Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESTUDIO SOBRE LÓGICAS INTERMEDIAS Y LÓGICAS MODALES [1]

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
MIGUEL PÉREZ GASPAR

DIRECTOR DE TESIS
IVÁN MARTÍNEZ RUIZ

PUEBLA, PUE. 24 de agosto de 2012

[1] Tesis apoyada por el proyecto VIEP "Programación Lógica Posibilista y Teoría de la Argumentación"

A mi Madre, Tía y Hermana

Agradecimientos

Son muchas las personas especiales a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las distintas etapas de mi vida. Algunas están aquí y otras en mi recuerdos. Gracias por formar parte de mi vida y del apoyo brindado.

A los docentes que me han acompañado durante el largo camino, brindándome siempre su orientación con profesionalismo ético en la adquisición de conocimientos y afianzando mi formación como estudiante universitario.

De igual manera a mi director de tesis Iván Martínez Ruiz quien me ha orientado en todo momento en la realización de este proyecto que enmarca un escalón hacia un futuro prometedor.

A mis sinodales: David Villa Hernández, Alejandro Ramírez Páramo y José Arrazola Ramírez, quienes se dieron a la tarea de revisar y hacer observaciones y comentarios, al presente trabajo.

Introducción

La lógica intuicionista surge como una explicación formal de las ideas de Brouwer(1907,1908). Fue construida en la forma de cálculo tipo Hilbert por Kolmogorov (1925), Orlov(1928) y Glivenko (1929), quienes consideraron el lenguaje proposicional, posteriormente para el caso predicativo, por Heyting (1930).
El significado de los conectivos intuicionistas fue explicado por primera vez en términos de la interpretación de prueba dada por Brouwer, Kolmogorov y Heyting. Esta no fue clara, sin embargo, la manera de construir una forma razonable semánticamente con esta interpretación informal, o incluso cualquier semántica con respecto a que CPI pueda ser completa (Gödel acababa de probar sus teoremas de completitud para cálculo proposicional clásico). El estudio de la semántica de CPI fue iniciado por Gödel (1932), el cual mostró que CPI no es tabular, además da una interpretación de los conectivos intuicionistas a través de las correspondientes clásicas por encajar CPI en el sistema modal de Lewis $S4$ (basada en lógica clásica) y tratando su operador necesidad como " es probable".
El encaje de CPC en CPI fue construido por Glivenko (1929), Gödel(1933b), Gentzen (1934-35) y Lukasiewics (1952).

La semántica relacional fue introducida en (1965) por Kripke. De hecho, se remonta a Jónnson y Tarski (1951) quienes representaron a las álgebras de la lógica modal $S4$ y por consiguiente implícitamente para CPI, en la forma de frames, y para Dummett y Lemmon (1959) que lo hizo expresamente para álgebras finitas.

En el Capítulo 1 presentamos la definición de Lógica Formal. Se muestra como primer ejemplo al Cálculo Proposicional Clásico , exponiendo algunos resultados y ejemplos, los cuales serán necesarios para nuestro estudio posterior. A continuación, se introducen las definiciones de álgebras Booleanas y álgebra de Lindenbaum-Tarsky, para concluir este capítulo con la caracterización algebraica del Cálculo Proposicional Clásico.

El Capítulo 2 se enfoca al estudio de la Lógica Intuicionista y Superintuicionista. Abordamos un resultado importante conocido como el Teorema de Glivenko, el cual afirma que una proposición es demostrable de forma clásica, si su doble negación es demostrable en la lógica intuicionista. Proporcionamos la definición de Lógicas Superintuicionistas y listamos algunas de ellas. En el aspecto semántico, similar a lo presentado para la Lógica Clásica, se desarrolla una caracterización algebraica para CPI. Para ello se introduce la definición de lattice, y posteriormente se presenta la definición de álgebras de Heyting. Además, se exponen algunas propiedades relevantes de las mismas. Usando la construcción del álgebra de Lindenbaum-Tarski obtenemos la completitud algebraica de CPI. Finalmente, extendemos la semántica algebraica de CPI de todas las lógicas intermedias.

El Capítulo 3 estudiamos a las Lógicas Modales para ello, listamos algunos axiomas conocidos y a partir de estos axiomas enunciamos algunos sistemas lógicos, como lo es $S4$. Se establecen las Semánticas de Kripke para la Lógica Modal y se exponen algunas propiedades importantes. Se concluye el Capítulo 3 con una sección en la que se establece la traslación de Gödel T y se demuestra que es un encaje de CPI en $S4$.

Miguel Pérez Gaspar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Puebla, Puebla, México
Agosto de 2012

Contenido

Estudio sobres lógicas modales y lógicas intermedias

Miguel Pérez Gaspar

21 de agosto de 2012

Capítulo 1

Lógica Clásica

1.1. Sintaxis

Definición 1.1. *Un lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$ es una colección de signos divididos en las categorías siguientes:*

(a) Un conjunto numerable $\{x_i : i \in \omega\}$ de variables. Llamaremos a la variable x_i la variable del índice i en $\mathcal{L}$.

(b) Conectivos lógicos: negación ($\neg$) e implicación ($\rightarrow$).

(c) Símbolos auxiliares: paréntesis derecho, paréntesis izquierdo y coma.

Generalmente se agrega al lenguaje de primer orden un conjunto (posiblemente vacío o posiblemente infinito) llamado tipo de símbolos no lógicos de alguna de las siguientes clase.

(d) Símbolos de relación: cada uno asociado con un entero positivo llamado aridad.

(e) Símbolos de función con su aridad.

(f) Constantes individuales.

Definición 1.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal. Una cadena de signos en $\mathcal{L}$ es una sucesión finita de signos de $\mathcal{L}$, repetidos o no, con un cierto orden. El número de signos que componen a la cadena se llama longitud de la cadena.*

Ejemplo 1.1.1.

1. $x_1, c \ c \to \neg x_2$
2. $((x_1 \to \neg x_2) \to x_1)$

Definición 1.3. *De forma recursiva se definen las fórmulas bien formadas de tipo $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:*

(a) Las fórmulas atómicas son fórmulas de tipo $\mathcal{L}$.

(b) Si φ y ψ son dos fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$ y $(\varphi \to \psi)$ son fórmulas.

Denotaremos al conjunto de fórmulas por $PROP$.

Ejemplo 1.1.2.

1. $((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$ *donde φ y ψ son fórmulas*

2. $(x_1 \to \neg \to x_2)$ *esto no es fórmula*

Observación 1.1.1.

1) Abreviaciones:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \neg(\alpha \to \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta &= \neg\alpha \to \beta \\ \alpha \leftrightarrow \beta &= (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \end{aligned}$$

2) Algunos autores definen a $PROP$ como el conjunto más pequeño X que cumple las siguientes propiedades:

a*) El conjunto de fórmulas atómicas está contenido en X.*

b*) Si $\varphi, \psi \in X$, entonces $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \psi \to \varphi \in X$.*

c*) Si $\varphi \in X$, entonces $\neg\varphi \in X$.*

Estudiar el conjunto $PROP$ nos permite establecer un procedimiento inductivo para estudiar propiedades de fórmulas: Estudiar primero lo que ocurre con las fórmulas atómicas y posteriormente ver que ocurre con las fórmulas más generales. Si A es una propiedad denotamos por $A(x)$ el hecho de que el elemento x satisface la propiedad A.

Teorema 1.4. *Sea A una propiedad. Si ocurre que:*

1. *$A(\alpha)$ se cumple para toda fórmula atómica α.*

2. *Si α y β son fórmulas tales que $A(\alpha)$ y $A(\beta)$, entonces $A(\alpha \to \beta)$, $A(\alpha \wedge \beta), A(\alpha \vee \beta)$.*

3. *Si $\alpha \in PROP$ es tal que $A(\alpha)$, entonces $A(\neg\alpha)$.*

Demostración. Sea $X = \{\alpha \in PROP : A(\alpha)\}$. Por 1. Sabemos que el conjunto de subfórmulas atómicas pertenece a X.
Supongamos que $\alpha, \beta \in X$, i.e., $A(\alpha)$ y $A(\beta)$. Entonces, por 2. $A(\alpha \to \beta)$, $A(\alpha \wedge \beta)$ y $A(\alpha \vee \beta)$.
Si $\alpha \in X$ entonces, por 3. $A(\neg\alpha)$.
Por minimalidad, $PROP \subseteq X \subseteq PROP$. Por lo tanto $X = PROP$. $\square$

1.2. Fórmulas bien formadas

Si A es una propiedada que cumple:

1. $A(p_i)$ para todo símbolo proposicional p_i y

2. Sean $\varphi, \psi \in PROP$, si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \to \psi))$ y $A((\neg\varphi))$. Entonces, toda fórmula bien formada satisface la propiedad A.

Teorema 1.5. *Toda fórmula tiene un número par de paréntesis.*

Demostración. Sea φ una fórmula.

1. *Caso I.* φ es átomo, es decir, $\varphi = p_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Entonces φ tiene 0 paréntesis i.e. $0 = 2 \cdot 0$ una cantidad par.

2. *Caso II.* Supongamos que $\varphi = (\psi \to \gamma)$ donde ψ tiene una cantidad par de paréntesis, digamos $2n$ y γ tiene una cantidad par de paréntesis, digamos $2m$ por lo tanto φ tiene $2m+2n+2 = 2(m+n+1)$ paréntesis, es decir, un número par.

3. *Caso III.* Supongamos que $\varphi = (\neg\psi)$ y ψ tiene $2n$ paréntesis entonces $\varphi = (\neg\psi)$ tiene $2n + 2 = 2(n + 1)$ paréntesis.

$\square$

Definición 1.6. *Una sucesión* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *es llamada sucesión de formación de una fórmula* φ *si* $\varphi_n = \varphi$ *y para cada* $1 \leq i \leq n$:

a) φ_i *es atómica o;*

b) $\varphi_i = (\varphi_j \to \varphi_k)$, *para ciertos* $j, k < i$ *o;*

c) $\varphi_i = (\neg\varphi_j)$ *para algún* $j < i$.

Observación 1.7. *Toda fórmula admite una sucesión de formación. Más aún se verifica el siguiente Teorema.*

Teorema 1.8. $PROP$ *es el conjunto de todas las expresiones que tienen una sucesión de formación.*

Demostración. Sea $X = \{\varphi \mid \varphi \text{ admite una sucesión de formación }\}$. Por el resultado anterior, $PROP \subseteq X$. Basta probar que $X \subseteq PROP$. La prueba se hace por inducción sobre la longitud de la sucesión de formación.

1. Sea $\varphi \in X$ que admite una sucesión de formación de longitud 1. En este caso φ es un átomo y así $\varphi \in PROP$

2. Supongamos que para todo $k < n$, si φ admite una sucesión de formación de longitud k, entonces $\varphi \in PROP$ y sea ψ tal que admite una sucesión de formación de longitud n, digamos $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n = \psi$. Por definición, ocurren los siguientes casos:

   a) ψ es fórmula atómica. En este caso $\psi \in PROP$

   b) Existen $i, j < n$ tales que $\psi = (\psi_i \to \psi_j)$. En este caso $\psi_1, \ldots, \psi_i$ y $\psi_1, \ldots, \psi_j$ son sucesiones de formación de ψ_i, ψ_j respectivamente. Por hipótesis inductiva, $\psi_i, \psi_j \in PROP$, de lo cual se sigue que $(\psi = \psi_i \to \psi_j) \in PROP$.

□

Definición 1.9. *El rango de una proposición* φ, *denotado por* $r(\varphi)$, *está definido como sigue:*

1. $r(\varphi) = 0$, *si* φ *es átomo*

2. $r((\varphi \to \psi)) = máx\{r(\varphi), r(\psi)\} + 1$

3. $r((\neg\varphi)) = r(\varphi) + 1$

Teorema 1.10. (*Inducción sobre el Principio del rango*) *Si para toda fórmula φ [$A(\psi)$ se cumple para toda ψ con $r(\psi) < r(\varphi)$] implica $A(\varphi)$, entonces se cumple $A(\varphi)$ para toda $\varphi \in PROP$.*

Proposición 1.11. *Si A es una propiedad que cumple:*

1. *$A(\varphi)$ para toda φ atómica*

2. *Si para toda $n \in \mathbb{N}$, $A(\psi)$ para toda fórmula ψ tiene menos de n conectivos y φ tiene n conectivos, entonces $A(\varphi)$ ocurre para toda $\varphi \in PROP$.*

Definición 1.12. *Sean α y β fórmulas. Diremos que β es subfórmula de α si cumple:*

1. *$\beta = \alpha$ ó*

2. *$\alpha = (\varphi \to \gamma)$ y β es subfórmula de φ ó es subfórmula de γ*

3. *$\alpha = (\neg\varphi)$ y β es subfórmula de φ*

Ejemplo 1.2.1. *Si $\alpha = ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_3)) \to p_2)$. Entonces:*
$\psi = (p_1 \to p_2)$ es subfórmula de α, pero
$\psi = (\neg p_3)) \to p_2)$ no lo es.

1.3. Cálculo Proposicional Clásico

Nuestro interés será ahora dar una definición precisa de lo que entenderemos por Teoría lógica y deducción lógica.

Definición 1.13. *Una Teoría formal F sobre un lenguaje $\mathcal{L}$ está determinada por un conjunto de fórmulas llamadas axiomas y una colección de relaciones llamadas reglas de inferencia que determinan cuándo una fórmula es consecuencia lógica inmediata de otra u otras fórmulas.*

Como primer ejemplo, introduciremos una teoría axiomática para el cálculo proposicional clásico, el cual denotaremos mediante CPC. Denotaremos por L a la Teoría axiomática del Cálculo Proposicional Clásico, de la siguiente manera: Sean α, β y γ son fórmulas, entonces los siguientes son axiomas en $\mathcal{L}$:

(A1) $\beta \to (\alpha \to \beta)$

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(A3) $(\neg\gamma \to \neg\beta) \to ((\neg\gamma \to \beta) \to \gamma)$

La única regla de inferencia de $\mathcal{L}$ es Modus Ponens, el cual denotaremos mediante (MP): ψ es consecuencia de $(\varphi \to \psi)$ y de φ.

Observación 1.3.1.

Cada uno de los axiomas anteriores es en realidad lo que se denomina una instancia de axioma; es decir, una expresión metamatemática que determina infinitos axiomas, los cuales resultan de sustituir las "variables" φ, ψ, γ por fórmulas particulares en L.

Los axiomas y las reglas de inferencia de una teoría formal son, en principio arbitrarias. Si elegimos otros axiomas u otras reglas de inferencia, posiblemente obtengamos, una teoría axiomática diferente.

Definición 1.14. *Sea F una teoría formal.*

1. *Una prueba en F es una sucesión $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que para cada $i \leq n$, α_i es un axioma o consecuencia directa de las α_j (fórmulas previas) a partir de alguna regla de inferencia.*

2. *Un Teorema en F es una fórmula α tal que existe una prueba $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, con $\alpha_n = \alpha$.*

3. *Diremos que la teoría F es decidible si dada cualquier fórmula, es posible determinar, a partir de un proceso mecánico, si la fórmula es teorema o no. En otro caso, diremos que es indecidible.*

Definición 1.15. *Sea Γ un conjunto de fórmulas en una teoría F.*
Diremos que una fórmula φ se deduce de Γ en F si existe una sucesión $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas tales que $\alpha_n = \varphi$ y para cada $i \leq n$, donde α_i es axioma o $\alpha_i \in \Gamma$ o α_i es consecuencia por MP de fórmulas anteriores en la sucesión.

Observación 1.3.2. *Los elementos de Γ serán llamados premisas o hipótesis de la prueba. Usaremos la notación $\Gamma \vdash_F \varphi$ para abreviar la expresión "φ es consecuencia en F de Γ".*

Cuando no exista riesgo de confusión escribiremos únicamente $\Gamma \vdash \varphi$. Finalmente, si Γ es un conjunto finito $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\}$, escribiremos $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m \vdash \varphi$ en lugar de $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\} \vdash \varphi$.

Observación 1.3.3. *Si $\Gamma = \emptyset$ y φ es una fórmula entonces $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si φ es un teorema. En este caso, escribiremos $\vdash \varphi$.*

1.4. Semántica del Cálculo Proposicional Clásico

1.4.1. Algebras Booleanas

Definición 1.16. *Sea A un conjunto no vacío, entonces una función $o : A^n \to A$ será llamada una operación n-aria en A. El número n es llamado la aridad de la aplicación o, la cual se denotará como $ar(o)$.*

Observación 1.4.1. *Se acepta el caso en que $n = 0$. Por una operación 0-aria en A entenderemos un elemento constante $o \in A$.*

Definición 1.17. *Un subconjunto $A' \subseteq A$ es llamado cerrado bajo una operación n-aria o, si $o(a_1, \ldots, a_n) \in A'$, para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Definición 1.18. *Un álgebra abstracta (o simplemente un álgebra) es una pareja $\mathcal{A} = (A, \{o_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ donde A es un conjunto no vacío y para cada $\phi \in \Phi$, o_ϕ es una operación en A. El conjunto A es llamado el universo de $\mathcal{A}$ y las o_ϕ son llamadas operaciones fundamentales de $\mathcal{A}$.*

Observación 1.4.2.

1. *El conjunto Φ puede tener cardinalidad finita o infinita, incluso puede ser el conjunto vacío.*

2. *Si Φ es finito, por ejemplo $\{1, 2, \ldots, n\}$, entonces escribiremos $\mathcal{A} = (A, o_1, \ldots, o_n)$.*

Ejemplo 1.4.1. *Un grupo G es un álgebra $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ dotado de tres operaciones una binaria otra unaria y una mas 0-aria satisfaciendo las siguientes identidades:*

(G1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(G2) $x \cdot e = e \cdot x = x$

(G3) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

Definición 1.19. *Un subconjunto A' de un álgebra abstracta A es llamada un subálgebra de A, si A' es cerrado bajo las operaciones heredadas de A.*

Observación 1.4.3. *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una clase de subálgebras de A, entonces $A' = \bigcap_{i\in I} A_i$ es un subálgebra de A. Así para todo conjunto $A_0 \subseteq A$ existe la menor subálgebra A' de A que contiene A_0. Esta subálgebra es llamada la subálgebra generada por A_0 y A_0 recibe el nombre de conjunto de generadores de A'.*

Definición 1.20. *Sean $\mathcal{A} = (A, \{o_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ y $\mathcal{B} = (B, \{o'_\phi\}_{\phi\in\Phi'})$ dos álgebras.*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son similares si $\Phi = \Phi'$ y para cada $\psi \in \Phi$, $ar(o_\phi) = ar(o'_\psi)$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras similares, entonces una aplicación $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si preserva todas las operaciones, i.e.,*

$$h(o_\phi(a_1, \ldots, a_n)) = o'_\phi(h(a_1), \ldots, h(a_m))$$

donde $m = ar(o_\phi)$.

Proposición 1.21.
1. *Si $\mathcal{A} = (A, \{o_\phi\}_{\phi\in\Phi})$, $\mathcal{B} = (B, \{o'_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ y $\mathcal{C} = (C, \{o''_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ son álgebras similares, y $h : A \to B$, $g : B \to C$ son homomorfismos, entonces $g \circ h : A \to C$ es un homomorfismo.*

2. *Si h es un homomorfismo de un álgebra $\mathcal{A} = (A, \{o_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ en un álgebra $\mathcal{B} = (B, \{o'_\phi\}_{\phi\in\Phi})$ entonces $h(A)$ es una subálgebra de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.22. *Una lattice es un álgebra $(M, \cap, \cup)$, donde $\cap$ y $\cup$ son operaciones binarias llamadas intersección y unión respectivamente, las cuales satisfacen para cualesquiera $a, b, c \in M$*

1. $a \cap a = a \cup a = a$.

2. $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$.

3. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

4. $a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b)$.

Definición 1.23. *Una relación binaria $\leq$ en un conjunto X es un casi-orden si satisface, para cualesquiera $x, y, z \in X$:*

1. $x \leq x$,
2. $x \leq y$, $y \leq z$ *implican* $x \leq z$.

Si $x \leq y$, $y \leq x$ implica que $x = y$, diremos que $\leq$ es un orden parcial.

Teorema 1.24.

1. *Si $(M, \cap, \cup)$ es una lattice y se define "$\leq$" como $a \leq b$ si y sólo si $a \cup b = b$, entonces $\leq$ es un orden parcial en M.*
2. *Si $\leq$ es un orden parcial en un conjunto M tal que para cada $a, b \in M$ existen $inf\{a, b\}$ y $sup\{a, b\}$, los cuales se denotan por $a \cap b$ y $a \cup b$ respectivamente, entonces $(M, \cap, \cup)$ es una lattice.*

Si M tiene un elemento mínimo (máximo) respecto al orden inducido, este se denotara por 0 (respectivamente 1). En este caso se cumple que $a \cup 0 = a$ ($a \cap 1 = a$).

Definición 1.25. *Una lattice $(M, \cap, \cup)$ es distributiva, si para cualesquiera $a, b, c \in M$:*

1. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.
2. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

Definición 1.26. *Un álgebra booleana es un álgebra $(A, \cap, \cup, -)$, donde $\cap, \cup$ son operaciones binarias y $-$ es una operación unaria, tal que $(A, \cap, \cup)$ es una lattice distributiva con elemento mínimo y máximo, que satisface, para cualesquiera $a, b \in A$:*

$$a \cap -a = 0; \; a \cup -a = 1$$

Ejemplo 1.4.2.

1. *Si X es un conjunto y $\cap$, $\cup$ son las operaciones usuales de conjuntos, entonces $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X, es una lattice distributiva tal que $0 = \emptyset$, $1 = X$. Si se define $-A := X \setminus A$, el complemento usual de conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, -)$ es un álgebra booleana, llamada el álgebra booleana de conjuntos determinada por X.*

2. *Sea X ={0,1} y defínase:*

    a) $0 \cap 0 = 0$

    b) $0 \cup 0 = 0$

    c) $-0 = 1$

    d) $0 \cap 1 = 0$

    e) $0 \cup 1 = 1$

    f) $-1 = 0$

    entonces $(X, \cap, \cup, -)$ *es un álgebra booleana.*

Observación 1.4.4. *Sean* $(X, \cap, \cup)$ *un álgebra booleana y* $a, b \in X$ *entonces introducimos un nuevo símbolo "*$\rightarrow$*" definido de la siguiente forma*

$$a \rightarrow b := -a \cup b$$

Definición 1.27. *Un subconjunto no vacío* I *de un álgebra booleana* $(A, \cap, \cup, -)$ *es un ideal si cumple:*

1. *Si* $a, b \in I$*, entonces* $a \cup b \in I$*,*

2. *Si* $a \leq b$ *y* $b \in I$*, entonces* $a \in I$*.*

Definición 1.28. *Un ideal* I *en* $\mathcal{A} = (A, \cap, \cup, -)$ *será llamado propio si es un subconjunto propio de* A*. Si además,* I *no está contenido propiamente en algún ideal propio de* $\mathcal{A}$*, diremos que es maximal.*

La prueba de los siguientes resultados se presenta en [16].

Proposición 1.29. *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra booleana e* I *es un ideal en* $\mathcal{A}$*, entonces* $\mathcal{A}/I$ *es un álgebra booleana respecto a las operaciones determinadas por las operaciones fundamentales de* $\mathcal{A}$*. Más aún,* $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/I$ *dada por* $h(a) = [a]_I$ *es un homomorfismo de álgebras booleanas.*

Teorema 1.30. *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra booleana entonces para cada elemento* $a_0 \in \mathcal{A}$ *tal que* $a_0 \neq 1$*, existe un ideal maximal* I *tal que* $a_0 \in I$*.*

Teorema 1.31. *Las siguientes condiciones son equivalentes para todo ideal* I *de un álgebra booleana* $\mathcal{A}$*:*

1. *I es un ideal maximal,*

2. *El álgebra cociente $\mathcal{A}/I$ es el álgebra booleana de dos elementos.*

1.4.2. Álgebra de Lindenbaum-Tarski del Cálculo Proposicional Clásico

Definición 1.32. *Un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq PROP$ es un sistema deductivo si cumple:*

1. *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de axiomas,*
2. *Si $x, x \to y \in D$ entonces $y \in \mathcal{D}$.*

Lema 1.33. *Sea $\{D_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los sistemas deductivos, entonces $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} D_i$ es un sistema deductivo.*

$\mathcal{T}$ será llamado el conjunto de tesis del CPC . Es decir, el conjunto de tesis es el menor sistema deductivo que contiene al conjunto de axiomas y es cerrado bajo Modus Ponens.

Proposición 1.34.

1. *Si $t \in \mathcal{T}$ entonces $x \to t \in \mathcal{T}$ para todo $x \in \mathcal{L}$.*
2. *$x \to x \in \mathcal{T}$ para todo $x \in \mathcal{L}$.*

Observación 1.35. *Escribiremos $x \leq y$ para indicar que $x \to y \in \mathcal{T}$.*

Definición 1.36. *Si $x, y \in \mathcal{L}$, se define la relación $\equiv (mod\mathcal{T})$ como*

$$x \equiv y(mod\mathcal{T}) \text{ si y sólo si } x \leq y \text{ e } y \leq x.$$

Observación 1.37. *$x \equiv y(mod\mathcal{T})$ si y sólo si $x \equiv y \in \mathcal{T}$, $y \to x \in \mathcal{T}$.*

Para una demostración de los siguientes lemas véase [17], [13].

Lema 1.38. *"$\equiv (mod\mathcal{T})$ " es una relación de equivalencia.*

Lema 1.39. *(Ley de Cambio) Si $a \leq b \to c$ entonces $b \leq a \to c$.*

Lema 1.40. *(Ley de Monotonía) Si $b \leq c$ entonces $a \to b \leq a \to c$, para todo $a \in \mathcal{L}$.*

Lema 1.41. *(Ley de Antimonotonía) Si $a \leq b$ entonces $b \to c \leq a \to c$ para todo $c \in \mathcal{L}$*

Teorema 1.42. *La relación "$\equiv (mod\mathcal{T})$" es compatible con $\rightarrow, \wedge, \vee$ y $\neg$; es decir , si $a, b \in \mathcal{L}$ cumplen que $a \equiv b(mod\mathcal{T})$ y $c \in \mathcal{L}$ entonces $\neg a \equiv \neg b(mod\mathcal{T})$, $a \diamond c \equiv b \diamond c(mod\mathcal{T})$ y $c \diamond a \equiv c \diamond b(mod\mathcal{T})$, donde $\diamond = \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.*

Dados $x, y \in \mathcal{L}$ definimos las siguientes operaciones en $\mathcal{L}/\equiv$:

$$\begin{array}{ll} \overline{x} \rightarrow \overline{y} & := \overline{x \rightarrow y} \\ \overline{x} \wedge \overline{y} & := \overline{x \wedge y} \\ \overline{x} \vee \overline{y} & := \overline{x \vee y} \\ \neg\overline{x} & := \overline{\neg x} \end{array}$$

El teorema anterior garantiza la buena definición; más aún, se puede establecer un cuasi-orden "$\leq$" en $\mathcal{L}/\equiv$ como sigue:

$$x \leq y \text{ si y sólo si } \overline{x} \leq \overline{y}$$

Definición 1.43. *El sistema $(\mathcal{L}/ \equiv, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$ es llamado el álgebra de Lindenbaum-Tarski del Cálculo Proposicional Clásico.*

Observación 1.44. *$\mathcal{T}$ es una clase de $\mathcal{L}/\equiv$ con la propiedad: si $\overline{x} \in \mathcal{L}/\equiv$ entonces $\overline{x} \leq \mathcal{T}$.*

Teorema 1.45. *El álgebra de Lindenbaum-Tarski del Cálculo Proposicional Clásico es un álgebra booleana.*

Definición 1.46. *Sea $(A, \cap, \cup, -)$ un álgebra booleana entonces:*

1. *Una valuación v en A es una aplicación $v : \mathcal{G} \rightarrow A$, donde $\mathcal{G}$ es el conjunto de letras proposicionales del CPC.*

2. *Dada una valuación v en A, defínase la aplicación $[]_v : \mathcal{L} \rightarrow A$ como sigue:*

(*a*) $[p]_v = v(p)$, *si* $p \in \mathcal{G}$.

(*b*) $[\varphi \vee \psi]_v = [\varphi]_v \cup [\psi]_v$.

(*c*) $[\varphi \wedge \psi]_v = [\varphi]_v \cap [\psi]_v$.

(*d*) $[\varphi \rightarrow \psi]_v = [\varphi]_v \Rightarrow [\psi]_v$, *donde "$\Rightarrow$" es como en (1.4.4) .*

(*e*) $[\neg\varphi]_v = -[\varphi]_v$.

Observación 1.47. *Denotaremos a* $[\varphi]_v$ *como* $v(\varphi)$*. Convenimos en llamar también valuación a la aplicación inducida por* v*.*

Observación 1.48. *Sean* $(A, \cap, \cup, -)$ *un álgebra booleana,* v *una valuación en* A *y* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}$*. Escribiremos:*

(i) $A, v \models \varphi$ *si* $v(\varphi) = 1$*.*

(ii) $A \models \varphi$ *si* $A, w \models \varphi$*, para toda valuación* w*.*

(iii) $A, v \models \Gamma$ *si* $A, v \models \psi$*, para toda* $\psi \in \Gamma$*.*

(iv) $A \models \Gamma$ *si* $A, w \models \psi$*, para toda valuación* w*.*

(v) $\models \varphi$ *si* $B, w \models \varphi$*, para toda álgebra booleana* B *y toda valuación* w*.*

(vi) $\Gamma \models \varphi$ *cuando* $B, w \models \Gamma$ *implica que* $B, w \models \varphi$ *para toda álgebra booleana* B *y toda valuación* w*.*

Observación 1.49.

1. *Si ocurre (1.48)* (v)*, diremos que* φ *es una fórmula válida.*
2. *Si* $A \models \varphi$*, donde* A *es el álgebra booleana de dos elementos, diremos que* φ *es una tautología.*
3. *Consideremos* $(\mathcal{L}/\equiv, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$*, el álgebra de Lindenbaum-Tarsky del CPC. Entonces* $v^0 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\equiv$*, dada por* $v^0(\psi) = \overline{\psi}$*, recibirá el nombre de valuación canónica.*

Proposición 1.50. *Toda fórmula derivable en* CPC *es válida.*

Proposición 1.51. *Para toda fórmula* $\alpha \in \mathcal{L}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. α *es derivable en* CPC*,*
2. α *es válida,*
3. α *es tautología.*

Capítulo 2

Lógica Intuicionista y Lógica Intermedia

2.1. Sintaxis y Semántica

Sea $\mathcal{L}$ denota un lenguaje proposicional que consiste de:

1. variables proposicionales infinitas (letras) $p_0, p_1, \ldots$
2. conectivos proposicionales $\wedge, \vee, \rightarrow$
3. constante proposicional $\perp$.

Denotamos por $PROP$ al conjunto de todas las variables proposicionales. Las fórmulas en $\mathcal{L}$ son definidas como usualmente lo hacemos. Denotamos por $FORM(\mathcal{L})$ (o simplemente $FORM$) al conjunto de formulas bien formadas en el lenguaje $\mathcal{L}$. Supongamos que $p, q, r, \ldots$ son variables proposicionales y $\alpha, \beta, \psi, \ldots$ son fórmulas arbitrarias.

Para toda fórmula ϕ y ψ abreviamos:

$$\begin{aligned} \neg\alpha &:= \alpha \rightarrow \perp \\ \phi \leftrightarrow \alpha &:= (\varphi \rightarrow \alpha) \wedge (\alpha \rightarrow \varphi) \\ \top &:= \neg\perp \end{aligned}$$

Definición 2.1. *El cálculo proposicional intuicionista, el cual denotaremos mediante CPI es el conjunto más pequeño de fórmulas que contiene los siguientes axiomas:*

(I_1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(I_2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(I_3) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$

(I_4) $\alpha \wedge \beta \to \beta$

(I_5) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$

(I_6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(I_7) $\beta \to \alpha \vee \beta$

(I_8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)))$

(I_9) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$

(I_{10}) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

Además CPI es cerrado bajo las reglas de inferencia:
Modus Ponens (MP): de ϕ y $\phi \to \psi$ inferir ψ,
Substitución: (Subst) de $\phi(p_1, \ldots, p_n)$ inferir $\phi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

2.2. Algunas propiedades

Lema 2.2. *Si α y β son fórmulas entonces:*

(i) $\alpha \vdash_{CPI} \neg\neg\alpha$

(ii) $\vdash_{CPI} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

(iii) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{CPI} \neg\neg\beta$

(iv) $\neg\neg\neg\alpha \vdash_{CPI} \neg\alpha$

(v) $\vdash_{CPI} \neg\neg((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$

Para una demostración véase [1].

Definición 2.3. *Dadas dos teorías H y K.*
Diremos que $H \subseteq K$ si $th(H) \subseteq th(K)$, donde $th(H)$ y $th(K)$ denota a los teoremas de H y K respectivamente.

Es bien sabido que el CPC contiene propiamente al CPI. En efecto tenemos que $\alpha \vee \neg\alpha$, $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \in CPC$, pero $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \notin CPI$.
Dentro de un sistema de lógica clásica, la doble negación, esto es, la negación de la negación de una proposición α, es lógicamente equivalente a α. Expresado simbólicamente, $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. En lógica intuicionista, una proposición implica su doble negación, pero no al revés. Esto marca una importante diferencias entre lógica clásica e intuicionista. Algebraicamente, la negación clásica es llamada una involución de periodo dos.

Sin embargo, en lógica intuicionista, sí tenemos la equivalencia entre $\neg\neg\neg\alpha$ y $\neg\alpha$. Es más, en el caso proposicional, una oración es demostrable de forma clásica, si su doble negación es demostrable de manera intuicionista. Este resultado es conocido como el teorema de Glivenko.

Teorema 2.4. *Si α es una fórmula y $\vdash_{CPC} \alpha$ si y sólo si $\vdash_{CPI} \neg\neg\alpha$.*

Demostración. Supongamos que $\vdash_{CPI} \neg\neg\alpha$ y como $CPI \subset CPC$ entonces $\vdash_{CPC} \neg\neg\alpha$ y por otro lado tenemos que $\vdash_{CPC} \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$, aplicando (MP) obtenemos que $\vdash_{CPC} \alpha$.
Por otro, lado supongamos que $\vdash_{CPC} \alpha$. Entonces existe una prueba de α en CPC. Cada linea de la prueba es:

(a) una instancia de esquema de axioma $(I_1) - (I_9)$ ó

(b) una instancia de esquema de axioma $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ ó

(c) una consecuencia de alguna par de líneas anteriores a partir de la regla de MP.

Probaremos que para cada línea γ de dicha prueba se verifica que $\vdash_{CPI} \neg\neg\gamma$, aplicando inducción sobre la posición de γ en la prueba.

1. Si γ es la primera línea de la prueba entonces debe ser algún esquema de axioma $(I_1) - (I_9)$. Si ocurriera el caso (a) entonces $\vdash_{CPI} \gamma$ y por (i) de el lema anterior se sigue que $\vdash_{CPI} \neg\neg\gamma$.
   Si ocurriera el caso (b) entonces el Lema 2.2 (ii) garantiza que $\vdash_{CPI}\vdash \neg\neg\gamma$.

2. Supongamos que γ es una consecuencia de aplicar la regla MP a las líneas anteriores β y $\beta \rightarrow \gamma$. Por hipótesis de inducción $\vdash_{CPI} \neg\neg\beta$ y $\vdash_{CPI} \neg\neg(\beta \rightarrow \gamma)$ y así de (iii) se sigue que $\vdash_{CPI} \neg\neg\gamma$. Así en particular, $\vdash_{CPI} \neg\neg\alpha$.

□

Teorema 2.5.

1. *CPC es el conjunto más pequeño de fórmulas que contiene CPI, la fórmula $\alpha \vee \neg\alpha$, y es cerrado bajo (MP) y (Subst).*

2. *CPC es el conjunto más pequeño de fórmulas que contiene CPI, la fórmula $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$, y es cerrado bajo (MP) y (Subst).*

Definición 2.6. *Un conjunto de fórmulas $L \subseteq FORM$ cerrado bajo (MP) y (Subst) es llamado una* lógica intermedia *si $CPI \subseteq L \subseteq CPC$.*

Por lo tanto, las lógicas intermedias se denotan así a partir de la relación que guardan con CPI y CPC A continuación se introduce una clase que contiene todas las lógicas intermedias.

Definición 2.7.

1. *Un conjunto de fórmulas $L \subseteq FORM$ cerrado bajo (MP) y (Subst) es llamado superintuicionista si $CPI \subseteq L$.*

2. *Una lógica superintuicionista L se dice que es consistente si $\perp \notin L$, y es inconsistente si $\perp \in L$.*

L es inconsistente si y sólo si $L = FORM$. Usaremos la notación $L \vdash \phi$ para denotar $\phi \in L$. La siguiente proposición nos dice que no sólo toda lógica intermedia es superintuicionista, pero que para lógicas consistentes, el recíproco también se obtiene.

Proposición 2.8. *Para cada lógica consistente superintuicionista L contenida propiamente en $FORM$ tenemos que $L \subseteq CPC$. Esto es, L es intermedia.*

Por otra parte, toda lógica superintuicionista es intermedia y viceversa. Sean L_1 y L_2 lógicas intermedias. Decimos que L_2 es una extensión de L_1 si $L_1 \subseteq L_2$. Para toda lógica intermedia L y una fórmula ϕ, $L + \phi$ denotaremos la lógica intermedia más pequeña que contiene $L \cup \{\phi\}$. Entonces podemos reformular el Teorema 2.5 como:

$$CPC = CPI + (\alpha \vee \neg\alpha) = CPI + (\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$$

Listado de lógicas superintuicionistas estándar.

For	=	$CPI + \alpha$
CPC	=	$CPI + \alpha \vee \neg\alpha$
Sml	=	$CPI + (\neg\beta \to \alpha) \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$
KC	=	$CPI + \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$
LC	=	$CPI + (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$
SL	=	$CPI + ((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha \vee \alpha) \to \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$
KP	=	$CPI + (\neg\alpha \to \beta \vee \gamma) \to (\neg\alpha \to \beta) \vee (\neg\alpha \to \gamma)$
WKP	=	$CPI + (\neg\alpha \to \neg\beta \vee \neg\gamma) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \vee (\neg\alpha \to \neg\gamma)$
$\mathbf{ND_k}$	=	$CPI + (\neg\alpha \to \neg\beta_1 \vee \ldots \vee \neg\beta_n) \to$
		$(\neg\alpha \to \neg\beta_1) \vee \ldots \vee (\neg\alpha \to \neg\beta_k), k \geq 2$
$\mathbf{BD_n}$	=	$CPI + bd_n$
$\mathbf{BW_n}$	=	$CPI + \bigvee_{i=0}^{n}(\alpha_i \to \bigvee_{j \neq i} \alpha_j)$

Recordemos la semántica de Kripke para lógica intuicionista.
Sea R es una relación binaria en un conjunto W. Para cada $w, v \in W$ escribimos wRv si $(w, v) \in R$ y escribimos $\neg(wRv)$, si $(w, v) \notin R$.

Definición 2.9.

1. *Un frame de Kripke intuicionista es un par $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ donde:*

   (i) W es un conjunto no vacío.

   (ii) R es un orden parcial; es decir R es una relación reflexiva, transitiva y anti-simétrica en W.

2. *Un modelo de* Kripke *es un par $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ tal que*

   (iii) $\mathfrak{F}$ es una frame de Kripke intuicionista

   (iv) V es una función $V : PROP \to \mathcal{P}(W)$, que satisface la condición: $w \in V(p)$ y wRv implica $v \in V(p)$. A una función de este tipo se le denomina valuación intermedia.

Subconjuntos de W que satisfacen la condición (iv) son llamados *upward closed.*

Definición 2.10. *Sean $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ un modelo de Kripke Intuicionista, $w \in W$ y $\phi \in FORM$. Lo siguiente provee una definición inductiva de $\mathfrak{M}, w \models \phi$.*

1. $\mathfrak{M}, w \models p$ *si y sólo si* $w \in V(p)$,

2. $\mathfrak{M}, w \models \phi \wedge \psi$ *si y sólo si* $\mathfrak{M}, w \models \phi$ *y* $\mathfrak{M}, w \models \psi$,

3. $\mathfrak{M}, w \models \phi \vee \psi$ *si y sólo si* $\mathfrak{M}, w \models \phi$ *o* $\mathfrak{M}, w \models \psi$,

4. $\mathfrak{M}, w \models \phi \rightarrow \psi$ *si y sólo si* $\forall v$ *con* wRv, *si* $\mathfrak{M}, w \models \phi$ *entonces* $\mathfrak{M}, v \models \psi$,

5. $\mathfrak{M}, w \not\models \perp$.

Si $\mathfrak{M}, w \models \phi$, decimos que "$\phi$ es verdadera en w" o "w satisface la fórmula ϕ en $\mathfrak{M}$". Escribimos $w \models \phi$ en lugar de $\mathfrak{M}, w \models \phi$ si el modelo $\mathfrak{M}$ es claro en el contexto. Si ϕ no es verdadera en $\mathfrak{M}$ entonces decimos que ϕ es refutado en $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{M}$ es un contramodelo para ϕ y escribimos $\mathfrak{M} \not\models \phi$.
El conjunto de puntos donde ϕ no es verdadera se llamara *downward closed.*

Como $\neg\phi$ abrevia $\phi \rightarrow\perp$ podemos precisar las definiciones de verdad de las fórmulas con la negación de la siguiente manera:

6. $\mathfrak{M}, w \models \neg\phi$ si y sólo si $\mathfrak{M}, v \not\models \phi$, para todo v con wRv,

7. $\mathfrak{M}, w \models \neg\neg\phi$ si y sólo si para todo v con wRv existe u tal que vRu y $\mathfrak{M}, u \models \phi$.

Definición 2.11. *Sean* $\phi \in FORM$, $\mathfrak{F}$ *un frame de Kripke,* $\mathfrak{M}$ *un modelo en* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathtt{K}$ *una clase de frames de Kripke decimos que:*

1. ϕ *es verdadera en* $\mathfrak{M}$, *y escribimos* $\mathfrak{M} \models \phi$, *si* $\mathfrak{M}, w \models \phi$ *para todo* $w \in W$.

2. ψ *es válida en* $\mathfrak{M}$, *y escribimos* $\mathfrak{M} \models \phi$, *si para toda valuación* V *en* $\mathfrak{F}$ *tenemos que* $\mathfrak{M} \models \phi$, *donde* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, \mathrm{V} \rangle$

3. ϕ *es válida en* $\mathtt{K}$, *y escribimos* $\mathtt{K} \models \phi$, *si* $\mathfrak{F} \models \phi$, *para todo* $\mathfrak{F} \in \mathtt{K}$

Para toda lógica intermedia, sea $Fr(L)$ la clase de frames de Kripke que válidan todas las fórmulas en L. Decimos que $Fr(L)$ es la clase definida por L.

Definición 2.12.

1. *Para todo frame de Kripke* $\mathfrak{F}$*, Log*$(\mathfrak{F})$ *denota el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en* $\mathfrak{F}$*, es decir,*

$$Log(\mathfrak{F}) = \{\phi : \mathfrak{F} \models \phi\}.$$

2. *Para una clase* $\mathcal{K}$ *de frames de Kripke, sea*

$$Log(\mathcal{K}) = \bigcap \{Log(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F} \in \mathcal{K}\}.$$

3. *Una lógica intermedia L es llamada Kripke completa si existe una clase* $\mathcal{K}$ *de frames de Kripke tal que* $L = Log(\mathcal{K})$*. En tal caso se dice que L es Kripke completa con respecto a* $\mathcal{K}$*.*

La prueba del teorema siguiente es estándar y utiliza el argumento de la llamada modelo canónico. Para una demostración véase [3],[[5], Teorema 1.16 y 5.12],[18].

Teorema 2.13.

1. *CPI es completa con respecto a la clase de todos los frames parcialmente ordenados.*

2. *CPC es completo con respecto a los frames que consisten de un punto reflexivo.*

Definición 2.14. *Una lógica L se dice que es finitamente aproximable (o tiene la propiedad del modelo finito) si existe una clase* $\mathcal{C}$ *de frames finitos tal que*

$$L = \{\varphi : \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C}\ \mathfrak{F} \models \varphi\}.$$

Teorema 2.15. *[6] CPI es finitamente aproximable.*

Recordamos algunas operaciones en frames de Kripke y modelos de Kripke.

2.3. Subframes generados, submodelos generados, p-Morfismos, uniones disjuntas

Definición 2.16.

1. *Sea* $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ *un frame de Kripke. Un subconjunto* $U \subseteq W$ *es llamado un upset de* $\mathfrak{F}$*, si para cualquiera* $w, v \in W$ *tenemos que* $w \in U$ *y* wRv *implica* $v \in U$*.*

2. *Un frame* $\mathfrak{F}' = \langle U, R'\rangle$ *es llamado* subframe generado *de* $\mathfrak{F}$*, si* $U \subseteq W$*,* U *es un* upset *de* $\mathfrak{F}$ *y* R' *es la restricción de* R *a* U*, es decir,* $R' = R \cap (U \times U)$*. Sea* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *es un modelo de Kripke.*

3. *Un modelo* $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}', V')$ *es llamado* submodelo generado *de* $\mathfrak{M}$*, si* $\mathfrak{F}'$ *es un subframe de* $\mathcal{F}$ *y* V' *es la restricción de* V *a* U*, es decir,* $V'(p) = V(p) \cap U$*.*

4. *Sea* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *un frame de Kripke y sea* $w \in W$*.*

   a) *El subframe generado de* $\mathfrak{F}$ *generado por* w *es el frame* $\mathfrak{F}_w := (R(w), R')$*, donde* $R(w) = \{v \in V : wRv\}$ *y* R' *es la restricción de* R *a* $R(w)$*.*

   Sea $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *un modelo de Kripke y* $w \in W$*.*

   a) *El submodelo de* $\mathfrak{M}$ *generado por* w*es el modelo* $\mathfrak{M}_w := (\mathfrak{F}_w, V')$*, donde* $\mathfrak{F}_w$ *es el subframe de* $\mathfrak{F}$ *generado por* w *y* V' *es la restricción de* V *a* $R(w)$*.*

Definición 2.17. *Sean* $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ *y* $\mathfrak{F}' = \langle W', R'\rangle$ *frames de Kripke. Una función* $f : W \to W'$ *es llamado un p-morfismo entre* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathfrak{F}'$ *si para todo* $w, v \in W$ *y* $w' \in W'$*:*

1. wRv *implica* $f(w)R'f(v)$*,*

2. $f(w)R'w'$ *implica que existe* $u \in W$ *tal que* wRu *y* $f(u) = w'$*.*

Algunos autores llaman a tales funciones *morfismos acotados*. Llamaremos a las condiciones (1) y (2) las condiciones "*forth*" y "*back*" respectivamente.

Definición 2.18.

1. *Decimos que* f *es monótona si satisface la condición forth.*

2. *Si* f *es un p-morfismo sobreyectivo de* $\mathfrak{F}$ *sobre* $\mathfrak{F}'$*, entonces* $\mathfrak{F}'$ *es llamada una imagen p-morfismo de* $\mathfrak{F}$*.*

3. *Sean* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V\rangle$ *y* $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{F}', V'\rangle$ *modelos de Kripke. Una función* $f : W \to W'$ *es llamada un p-morfismo entre* $\mathfrak{M}$ *y* $\mathfrak{M}'$ *si* f *es un morfismo entre* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathfrak{F}'$ *y para todo* $w \in W$ *y* $p \in PROP$*:*

$$\mathfrak{M}, w \models p \textit{ si y sólo si } \mathfrak{M}', f(w) \models p.$$

4. *Si* f *es sobreyectiva, entonces* $\mathfrak{M}$ *es llamada una imagen p-morfismo de* $\mathfrak{M}'$*. Imágenes p-morfismo son también llamadas reducciones.*

Definición 2.19. *Sea* $\{\mathfrak{F}_\mathrm{i}\}_{i\in I}$ *una familia de frames de Kripke, donde* $\mathfrak{F}_\mathrm{i} = \langle W_i, R_i\rangle$ *para todo* $i \in I$*.*
La Unión disjunta de $\{\mathfrak{M}_\mathrm{i}\}_{i\in I}$ *es el modelo* $\biguplus_{i\in I} \mathfrak{M}_\mathrm{i} := (\biguplus_{i\in I} \mathfrak{F}_\mathrm{i}, V)$ *tal que*

- $\biguplus_{i\in I} \mathfrak{F}_\mathrm{i}$ *es la unión disjunta de* $\mathfrak{F}_\mathrm{i}{}'s$*.*
- $V(p) = \bigcup_{i\in I} v_i(p)$*.*

Ahora formulamos las propiedades de conservación de verdad de estas operaciones.

Teorema 2.20.

1. *Si un modelo* $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{F}', V'\rangle$ *es un submodelo generado de un modelo* $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$*, entonces para toda* $\phi \in FORM$ *y* $v \in W'$ *tenemos*

$$\mathfrak{M}, v \models \phi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{M}', v \models \phi.$$

2. *Si un modelo* $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{F}', V'\rangle$ *es una imagen p-morfismo de un modelo* $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ *vía una función* f*, entonces para toda* $\phi \in FORM$ *y* $v \in W$ *tenemos:*

$$\mathfrak{M}, w \models \phi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{M}', v \models \phi.$$

3. *Sea* $\{\mathfrak{M}\}_{i\in I}$ *una familia de modelos de Kripke, donde* $\mathfrak{M}_i = \langle \mathfrak{F}_i, V_i\rangle$*, para todo* $i \in I$*. Sea* $\phi \in FORM$ *y* $w \in W_i$ *para algún* $i \in I$*. Entonces*

$$\biguplus_{i\in I} \mathfrak{M}_\mathrm{i}, w \models \phi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{M}_i, w \models \phi.$$

Demostración. Haremos inducción sobre la complejidad de la fórmula.

1. Sea $\phi \in FORM$ y $v \in W'$.

   a) Si $\phi = p$, átomo.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, v \models p \quad & \textit{si y sólo si} \quad v \in V(p) \textit{ y } v \in W' \\ & \textit{si y sólo si} \quad v \in V(p) \cap W' \\ & \textit{si y sólo si} \quad v \in V'(p) \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', v \models p. \end{aligned}$$

   Supongamos que el Teorema 2.20(1) se cumple, para fórmulas de complejidad menor que ϕ.

   b) $\phi = \gamma \wedge \psi$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, v \models \gamma \wedge \psi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}, v \models \gamma \textit{ y } \mathfrak{M}, v \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', v \models \gamma \textit{ y } \mathfrak{M}', v \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', v \models \gamma \wedge \psi. \end{aligned}$$

   c) Si $\phi = \gamma \to \psi$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, v \models \gamma \to \psi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \forall w \textit{ con } vRw, \textit{si } \mathfrak{M}, v \models \gamma, \\ & \qquad \textit{implica } \mathfrak{M}, v \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \forall w \textit{ con } vR'w, \textit{si } \mathfrak{M}', v \models \gamma, \\ & \qquad \textit{implica } \mathfrak{M}', v \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', v \models \gamma \to \psi. \end{aligned}$$

2. Sea $\phi \in FORM$ y $w \in W$.

   a) Si $\phi = p$ es átomo.
   Por definición se tiene $\mathfrak{M}, w \models p$ si y sólo si $\mathfrak{M}', f(w) \models p$.
   Supongamos que el Teorema 2.20 (2) se cumple, para fórmulas de complejidad menor que ϕ.

   b) $\phi = \gamma \wedge \psi$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \models \gamma \wedge \psi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}, w \models \gamma \textit{ y } \mathfrak{M}, w \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', f(w) \models \gamma y\, \mathfrak{M}', f(w) \models \psi \\ & \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', f(w) \models \gamma \wedge \psi. \end{aligned}$$

c) Si $\phi = \gamma \to \psi$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \models \gamma \to \psi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \forall v \, \textit{con} \; wRv, \textit{si} \; \mathfrak{M}, v \models \gamma \\
& \qquad\qquad\qquad \textit{implica} \; \mathfrak{M}, v \models \psi \\
& \textit{si y sólo si} \quad \forall f(v) \, \textit{con} \; f(w)Rf(v), \\
& \qquad\qquad\qquad \textit{si} \; \mathfrak{M}, f(v) \models \gamma \\
& \qquad\qquad\qquad \textit{implica} \; \mathfrak{M}, f(v) \models \psi \\
& \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}', f(w) \models \gamma \to \psi.
\end{aligned}$$

3. Sea $\phi \in FORM$ y $w \in W_i$ para algún $i \in I$.

   a) Si $\phi = p$ átomo.

$$\begin{aligned}
\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \models p \quad & \textit{si y sólo si} \quad w \in V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \\
& \textit{si y sólo si} \quad \textit{existe} \; i \in I : w \in V_i(p) \\
& \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}_i, w \models p.
\end{aligned}$$

   Supongamos que el Teorema 2.20 (3) se cumple para fórmulas de complejidad menor que ψ.

   b) Si $\phi = \gamma \wedge \psi$.

$$\begin{aligned}
\biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \models \gamma \wedge \psi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \models \gamma \; \textit{y} \; \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w \models \psi \\
& \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}_i, w \models \gamma \; \textit{y} \; \mathfrak{M}_i, w \models \psi \\
& \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{M}_i, w \models \gamma \wedge \psi.
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora formulamos las propiedades de conservación de verdad para frames.

Teorema 2.21.

1. *Si un frame $\mathfrak{F}'$ es un subframe generado de un frame $\mathfrak{F}$, entonces para todo $\phi \in FORM$ tenemos*

$$\mathfrak{F} \models \phi \; \textit{implica} \; \mathfrak{F}' \models \phi.$$

2. *Si un frame $\mathfrak{F}'$ es una imagen p-morfismo de un frame $\mathfrak{F}$ vía una función f, entonces para cada $\phi \in FORM$ tenemos*

$$\mathfrak{F} \models \phi \text{ implica } \mathfrak{F}' \models \phi.$$

3. *Sea $\{\mathfrak{F}_{i \in I}\}$ es una familia de frames de Kripke y sea $\phi \in FORM$. Entonces*

$$\biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_{\mathrm{i}i \in I} \models \phi \text{ si y sólo si } \mathfrak{F}_{\mathrm{i}} \models \phi \text{ para toda } i \in I.$$

Demostración. Sean $\phi \in FORM$ y $\mathfrak{F} \models \phi$. Queremos ver que $\mathfrak{F}' \models \phi$. Supongamos que $\mathfrak{F}' \not\models \phi$, entonces existe V valuación en $\mathfrak{F}'$ tal que $\mathfrak{M}' \not\models \phi$, se sigue del Teorema 2.20(1), que $\mathfrak{M} \not\models \phi$. Por otro lado como $\mathfrak{F} \models \phi$ para V valuación tenemos que $\mathfrak{M} \models \phi$, lo que es una contradicción. Los demás incisos se verifican de manera análoga. □

2.4. Álgebras de Heyting

En esta sección definimos álgebras de Heyting, formulamos la completez algebraica de lógica intermedia y precisamos la conexión entre álgebras de Heyting y frames de Kripke.

2.4.1. Lattices, lattices distributivas y álgebras de Heyting

La semántica de Kripke, que se analizan en la sección anterior, proporciona una semántica muy intuitiva para la lógica intermedia. Sin embargo, existen lógicas intermedias que no son Kripke completas. Así que no podemos restringir el estudio de las lógicas intermedias al estudio de sus semánticas de Kripke. En esta sección recordamos una semántica algebraica del CPI. Como veremos más adelante, una característica atractiva de la semántica algebraica es que toda lógica intermedia es completa con respecto a sus modelos algebraicos. Comenzaremos introduciendo algunas nociones básicas.

Definición 2.22. *Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es llamado lattice si cada subconjunto A de dos elementos tiene ínfimo y supremo.*

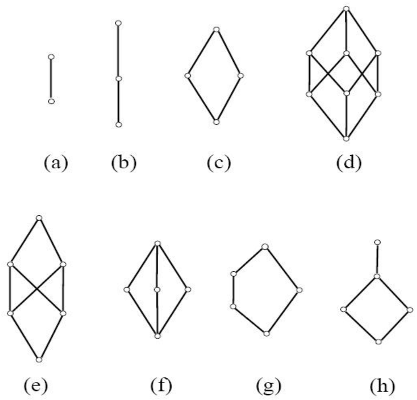

Figura 2.1: Ejemplo de Lattices

Definición 2.23. *Sea* $(A, \leq)$ *una lattice. Para* $a, b \in A$ *sea* $a \vee b := sup\{a, b\}$ *y* $a \wedge b := inf\{a, b\}$.

Supongamos que toda lattice es acotada, es decir, tiene un ínfimo y un supremo denotado por 0 y 1, respectivamente. La siguiente proposición muestra que las lattices también pueden definirse axiomáticamente.

Proposición 2.24. *Una estructura* $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$*, donde* $A \neq \emptyset$*,* $\vee$ *y* $\wedge$ *son operaciones binarias y* 0*,* 1 *son elementos de* A*, es una lattice acotada si y sólo si para* $a, b, c \in A$ *las siguientes se tienen:*

1. $a \vee a = a$, $\quad a \wedge a = a$,
2. $a \vee b = b \vee a$, $\quad a \wedge b = b \wedge a$,
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$,
4. $a \vee 0 = a$, $\quad a \wedge 1 = a$,
5. $a \vee (b \wedge a) = a$, $\quad a \wedge (b \vee a) = a$.

Demostración. Sea $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una lattice acotada. Por demostrar que se satisfacen los axiomas $1 - 5$.
Veamos que se satisface $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
Como $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es una lattice acotada, veamos que $sup\{a, (b \vee c)\} = sup\{(a \vee b), c\}$. Denotamos por $(b \vee c) = sup\{b, c\}$ y $(a \vee b) = \{a, b\}$, es decir, veamos que $sup\{a, sup\{b, c\}\} = sup\{sup\{a, b\}, c\}$. Si $z = sup\{a, sup\{b, c\}\}$ entonces $a \leq z$ y $sup\{b, c\} \leq z$ entonces $a \leq z$ y $b \leq z$ y $c \leq z$, así $sup\{a, b\} \leq z$ y $c \leq z$. Entonces $sup\{sup\{a, b\}, c\} \leq z$. Por otro lado si $k = sup\{sup\{a, b\}, c\}$ entonces $sup\{a, b\} \leq k$ y $c \leq k$ entonces $a \leq k$ y $b \leq k$

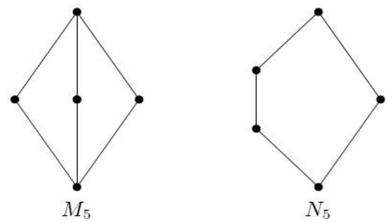

Figura 2.2: Lattices no distributivas M_5 y N_5

y $c \leq k$ entonces $a \leq k$ y $sup\{b, c\} \leq k$. Por lo tanto $sup\{a, sup\{b, c\}\} \leq k$. Así hemos demostrado que $sup\{a, sup\{b, c\}\} = sup\{sup\{a, b\}, c\}$. Los demás incisos son análogos. □

A partir de ahora denotamos por $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ a una lattice acotada.

Definición 2.25. *Decimos que una lattice $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es completa si para cada subconjunto $X \subseteq A$ existen $\bigvee X = sup(X)$ y $\bigwedge X = inf(X)$.*

Definición 2.26. *Una lattice acotada $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es llamada distributiva si satisface las leyes distributivas:*

- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Observación 2.27. *Notar que las lattices mostradas en la Figura 2.2. no son distributivas.*

El siguiente teorema, debido a Birkhoff, muestra que, en efecto estos son ejemplos típicos de lattices no distributivas. Para la prueba se puede referir a [Teorema 3.6 [5]].

Teorema 2.28. *L es una lattice distributiva si y sólo si M_5 o N_5 puede ser encajado dentro de L.*

Definición 2.29. *Una lattice distributiva $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ se dice que es una álgebra de Heyting, si para cada $a, b \in A$ existe un elemento $a \to b$ tal que para cada $c \in A$ tenemos:*

$$c \leq a \to b \text{ si y sólo si } a \wedge c \leq b.$$

Llamamos $\rightarrow$ una implicación de Heyting o simplemente una implicación. Para cada elemento a de un álgebra de Heyting, sea $\neg a := a \rightarrow 0$.

Observación 2.30. *Note que* $0 \rightarrow 0 = 1$. *Por lo tanto, podemos excluir* 1 *de nuestra sintonía de álgebras de Heyting. De ahora en adelante denotaremos por* $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *a un álgebra de Heyting.*

Similarmente al caso de lattice, las álgebras de Heyting pueden ser definidas de una forma axiomática.

Teorema 2.31. *Una lattice distributiva* $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *es un álgebra de Heyting si y sólo si existe una operación binaria* $\rightarrow$ *en* A *tal que para cada* $a, b, c \in A$:

i) $a \rightarrow a = 1$,

ii) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$,

iii) $b \wedge (a \rightarrow b) = b$,

iv) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ es una lattice distributiva y existe, $\rightarrow$, operación binaria en A que cumple i-iv). Deseamos verificar que $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Heyting. Sean $a, b \in A$ tal que existe $a \rightarrow b$ y sea $c \in A$ tal que $c \leq a \rightarrow b$, por demostrar que $a \wedge c \leq b$. Como $c \leq a \rightarrow b$ entonces $c \wedge a \leq (a \rightarrow b) \wedge a$ y $(a \rightarrow b) \wedge a = a \wedge b$ entonces, $c \wedge a \leq a \wedge b$ y $a \wedge b \leq b$, entonces $c \wedge a \leq b$.
Ahora sean $a, b \in A$ tales que existe $a \rightarrow b$ y sea $c \in A$ tal que $a \wedge c \leq b$. Por demostrar que $c \leq a \rightarrow b$. Primero demostraremos que para todo $a \in A$ la función $(a \rightarrow \cdot)$ es monótona. En efecto, como $b_1 \leq b_2$, tenemos que $b_1 \wedge b_2 = b_1$. Entonces por 4) $(a \rightarrow b_1) \wedge (a \rightarrow b_2) = a \rightarrow (b_1 \wedge b_2) = a \rightarrow b_1$. Por lo tanto $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$. Ahora supongamos $c \wedge a \leq b$. Por 3), $c = c \wedge (a \rightarrow c) \leq 1 \wedge (a \rightarrow c)$, por 1) y 4) $1 \wedge (a \rightarrow c) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow (a \wedge c)$. Finalmente, como $(a \rightarrow \cdot)$ es monótona, obtenemos que $a \rightarrow (a \wedge c) \leq a \rightarrow b$ y por lo tanto $c \leq a \rightarrow b$.
Ahora supongamos que $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Heyting. Por demostrar que existe una operación binaria tal que para todo $a, b, c \in A$ se cumple i-iv).
Veamos que $\rightarrow$, de la definición 2.29 anterior cumple i-iv).

1. Por demostrar que $a \to a = 1$. Como 1 es el elemento mayor en A, para cada $a \in A$ se cumple $a \leq 1$, en particular $a \to a \leq 1$. Por otro lado para cada $a \in A$ se tiene que $a \leq a$, entonces $a \wedge 1 \leq a$ entonces $1 \leq a \to a$.

2. Por demostrar que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$. Tenemos que para cada $a \in A$ se tiene que $a \leq a$ en particular $a \to b \leq a \to b$ entonces de la definición se sigue que $a \wedge (a \to b) \leq b$, por otra parte se tiene que $a \wedge (a \to b) \leq a$. Por lo tanto $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$. Además tenemos que $a \wedge b \leq b$ y de la definición se tiene que $b \leq a \to b$, de aquí se sigue que $a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$.
   Por lo tanto $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

3. Por demostrar que $b \wedge (a \to b) = b$. Tenemos que $a \wedge b \leq b$ y de la definición se sigue que $b \leq a \to b$. Luego, se tiene que $b \wedge (a \to b) = b$.

4. Por demostrar que $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$. Veamos que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a \to (b \wedge c) &\leq (a \to b) \wedge (a \to c) && (2.1) \\ (a \to b) \wedge (a \to c) &\leq a \to (b \wedge c) && (2.2) \end{aligned}$$

   Para (2.1) se tiene que $(b \wedge c) \leq b$ y como $(a \to \cdot)$ es monótona entonces $a \to (b \wedge c) \leq a \to b$. Análogamente se tiene que $a \to (b \wedge c) \leq a \to c$. Por lo tanto $a \to (b \wedge c) \leq (a \to b) \wedge (a \to c)$.
   Para (2.2) veamos que $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq (b \wedge c)$. Notemos que

$$\begin{aligned} ((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a &= ((a \to b) \wedge a) \wedge (a \to c) \\ &\leq ((a \to b) \wedge a) \\ &= a \wedge b \\ &\leq b \end{aligned}$$

   Por lo tanto se tiene $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq b$. Análogamente se tiene que $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq c$. Por lo tanto $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq (b \wedge c)$, es decir, $(a \to b) \wedge (a \to c) \wedge \leq a \to (b \wedge c)$.

□

Proposición 2.32.

1. *En toda álgebra de Heyting,* $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *se cumple que para cada* $a, b \in A$:
$$a \rightarrow b = \bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\}.$$

2. *Una lattices distributiva completa,* $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un álgebra de Heyting si y sólo si satisface la ley distributiva infinita*
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$$
para cada $a, b_i \in A, i \in I$.

Demostración.

1. Sean $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ un álgebra de Heyting y $a, b \in A$. Por demostrar $a \rightarrow b = \bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\}$. Tenemos que $a \leq a$ para cada $a \in A$, en particular $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$. Como $\mathfrak{U}$ es álgebra de Heyting, $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$. Por lo tanto $a \rightarrow b \leq \bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\}$. Por otro lado, si $c \in A$ es tal que $a \wedge c \leq b$, entonces $c \leq a \rightarrow b$. Así, $a \rightarrow b$ es una cota superior de $\{c \in A : a \wedge c \leq b\}$. Por lo tanto, $\bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\} \leq a \rightarrow b$.

2. Supongamos que $\mathfrak{U}$ es un álgebra de Heyting. Por demostrar
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$$
Para cada $i \in I$ tenemos $b_i \leq \bigvee_{i \in I} b_i$ y como para cada $a \in A$ ocurre que $a \leq a$, entonces, para cada $i \in I$ $a \wedge b_i \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i$. Por lo tanto
$$\bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i) \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i.$$
Ahora sea $c \in A$ tal que $\bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i) \leq c$. Entonces para cada $i \in I$ tenemos $a \wedge b_i \leq c$. Por lo tanto $b_i \leq a \rightarrow c$ para cada $i \in I$. Esto implica que $\bigvee_{i \in I} b_i \leq a \rightarrow c$, lo que nos da que $a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \leq c$. Por lo tanto, tomando $c = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$, obtenemos
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \leq \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i).$$

□

Ejemplo 2.33.

1. *Toda lattice distributiva es un álgebra de Heyting.*
   Se sigue de la Proposición anterior.

2. *Cada cadena, $\mathfrak{C}$, con elemento mínimo y máximo es un álgebra de Heyting y para cada $a, b \in \mathfrak{C}$ tenemos*

$$a \to b := \begin{cases} 1 & \textit{si } a \leq b, \\ b & \textit{si } a > b. \end{cases}$$

3. *Toda álgebra Booleana, $\mathfrak{B}$, es un álgebra de Heyting, donde para cada $a, b \in \mathfrak{B}$ tenemos*

$$a \to b := \neg a \vee b$$

Veamos que se cumplen i-iv) del Teorema 2.31. Sean $a, b \in \mathfrak{U}$.
Verifiquemos primero que $a \to a = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} a \to a &:= \neg a \vee a \\ &= \neg(\neg\neg a \wedge \neg a) \\ &= \neg(a \wedge \neg a) = \neg 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora veamos que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$. Observemos que

$$\begin{aligned} a \wedge (a \to b) &:= a \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

Veamos que $b \wedge (a \to b) = b$.

$$\begin{aligned} (a \to b) &:= b \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (b \wedge \neg a) \vee (b \wedge b) \\ &= (b \wedge \neg a) \vee b \end{aligned}$$

Hay tres posibles casos:
I) Si $b \wedge \neg a = b$, entonces $b \leq \neg a$, entonces $(b \wedge \neg a) \vee b = b \vee b = b$.

II) Si $b \wedge \neg a = \neg a$*, entonces* $\neg a \leq b$*, entonces* $(b \wedge \neg a) \vee b = \neg a \vee b = b$.
III) Si $b \wedge \neg a = 0$*, entonces* $(b \wedge \neg a) \vee b = 0 \vee b = b$.

Finalmente veamos que $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$*. Tenemos que*

$$\begin{aligned} a \to (b \wedge c) &:= \neg a \vee (b \wedge c) \\ &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\ &= (a \to b) \wedge (a \to c). \end{aligned}$$

La siguiente proposición caracteriza a aquellas álgebras de Heyting que son álgebras Booleanas.

Proposición 2.34. *[11] Sea* $\mathfrak{U} = (a, \vee, \wedge, \to, 0)$ *un álgebra de Heyting. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathfrak{U}$ *es un álgebra Booleana,*

2. *Para cada* $a \in A : a \vee \neg a = 1$*,*

3. *Para cada* $a \in A : \neg\neg a = a$*.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2]$ Supongamos que $\mathfrak{U}$ es álgebra booleana.
Por demostrar que $a \vee \neg a = 1$.
Como toda álgebra booleana es de Heyting, se define $a \Rightarrow b := \neg a \vee b$. Así para cada $a \in A : a \to a = 1$, entonces $1 = a \to a := a \vee \neg a$. Por lo tanto $a \vee \neg a = 1$.
$2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que para todo $a \in A : a \vee \neg a$.
Por demostrar que $\mathfrak{U}$ álgebra booleana.
Bastará ver que para todo $a \in A$ existe $\neg a$ tal que $(\neg a \vee a) \wedge b = b$, $(\neg a \wedge a) \vee b = b$. Sea $a \in A$, por hipótesis tenemos que $a \vee a = 1$ entonces $\neg a$ es el complemento de a. Entonces $(\neg a \vee a) \wedge b = b$. Por otro lado tenemos que para todo $a \in A : a \vee \neg a = 1$, con lo cual $\neg(a \vee \neg a) = \neg 1$, entonces $\neg a \wedge a = 0$, entonces $(\neg a \wedge a) \vee b = 0 \vee b = b$.
$1 \Rightarrow 3]$ Supongamos que $\mathfrak{U}$ es álgebra Booleana.
Por demostrar para cada $a \in A$ $\neg\neg a = a$.

Sea $a \in A$ entonces:

$$\begin{aligned} \neg\neg a &= \neg a \to 0 \\ &= (a \to 0) \to 0 \\ &= \neg(a \to 0) \vee 0 \\ &= (a \wedge \neg 0) \vee 0 \\ &= (a \wedge 1) \vee 0 \\ &= a \vee 0 \\ &= a \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$] Supongamos que $\neg\neg a = a$ para cada $a \in A$. Por demostrar $\mathfrak{U}$ álgebra booleana.
Sea $a \in A$, entonces:

$$\begin{aligned} a \vee \neg a &= \neg\neg a \vee \neg\neg\neg a \\ &= \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) \\ &= \neg(\neg a \wedge a) \\ &= \neg 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

2.5. Completez álgebraica de CPI y sus extensiones

En esta sección discutiremos la conexión entre lógica intuicionista y álgebras de Heyting.

Definición 2.35. *Sean $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \to, 0)$ y $\mathfrak{U}' = (A', \vee', \wedge', \to', 0')$ álgebras de Heyting, una función $h : A \to A'$ es llamada un homomorfismo de Heyting o simplemente homomorfismo si*

1. $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b)$,
2. $h(a \wedge b) = h(a) \wedge' h(b)$,
3. $h(a \to b) = h(a) \to' h(b)$,

4. $h(0) = 0'$.

Un álgebra de Heyting, $\mathfrak{U}'$, es llamada imagen homeomorfa de $\mathfrak{U}$, si existe una homomorfismo de Heyting de $\mathfrak{U}$ sobre $\mathfrak{U}'$.

Definición 2.36. *Sean* $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *y* $\mathfrak{U}' = (A', \vee', \wedge', \rightarrow', 0')$ *dos álgebras de Heyting. Decimos* $\mathfrak{U}'$ *es un subálgebra de* $\mathfrak{U}$ *si* $A' \subseteq A$*, las operaciones* $\vee', \wedge', \rightarrow'$ *son las restricciones de* $\vee, \wedge, \rightarrow$ *a* A' *y* $0' = 0$.

Definición 2.37.

1. *Sean* $\mathfrak{U}_1 = (A_1, \vee_1, \wedge_1, \rightarrow_1, 0_1)$ *y* $\mathfrak{U}_2 = (A_2, \vee_2, \wedge_2, \rightarrow_2, 0_2)$ *álgebras de Heyting. El producto de* $\mathfrak{U}_1$ *y* $\mathfrak{U}_2$ *es el álgebra*

$$\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 := (A_1 \times A_2, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$$

   donde:

   - $(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) := (a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2)$,
   - $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) := (a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2)$,
   - $(a_1, a_2) \rightarrow (b_1, b_2) := (a_1 \rightarrow_1 b_1, a_2 \rightarrow_2 b_2)$,
   - $0 := (0_1, 0_2)$.

2. *Más generalmente, sea* $\{\mathfrak{U}\}_{i \in I}$ *una familia de álgebras de Heyting, donde* $\mathfrak{U}_{\mathrm{i}} = (A_i, \vee_i, \wedge_i, \rightarrow_i, 0_i)$*. El producto de* $\{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ *es el álgebra de Heyting* $\prod_{i \in I} \mathfrak{U}_i := (\prod_{i \in I} A_i, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$*, donde para toda* $f_1, f_2 \in \prod_{i \in I} A_i$*, es decir, funciones* $f_1, f_2 : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ *tal que* $f_1(i), f_2(i) \in A_i$*, tenemos:*

   - $(f_1 \vee f_2)(i) := f_1(i) \vee_i f_2(i)$,
   - $(f_1 \wedge f_2)(i) := f_1(i) \wedge_i f_2(i)$,
   - $(f_1 \rightarrow f_2)(i) := f_1(i) \rightarrow_i f_2(i)$,
   - $0(i) := 0_i$.

2.6. Operadores de clase y Variedades

Un tema importante es el estudio de las clases de álgebra del mismo tipo cerrado bajo una o más construcciones

Introducimos las siguientes clases de operadores clases de funciones de álgebras a clases de álgebras (todos del mismo tipo).

Definición 2.38. *Sea K una clase de álgebras, diremos que:*

1. $A \in I(K)$ *si y sólo si A es isomorfo a algún miembro de* K.

2. $A \in S(K)$ *si y sólo si A es un subálgebra de algún miembro de* K.

3. $A \in H(K)$ *si y sólo si A es una imagen homomorfa de algún miembro de K.*

4. $A \in P(K)$ *si y sólo si A es un producto directo de una familia no vacía de álgebras de K.*

Observación 2.39.

1. *Si O_1 y O_2 son dos operadores en clases de álgebras escribimos O_1O_2 para la composición de dos operadores, $\leq$ denota el orden usual parcial, es decir, $O_1 \leq O_2$ si $O_1 \subseteq O_2$ para todas las clases de K.*

2. *Un operador es idempotente si $O^2 = O$.*

3. *Una clase K de álgebras es cerrada bajo un operador O, si $O(K) \subseteq K$.*

Lema 2.40. *Las siguientes desigualdades se cumplen: $SH \leq HS$, $PS \leq SP$ y $PH \leq HP$. Además H, S e IP son idempotentes.*

Demostración. Queremos ver que $SH \leq HS$. Sean K una clase de álgebras y $A \in SH(K)$. Como $A \in SH(K)$ tenemos que A es subálgebra de algún miembro de $H(K)$, digamos $C \in H(K)$, luego C es una imagen homomorfa de algún miembro de K; es decir, existe $\alpha : B \to C$ homomorfismo sobreyectivo, con lo cual $A \leq \alpha(B) = C$. Por lo tanto, $\alpha^{-1}(A) \leq B$ y como $\alpha(\alpha^{-1}(A)) = A$, tenemos que $A \in HS(K)$.
Ahora veamos que $PS \leq SP$. Sean K una clase de álgebras y $A \in PS(K)$. Dado que $A \in PS(K)$ se tiene que $A = \prod_{i \in I} A_i$ y para cada $i \in I$ existe B_i tal que $A_i \leq B_i$. Como $\prod_{i\in I} A_{i \in I} \leq \prod_{i \in I} B_{i\in I}$, tenemos que $A \in SP(K)$. De manera similar se prueba que $PH \leq HP$. Finalmente veamos que $H^2 = H$, esto se sigue del hecho de que composición de homomorfismos es un homomorfismo. Análogamente se tiene para S e IP. $\square$

Definición 2.41. *Una clase K de álgebras es llamada variedad si K es cerrado bajo subálgebras, imágenes homeomorfas, y productos directos.*

Definición 2.42. *Si K es una clase de álgebras del mismo tipo, sea*

$$V(K) = \bigcap\{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ variedad y } K \subseteq \mathfrak{F}\}.$$

Decimos que $V(K)$ es la variedad generada por K.

Observación 2.43. *Una variedad es finitamente generada si $V = V(K)$, para algún K de álgebras finita.*

Teorema 2.44. *[5],[6] (Tarski) Si V es una variedad entonces $V = HSP$.*

Demostración. Por ser V variedad se tiene que $HV = SV = IPV = V$ y además $I \leq V$, entonces se sigue que $HSP \leq HSPV = V$. Del Lema 2.40 vemos que $H(HSP) = HSP$. Por otro lado, $S(HSP) = (SH)(SP) \leq (HS)(SP) = HSP$, y

$$\begin{aligned} P(HSP) = (PH)(SP) &\leq (HP)(SP) = H(PS)P \\ &\leq H(SP)P = HSPP \\ &\leq HSIPIP = HSIP \\ &\leq HSHP \\ &\leq HHSP = HSP \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier K, $HSP(K)$ es cerrado bajo H,S,P. Como $V(K)$ es la clase más pequeña que contiene a K y es cerrado bajo H, Sy P tenemos que $V = HSP$. □

2.7. Términos, álgebras de Términos, y álgebras libres

Dada una álgebra A, hay muchas funciones que, además de las operaciones fundamentales, son compatibles con las congruencias en A y que preservan "subálgebras" de A. Las funciones más evidentes de este tipo son obtenidos por las composiciones de las operaciones fundamentales. Esto nos lleva a el estudio de los términos.

Definición 2.45. *Sea X es un conjunto de objetos llamados* variables. *Sea $\mathfrak{F}$ es un tipo de álgebras. El conjunto, $T(X)$, de términos de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X, es el conjunto mas pequeño tal que:*

1. *$X \cup \mathfrak{F}_0 \subseteq T(X)$, donde $\mathfrak{F}_0$ denota a los términos constantes.*

2. *Si $p_1, p_2, \ldots, p_n \in T(X)$ y $f \in \mathfrak{F}_n$, entonces la cadena $f(p_1 \ldots p_n) \in T(X)$.*

Para un símbolo funcional, "$\cdot$" usamos preferentemente $p_1 \cdot p_2$ en vez de $\cdot(p_1, p_2)$. Para $p \in T(X)$, usualmente escribimos p como $p(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables que ocurren en p están entre $x_1, \ldots, x_n$. Un término p es *n-ario*, si el número de variables que aparecen explícitamente en p es $\leq n$.

Ejemplo 2.46.

1. *Si $\mathfrak{F}$ consiste de un símbolo funcional binario simple $\cdot$,* y *$X = \{x, y, z\}$. Entonces $x, y, z, x \cdot y, x \cdot (y \cdot z)$* y *$(x \cdot y) \cdot z$ son algunos términos sobre X.*

2. *Si $\mathfrak{F}$ consiste de dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$,* y *$X = \{x, y, z\}$. Entonces $x, y, z, x \cdot (y + z)$* y *$(x \cdot y) + (x \cdot z)$ son algunos términos sobre X.*

Definición 2.47. *Dado un término, $p(x_1, \ldots, x_n)$, de tipo $\mathfrak{F}$ sobre algún conjunto X y dado un álgebra $\mathbf{A}$, de tipo $\mathfrak{F}$, definimos una función p^A : $\mathrm{A}^n \rightarrow A$ como sigue:*

1. *Si p es una variable x_i, entonces*

$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

para $a_1, \ldots, a_n \in A$, a la función p^A se le denomina la i-ésima *proyección.*

2. *Si p es de la forma $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, donde $f \in \mathfrak{F}_k$, entonces*

$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = f^A(p_1^A(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^A(a_1, \ldots a_n)).$$

En particular, si $p = f \in \mathfrak{F}$, entonces $p^A = f^A \cdot p^A$ es el término función en A correspondiente al término p.

Definición 2.48. *Dado $\mathfrak{F}$ un tipo de álgebras y X un conjunto de variables, si $T(X) \neq \emptyset$, entonces el álgebra de términos de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X, denotado por $\mathbf{T}(X)$, tiene como su universo el conjunto $T(X)$, y las operaciones fundamentales satisfacen*

$$f^{\mathbf{T}(X)} : \langle p_1, \ldots, p_n \rangle \mapsto f(p_1, \ldots, p_n)$$

para $f \in \mathfrak{F}_n$ y $p_i \in T(X)$, $1 \leq i \leq n$.

Definición 2.49. *Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y sea $\mathbf{U}(X)$ un tipo de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X. Si para cada $\mathbf{A} \in K$ y para toda función*

$$\alpha : X \to A$$

existe un homomorfismo

$$\beta : \mathbf{U}(X) \to A$$

que extiende a α (es decir, $\beta(x) = \alpha(x)$ para $x \in X$), decimos que $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal de funciones para K sobre X. X es llamado un conjunto de generadores libres de $\mathbf{U}(X)$ y $\mathbf{U}(X)$ se dice que es un generador libre para X.

Lema 2.50. *Supongamos que $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal de funciones para K sobre X. Entonces, si $\mathbf{A} \in K$ y $\alpha : X \to A$, existe una única extensión β de α tal que β es un homomorfismo de $\mathbf{U}(X)$ a $\mathbf{A}$.*

Demostración. Esto es consecuencia simplemente de verificar que un homomorfismo está completamente determinado por cómo se asigna un conjunto de generadores desde el dominio. $\square$

Dado cualquier clase de álgebras K, el álgebra de términos proporcionan álgebras que tienen la propiedad universal de funciones para K. Con el fin de encontrar álgebras con la propiedad universal de morfismo de K que dan una visión más clara en K vamos a introducir a las K-álgebras libres. Desafortunadamente no todas las clases K contienen álgebras con la propiedad universal de funciones para K. Sin embargo, vamos a ser capaces de demostrar que cualquier clase W que es cerrada bajo I, S y P, contiene sus K-álgebras libres. No obstante existe una dificultad razonable en proveer una descripción clara de K-álgebras libres para la mayoría K. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones de K-álgebras libres vienen directamente de la propiedad universal de morfismo del hecho de que existen en las variedades y su relación con las identidades en K. Un entendimiento propio de álgebras libres es esencial en nuestro desarrollo de álgebra. En nuestro caso las usamos para mostrar que las variedades son las mismas como clases definidas por ecuaciones (Birkhoff), y así dar caracterizaciones importantes de propiedades útiles de variedades.

Teorema 2.51. *Para cualquier tipo de álgebras $\mathfrak{F}$ y X cualquier conjunto de variables, donde $X \neq \emptyset$ si $\mathfrak{F}_0 = \emptyset$, el álgebra de términos, $\mathbf{T}(X)$, tiene la propiedad universal de funciones para la clase de todas las álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X.*

Demostración. Sea $\alpha : X \to A$, donde A es de tipo $\mathfrak{F}$. Definimos

$$\beta : T(X) \to A$$

recursivamente por

$$\beta x = \alpha x$$

para $x \in X$, y

$$\beta(f(p_1, \ldots, p_n)) = f^A(\beta p_1, \ldots, \beta p_n)$$

para $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ y $f \in \mathfrak{F}$. Entonces

$$\beta(p(x_1, \ldots, x_n)) = p^A(\alpha p_1, \ldots, \alpha x_n)$$

y β es el homomorfismo deseado que extiende a α.

□

Definición 2.52. *Supongamos que A y B son dos álgebras de mismo tipo $\mathfrak{F}$. Una función $\alpha : A \to B$ es llamada homomorfismo de A a B si*

$$\alpha f^A(a_1, \ldots, a_n) = f^B(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Definición 2.53. *Sea $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo, entonces el* Kernel *de α, denotado por $Ker(\alpha)$, es definido por*

$$Ker(\alpha) = \{\langle a, b\rangle \in A^2 : \alpha(a) = \alpha(b)\}.$$

2.8. Identidades, álgebras Libres y Teorema de Birkhoff

Definición 2.54. *Una identidad de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X es una expresión de la forma*

$$p \approx q$$

donde $p, q \in T(X)$. Sea $Id(X)$ el conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X.

Un álgebra A de tipo $\mathfrak{F}$ satisface una identidad

$$p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

(o la identidad es verdadera en A), abreviada por

$$A \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

o más brevemente

$$A \models p \approx q,$$

si para cada elección $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos

$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = q^A(a_1, \ldots, a_n).$$

Una clase K de álgebras satisface $p \approx q$, lo cual escribimos como

$$K \models p \approx q,$$

si para cada $A \in K$, $A \models p \approx q$.

Si Σ es un conjunto de identidades, decimos que K satisface Σ, lo cual se denota por

$$K \models \Sigma,$$

si para cada $p \approx q \in \Sigma$ se tiene $K \models p \approx q$.

Definición 2.55. *Dados K y X, sea*

$$Id_K(X) = \{p \approx q \in Id(X) : K \models p \approx q\}.$$

Usamos el símbolo $\not\models$ para denotar no satisface.

Podemos reformular está definición de satisfactibilidad usando la noción de homomorfismo.

Lema 2.56. *Si K es una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X, entonces $K \models p \approx q$ si y sólo si para cualquier $A \in K$ y $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$, homomorfismo, tenemos que $\alpha p = \alpha q$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Sean K una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X tal que $K \models p \approx q$.
Deseamos probar que para cada $A \in K$ y para $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$ homomorfismo, se cumple $\alpha p = \alpha q$.
Sea $p = p(x_1, \ldots, x_n)$, $q = q(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$, $A \in K$ y $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$. Como $K \models p \approx q$ y $A \in K$ se tiene que $A \models p \approx q$ entonces para cada elección $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos $p^A(a_1, \ldots, a_n) = q^A(a_1, \ldots, a_n)$ y dado α homomorfismo, entonces

$$\begin{array}{rcl} p^A(a_1, \ldots a_n) & = & q^A(a_1, \ldots a_n) \\ p^A(\alpha x_1, \ldots \alpha x_n) & = & q^A(\alpha x_1, \ldots \alpha x_n) \\ \alpha p^{T(X)}(x_1, \ldots x_n) & = & \alpha q^{T(X)}(x_1, \ldots x_n) \\ \alpha p & = & \alpha q \end{array}$$

$\Leftarrow$] Supongamos que para cada $A \in K$ y cada $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$ homomorfismo, se cumple que $\alpha p = \alpha q$.
Por demostrar que $K \models p \approx q$.
Sean $A \in K$ y $a_1 \ldots, a_n \in A$. Por la propiedad universal de funciones existe un homomorfismo $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$ tal que $\alpha x_i = a_i$, para $1 \leq i \leq n$. Lo anterior implica:

$$\begin{array}{rcl} p^A(a_1, \ldots, a_n) & = & p^A(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \\ & = & \alpha p \\ & = & \alpha q \\ & = & q^A(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \\ & = & q^A(a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

Así $K \models p \approx q$. □

Lo siguiente es ver que las clases básicas de operadores preservan identidades.

Lema 2.57. *Para cualquier clase K de tipo $\mathfrak{F}$, las clases*

$$K, I(K), S(K), P(K) \text{ y } V(K)$$

satisfacen las mismas identidades sobre cualquier conjunto de variables X.

Demostración. Veamos que K e $I(K)$ satisfacen las mismas identidades. Como $I \leq IS$, $I \leq H$ y $I \leq IP$, debemos tener que:

$$Id_K(X) \supseteq Id_{S(K)}(X),\ Id_{H(K)}(X),\ Id_{P(K)}(X).$$

Resta verificar

$$Id_K(X) \subseteq Id_{S(K)}(X),\ Id_{H(K)}(X),\ Id_{P(K)}(X).$$

Para el resto de la prueba supongamos que $K \models p(x_1, \ldots x_n) \approx q(x_1 \ldots, x_n)$.
Veamos primero que $Id_K(X) \subseteq Id_{S(K)}(X)$.
Sean $A \in Id_K(X)$, $B \leq A \in K$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$. Como $B \leq A$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$, entonces $b_1, \ldots, b_n \in A$. Tenemos $p^A(b_1, \ldots, b_n) = q^A(b_1, \ldots, b_n)$, entonces $p^B(b_1, \ldots, b_n) = q^B(b_1, \ldots, b_n)$. Así $B \models p \approx q$.
Por lo tanto $Id_K(X) = Id_{S(K)}(X)$.
Ahora veamos que $Id_{H(K)}(X) \subseteq Id_K(X)$. Supongamos que $\alpha : A \to B$ es un morfismo sobreyectivo con $A \in K$. Si $b_1, \ldots, b_n \in B$, elegimos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $\alpha(a_i) = b_i$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = q^A(a_1, \ldots, a_n)$$

y como α es morfismo, tenemos que

$$\alpha p^A(a_1, \ldots, a_n) = \alpha q^A(a_1, \ldots, a_n).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^B(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) &= \alpha q^B(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ p^B(b_1, \ldots, b_n) &= \alpha q^B(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Así $B \models p \approx q$. Por lo tanto $Id_K(X) = Id_{H(K)}(X)$.
Finalmente veamos que $Id_{P(K)}(X) \subseteq Id_K(X)$. Supongamos que $A_i \in K$ para $i \in I$. Entonces para $a_1, \ldots, a_n \in A = \prod_{i \in I} A_{i \in I}$ tenemos:

$$p^{A_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = q^{A_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i));$$

entonces

$$p^A(a_1, \ldots, a_n)(i) = q^A(a_1, \ldots, a_n)(i)$$

para $i \in I$, con lo cual

$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = q^A(a_1, \ldots, a_n)$$

Por lo tanto $Id_K(X) = Id_{P(K)}(X)$. Como $V = HSP$ por Teorema 2.44, la prueba está completa. $\square$

Ahora vamos a formular la conexión crucial entre K-álgebras libres e identidades.

Definición 2.58. *Sea A una álgebra de tipo $\mathfrak{F}$ y sea θ congruente en A, si θ satisface la siguiente: Propiedad de compatibilidad: (P.C.) Para cada función de aridad-n, $f \in \mathfrak{F}$, y elementos $a_i, b_i \in A$, si para cada $1 \leq i \leq n$, $a_i \theta b_i$, entonces*

$$f^A(a_1, \ldots, a_n)\theta f^A(b_1, \ldots, b_n).$$

En adelante, $Eq(A)$ es el conjunto de todas la relaciones de equivalencia en A.

Definición 2.59. *Sea $\theta \in Eq(A)$.*

1. *Para $a \in A$, se define la clase de equivalencia de un modulo θ como el conjunto.*
$$a/\theta = \{b \in A : \langle a, b\rangle \in \theta\}$$
2. *El conjunto cociente de A y θ se define como*
$$A/\theta = \{a/\theta : a \in A\}$$

Definición 2.60. *El conjunto de todas las congruencias en un álgebra $\mathbf{A}$ es denotado por $Con\mathbf{A}$. Sea θ es una congruencia en un álgebra A. Entonces el álgebra cociente de $\mathbf{A}$ por θ, denotada por $\mathbf{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones fundamentales satisfacen:*

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^A(a_1, \ldots, a_n)/\theta$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo funcional en $\mathfrak{F}$ de aridad n.

Definición 2.61. *La lattice de congruencias de $\mathbf{A}$, denotada por $\boldsymbol{ConA}$, es la lattice cuyo universo es $Con\mathbf{A}$.*

Definición 2.62. *Sea K una familia de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$. Dado un conjunto X, de variables, definimos la congruencia $\theta_K(X)$ en $\mathbf{T}(X)$ por*

$$\theta_K(X) = \bigcap \Phi_K(X),$$

donde

$$\Phi_K(X) = \{\phi \in \ Con\mathbf{T}(X) : \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(K)\};$$

y definimos $\mathbf{F}_K(\overline{X})$, la K-álgebra libre sobre X, por

$$\mathbf{F}_K(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_K(X)$$

donde

$$\overline{X} = X/\theta_K(X).$$

Para $x \in X$ escribimos $\overline{x}$ en vez de $x/\theta_K(X)$ y para $p = p(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$ escribimos $\overline{p}$ en lugar de $p^{\mathbf{F}_K(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Si X es finito, digamos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, escribimos a menudo $\mathbf{F}_K(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ en lugar de $\mathbf{F}_K(\overline{X})$. $F_K(\overline{X})$ se denomina el universo de $\mathbf{F}_K(\overline{X})$.

Definición 2.63. *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y sea $\theta \in Con\mathbf{A}$. La función natural $\nu_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es definida por $\nu_\theta(a) = a/\theta$.*

Teorema 2.64. *La función natural de un álgebra a un cociente del álgebra es un homomorfismo sobreyectivo.*

Para una demostración del siguiente Teorema véase [5].

Teorema 2.65. *(Birkhoff) Supongamos que $\mathbf{T}(X)$ existe. Entonces para $K \neq \emptyset$, $\boldsymbol{F}_K(\overline{X}) \in ISP(K)$. Por lo tanto, K es cerrado bajo I, S, P, en particular, si K es variedad entonces $\mathbf{F}_K(\overline{X}) \in K$.*

Teorema 2.66. *Dada una clase K de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y términos $p, q \in T(X)$ de tipo $\mathfrak{F}$. Las siguientes son equivalentes:*

1. $K \models p \approx q$
2. $\mathbf{F}_K(\overline{X}) \models p \approx q$
3. $\overline{p} = \overline{q}$ *en* $\mathbf{F}_K(\overline{X})$
4. $\langle p, q\rangle \in \theta_K(X)$

Demostración. Sean $\mathbf{F} = \mathbf{F}_K(\overline{X})$, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ y $q = q(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$ y sea $\nu : T(X) \to \mathbf{F}$ el morfismo natural.
$1 \Rightarrow 2$). Por el Teorema 2.66, $\mathbf{F} \in ISP(K) = K$. Por lo tanto, tenemos que $\mathbf{F} \models p \approx q$.
$2 \Rightarrow 3$). Supongamos que $\mathbf{F}(\overline{X}) \models p \approx q$ entonces

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{F}}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) &= q^{\mathbf{F}}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \\ \overline{p} &= \overline{q} \quad \text{en } \mathbf{F}. \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 4$). Supongamos que $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \overline{p} \\ &= p^{F_K(\overline{X})}(\overline{x_1} \ldots, \overline{x_n}) \\ &= q^{F_K(\overline{X})}(\overline{x_1} \ldots, \overline{x_n}) \\ &= \overline{q} \\ &= \nu(q) \end{aligned}$$

así, $\nu(p) = \nu(q)$, entonces $\langle p, q \rangle \in Ker\nu = \theta_K(X)$.
$4 \Rightarrow 1$). Supongamos que $\langle p, q \rangle \in \theta_K(X)$. Por demostrar que $K \models p \approx q$. Dados $A \in K$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, elegimos $\alpha : \mathbf{T}(X) \to A$ tal que $\alpha x_i = a_i$, para $1 \leq i \leq n$. Como $Ker\alpha \in \Phi_K(X)$, tenemos que

$$Ker\alpha \supseteq Ker\nu = \theta_K(X)$$

Se sigue que existe un morfismo $\beta : \mathbf{F} \to A$ tal que $\alpha = \beta \circ \nu$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \beta \circ \nu(p) \\ &= \beta \circ \nu(q) \\ &= \alpha(q). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.67. *Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y supongamos que $p, q \in T(X)$. Entonces para cualquier conjunto de variables, Y, con $|Y| \geq |X|$ tenemos:*

$$K \models p \approx q \textit{ si y sólo si } \mathbf{F}_K(\overline{Y}) \models p \approx q.$$

Demostración. Como $\mathbf{F}_K \in ISP(K)$, tenemos que $\mathbf{F_K}(\overline{Y}) \in K$ y por hipótesis $k \models p \approx q$, esto es para todo $A \in K : A \models p \approx q$. Luego, en particular $\mathbf{F}_K(\overline{Y}) \models p \approx q$. Para el recíproco supongamos que $\mathbf{F}_K(\overline{Y}) \models p \approx q$.
Queremos ver que $K \models p \approx q$. Elegimos $X_0 \supseteq X$ tal que $|X_0| = |Y|$ entonces $\mathbf{F}_K(\overline{X_0}) \cong \mathbf{F}_K(\overline{Y})$ y como $K \models p \approx q$ si y sólo si $\mathbf{F_K}(\overline{X_0}) \models p \approx q$, por el Teorema 2.40 se sigue que $K \models p \approx q$ si y sólo si $\mathbf{F}_K \models p \approx q$.

□

Corolario 2.68. *Supongamos que K, es una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y X es un conjunto de variables, entonces para cualquier conjunto infinito de variables Y.*

$$Id_K(X) = Id_{\mathbf{F}_K(\overline{Y})}(X).$$

Demostración. Para $p \approx q \in Id_K(X)$, digamos $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ y $q = q(x_1, \ldots, x_n)$, tenemos que $p, q \in T(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Como $|\{x_1, \ldots, x_n\}| \leq |Y|$, por el Corolario 2.67 tenemos que $K \models p \approx q$ *si y sólo si* $\mathbf{F}_K(\overline{Y}) \models p \approx q$. □

Las clases más populares de álgebras son definidas por identidades.

Definición 2.69. *Sea Σ un conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$ y sea $M(\Sigma)$ la clase de álgebras, $\mathbf{A}$, que satisface a Σ.*
Una clase K, de álgebras es una clase ecuacional si existe un conjunto de identidades, Σ, tal que $K = M(\Sigma)$. En este caso, decimos que K es definida o axiomatizada por Σ.

Lema 2.70. *Si V es una variedad y X es un conjunto infinito de variables, entonces $V = M(Id_V(X))$.*

Demostración. Sean V una variedad y X un conjunto infinito de variables. Por demostrar que $V = M(Id_V(X))$.
Sea $V' = M(Id_V(X))$. Del Lema 2.40 tenemos que V' es una variedad, pues tomando $M(Id_V(X)) = HSP(Id_X)$, se tiene lo deseado y como V es variedad tenemos que $V = HSP \subseteq V'$. Por lo tanto $V \subseteq V'$. Luego, vimos en el Lema 2.57 que subálgebras preservan identidades así tenemos que $Id_{V'}(X) \subseteq Id_V(X)$. Así, por Lema 2.40, tenemos que $\mathbf{F}_{V'}(\overline{X}) = \mathbf{F}_V(\overline{X})$.
Ahora sea Y un conjunto infinito de variables, por el Corolario 2.68, tenemos que

$$Id_{V'}(\overline{Y}) = Id_{\mathbf{F}_{V'}(\overline{X})}(\overline{Y}) = Id_{\mathbf{F_V(\overline{X})}}(\overline{Y}) = Id_V(\overline{Y})$$

Por Lema 2.40, tenemos que $\theta_{V'}(Y) = \theta_V(X)$ y usando $(4 \Rightarrow 2)$ de ese mismo lema, tenemos $\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y}) = \mathbf{F}_V(\overline{Y})$. Ahora para $A \in V'$ tenemos, para Y infinita se tiene que $A \in H(\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y}))$; es decir, A es una imagen homomorfa de algún miembro de $\mathbf{F}_{\mathbf{V'}}(\overline{\mathbf{Y}}) = \mathbf{F}_V(\overline{Y}) \in V$. Así $A \in V$, entonces se tiene $V' \subseteq V$. Por lo tanto $V' = V$. □

Ahora tenemos todos los antecedentes necesarios para probar el famoso teorema de Birkhoff.

Teorema 2.71. *[5],[6] (Birkhoff). K es una clase ecuacional si y sólo si K es una variedad.*

Demostración. Supongamos que K es una clase ecuacional. Por demostrar que $V = V(K)$. Como K es una clase ecuacional se tiene $K = M(\Sigma)$ entonces por Lema 2.40, se tiene que $V(K) \models \Sigma$; es decir, $V(K)$ es una clase de álgebra que satisface Σ. Por lo tanto $V(K) \subseteq M(\Sigma)$. Y por otro lado $K \subseteq V(K)$. Por lo tanto $K = V(K)$; es decir, V es una variedad. Para la otra implicación, basta aplicar el Lema 2.70. $\square$

Observación 2.72. *$\mathcal{HA}$ denota la clase de todas las álgebras de Heyting.*

Corolario 2.73. *$\mathcal{HA}$ es una variedad.*

Demostración. Por el Teorema 2.71, veamos que $\mathcal{HA}$ es una clase ecuacional. Consideremos a $\Sigma = Id_{\mathfrak{U}}(X)$.
Afirmación: $\mathcal{HA} = M(Id_{\mathfrak{U}}(X))$.
Sea $A \in M(Id_{\mathfrak{U}}(X))$, entonces A es una clase de álgebras tal que $A \models Id_{\mathfrak{U}}(X)$. Por lo tanto $A \in \mathcal{HA}$. Por otro lado, sea $A \in \mathcal{HA}$, entonces A es un álgebra de Heyting, entonces existe, $\rightarrow$, en A tal que para $a, b, c \in A$ se cumplen $1-4$) del Teorema 2.31. Entonces $A \models Id_{\mathfrak{U}}(X)$. Así $A \in M(Id_{\mathfrak{U}}(X))$. Por lo tanto $\mathcal{HA} = M(Id_{\mathfrak{U}}(X))$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de explicar la conexión entre el álgebra de Heyting y la lógica intuicionista además de un resultado algebraico de completitud para CPI.

Definición 2.74. *Sea $\mathfrak{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ un álgebra de Heyting. Una función v : PROP $\rightarrow A$, es llamada una* valuación *en el álgebra de Heyting $\mathfrak{U}$. Extendemos la valuación de* PROP *a la totalidad de* FORM *vía definición recursiva.*

1. $v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \vee v(\psi)$
2. $v(\phi \wedge \psi) = v(\phi) \wedge v(\psi)$
3. $v(\phi \rightarrow \psi) = v(\phi) \rightarrow v(\psi)$
4. $v(\perp) = 0$.

Observación 2.75. *Una fórmula ϕ es verdadera en $\mathfrak{U}$ bajo v si $v(\phi) = 1$; ϕ es válida en $\mathfrak{U}$ si es verdadera en toda valuación de $\mathfrak{U}$.*

Llamaremos $\mathcal{T}$ al conjunto de tesis del Cálculo Proposicional Intuicionista, es decir, $\mathcal{T}$ es el menor sistema deductivo que contiene al conjunto de axiomas de la Definición 2.1 y que es cerrado bajo la regla Modus Ponens.

Definición 2.76. *Definimos en $\mathcal{L}$ la siguiente relación de equivalencia:*

$$x \equiv y(mod\mathcal{T}) \text{ si y sólo si } x \leq y \text{ e } y \leq x,$$

Entonces tenemos que $\mathcal{L}/\equiv$ es un conjunto ordenado, donde están definidas cuatro operaciones dadas por:

$$\begin{aligned} \overline{x} \to \overline{y} &= \overline{x \to y} \\ \overline{x} \wedge \overline{y} &= \overline{x \wedge y} \\ \overline{x} \vee \overline{y} &= \overline{x \vee y} \\ \neg\overline{x} &= \overline{\neg x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

y la relación de orden

$$\overline{x} \leq \overline{y} \text{ si y sólo si } x \leq y$$

El sistema $(\mathcal{L}/\equiv, \to, \wedge, \vee, \neg)$ será llamado el álgebra de Lindenbaum-Tarski del Cálculo Proposicional Intuicionista, donde $\mathcal{T}$ es el último elemento del conjunto ordenado $(\mathcal{L}/\equiv, \leq)$.

Usando la construcción del álgebra de Lindenbaum-Tarski obtenemos la completitud algebraica de CPI.

Teorema 2.77. CPI $\vdash \phi$ *si y sólo si ϕ es válida en toda álgebra de Heyting.*

Demostración. Supongamos que $CPI \vdash \phi$, entonces ϕ es válida en toda álgebra de Heyting. Para verificar esto veamos que los axiomas de CPI son válidos. Presentamos dos casos:
Sea $(\mathfrak{U}) = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ un álgebra de Heyting.
1) $p \to (q \to p)$
Sean $a, b, c \in A$ $a \leq b \to a \equiv a \wedge b \leq a$.
2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
Sean $a, b, c \in A$

$$0 \leq (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \equiv [(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a \leq c$$

$$\begin{aligned}
(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a &= (a \to (b \to c) \wedge a) \wedge ((a \to b) \wedge a) \\
&= (a \wedge (b \to c)) \wedge (a \wedge b) \\
&= a \wedge ((b \to c) \wedge b) \\
&\leq (b \to c) \wedge b \\
&= b \\
&\leq c
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a \leq c$.

Para el recíproco supongamos ahora que ϕ es válida en toda álgebra de Heyting, por demostrar $CPI \vdash \phi$.
Supongamos que $CPI \nvdash \phi$. Sea $v' : \mathcal{G} \to \mathcal{L}/\equiv$ dada por $v'(p) = \overline{p}$, como $CPI \nvdash \phi$ entonces $\overline{p} \neq 1 \in \mathcal{L}/\equiv$, por hipótesis $\overline{\phi} = 1$, pues $\mathcal{L}/\equiv$ es álgebra de Heyting. □

También recordamos la completitud del cálculo proposicional clásico, para una prueba de este resultado véase [14],[19], [6], [18].

Teorema 2.78. CPC $\vdash \phi$ *si y solo si* ϕ *es válida en toda álgebra Booleana.*

Podemos extender la semántica algebraica de *CPI* de todas las lógicas intermedias. Con cada lógica intermedia, $CPI \subseteq L$, asociamos la clase $\mathbf{V}_K$ de álgebras de Heyting en donde todos los teoremas son validos. Por el Teorema 2.71, tenemos que $\mathbf{V}_L$ es variedad. Por ejemplo $\mathbf{V}_{CPI} = \mathcal{HA}$ y $\mathbf{V}_{CPC} = \mathcal{BA}$ donde $\mathcal{BA}$ denota la variedad de todas las álgebras booleanas.
Para toda variedad $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{HA}$, sea $L_{\mathbf{V}}$ la lógica de todas las fórmulas válidas en $\mathbf{V}$. Note que $L_{\mathcal{HA}} = CPI$ y $L_{\mathcal{BA}} = CPC$. La construcción Lindenbaum-Tarski muestra que toda lógica intermedia es completa con respecto a sus semánticas algebraicas.

2.9. Filtros en Álgebras de Heyting

Definición 2.79. *Sea* $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 1)$ *álgebra de Heyting. Un conjunto* $\nabla \subseteq A$ *es llamado filtro en* $\mathfrak{A}$ *si*

1. $\top \in \nabla$ *y*

2. *Para cualesquiera* $x, y \in A$*, si* $x \in \nabla$ *y* $x \to y \in \nabla$*, entonces* $y \in \nabla$*.*

Ejemplo 2.9.1. $\{\top\}$ *y* A *son filtros.*

Un filtro diferente de A es llamado *Propio.*

Definición 2.80. *Sea* ∇ *un filtro en un álgebra de Heyting* $\mathfrak{U}$. *Definimos una relación* $\equiv_\nabla$ *en* $\mathfrak{U}$ *tomando*

$$x \equiv_\nabla y \text{ si y sólo si } x \leftrightarrow y \in \nabla.$$

Definición 2.81. *Sean* $\mathfrak{U}$ *álgebra de Heyting con un universo* A *y* ∇ *un filtro en* $\mathfrak{U}$.

1. *Denotamos por* $||x||$ *la clase de equivalencia (con respecto a* $\equiv_\nabla$*) generada por un elemento* $x \in \mathfrak{U}$, *es decir,* $||x||_\nabla = \{y \in A : x \equiv_\nabla y\}$.

2. *Definimos el conjunto* $||A|| = \{||x||_\nabla : x \in A\}$ *de esta clase de operaciones* $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp$ *tomando para cualesquiera* $x, y \in A$,

$$||x||_\nabla \odot ||y||_\nabla = ||x \odot y||_\nabla, \text{ para } \odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\},$$

$$\perp = ||\perp||_\nabla.$$

El álgebra resultante $(||A||_\nabla, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp)$ es llamada el álgebra cociente de $\mathfrak{U}$ con respecto a el filtro ∇ y denotada por $\mathfrak{U}/\nabla$.

Definición 2.82. *Definimos una valuación* $\mathfrak{B}_L$ *en* $\mathfrak{U}_L$ *álgebra de Lindenbaum-Tarski, llamada la valuación estándar en* $\mathfrak{U}_L$, *por tomar para toda variable* p $\mathfrak{B}_L(p) = ||p||_L$.

Para la demostración de los siguientes resultado, ver [6].

Teorema 2.83.

1. *Supongamos que* f *es un morfismo de un álgebra de Heyting* $\mathfrak{U}$ *sobre* $\mathfrak{B}$ *y* $\nabla = f^{-1}(\top)$. *Entonces la función definida por* $g(f(x)) = \|x\|_\nabla$ *es un morfismo de* $\mathfrak{B}$ *sobre* $\mathfrak{U}/\nabla$.

2. *Supongamos que* ∇ *es un filtro en un álgebra de Heyting* $\mathfrak{U}$. *Entonces la función definida por* $f(x) = \|x\|_\nabla$ *es un morfismo de* $\mathfrak{U}$ *sobre* $\mathfrak{U}/\nabla$ *con* $f^{-1}(\top) = \nabla$.

Proposición 2.84. *Si una fórmula* φ *es válida en un álgebra de Heyting* $\mathfrak{U}$ *entonces* φ *es válida en todo imagen homomorfa de* $\mathfrak{U}$.

Teorema 2.85. *Toda extension* L *de IPC es robusta y completa con respecto a* $\mathbf{V}_L$.

Demostración. Supongamos que $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \nvdash \varphi$ consideramos el álgebra de Lindenbaum-Tarski $\mathfrak{U}_L$ con la valuación estándar $\mathfrak{B}_{\mathfrak{L}}$, Sea $X = \{\|\varphi\| : \varphi \in \Gamma\}$ y construimos $\nabla = \{y : \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma : \|\varphi_1\| \cap \ldots \cap \|\varphi_n\| \leq y\}$.

Afirmación 2.9.1. $\|\varphi\| \notin \nabla$.

En otro caso, existen $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tal que $\|\psi_1\|, \ldots, \|\psi_n\| \leq \|\varphi\|$, entonces $\|\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge \psi_n\| \leq \|\varphi\|$, entonces $\|\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge \psi_n \to \varphi\| \leq \|\top\|$, entonces $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \top$.

Afirmación 2.9.2. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{L}}(\varphi) \neq 1_{\mathfrak{U}_{\mathfrak{L}}/\nabla}$

Si $\mathfrak{B}_{\mathfrak{L}}(\varphi) = 1_{\mathfrak{U}_{\mathfrak{l}}/\nabla}$, entonces $\|\varphi\|_\nabla = \|\top\|_\nabla$, en particular $\|\varphi \leftrightarrow \top\| \in \nabla$ $\|(\varphi \to \top) \wedge (\top \to \varphi)\| \in \nabla$, luego $\|(\top \to \varphi)\| \in \nabla$, entonces $\|\top\| \to \|\varphi\| \in \nabla$ y $\|\top\| \in \nabla$, entonces $\|\varphi\| \in \nabla$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. $\square$

Capítulo 3

Lógica modal

3.1. Sintaxis

La lógica modal está diseñada para formalizar el comportamiento deductivo de la necesidad y posibilidad. Tiene los siguientes símbolos primitivos.

1. Una colección numerable de variables proposicionales ($p, q, p_1, q_1, \ldots$, etc)
2. Los conectivos Booleanos $\neg$ y $\wedge$
3. el conectivo Modal $\Box$ (necesidad)
4. Paréntesis (,)

La clase Φ de todas las fórmulas bien formadas (wff) es definido por las tres reglas de formación:

1. Cada variable es una formula bien formada
2. Si α es una formula bien formada, también lo son $\neg\alpha$ y $\Box\alpha$
3. Si α y β son formulas bien formadas, también lo es $\alpha \wedge \beta$

Introducimos las abreviaciones:

$$
\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &:= \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \\
\alpha \rightarrow \beta &:= \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\
\Diamond\alpha &:= \neg\Box\neg\alpha
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Definición 3.1. *Una lógica modal es un conjunto $\Lambda \subseteq \Phi$ satisface:*

1. *Λ contiene todas las tautologías del el cálculo proposicional clásico*

2. *Si α, $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Lambda$ entonces $\beta \in \Lambda$ (Modus Ponens)*

3. *Si $\alpha \in \Lambda$ y β se obtiene de α por reemplazar uniformemente alguna variable por otra formula bien formada, entonces $\beta \in \Lambda$ (Sustitución Uniforme)*

El símbolo K (para Kripke) denota la lógica axiomática por el sistema que tiene una base estándar para cálculo proposicional clásico (incluyendo MP y Sustitución Uniforme como reglas de inferencia) junto con el axioma K. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Y la regla de Necesidad De α inferir $\Box\alpha$.

3.2. Axiomas

Cuáles deben ser los axiomas de la lógica modal es algo muy debatido. Diferentes conjuntos de axiomas posiblemente permiten demostrar diferentes teoremas, por ende los axiomas que se eligen muchas veces dependen de los teoremas que se quieren demostrar. La siguiente es una lista de algunos de los axiomas más conocidos:

Nombre	Axioma
K	$\Box(\alpha \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\psi)$
T	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$
4	$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
5	$\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
B	$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

Diferentes combinaciones de axiomas dan lugar a diferentes sistemas de lógica modal. El sistema K (llamado así en honor a Saul Kripke) es el que menos axiomas utiliza: aparte de los axiomas de la lógica proposicional, el sistema K se sirve sólo del axioma K (no confundir el axioma con el sistema). Por esta misma razón, sin embargo, el sistema K también es el más débil de los sistemas, es decir, el que menos teoremas puede demostrar. Sistemas más fuertes se construyen agregando axiomas a K. A continuación hay una tabla con los nombres de los sistemas más conocidos y sus axiomas:

Sistema	Axiomas
K	K
T	K, T
S4	K, T, 4
S5	K, T, 5
B	K, T, B

3.3. Lógicas Normales

Definición 3.2. *Una lógica es Normal si y sólo si K es cerrado bajo necesidad.*

Si Γ es un conjunto de fórmulas bien formadas, $K\Gamma$ denota la lógica normal generada por agregar los miembros de Γ como axiomas adicionales a el sistema que genera K.

Definición 3.3. *Sea Λ una lógica modal, $\Gamma \subseteq \Phi$ y $\alpha \in \Phi$. Entonces*

1. *α es Λ-derivable de Γ, $\Gamma \vdash_\Lambda \alpha$ si y sólo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tal que $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \alpha) \in \Lambda$*

2. *Γ es Λ-consistente si existe al menos un wff no Λ-derivable de Γ, y es Λ-inconsistente en otro caso.*

3. *Γ es Λ-maximal si y sólo si Γ-consistente y para cada wff α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.*

Denotamos por W_Λ la clase de subconjunto Λ-maximales de Φ. Para cada $\alpha \in \Phi$, $\mid \alpha \mid_\Lambda = \{x \in W : \alpha \in x\}$ y para $\Gamma \subseteq \Phi$, $\mid \Gamma \mid_\Lambda = \bigcap\{\mid \alpha \mid_\Lambda \alpha \in \Gamma\} = \{x \in W_\Lambda : \Gamma \subseteq x\}$

3.4. Álgebras Modales y Frame de Kripke

Definición 3.4. *Una álgebra modal normal (AM) es una estructura.*

$$\mathcal{U} = \langle A, \cap, ', \boldsymbol{l} \rangle$$

donde:

1. *$\langle A, \cap, ' \rangle$ es un álgebra Booleana (AB), y*

2. *$\boldsymbol{l}$ es un operador unario sobre A que satisface: $\boldsymbol{l}(a \cap b) = \boldsymbol{l}a \cap \boldsymbol{l}b$, y $\boldsymbol{l}1 = 1$ donde 1 es un elemento unitario de $\mathcal{U}$*

Ahora inducimos para cada wff $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ con n variables inducimos una función polinomial n-aria $h_\alpha^{\mathfrak{U}}$ sobre $\mathfrak{U}$ que puede definirse inductivamente de la siguiente manera:

1. $h_{p_i}^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$

2. $h_{\neg\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n) = (h_\alpha^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n))'$

3. $h_{\alpha\wedge\beta}^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n) = h_\alpha^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n) \cap h_\beta^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n)$

4. $h_{\Box\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{l}(h_\alpha^{\mathcal{U}}(a_1, \ldots, a_n))$.

α es válida en $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \models \alpha$) si y sólo si $h_\alpha^{\mathcal{U}} = 1$ (es decir, $h_\alpha^{\mathcal{U}}$ toma el valor de 1 para todos los argumentos en su dominio). Una lógica Λ se dice que es determinada o característica por la clase $\mathcal{C}$ de algebras modales si y sólo si para cualquier $\alpha \in \Phi$, $\vdash_\Lambda \alpha$ si y sólo si $\mathcal{U} \models \alpha$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$.

El siguiente resultado establece que toda lógica se caracteriza por un álgebra simple.

Definición 3.5. *Si Λ es una lógica modal, entonces el álgebra Lindembaum de Λ es la estructura*

$$\mathcal{U}_\Lambda = \langle A_\Lambda, \cap, ', \boldsymbol{l} \rangle$$

definida como sigue:

1. *$A_\Lambda = \{\|\alpha\|_\Lambda : \alpha \in \Phi\}$, donde $\|\alpha\|_\Lambda = \{\beta : \alpha =_\Lambda \beta\}$ y $\alpha =_\Lambda \beta$ si y sólo si $\vdash_\Lambda \alpha \leftrightarrow \beta$*

2. *$\|\alpha\|'_\Lambda = \|\neg\alpha\|_\Lambda$*

3. *$\boldsymbol{l}\|\alpha\|_\Lambda) = \|\Box\alpha\|_\Lambda$*

4. *$\|\alpha\|_\Lambda \cap \|\beta\|_\beta = \|\alpha \wedge \beta\|_\Lambda$.*

Una interpretación para un lenguaje modal es un conjunto ordenado de dos elementos, definido de la siguiente manera:

Definición 3.6. *Una frame de Kripke (K-frame) es una estructura* $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$*, donde* W *es un conjunto no vacío, denominado el conjunto base o portador de* $\mathfrak{F}$*, y* R *una relación en* W*.*

Definición 3.7. *Una valuación* V *en* $\mathfrak{F}$ *es una función que asocia cada variable* p *un subconjunto* $V(p)$ *de* W*. El dominio de* V *se extiende a todo* Φ *por las siguientes:*

1. $x \in V(\alpha \wedge \beta)$ *si y sólo si* $x \in V(\alpha)$ *y* $x \in V(\beta)$*.*

2. $x \in V(\neg\alpha)$ *si y sólo si* $x \notin V(\alpha)$*.*

3. $x \in V(\Box\alpha)$ *si y sólo si, para todo* y*, si* xRy *entonces* $y \in V(\alpha)$*.*

4. $x \in V(\Diamond\alpha)$ *si y sólo si, existe* y *tal que* xRy y $y \in V(\alpha)$*.*

Definición 3.8.

1. α *es válida en* $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{F} \models \alpha)$ *si y sólo si* $V(\alpha) = W$*, para toda valuación* V *en* $\mathfrak{F}$*.*

2. α *es válida en un clase* $\mathcal{C}$ *de frames* $\mathcal{C} \models \alpha$ *para todo* $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}$*.*

3. $\mathcal{C}$ *determina o caracteriza una lógica* Λ *si y sólo si para todo* $\alpha \in \Phi$*,* $\models_\Lambda \alpha$ *si y sólo si* $\mathcal{C} \models \alpha$*.*

Intuitivamente tenemos que W es el conjunto de mundos posibles y que x y y están relacionados (xRy) si y sólo si x es un mundo accesible a y.

Definición 3.9. *Si* Λ *es una lógica modal normal, el* K*-frame canónico para* Λ *es la estructura*

$$\mathfrak{F}^K_\Lambda = \langle W_\Lambda, R_\Lambda \rangle,$$

donde:

1. W_Λ *es la clase de subconjuntos* Λ *maximales de* Φ*, y*

2. xRy *si y sólo si* $\{A \in \Phi : \Box A \in x\} \subseteq y$ *si y sólo si* $\{\Diamond A : A \in y\} \subseteq x$

La valuación canónica V_Λ es definida por $V_\Lambda(\alpha) = \mid \alpha \mid_\Lambda$.

Teorema 3.10. *Para todo* $\alpha \in \Phi$*,* $V_\Lambda(\alpha) = \mid \alpha \mid_\Lambda$*.*

Definición 3.11. *Un modelo de Kripke para una lógica modal es un par* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$*, donde:*

1. $\mathfrak{F} = (W, R)$,

2. V *es una valuación en* $\mathfrak{F}$

Sea $x \in \mathfrak{F}$*. Por inducción en la construcción de* φ *definimos una relacion de verdad* $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$*, "*$\varphi$ *es verdadera en el mundo* x *en el modelo* $\mathfrak{M}$*", tomando:*

1. $(\mathfrak{M}, x) \models p$ *si y sólo si* $x \in V(p)$*, para cada* p *variable;*

2. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \wedge \chi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ *y* $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$*;*

3. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \vee \chi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ *o* $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$*;*

4. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \rightarrow \chi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ *implica* $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$*;*

5. $(\mathfrak{M}, x) \not\models \bot$*;*

6. $\mathfrak{M} \models \Box\varphi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ *para todo* $y \in W$ *tal que* xRy*, y así*

7. $\mathfrak{M}, x \models \neg\varphi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, x) \not\models \varphi$*.*

8. $\mathfrak{M} \models \Diamond\varphi$ *si y sólo si* $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ *existe* $y \in W$ *tal que* xRy*.*

Si $(\mathfrak{M}, x) \not\models \varphi$ entonces decimos que φ es falsa en el mundo $x \in \mathfrak{M}$.

Definición 3.12. *Dos modelos (algebraicos) son semánticamente equivalentes si ellos válidan precisamente las mismas fórmulas modales.*

Definición 3.13. *Sea* $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ *un frame y* $x, y \in W$*. Decimos que* y *es accesible de* x *por* $n > 0$ *pasos y escribimos* $xR^n y$ *o* $y \in x \uparrow^n$ *o* $x \in \downarrow_n$ *si existen puntos (no necesariamente distintos)* $z_1, \ldots, z_{n-1} \in W$*, tales que* $xRz_1Rz_2 \ldots Rz_{n-1}Ry$*.*
Entenderemos xR^0y*,* $y \in x \uparrow^0$ y $x \in y \downarrow_0$ *como* $x = y$*.*

Observación 3.14.

1. *Si* R *es transitiva entonces* $xR^n y$ *implica* xRy*, para* $n > 0$*.*

2. *Si* R *es reflexiva entonces el inverso también se tiene.*

Definición 3.15.

1. *Un punto x es llamado reflexivo si xRx, para tal x, $xR^n x$ se cumple para $n > 0$.*

2. *Un frame es reflexivo si todos los puntos son reflexivos.*

Definición 3.16. *Sea $\mathfrak{F}$ frame transitivo.*
Definimos en W una relación de equivalencia $\sim$ de la siguiente manera: Para cualesquiera $x, y \in W$

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } xRy \text{ y } yRx.$$

Las clases de equivalencia respecto a $\sim$ son llamados *cluster*. Los cluster que contienen un punto x se denotarán por $\mathcal{C}(x)$.

Definición 3.17. *El frame cociente de un frame transitivo con respecto a $\sim$, es el frame $\langle W/\sim, R/\sim\rangle$, donde:*

1. *$W/\sim = \{\mathcal{C}(x) : x \in W\}$ y*

2. *$\mathcal{C}(x)R/_{\sim}\mathcal{C}(y)$ si y sólo si xRy.*

Es llamado el esqueleto de $\mathfrak{F}$ y lo denotamos por $\rho\mathfrak{F} = \langle \rho W, \rho R\rangle$.

Observación 3.18.

1. *Si R es reflexivo entonces $\rho\mathfrak{F}$ es un orden parcial por $\rho\mathfrak{F}$.*

2. *Una relación binaria reflexiva y transitiva es llamada casi-orden.*

Distinguimos 2 tipos de Cluster.

1. Un *cluster simple* consiste de un punto singular reflexivo.

2. Un *cluster propio* contiene al menos dos puntos reflexivos.

3.5. Frames de Primer Orden

Las conexiones entre álgebras modales y frames de Kripke fueron estudiados por Lemmon en [12], donde se muestra que cada K-frame tiene un álgebra modal semánticamente equivalente.

Definición 3.19. *Si* $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ *es un* K*-frame entonces* $\mathfrak{F}^+$ *es el álgebra modal* $\langle 2^W, \cap, \setminus, \boldsymbol{l}_R\rangle$*, donde:*

1. 2^W *es el conjunto potencia de* W
2. $\cap$ *intersección,* $\setminus$ *complementación.*
3. *Si* $S \subseteq W$*,* $\boldsymbol{l}_R(S) = \{x \in W : \forall y(xRy \to y \in S)\}$*.*

Teorema 3.20. *Sea* $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \in \Phi$*. Entonces para toda valuación* V *en* $\mathfrak{F}$*,* $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = V(\alpha)$*.*

Demostración. Por inducción sobre la complejidad de la fórmula α.

1. Si $\alpha = p_i$.
   $h_{p_i}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = V(p_i)$.

   Supongamos que el Teorema se cumple para fórmulas de complejidad menor que α.

2. Si $\alpha = \neg\beta$.
   Por demostrar que $h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = V(\neg\beta)$.
   $x \in h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(P_n)) = (h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)))'$, si y sólo si $x \notin h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = V(\beta)$, si y sólo si $x \notin V(\beta)$. Por lo tanto $h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(P_n)) = V(\neg\beta)$.

3. Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$.
   Por demostrar que $h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1, \ldots, V(p_n)) = V(\beta \wedge \gamma)$.
   $x \in h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n))$ si y sólo si $x \in h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) \wedge x \in h_\gamma^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n))$, si y sólo si $x \in V(\beta) \wedge x \in V(\gamma)$ si y sólo si $x \in V(\beta \wedge \gamma)$. Por lo tanto $h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1, \ldots, V(p_n)) = V(\beta \wedge \gamma)$.

4. Si $\alpha = \Box\beta$.
   Por demostrar que $h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = V(\Box\beta)$. Por Definición 3.4 tenemos que $h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)) = \boldsymbol{l}(h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \ldots, V(p_n)))$. Así

verifiquemos que $\boldsymbol{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1),\ldots,V(p_n))) = V(\Box\beta)$.
$x \in \boldsymbol{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1),\ldots,V(p_n)))$ si y sólo si, para toda y, si xRy implica que $y \in \boldsymbol{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1),\ldots,V(p_n))) = V(\beta)$, es decir, $y \in V(\beta)$. Por lo tanto, para todo y, si xRy entonces $y \in V(\beta)$, esto es por Definición 3.6 que $x \in V(\beta)$.

□

Corolario 3.21. *$\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{F} \models \alpha$, esto es que para toda V valuación en $\mathfrak{F}$ se tiene que $V(\alpha) = 1$, entonces por Teorema 3.20, se cumple que $1 = V(\alpha) = h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1),\ldots,V(p_n))$. Por lo tanto $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1),\ldots,V(p_n)) = 1$, esto es, $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. De manera análoga se tiene el recíproco. □

Definición 3.22. *Un frame (modal normal) es una estructura*

$$\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle, \text{ donde:}$$

1. *$\langle W, R\rangle$ es un K-frame, y*

2. *P es una colección no vacía de subconjuntos de W que es cerrado bajo $\cap, \setminus$ y $\boldsymbol{l}_R$.*
   Una valuación V en un frame $\mathfrak{F}$ es una función como Definición en 3.6 con el agregado:

3. *$V(p) \in P$, para toda variable p. Condición 2. garantiza que*

4. *$V(\alpha) \in P$, para todo $\alpha \in \Phi$*

Definición 3.23. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle$ es un frame, entones $\mathfrak{F}^+$ es la estructura $\langle P, \cap, \setminus, \boldsymbol{l}\ \rangle$, es una álgebra modal en virtud de 2 de la definición anterior.*
Un frame $\mathfrak{F}$ se dice que es completo si $P = 2^W$.

3.6. Subframes

Teorema 3.24. *Sean $\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle$ y $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, P_1\rangle$ son frames con $P_1 \subseteq P$. Entonces $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}_1 \models \alpha$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle$ y $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, P_1\rangle$ frames con $P_1 \subseteq P$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$. Como P es una colección no vacía de subconjuntos de W que es cerrado bajo $\cap, \setminus$, $\boldsymbol{l}_R$, entonces $\mathfrak{F}_1^+$ es una sub-AM de $\mathfrak{F}^+$, entonces $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+} = 1$ idénticamente sólo si $h_\alpha^{\mathfrak{F}_1^+} = 1$, es decir, $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}_1^+ \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. Por otro lado tenemos que $\mathfrak{F}_1 \models \alpha$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. □

Definición 3.25. *Sea R una relación en W. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la relación $R^k \subseteq W \times W$ por el esquema inductivo.*

1. *xR^0y si y sólo si $x = y$*
2. *$xR^{k+1}y$ si y sólo si existe $z\,(xRz \wedge zR^ky)$.*

Definición 3.26. *Si $R \subseteq W^2$, entonces $W' \subseteq W$ es R-hereditaria si y sólo si $x \in W'$ y xRy implican $y \in W'$.*

Proposición 3.27. *La intersección de una clase de conjuntos R-hereditarios es R-hereditario.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{W' \subseteq W : W' \text{ es } R-\text{hereditario }, R \subseteq W^2\}$. Queremos ver que $\bigcap\mathcal{C}$ es R-hereditario, $R \subseteq W \times W$. Sea $x \in \bigcap\mathcal{C}$ y xRy. Por demostrar que $y \in \bigcap\mathcal{C}$. Como $x \in \bigcap\mathcal{C}$, entonces para toda $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $x \in C$ y como C es R-hereditario, entonces para toda $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $y \in C$. Por lo tanto $y \in \bigcap\mathcal{C}$. □

De esta forma, para cualquier $W' \subseteq W$ hay un conjunto más pequeño $W_{R'}$, el cual es$R$-hereditario y contiene a W'.

Teorema 3.28.

$$W_{R'} = \{y : \exists x \exists k (x \in W' \ y \ xR^ky)\}.$$

Demostración. $\supseteq$] Sean $\mathcal{C} = \{y : \exists x \exists k(x \in W' \text{ y } xR^ky)\}$, $z \in \mathcal{C}$ y zRw. Por demostrar que $w \in \mathcal{C}$. Como $z \in \mathcal{C}$, entonces existen x, k tales que $w \in w'$ y xR^kz y como zRw, entonces $xR^{k+1}w$. Por lo tanto $w \in \mathcal{C}$. Así $\mathcal{C}$ es R-hereditario y como $W' \subseteq \mathcal{C}$, entonces $W_R' \subseteq \mathcal{C}$.
$\subseteq$] Sea $W' = \{D \subseteq W : D \text{ es } R\text{-hereditario } \text{ y } W' \subseteq D\}$. Veamos que $\mathcal{C} \subseteq W_R'$. Sea $D \subseteq W$ R-hereditario tal que $W' \subseteq D$, veamos que $\mathcal{C} \subseteq D$. Sea $y \in \mathcal{C}$, entonces existen $x \in W'$ y $k \geq 0$ tal que xR^Ky y $xRzRz_2 \dots Rz_{k-1}Ry$. Por lo tanto $y \in D$, así $\mathcal{C} \subseteq D$. Por lo tanto $\mathcal{C} \subseteq W_R'$. □

Definición 3.29. *Si* $\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle$ *y* $\mathfrak{F}' = \langle W', R', P'\rangle$ *son frames, entonces* $\mathfrak{F}'$ *es un subframe de* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$) *si cumple:*

1. W' *es un subconjunto R-hereditario de* W,
2. $R' = R \cap (W' \times W')$,
3. $P' = \{W' \cap S : S \in P\}$.

Teorema 3.30. *Si* W' *es un subconjunto R-hereditario de* W *y* $R' = R \cap (W' \times W')$, *entonces:*

1. $W' \setminus (W' \cap S) = W' \cap (W \setminus S)$,
2. $(W' \cap S) \cap (W' \cap S_1) = W' \cap (S \cap S_1)$,
3. $m_{R'}(W' \cap S) = W' \cap m_R(S)$,
4. $\boldsymbol{l}_{R'}(W' \cap S) = W' \cap \boldsymbol{l}_R(S)$.

Demostración.

1. Sea $a \in W' \setminus (W' \cap S)$ entonces $a \in W' \wedge a \notin W' \cap S$, es decir $a \in W \setminus (W' \setminus S) = (W \setminus W') \cup (W \setminus S)$, entonces $a \in W \setminus W' \vee a \in W \setminus S$ implicamos que $a \in W' \wedge a \in W \setminus S$. Por lo tanto $a \in W' \cap (W \setminus S)$.

2. $x \in (W' \cap S) \cap (W' \cap S_1)$ si y sólo si $x \in (W' \cap S) \wedge x \in (W' \cap S_1)$ si y sólo si $(x \in W' \wedge x \in S) \wedge (x \in W' \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $(x \in W' \wedge x \in W') \wedge (x \in S \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $x \in W' \wedge (x \in S \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $x \in W' \cap (x \in S \cap x \in S_1)$

3. Sea $x \in m_{R'}(W' \cap S)$, entonces $x \in W'$ y $xR'y$ para algún $y \in W' \cap S$, entonces xRy y como $y \in S$, se cumple que $x \in m_R(S)$. Por lo tanto $x \in W' \cap m_{R'}(S)$. Por otro lado, sea $x \in W' \cap m_R(S)$, entonces $x \in W'$ y $x \in m_R(S)$, entonces xRy para algún $y \in S$ y como w' es R-hereditario entonces $y \in W'$. Por lo tanto $x \in m_{R'}(W' \cap S)$.

4. Sea $x \in \boldsymbol{l}_{R'}(W' \cap S)$, entonces $x \in W'$ y para todo y se tiene que $xR'y$, tenemos que $y \in W' \cap S$ entonces xRy pues $R' = R \cap (W' \times W')$, así $x \in W' \cap \boldsymbol{l}_R(S)$. Por otro lado sea $x \in W' \cap \boldsymbol{l}_R(S)$, entonces $x \in W'$ y $x \in \boldsymbol{l}_R(S)$, entonces para toda y se tiene que xRy implica que $y \in S$ y como W' es R-hereditario se tiene que $y \in W'$, así $xR'y$ y $y \in W' \cap S$, es decir $x \in \boldsymbol{l}_{R'}(W' \cap S)$.

$\square$

Corolario 3.31. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ es un frame y $W' \subseteq W$ es R-hereditario, entonces $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W', R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de $\mathfrak{F}$, donde:*

1. $R' = R \cap (W' \times W')$ *y*
2. $P_{W'} = \{W' \cap S : S \in P\}$

Demostración. Sea $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ un frame y $W' \subseteq W$ tal que W' es R-hereditario. Por demostrar que $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W', R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de $\mathfrak{F}$, donde $R' = R \cap (W' \times W')$ y $P_{W'} = \{W' \cap S : S \in P\}$. Veamos que se satisface la Definición 3.29. El único requisito que no se satisface inmediatamente es que F_W es un frame, es decir, P_W se cerrado bajo $\cap, \setminus, y\ \boldsymbol{l}_R$, pero esto se sigue de Teorema 3.30. $\square$

Corolario 3.32. *Sea $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ es una colección de frames de $\mathfrak{F}$, y $W' = \bigcap_{i \in I} W_i$. Entonces si $W' \neq \emptyset$, $\mathfrak{F}_{W'}$ es un subframe de $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Veamos que W' es R-hereditario. Sea $x \in W'$ y xRy. Por demostrar que $y \in W'$. Como $x \in W' = \cap_{i \in I} W_i$, entonces para todo $i \in I$ $x \in W_i$ y como para cada $i \in I$ W_i es R-hereditario y además xRy se tiene que para cada $i \in I$ $y \in W_i$. Por lo tanto $y \in \cap_{i \in I} W_i$, así W' es R-hereditario. En virtud del Corolario 3.31, se tiene que $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W' = \cap_{i \in I} W_i, R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de $\mathfrak{F}$. $\square$

El corolario 3.32 afirma en efecto que la intersección de subframes es un subframe, por lo que cada $W' \subseteq W$ tiene un subframe mas pequeño de $\mathfrak{F}$ que lo contiene. Este subframe es $\mathfrak{F}_{W'_R}$ y es llamado el subframe de $\mathfrak{F}$ generado por W'. Si $W' = \{x\}$ entonces $\mathfrak{F}_{W'_R}$ lo escribiremos como $\mathfrak{F}_x$, el subframe generado por x.

Teorema 3.33. *Si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \in \Phi$, y $S_1, \ldots, S_n \in P$,*

$$h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) = W' \cap h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n).$$

Demostración. Haremos inducción sobre la complejidad de α.

1. Si $\alpha = p_i$, $i = 0, 1, \ldots$ (átomo).

$$h_{p_i}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) \ = \ W' \cap S_i$$

Por otro lado,

$$W' \cap h_{p_i}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) \;\; = \;\; W' \cap S_i.$$

Por lo tanto $h_{p_i}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) = W' \cap h_{p_i}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)$.
Supongamos ahora que el teorema se cumple para formulas de complejidad menor que α.

2. Si $\alpha = \neg\beta$.

$$\begin{aligned} h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) &= [h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)]' \\ &= [W' \cap h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)]' \\ &= [W' \setminus W'] \cup [W' \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)] \\ &= W' \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) \\ &= W' \cap [h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)]' \\ &= W' \cap h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n). \end{aligned}$$

3. Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$.

$$\begin{aligned} h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) &= [h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)] \cap \\ &\quad\; [h_{\gamma}^{\mathcal{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)] \\ &= [W' \cap h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)] \cap \\ &\quad\; [W' \cap h_{\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)] \\ &= W' \cap [h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)] \cap \\ &\quad\; [h_{\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)] \\ &= W' \cap h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n). \end{aligned}$$

4. Si $\alpha = \Box\beta$
Por demostrar que $h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, S_n) = W' \cap h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)$, por la Definición 3.4 es equivalente a probar lo siguiente:

$$\boldsymbol{l}_{R'}[h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)] = W' \cap \boldsymbol{l}_R(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)).$$

Sea $x \in \boldsymbol{l}_{R'}[h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)]$, entonces $x \in W'$ y $xR'y$ implica que $y \in h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)$ y por hipótesis esto ultimo es igual

a $W' \cap h_\beta^{\mathfrak{F}'}(S_1, \ldots S_n)$, entonces $y \in W'$ y $y \in h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)$ y como $xR'y$ se tiene que xRy. Por lo tanto $x \in W' \cap \boldsymbol{l}_R(h_\beta^{\mathfrak{F}^+})(S_1, \ldots, S_n)$.
Por otro lado sea $x \in W' \cap \boldsymbol{l}_R(h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n))$, entonces $x \in W'$ y $x \in \boldsymbol{l}_R(h_\beta)$.
Ahora sea $x \in W' \cap \boldsymbol{l}_R(h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n))$, entonces $x \in W'$ y $x \in \boldsymbol{l}_R(h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n))$, entonces $x \in W' \subseteq W$ y xRy, entonces $y \in h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n)$ y como W' es R-hereditario, entonces
$y \in W' \cap h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(S_1 \ldots, S_n)$, entonces por hipótesis inductiva, $y \in h_\beta^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n)$. Así $x \in \boldsymbol{l}_R(h_\beta^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n))$. Por lo tanto

$$h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, S_n) = W' \cap h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n).$$

$\Box$

Corolario 3.34. *Si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$.*

Demostración. Como $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}' \models \alpha$, es suficiente probar que $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$ sólo si $\mathfrak{F}'^+ \models \alpha$. Si $\mathfrak{F}'^+ \not\models \alpha$ entonces, existen $T_1, \ldots, T_n \in P'$ tales que $h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(T_1, \ldots, T_n) \neq W'$. Por inciso 3) de la Definición 3.29, para $1 \leq i \leq n$ existen $S_i \in P$ tales que $T_i = W' \cap S_i$. Por lo tanto, por el Teorema 3.33

$$\begin{aligned} W' \neq h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(T_1 \ldots, T_n) &= h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \ldots, W' \cap S_n) \\ &= W' \cap h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) \end{aligned}$$

Entonces $W' \cap h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) \neq W'$, así $W' \not\subseteq h_\alpha^{\mathfrak{F}}(S_1, \ldots, S_n)$ pues de lo contrario $W' \cap h_\alpha^{\mathfrak{F}'}(S_1, \ldots, S_n) = W' \neq W' \subseteq W$.
Por lo tanto $h_\alpha^{\mathfrak{F}}(S_1, \ldots, S_n) \neq W$, así $\mathfrak{F}^+ \not\models \alpha$. $\Box$

En contexto de K-frames, tenemos el siguiente caso especial de 3.33.

Teorema 3.35. *Sea V una valuación en $\langle W, R\rangle$, $W' \subseteq W$ y sea $\langle W'_R, R'\rangle$ el sub-K-frame generado por W' (W'_R como se definió en 3.28 y $R' = R \cap (W'_R \times W'_R)$). Definimos $V_{W'}$, por $V_{W'}(p) = W'_R \cap V(p)$, todas las variables p, Entonces $V_{W'}(\alpha) = W'_R \cap V(\alpha)$, todo $\alpha \in \Phi$.*

La función $V_{W'}$ se llamará la *valuación derivada* de (*generada* por) V.

3.7. Homomorfismos

El hecho de que los subframes preservan la validez de 3.34 puede en efecto establecerse indirectamente a partir de la preservación de las identidades polinómicas en homomorfismos de álgebras. En efecto, por la Definición 3.29 y el Teorema 3.30 si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, entonces la función $S \mapsto W' \cap S$ es un homomorfismo de álgebras modales de $\mathfrak{F}^+$ en $\mathfrak{F}^+$. Hay otras construcciones algebraicas que preservan las identidades (subálgebras) y, como veremos, cada una de ellas está asociada con una construcción de frame en particular. En esta sección, se muestra que la estructura de la preservación de las funciones entre los frames están vinculados con las subálgebras modales.

Definición 3.36. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P\rangle$ y $\mathfrak{F}' = \langle W', R', P'\rangle$ son frames, una función $\mathcal{Q} : W \to W'$ es un homomorfismo de frames de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{F}'$ si y sólo si*

1. *xRy sólo si $\mathcal{Q}(x)R'\mathcal{Q}(y)$,*
2. *$\mathcal{Q}(x)R'z$ sólo si $\exists y(xRy$ y $\mathcal{Q}(y) = z)$,*
3. *$S \in P'$ sólo si $\mathcal{Q}^{-1}(S) \in P$, donde $\mathcal{Q}^{-1}(S) = \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S\}$.*

   Si $\mathcal{Q}$ es sobreyectiva (i.e. $\mathcal{Q}(W) = W'$), entonces $\mathfrak{F}$ es una imagen homeomorfa de $\mathfrak{F}$ (escribimos $\mathfrak{F}' \preceq \mathfrak{F}$).

   $\mathcal{Q}$ es un encaje si y sólo si es inyectivo y satisface

4. *$S \in P \Rightarrow \exists T \in P'(\mathcal{Q}(S) = \mathcal{Q}(W) \cap T)$.*

   Si $\mathcal{Q}$ es biyectiva y $\mathcal{Q}^{-1}$ es un homomorfismo entonces $\mathcal{Q}$ es un isomorfismo, en cada caso $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ son isomorfos ($\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}'$).

Un isomorfismo puede alternativamente describirse como un encaje sobreyectivo. Note que un homomorfismo biyectivo necesariamente no es un isomorfismo, es decir, si $P \neq 2^W$, entonces la función identidad de $\langle W, R, 2^W\rangle$ a $\langle W, R, P\rangle$ es un homomorfismo biyectivo cuya inversa no satisface 3.36 (3).

Teorema 3.37. *Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo de frames, entonces para $S, T \subseteq W'$.*

1. *$\mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus S) = W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(S)$,*

2. $\mathcal{Q}^{-1}(S \cap T) = \mathcal{Q}^{-1}(S) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T)$,

3. $\mathcal{Q}^{-1}(m_{R'}(S)) = m_R(\mathcal{Q}^{-1})$,

4. $\mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{l}_{R'}(S)) = \boldsymbol{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$.

Demostración.

1. $\mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus S) = W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(S)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus S) & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W' \setminus S\} \\ & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W' \wedge \mathcal{Q}(x) \notin S\} \\ & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W'\} \cap \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \notin S\} \\ & = & \mathcal{Q}^{-1}(W') \cap (\mathcal{Q}^{-1}(S))' \\ & = & W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(S) \end{array}$$

2. $\mathcal{Q}^{-1}(S \cap T) = \mathcal{Q}^{-1}(S) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(S \cap T) & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S \cap T\} \\ & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S \wedge \mathcal{Q}(x) \in T\} \\ & = & \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S\} \cap \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in T\} \\ & = & \mathcal{Q}^{-1}(S) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T) \end{array}$$

3. $\mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{m}_{R'}(S)) = \boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)$
   Sea $x \in \mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{m}_{R'}(S))$ entonces $\mathcal{Q}(x) \in \boldsymbol{m}_{R'}(S)$, luego $\mathcal{Q}(x)R'z$ para algún $z \in S$, entonces existe y tal que xRy y $\mathcal{Q}(y) = z$. Por lo tanto $y \in \mathcal{Q}^{-1}(S)$. Por ende $x \in \boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^{-1})$.
   Por otro lado sea $x \in \boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$, entonces xRy y para algún y tal que $y \in \mathcal{Q}^{-1}(S)$, es decir, xRy y $\mathcal{Q}(y) \in S$. Y por definición $\mathcal{Q}(x)R'\mathcal{Q}(y)$, así $\mathcal{Q}(x) \in \boldsymbol{m}_{R'}(S)$. Por lo tanto $x \in \mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{m}_{R'})(S)$.

4. $\mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{l}_{R'}(S)) = \boldsymbol{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{l}_{R'}(S)) & = & \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus \boldsymbol{m}_{R'}(S)) \\ & = & W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)) \\ & = & W \setminus \boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)) \\ & = & \boldsymbol{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)) \end{array}$$

□

Teorema 3.38. *Sean $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ un homomorfismo y $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} = \langle W_{\mathcal{Q}}, R', P_{\mathcal{Q}} \rangle$ el subframe de $\mathfrak{F}'$ generado por $\mathcal{Q}(W)$. Entonces:*

1. *$\mathcal{Q}$ es una imagen homeomorfa de $\mathfrak{F}$ bajo $\mathcal{Q}$ y*

2. *$\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \cong \mathfrak{F}$ si $\mathcal{Q}$ es un encaje.*

Demostración.

1. Notamos que $\mathcal{Q}(W)$ es un conjunto $R^{'}$-hereditario. En efecto, supongamos que $x \in \mathcal{Q}(W)$ y $xR^{'}y$. Veamos que para $y \in \mathcal{Q}(W)$ existe $w_1 \in W$ tal que $\mathcal{Q}(w_1) = y$. Como $x \in W$, entonces existe $w_1 \in W$ tal que $\mathcal{Q}(w_1) = x$ y $xR^{'}y$, entonces $\mathcal{Q}(w_1)R^{'}y$, así existe $w_2 \in W$ tal que $w_1 R w_2$ y $\mathcal{Q}(w_2) = y$ entonces $y \in \mathcal{Q}(W)$. Por lo tanto $\mathcal{Q}(W)$ es R-hereditario, así $\mathcal{Q}$ es una función sobre $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}}$. Ahora si $S \in P_{\mathcal{Q}}$ entonces existe $T \in P^{'} : S = \mathcal{Q}(W) \cap T$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(S) &= \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(W) \cap T) \\ &= \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(W)) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T) \\ &= W \cap \mathcal{Q}^{-1}(T) \\ &= \mathcal{Q}^{-1}(T) \in P \end{aligned}$$

   Finalmente tenemos que xRy, implica $\mathcal{Q}(x)R^{'}\mathcal{Q}(y)$.

2. Si $\mathcal{Q}$ es inyectiva, entonces $(\mathcal{Q}^{-1})^{-1} = \mathcal{Q}$ implica por definición de encaje tenemos que, dada $S \in P$, se cumple que $(\mathcal{Q}^{-1})^{-1}(S) = \mathcal{Q}(S) \in P_{\mathcal{Q}}$ por lo que $\mathcal{Q}^{-1}$ es un homomorfismo. Esto, junto con (1), nos da que $\mathcal{Q}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}}$

□

Teorema 3.39. *Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo, $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \in \Phi$, y si $S_1, \ldots, S_n \in P'$, entonces $\mathcal{Q}^{-1}(h_{\alpha}^{\mathcal{F}'+}(S_1, \ldots, S_n)) = h_{\alpha}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \ldots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n))$.*

Demostración. Por inducción de la longitud de α.

1. Si $\alpha = p_i$,
$$\mathcal{Q}^{-1}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \ldots, S_n)) = \mathcal{Q}^{-1}(S_i).$$

Por otro lado

$$h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n)) = \mathcal{Q}^{-1}(S_i).$$

Supongamos que el Teorema se vale para fórmulas de complejidad menor que α.

2. Si $\alpha = \neg\beta$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) & = & \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) \\ & = & W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) \\ & = & W \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}S_n) \\ & = & h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}(S_n). \end{array}$$

3. Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) & = & \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n) \cap (h_{\gamma}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n) \\ & = & \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) \cap \mathcal{Q}^{-1}(h_{\gamma}^{\mathfrak{F}'^+}(S_1,\ldots,S_n)) \\ & = & h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n))\cap \\ & & h_{\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n)) \\ & = & h_{\beta\wedge\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n)). \end{array}$$

4. Si $\alpha = \Box\beta$,
   Por demostrar

$$\mathcal{Q}^{-1}(h_{\Box\beta}^{\mathcal{F}'+}(S_1,\ldots,S_n)) = h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n))$$

   Por Definición 3.4 verifiquemos los siguiente

$$\mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{l}_{R'}(h_{\beta}^{\mathcal{F}'+}(S_1,\ldots,S_n)) = \boldsymbol{l}_R(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n)).$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}^{-1}(\boldsymbol{l}_{R'}(h_{\beta}^{\mathcal{F}'+}(S_1,\ldots,S_n))) & = & \boldsymbol{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathcal{F}'+}(S_1,\ldots,S_n))) \\ & = & \boldsymbol{l}_R(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1),\ldots,\mathcal{Q}^{-1}(S_n)) \end{array}$$

$\square$

Corolario 3.40. *Si $\mathfrak{F}' \preceq \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ homomorfismo.
Por demostrar $h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n) = W'$

$$\begin{aligned} h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n) &\supseteq \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+})(S_1, \ldots, S_n)) \\ &= \mathcal{Q}(h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1, \ldots, S_n))) \\ &= \mathcal{Q}(W) \\ &= W' \end{aligned}$$

Por lo tanto $W' \subseteq h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n)$. Por otro lado, por definición tenemos que $h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n) \subseteq W'$. Así $h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n) = W'$. □

Corolario 3.41. *Cualesquiera dos frames isomorfos son semánticamente equivalentes.*

Demostración. Sea $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ isomorfismo de frames.
Por demostrar que $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}' \models \alpha$.
Supongamos que $\mathfrak{F} \models \alpha$. Queremos ver que $\mathfrak{F}' \models \alpha$. Bastará ver que $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$ entonces $\mathfrak{F}'^+ \models \alpha$. Por demostrar que $h_\alpha^{\mathfrak{F}'^+}(S_1, \ldots, S_n) = W'$. Esto se sigue del Corolario 3.40.
Ahora si $\mathfrak{F} \preceq \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}' \models \alpha$. Por demostrar que $\mathfrak{F} \models \alpha$. Consideremos $P = \mathcal{Q}^{-1} : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}$ homomorfismo. Verifiquemos que $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) = W$

$$\begin{aligned} h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) &\supseteq P(P^{-1}(h_\alpha^{\mathfrak{F}^+})(S_1, \ldots, S_n)) \\ &= P(h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(P^{-1}(S_1), \ldots, P^{-1}(S_n))) \\ &= P(W') \\ &= W. \end{aligned}$$

Y por otro lado se tiene que $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) \subseteq W$, esto por definición. Por lo tanto $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \ldots, S_n) = W$. □

Teorema 3.42. *Si $\mathfrak{F}$ esta encajado en $\mathfrak{F}'$, entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$ implica que $\mathfrak{F} \models \alpha$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{F}' \models \alpha$ y $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ un encaje. Entonces por el Teorema 3.38, se tiene que $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \subseteq \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \cong \mathfrak{F}$. Por otro lado, por Corolario, 3.34 como $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \subseteq \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}' \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \models \alpha$ y como $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \cong \mathfrak{F}$ por Corolario 3.41, entonces $\mathfrak{F} \models \alpha$.

□

Definición 3.43. *Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo de frames, entonces $\mathcal{Q}^+ : \mathfrak{F}'^+ \to \mathfrak{F}^+$ es definida por $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^{-1}(S)$, para todo $S \in P'$.*

Teorema 3.44.

1. *$\mathcal{Q}^+$ es un homomorfismo de álgebras modales.*

2. *$\mathcal{Q}^+$ es inyectivo si $\mathcal{Q}$ es sobre.*

3. *$\mathcal{Q}^+$ es sobre si $\mathcal{Q}$ es un encaje.*

4. *$\mathcal{Q}^+$ es un homomorfismo de álgebras modales si $\mathcal{Q}$ es un isomorfismo de frame.*

Demostración.

1. Por demostrar:

   a) $\mathcal{Q}^+(S \cap T) = \mathcal{Q}^+(S) \cap \mathcal{Q}^+(S) \cap \mathcal{Q}^+(T)$,
   b) $\mathcal{Q}^+(\backslash S) = \backslash \mathcal{Q}^+(S)$,
   c) $\mathcal{Q}^+(\boldsymbol{m}'_R(S)) = \boldsymbol{m}_R(\mathcal{Q}^+(S))$.

   Se sigue de la Definición 3.43 y el Teorema 3.37.

2. Supongamos que $\mathcal{Q}$ es sobre. Por demostrar que $\mathcal{Q}^+$ es inyectivo. Sean $S, T \in P'$ tal que $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^+(T)$. Como $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^+(T)$ por Definición 3.43, se tiene que $\mathcal{Q}^{-1}(S) = \mathcal{Q}^{-1}(T)$ entonces $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(S)) = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(T))$ y como $\mathcal{Q}$ es sobre, se tiene que $S = T$.

3. Supongamos que $\mathcal{Q}$ es un encaje. Por demostrar que $\mathcal{Q}^+$ es sobre. Sea $S \in P$ y como $\mathcal{Q}$ es encaje, entonces existe $T \in P'$ tal que $\mathcal{Q}(S) = \mathcal{Q}(W) \cap T$. Notamos que $S \subseteq \mathcal{Q}^{-1}$, Si $x \in \mathcal{Q}^{-1}(T)$, entonces $\mathcal{Q}(x) \in T \cap \mathcal{Q}(W) = \mathcal{Q}(S)$, así para algún $y \in S$ se tiene que $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}(y)$. Pero $\mathcal{Q}$ es inyectivo, entonces $x = y$. Por lo tanto $\mathcal{Q}^{-1}(T)(S)$, es decir, $\mathcal{Q}^+(T) = S$.

4. Se sigue de 1-3).

$\square$

3.8. Inmersión de CPI en S4

Uno puede notar la cercanía de la CPI y $S4$ cuando se piensa en la implicación intuicionista como implicación necesaria y notar la semejanza de los modelos. Gödel vio la conexión mucho antes de la existencia de modelos de Kripke al señalar que la interpretación de $\Box$ como la noción intuitiva de probabilidad. El construyó la siguiente traslación T de IPC en $S4$.

Definición 3.45. *(Traslación de Gödel) Para toda p variable intuicionista y para cualesquiera φ y ψ fórmulas intuicionistas,*

1. $T(p) = \Box p$;
2. $T(\bot) = \Box\bot$;
3. $T(\varphi \wedge \psi) = T(\varphi) \wedge T(\psi)$;
4. $T(\varphi \vee \psi) = T(\varphi) \vee T(\psi)$;
5. $T(\varphi \rightarrow \psi) = T(\varphi) \rightarrow T(\psi)$.

los conectivos Intuicionistas son transformados por T en las correspondientes Clásicas, pero se entienden ahora en el contexto de demostrabilidad.

Sea $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ un modelo modal en un frame casi-ordenado $\mathfrak{F}$.
Definimos en el esqueleto $\rho\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}$ una valuación intuicionista ρV por tomar, a cada variable intuicionista p,

$$\rho V(p) = \{\mathcal{C}(x) : (\mathfrak{M}, x) \models \Box p\},$$

$\rho V(p)$ es upward closed.
Decimos que el modelo $\rho\mathfrak{M} = \langle \rho\mathfrak{F}, \rho V \rangle$ es el esqueleto de el modelo $\mathfrak{M}$.
Inversamente, si $\mathfrak{N} = \langle \rho\mathfrak{F}, U \rangle$ es un modelo intuicionista basado en un esqueleto de un frame-casi ordenado $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, entonces tomando a cada variable intuicionista p

$$V(p) = \{x \in W : (\mathfrak{N}, \mathcal{C}(x)) \models p\}$$

obtenemos un modelo modal $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ cuyo esqueleto es (isomorfo a $\mathfrak{N}$). En particular, si todos los clusters en $\mathfrak{F}$ son simples y además $\mathfrak{F}$ es isomorfo a $\rho\mathfrak{F}$, entonces el modelo $\mathfrak{M}$ es también isomorfo a su esqueleto $\mathfrak{N}$.

Lema 3.46. *(Esqueleto) Para cada modelo $\mathfrak{M}$ de lógica modal basado en un frame casi-ordenado, todo punto x en $\mathfrak{M}$ y cada fórmula intuicionista φ,*

$$(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \varphi \textit{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models T(\varphi).$$

Demostración. Sean $\mathfrak{M}$ un modelo de lógica modal basado en un frame casi-ordenado y x en $\mathfrak{M}$. Haremos inducción sobre la complejidad de la fórmula φ.

1. Si $\varphi = p$ átomo, entonces

$$\begin{aligned}(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models p \quad & \textit{si y sólo si} \quad \mathcal{C}(x) \in V(p)\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \models \Box p.\end{aligned}$$

   Por otro lado $(\mathfrak{M}, x) \models T(p) = \Box p$. Supongamos que el Teorema se cumple para fórmulas de complejidad menor que φ.

2. Si $\varphi = \psi \vee \chi$, entonces

$$\begin{aligned}(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \vee \chi \quad & \textit{si y sólo si} \quad (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \textit{ o } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \chi\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \models \psi \textit{ o } (\mathfrak{M}, x) \models \chi\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \models \psi \vee \chi.\end{aligned}$$

3. Si $\varphi = \psi \wedge \chi$, entonces

$$\begin{aligned}(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \wedge \chi \quad & \textit{si y sólo si} \quad (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi\\ & \qquad\qquad\qquad \textit{y } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \chi\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \models \psi\\ & \qquad\qquad\qquad \textit{y } (\mathfrak{M}, x) \models \chi\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \models \psi \wedge \chi.\end{aligned}$$

4. Si $\varphi = \psi \to \chi$, entonces

$$\begin{aligned}(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \not\models \varphi \quad & \textit{si y sólo si} \quad \textit{existe } y \in x\uparrow:\\ & \qquad\qquad\qquad (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(y)) \models \psi \textit{ y } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(y)) \not\models \chi\\ & \textit{si y sólo si} \quad \textit{existe } y \in x\uparrow:\\ & \qquad\qquad\qquad (\mathfrak{M}, y) \models T(\psi) \textit{ y } (\mathfrak{M}, y) \not\models T(\chi)\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \not\models \Box(T(\psi) \to T(\chi))\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \not\models T(\psi \to \chi)\\ & \textit{si y sólo si} \quad (\mathfrak{M}, x) \not\models T(\varphi).\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.47. *Para cada frame casi-ordenado $\mathfrak{F}$ y cada fórmula intuicionista φ,*

$$\rho\mathfrak{F} \models \varphi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{F} \models T(\varphi).$$

Teorema 3.48. *La traslación de Gödel es un encaje de IPC a $S4$.*

Demostración. Deseamos probar que, para toda fórmula intuicionista φ

$$\varphi \in CPI \textit{ si y sólo si } T(\varphi) \in S4.$$

Supongamos que $T(\varphi) \notin S4$. Entonces existe un frame casi-ordenado $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F} \not\models T(\varphi)$. Por el Corolario 3.47, $\rho\mathfrak{F} \not\models \varphi$ y así $\varphi \notin CPI$. Inversamente, supongamos que $\varphi \notin CPI$. Entonces por Teorema 2.15, existe un frame intuicionista finito $\mathfrak{F}$ refutando φ y como un frame modal es isomorfo a su esqueleto. Por el corolario anterior, $\mathfrak{F} \not\models T(\varphi)$, de esto se sigue que $T(\varphi) \notin S4$. $\square$

Conclusión

La lógica proposicional clásica fue creada por Boole hace unos 150 años y se mantiene en posición central entre las lógicas proposicionales no sólo debido a su venerable edad. De hecho, representa el modelo más simple de razonamiento basado en la suposición de que toda proposición es verdadera o falsa. Muchas otras lógicas están contenidas en la lógica clásica o construidas en su base para enriquecer el lenguaje con nuevas conectivas.

Las algebras de Boole se presentaron como un modelo de la lógica clásica y se denomina así en honor a George Boole, que fue el primero en definirla como parte de un sistema lógico. El álgebra de Boole fue un intento de utilizar las técnicas algebraicas para tratar expresiones de la lógica proposicional. El álgebra de Lindenbaum-Tarski de la lógica intuicionista clásica es un álgebra de Boole.

La lógica intuicionista, o lógica constructivista, es el sistema lógico originalmente desarrollado por Arend Heyting. La lógica intuicionista rechaza el principio del tercero excluido. Esto se debe a una observación de Brouwer de enfatizar las pruebas en vez de la verdad. Desde el punto de vista de teoría de conjuntos la lógica proposicional intuicionista es un subconjunto de la clásica: se puede definir al descartar la ley del tercero excluido del CPC. Semánticamente las álgebras de Heyting se presentaron como modelos de la lógica intuicionista, el álgebra de Lindenbaum-Tarski de la lógica intuicionista proposicional es un álgebra de Heyting.

Dentro de un sistema de lógica clásica, se tiene $\neg\neg\alpha \to \alpha$. En lógica intuicionista, una proposición implica su doble negación, pero no recíprocamente. Esto marca una importante diferencia entre lógica clásica e intuicionista. Sin embargo, en lógica intuicionista, sí tenemos la equivalencia entre $\neg\neg\neg\alpha$ y $\neg\alpha$. Es más, en el caso proposicional, una fórmula es demostrable de forma clásica, si su doble negación es demostrable de manera intuicionista. Este resultado es conocido como el teorema de Glivenko.

La lógica modal está diseñada para formalizar el comportamiento deductivo de la necesidad y posibilidad. El sistema proposicional modal $S4$ es obtenido agregando $\Box\alpha \to \alpha$ y $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ a T.

Por supuesto, uno puede notar la cercanía de la CPI a $S4$, cuando pensamos a la implicación intuicionista como una implicación necesaria y nos damos cuenta de la semejanza de los modelos. Gödel vio esta conexión mucho antes de la existencia de los modelos de Kripke. El medio para lograrlo fue interpretar al conectivo $\Box$ con la noción de demostrabilidad, creando con ello la traslación entre CPI y $S4$ que lleva su nombre.

Referencias

[1] J. Arrazola, I. Martínez, J.P.Muñoz y J. Lavalle, *Topología y Sistemas Dinamicos IV*, Capítulo 1. Lógica Intuicionista y sus Interpretaciones, 3-49, (2011).

[2] N. Bezhanishvili, *Lattices of intermediate and cylindric modal logics*, ILLC Dissertation Series DS-2006-02, (2006).

[3] N. Bezhanishvili and D. de Jong, *Intuitionistic Logic*, ILLC Universiteit van Amsterdam, (2005).

[4] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, (1963).

[5] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, The Millennium Edition, (1981).

[6] A. Chagrov and M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford University Press, (1997).

[7] B.F. Chellas, *Modal Logic an Introduction*, Cambridge University Press, (1980).

[8] N.B. Cocchiarella and M.A. Freud, *Modal Logic*, Oxford University Press, (2008).

[9] D.M. Gabbay and L. Maksimova, *Interpolation and Definability*, Oxford Science Publications, (2005).

[10] R. Goldblatt, *Mathematics of Modality*, CSLI Lecture Notes No. 43, (1993).

[11] P.T. Johnstone, *Stone Space*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, (1992.)

[12] E.J Lemmon, *Semantics for Modal Logic I*, Journal Symbolic Logic 31 ,46-65,(1966).

[13] I. Martínez, *Álgebras de Heyting y Lógica Constructiva*, (2004).

[14] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, CHAPMAN & HALL/CRC, Fourth Edition, (1997).

[15] G. Priest, *An Introduction to Non-Clasical Logic*, Cambridge University Press, Second Edition, (2008).

[16] H. Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*, North-Holland Publishing Company, (1974).

[17] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of methamathematics*, PWN Warzawa, (1970).

[18] D. Van Dalen, *Intuitionistic Logic*, Handbook of Philosophical Logic Vol. III, D. Reidel Publishing Company, 225-339, (1986).

[19] D. Van Dalen, *Logic and Structure*, Springer-Verlag, New York Inc. (1989).

[20] E. N. Zalta, *Basic Concepts in Modal Logic*, Center for the Study of Language and Information Stanford University, (1995).

Índice alfabético