existen infinitos números entre el 0.9 y el 1. Lo cual hace que la distancia entre los dos sea infinita"
RESPUESTA DEL ALUMNO: A5

Figura 6.1.1: Respuesta negativa de la pregunta 1 del alumno A5.

Comentario: El alumno sabe que hay infinitos puntos entre 0.9… y 1 pero no menciona que se aproximen.

“No, .999… se acerca mucho a 1 pero no lo toca. Es como una gráfica, se acerca y parece que llega pero no. **Los numeros mas chicos tambien cuentan porque estos pueden modificar un resultado. Otro ejemplo de esto puede ser un accidente una bala puede llegar a nada de una vena importante pero, el no llegar, salva tu vida.”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A22

Figura 6.1.2: Respuesta negativa de la pregunta 1 del alumno A22.

Comentario: Este “error” es común, lo comentan varios autores, los términos de la sucesión se acercan, pero **nunca toca el límite**. También se ve la noción de límite, como algo a lo que nos acercamos, pero nunca se toca.

“NO porque todo número es único y sin importar que tan cercano sea a otro número no van a ser iguales, aunque para las cuentas se redondee, no significa que sean iguales” además agregó lo siguiente en su respuesta **“Supongamos que 0.999… = 1** **Entonces:** **0.999…. = 1 ⇔** **0.999…+(-1) = 1 + (-1) ⇔** **-0.000…1 = 0 CONTRADICCION** **Por lo tanto: 0.999…≠ 1”**
RESPUESTA DE ALUMNO: A13

Figura 6.1.3: Respuesta negativa de la pregunta 1 del alumno A13.

Comentario: Al restar a la izquierda obtiene -0.000…1. n ceros después del punto decimal, pero inició con una expresión que contiene puntos suspensivos (indicando infinitos nueves) y termina con un número finito de ceros.

Ahora veamos las **respuestas afirmativas:**

“Podemos expresar 0.999… como 3(1/3), pues 1/3 = 0.333… y si esto lo multiplicamos por 3, tenemos 0.999… . **De ahí que 0.999… = (1/3) 3 pero es claro que 1/3 es el inverso multiplicativo de 3, entonces, por propiedades de los números reales tenemos que 3 (1/3) = 1** **Entonces 0.999… = (1/3) 3 = 1 y por transitividad de la igualdad concluimos que 0.999… = 1. Por lo tanto si es cierto.”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A24

Figura 6.1.4: Respuesta afirmativa de la pregunta 1 del alumno A24.

Comentario: Este alumno recuerda el hecho (es común verlo en clase) 0.333... = 1/3.

"Si, es verdad. Demostración: **x =0.999…** **10x = 9.999…** **10x – x = 9.999… - 0.999…** **9 x = 9** **x = 9/9 = 1 Por lo tanto 0.999… = 1."** **"La idea que hay que considerar es que existen diferentes formas de representar un número"**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A30

Figura 6.1.5: Respuesta afirmativa de la pregunta 1 del alumno A30.

Comentario: Esta respuesta es el método para encontrar la fracción equivalente a un decimal infinito periódico (libros de secundaria en México hasta 2018 por ejemplo David Block).

"0.999…es otra forma de expresar 1 mientras sea periódico. Creo que es una equivalencia como cuando expresamos igualdades entre números racionales, supongo que tiene una relación en cuanto a la igualdad. Pero yo había visto que, si eran el mismo número, pero expresados de distinta manera, aunque no recuerdo 100% la razón."
RESPUESTA DEL ALUMNO: A7

Figura 6.1.6: Respuesta afirmativa de la pregunta 1 del alumno A7.

Comentario: Si recuerda que son el mismo número por experiencias previas, pero no recuerda exactamente donde lo vio.

"Si es filosófica, son solo garabatos, asi que pueden ser iguales o bien no pueden ser iguales. Al colocar el número 0.999… en la recta y aumentar otro digito se acerca al valor pero no lo alcanza. O bien 0.999… según muchas personas este número se puede ver como 1. Asi que supongo que cada quien cree lo que quiere."
RESPUESTA DEL ALUMNO: A9

Figura 6.1.7: Respuesta diferente a la pregunta 1 del alumno A9.

Comentario: En la respuesta anterior se da más de una opción, primero se afirma que no son iguales, posteriormente dice que puede verse como 1.

Los alumnos de la clase de Ecuaciones Diferenciales respondieron la misma pregunta (¿0.999… = 1?) y sus respuestas fueron similares, el grupo era de 30 estudiantes. 17 alumnos (56.666… %) respondieron que no, 7 (23.333…%) que sí, y 6 (20%) no respondieron de manera precisa.

Veamos algunas **respuestas negativas:**

“Depende del número de cifras significativas y de la aplicación que se le dará al número. Si, por ejemplo, dejamos en 4 cifras significativas y requerimos una precisión grande para un experimento, no podemos considera el 0.9999… como uno. Pero por otra parte si la precisión no importa mucho o es un número muy grande una milésima no implicara ninguna diferencia.

Ahora que, si el número de cifras significativas es muy grande, se puede tomar como una igualdad ya que el diferencial será tan pequeño que el 0.999…. tendera directamente a 1.

Segunda idea: lo anterior fue desde el punto de vista de la física, donde se aplica a medidas y experimentos, pero desde el punto de vista de la matemática pura, nunca serán iguales o el cálculo no tendría sentido.”

RESPUESTA DEL ALUMNO: B4

Figura 6.1.8: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno B4.

Comentario: Este alumno tiene cierta confusión entre Física Experimental y Cálculo Diferencial.

“No es lo mismo ya que 0.999 solo se aproxima a 1 pero no lo toca.

1 – 0.9 = 0.1 1 – 0.999… = 0.000…1

1 – 0.99 = 0.01

1 – 0.999 = 0.001

Siempre va a existir un decimal que conforme más nueves tengan el 0.999… más pequeña será la diferencia entre 1 y 0.999…

Y si fueran iguales, la diferencia entre los dos debería ser igual a 0 si n = n, entonces, n – n = 0.”

RESPUESTA DEL ALUMNO: B10

Figura 6.1.9: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno B10.

Comentario: Usa la idea de proximidad, usa la sucesión de diferencias, que puede ser muy pequeña.

“1) No es igual ya que 0.999 es una aproximacion al número real 1.

2) 0.999 es un número racional y el número 1 es entero.

3) 0.999 es menor que 1

2ª 0.999… $\longrightarrow$ 1

El número racional 0.999… infinitamente tiende a 1, es decir, cada vez se acerca mas a 1.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B3

Figura 6.1.10: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno B3.

Comentario: La idea de aproximación está presente, en el segundo punto, el alumno deja claro la diferencia de 0.999… y 1, en su tercer punto hace notar que la diferencia hace a un número menor al otro, sin embargo, usa el número finito 0.999. En su segunda idea usa la idea del límite pues afirma que tiende a 1, pero siguen sin ser iguales.

“No. Aunque a veces en la literatura se diga que sí, realmente es solo una aproximación. El conjunto de los números reales es un conjunto infinito porque no existe el número real más grande. Entonces a la hora de hacer la aproximación, siempre podemos poner una cantidad infinita de nueves después del punto decimal y todavía no sería el 1. Es por la propiedad de densidad de los números racionales que siempre encontramos números más pequeños entre decimales, que, aunque se acercan (o tienden), nunca son el valor al que se acercan (o tienden)”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B23

Figura 6.1.11: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno B23.

Comentario: El alumno habla de la infinidad de números que podemos encontrar gracias a la densidad de los números reales. Si preguntamos esto en otras carreras, (Electrónica, Computación, Ingeniería) tal vez los alumnos no mencionen claramente la idea de densidad, que por el curso de Matemáticas Básicas en FCFM si conocen.

Las **respuestas afirmativas:**

“0.999…= 9/10 + 9/100 + 9/1000 + … **⇒ 0.999…= 9(1/10 + 1/100 + 1/1000 + …)** **⇒ 0.999…=** $9(\lim_{n\to\infty} \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{10^\wedge n})$ **⇒ 0.999...= 9(1/9)** **⇒0.999…=1 QED.** **Por lo tanto 0.999…= 1”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: B26

Figura 6.1.12: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno B26.

Comentario: Esta forma es la que esperábamos en los alumnos FCFM. En este caso se reescribió el 0.999… como una suma infinita de fracciones. Usa el límite de una serie geométrica.

Lo más notable es la forma de reescribir una cifra, dejando claro que se pueden tener más métodos para probar la igualdad, debido al "*cambio de pensamiento*" en una materia más avanzada como lo es Ecuaciones Diferenciales.

"Si, es lo mismo, de acuerdo con los números reales, cualquier número puede tener no solo una representación si no más de ahí que 0.999… = 1. Podemos tratar esta igualdad a partir de series, tanto que estas convergen a un número en específico, es decir, toma una sucesión de números $1/_2$ + $1/_3$+ $1/_4$+ $1/_5$ + …. Se va acercando a 0.999…además de que esta misma se acerca a 1, pero recordemos que la sucesión sólo puede converger a un único elemento lo que implica que ambos son iguales, de hecho, 0.999… es tan cercano a 1 como se desee, por lo que, de manera cerrada, se asegura, son iguales."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B1

Figura 6.1.13: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno B1.

Comentario: Podemos ver la diferencia de respuestas entre este curso y el de Geometría Analítica.

"(1) Sabemos que 0 < 1 y 0 ≠ 1 **(2) 0.999 $\sim$ 1** **(3) 1 = x = 0.999…** **10x = 10 (0.999…)** **10x = 9.999…** **10x– x = 9.999… - 0.999…** **9x = 9** **x = 9/9 = 1 "**
RESPUESTA DEL ALUMNO: B20

Figura 6.1.14: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno B20.

Comentario: Este es el método para convertir un decimal periódico en la fracción correspondiente, podemos ver, que el alumno, parte de la igualdad 1= 0.999… esta respuesta no se esperaba, este tema se ve en primero de secundaria según el programa oficial en México para primaria y secundaria.

Las respuestas donde el alumno **no da una respuesta concreta** se muestran a continuación:

"(1) No. 0.999… < 1 no es igual, se le puede aproximar en caso de redondear decimales cuando se requiere un entero, pero, ambos tienen su lugar en la recta de los reales son cercanos pero no iguales.

(2) 0.999… sus 9´s son representación del mas pequeño número no menos que cada decimal en la secuencia de 0.9, 0.99, 0.999, … y podemos decir que representa al 1, es decir, 0.999… = 1. Podemos hacerlo de la siguiente manera: 1/3 = 0.333… y multiplicamos ambos lados de la igualdad por 3 3(1/3) = 3/3 = 1.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B30

Figura 6.1.15: Respuesta no concluyente a pregunta 1 del alumno B30.

Comentario: Esta es una respuesta interesante.

"No, porque el número 0.999… puede tener n decimales y se acercará mucho al número 1, pero no sera ese número, es decir, siempre le hara falta un pequeñisimo decimal para llegar al número 1, entonces: 0.999…+ c = 1 Por lo tanto, 0.999… = 1 no es cierto. 2da. Idea: si cambiamos la notación: 0.999… $\longrightarrow$ 1 ¿será cierto esto? Si. Al número 0.999… podemos verlo como $9/10^n$ el cual tiende al 1 ya que es un número entero más cercano.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B9

Figura 6.1.16: Respuesta no concluyente a pregunta 1 del alumno B9.

Comentario: La idea principal es la misma, el hecho de que 1 es mayor y la infinidad de decimales hace la diferencia, pero en la segunda idea mencionan de nuevo la idea del límite, diciendo que la cantidad tiende a 1.

Por último, se aplicó esta misma pregunta a un grupo más (Cálculo Integral en Varias Variables) obteniendo que 16 alumnos (53.333…%) contestaron de manera negativa, 13 (43.333…%) de manera positiva y 1 (3.333…%) no concluyo algo concreto

Respuestas negativas:

"No, porque no especifica si lo estamos haciendo tender a infinito o no, y por más números subsecuentes al punto que existen, nunca se da el caso que 2 números reales sean iguales, si no hacen tender uno a infinito.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C19

Figura 6.1.17: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno C19.

Comentario: El alumno ignora los puntos suspensivos de la pregunta inicial por lo que afirma que “no especifica si lo estamos haciendo tender a infinito”. Esta es la trampa de la pregunta, cómo interpretamos los puntos suspensivos.

“No, dado la naturaleza de los números reales (ℝ). Por mucho que 0.99999 se acerque a 1 siempre se puede encontrar un ϵ > 0 tal que 0.999 < 0.999 – 1 < 1”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C25

Figura 6.1.18: Respuesta negativa a pregunta 1 del alumno C25

Comentario: Tal vez se equivocó al escribir el “épsilon” debe ser 0.999 – 1 < ϵ (número finito de nueves), es decir a partir de cierto número de 9, debe ser 0.999…9 – 1 < ϵ

Ahora las **respuestas afirmativas:**

“Si se aplica el “redondeo”, como se le llama, esto podría ser cierto.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C17

Figura 6.1.19: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno C17.

Comentario: Algunos alumnos hacen mención del redondeo para justificar sus respuestas.

“Si. El 0.999… tiene los “9” al infinito lo que hace llegar a valer 1. **Es como si tomáramos en racionales 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1 aquí es evidente, pero al pasar el valor a decimales** **0.333…+ 0.333…+ 0.333…= 0.999… no se logra apreciar el mismo resultado, sin embargo, por eso son iguales.** **0.999…= 0.333…+ 0.333…+ 0.333…= 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1 “**
RESPUESTA DEL ALUMNO: C1

Figura 6.1.20: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno C1.

Comentario: Cómo en una respuesta anterior, si recuerda que 1/3 = 0.333….

“Si, porque cada vez se acerca más a 1 y siendo un número periódico, sabemos que continuará como 0.9999… y matemáticamente es aceptado.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C30

Figura 6.1.21: Respuesta afirmativa a pregunta 1 del alumno C30.

Comentario: Solamente expresa el hecho de ser un número periódico y se argumenta que matemáticamente es aceptado.

Finalmente, las respuestas donde el alumno **no concluye** una sola respuesta:

"Si y no **No, porque por más que aparezca 9 después del punto nunca va a llegar a 1** **Si, porque también se puede ver como una serie infinita que converge a 1."**
RESPUESTA DEL ALUMNO: C2

Figura 6.1.22: Respuesta no concluyente a pregunta 1 del alumno C2.

Comentario: Como decíamos en el párrafo de *concepciones espontáneas*, a veces nos llegamos a contradecir, da la respuesta correcta como alumno de FCFM indicando que en realidad se trata de una serie geométrica, pero expresada de una forma que abusa de la notación (puntos suspensivos).

En general, contemplando las respuestas de los grupos encuestados obtuvimos la siguiente tabla donde vemos un porcentaje de las respuestas obtenidas de los 3 grupos (90 alumnos en total):

¿0.999…=1?	Número de alumnos	Porcentaje
SI	28	31.1%
NO	53	58.8%
NO CONCLUYENTE	9	10%

Tabla 6.1.1: Clasificación de respuestas a pregunta 1.

En la siguiente tabla mostramos los porcentajes correspondientes a las respuestas **afirmativas** de esta pregunta:

Prueba con una ecuación	28	75.6%
Diversas formas de expresar una cantidad	7	18.9%
Axioma del supremo	2	5.4%

Tabla 6.1.2: Clasificación de respuestas afirmativas a pregunta 1.

Como podemos ver la respuesta más común en las respuestas **afirmativas** fue planteando una ecuación (x = 0.999…), la cual es muy socorrida en textos que abordan esta pregunta.

Ahora veamos los porcentajes correspondientes a las respuestas **negativas** más comunes:

Contradicción	10	18.5%
Tiende a…	14	26.4 %
Es menor	9	16.9%
Densidad	20	37.7%

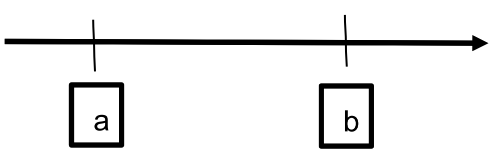
Tabla 6.1.3: Clasificación de respuestas negativas a pregunta 1.

Como podemos apreciar, la respuesta más común era apelando a la densidad de los números pues argumentaban que a pesar de la cantidad de decimales, si bien se acerca, no son iguales.

Los alumnos tienen sus propias ideas para responder esta pregunta pues en general las respuestas fueron divididas entre sí y no, a pesar de tener acercamientos respecto a la pregunta en la materia de Matemáticas Básicas y Calculo Diferencial.

Continuando con las preguntas, a los mismos grupos se les pregunto lo siguiente:

“Considera la recta numérica



Con a ≠ b, a, b reales, entre a y b hay infinidad de puntos, explica:”

En el grupo de Geometría Analítica, de los 30 alumnos, se obtuvo que 30 (100%) respondieron que efectivamente hay una infinidad de puntos. Algunas respuestas se muestran a continuación:

“Es claro que hay una infinidad de números entre otros dos numeros diferentes por la densidad de los racionales en los reales. Esto es, que $\frac{a+b}{2}$ pertenece a los racionales y es un punto medio de la recta real (punto medio de a y b) luego $\frac{a+b}{2}$ = c y entre $\frac{a+c}{2}$ que pertenece a los racionales tambien es un punto en la recta y asi sucesivamente.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: A5

Figura 6.2.1: Respuesta a pregunta 2 del alumno A5.

Comentario: El alumno usa el punto medio para explicar que puede encontrar infinitos números.

"Si a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ entonces por la densidad de los reales siempre va a existir un número entre a y b y entre los puntos formados, lo cual, si tomamos los puntos generados, habría más puntos entre ellos y como la densidad se satisface en $\mathbb{R}$ generaría una infinidad de puntos. Por otra parte, si tomamos a a y b siempre existe un número entre los dos el cual es su promedio, en donde $a < c < b$, si tomamos a c como otro punto, $\exists\, d$ tal que $a <$ d $< c$ ^ $c < e < b$ y si lo hacemos con distintos puntos sacaremos puntos infinitos dentro del intervalo."
RESPUESTA DEL ALUMNO: A22

Figura 6.2.2: Respuesta a pregunta 2 del alumno A22.

Comentario: Consciente de la densidad de los números reales, su respuesta es de las esperadas.

"$\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a < b \rightarrow \; a < \frac{a+b}{2} < b$ **$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\; a > b \;\rightarrow b < \frac{a+b}{2} < a$** **$\rightarrow \; \frac{a+b}{2} < b$ existe, $\frac{a+b}{2} < \frac{a+2b}{2} < b$** **y así nos podemos ir sucesivamente entre cada intervalo de números reales, siempre existe uno entre ellos y así podemos seguir sucesivamente, y vamos a encontrar una infinidad de puntos o números con extremos a y b."**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A24

Figura 6.2.3: Respuesta a pregunta 2 del alumno A24.

Comentario: Hallando puntos medios, el alumno puede encontrar infinidad de números en un intervalo.

Ahora se presentan las respuestas del curso de Ecuaciones Diferenciales, donde los 30 alumnos (100%) tuvieron respuestas similares.

"Si hay una infinidad de puntos, porque en este intervalo puede dividirse en más intervalos y siguen existiendo puntos. **Es como la carrera de la liebre y la tortuga para ver quien llegaba a la meta y la tortuga llegó a la meta a pesar de ser lenta mientras la liebre nunca llegó porque el camino lo iba dividiendo en intervalos y nunca se acabó el intervalo y no llegó a la meta."**
RESPUESTA DEL ALUMNO: B30

Figura 6.2.4: Respuesta a pregunta 2 del alumno B30.

Comentario: El alumno explica la densidad de los Números Reales mediante intervalos.

"Por la propiedad arquimediana de los reales siempre hay un real entre dos reales $\frac{a+b}{2}$ = c, $\frac{a+c}{2}$ = d y así sucesivamente."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B16

Figura 6.2.5: Respuesta a pregunta 2 del alumno B16.

Comentario: La propiedad Arquimediana presente en diversas respuestas.

"Si ya que podemos cortar a la mitad la recta y tendríamos otro punto y cada parte resultante a la mitad y así infinidad de veces y cada vez y cada vez podemos encontrar otro punto."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B5

Figura 6.2.6: Respuesta a pregunta 2 del alumno B5.

Comentario: La segmentación de la recta es el método más común para hallar números y con esto, los alumnos muestran su conocimiento de la densidad de los números reales.

Ahora se muestran las respuestas del grupo de Cálculo Integral en Varias Variables, donde, de igual forma, todos los alumnos tuvieron más claridad en sus respuestas pues los 30 alumnos (100%) tuvieron respuestas similares.

"Correcto, si hay infinidad de puntos ya que si a y b son números cualesquiera con a ≠ b el promedio de los 2 generara un nuevo punto, y a ese nuevo punto, ya sea con a o b, le vuelves a calcular el promedio y generas otro punto, así sucesivamente y no terminarás. Tomando en cuenta lo puntos (a, b) y los puntos generados entre a y b."
RESPUESTA DEL ALUMNO: C1

Figura 6.2.7: Respuesta a pregunta 2 del alumno C1.

Comentario: La *imagen del concepto* es clara en los alumnos pues los argumentos similares son muestra de ello.

"Sabemos que una recta es la unión de infinidad de puntos, por lo que, tomando una longitud entre 2 puntos aleatorios, sabemos que existen más entre ellos."

RESPUESTA DEL ALUMNO: C30

Figura 6.2.8: Respuesta a pregunta 2 del alumno C30.

Comentario: La definición de recta es un buen argumento pues sabemos que una recta es la unión de infinidad de puntos.

> **"Si (a, b) $\in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$c $\in \mathbb{R}$ tal que a ≤ c ≤ b**
>
> **Podemos definir a a como el infimo del subconjunto llamemoslo H $\Rightarrow \forall x \in (a, b)$, a ≤ x $\Rightarrow$ a = inf(H) y sea b ≥ x $\in (a, b) \Rightarrow$ b = sup(H).**
>
> **$\Rightarrow \exists$ c $\in$ (a, b) y a ≤ c ≤ b por definición, y c $\in \mathbb{R}$ pero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ c puede pertenecer a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y hay infinitos racionales $\Rightarrow$ hay infinitos números entre a y b con (a, b) $\in \mathbb{R}$."**
>
> **RESPUESTA DEL ALUMNO: C12**

Figura 6.2.9: Respuesta a pregunta 2 del alumno C12.

Comentario: Se trata de usar el Axioma del Supremo para explicar que hay infinitos puntos.

Los porcentajes de las respuestas de esta pregunta se muestran en la tabla siguiente:

¿En la recta hay infinidad de números?	Número de alumnos	Porcentaje
SI	90	100%
NO	0	0.00%

Tabla 6.2.1: Clasificación de respuestas a pregunta 2.

La respuesta fue muy clara pues los alumnos en su totalidad respondieron de manera afirmativa, teniendo una *imagen del concepto* más clara y algunos, por ende, la *definición del concepto*.

Las justificaciones más comunes en esta pregunta se muestran a continuación:

Propiedad Arquimediana	35	38.8%
Densidad	55	61.1%

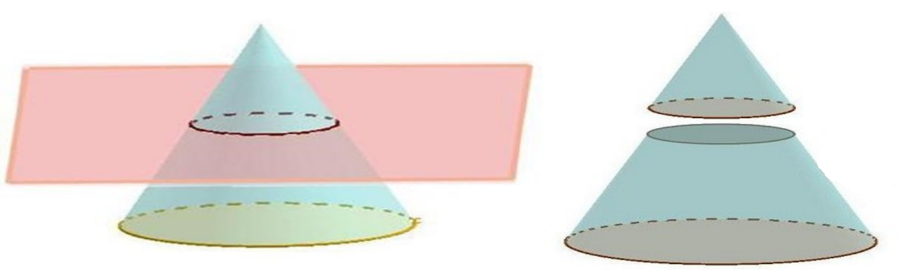
Tabla 6.2.2: Clasificación de justificaciones a pregunta 2.

Las respuestas más comunes en las encuestas estuvieron formadas principalmente por la Densidad, seguida de la *Propiedad Arquimediana*, lo cual nos da una idea de las generaciones espontáneas de los alumnos.

En esta pregunta las respuestas fueron contundentes pues a pesar de haber cierta incertidumbre con la pregunta anterior, en esta los alumnos son conscientes de que la recta real puede tener infinidad de números en especial en el segmento indicado, las respuestas más comunes apelaban a la densidad o la propiedad Arquimediana, como ya lo mencioné. Las concepciones respecto a esta pregunta no fueron espontáneas pues todos de alguna manera recurrían a definiciones formales o conocimientos previos resultado de cursos anteriores, esto nos brindaba respuestas breves y seguras ante todo en los 3 grupos implicados, de hecho, fue la pregunta menos complicada de las elaboradas, pues, aunque solo debían argumentar, se llegó a pensar en un momento que habría quienes no estarían de acuerdo con ella.

La tercera pregunta es la paradoja del cono cortado que nos pareció interesante formularla a los alumnos de FCFM:

“Si se corta un cono sólido por un plano paralelo a la base se obtienen dos partes ¿los círculos en ambas partes son iguales o son diferentes? Justifica tu respuesta”.



Las respuestas obtenidas del primer grupo (Geometría Analítica) fueron divididas pues 18 (60%) respondieron que no eran iguales mientras que 12 (40%) respondieron que, si eran iguales, veamos algunas de las **respuestas negativas** que nos dieron a esta pregunta:

 **“Los círculos A y B son diferentes porque al observar el cono de perfil es un triángulo y al acercarse a E las distancias de rectas paralelas a la base son diferentes.”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A18

Figura 6.3.1: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno A18.

Comentario: El alumno menciona que se puede visualizar en un plano y tendríamos un triángulo, tal vez imaginando una proyección, pero el problema sigue en pie, al cortar el triángulo se generan dos partes: ¿los segmentos son iguales?...

“A mi parecer si se corta un cono con un plano las dos circunferencias sombreadas en el dibujo son iguales ya que al volver a unir las piezas deben embonar perfectamente. **Sin embargo, esto se cumpliría solo en forma análoga ya que en la vida real no existen cortes con un objeto infinitamente delgado y esto ocasiona una pequeña diferencia entre las circunferencias. las distancias de rectas paralelas a la base son diferentes.”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A11

Figura 6.3.2: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno A11.

Comentario: La respuesta muestra cierto conflicto al contrastar la primera respuesta con la opción de considerar objetos reales.

“Yo creo que ambas circunferencias son distintas, el corte crea dos circunferencias, pero como el cono tiene una circunferencia de base a un punto, el resultado de cortar con un plano nos generaría dos circunferencias milimétricamente distintas.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: A20

Figura 6.3.3: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno A20.

Comentario: El conocimiento que se tiene de la figura es lo que genera la respuesta (concepción previa).

Respuestas afirmativas (los dos círculos son iguales):

“Las circunferencias de las dos partes mediran lo mismo ya que se corta en el mismo plano por lo cual genera la misma circunferencia, ademas si volvemos a poner el cono junto,quedaria un hueco lo cual no sucederia ya que se deformaria la figura.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: A9

Figura 6.3.4: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno A9.

Comentario: El alumno de manera implícita usa el hecho de que el cono es continuo, por ello, al volver a unirlo no hay huecos.

“Son iguales porque cuando se habla de una circunferencia es solo el contorno y al realizar el corte no se altera la base y al momento de unir las dos piezas encajaría perfectamente, no necesariamente necesita ser un cilindro.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: A22

Figura 6.3.5: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno A22.

Comentario: El alumno no entendió del todo la pregunta.

"Si ya que el corte fue hecho en un solo lugar por lo tanto coinciden perfectamente. Si se cortan en dos partes diferentes y se comparan ya no coincidiria."

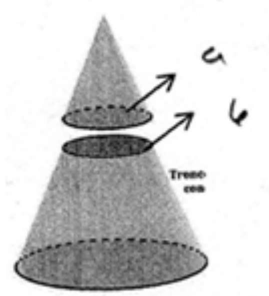
RESPUESTA DEL ALUMNO: A29

Figura 6.3.6: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno A29.

Comentario: El alumno da por hecho que es un corte limpio, por lo que, al realizarse en un punto específico, volvería a coincidir sin problema.

Respuestas del grupo de Ecuaciones Diferenciales. En este grupo obtuvimos que 17 alumnos (56.666…%) coincidían en que eran iguales, mientras que 13 (43.333…%) dijeron que no lo son.

Respuestas negativas:



"No porque el punto en que se corta es una distnacia que existe entre a y b."

RESPUESTA DEL ALUMNO: B17

Figura 6.3.7: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno B17.

Comentario: La diferencia que existe en el corte, representa una distancia infinitesimal que impide la igualdad.

"El área del círculo 1 (c_1) es $\pi r^2(x_1)$

El área del círculo 2 (c_2) es $\pi r^2(x_2)$ donde $x_1 < x_2$ y definimos a λ_n con $n \epsilon \mathbb{N}$ como un aumento progresivo en cada círculo siguiente a partir del punto en la punta los cuales son diferentes por una mínima diferencia."

RESPUESTA DEL ALUMNO: B6

Figura 6.3.8: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno B6.

Comentario: El alumno explica que hay un cambio mínimo en la circunferencia que resulta del corte.

"El tamaño es diferente ya que el círculo obtenido en la parte de arriba es mas pequeño que el círculo obtenido en la parte de abajo."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B13

Figura 6.3.9: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno B13.

Comentario: De las respuestas más concurridas en este grupo, aceptan que hay diferencia pero la explicacion es siempre muy escueta.

Respuestas afirmativas:

"Son iguales porque es el mismo corte"
RESPUESTA DEL ALUMNO: B8

Figura 6.3.10: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno B8.

Comentario: El alumno no argumenta su respuesta. .

"Cuando cortamos un cono con un plano perpendicular al eje del cono, los círculos que resultan son iguales porque ambos tienen las mismas medidas."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B16

Figura 6.3.11: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno B16.

Comentario: Varios alumnos consideran un corte limpio sin “desperdicio” o “residuo”.

“En dado caso podemos decir que son equivalentes, la razon, puede estar dada por el mismo plano que tiene cuspide del cono truncado área igual que la base del cono superior con lo que podemos decir que los círculos equivalen a lo mismo, el plano es solo un corte, no elimina superficie del cono.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B9

Figura 6.3.12: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno B9.

Comentario: El corte es matemático, no un objeto real como un pastel o una tabla de madera donde al cortar siempre hay un residuo, pero el alumno al suponer que el corte es “limpio” no considera más.

Veamos el grupo de Cálculo Integral, en este grupo obtuvimos que 21 alumnos (70%) dijeron que no eran iguales las circunferencias mientras que 9 (30%) dijeron que sí.

Respuestas negativas:

“Son diferentes ya que hay una distancia, aunque sea muy pequeña, pero hay una distancia, lo que provoca que el diámetro cambie haciendo así que los círculos sean distintos.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C26

Figura 6.3.13: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno C26.

Comentario: El alumno considera esa mínima distancia de diferencia. Es de las respuestas esperadas.

“No son iguales, si el plano tiene grosor las circunferencias tendrán área diferente. En el caso de que el plano fuera infinitamente delgado, las circunferencias tendrían igual área.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C17

Figura 6.3.14: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno C17.

Comentario: Es un corte matemático, y el plano se considera infinitamente delgado para generar ese punto exacto del corte.

“Son círculos diferentes porque el radio va cambiando a razón de la altura donde se hace el corte con el plano.”

RESPUESTA DEL ALUMNO: C1

Figura 6.3.15: Respuesta negativa a pregunta 3 del alumno C1.

Comentario: El alumno es consciente del cambio que se presenta en la figura del cono y esa diferencia al realizar el corte en un punto.

Respuestas afirmativas:

“Si porque un plano, algebraicamente hablando, no tiene anchura, además, cuando corta al cono, lo corta o parte específicamente en un punto.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C8

Figura 6.3.16: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno C8.

Comentario: Se considera el corte en un punto en específico.

“Si porque son cortados por el plano, por lo tanto, harían el mismo círculo o circunferencia por las dos partes, teniendo el mismo radio, modificaría el tamaño solo si se cortan por dos planos en diferente longitud del cono.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C23

Figura 6.3.17: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno C23.

Comentario: Basarse en la figura que se tiene (circunferencia) es otra de las respuestas que nos dan los alumnos, pero siguen considerando un punto en específico sin considerar la densidad.

“Si son iguales pues el plano que lo corta lo podemos ver como una unión de puntos los cuales no tienen volumen, por ello, al cortarlo en cada parte, los círculos son iguales.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C18

Figura 6.3.18: Respuesta afirmativa a pregunta 3 del alumno C18.

Comentario: El alumno solo considera “pegar” las partes cortadas del cono ignorando que hay una diferencia infinitamente pequeña.

Veamos los resultados obtenidos de esta pregunta:

Cono cortado	Número de alumnos	Porcentaje
Son Iguales	38	42.2%

No son Iguales	52	57.7%

Tabla 6.3.1: Clasificación de respuestas a la pregunta 3.

Podemos ver que los alumnos en su mayoría respondieron que no eran iguales, algunas de las clasificaciones de las respuestas más comunes se muestran a continuación:

Por corte horizontal y no dejar residuos al unir	13	34.21%
No tiene grosor el plano	15	39.47%
Se corta en un punto exacto	10	26.31%

Tabla 6.3.2: Clasificación de las respuestas afirmativas a la pregunta 3.

La tabla de arriba muestra las respuestas más comunes que los alumnos daban cuando afirmaban que en efecto, eran iguales las circunferencias.

Diferencia pequeña	17	32.69%
La forma de la figura	15	28.84%
La figura crece o decrece	20	38.46%

Tabla 6.3.3: Clasificación de respuestas negativas a la pregunta 3.

En la tabla anterior podemos notar que muchos de los que afirmaron que las circunferencias no eran iguales, justificaban su respuesta diciendo que la figura crece o decrece, dependiendo de la perspectiva con que la vieran.

La paradoja del cono cortado, la cual no es muy conocida en comparación con las paradojas de Zenón nos pareció interesante formularla a los alumnos. Como consecuencia se obtuvieron respuestas varias en los 3 grupos participantes. En el grupo de Geometría Analítica y Cálculo Integral en varias variables fue donde se obtuvieron mayor cantidad de discrepancias, pues casi la mitad de cada grupo afirmaba que las circunferencias eran iguales. Considerando cortes hipotéticos y un punto en específico para el corte, el otro grupo (Ecuaciones Diferenciales) opinaba que había una diferencia muy pequeña o simplemente no encontraban un punto para hacerlas iguales porque era muy muy denso, las concepciones a esta pregunta además de espontáneas, en la mayoría de casos, tenían su sustento ya sea en base a ejemplos cotidianos o analizando de manera lógica. A pesar de esto, los alumnos contestaban teniendo una *imagen del concepto* un tanto débil pues no vieron relación con las preguntas anteriores.

Pregunta 4.

Dos segmentos AB y CD de diferentes longitudes “tienen el mismo número de puntos”. ¿tú qué opinas?

Esta pregunta fue aplicada a los mismos grupos.

En el grupo de Geometría Analítica se obtuvo que 20 alumnos (66.6%) respondieron que si tenían el mismo número de puntos mientras que 10 (33.3%) aseguraron que no.

Respuestas negativas:

“No me convence, ya que en el segmento AB hay infinidad de puntos por el ejercicio anterior, análogamente para CD. **Sea P(AB) la cantidad de puntos entre A y B.** **Sea P(CD) la cantidad de puntos entre C y D.** **P(AB) =** ∞_{AB} **P(CD) =** ∞_{CD} **No podemos saber cuando 2 infinitos son iguales por tanto es indefinido.”**
RESPUESTA DEL ALUMNO: A4

Figura 6.4.1: Respuesta negativa a pregunta 4 del alumno A4.

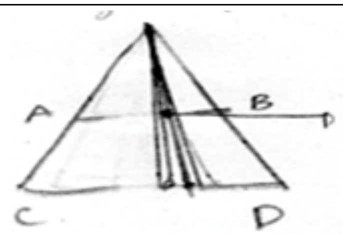
Comentario: El alumno está de acuerdo en la infinidad de puntos gracias a la densidad, pero su respuesta final es más cercana a la longitud de los segmentos.

“Suponiendo que AB y CD son distintos, entonces, se diria que no son iguales, no contienen la misma cantidad de puntos, por lo que esta demostración seria falsa pero si dividimos la recta en varios puntos, nos podria dar la ilusion de que son infinitos en teoria pero no lo son.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: A12

Figura 6.4.2: Respuesta negativa a pregunta 4 del alumno A12.

Comentario: Se duda de la resupuesta pues la mayoria se basa en encontrar los puntos correspondientes 1 a 1.

“No es cierto que el segmento AB tiene la misma cantidad de puntos que el segmento CD, no es posible al trazar más segmentos, en los segmentos nos damos cuenta que coinciden en los puntos que se pude juntar.



Ejemplo. Mientras que en el segmento CD tiene dos puntos diferentes y en el segmento AB solamente tiene un punto, entonces, no tiene la misma cantidad de puntos."

RESPUESTA DEL ALUMNO: A11

Figura 6.4.3: Respuesta negativa a pregunta 4 del alumno A11.

Comentario: Mediante segmentos intenta conectar al segmento AB con CD, misma idea, pero diferente método.

Respuestas afirmativas:

"Considerando el dibujo, para la demostración, cada punto le corresponderá un punto en la otra recta pues la recta que corta ambos segmentos forma un punto de corte en AB y otro en CD pero a cada corte le corresponde un punto en la otra recta.

Por tanto, cada corte que se haga en los segmentos, podrá asignar un punto en cada recta. Y ambas rectas tienen el mismo numero de puntos."

RESPUESTA DEL ALUMNO: A24

Figura 6.4.4: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno A24.

Comentario: El alumno se enfoca exclusivamente en encontrarle pareja a cada punto, pero sabe que ambos tienen infinidad de puntos.

"Si lo vemos como una función que cada punto AB lo manda a un punto de CD sería una función biyectiva, por tanto, a cada punto de AB le corresponde uno de CD por tanto tendrían el mismo número de puntos."

RESPUESTA DEL ALUMNO: A23

Figura 6.4.5: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno A23.

Comentario: Las respuestas que mencionan biyección o correspondencias y la infinidad de puntos son frecuentes.

"Por la demostración anterior sabemos que cada segmento tiene infinitos puntos intermedios, creo que la forma de demostrar gráficamente es incorrecta o no está relacionado con la dimensión de los segmentos, mi opinión es que tienen los mismos puntos porque estamos hablando del infinito más la magnitud es diferente."
RESPUESTA DEL ALUMNO: A9

Figura 6.4.6: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno A9.

Comentario: El alumno se dio cuenta rápidamente que las preguntas siguen un tema en específico, por lo que su respuesta incluye la densidad mas no la magnitud de los segmentos.

Ecuaciones Diferenciales. En este grupo 29 alumnos (96.6%) estuvieron de acuerdo en el número de puntos, mientras que solo 1(3.3%) no lo estuvo.

Veamos la **respuesta negativa**:

"No me convence, porque fue explicado con un dibujo y un dibujo no es una demostración formal y no le entendi del todo al dibujo."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B20

Figura 6.4.7: Respuesta negativa a pregunta 4 del alumno B20

Comentario: A este alumno la representación gráfica del problema no le ayudó a convencerse pues con el dibujo buscaba una correspondencia.

Respuestas afirmativas:

"A mi parecer es correcto, ya que, si continuamos con ese razonamiento, cada recta trazada que tiene un punto en el segmento CD va a generar otro punto en el segmento AB, por lo tanto, podemos ver que habrá tantos puntos en AB como en CD, lo único en que se diferencian es la distancia entre estos puntos ya que la longitud de ambas rectas es diferente."
RESPUESTA DEL ALUMNO: B13

Figura 6.4.8: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno B13.

Comentario: El alumno tiene clara la densidad, y lo muestra mencionando la infinidad de puntos que puede encontrar.

"El razonamiento anterior es correcto, ya que la asignación es biyectiva, es decir, para cualesquiera dos puntos distintos en CD les corresponden puntos distintos en AB,

además para cada punto en AB podemos encontrar uno en CD que lo relaciona mediante la recta secante. Por tanto, ambos segmentos tienen la misma longitud.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B6

Figura 6.4.9: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno B6.

Comentario: A pesar de que el alumno hace una relación entre puntos, tiene claro que se pueden encontrar infinidad sin importar el tamaño de los segmentos.

“Podríamos decir que ambos segmentos son proporcionales y debido a que estos son paralelos, al trazar rectas perpendiculares u oblicuas entre ellas, los pequeños segmentos que se forman también son proporcionales. Entonces, los segmentos tendrán el mismo número de puntos.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B17

Figura 6.4.10: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno B17.

Comentario: La proporcionalidad también fue una constante en este grupo, pero siempre se consideraba implícitamente la densidad.

En el grupo de Calculo Integral, obtuvimos resultados similares pues 18 alumnos (60%) contestaron diciendo que si eran la misma cantidad de puntos mientras que 12 (40%) no estuvieron de acuerdo. En este grupo las respuestas fueron muy similares, por lo que se optó por poner una respuesta de cada tipo.

Veamos la **respuesta negativa**:

“Bajo el análisis adecuado se puede asegurar que lo anterior es correcto, visto desde la Geometría euclidiana, por ejemplo, aceptamos la demostración, aunque tal vez podría hacerse un análisis más exhaustivo, pero no estoy de acuerdo.”
RESPUESTA DEL ALUMNO: C2

Figura 6.4.11: Respuesta negativa a pregunta 4 del alumno C2.

Comentario: La mayoría de los alumnos coincidían en que no eran iguales pues al hacer un dibujo buscan la correspondencia de los extremos demostrando la igualdad de puntos, pero llegaban a concluir que no eran iguales.

Respuesta afirmativa:

"Ambos segmentos AB y CD, tienen la misma cantidad de números o de puntos, ya que si hablamos racionalmente, siempre va a haber números entre ellos solo que aquí tendría una pareja en el otro segmento. Por lo tanto, tienen el mismo número de puntos."
RESPUESTA DEL ALUMNO: C28

Figura 6.4.12: Respuesta afirmativa a pregunta 4 del alumno C28.

La otra parte de los alumnos aseguraban que eran iguales apelando de manera indirecta a la densidad, pues tienen claro que sin importar el tamaño tendrán infinidad de puntos.

Aquí vemos la cantidad de personas que estuvieron de acuerdo y los que no lo estaban con respecto a esta pregunta:

¿Misma cantidad de puntos?	Número de alumnos	Porcentajes
Si tienen misma cantidad de puntos	67	74.4%
No tienen la misma cantidad	23	25.5%

Tabla 6.4.1: Clasificación de respuestas a pregunta 4.

Ahora veamos la clasificación de las respuestas afirmativas más comunes:

Son densas las rectas	39	58.2%
Asignar biyecciones	28	41.7%

Tabla 6.4.2: Clasificación de respuestas afirmativas a pregunta 4.

Las respuestas más comunes donde los alumnos decían que no eran la misma cantidad de puntos:

Correspondencias insuficientes	15	62.2%
Infinitos diferentes	3	13.04%
Un dibujo no muestra nada	5	21.7%

Tabla 6.4.3: Clasificación de respuestas negativas a pregunta 4.

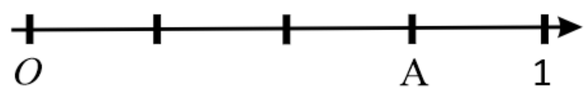
Respecto a esta pregunta, pudimos ver que los alumnos en su mayoría se confundieron al mostrarles el dibujo, algunos literalmente comentaban que no le entendían a la pregunta, otros más comentaron que no se podía dar una prueba fehaciente con un simple dibujo, una gran parte de los encuestados, para responder, proponían una correspondencia de puntos entre los segmentos, pero llegaban a la misma conclusión, "no había la misma cantidad de puntos". Hubo alumnos que comprendieron la pregunta sin el dibujo pues al tratarse de segmentos, encontraron relación con las preguntas anteriores y de inmediato respondieron usando la densidad.

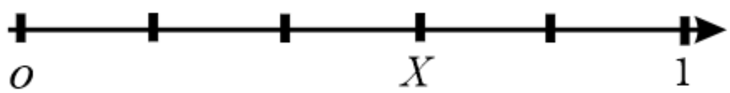
Por último, se realizó una serie de ejercicios prácticos que implicaban la comprensión de la densidad en la recta real, los resultados obtenidos fueron favorables pues en los 3 grupos las respuestas fueron acertadas.

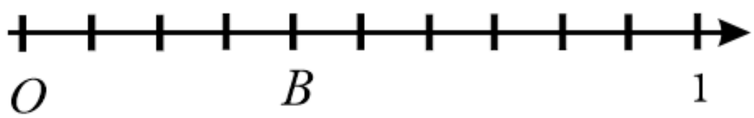
Los ejercicios se muestran a continuación:

Ejercicios densidad en la recta

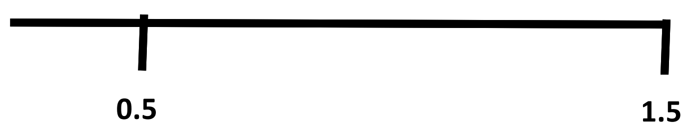
a) Indica la fracción correspondiente al punto indicado con una letra en cada caso:





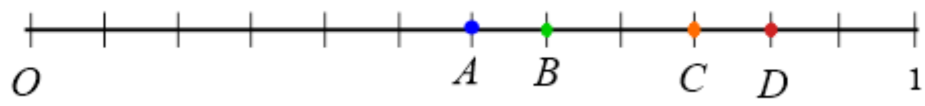


b) Pablito está haciendo su tarea, pero Juanito “el chistoso” borro algunas marcas en la siguiente recta numérica, debes ayudar a Pablito a encontrar el punto que corresponde a cero y la unidad ¿Cómo lo encontrarías? (puedes ayudarte de un compás para encontrar el punto).



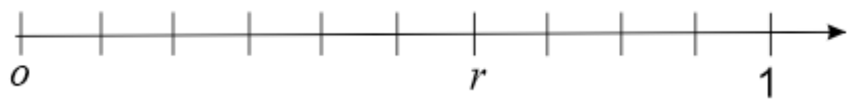
c) En el siguiente dibujo ubica los puntos correspondientes a 0.25, 0.5, 0.75 y 1, explica como lo harías.

d) Indica la fracción correspondiente a los puntos A, B, C, D, solo se indica el cero y la unidad.

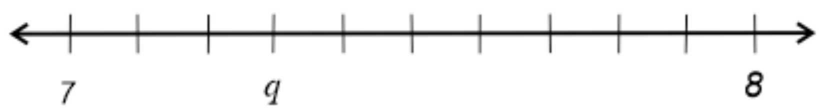


e) Dibujar lo que se pide. Observa primero las marcas indicadas:

I. Hallar el número decimal que corresponde al punto r.

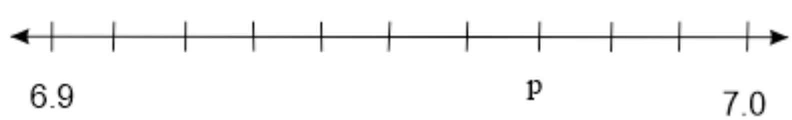


II. Hallar el número decimal que corresponde al punto q.



III. Hallar el número decimal que corresponde al punto v.

IV. Hallar el número decimal que corresponde al punto p.



f) Explica en tus propias palabras: “toda sucesión creciente y acotada tiene límite”

g) Encuentra un número entre 3/5 y 1/3.

h) ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

SEXTA PREGUNTA

¿Cómo se localiza pi en la recta numérica? ¿Podemos encontrar el “punto exacto”? ¿Existe dicho punto?

Esta pregunta propuesta se aplicó gracias a que al ser un estudio exploratorio tenemos la libertad de ir pensando qué preguntas realizar, no todo lo definimos al inicio, se investiga primero y se piensa de manera más “dinámica” con base en lo que se va observando.

Las respuestas obtenidas fueron las esperadas, pues en su mayoría los alumnos argumentaron que solamente se podía encontrar una aproximación, sin embargo, el punto exacto existe pues hay una correspondencia de la recta con los reales. A continuación, se muestra el porcentaje de respuestas de los alumnos:

Respuestas.	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
Solo podemos encontrar una aproximación	86	95.5%
Si podemos encontrar el punto exacto	4	4.4%

Tabla 6.5.1: Clasificación de respuestas a pregunta 6.

Las respuestas de los alumnos que dicen que si se puede encontrar el punto exacto eran haciendo alusión a programas de computadora, por ejemplo, la que se muestra a continuación:

“A simple vista sin ninguna herramienta no se podría encontrar exactamente ya que es irracional, en la actualidad ya existen herramientas donde se puede localizar exactamente a pi, una de esas seria GEOGEBRA”
RESPUESTA DEL ALUMNO: B28

Tabla 6.5.2: Respuesta a pregunta 6 del alumno B28.

7. Conclusiones

Cualquier ser humano construye su propio sistema de teorías y creencias acerca de lo que le rodea. Este le permite explicar el funcionamiento de la realidad y actuar en su vida cotidiana. Este fenómeno recibe distintas denominaciones: *preconceptos, ideas previas, concepciones espontáneas*.

En los resultados de este trabajo se pudo notar que los alumnos tienen diversas ideas respecto a la densidad de la recta, por ende, la profundidad y claridad de estas varía dependiendo del grupo encuestado pues algunos han cursado más materias que otros y esto les da un poco más de experiencia que a los demás, y se nota ya que tienden a justificar de mejor manera sus respuestas.

Como se comentaba, se les explicó a los alumnos el Axioma de la Recta Real: a cada número real le corresponde un punto en la recta y recíprocamente a cada punto le corresponde un número real. Pero este axioma no se activa en la mente de los alumnos ante diversas situaciones que se les pueden presentar.

A la pregunta ¿0.999…= 1?, la mayoría de alumnos respondió que no son iguales, porque es muy fuerte su idea de aproximación, es decir, 0.999…se aproxima a 1 pero nunca lo alcanza, por lo que no será igual, pero para muchos otros como Eduardo Sáenz de Cabezón (Matemático y creador de contenido para YouTube) indican que son iguales y que son representaciones diferentes.

Pero hay que notar que esto contrasta con:

1. 1/3 = 0.333… la cual es aceptada por prácticamente todos. Este fenómeno recibe diferentes nombres, pero, lo esencial, es que 1 siempre es visto como una totalidad, un entero, en cambio, 0.999… es visto como algo incompleto.
2. La diagonal de un cuadrado se visualiza como una recta definida, que corresponde a $\sqrt{2}$ definida geométricamente (usando regla y compás).

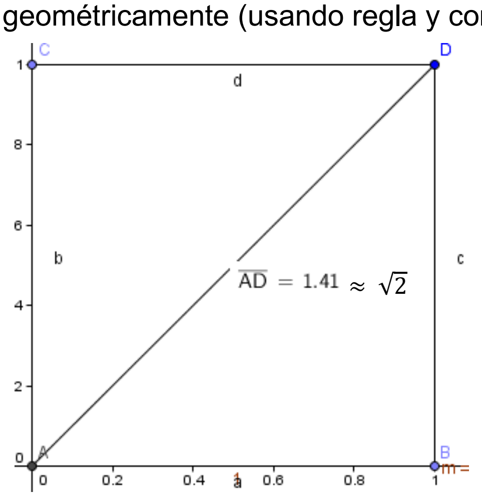


Figura 7.1: Construcción de la diagonal de un cuadrado con regla y compás.

3. Hay un contraste con pi, pues se asocia al área del círculo y se concibe como una aproximación, dado que a los escolares se les insiste que no se “conocen todas sus cifras” dado que son infinitas.

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots$$

O con alguna serie o bien, mediante cálculos aproximados de áreas.

$$\pi = 4\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{(2k-1))}\right)$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

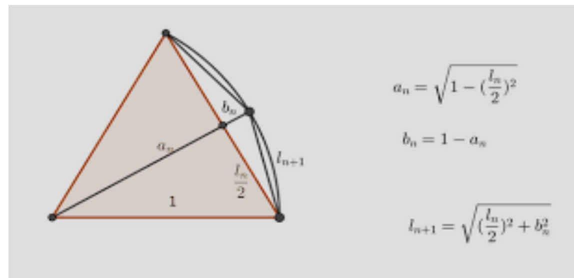


Figura 7.2: “Pi” visto como serie y cálculo de área.

Pero se “puede localizar” pi en la recta de manera visual como el perímetro de un círculo que, al girar una vuelta completa sobre el eje horizontal, llegamos al punto correspondiente a pi, el detalle es que pi es una longitud finita.

4. Otro caso similar a pi es el del número “e”, los alumnos suelen ver de manera diferente estos dos porque pi se define como un objeto geométrico, mientras que “e” es visto ligeramente distinto por ser definido como un límite.

Con estos 4 casos podemos observar que, en los alumnos, el uso del concepto imagen es más común en la igualdad 0.999… = 1 pues independientemente de la definición del concepto, se respondía con base en sus experiencias, lo poco o mucho que recordaran del tema (imagen del concepto), otros más, respondían desde su definición del concepto, personas que tienen claro lo que van a responder de acuerdo a definiciones formales, caso concreto, cuando suelen recurrir a la definición de límite.

Entre la variedad de respuestas de nuestro estudio, se obtuvieron justificaciones que van desde la densidad de los números reales, la propiedad Arquimediana, punto medio, hasta el concepto de límite, y correspondencia entre 2 puntos, en su mayoría, los alumnos tienen concepciones similares y esto se refleja en las tablas 7.1.2., 7.1.3., 7.2.2., 7.3.2., 7.3.3., 7.4.2., 7.4.3. pocos usaron la definición formal.

En general, en las respuestas de los alumnos, se nota el predominio de sus concepciones previas, pero en este caso, también su conocimiento sobre la densidad de los números racionales, tema visto en el curso de Matemáticas Básicas. Nuestro primer acercamiento con la densidad lo tenemos en la primaria, y con el pasar del tiempo se acumula conocimiento y experiencia que nos ayuda a comprender mejor. Esto no ocurre siempre, aunque, el docente tenga mucho conocimiento, no logra “transmitirlo todo” como quisiera, asi los alumnos construirían un conocimiento más sólido, aunque es lo deseable, no sucede siempre. Como sabemos las concepciones previas son resistentes al cambio y de eso nos dimos cuenta al finalizar las encuestas. Al término de las preguntas, se explicaba la respuesta de cada una, había quienes confirmaban sus justificaciones o mejoraban sus ideas, mientras algunos, se mostraban renuentes a creer, pues sus ideas estaban muy arraigadas. Las concepciones previas son muy dominantes, perseverantes, marcadas, difíciles de cambiar, en nuestro caso sí se pudo observar que muchos alumnos hacen referencia a la densidad en el sentido de que entre dos números reales existe una infinidad.

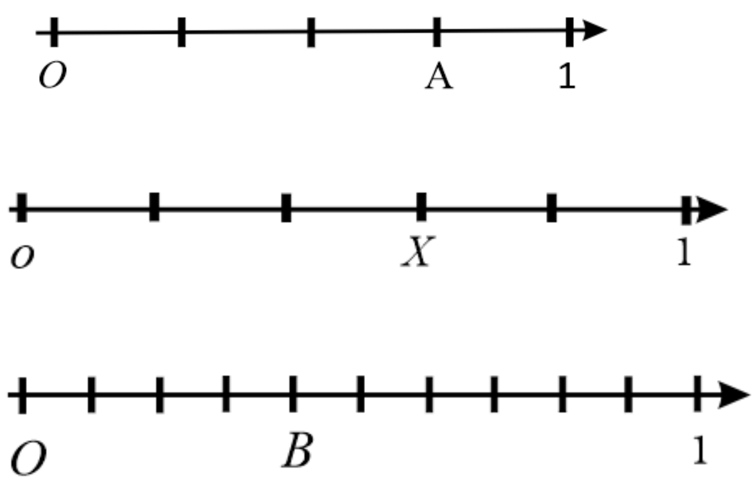
.

7.1 Comentarios e Implicaciones para la enseñanza.

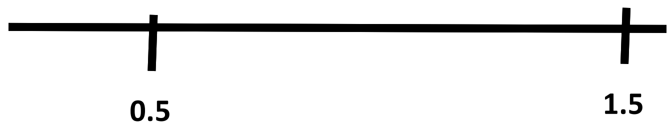
Como se mencionó anteriormente, cualquier persona puede crear su propio sistema de teorías y creencias sobre lo que le rodea. Fischbein (1987, p. 211) sostiene que “el problema educativo no es eliminar las representaciones e interpretaciones intuitivas, sino desarrollar la capacidad del estudiante para analizar y poner bajo control sus concepciones intuitivas y construir nuevas intuiciones consistentes con los requerimientos científicos normales”.

Por ello en el curso de Geometría Analítica, después de aplicar las preguntas, se explicó la solución y se hicieron más ejercicios sobre el tema de la recta real.

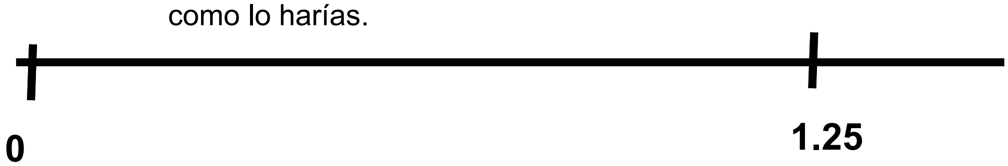
a) Indica la fracción correspondiente al punto indicado con una letra en cada caso



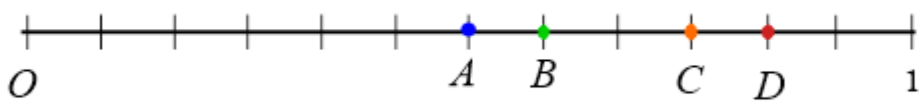
b) Pablito está haciendo su tarea, pero Juanito “el chistoso” borró algunas marcas en la siguiente recta numérica, debes ayudar a Pablito a encontrar el punto que corresponde a cero y la unidad ¿Cómo lo encontrarías? (puedes ayudarte de un compás para encontrar el punto)



c) En el siguiente dibujo ubica los puntos correspondientes a 0.25, 0.5, 0.75 y 1, explica como lo harías.

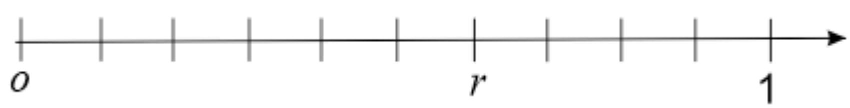


d) Indica la fracción correspondiente a los puntos A, B, C, D, solo se indica el cero y la unidad

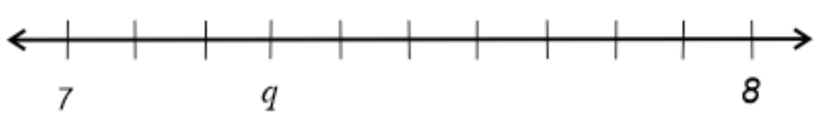


e) Dibujar lo que se pide. Observa primero las marcas indicadas

I. Hallar el número decimal que corresponde al punto r

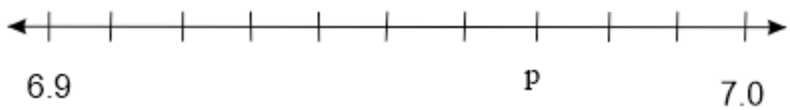


II. Hallar el número decimal que corresponde al punto q



III. Hallar el número decimal que corresponde al punto v

IV. Hallar el número decimal que corresponde al punto p



f) Explica en tus propias palabras: “toda sucesión creciente y acotada tiene límite”
g) Encuentra un número entre 3/5 y 1/3
h) ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

Aprendimos a analizar las 3 representaciones (Espiral Pitagórica de Theodoro)

Raíz de 2 se puede localizar haciendo uso de compás. Trazamos un triángulo rectángulo con catetos de 1 unidad y con el compás abierto con la misma longitud de la hipotenusa, trazamos el arco y vemos que el punto que toca la recta real coincide con el valor de la raíz cuadrada de 2.

Raíz de 2 se dibuja en todos los casos, usamos compás, es una longitud, entonces, ¿Por qué ven diferente a pi?

Por su historia previa, se “calcula su valor” de manera aproximada, no se conocen todos sus dígitos, pero no se ve como un segmento finito y que por lo tanto se puede localizar (idealmente) en la recta, otra es su aproximación decimal.

En Cálculo Integral tengo un área bajo la curva (función continua), esta área es acotada, finita, debe ser un número, pero no lo puedo calcular de manera exacta excepto en algunos casos sencillos (como polinomios) recuerda a la definición de logaritmo como integral.

Aquí se observó la idea previa de los alumnos de aproximación para un número real. Esto contradice un poco la idea de un número real como punto de la recta, si r representa su distancia al origen, tengo un punto, el número que le corresponde se puede calcular (aproximar) por una sucesión de números racionales.

Podemos ver las raíces cuadradas (irracionales) como segmentos, es decir, podemos concebirlas claramente como longitudes finitas (no importa que no se expresen con un número finito de decimales).

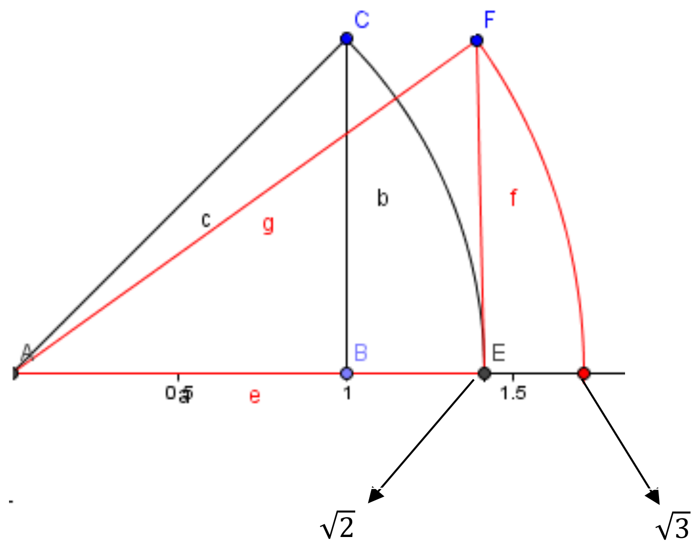


Figura 7.1.1: Construcción de raíces con regla y compás.

No se activa, o no podemos cambiar de representación bajo nuestro control, dependemos de la situación (efecto ancla)

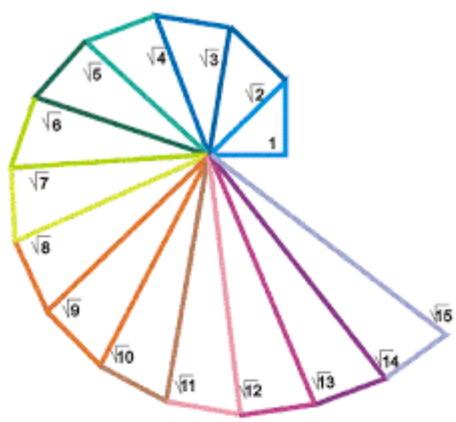


Figura 7.1.2: Representación del efecto ancla.

Irracionales como segmentos construidos con regla y compás aplicando Pitágoras

Aproximamos el valor de los irracionales por medio de decimales, existe su punto correspondiente, pero a π no lo visualizan igual, dicen que el punto correspondiente a él no se puede localizar, pasa lo mismo con $\sqrt{2}$.

Siempre es predominante la idea de aproximación.

Para responder la pregunta usamos la siguiente figura pues sabemos acerca del valor aproximado de π

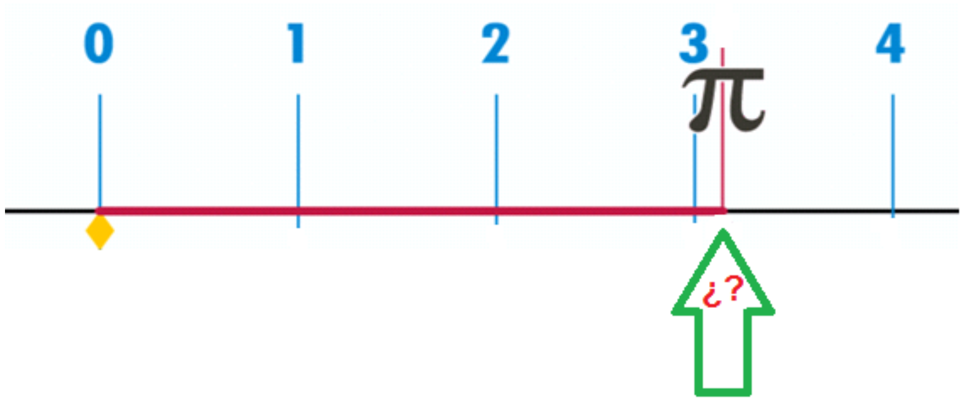


Figura 7.1.3: Representación del valor aproximado de π.

Los alumnos indicaron que no se puede localizar, se quedan con la idea de aproximación, que es una idea previa de la correspondencia perfecta entre números reales y puntos de la recta, esta es una *concepción previa* muy fuerte, como se comentó en este estudio pues los alumnos intuyen la explicación, si bien no formalmente si con la *imagen del concepto* que tienen.

Aquí la respuesta es: No olvidemos el Axioma de la Recta Real: a cada punto de la recta le corresponde un único número real, y a cada real, le corresponde un punto. El punto correspondiente a π, existe, pero no podemos ubicar, que equivale a decir que mediante aproximaciones por polígonos de "n lados" calculamos una aproximación.

Figura 7.1.4: Localización de π.

Sabemos que dicho punto exacto, existe y tiene una localización exacta en la recta, pero no podemos "atrapar" a π en la Recta Real, nos acercamos, pero se nos sigue escapando de las manos.

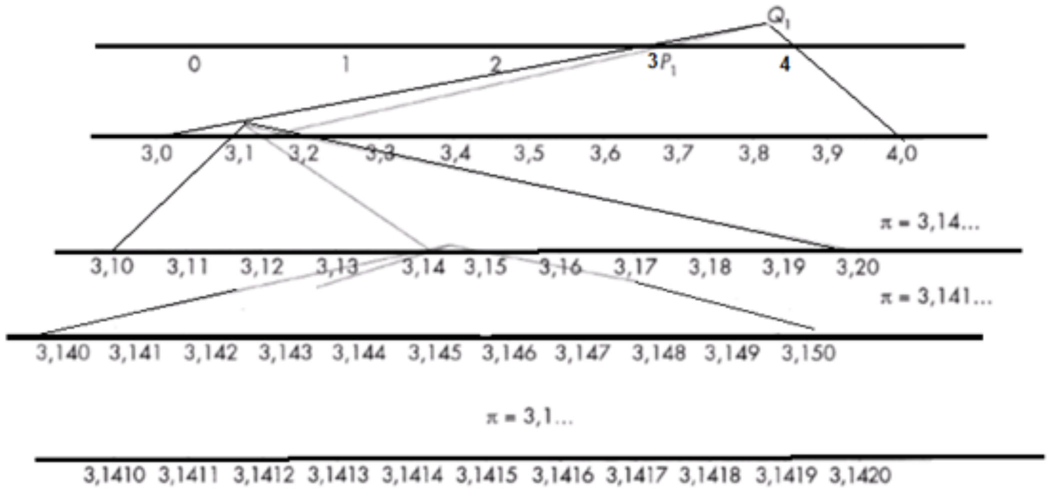


Figura 7.1.5: Recta "mágica", siempre aparecen más números.

La "recta mágica" nos ayuda a tratar de ubicar a π, pero como ya se ha mencionado siempre aparecen más dígitos, es como hacer zoom en un microscopio, encontramos partes más y más pequeñas.

Si lo intentamos con un círculo de radio uno en movimiento,

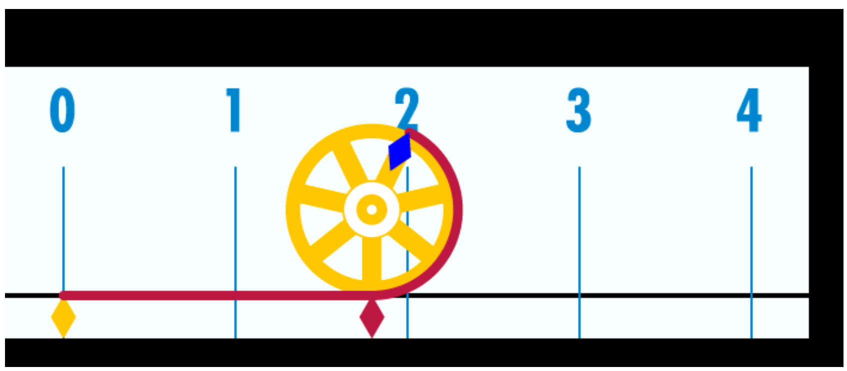


Figura 7.1.6: Perímetro desenrollándose.

π es igual al perímetro del círculo (línea roja), que conforme rueda se desenrolla

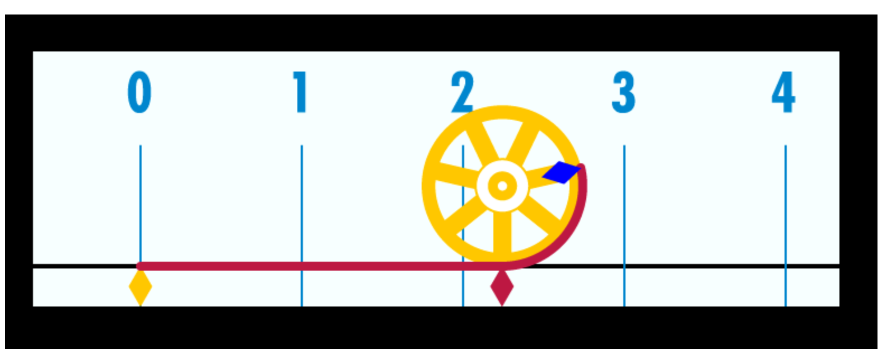


Figura 7.1.7: Acercándose a π.

Al terminar su vuelta, termina en π (vuelta entera).

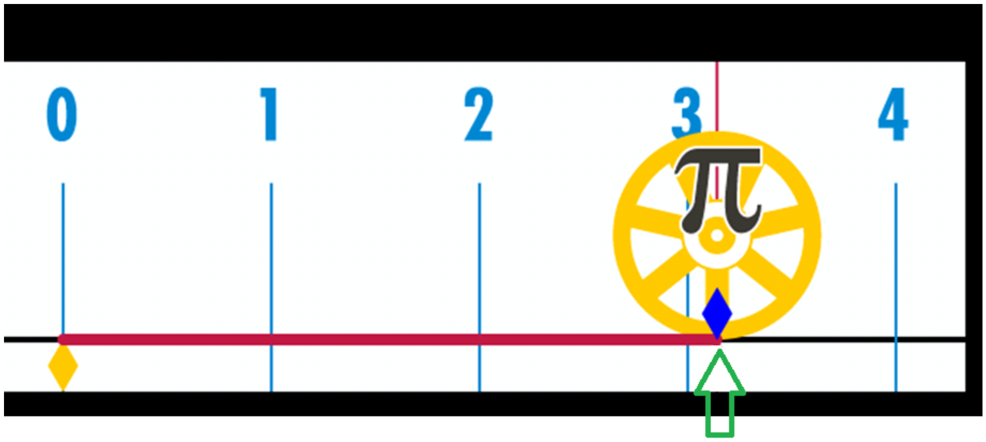


Figura 7.1.8: Ubicación de π.

Vimos que con preguntas que hacen alusión a la densidad de la recta real, los alumnos fueron comprendiendo y complementando sus conocimientos.

Bibliografía.

Alanís, J. (2007). *IV Seminario Nacional en Didáctica del Cálculo*. México: IPN.

Branchetti L (2016) *Teaching real numbers in the high school: an onto-semiotic approach to the investigation and evaluation of the teachers' declared choices*. Tesis U. de Palermo

Courant R., Robbins H. (1967) *Qué es la Matemática*. Aguilar S.A. ediciones.

Cornu B. (2002) *Limits. In: Tall D. (eds) Advanced Mathematical Thinking.* Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht.
doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. An Educational Approach. Dordrecht: Reidel Pub. Co. Cap.18.

Frykholm, J. (2010*). Learning to Think Mathematically with the Number Line. A Resource for Teachers, A Tool for Young Children.* Oregón: Cloudbreak Publishing.

Guichón, M. & Duarte, A. (Junio 2014). *Sobre la Densidad de los Números Racionales. Quehacer Educativo,* 125, pp. 48-53.

Herrera Zamora (2016) *Representación de números enteros, fraccionarios y decimales en la recta numérica: Propuesta didáctica mediante tecnología interactiva como soporte a su aprendizaje.* Tesis de maestría FCFM BUAP.

Hierrezuelo, J., Montero, A. (1998). *La ciencia de los alumnos*. España: Editorial Laia / MEC.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1995). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. España: PAIDÓS.

MARGOLINAS, C. (1988). *Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. Petit x*, 16, 51-66

Perkins D. (200) La escuela inteligente. *Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente* Gedisa.

Piaget, J. (1981). *6 estudios de Psicología.* Barcelona: Labor.

Pozo J. I. Carretero (1987) *Del pensamiento formal a las concepciones previas ¿Qué cambia con la enseñanza de las ciencias?* Infancia y aprendizaje,38, 35-52

Pozo, J. I. (2013). *Aprendices y maestros. Psicología cognitiva*. España: Alianza.

Sirotic, Natasa & Zazkis, Rina. (2007). *Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge*. Educational Studies in Mathematics. 65. 49-76. 10.1007/s10649-006-9041-5.

Spivak, M. (1996). *Calculus*, Second Edition. México, D.F.: Reverté, S.A.

Tall D. O., Shwarzenberger (1978) *Conflicts in the learning or real numbers and limits mathematics teaching*, 82, 44-49

Tall D, Vinner S. (1981*) Concept Image and Concept Definition* Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169

Tall D.Concept *Image and Concept Definition* (1988), *Senior Secondary Mathematics Education*, OW&OC Utrecht, 37–41

Voskoglou, Michael & Kosyvas, Georgios. (2012). *Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. Journal of Research in Mathematics Education*. 1. 301. 10.17583/redimat.2012.229.

Wheelwright P. (1966) *The Presocratics*, The Odyssey press, Inc.

Wooton, W. , Beckenbach, E. ,& Fleming, F.. (1985). *Geometría Analítica Moderna*. México: Publicaciones Cultural S.A. de C.V.

Zazkis R., Sirotic N. (2004). *Making sense of irrational numbers: Focusing on representation.* En M. Johnsen Høines and A. Berit Fuglestad (Eds.), Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 4. (pp. 497–505) Bergen, Norway: PME.