



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE UN TALLER DE HABILIDADES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y EL TRABAJO EN EQUIPO EN SECUNDARIA

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

MELISA MOYA SILVA

DIRECTORA DE TESIS:

LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis ha sido una bendición en todo sentido, por lo que primeramente le agradezco a Dios y no cesan mis ganas para decir que por mi fe esta meta está cumplida.

Gracias a mis padres y hermano por ser los principales motores de mis sueños, gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas, gracias a mi padre por estar al pendiente de mi preparación profesional, por contribuir con enseñanzas y consejos para siempre lograrlo, gracias a mi madre quien siempre estuvo dispuesta y al pendiente de la toma de mis decisiones, gracias a mi hermano que siempre fue quien me prestó su oreja para escuchar mis frustraciones, alegrías y cada una de mis experiencias para llegar hasta aquí; gracias a ellos por cada consejo y por cada una de sus palabras que me guiaron a lograr tanto.

El desarrollo de esta tesis no fue algo fácil, pero durante este tiempo pude disfrutar de cada momento, de cada uno de los procesos que se realizaron dentro de esta, y no solo porque me dispuse a que así fuera, sino porque mis amigos siempre estuvieron ahí; sobre todo Ian quien estuvo en la mayor parte del desarrollo de esta tesis, la familia Pérez Ortiz por apoyarme y cuidar de mí durante este camino, a mi sobrino Santiago quien siempre me regalaba una sonrisa y amor durante mis malos ratos, a Carmen que durante mi estancia fuera de casa siempre me motivó para continuar y salir adelante,

Quiero agradecer también a mi asesora Lidia Aurora Hernández Rebollar, por aceptar ser mi guía durante este trayecto, por cada detalle y momento para aclarar cualquier tipo de duda que me surgiera y por el tiempo dedicado para la realización de esta.

Finalizo con mi agradecimiento al cuerpo académico de aprendizaje y enseñanza de las ciencias quien me proporcionó un apoyo a través del proyecto con clave 100185000-VIEP2018.

Este es un momento muy especial y espero perdure no solo en la mente de las personas a quienes agradecí sino también en todos aquellos que invirtieron su tiempo para leer este proyecto de tesis a quienes también les agradezco.

ÍNDICE

	Página
1. Introducción	4
2. Marco Teórico	7
2.1 Noción de problema	7
2.2 Resolución de problemas	8
2.2.1 ¿Qué es la resolución de problemas?	8
2.2.2 La resolución de problemas según algunos matemáticos	8
2.3 Trabajo en equipo	9
2.3.1 Definición de trabajo en equipo	10
2.3.2 Elementos del trabajo en equipo en el Taller de resolución de problemas.	10
2.3.3 Intercambio de ideas	11
2.4 Evaluación de aprendizajes	11
3. Metodología	13
3.1 Objetivo del taller	13
3.2 Organización	13
3.3 Técnica	13
3.4 Instrumentos	14
3.5 Actividades	15
3.6 Tipo de evaluación	20
4. Resultados	23
4.1 Diagnóstico	23
4.2 Trabajo individual	27
4.3 Trabajo en equipo	44
4.4 Discusión de resultados	75
5. Conclusiones	77
6. Aportaciones	78
7. Bibliografía	79

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las Matemáticas afecta a millones de jóvenes y adolescentes. Su carácter eminentemente social y cultural, junto a la complejidad y dificultades detectadas en su aprendizaje, han contribuido a despertar la preocupación por el estudio de los procesos de comunicación, transmisión y comprensión de esta ciencia y a interesar a una amplia comunidad científica que ya desde hace mucho tiempo investiga en este campo.

Aunque las ciencias exactas son una herramienta fundamental para el desenvolvimiento de los jóvenes en el mundo actual, de acuerdo con los niveles que juzga la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), en México los jóvenes carecen de un conocimiento necesario para sobrevivir al mundo moderno: las matemáticas.

Por otro lado, los resultados de las pruebas del Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) han venido a mostrar que la alfabetización o competencia matemática refiere la capacidad para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando se enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos. La competencia matemática no se limita pues al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos, tampoco a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con ciertos métodos. La competencia matemática implica la combinación de todos estos elementos para satisfacer las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (INEE 2005, p 20).

Un gran número de estudios han mostrado que los buenos resolutores de problemas se caracterizan por disponer de un conjunto de estrategias generales o heurísticas que guían su acción y que les ayudan a superar las dificultades que encuentran durante el proceso de resolución. Estas formas de actuación son más o menos constantes en la resolución de problemas difíciles para el resolutor y en los cuales no se domina el contenido específico del problema (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985 citado en Pifarré, Manoli y Sanuy, 2001).

Sin embargo, aún en nuestros días, la enseñanza de la Matemática enfrenta serias dificultades, como la falta de éxito de los estudiantes en el abordaje y resolución de problemas. Esto ha llevado a dirigir la atención hacia el proceso de enseñanza- aprendizaje de la resolución de problemas, considerado de gran importancia, pues mediante el mismo los estudiantes experimentan las potencialidades y la utilidad de la Matemática en el mundo que les rodea. Entonces, uno de los principales objetivos en el área de las matemáticas es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas.

Comprendiendo esta realidad, el presente trabajo de tesis tiene como principal objetivo desarrollar en los estudiantes destrezas de pensamiento para resolver problemas matemáticos de manera individual y en equipo. Lo anterior a través de la realización de un taller de habilidades para la resolución de problemas matemáticos y el trabajo en equipo; basado en las recomendaciones de Polya (2016), Schoenfeld (1992) y Callejo (1994), para desarrollar en los estudiantes destrezas de pensamiento por individual y la capacidad de resolver problemas en equipo.

Los citados autores han destacado la importancia de cambiar el esquema de enseñanza matemática: generaciones completas han sido marcadas por la memorización para resolver problemas mediante operaciones básicas: una raíz cuadrada, una ecuación u otros procesos que muchas veces los estudiantes realizan de forma mecanizada. Por tanto, el taller dirigió la atención hacia el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, considerado de gran importancia pues mediante el mismo los estudiantes experimentan las potencialidades y la utilidad de la Matemática en el mundo que les rodea.

El taller en cuestión se implementó en 11 sesiones. En cada una se facilitó una hoja de trabajo que contenía un problema y una serie de preguntas guía para que los alumnos lo resolvieran con ayuda de estos planteamientos, de modo que en este proyecto se analizó el avance de las habilidades que los alumnos fueron adquiriendo, conforme el progreso de las sesiones, en la resolución de problemas.

La mayoría de problemas comprendidos en el taller fueron elegidos de los folletos introductorios propuestos por los autores Aguilera, García, Gómez, Hubard, Pérez y Gómez en la página de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, la cual es un programa de la Sociedad Matemática Mexicana, cuya parte central es la realización del Concurso Nacional para estudiantes preuniversitarios, con el objetivo de promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, alejándose del estudio tradicional, que promueve la memorización y mecanización, y buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes.

En los primeros capítulos, se exponen algunas de las definiciones más pertinentes para este trabajo, de conceptos básicos. Dichas ideas sirven de base para abordar el problema del presente estudio, tales como *problema*, a través de las propuestas de Polya, quien además describe el proceso para resolver; *trabajo en equipo* y todas las técnicas que involucra y *evaluación del aprendizaje*.

En el tercer apartado se describe la metodología empleada, como las técnicas, los instrumentos, las actividades y los tipos de evaluación, aspectos que permitirán la comprensión de las observaciones detalladas en el cuarto capítulo del presente trabajo, es decir, el análisis de los resultados de cada hoja de trabajo.

Tras constatar los resultados revelados en la prueba diagnóstica y los obtenidos de la última hoja de trabajo, se observan, tal y como se concluyó al final del proyecto, importantes progresos en los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas matemáticos, tanto de forma individual como en equipo, mejorando sus actitudes, como la ejecución ordenada y exitosa de trabajos.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Noción de problema

Generalmente utilizamos un “problema” en el ámbito escolar para aplicar cuestiones de diferentes ámbitos a las que deben responder los estudiantes, de las cuales se buscan distintos propósitos para ellos y cuya resolución exige que se apliquen los distintos conocimientos, habilidades y capacidades que por lo general forman parte de la Educación Matemática.

En el ámbito escolar se entiende que los problemas no sólo se han trabajado por los matemáticos, sino también por otras disciplinas.

Polya (1981) propuso una clasificación de problemas en relación a los conocimientos y a las experiencias previas de los alumnos y a la situación en que éstos se proponen por lo que Polya distinguió cuatro tipos de problemas:

- *Los problemas en que la regla que hay que aplicar salta a la vista porque acaba de ser presentada o estudiada en clase.*
- *Los problemas en que hay que elegir a la regla que se debe aplicar y que se trabajó en clase recientemente.*
- *Los problemas en que hay que elegir una combinación de reglas previamente estudiadas.*
- *Finalmente, los problemas en que hay que investigar: se trata de problemas cuya resolución exige una combinación original de reglas y el uso de razonamientos plausibles.*

El término problema se usa para designar actividades en el curso de las cuales el alumno debe buscar y enfrentarse a nuevas situaciones, para poder establecer distintas relaciones, de modo que el profesor trata de despertar el interés a los estudiantes para que se motiven y continúen en la investigación.

Así, en este trabajo se empleará el término problema para denotar alguna situación que emplea una situación matemática cuyo método de solución no es inmediata para el estudiante que lo emplea ya que no dispone de algún algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión, por lo que el estudiante debe indagar, buscar, establecer relaciones para poder enfrentarse a una nueva situación.

2.2 Resolución de problemas

2.2.1 ¿Qué es la resolución de problemas?

La parte fundamental de toda actividad matemática es la resolución de problemas, por lo que es necesario que la Educación Matemática dedique un gran tiempo de sus esfuerzos a averiguar en qué consiste la actividad eficaz de resolución de problemas y cuáles son los mecanismos adecuados para conseguir que los estudiantes de Matemáticas logren convertirse en mejores resolutores de problemas.

Dado que la mira central de este análisis estará puesta en la presentación de un taller de resolución de problemas matemáticos, será necesario plantear algunas variables que sirvan de ejes conceptuales sobre los que apoya la lectura interpretativa de la investigación. Por lo que se buscará entender lo que es resolver un problema.

“La resolución de un problema es una de las actividades humanas más complejas porque en ella intervienen no sólo conocimientos sino también afectos y porque está influenciada por el contexto en que se presenta el problema. Se trata de una tarea que se puede aprender pero de la que no se sabe muy bien cómo se puede enseñar a todos los alumnos, y no sólo a los más capaces y a los más motivados por las Matemáticas” (Callejo, 1994, p.21).

2.2.2 La resolución de problemas según algunos matemáticos

No existe aún una teoría que explique el cómo producir la resolución de problemas, pero si existen algunas estrategias que se suelen utilizar para resolver problemas; por lo que veremos algunas de estas aportaciones.

La descripción más clásica y conocida del proceso de resolución de problemas es la de Polya (1972), según la cual, para resolver un problema se necesita:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

La anterior aportación es la base de este trabajo, debido a que tiene implícitos los elementos necesarios para realizar el taller. Estos pasos guiarán el desarrollo del trabajo individual y en equipo e implican aplicar ciertas habilidades para concluir con éxito la resolución de los problemas. Trabajar con esas habilidades, permitirá el desarrollo de los procesos del pensamiento matemático, la reflexión sobre dichos procesos y la comunicación de ideas.

Otro concepto es la resolución de problemas a base de la investigación didáctica desde el plano de la regulación y el control de los actos cognitivos, el cual se refiere a las decisiones

tomadas para poder comprender la naturaleza de un problema y así poder resolverlo, lo que incluye saber seleccionar el contenido, planificar acciones, elegir las estrategias adecuadas para realizar un plan, tomar decisiones que puedan mejorar el plan, validar el plan y estrategias no adecuadas. Para conseguir lo anterior, Schoenfeld (1987) distinguió tres aspectos de la cognición:

- I. Los conocimientos acerca de los propios procesos de pensamiento.
- II. El control o autorregulación.
- III. Las creencias e intuiciones que constituyen el punto de vista matemático sobre las matemáticas, que determinan la conducta de un individuo.

De esta forma se nota la diferencia de resolver un problema entre un novato y la de un experto en el plano meta cognitivo: en la manera en la que se usan sus conocimientos, la forma de aplicar sus esfuerzos, así como la toma de decisiones durante el proceso de resolución.

Existen algunos métodos los cuales sirven para mejorar las destrezas metacognitivas, con el fin de que se pueda tomar conciencia sobre dicho proceso.

Entre las sugerencias más destacadas de Schoenfeld (1987) para la resolución de problemas están las siguientes:

- Revisar, analizar y valorar el proceso de resolución de problema en relación al comportamiento de los expertos. Para ello se registran procesos de resolución de problemas intentando recoger la máxima información de los mismos de modo que el resolutor explique oralmente lo que está haciendo, para qué lo está haciendo y de qué manera piensa que puede ayudar en la resolución del problema.
- Los alumnos resuelven problemas en grupos pequeños y el profesor interviene ocasionalmente sin dar pistas ni sugerir la solución, haciéndoles preguntas acerca de lo que están realizando con objeto de que tomen conciencia del proceso que están siguiendo.

De este modo se puede dar la reflexión sobre el control y evaluación del pensamiento.

2.3 Trabajo en equipo

2.3.1 Definición de trabajo en equipo.

El trabajo en equipo se define como la **unión de dos o más personas organizadas de una forma determinada**, las cuales cooperan para lograr un fin común que es la ejecución de un proyecto.

Es importante emplear en cada sesión el trabajo en equipo, de modo que ayuda a los alumnos a involucrarse con las actividades planteadas, además de relacionarse con sus propios compañeros de manera que juntos trabajen un problema matemático cumpliendo distintas finalidades como el enriquecerse cada uno con los diferentes procedimientos empleados, además de poder observar diferentes métodos para resolver un problema matemático.

Es importante considerar los siguientes puntos para analizar un buen trabajo en equipo:

- Involucrarse todos.
- La participación de los integrantes del equipo.
- La atención y el respeto entre los integrantes al dar a conocer las diferentes ideas.

2.3.2 Elementos del trabajo en equipo en el Taller de resolución de problemas.

Para realizar un buen trabajo en equipo dentro del Taller de resolución de problemas es necesario tener distintos elementos encargados del liderazgo y orden para resolver los problemas, entre los cuales se tienen a un moderador o moderadora quien ayuda al equipo a seguir una metodología de trabajo y un secretario o secretaria quien es el encargado de tomar las notas y resultados obtenidos por parte del equipo (Callejo, 1994).

Las funciones del moderador se presentan en la siguiente lista:

- Se encarga de escoger el momento adecuado para poder cambiar la etapa en la que se encuentran dentro de las distintas fases para la resolución de un problema.
- Mantener el orden en las intervenciones de los integrantes del equipo de modo que se evitará que hablen todos al mismo tiempo, que interrumpen el momento de dar una idea por parte de un compañero.
- Supervisar al secretario, de manera que se tengan anotadas todas las ideas y procedimientos platicados.
- Mantener activa la participación de cada uno de los estudiantes y buscar la comprensión en cada uno de ellos sobre el problema.
- Generar las ideas y preguntas adecuadas a cada uno de los integrantes para lograr obtener los procedimientos y los resultados de cada uno.

2.3.3 Intercambio de ideas.

El intercambio de ideas matemáticas es una actividad difícil dentro del taller de resolución de problemas, tanto para los estudiantes que las expresan como para quien las escucha, por lo que se trabaja esta cuestión de la siguiente manera:

- Solicitando la participación de todos los integrantes del equipo, animando a los más pasivos y evitando que sólo uno tenga la palabra.
- Trabajar el respeto y evitar juzgar las ideas expresadas por los integrantes.
- Ayudar en el análisis de los bloqueos que se presentan sobre la resolución del problema.

El moderar también resulta una actividad difícil, de modo que durante las diferentes sesiones va tomando la conciencia adecuada sobre su forma de ser una guía de la actividad propuesta en los estudiantes y trata de mejorar su modo de continuar, intentando siempre orientar,

desbloquear y otorgar la confianza a los estudiantes para que puedan expresar sin miedo sus ideas.

2.4 Evaluación de los aprendizajes

A continuación se hace una lista de posibles objetivos a modo de inventario, en los cuales se puede centrar la evaluación de resolución de problemas (cf. Charles, Lester y O'Daffer, 1987). Evaluar cada uno de ellos requiere una determinada técnica.

1. Desarrollar en los estudiantes destrezas de pensamiento para resolver problemas:
 - Comprender la cuestión de un problema.
 - Comprender las condiciones y variables de un problema.
 - Seleccionar los datos necesarios para resolver un problema.
 - Formular preguntas intermedias que conduzcan a la solución de un problema y seleccionar las estrategias adecuadas para resolverlas.
 - Aplicar correctamente la estrategia o estrategias de solución.
 - Dar una solución correcta a un problema en función de los datos del mismo.
 - Evaluar la pertinencia y adecuación de la respuesta dada.
2. Desarrollar habilidades para seleccionar y utilizar estrategias de resolución de problemas:
 - Resolver un problema más simple.
 - Buscar un problema semejante.
 - Suponer el problema resuelto.
 - Hacer un dibujo, un esquema, una figura.
 - Encoger un lenguaje adecuado.
 - Experimentar.
 - Buscar pautas, simetrías, regularidades
 - Suponer el problema resuelto.
 - Aplicar el principio de Dirichlet.
 - Razonar por inducción.
 - Razonar por reducción al absurdo.
3. Favorecer en los estudiantes hábitos y actitudes que ayuden a resolver problemas:
 - Confianza en las propias capacidades.
 - Flexibilidad de pensamiento.
 - Apertura en la forma de percibir un problema.
 - Perseverancia en el trabajo.
 - Espíritu reflexivo y crítico.
4. Favorecer en los estudiantes creencias que ayuden a resolver problemas:
 - Hay que gastar tiempo pensando cómo resolver un problema.

En la resolución de un problema hay lugar para hacer << ensayo y error>> o para jugar un poco con la situación.

Normalmente es necesario usar la intuición para resolver problemas.

Hay más de una forma de resolver un problema.

Un problema puede tener varias soluciones, una o ninguna.

Mejorar las habilidades para resolver problemas no es fácil.

La resolución de un problema exige paciencia y perseverancia.

Quedarse en blanco mientras se intenta resolver un problema no significa perder el tiempo.

Dominar los contenidos de matemáticas del curso, no asegura poder resolver todos los problemas relacionados con los temas que se han estudiado.

La resolución de un problema no termina cuando se encuentra la solución, hay que verificarla.

El resultado al que se llega tras intentar resolver un problema es tan importante como el proceso que se ha seguido.

No encontrar la solución de un problema no significa haber fracasado.

No encontrar la solución de un problema no quiere decir haber perdido el tiempo.

5. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar sus conocimientos matemáticos.
6. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de controlar y evaluar su pensamiento mientras resuelven problemas.
7. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas en grupo.
8. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de encontrar la respuesta correcta a diferentes tipos de problemas:
Con diferentes tipos de contextos: reales, realistas, fantásticos y puramente matemáticos.
Con una sola solución, con varias, con una infinidad o con ninguna solución,
Con datos completos, datos superfluos, problemas en los que faltan datos o datos insuficientes.
Que resuelvan aplicando los diversos tipos de estrategias.
9. Favorecer el conocimiento propio de cada estudiante.

3. METODOLOGÍA

Este taller se impartió durante diez sesiones en los meses de mayo, junio y julio del año 2018 con un grupo de estudiantes en la Secundaria oficial Vespertina Lic. Luis Cabrera, llevándose a cabo con un promedio de 12 alumnos.

3.1 Objetivo del Taller

Las actividades que se realizaron en este taller persiguen los siguientes objetivos:

Desarrollar en los estudiantes destrezas de pensamiento para resolver problemas, estimulando la comprensión de la pregunta del problema, la selección de datos, aplicar correctamente la estrategia y dar una solución correcta al problema en función a los datos del mismo. Promover el trabajo de equipo.

3.2 Organización

Las sesiones se desarrollaron semanalmente los lunes de 2 a 2:50 de la tarde y la asistencia obligatoria fue regular. Es de gran importancia esta asistencia ya que es necesario compartir esta experiencia con todos los alumnos para que ninguno se pierda de la reflexión e investigación que se va desarrollando durante las sesiones de trabajo.

Se seleccionaron una diversidad de problemas que requirieran el razonamiento del alumno, además del uso de conocimientos previos, de tal manera que los estudiantes pudieran expresarse con espontaneidad y entusiasmo en el trabajo individual y en la discusión en grupo.

Cabe destacar que durante todas las sesiones se llevó a cabo el trabajo tanto individual como en equipo.

Durante las sesiones del trabajo en equipo se contó con un observador, quien fue el encargado de hacer anotaciones sobre el comportamiento de los alumnos y las discusiones que se tenían en cada equipo, mientras que yo participaba como moderadora.

3.3 Técnica

Se propone una hoja de trabajo con una serie de preguntas que buscan conducir al estudiante a la comprensión de la incógnita, la selección de los datos necesarios para resolver el problema, la selección de una estrategia para emplear un adecuado procedimiento, obtener un resultado correcto para finalmente evaluar la pertinencia del resultado obtenido.

- Se ayudó a los alumnos a entender cada una de las preguntas plasmadas en la hoja de trabajo.
- Se pidió a los alumnos reflexionar sobre el proceso empleado en cada una de las sesiones.
- Se hizo una discusión en grupo acerca de los procedimientos para la resolución del problema. Así se reafirman los distintos procedimientos empleados por los alumnos como el dejar claro las distintas variables para resolver un problema.

3.4 Instrumentos

La hoja de trabajo fue diseñada de la siguiente manera:

<u>INFORMACIÓN DE HOJA DE TRABAJO</u> <u>Instrucción:</u> Lee cuidadosamente y contesta lo que se te pide en cada problema. <u>Problema</u> <u>Preguntas</u> a) ¿Qué es lo que te pide calcular el problema? b) ¿Qué datos te da el problema? c) ¿Cuál es tu procedimiento para resolver el problema? d) ¿Qué resultado obtuviste? e) ¿Tiene coherencia tu resultado con lo que te pide el problema? ¿Por qué?

Para el trabajo en equipo fue necesario diseñar una tabla que se muestra a continuación en la cual el observador hacía las anotaciones sobre el comportamiento de los alumnos en los tres equipos.

Número de sesión	EQUIPO 1	EQUIPO 2	EQUIPO 3
Involucrarse todos			
Todos participan			
Respetan sus funciones			
Escuchan las opiniones de los demás y las respetan			
Observaciones			

3.5 Actividades

Antes de iniciar el taller se aplicó un diagnóstico, el cual tuvo como objetivo conocer las habilidades de los estudiantes para encontrar una estrategia que les ayudara a abordar de manera correcta el problema. Además, observar el uso de conocimientos previos en la asignatura de matemáticas, de tal forma que con esta información se pudieran elegir los problemas adecuados para su nivel y los temas que ya hubieran estudiado en su clase de Matemáticas.

DIAGNÓSTICO

Los problemas elegidos para dicho diagnóstico fueron los siguientes:

1.

a) *Completa la siguiente sucesión de números y contesta la pregunta.*

__, 8, __, __, 20, 24, __, 32, __, __, 44, 48, __, 56, __, ...

b) *¿Qué término aparecerá en el lugar 35 de la sucesión?*

Propósito del problema 1:

Un problema de razonamiento inductivo consiste en enunciar las propiedades numéricas o geométricas a partir del descubrimiento de regularidades (seriaciones...). Fue elegido para el taller con la finalidad de observar las habilidades que tenían con la inducción, además del razonamiento adecuado para emplear la suma y multiplicación, cuyos temas debían estar dominados por el estudiante, además de poner en práctica el tema de sucesiones el cual se trabajó en la clase de Matemáticas durante el primer bloque.

Fue necesario observar si el alumno comprendía la idea de emplear una multiplicación, de forma que no gaste tiempo en ir sumando el número 4 a cada uno de los números puestos, sino multiplicar el número 4 por el número de la posición del número faltante, en este caso la posición número 35, es decir, lograr un mejor razonamiento sobre el problema.

2.

En una escuela se llevó a cabo una kermés. Entre tres amigos pusieron un puesto de enchiladas y juntaron sus ahorros para comprar los ingredientes. El primero puso \$25, el segundo \$50 y el tercero \$100. Al final del día obtuvieron una ganancia de \$1 050 por la venta y decidieron repartirlo de manera proporcional a lo que aportó cada quién para comprar los ingredientes. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada amigo?

(García, Gómez, Hubard y Pérez, 2018)

Propósito del problema 2:

Este problema de proporcionalidad fue elegido para analizar el razonamiento por parte de los alumnos del reparto de algunas cantidades de forma proporcional, de manera que trabajaran con temas vistos durante sus clases, además del razonamiento y comprensión que se tenía con dicho problema.

3.

En el País de las Joyas se pueden cambiar 3 zafiros por una moneda. Un zafiro se puede cambiar por 2 flores. ¿Cuántas flores pueden cambiarse por 2 monedas?

(García, Gómez, Hubard y Pérez, 2018)

Propósito del problema 3:

Este problema de razonamiento lógico, fue propuesto para observar cómo se comportaban ante un problema que por lo general no ven en la clase de Matemáticas, de manera que lograran aplicar sus conocimientos previos en un problema de este tipo y usar alguna estrategia para llegar a la solución.

PROBLEMAS DE LAS SESIONES

Durante las 10 sesiones aplicadas se trabajó empleando 20 minutos para resolver de manera individual el problema planteado, contando conmigo como moderadora para intervenir con preguntas precisas para ayudarlos a resolver sus dudas; así, dedicaban su tiempo designado para responder las preguntas de la hoja de trabajo y la búsqueda de una estrategia para el procedimiento adecuado de la resolución del problema.

Se continuaba con otros 20 minutos para el trabajo en equipo; para lo cual se formaron tres equipos con cuatro integrantes cada uno. Dichos equipos se integraron con base en una combinación de promedios en la asignatura de Matemáticas. Se componían de un moderador quien era el encargado de la participación de cada uno de sus compañeros y de un secretario, quien reportaba las respuestas acordadas por el equipo y sus distintas soluciones al problema. Se entregaba una vez más la hoja de trabajo que contestaron de manera individual.

En cada sesión se propuso un problema, los cuales se mencionarán a continuación junto con los objetivos esperados para el taller de resolución de problemas. Dichos problemas fueron elegidos algunas veces a partir del estudio de un tema, otros extraídos de los folletos de los problemas presentados en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, los cuales necesitaban mayor razonamiento.

SESIÓN 1

Una cubeta está llena de agua hasta la mitad de su capacidad. Cuando Cecilia le agrega dos litros de agua a la cubeta, la cubeta se llena hasta tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la cubeta?

(García, Gómez, Hubard y Pérez, 2015)

Propósito del problema:

Se propuso este problema para que los asistentes pudieran emplear sus conocimientos previos sobre fracciones en situaciones con un contexto. Además, para explorar las distintas estrategias empleadas por los alumnos.

Al ser la primera sesión se podrá observar si los alumnos comprenden de manera correcta las preguntas empleadas en la hoja de trabajo, además que se reflejará si comprenden la pregunta del problema e identifican de manera correcta los datos empleados en el problema.

SESIÓN 2

Cuatro primas, Ema, Iva, Rita y Zina, tienen las edades de 3, 8, 12 y 14 años, pero no necesariamente en ese orden. La suma de las edades de Zina y Ema es divisible por 5. La suma de las edades de Zina y Rita también es divisible por 5. ¿Cuántos años tiene Iva?

(García, Gómez, Hubard y Pérez, 2018)

Propósito del problema:

Este problema del tipo aritmético funciona para poner en práctica los conocimientos sobre divisibilidad, además de llevarlos a una introducción al tema de ecuaciones. Es necesario que conforme van pasando las sesiones se vaya observando un avance en la comprensión de la incógnita.

SESIÓN 3

Erika y Manuel tienen 60 cerillos entre los dos. Utilizando algunos de ellos Erika construyó un triángulo que tiene 6 cerillos en cada lado. Con el resto de los cerillos Manuel construyó un rectángulo, de forma que uno de sus lados tiene 6 cerillos de largo. ¿Cuántos cerillos de largo tiene el otro lado del rectángulo?

(García, Aguilar y Pérez, 2003)

Propósito del problema:

Este problema geométrico fue propuesto para observar sus habilidades sobre este ámbito, pues es necesario analizar el razonamiento geométrico de cada estudiante, así como la estrategia que suele usar la mayoría para llegar a su resolución, además de observar un mejoramiento con el entendimiento de las preguntas empleadas.

SESIÓN 4

Ximena dibujó un triángulo con longitudes 6, 10 y 11. Carlos dibujó un triángulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Cuánto mide cada uno de los lados del triángulo que dibujó Carlos?

(Aguilera, García, Gómez, Hubard, y Pérez, 2016)

Propósito del problema:

Este problema se relaciona con el problema de la sesión 3, pues es del tipo geométrico, por lo que su busca el mismo objetivo, empleando nuevos datos y así observar su avance después de haber trabajado con un ejercicio parecido.

SESIÓN 5

De un depósito de agua se han sacado los $\frac{3}{5}$ de su contenido. Si quedan todavía 600 litros dentro, ¿cuál es la capacidad del depósito?

(Calvo, Durán, Rodríguez y Saras, 2010)

Propósito del problema:

Este problema tiene el mismo objetivo que el de la sesión 1, para explorar si hay un progreso en el uso de conocimientos previos sobre fracciones y de estrategias.

SESIÓN 6

Tres hermanas, Fernanda, Juana y María José, compraron una bolsa de 30 galletas. Cada una se quedó con 10 galletas. Sin embargo, Fernanda pagó 8 pesos, Juana 5 pesos y María José 2 pesos. Si se hubieran repartido las galletas proporcionalmente al precio que cada una pagó, ¿cuántas galletas le habrían tocado a Fernanda?

(Aguilera, García, Gómez, Hubard, y Pérez, 2016)

Propósito del problema:

Este problema aritmético se propuso para observar el mejoramiento de comprensión a comparación del ejercicio propuesto en el diagnóstico y así poder obtener conclusiones con los objetivos planteados.

SESIÓN 7

Un dragón tiene 5 cabezas; por cada cabeza que se le corta le crecen 5 más. Si se le cortan 6 cabezas, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

(García, Pérez, Aguilar y Aguilera, 2013)

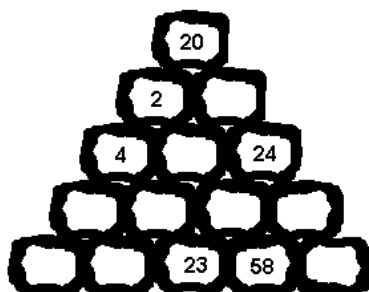
Propósito del problema:

Este problema de tipo razonamiento lógico conduce al estudiante a razonar y elegir una estrategia que lo conduzca de la mejor manera a un procedimiento claro y conciso, además

que al no ser un problema común, es decir no involucra procedimientos matemáticos vistos en clase hace que el alumno trabaje en su razonamiento y ponga mejor atención con los datos que se le proporcionan, pues para llegar a un resultado correcto es necesaria la concentración en ellos.

SESIÓN 8:

Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila interior. El número de cada piedra representa la diferencia entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completa los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.



(Sardina, 2011)

Propósito del problema:

Este problema es del tipo razonamiento inductivo, es decir, consiste en enunciar propiedades numéricas o geométricas a partir del descubrimiento de regularidades (seriaciones...).

Así, los estudiantes trabajan con un tema básico, pues lo que se necesita para llenar los espacios faltantes es el uso de la resta; sin embargo, se encuentra un punto de dificultad para ellos ya que se necesita lograr encontrar y entender la clave para elegir los números adecuados.

SESIÓN 9

A una competencia se inscribieron al principio 13 niños y después otros 19. Deben formarse 6 equipos, de tal forma que cada equipo tenga el mismo número de niños. ¿Al menos cuántos niños más deben inscribirse para que se pueda organizar la competencia?

(García, Gómez, Hubard y Pérez, 2018)

Propósito del problema:

Este es un problema parecido al planteado en la sesión 2, para explorar el tema de divisibilidad, y si hay un avance en la comprensión de las preguntas guía y la estrategia de usar un problema parecido.

SESIÓN 10

11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

(Beltrán, 2017)

Propósito del problema:

Problema aritmético en el cual deben emplear varias operaciones, pero lo necesario en este problema es comprender y hacer un uso correcto de las operaciones. Es indispensable tener claro qué es lo que pide el problema, tener en mente todos los datos y contemplar diferentes conocimientos matemáticos a nivel primero de secundaria para emplearlos en dicho problema.

Cada sesión se concluía con 15 minutos de participación y discusión con todo el grupo, de forma que analizaran las diferentes formas de resolver el problema, además de corroborar sus respuestas con las de sus compañeros y así responder las diferentes dudas que se tenían como grupo.

Todo esto se lograba respondiendo las preguntas empleadas en la hoja de trabajo por parte de los alumnos de manera aleatoria, pasando al pizarrón a los alumnos participantes.

3.6 Tipo de Evaluación

La evaluación de los objetivos planteados se puede llevar a cabo usando distintas técnicas.

Las técnicas usadas para el taller de resolución de problemas fueron la observación y la entrevista estructurada.

OBSERVACIÓN

Esta técnica se centra sólo en aquellos aspectos del proceso de resolución de problemas que son observados por un agente externo, es decir, algunas creencias o actitudes de los estudiantes, el comportamiento global de resolución o el desarrollo del trabajo en equipo.

El observador debe permanecer abierto a los comportamientos de los estudiantes de modo que si es necesario modifique los aspectos a observar en razón de conductas no esperadas y que resulten significativas.

Algunas ventajas presentadas en esta técnica son las siguientes: Si se consigue que los estudiantes no se distraigan durante el periodo de observación resulta bastante natural, es

flexible y se centra en aspectos específicos como actitudes, creencias y comportamientos que de otra forma no se podrían evaluar externamente.

A continuación se muestra la tabla utilizada para la observación del trabajo en equipo.

Número de sesión	EQUIPO 1	EQUIPO 2	EQUIPO 3
Involucrarse todos			
Todos participan			
Respetan sus funciones			
Escuchan las opiniones de los demás y las respetan			
Observaciones			

ENTREVISTA ESTRUCTURADA

Es otro modo de recoger información que permite hacer apreciaciones más profundas y detalladas que la observación. Esta técnica se usa a menudo para investigar o para hacer diagnósticos de algunos estudiantes.

Un plan de entrevista estructurada es el siguiente (cf. Charles, Lester y O'Daffer, 1987, citado en Callejo, 1994):

1. Tratar que el estudiante se sienta a gusto.
2. Pedir al estudiante que hable sobre lo que está haciendo o pensando mientras resuelve el problema. Hacerlo de forma natural de modo que ayude a comprender mejor cómo los estudiantes resuelven problemas y cómo se les puede ayudar a ser mejores resolutores de problemas.
3. Proponerle un problema.
4. Mientras el estudiante intenta comprender la cuestión y las condiciones del problema, observarlo y hacerle preguntas.
5. Cuando el estudiante trabaje en buscar la solución del problema, recordarle de nuevo que hable sobre ello.
6. Cuando el estudiante dé una respuesta al problema, observar si la comprueba y cómo lo hace.

La entrevista puede hacerse mientras el estudiante resuelve el problema o cuando haya terminado.

Durante el taller se empleó este tipo de entrevista mientras los estudiantes resolvían los problemas de manera individual, de forma que se obtuviera información que permitiera al instructor guiar al alumno en el proceso de resolución de los problemas.

4. RESULTADOS

4.1 DIAGNÓSTICO

PROBLEMA 1:

a) *Completa la siguiente sucesión de números y contesta la pregunta.*

__, 8, __, __, 20, 24, __, 32, __, __, 44, 48, __, 56, __, ...

b) *¿Qué término aparecerá en el lugar 35 de la sucesión?*

Resultados: Se observó que 8 de 12 alumnos resolvieron de manera correcta dicho problema, es decir, identificaron la incógnita, utilizaron cada uno de los datos propuestos y llegaron a emplear un buen procedimiento para su resolución.

Sólo cuatro alumnos descubrieron que el patrón consistía en multiplicar la posición por el número 4, como se muestra en la imagen. Por lo que usaron esto para hallar el término número 35.

Respuestas correctas

- Cuatro alumnos se dieron cuenta que los términos de la sucesión eran múltiplos de cuatro, por lo que multiplicaron 35 por 4 para responder, ver figura 1.

1. Completa la siguiente sucesión de números y contesta la pregunta.

$24 \times 35 = 840$

$20 \times 35 = 700$

$32 \times 35 = 1120$

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60

¿Qué término aparecerá en el lugar 35 de la sucesión? 140

$24 \times 35 = 840$

Figura 1. Procedimiento y resultado a pregunta a) de diagnóstico.

- 3 alumnos escribieron todos los términos de la sucesión hasta llegar a la posición 35, como se muestra en la imagen 2.

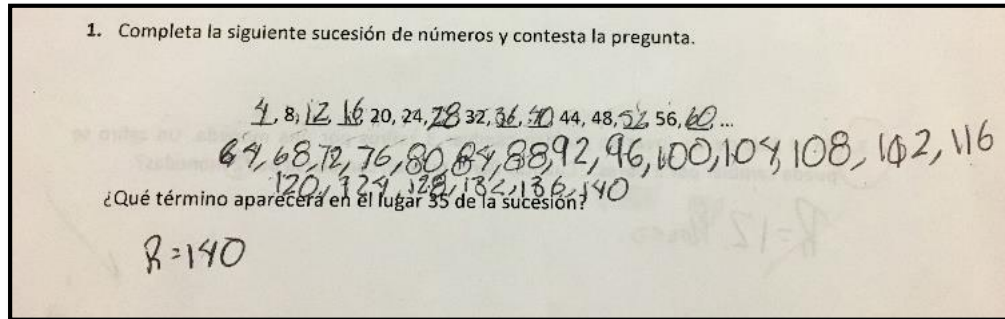


Figura 2. Procedimiento distinto y resultado a pregunta a) de diagnóstico.

- Un alumno tuvo un método muy distinto a los demás pues observó que la sucesión se completaba con los múltiplos de 4, por lo que calculó que de la posición 1 a la posición 10 incrementaba un total de 40; así multiplicó 40×3 y obtuvo 120, es decir obtuvo el número que tendría en la posición 30, después le sumó 20 que son los 5 lugares que le faltaban para la posición 35, finalmente haciendo la suma de sus dos resultados, obtuvo 140.
- Los 4 alumnos restantes no lograron llegar a la respuesta correcta.

COMENTARIO: Al proponer un ejercicio común de clase, la mayoría de alumnos contestaron correctamente, sin embargo, al aumentar una pregunta que implica cuestionarse algo fuera de lo común, en este grupo, 8 alumnos lograron razonar de manera correcta la condición, por lo que se obtuvo un buen resultado para observar que pueden tener buenas estrategias para resolver un ejercicio de razonamiento.

PROBLEMA 2

En una escuela se llevó a cabo una kermés. Entre tres amigos pusieron un puesto de enchiladas y juntaron sus ahorros para comprar los ingredientes. El primero puso \$25, el segundo \$50 y el tercero \$100. Al final del día obtuvieron una ganancia de \$1 050 por la venta y decidieron repartirlo de manera proporcional a lo que aportó cada quién para comprar los ingredientes. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada amigo?

Resultados: En este problema de proporcionalidad se le dificultó a todo el grupo la comprensión de la incógnita del problema, no tomaron en cuenta todos los datos que éste proporcionaba, utilizaron un procedimiento incorrecto y por ende obtuvieron un resultado erróneo.

A continuación se muestra el análisis de cada uno:

Alumno 1: Al que aportó \$100.00 le tocan 500 a los otros 2 les toca \$250.00 porque aportaron menos que el otro.

Es decir entendió que al tercer amigo debía tocarle más que a los otros dos, pero a los otros dos debía tocarles lo mismo, por lo que al final no razonó correctamente la condición de reparto proporcional, es decir, tuvo un resultado erróneo.

Alumno 2: Lo que cada quien cooperó, es decir, al primero 20, al otro 30 y al último 50. Sólo indicó lo que pedía el problema, pero no hizo ningún análisis sobre la ganancia obtenida, llegando a un razonamiento y resultado mal empleado.

Alumno 3: Al primero 20%, al otro 30% y el último 50% Quiso relacionar la cantidad de dinero que puso cada amigo con porcentaje, pero aun así obtuvo un resultado erróneo.

Los 7 alumnos restantes no entendieron la condición del problema, ya que no se percataron de la instrucción de reparto proporcional; por lo que no hicieron uso de todos los datos y terminaron haciendo la división $1050 / 3$; lo cual lleva a una respuesta incorrecta.

COMENTARIO: Se propone un ejercicio común de clase y se observa que tres alumnos intentan entender la condición de la repartición de manera proporcional, más no llegaron a un buen procedimiento, mientras que al resto les faltó comprender la cuestión del problema, además de no hacer uso de los datos que se proporcionan por lo que nadie pudo llegar al resultado correcto.

PROBLEMA 3

En el País de las Joyas se pueden cambiar 3 zafiros por una moneda. Un zafiro se puede cambiar por 2 flores. ¿Cuántas flores pueden cambiarse por 2 monedas?

Resultados: Este problema de razonamiento lógico tuvo un excelente resultado, ya que la mayoría de los participantes lo contestaron de manera correcta, empleando distintos métodos.

- Un alumno realizó el siguiente análisis:

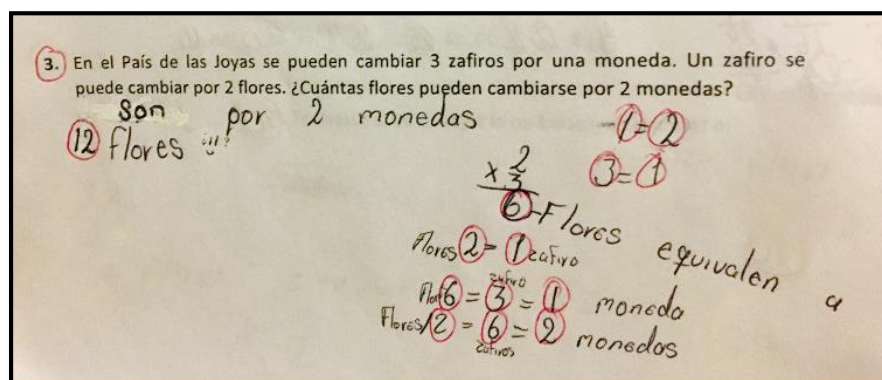


Figura 3. Procedimiento y resultado a pregunta 3 de diagnóstico.

De modo que fue haciendo una comparación de zafiros hasta llegar al número de flores que se pedían.

- Cuatro alumnos explicaron su razonamiento para llegar a su respuesta.

Alumno 1: 3 zafiros lo cambio por una moneda, si pide 2 monedas es decir, que 2 monedas son 6 zafiros, y si un zafiro se puede cambiar por 2 flores (6×2) da como resultado 12 flores.

Alumno 2: Si tengo 3 zafiros me dan 1 moneda y si tengo 6 zafiros me darán 2 monedas (1 zafiro por 2 flores) si tengo 6 zafiros y por cada zafiro me dan 2 flores $6 \times 2 = 12$.

Alumno 3: Dos monedas son 6 zafiros, 6 zafiros los puedes cambiar por 12 flores.

Alumno 4: 12 flores porque se sigue una sucesión porque si 3 zafiros se pueden cambiar por una moneda y un zafiro se puede cambiar por 2 flores, entonces son 6 zafiros y esos 6 zafiros se cambian cada uno por dos flores, ya que se han cambiado en total son 12 flores.

- Cuatro alumnos realizaron las siguientes operaciones.

$$3 \times 2 = 6$$

$$6 \times 2 = 12$$

Dando a entender que 3 zafiros por 2 monedas obtienen 6 zafiros, luego 6 zafiros se cambian por 2 flores, así se cambia un total de 12 flores.

COMENTARIO: Al emplear un problema de razonamiento se obtuvieron buenos resultados; pues 9 de 12 alumnos llegaron al resultado correcto, empleando distintos razonamientos; es decir, el grupo tuvo la capacidad para emplear buenas estrategias en este problema.

4.2 TRABAJO INDIVIDUAL

En el Taller de resolución de problemas se ha trabajado de manera individual un problema matemático por cada sesión, empleando preguntas las cuales guiaban al alumno a una mejor comprensión y desarrollo de dicho problema. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos en cada problema que se planteó.

SESIÓN 1

PROBLEMA

Una cubeta está llena de agua hasta la mitad de su capacidad. Cuando Cecilia le agrega dos litros de agua a la cubeta, la cubeta se llena hasta tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la cubeta?

Resultados: Durante la primera sesión se trabajó de manera individual durante 15 minutos. Fue complicado emplear las preguntas para ir resolviendo el problema, ya que se les dificultaba entender lo que pedía cada una de ellas. Se intervino para explicar a qué se refería cada pregunta poniendo como ejemplo un problema similar, no lograron identificar los datos que proporcionaba el problema, realizaron procedimientos incorrectos y sólo emplearon operaciones sin sentido, lograron identificar la incógnita del problema sin ninguna comprensión sobre ella, por lo que los llevó a un mal uso de fracciones.

A continuación se muestra los razonamientos de los alumnos.

- Tres alumnos hicieron operaciones con fracciones sin llegar a un resultado correcto.

E1: Multiplica las fracciones de agua, que emplea el problema.

E2, E5: Sumó las fracciones $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$, es decir sólo hizo operaciones empleando las fracciones propuestas en el problema.

E4: Sumó $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, analizó que faltaba $\frac{1}{4}$ para llenar la cubeta, más no supo ocupar ese dato para la resolver el problema.

- 3 alumnos no supieron que hacer.
- 1 alumno multiplicó los 2 litros que menciona el problema por las 4 partes de la cubeta que es el dato en el que se divide la cubeta, es decir $2 \cdot 4 = 8$ litros, por lo que llegó al resultado correcto.
- 1 alumno analizó que $\frac{1}{4}$ de agua es 2 litros, entonces $\frac{1}{2}$ de agua son 4 litros y $\frac{3}{4}$ son 6 litros, es decir llegó a un razonamiento correcto sobre el problema.
- 1 alumno multiplicó los 2 litros por $\frac{3}{4}$ de su capacidad, es decir no obtuvo ningún razonamiento sobre el problema.
- 1 alumno sumas las capacidades más no pone qué capacidades, sólo contestó por contestar algo.

- 1 alumno hace multiplicaciones y divisiones, sus operaciones fueron las siguientes:
 $3/2=1$, $2*3=6$, $9/2=4$.

COMENTARIO: Concluyendo esta sesión se observa que no tienen estrategias adecuadas para resolver un problema, es decir tomar en cuenta las diferentes partes para resolverlo de manera ordenada y plantear un procedimiento y llegar a un resultado correcto.

SESIÓN 2

PROBLEMA

Cuatro primas, Ema, Iva, Rita y Zina, tienen las edades de 3, 8, 12 y 14 años, pero no necesariamente en ese orden. La suma de las edades de Zina y Ema es divisible por 5. La suma de las edades de Zina y Rita también es divisible por 5. ¿Cuántos años tiene Iva?

Resultados: Durante esta segunda sesión que se llevó a cabo en 15 minutos para el trabajo individual, se pudo notar que aún tienen problemas con el entendimiento de las preguntas, ya que en sus respuestas se nota la complejidad para elegir los datos necesarios para resolver el problema, por lo que también les cuesta elegir una buena estrategia para llegar al resultado.

Algunos de los procedimientos empleados fueron los siguientes:

E1: Sumó las edades con las cuales le daría un número divisible por 5.

$$\begin{array}{ll} 3+12=15 & 15/5=3 \\ 8+12=20 & 20/5=4 \text{ Son divisibles} \end{array}$$

Llegó a tener los resultados sin embargo se puede pensar que no le dio tiempo terminar de analizarlo.

E4, E7, E14, E13: No usaron ninguna estrategia, ya que aún tienen dificultades para comprender las preguntas, además que se notó que aún tienen dudas sobre la divisibilidad, por lo que no pudieron emplear un buen procedimiento.

E8: Dividió todas las edades, sin embargo al realizar sus operaciones obtuvo sus resultados erróneos, lo cual implica que no sabe realizar una división.

$3/5=6$, $12/5=2$, $14/5=2$, $8/5=16$
 Luego eligió que Iva tiene 8 años.

E5: Escogió los siguientes números, los cuales le sirvieron para obtener un número divisible por 5. Obtuvo que la edad de Ema es 3, la edad de Zina es 12 y la edad de Rita es 8, por lo que hizo sus sumas $12+3=15$, $12+8=20$, ambos resultados divisibles entre 5, entonces le sobraba 14 años, por lo que obtuvo que esa era la edad de Iva.

COMENTARIO: La falta de comprensión del problema, la escases de estrategias y el mal manejo del tema aportaron para convertirse en un problema muy difícil para el grupo.

SESIÓN 3

PROBLEMA

Erika y Manuel tienen 60 cerillos entre los dos. Utilizando algunos de ellos Erika construyó un triángulo que tiene 6 cerillos en cada lado. Con el resto de los cerillos Manuel construyó un rectángulo, de forma que uno de sus lados tiene 6 cerillos de largo. ¿Cuántos cerillos de largo tiene el otro lado del rectángulo?

Resultados: Durante esta sesión de 15 minutos se vio un avance ya que emplearon una mejor estrategia para la resolución del problema, pues hicieron uso de un dibujo para llegar a un procedimiento adecuado al razonamiento del problema, sin embargo sólo 5 alumnos llegaron al resultado correcto, ya que el resto no hicieron uso de todos los datos empleados en el problema.

A continuación se plasman algunos resultados:

- E1: Su estrategia fue separar el problema, haciendo uso de cada uno de los datos que da el problema.

$$60 \text{ en total } \left\{ \begin{array}{l} 6+6+6=18 \text{ ----- Cada lado del triángulo} \\ 6+6=12 \text{ ----- Los dos lados del rectángulo} \\ 15+15=30 \text{ ----- los dos lados restantes del rectángulo} \end{array} \right.$$

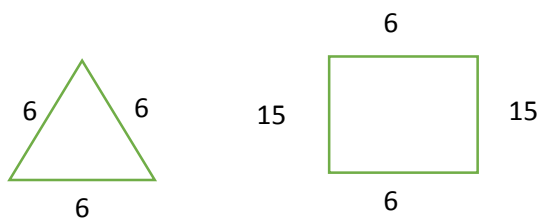
- 7 alumnos usaron la estrategia de hacer un dibujo

E2: No entendió el problema, ya que fue la alumna que puso que el problema pedía saber cuántos cerillos necesitaba el otro rectángulo.



18+22+22 Total: 52

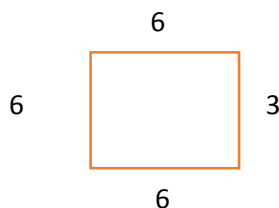
E3:



$$18+12 \quad \text{Total: } 30$$

Se dio cuenta que se necesitan 30 cerillos más para poder ocupar los 60; por lo que llegó a la conclusión que para cada lado se necesitaban 15 cerillos.

E7:



Sólo dividió el 6 entre los 2 lados, por lo que sólo hizo uso de los datos del rectángulo, sin hacer caso al total de cerillos y mucho menos la información sobre el triángulo.

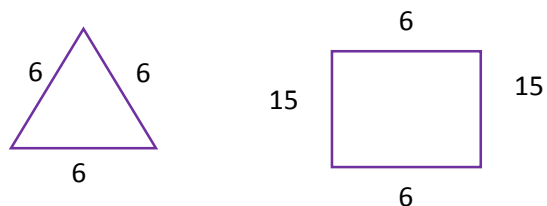
E14:

$$18+12=36 \quad 36+6=42$$



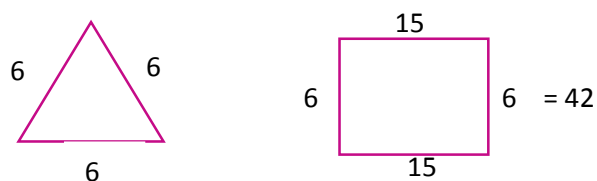
Tomó en cuenta los 18 cerillos del triángulo, además que sumó los 12 cerillos de los dos lados que dan del rectángulo el cual no dibujó, sin embargo no realizó bien la suma, por lo que tuvo mal el resultado de la suma, después quiso sumar otros 6 cerillos, lo cual indica que no entendió esa parte del problema y sumó como si fuera un cuadrado.

E10:



Hizo bien su análisis en dibujo, no tiene operaciones, lo cual indica que lo fue haciendo mentalmente.

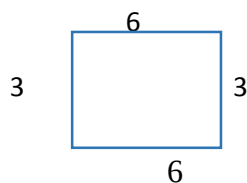
E4:



A 60 le quito 18 del triángulo y lo que me queda lo divido al rectángulo y al final sumo todo.

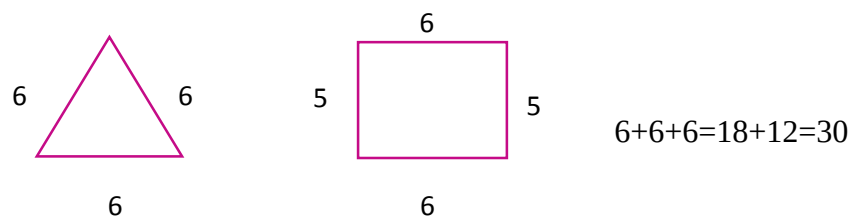
Su razonamiento fue correcto, sin embargo, ella entendió que se pedía sacar la longitud de todo el rectángulo, por lo que suma cada una de los lados y ese fue su resultado.

E8:



Si un lado del rectángulo tiene 6 cerillos, el otro lado va a tener menos.

E6:



E5:

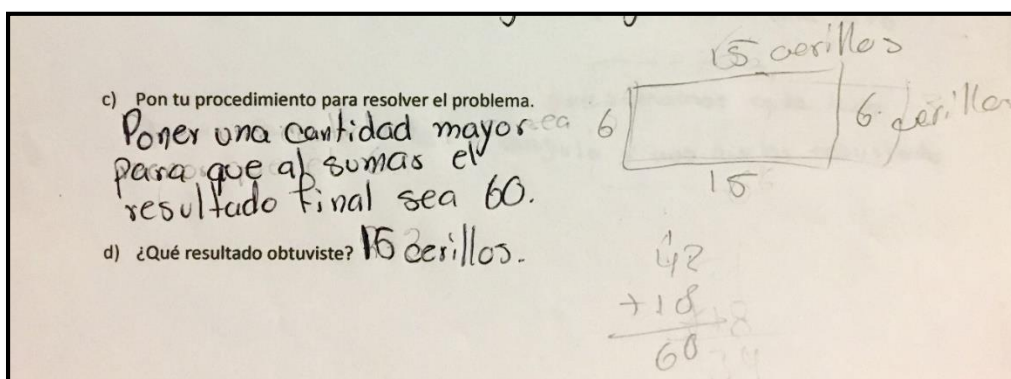


Figura 4. Procedimiento y resultado del problema de la sesión 3.

En la imagen 4 se observa que pone una cantidad mayor para que al sumar el resultado final sea 60.

- 2 alumnos no comprendieron el problema, por lo que no hicieron uso de alguna estrategia.

COMENTARIO: Se nota el gran avance de 10 alumnos de los 12 asistentes en cuestión al uso de una estrategia en comparación a los ejercicios empleados en sesiones anteriores, ya que al momento de comenzar con el procedimiento, relacionaron el problema con el dibujo empleado en los resultados anteriores, lo cual los ayudó a razonar de mejor manera el problema y algún modo para resolverlo.

SESIÓN 4

PROBLEMA

Ximena dibujó un triángulo con longitudes 6, 10 y 11. Carlos dibujó un triángulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Cuánto mide cada uno de los lados del triángulo que dibujó Carlos?

Resultados: Hubo un gran avance en la forma como respondieron las preguntas guía; por lo que hubo mejores resultados y emplearon una estrategia para resolver el problema fueron 10 alumnos que lo realizaron correctamente de los 12 presentes, por lo que se observó que comprendieron mejor la pregunta del problema; ya que a la hora de responder las preguntas guía mostraron seguridad y fluidez para responderlas, además de no presentar muchas dudas como en sesiones anteriores.

El uso de la estrategia de realizar un dibujo ha sido adquirida por la mayoría, la cual hace que tengan una mejor comprensión y logren entender mejor cada uno de los componentes de los objetivos.

- 6 alumnos tuvieron el siguiente razonamiento:

Suma las longitudes del triángulo de Ximena y lo obtenido lo divide entre 3 que son los lados del triángulo de Carlos.

$$6+10+11= 27$$

$$27/3=9$$

$$9+9+9=27$$

- 4 alumnos tuvieron el mismo procedimiento pero lo copiaron.
- 2 alumnos solo sumaron las longitudes del perímetro del triángulo de Ximena, por lo que obtuvo un resultado erróneo al no tener en cuenta el otro dato que da el problema y además de no tener en claro la cuestión del problema.

SESIÓN 5

PROBLEMA

De un depósito de agua se han sacado los $\frac{3}{5}$ de su contenido. Si quedan todavía 600 litros dentro, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Resultados: Se cumplió el objetivo de obtener mejores resultados a comparación de la sesión 3 sobre un problema parecido, pues se notó el avance de la comprensión del problema además que emplearon mejores estrategias y un mejor razonamiento sobre el tema, de manera que las hojas de trabajo mostraron mejores respuestas por parte de los alumnos.

Se muestran algunos resultados obtenidos por parte de los alumnos.

E1: Al realizar un dibujo entendió el problema, dividiendo su recipiente en 5 partes analizando lo que sobraba. (Imagen 5)

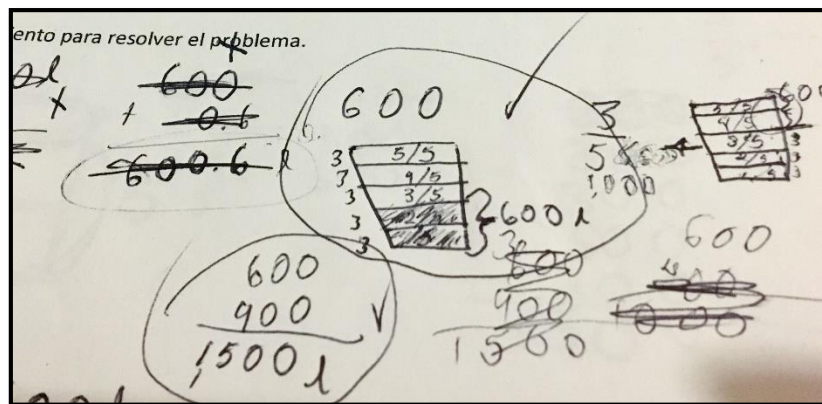


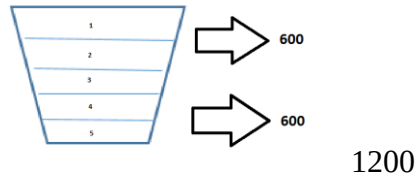
Figura 5. Procedimiento y resultado de E1 a problema de sesión 5.

Tuvo que hacer su dibujo para poder llegar al resultado correcto, por lo que le sirve usar esta estrategia para hacer más fácil su procedimiento.

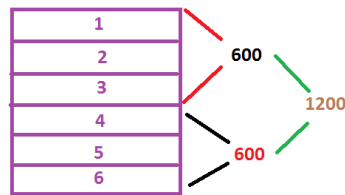
E2,E4: Intentó hacer un dibujo, sin embargo no le sirvió para contestar a la pregunta. Al escuchar el resultado obtuvo 1500 al sumar $300+300+300+300+300=1500$, es decir, sólo copió el resultado.

E3, E6, E13: No empleó ninguna estrategia, por lo que no puso ningún procedimiento.

E9: usó la estrategia de realizar un dibujo, sin embargo no llegó al resultado correcto ya que le faltó contemplar una parte de su dibujo.



E8: Realizó un dibujo, sin embargo falló al realizarlo ya que entendió de manera incorrecta el problema, pues entendió que $3/5$ equivalen a 600 litros.



E7: Utilizó un dibujo para resolver el problema.



Obtuvo que en $2/5$ partes sobran 600 litros por lo que cada quinto tiene 300 litros, así multiplicó 300 por las 5 partes que está dividido el depósito.

E5: Analizó que cada quinto equivale a 300 litros y al sumar 5 veces obtuvo 1500 litros.

E10: No entendió el problema, por lo que intentó hacer un dibujo, sin embargo, no obtuvo ningún procedimiento ya que su dibujo fue incompleto y no le sirvió para llegar a un buen procedimiento.

SESIÓN 6

PROBLEMA

Tres hermanas, Fernanda, Juana y María José, compraron una bolsa de 30 galletas. Cada una se quedó con 10 galletas. Sin embargo, Fernanda pagó 8 pesos, Juana 5 pesos y María José 2 pesos. Si se hubieran repartido las galletas proporcionalmente al precio que cada una pagó, ¿cuántas galletas le habrían tocado a Fernanda?

Resultados: Este problema de proporcionalidad es parecido al problema aplicado en el diagnóstico, por lo que se cumplió el objetivo de ver los avances que se obtuvieron con el paso de las sesiones. En las respuestas de los estudiantes se observa que comprenden la incógnita del problema, además que tienen mejor dominio del tema y emplean mejor los datos proporcionados. Lo anterior se concluye porque ellos no usaron el algoritmo usual de reparto proporcional sino una variedad de estrategias que los llevó al resultado correcto.

Además de adoptar la estrategia de hacer un dibujo, comenzaron a organizar sus datos en tablas o listas, seis alumnos obtuvieron la respuesta correcta.

Se muestran los resultados obtenidos durante la sesión.

E1: Analizó que por cada peso se puede comprar dos galletas haciendo la división de 30/15; además utilizó una **tipo tabla** con dibujo para completar su procedimiento.



E4: Realizó las siguientes operaciones y llegó al resultado.

$$8+5+2=15$$

$$15 \times 2 = 30$$

$$8+8=16$$

$$5+5=10$$

$$2+2=4$$

$$16+10+4=30$$

E3, E9 y E13: No emplearon ninguna estrategia, por lo que no escribieron ningún procedimiento.

E8: Analizó que cada galleta cuesta 50 centavos, pues hizo la siguiente operación.
Además realizó una tabla, lo cual lo llevó al resultado correcto.

$$30 \times .50 = 15$$

Nombre	\$	Galletas
Fer	8	16
Juan	5	<u>10</u>
Mari	2	<u>4</u>

E6: Realizó primero una división y analizó que por cada peso obtenía dos galletas; por lo que obtuvo lo siguiente:

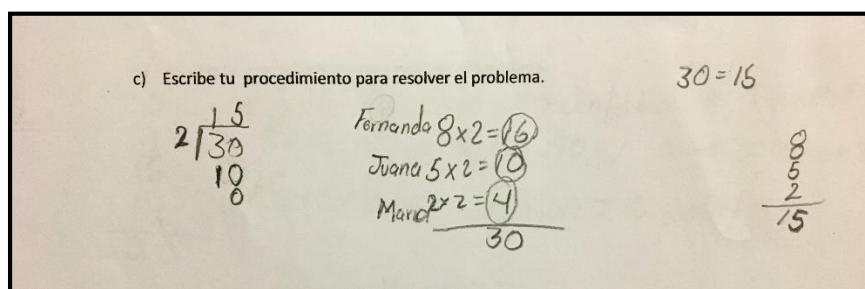


Figura 6. Procedimiento y resultado de E6 del problema de la sesión 6.

E7: Si cada galleta cuesta 50 centavos, a Fernanda le tocaría $8 \times 2 = 16$, Juana $5 \times 2 = 10$ y a María José $2 \times 2 = 4$.

E5: Realizó la división $30/15=2$; por lo que obtuvo lo siguiente: Averigüé cuánto cuesta cada galleta y si por cada peso son 2 galletas entonces Fer tiene 16 galletas, Juana 10 galletas y María tiene 4 galletas.

E13: No escribió ningún procedimiento, sin embargo anotó que a Fernanda le tocaban 10 galletas.

E10: No obtuvo ningún procedimiento.

COMENTARIO: El E8 tuvo un procedimiento distinto, ya que tuvo mejor razonamiento por obtener de manera individual el costo de la galleta.

Hubo un mayor número de resultados correctos a comparación del diagnóstico, por lo que se vio un avance gracias a la comprensión de las preguntas empleadas en la hoja de trabajo.

SESIÓN 7

Un dragón tiene 5 cabezas; por cada cabeza que se le corta le crecen 5 más. Si se le cortan 6 cabezas, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

Resultados: Este problema de razonamiento lógico sirvió para emplear una vez más la estrategia de realizar un dibujo y a pesar de no ser un problema común de matemáticas, los alumnos comenzaron a buscar cómo realizar su dibujo para llegar a un resultado correcto. Algunos de los procedimientos empleados fueron los siguientes:

E1, E2, E4, E9, E6, E5, E10, E12: Hicieron uso de una buena estrategia, ya que era la más conveniente para llegar al problema. Hicieron un dibujo, cada quien a su manera, con bolitas, con caritas simulando el dragón, entre otros. Tacharon las seis cabezas y aumentaban 5, después sumaron y obtuvieron las 29 cabezas.

Un ejemplo de los dibujos empleados se muestra en las figuras 7 y 8.

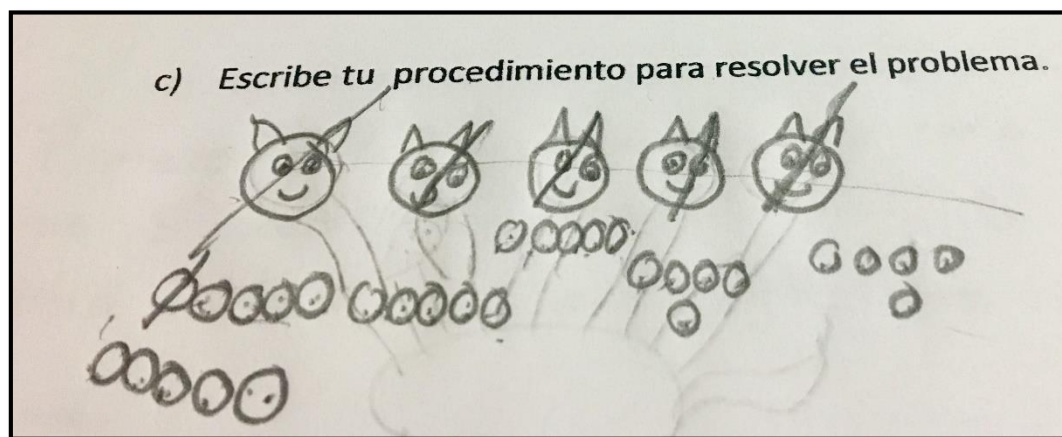


Figura 7. Procedimiento y resultado a problema de sesión 7.

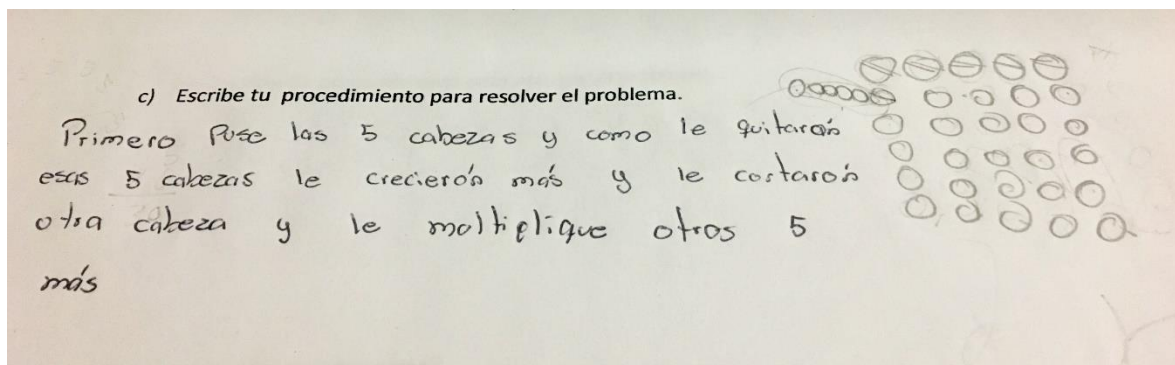


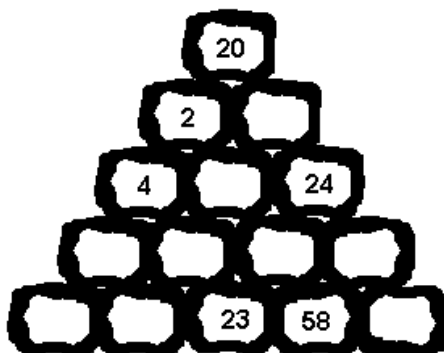
Figura 8. Procedimiento y resultado del problema de la sesión 7.

E8: Además de realizar un dibujo, contestó de una manera muy distinto a la de sus compañeros, pero de manera correcta escribió lo siguiente: Si le corto una cabeza tiene 9 cabezas, si le corto otra, tiene 13 cabezas, al cortar otra tiene 17 cabezas, al cortar otra tiene 21 cabezas, corto otra y tiene 25 y al cortar otra quedan 29 cabezas.

Comentario: En este problema 10 alumnos obtuvieron el resultado correcto, mostrando así que tuvieron una mejor comprensión del problema. Identificaron correctamente los datos, emplearon la estrategia del dibujo y describieron su procedimiento dando justificaciones.

SESIÓN 8

*Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila interior. El número de cada piedra representa la diferencia entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completa los números que faltan, sabiendo que en la **fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez** en el conjunto de todos los números.*



Resultados: Durante esta sesión se trabajó sin preguntas guía para ver si podían usarlas sin tenerlas escritas, por lo que hice hincapié de manera verbal que las tuvieran en consideración, luego, durante el tiempo en el que realizaron el problema pregunté ¿qué pedía el problema?, me contestaron que se necesitaba llenar los números en las piedras que hacían falta, en seguida pregunté sobre ¿qué datos daba el problema? Varios alzaron la mano y respondieron que una piedra está sobre dos piedras, que necesitaban hacer la resta entre esas dos piedras para obtener el número de arriba y además **daban números en distintas piedras**; los dejé continuar con el problema.

- 9 alumnos entendieron de manera correcta el problema, de los cuales 6 lo hicieron mediante prueba y error, por lo que les ganó el tiempo y no pudieron concluir el problema, los otros 3 alumnos iban **restando** la parte de arriba para obtener el número que faltaba, por los que les fue más fácil llegar al resultado correcto de cada una de las piedras.
- Los otros 3 alumnos no intentaron el problema.

SESIÓN 9

A una competencia se inscribieron al principio 13 niños y después otros 19. Deben formarse 6 equipos, de tal forma que cada equipo tenga el mismo número de niños. ¿Al menos cuántos niños más deben inscribirse para que se pueda organizar la competencia?

Resultados: De manera grupal se recordaron las preguntas guía que se utilizaron en las sesiones anteriores como estrategia para resolver el problema.

Fui checando de manera individual y pregunté a cada uno ¿qué pedía el problema? Y contestaban que se necesitaba saber cuántos niños debían inscribirse para poder formar equipos con la misma cantidad de niños, fui verificando que fueran seleccionando los datos necesarios para resolver el problema y así pudieran llegar a un procedimiento correcto, la mayoría logró resolver el problema de manera inmediata y al preguntar su procedimiento respondían correctamente. Sus procedimientos fueron los siguientes:

- Ocho alumnos comenzaron haciendo la suma de $13+19$, obtuvieron de resultado 32 y como debe dividirse en 6 equipos iguales, realizaron la división de $32/6$; por lo que obtuvieron de residuo 2; su razonamiento fue buscar un número que fuera divisible por 6; por lo que decidieron tomar el 36 y al dividirlo entre 6 obtuvieron de residuo 0, así obtuvieron que a 32 se le sumaban 4 y obtenían los niños exactos para poder dividirlos en 6 equipos iguales. Por lo que su respuesta fue 4 niños.
- Dos alumnos comenzaron haciendo la suma de $19 +13$ y obtuvieron 32, de igual manera dividieron $32/6$; por lo que no obtuvieron un residuo 0; así comenzaron a recordar la tabla del 6, se dieron cuenta que $6*5=30$ y al tener 32 niños necesitaban un número más alto que 30, luego hicieron la multiplicación $6*6=36$; así a 36 le restaron 32 y obtuvieron 4. Luego lograron llegar al resultado de 4 niños.
- Un alumno copió la respuesta de su compañero.
- Una alumna hizo la misma suma, sin embargo ella hizo una división entre 4.

SESIÓN 10

11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

Resultados: Se trabajó recordando las preguntas guía que se utilizaron en las sesiones anteriores. Dejé que trabajaran el problema por sí solos, varios intentaban hacer operaciones, no llegaban a un procedimiento correcto, por lo que accedí a dar una pista, diciendo que el problema podría responderse de distintas maneras, una de ellas era usar la famosa regla de 3, la cual no recordaban del todo; por lo que tomé unos minutos para explicar ese tema haciendo uso de un ejercicio de su libro. Después les pedí que intentaran el problema que tenían propuesto.

Fui acercándome a los alumnos para orientarlos y poder llegar a un buen procedimiento.

Comencé preguntando si sabían qué pedía el problema, respondían que sí, que se daban dos terrenos, 11 trabajadores trabajaron uno en 6 días y querían ver cuántos trabajadores se necesitaban para el segundo terreno, pedí que tuvieran bien guardada esa idea, continúe preguntando qué datos podía ocupar para llegar a su regla de tres. Unas alumnas decidieron primero hacer caso a lo que decía la primera parte del problema, por lo que ocuparon las medidas del terreno rectangular y sacaron el área tomando en cuenta que el obrero trabajaría todo el rectángulo, ya obtenida el área continuaron notando que ese trabajo lo hicieron en 6 días, por lo que dividieron entre 6 para obtener el trabajo de cada día; de ahí por sí mismas se dieron cuenta que se tenía que hacer lo mismo para la segunda parte del problema, ya que los datos que daba el problema lo permitía.

Obteniendo esos datos se dieron cuenta que podían hacer uso de la regla de tres sin ningún problema, así obteniendo un resultado correcto.

Para otros alumnos que denotaban menor comprensión fue necesario realizar el dibujo de los terrenos.

- 6 alumnos realizaron las siguientes operaciones:
 - Obtuvieron el área del primer terreno, $220 \times 48 = 10560$
 - Dividieron los metros cuadrados obtenidos por los 6 días que se trabajó ese total; para obtener lo que se trabajó cada día; $10560/6 = 1760$.
 - Obtuvieron el área del segundo terreno; $300 \times 56 = 16800$.
 - Dividieron los metros cuadrados obtenidos por los 5 días que se trabajó ese total; para obtener lo que se trabajó cada día; $16800/5 = 3360$.
 - Realizan su tabla para crear una regla de tres, de la siguiente manera.

m^2	Obreros
1760	11
3360	X

- Al realizar operaciones obtuvieron 21.
- 4 alumnos tuvieron que realizar sus dibujos de terrenos para poder comprender el problema, llegando así a obtener la regla de tres. (Imagen 8)

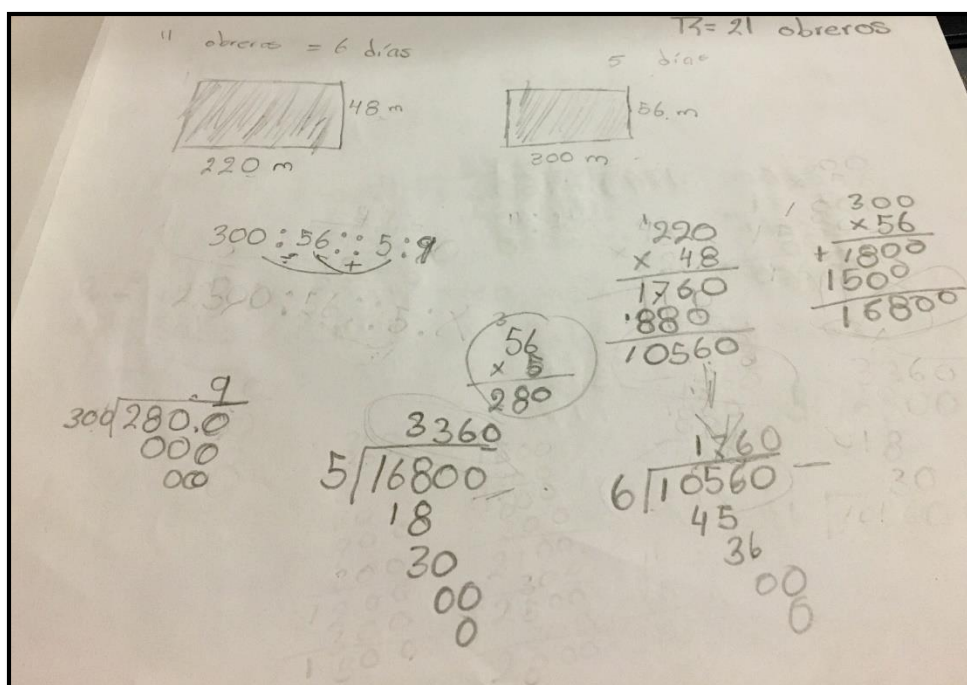


Figura 9. Procedimiento y resultado a problema de sesión 10.

4.3 TRABAJO EN EQUIPO

SESIÓN 1

PROBLEMA

Una cubeta está llena de agua hasta la mitad de su capacidad. Cuando Cecilia le agrega dos litros de agua a la cubeta, la cubeta se llena hasta tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la cubeta?

Resultados de equipo

El equipo 1 operó con los datos arbitrariamente. Calcularon una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ para multiplicarla por $\frac{3}{4}$ y después indicaron una multiplicación pero el procedimiento no corresponde a dicha operación. Enseguida se muestra lo que entregaron como equipo.

PROCEDIMIENTO: $\frac{1}{2} * \frac{2}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{4} * \frac{2}{4} = \frac{6+12}{8} = \frac{18}{8} = \frac{6}{4}$

El equipo 2 escribe que $\frac{1}{2}$ es igual a 4 litros, lo cual es correcto ya que se deduce del problema a partir de observar que dos litros equivalen a $\frac{1}{4}$ de la capacidad de la cubeta. Sin embargo, en su procedimiento, también escriben que 4 litros es igual a 2 litros e igual a 6 litros. Al parecer, ellos pensaron en la suma 4 litros + 2 litros, lo cual da como resultado 6 litros, pero, en lugar del signo más escribieron el signo de igualdad. Como se ha reportado en la literatura, uno de los usos informales del signo igual es como separador de una serie de operaciones que hacen los estudiantes pero que no son equivalentes.

PROCEDIMIENTO: $\frac{1}{2} = 4 \text{ litros} = 2 \text{ litros} = 6 \text{ litros}$

El equipo 3 dio una explicación incompleta, llegaron al resultado correcto más no indicaron detalladamente lo que hicieron para lograrlo.

PROCEDIMIENTO: Calculamos una fracción equivalente y le restamos $\frac{1}{4}$ y el resultado salió 8.

Comentario: Se aprecia que no cuentan con estrategias para empezar a abordar un problema de este tipo. Algunos solo tomaron los datos y operaron, otros logran relacionar los datos y determinar las operaciones que se requieren para resolver, pero cometen errores tanto en las operaciones como en uso de signos como el de suma y el de igualdad.

Análisis de trabajo en equipo

Enseguida se muestra la transcripción del diálogo del equipo 1 como un ejemplo de la forma en que trabajaron en esta etapa.

EQUIPO 1

Moderadora: E1

Secretario: E1

Participantes: E2, E3, E4

Moderadora: ¿Qué hizo cada quién?

E2: Yo sumé las cantidades que dice el problema, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ y me salió $\frac{4}{6}$

E4: Yo puse la suma de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

E3: yo puse algo que no estoy seguro, porque no entendí bien

Moderadora: Yo puse que debemos multiplicar las fracciones que nos dan, pero la fracción de $\frac{1}{2}$ la convertí en su equivalente para tener el mismo denominador y obtuve $\frac{2}{4}$ así hice la multiplicación por $\frac{3}{4}$ y me salió $\frac{6}{4}$.

E2: Tenemos más o menos el mismo resultado sólo que yo tengo $\frac{4}{6}$ y ella $\frac{6}{4}$ hay que ver cuál es el correcto

E4: Yo creo que el de E1 está bien.

E3: Yo digo que la respuesta de E1 es la correcta, porque la suma de E2 está mal.

E2: ¿Por qué está mal?

E3: Por el denominador ni siquiera debe ser 6

Moderadora: Hagamos todos la suma. (Realizaron la suma cada quien en su hoja)

E4: Si está mal, me salió $\frac{5}{4}$, pongamos la respuesta de E1.

Moderadora: ¿Están de acuerdo que pongamos la multiplicación de fracciones?

E3: Si, pongamos ese procedimiento.

E2: Si, pero entonces pongamos las operaciones que hicimos.

E3: E1 pon lo que pusiste en tu hoja y ya te vamos diciendo que le aumentas

Moderadora: (Comienza a responder las preguntas planteadas)

¿Qué es lo que se te pide calcular?

E2: La capacidad de la cubeta

Moderadora: ¿Qué información te da el problema?

E3: Que una cubeta está llena a la mitad y le agregaron 2 litros de agua y se llena hasta $\frac{3}{4}$ de su capacidad.

Moderadora: ok. Ya va la parte del procedimiento. (Anota su procedimiento)

E3: pero las operaciones están mal

E4: Claro que no ¿o sí?

Moderadora: si se hace así

E2: si así se hace

Moderadora: ¿entonces lo dejamos así?

E4: Si lo dejamos así

Moderadora: (Siguió anotando su procedimiento)

¿Qué resultado obtuviste?

E2: 6/4 litros de agua

Moderadora: Explica porque tu resultado es correcto.

E3: Pues porque sumamos las fracciones.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante los 20 minutos de trabajo, la moderadora se limitó a leer las preguntas del cuestionario debido a que no había trabajado de una manera similar, por lo que le costaba guiar a los integrantes del equipo para obtener distintos procedimientos.

En cuanto a los demás integrantes, E3 ha sido el que menos veces ha intervenido, pues se distrae fácilmente y no toma el suficiente interés por la actividad, mientras que E2 aportó de manera positiva ideas para emplear el procedimiento.

Actitudes de equipo

Durante la primera sesión el equipo mostró dificultades para trabajar en el problema, ya que no sabían cómo intervenir de acuerdo a su papel. En este equipo uno de los integrantes no mostró interés en el trabajo por lo que fue necesario que el instructor lo invitara a participar en varias ocasiones. En general, hubo respeto por parte de todos los integrantes hacia las opiniones de sus compañeros.

SESIÓN 2

PROBLEMA

Cuatro primas, Eva, Iva, Rita y Zina, tienen las edades de 3, 8, 12 y 14 años, pero no necesariamente en ese orden. La suma de las edades de Zina y Ema es divisible por 5. La suma de las edades de Zina y Rita también divisible por 5. ¿Cuántos años tiene Iva?

Resultados de equipo

Durante esta sesión solo se pudo trabajar con dos equipos debido a la inasistencia de los alumnos.

El equipo 1 buscó los números que podrían corresponder a las edades de Zina y Ema de modo que la suma de ambas fueran divisibles por 5; por lo que eligieron 12 y 3 y al sumarlas obtuvieron como resultado 15, luego lo dividen entre 5 para verificar que fuera divisible por 5 como se muestra en la Figura 8; al observar que sí lo era tenían aseguradas dos posibilidades para elegir la edad de Zina (12 ó 3); por otro lado buscan de igual forma la edad de Rita, por lo que eligen sumar 8 a la primera opción de la edad de Zina, es decir a 12 y así obtuvieron 20; una vez más verificaron que fuera un número divisible por 5, lo cual acertaron. Así asignaron las edades de cada una de las primas y el número que les sobró fue el que correspondía a Iva.

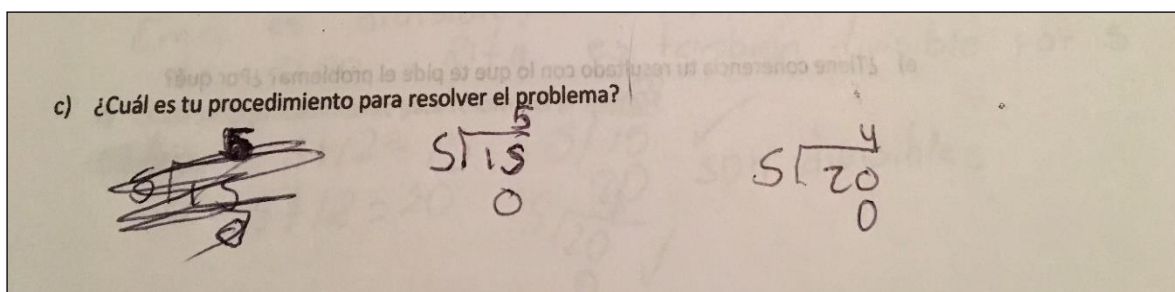


Figura 10: Procedimiento y resultado del equipo 1 al problema de la sesión 2.

El equipo 2 buscó las opciones que correspondieran a las de edades de Zina y Ema, eligiendo los números 8 y 12, realizaron la suma entre ambos y obtuvieron 20, después verificaron que fuera divisible por 5, realizando la división $20/5$ y obtuvieron 4; sin embargo confundieron el término de divisibilidad y en lugar de sólo observar si era divisible tomaron el resultado que obtuvieron en la división y pusieron que la edad que corresponde a Iva es 4, es decir también olvidaron tomar en cuenta todos los demás datos que proporcionaba el problema; por lo que obtuvieron una respuesta errónea.

PROCEDIMIENTO: Sumar $8+12=20$, me da un número divisible por 5, por lo que Iva tiene 8 años.

COMENTARIO: Algunos alumnos aún tienen problemas para tomar en cuenta todos los datos empleados en el problema y así utilizar una buena estrategia para su procedimiento, otros alumnos van trabajando adecuadamente las preguntas guía, empleando todos los datos que proporciona el problema y eligiendo una buena estrategia para abordar el problema.

Análisis de trabajo en equipo

Enseguida se muestra la transcripción del diálogo del equipo 1 como un ejemplo de la forma en que trabajaron en esta etapa.

Moderadora: E5

Secretario: E2

Participantes: E1, E4

Moderadora: ¿Qué hizo cada quién?

E1: Yo primero vi qué número sumados me daba un número divisible por 5.

Moderadora: Yo también y me fijé a qué nombre correspondía cada edad con lo que daba el problema. ¿E2 qué hiciste?

E2: Yo entonces lo tuve mal porque quise sumar las edades y luego dividir las entre 5, creo no entendí el problema.

E1: Si se tenían que sumar las edades pero conforme a lo que te daba el problema.

E2: La verdad yo no obtuve el resultado.

Moderadora: E4 ¿qué opinas?

E4: Yo tampoco entendí el problema, porque lo único que hice fue dividir las edades entre 5.

Moderadora: Mmm creo lo tuyo si está muy mal, ¿les parece si nos quedamos con la respuesta de E1 y la mía? En realidad es lo mismo.

E2: Si, pongamos lo de ustedes.

E4: Si, me parece bien.

Moderadora: OK. Entonces empecemos a responder todo, ¿qué pide el problema?. ¿E2?

E2: Calcular el nombre de Iva

Moderadora: Está bien, ¿qué datos da el problema, E4?

E4: Está dando el nombre de las cuatro primas y las edades, además que la suma de las edades de Zina y Ema es divisible por cinco.

E1: También dice que las edades de Zina y Rita también es divisible por 5.

Moderadora: ¿Les parece si lo resumimos a los nombres y la edad de cada prima?

E1: Si, está bien, para no escribir tanto.

Moderadora: Bueno el procedimiento es el que elegimos al inicio, el resultado, pues son 14 años, por último ¿tiene coherencia nuestro resultado?

E1: Si, porque checando nuestros cálculos nos da 14.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante los 20 minutos de trabajo, la moderadora aún presenta problemas para llevar a cabo su papel, ya que sólo logra que contesten las preguntas por entregar un trabajo, más no para que lo comprenda cada uno de los integrantes.

En cuanto a los demás integrantes, E4 fue la que menos intervenciones hizo en el equipo, ya que en su trabajo individual no logró obtener el resultado correcto por lo que logró tener el interés suficiente para lograr entender el problema.

Actitudes de equipo

Se presentó respeto con las opiniones de cada uno de los integrantes, sin embargo aún se nota el desinterés por el trabajo en equipo por parte de uno de los alumnos, aún no se logra que el problema se comprenda por todos los integrantes del equipo.

SESIÓN 3

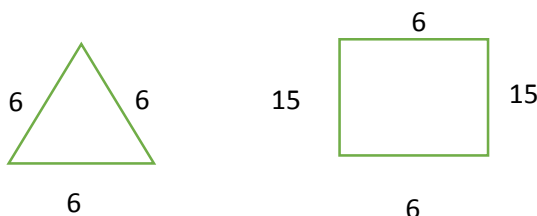
PROBLEMA

Erika y Manuel tienen 60 cerillos entre los dos. Utilizando algunos de ellos Erika construyó un triángulo que tiene 6 cerillos en cada lado. Con el resto de los cerillos Manuel construyó un rectángulo, de forma que uno de sus lados tiene 6 cerillos de largo. ¿Cuántos cerillos de largo tiene el otro lado del rectángulo?

Resultados

El equipo 1 ocupó la estrategia de realizar un dibujo, donde ponen el triángulo que tiene 6 cerillos de cada lado como lo emplea el problema, luego dibujan el rectángulo que construyó Manuel poniendo los 6 cerillos en cada lado de largo, buscan cuántos cerillos pueden ocupar para los otros dos lados con los cerillos restantes, por lo que notan que sobran 30 cerillos, los cuales los dividen entre los dos lados que faltan obteniendo como respuesta 15, así obtienen que cada lado debe tener 15 cerillos.

PROCEDIMIENTO: $6+6+6=18$, $6+6=12$, $30/2=15$, $15+15=30$, luego $18+12+30=60$



El equipo 2 suma el número de cerillos que tiene cada lado del triángulo, luego notan que el rectángulo tiene dos lados con 6 cerillos, por lo que quieren obtener un lado más grande al de longitud 6, al observar que les sobraban 30 cerillos del total hicieron una división entre los dos lados restantes, les resultó 15 cerillos faltantes de cada lado logrando un resultado correcto.

PROCEDIMIENTO: Sumar los cerillos que ocupa Erika y sumar los del rectángulo y poner una cantidad mayor que 6 para que salgan los 60.

El equipo 3 no logró entender que se necesitaba saber cuántos cerillos ocupaban los otros dos lados del rectángulo que construyó Manuel ya que solo sumaron los cerillos ocupados por Erika y Manuel y ahí concluyó su procedimiento, es decir; no llegó a la respuesta correcta.

PROCEDIMIENTO: Sumamos cada lado del rectángulo y del triángulo y nos dio el resultado.

Comentario: En esta sesión se notó una mejor comprensión de las preguntas guía, solo uno de los equipos no resolvió correctamente el problema porque, al parecer, no identificaron lo que se pedía y recurrieron a operar los datos arbitrariamente. Los dos equipos que sí lo lograron tuvieron una buena comunicación, respondieron las preguntas y resolvieron el problema correctamente, gracias también al uso de una estrategia adecuada.

Análisis de trabajo en equipo

EQUIPO 1

Moderadora: E1 (Ya que E3 no cumplió su función)

Secretario: E1

Participantes: E2, E3, E4

Moderadora: Leamos el problema. Lee E3
(E3 lee el problema)

Moderadora: ¿Cómo lo resolviste E2?

E2: Yo hice los dibujos, además que fui poniendo los cerillos en cada una de mis figuras (realiza sus dibujos y les muestra cómo los fue haciendo) tuve 18 cerillos del triángulo y 22 del rectángulo, así que sumé los $18+22+22$

Moderadora: mmmmm ¿para qué sumaste los otros 22?

E2: Pues para ver cuántos había en total

Moderadora: Creo no entendiste bien el problema o yo no te entiendo, bueno veamos qué tiene E4

E4: Yo también hice mis dibujos, pero me salió 42, porque obtuve que dos lados miden 6 y los otros 2 lados miden 15 y la suma me dio 42.

Moderadora: Si a mí también me salió eso, pero nos piden sólo cuánto tiene el otro lado, no el total de cerillos del rectángulo.

E2: Ah pues sí

E4: Entonces mi procedimiento estuvo bien, pero mi resultado no.

Moderadora: por último E3, ¿tú qué hiciste?

E3: Yo hice mi dibujo, luego vi que se ocuparon 18 cerillos, entonces los repartí en el rectángulo, vi que cada lado tenía 6 entonces me salió 15.

Moderadora: ¿Entonces estamos de acuerdo que son 15? ¿Ya entendiste Fernanda?

E2: Si, si entendí mal la pregunta entonces

Moderadora: Entonces llenemos las otras preguntas. ¿Qué pide el problema?

E2: Entonces, pide cuántos cerillos tiene el otro lado del rectángulo

Moderadora: E3 te tocan los datos

E3: Primero que Erika y Manuel tienen entre los dos 60 cerillos, Erika hizo un triángulo y Manuel un rectángulo.

Moderadora: El procedimiento ya quedamos, nuestra respuesta 15 cerillos y la última pregunta ¿qué opinan?

E4: Si, porque sumamos los cerillos de las figuras y salió 30 y completamos para que fueran 60.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante esta sesión se decidió elegir un nuevo moderador, sin embargo no se tuvo el mismo resultado, ya que fue difícil que empleara las preguntas adecuadamente para que los alumnos llegaran a trabajar de manera correcta, por lo que se decidió cambiar al moderador con la que se trabajó desde la primera sesión pues ya tenía una idea de cómo abordar el cargo.

Se notó un mejoramiento desempeño, ya que al tener una idea de cómo abordar el problema en equipo, logró hacer sus intervenciones de modo que cuestionara a los integrantes la justificación de lo que daban de respuesta, así logró que se tuviera un mejor entendimiento hacia los procedimientos de cada uno por parte de los integrantes.

En cuanto a los demás integrantes, hubo más interés de todos, ya que cada uno tenía un procedimiento distinto en el trabajo individual, por lo que cada uno aportó ideas que, aunque fueran erróneas, tuvieron el interés de compartir y poder trabajar en equipo, sin embargo aún hay alumnos que se distraen fácilmente en el relajo entre ellos.

Actitudes de equipo

Se mostró una mejor comunicación entre moderadora y los integrantes a comparación de la sesión 1; se respetaron las ideas y opiniones de cada integrante y se notó un buen interés hacia el problema, por lo que se mantuvo el orden en el equipo.

SESIÓN 4

PROBLEMA

Ximena dibujó un triángulo con longitudes 6, 10 y 11. Carlos dibujó un triángulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Cuánto mide cada uno de los lados del triángulo que dibujó Carlos?

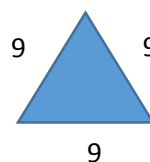
Resultados

Los tres equipos ocuparon la estrategia de sumar los tres lados que proporcionan de un triángulo arbitrario, para obtener el perímetro después notaron que ese perímetro lo debía tener un triángulo equilátero, por lo que hicieron la división de 27 entre los tres lados iguales del triángulo, así obtuvieron que cada lado del nuevo triángulo debía medir 9.

EQUIPO 1

PROCEDIMIENTO: $6+10+11=27$

$$27/3=9$$



EQUIPO 2

PROCEDIMIENTO:

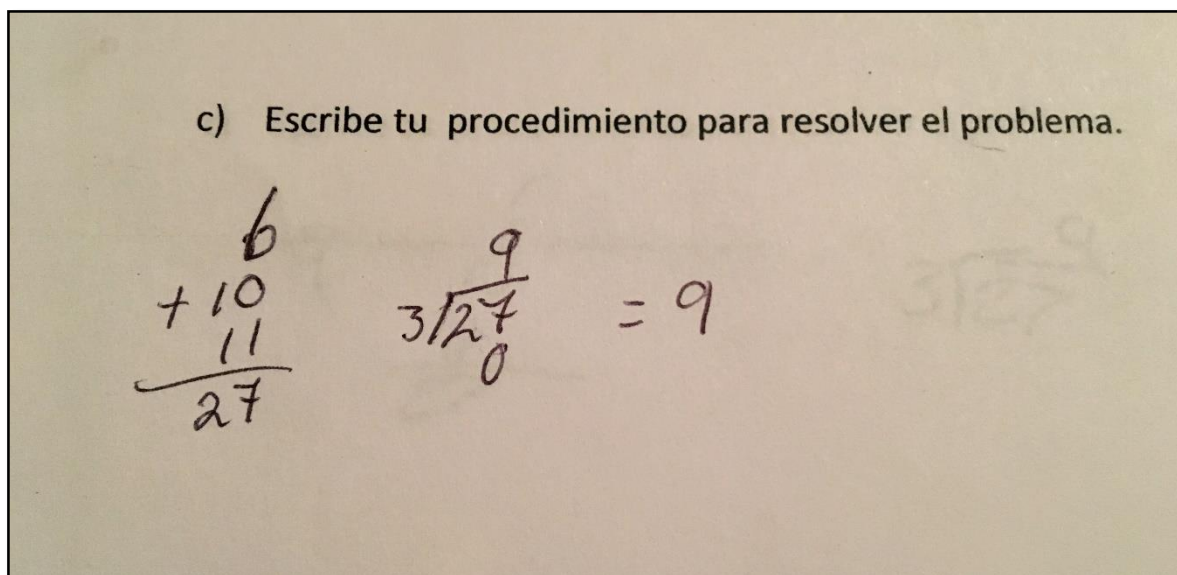


Figura 11: Procedimiento y resultado del equipo 2 al problema de la sesión 4.

EQUIPO 3

PROCEDIMIENTO: Sumamos los lados del triángulo y luego lo dividimos entre 3 y la respuesta es 9. (Figura 11)

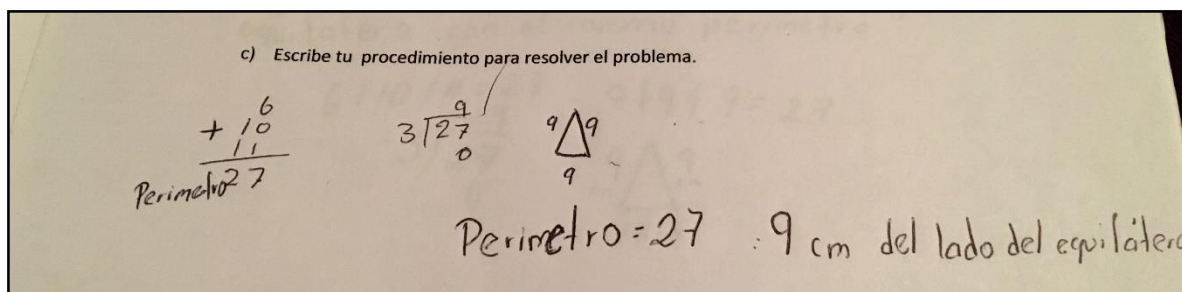


Figura 12: Procedimiento y resultado del equipo 3 al problema de la sesión 4.

Comentario: Los tres equipos emplearon la estrategia de realizar un dibujo para comprender mejor la idea del problema y llegaron a la respuesta correcta.

Análisis de trabajo en equipo

Comenzamos observando la discusión del problema del equipo 2.

EQUIPO 2

Moderadora: E5

Secretario: E5

Participantes: E6, E7, E8, E9

Moderadora: Bueno ya todos sabemos qué dice el problema. ¿Qué hicieron para resolverlo E7?.

E7: Pues sumar los lados del triángulo de Ximena y lo que me dio dividirlo entre 3 y me salió 9 así que ese es el resultado del triángulo de Carlos.

Moderadora: ¿Alguien hizo otro procedimiento?

E6: Yo también hice eso, pongamos eso.

Moderadora: Entonces llenemos las otras preguntas primero.
¿qué pide calcular el problema?, E9

E9: ¿Las longitudes del triángulo de Ximena?

Moderadora: Ajá, bueno de procedimiento pondré lo que ya habíamos quedado, el resultado pues 9 y la última pregunta ¿E8?

E8: pues sí, porque responde a lo que nos están preguntado.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante esta sesión se trabajó con la misma moderadora, de modo que ha ido obteniendo experiencia sobre cómo llevar al equipo de manera adecuada, pues el equipo presentó avance en comprender el cómo debe de trabajarse con las preguntas guía y el cómo abordarlas.

En cuanto a los demás integrantes, E8 fue el que menos intervenciones hizo en el equipo, sin embargo logró entender el problema mediante la ayuda de los demás integrantes y del moderador.

Actitudes de equipo

Hubo desorden por parte de los estudiantes E8 y E7, por lo que hace que E8 se distraiga y no aporte ideas al equipo, mientras que E7 a pesar de su desorden logra contribuir con ideas y comparte su procedimiento para que se tome en cuenta para elegirla como respuesta en la hoja de trabajo.

SESIÓN 5:

PROBLEMA

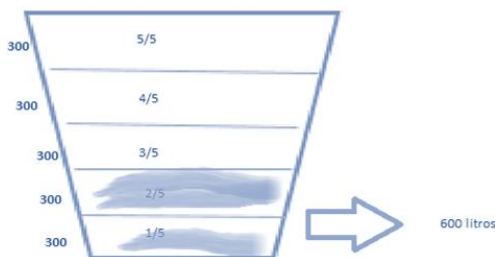
De un depósito de agua se han sacado los $\frac{3}{5}$ de su contenido. Si quedan todavía 600 litros dentro, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Resultados

El equipo 1 usó la estrategia de realizar un dibujo, en el que dividieron el recipiente en 5 partes e iluminaron los 600 litros que quedaron en el recipiente; por lo que observaron que por cada quinta parte había 300 litros, después sumaron los 600 litros que tenía el recipiente con los 900 litros que llenan las otras tres partes restantes; por lo que obtuvieron de resultado final 1500.

PROCEDIMIENTO

$$600 + 900 = 1500$$



El equipo 2 también usó la estrategia de realizar un dibujo, notaron que cada quinta parte del recipiente equivale a 300 litros; por lo que multiplicaron los 300 litros por las cinco partes del recipiente, así obtuvieron el resultado correcto.

PROCEDIMIENTO:

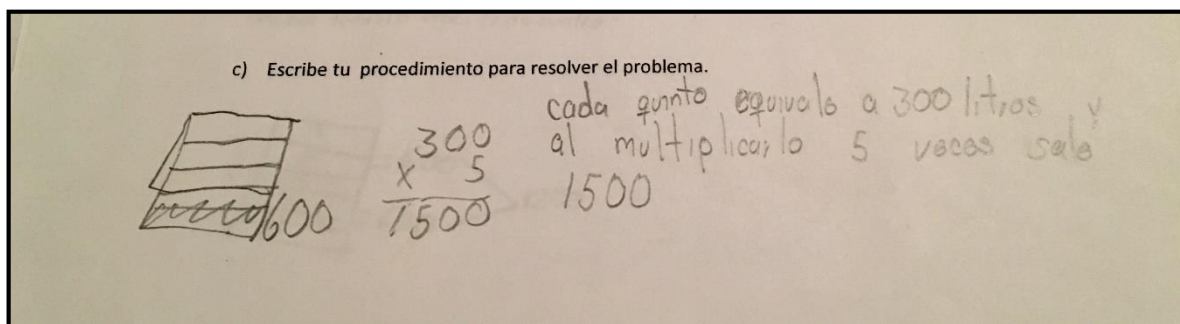


Figura 13: Procedimiento y resultado del equipo 2 al problema de la sesión 5.

El equipo 3 solo hizo la suma de lo que equivale un quinto del recipiente, es decir; notaron que cada quinta parte contenía 300 litros.

PROCEDIMIENTO:

$$300+300+300+300+300=1500$$

Comentario: Mientras se avanza en las sesiones, los alumnos van usando una mejor estrategia de trabajo, en este caso la de realizar un dibujo, esto se debe a que al comprender de mejor manera el problema pueden construir una estrategia adecuada y contestar de manera fluida las preguntas guía.

Análisis de trabajo en equipo

Comenzamos con la discusión del equipo 1, para observar su análisis.

EQUIPO 1

Moderadora: E1

Secretario: E4

Participantes: E2, E3

Moderadora: ¿qué es lo que nos pide el problema? ¿E2? O alguien

E2: que cuál es la capacidad del depósito.

Moderadora: Muy bien, ve anotando E4 por favor. ¿Qué datos nos está dando el problema?

E2: Primero que se han sacado 3/5 de agua y que quedan aún 600 litros

Moderadora: ¿Todos están de acuerdo?

E4, E3: Si

Moderadora: Bueno, entonces ¿qué hiciste E3 para resolver el problema?

E3: No me salió

Moderadora: ¿Pero qué hiciste? ¿o no hiciste nada?

E3: Pues comencé haciendo unas operaciones pero no me salía el resultado y la verdad no supe porque las hice.

Moderadora: ¿E4 hiciste algo?

E4: Sumé 5 veces 300

Moderadora: ¿y por qué sumaste 5 veces 300?

E4: mmmmmmm (no supo que responder).

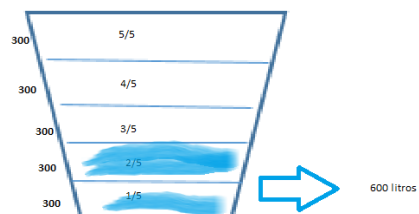
Moderadora: E2 ¿lograste hacer algo?

E2: Yo también sumé 5 veces 300

Moderadora: ¿pero sabes por qué sumaste eso?

E2: la verdad no

Moderadora: Bueno, les explicare lo que yo hice, primero comencé haciendo distintas operaciones pero jamás llegué a nada, cuando nos propusieron hacer un dibujo lo vi mejor, hice mi dibujo como este (dibujo) y me di cuenta que faltaban $2/5$ por sacar así que esos $2/5$ son equivalentes a los 600 litros, pero como son dos partes entonces cada quinto tiene 300 litros y como el bote está formado por 5 partes entonces por eso se suman los 300 litros 5 veces.



E4: Yo también quise guiarme con el dibujo, pero creo que no lo logré.

E2: aaaaah ya entendí.

E3: (silencio)

Moderadora: Así el resultado que obtuve fueron 1500

E2: Si, eso obtuve cuando hice mis operación.

Moderadora: Bueno, ahora la última pregunta, pongamos que si porque $1/5$ tiene 300 litros y en total son $5/5$ si sumamos $600+900$ litros nos da el total del depósito.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante esta sesión la moderadora muestra mejores estrategias para llevar el control del equipo, ya que hace varias intervenciones para que sus compañeros respondan lo que pide la hoja de trabajo y las justificaciones de cada una de las respuestas que dan, una vez que participaron los integrantes y al no ver ninguna respuesta adecuada para el problema propone una, mientras que sus compañeros ponen la atención adecuada para elegir qué respuesta poner en su hoja de trabajo.

En cuanto a los demás integrantes, E2 y E3 fueron los que menos intervenciones hicieron en el equipo, ya que parte del tiempo se distraían entre ellos y les costaba prestar atención al trabajo que realizaban sus compañeros. La moderadora después de un tiempo, les llamó la atención pidiendo que se involucraran y aportaran ideas para el trabajo.

Actitudes de equipo

Aunque hubo distracción en dos integrantes, el resto trabajó unido y así lograron concluir la actividad.

Se pudo notar la buena comunicación que tuvieron al final como equipo, pues lograron involucrarse y se notó la participación de todos los integrantes.

SESIÓN 6

PROBLEMA

Tres hermanas, Fernanda, Juana y María José, compraron una bolsa de 30 galletas. Cada una se quedó con 10 galletas. Sin embargo, Fernanda pagó 8 pesos, Juana 5 pesos y María José 2 pesos. Si se hubieran repartido las galletas proporcionalmente al precio que cada una pagó, ¿cuántas galletas le habrían tocado a Fernanda?

Resultados

El equipo 1 primero anotó las cantidades que aportó cada hermana, después sumaron para obtener el total de lo reunido, lo cual fueron \$15, después notaron que 15 era la mitad de 30, pues al sumar 15 con 15 obtenían 30, así notaron que a cada hermana le tocaría el doble de lo que cooperó, por lo que a Fernanda le corresponderían 16 galletas.

PROCEDIMIENTO:

\$8 Fer

\$5 Juana

\$2 María $16+10+4=30$ galletas

El equipo 2 realizó una tabla en la que ponían las cantidades de lo que aportó cada hermana, sin embargo notaron que cada galleta costaba 50 centavos, ya que lo corroboraron realizando la operación $30 \times .50$ y obtienen los 15 pesos que pusieron en total, así obtienen que por cada peso obtienen 2 galletas, por lo que Fernanda al poner 8 pesos le corresponden 16 galletas.

PROCEDIMIENTO:

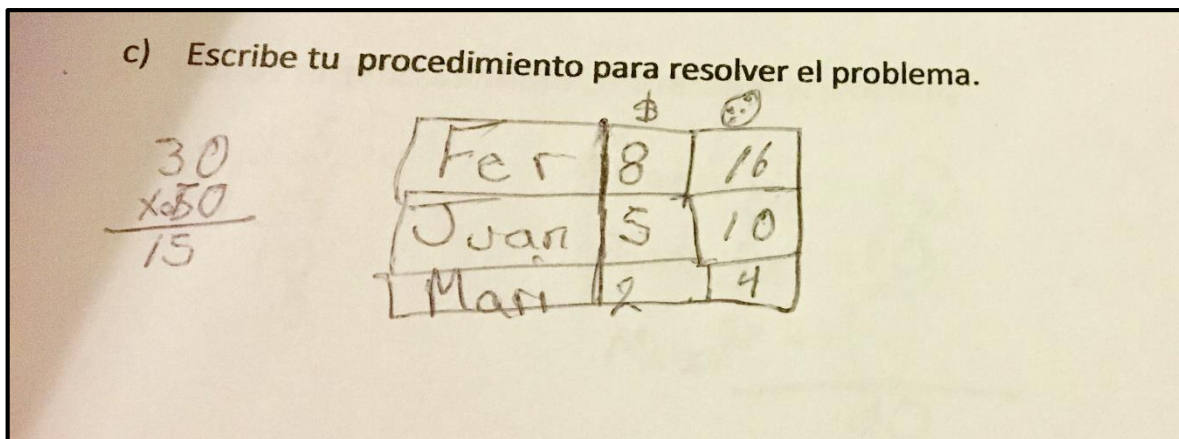


Figura 14: Procedimiento y resultado del equipo 2 al problema de la sesión 6.

El equipo 3 notó que cada galleta costaba 50 centavos, sin embargo no tienen ninguna anotación de cómo llegaron a ese resultado.

COMENTARIO:

Se trabajó con cada uno de los alumnos empleando las preguntas guía para que por sí mismos buscaran la estrategia que los llevara a la resolución del problema,

Análisis de trabajo en equipo

Enseguida se muestra la transcripción del diálogo del equipo 1 como un ejemplo de la forma en que trabajaron en esta etapa.

Moderadora: E10

Secretario: E11

Participantes: E13

Moderador: E13 ¿puedes leer el problema?

E13: (lee el problema)

Moderador: Muy bien, ¿si lo entendieron?

E13: Si, creo que si.

Moderador: ¿tú E11 lo entendiste?

E11: Si, también

Moderador: Bueno, entonces ¿qué es lo que nos pide el problema E11?

E11: pues te pide que calcules cuantas galletas le tocan a Fernanda.

Moderador: Entonces escríbelo, ¿qué datos nos dan E13?

E13 que son 3 hermanas que cooperaron para una bolsa de galletas la cual contenía 30 galletas y que cada hermana cooperó un precio diferente.

Moderador: Bueno ¿ahora qué hicieron?

E13, E11: (Se quedan en silencio)

Moderador: bueno a mí no me dio tiempo terminarlo, pero por lo que entendí podemos sacar el costo de cada galleta y así con lo que cooperaron poder ver cuántas galletas le toca a cada uno.

Busquemos la forma de cómo obtener el costo de la galleta (lee nuevamente el problema).

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

Durante esta sesión, la moderadora logró hacer las intervenciones adecuadas para que los integrantes del equipo comprendan el problema y generen un plan de solución. , a pesar que de manera individual algunos de ellos no lograron llegar al procedimiento correcto, trabajan en equipo para emplear una solución.

Actitudes de equipo

Demuestran tener una buena comunicación como equipo, siempre conservando el orden entre ellos y ponen la mejor actitud para que juntos logren resolver el problema. Hay una buena organización pues todos respetan turnos y opiniones entre sus compañeros de equipo. La moderadora asume su papel y los demás siguen sus indicaciones.

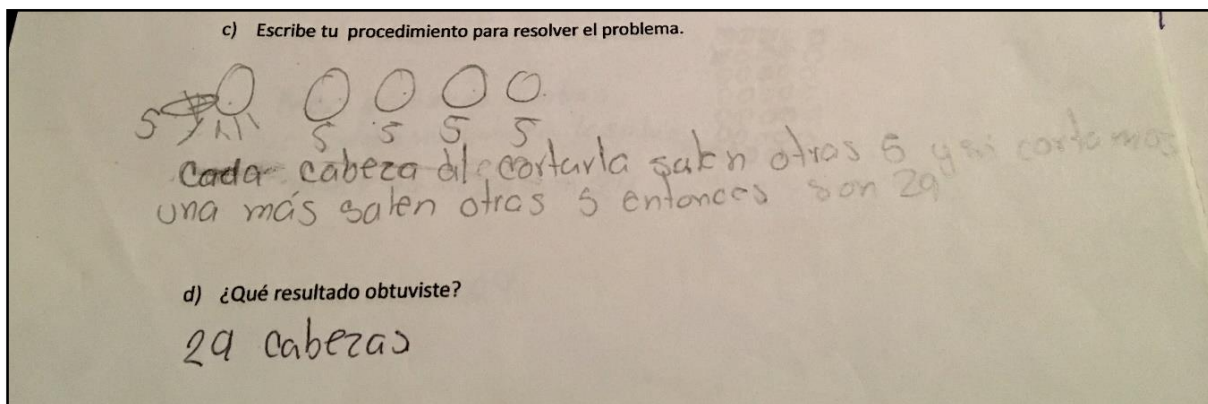


Figura 16: Procedimiento y resultado del equipo 2 al problema de la sesión 7.

El equipo 3 dibujó una cabeza representándola con un círculo y la tachaban, de modo que dibujaban 5 cabezas que salen por cortar una cabeza, representadas mediante 5 círculos, tachaban otra y nuevamente dibujaban las 5 cabezas que debían salir, así sucesivamente hasta cortar las 6 cabezas, es decir 6 círculos, así sumaron todas las cabezas dibujadas omitiendo las tachadas y obtuvieron 29 cabezas. Ver figura 14.

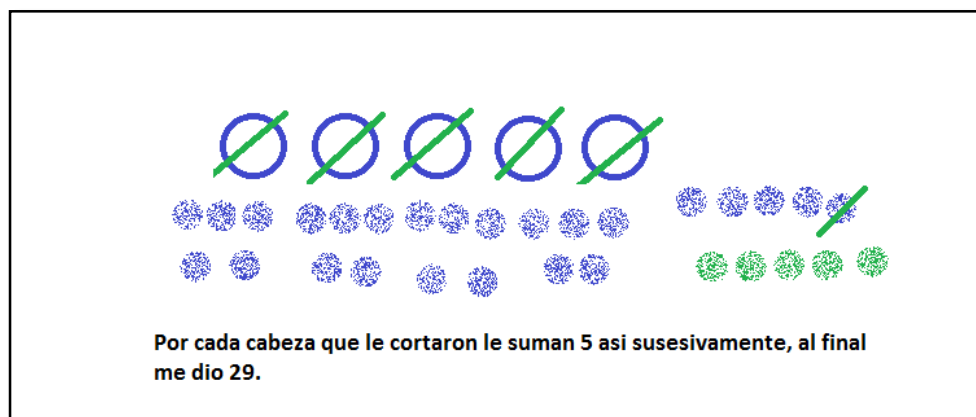


Figura 17: Procedimiento y resultado del equipo 3 al problema de la sesión 7.

COMENTARIO: La estrategia de elaborar un dibujo fue de gran ayuda para los tres equipos ya que lograron entender el problema y obtener el resultado de manera adecuada.

Análisis de trabajo en equipo

Enseguida se muestra la transcripción del diálogo del equipo 3 como un ejemplo de la forma en que trabajaron en esta etapa.

EQUIPO 3

Moderadora: E10

Secretario: E11

Participantes: E12

Moderadora: Comencemos respondiendo las preguntas. E12 responde la primera pregunta, es decir, ¿qué nos pide el problema?

E12: Cuántas cabezas tendrá al final.

Moderadora: Si, está bien, E11 responde la siguiente pregunta, ¿qué datos da el problema?

E11: mmmmmm, pues que el dragón tiene 5 cabezas y que por cada cabeza que le cortan le aumentan otras 5.

Moderadora: E12 ¿cómo lo hiciste?

E12: Pues primero dibujé las 5 cabezas y fui tachando cada una de las cabezas y dibujabas otras 5 y cuando taché las 6 cabezas que piden ya conté todas y me salieron 29.

Moderadora: Yo también lo hice así y ¿tú E11?

E11: No terminé de dibujarlo.

Moderadora: Bueno entonces en la parte de la respuesta pon 29 cabezas y por último ¿tiene coherencia lo que pide el problema?

E12: Pues sí, porque el resultado coincide con lo que nos están preguntando.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

En este equipo demuestran saber trabajar en equipo, pues la moderadora logra que sus intervenciones hagan que todos los integrantes participen activamente y equitativamente, por lo que se ve un control para resolver la hoja de trabajo.

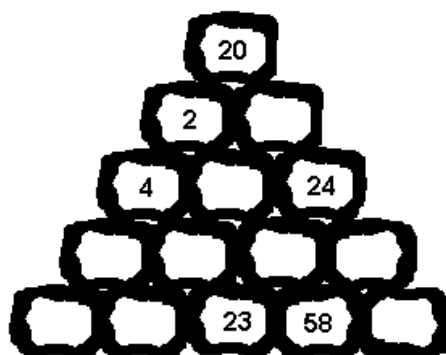
Actitudes de equipo

Demuestran tener una buena comunicación como equipo, siempre conservando el orden entre ellos y ponen la mejor actitud para que juntos logren resolver y entender el problema. Hay una buena organización entre ellos, todos respetan turnos y opiniones entre sus compañeros de equipo.

SESIÓN 8

PROBLEMA

Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila interior. El número de cada piedra representa la diferencia entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completa los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.



Resultados

El equipo 1 comenzó buscando un número que restado con 2 le diera 20, por lo que eligieron el número 22 y al hacer su resta obtuvieron el número 20, después buscaron el número que restado con 4 y luego con 24 obtuvieran 2 y 22 respectivamente, de ese modo continuaron con los demás números haciendo las restas correspondientes para encontrar los números faltantes, sin embargo por falta de tiempo no lograron llenar los espacios de todas las piedras. Ver figura 15

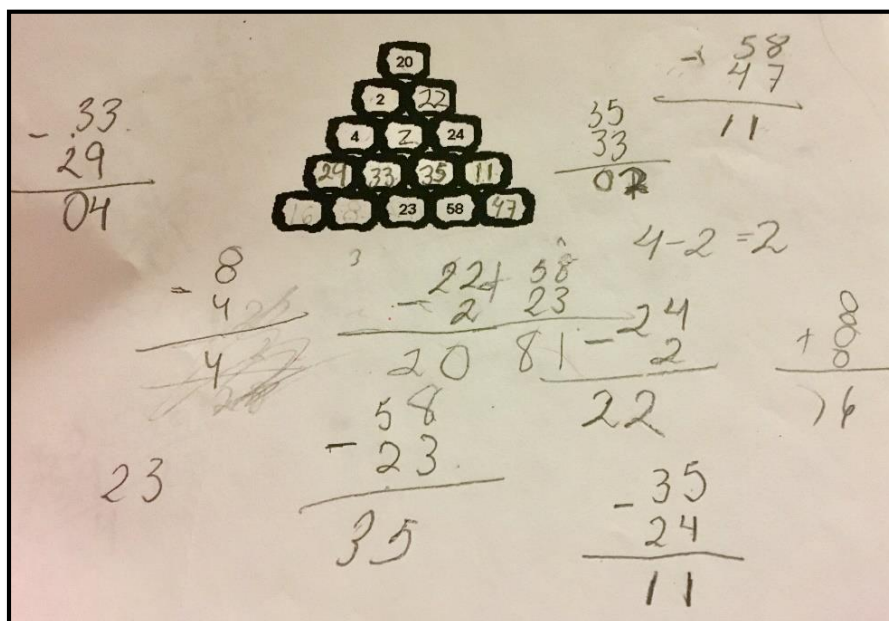


Figura 18: Procedimiento y resultado del equipo 1 al problema de la sesión 8.

En el equipo 2, una integrante explicó cómo logró obtener sus resultados mediante restas de arriba para abajo y entre todos comenzaron a realizar las restas correspondientes y al llegar a la cuarta fila contemplaron los números 23 y 58 para obtener el número de piedras que los ayudaría a obtener los demás resultados.

En el equipo 3 ningún integrante llegó a la respuesta correcta en el trabajo individual, sin embargo, se pusieron de acuerdo para hacerlo con la estrategia prueba y error para llegar a los números que correspondieran a las piedras, comenzaron desde la parte de arriba y al llegar a la cuarta fila hicieron uso de los dos números que da el problema (23 y 58) para continuar llenando los números de las piedras faltantes, no lograron llenar todos los espacios por falta de tiempo. Ver figura 16

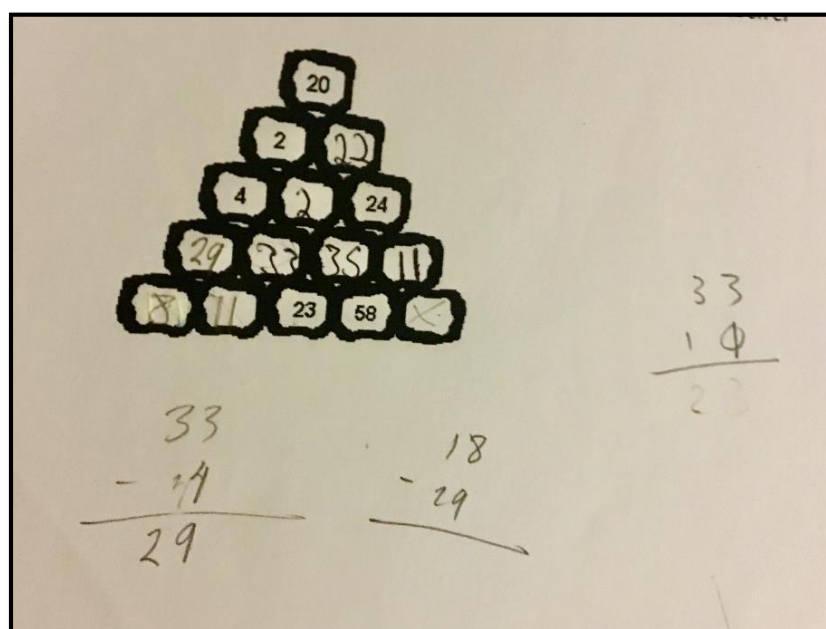


Figura 19: Respuesta del equipo 3 al problema de la sesión 8.

COMENTARIO:

Durante esta sesión ya no se presentaron las preguntas guía en la hoja de trabajo, con la finalidad de observar si los alumnos las usaban sin planteárselas, por lo que se observaría cómo abordarían el problema, lo cual no se presentaron problemas para resolverlo, pues los tres equipos llegaron a entender el procedimiento del problema. Falta decir si utilizaron las preguntas guía para enfrentar el problema y cómo te diste cuenta de eso

Análisis de trabajo en equipo

Enseguida se muestra la transcripción del diálogo del equipo 2 como un ejemplo de la forma en que trabajaron en esta etapa.

Moderadora: E5

Secretario: E6

Participantes: E7, E8, E9

Moderadora: para empezar ¿si les quedó claro lo que nos pedían y lo que nos estaban dando?

E8: yo sí, yo lo terminé

E6: yo también, igual lo terminé

E7: A mí me faltó por encontrar números pero si entendí lo que nos pedían

Moderadora: ¿tú E9?

E9: mmmmmm, pues si

Moderadora: entonces ¿qué es lo que estaba pidiendo el problema?

E8: Pues que llenemos los números que faltan ¿no?

Moderadora: ¿qué datos podemos sacar del enunciado?

E6: los números que nos están dando y nos dicen que una piedra encima de otras dos es el resultado de la resta de las piedras sobre la que está

Moderadora: entonces sólo es ir buscando los números que coinciden ¿no?
Pues al inicio todos obtuvimos 22 luego 2 y ahí ya empieza lo difícil.

E6: No tanto, sólo es ir de abajo para arriba, ese 23 y 58 nos ayudan y esa resta sale 35 y ya de ahí le seguimos

E7: con razón no me salió, porque no consideré esos dos números

E8: ¿entonces cuáles eran los números correctos para ver si estuve bien?

E6: 22, 2, 29, 33, 35, 11, 27, 56, 47

E8: Sólo fallé 3, tal vez mis restas estuvieron mal.

Valoración del proceso:

Analicemos el trabajo en equipo desde los siguientes ángulos: los protagonistas y actitudes como equipo.

Los protagonistas

A comparación de las primeras sesiones, la moderadora verifica desde el inicio que el problema quede claro para cada uno de los integrantes del equipo; luego continúa con las intervenciones de cada uno de los integrantes motivando a que participaran para contestar la hoja de trabajo.

Se puede notar que, a pesar del paso de las sesiones, **E7** aún tiene pocas intervenciones; sin embargo, toma mejor actitud para colaborar con el equipo, pues pone atención a las opiniones de sus compañeros y trata de estar atenta a las decisiones que toman.

Actitudes de equipo

El **equipo** muestra un mejor trabajo, ya que cada uno de los integrantes muestra el interés necesario para que todos participen, por lo que hay una mejor comunicación para trabajar, un mejor desempeño y actitud para escuchar y respetar las decisiones y opiniones de los demás.

Se puede notar mediante el diálogo que a pesar de que no se presentaron las preguntas guía por escrito, la moderadora logró hacerlas a sus compañeros y los integrantes contestaron de manera correcta a cada una de ellas.

SESIÓN 9

A una competencia se inscribieron al principio 13 niños y después otros 19. Deben formarse 6 equipos, de tal forma que cada equipo tenga el mismo número de niños. ¿Al menos cuántos niños más deben inscribirse para que se pueda organizar la competencia?

Resultados

Los tres equipos llegaron a un resultado correcto, observemos los procedimientos de cada equipo.

El equipo 1 comienza con la suma de niños que se inscribieron a la competencia, es decir $13+19=32$; después deciden buscar un número divisible por 6; por lo que a 32 le sumaron 4 para obtener 36 y así al dividirlo entre 6, obtuvieron residuo 0; por lo que 36 si era número divisible por 6 y su respuesta fue que por los menos 4 niños más deben inscribirse. Como “Procedimiento” ellos escribieron las operaciones que los llevaron al resultado.

c) Escribe tu procedimiento para resolver el problema.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 19 \\ \hline 32 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 36 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 5 \\ 6 \overline{) 32} \\ \underline{30} \\ 2 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{) 36} \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

Figura 20: Procedimiento y resultado del equipo 1 al problema de la sesión 9.

El equipo 2 comienza con la suma $12+19=32$ que son los niños inscritos en la competencia y lo dividen entre 6, al no obtener un número exacto se tuvo que encontrar un número divisible por 6 y 36 fue una opción entonces a 32 le sumaron 4, $32+4=36$, por lo que obtienen que se necesitan menos 4 niños más. En este equipo se aprecia que en el “Procedimiento” no solo incluyen las operaciones sino que además redactan el razonamiento que los llevó al resultado. Ver figura 18

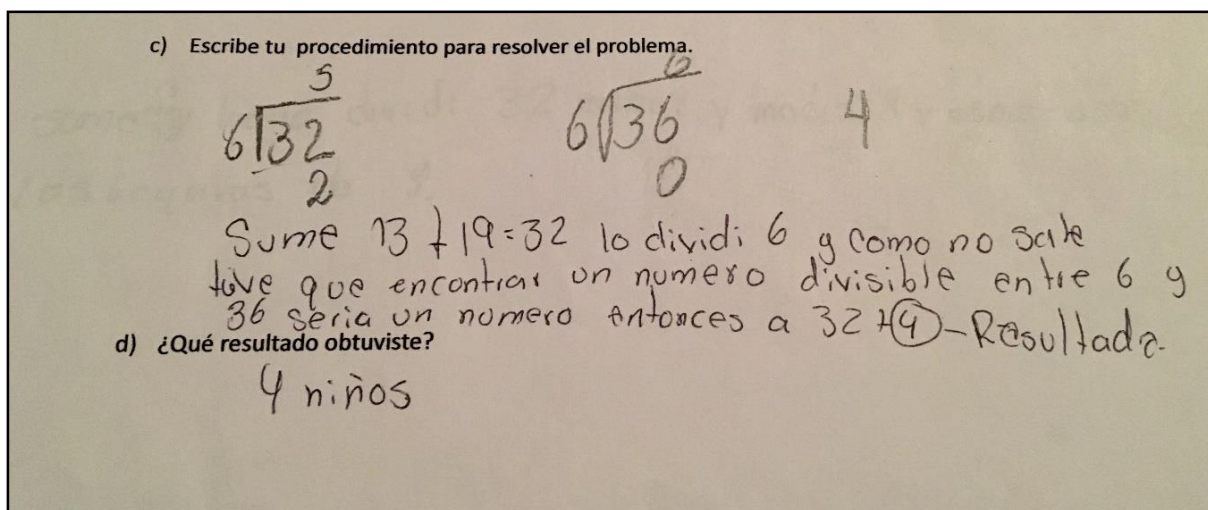


Figura 21: Procedimiento y resultado del equipo 2 al problema de la sesión 9.

El equipo 3 comienza con la suma $13 + 19 = 32$ que son los niños inscritos, luego realizan la multiplicación $6 \times 6 = 36$ para ver cuántos niños necesitan para formar los 6 equipos con los 6 niños cada uno; al obtener 36 nota que a 32 le falta 4 para llegar a 36, por lo que su resultado es que necesitan por lo menos 4 niños. También para este equipo el “Procedimiento” es el conjunto de operaciones que los condujo al resultado. Ver figura 19

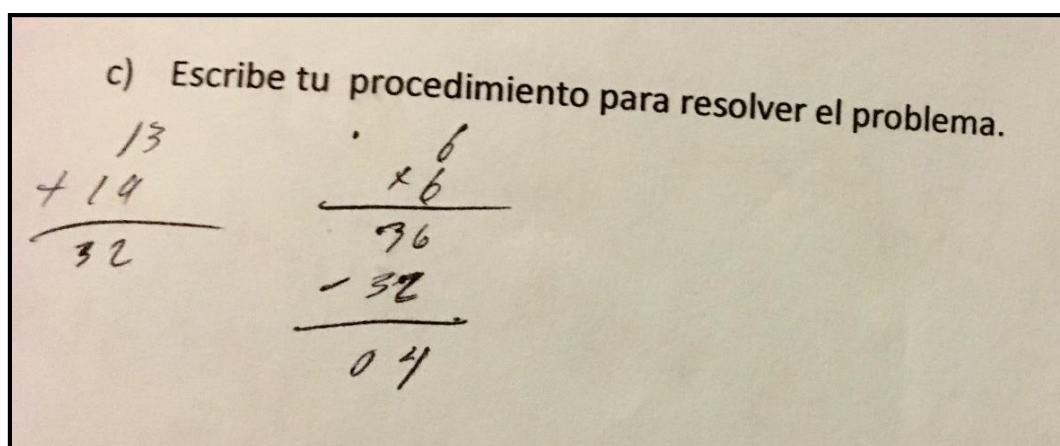


Figura 22: Procedimiento y resultado del equipo 3 al problema de la sesión 9.

Comentario: Lograron tener una mejor comunicación para llegar a resolver de manera correcta el problema, además de emplear correctamente los datos dados por el problema, teniendo una mejor convivencia y mejores resultados como equipo.

En esta sesión no fue posible anotar el diálogo de los equipos.

SESIÓN 10

PROBLEMA

11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

Resultados

Dos equipos obtuvieron la respuesta correcta, al equipo 3 no le dio tiempo contestarlo. Observemos a continuación los diferentes procedimientos.

El equipo 1 obtuvo las áreas de cada terreno, luego las dividieron por los días en los que se trabajaron es decir 6 días para el primer terreno y 5 días para el segundo, luego realizaron una regla de tres, empleando a los obreros que trabajaron el área del primer terreno dividido en los 6 días (1760), después ponen su incógnita para obtener el número de obreros que trabajarán el área del segundo rectángulo dividido por los 5 días trabajados (3360), así al realizar las operaciones correspondientes a la regla de tres obtienen 21 obreros.

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. The calculations are as follows:

- Top left: $220 \times 48 = 10560$
- Top right: $300 \times 56 = 16800$
- Middle left: $10560 \div 6 = 1760$
- Middle right: $16800 \div 5 = 3360$
- Bottom left: $3360 \times 11 = 36960$
- Bottom right: $36960 \div 1760 = 21$

Figura 23: Operaciones encerradas tomadas en cuenta para el procedimiento.

El equipo 2 comenzó obteniendo el área del primer terreno, lo cual les dio 10560 m², de igual manera para el segundo terreno obtuvieron 16800 m², después lo dividen entre 6 y 5 días que plantea el problema en los cuales fueron trabajados respectivamente finalizan elaborando una tabla para resolver una regla de tres como se muestra a continuación:

<i>m²</i>	obreros
1760	11
3360	X=21

AL realizar las operaciones correspondientes obtienen como respuesta 21 obreros, lo cual es correcto.

EQUIPO 3: NO TIENE PROCEDIMIENTO.

Comentario:

El equipo 3 no tiene procedimiento ya que al compartir sus procedimientos y tratar de ponerse de acuerdo, les ganó el tiempo. Los demás equipos mejoraron con el trabajo en equipo, pues al presentarse un problema con mayor cantidad de datos los supieron emplear de manera correcta y además la comunicación entre integrantes fue esencial para lograr llegar al procedimiento correcto. Se notó la participación de cada uno de los integrantes de ambos equipos y el respeto mutuo.

En esta sesión no fue posible anotar el diálogo de los equipos.

4.4 Discusión de los resultados

A continuación se realiza un resumen de los resultados obtenidos de manera individual y en equipo, de modo que observemos el progreso que se tuvo con la aplicación del taller durante las 10 sesiones.

DIAGNÓSTICO

Durante esta sesión se pudo observar que los alumnos emplean un buen procedimiento para resolver algún ejercicio común de clase, sin embargo al poner algo diferente a ello como lo son los problemas matemáticos, presentan dificultades para poder seleccionar los datos necesarios para resolver el problema, además que no comprenden la pregunta del problema.

TRABAJO INDIVIDUAL

- Durante las primeras dos sesiones, se puede notar que los alumnos no comprenden las preguntas guía que se presentaban en la hoja de trabajo, pues no hacían uso de todos los datos que se presentaban en el problema, por lo que no comprenden qué estrategia usar para elegir el procedimiento adecuado a la solución del problema, es decir actuaban de manera mecanizada y optaron por hacer operaciones sin comprender la incógnita del problema.
- Como se mostró en la sección de resultados, tanto en el diagnóstico como en las dos primeras sesiones, los alumnos realizaron operaciones arbitrarias con los números que aparecían en el problema. En las dos primeras sesiones no entendían cómo usar las preguntas guía y no seleccionaron ninguna otra estrategia.
- Durante la sesión tres aún se presentaron dificultades con las preguntas guía, sin embargo, comenzaron a encontrar una estrategia adecuada para usarla en su procedimiento.
- Durante las sesiones 4, 5, 6 y 7 se notó un avance por parte de los alumnos sobre las preguntas guía ya que comenzaron a comprender a qué se refería cada una de ellas, esto se debe a la ejemplificación de dichas preguntas y al trabajo en equipo, pues también se logró que comprendieran cómo resolver el problema. Además, los alumnos hicieron uso de los datos que proporcionaba el problema, por lo que comenzaron a comprender los problemas y a emplear la estrategia de realizar dibujos, de modo que un mayor número de estudiantes logró tener un procedimiento y resultado adecuados. Una prueba de esto es la sesión 5, en la que se notó un avance en comparación al problema similar propuesto en la sesión 1, pues los alumnos lograron utilizar todos los datos que proporciona el problema, lo cual los llevó a proponer un procedimiento adecuado así como la comprensión de las preguntas guía.

De igual manera, durante la sesión 6 se notó el mismo avance en comparación con el problema propuesto en el diagnóstico, ya que en las respuestas se observa que los alumnos lograron comprender la condición del problema sobre el reparto proporcional, y en el diagnóstico la mayoría falló en ese aspecto. De esta forma se notó el avance para utilizar un procedimiento adecuado y lograr llegar a la respuesta correcta.

- Durante las sesiones 8, 9 y 10 los alumnos lograron tener ya presentes las preguntas guía sin necesidad de que estas aparecieran en las hojas de trabajo. La mayoría de alumnos ya sabían cómo abordar el problema desde una buena identificación de datos hasta elegir la estrategia adecuada para ejecutar un procedimiento. Además, al momento de discutir las respuestas se les hacían las preguntas de manera verbal y sabían cómo contestar.

TRABAJO EN EQUIPO

- Durante las primeras dos sesiones, se pudo notar que los alumnos no sabían cómo trabajar con un moderador y un secretario, además, se notaba el desinterés por el trabajo en equipo, había desorden y no se trabaja de manera adecuada. Por lo menos un alumno por equipo no prestaba la atención necesaria para comprender el problema.
- Durante la sesión 3 se decidió continuar con el mismo moderador, pues al intentar cambiar, el nuevo moderador no sabía cómo hacer las preguntas de la hoja de trabajo. Durante esta sesión aún se presentó desorden entre compañeros.
- Durante las sesiones 4 y 5, los alumnos ya tenían noción del cargo que tenía cada uno, los moderadores fueron obteniendo experiencia para hacer preguntas adecuadas a sus compañeros para contestar la hoja de trabajo, así como para explicar su procedimiento. Aún se notó un poco de desorden, sin embargo se consiguió el respeto por parte de cada integrante hacia las opiniones de los compañeros que participaban. Durante las sesiones 6 y 7 se notó un avance en el trabajo del moderador, se observó que ya sabía aplicar las preguntas adecuadas para la participación de cada uno de sus compañeros, además, como equipo se mostraron orden e interés. Se logró una mejor comprensión de los problemas.
- Durante las sesiones 8,9 y 10 los alumnos lograron tener ya presentes las preguntas guía por lo que los moderadores ya sabían qué pregunta hacer a cada estudiante, presenta también el control del equipo y consiguen la participación de todos los integrantes así como el respeto hacia las opiniones.

5. CONCLUSIONES

Para cumplir el objetivo del presente proyecto se propuso la implementación de un taller cuyo diseño se basa en las aportaciones de Polya (2016), Schoenfeld (1992) y Callejo (1994) y recoge algunos de los problemas de los folletos introductorios propuestos por los autores Aguilera, García, Gómez, Hubard, Pérez y Gómez en la página de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, pues todos los autores buscan alejar a los estudiantes del estudio tradicional de las Matemáticas, que promueve la memorización y mecanización, para impulsar otro que busque desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes.

Para determinar si el taller alcanzó el objetivo, hubo que comparar los resultados obtenidos durante la prueba diagnóstica, en los que se observó las distintas estrategias que los estudiantes traían consigo, y la prueba final. Durante las 10 sesiones que conformaron el taller se aplicó, tanto de manera individual como en equipo, hojas de trabajo que contenían un problema y preguntas guías. Se observó un avance gradual en el desarrollo de destrezas, es decir, la comprensión de la pregunta del problema, la selección de los datos necesarios para resolver el problema, la aplicación adecuada de la o las estrategias para la solución y el avance en las actitudes para trabajar adecuadamente en equipo fueron mejorando conforme se avanzaba en el programa.

Por tanto, es posible afirmar que no hay lugar para dudar de la importancia de una buena preparación y capacitación en los estudiantes en cuanto a las estrategias que deben emplear, con todo y sus pasos a seguir, para la solución de un problema matemático. La observación del trabajo de los estudiantes permite concluir que el uso de este tipo de preguntas guía facilita, en la mayoría de los alumnos, la comprensión de los problemas y la decisión sobre el camino a seguir para llegar a su solución.

Además, es evidente que con la práctica de esta metodología, los alumnos aprenden a trabajar en equipo y mejoran sus actitudes para lograr un trabajo ordenado y exitoso. Sin embargo, cabe mencionar que a algunos les costó mayor esfuerzo resolver los problemas, ya que no lograban un procedimiento adecuado y, en consecuencia, un resultado correcto. Lo anterior no impidió que se involucraron en el trabajo en equipo.

Por lo que definitivamente hubo un progreso en los estudiantes para la resolución de problemas de manera individual y en equipo. Esto nos permite sugerir que este tipo de talleres son una alternativa para que estudiantes de secundaria trabajen en equipo, despierten su interés y desarrollen sus habilidades hacia la resolución de problemas de matemáticas.

6. APORTACIONES

El taller propuesto para este trabajo de investigación promueve el desarrollo de destrezas de pensamientos para resolver problemas matemáticos y la coordinación para trabajar y tomar decisiones de forma colectiva, por lo cual puede ser un método de aprendizaje muy relevante para la enseñanza de las matemáticas, sobre todo porque diversos investigadores en el campo proponen un cambio en el esquema educativo, hacia uno que justamente promueva este tipo de actitudes y habilidades.

No obstante, durante el taller se observó que algunos alumnos tenían un mal comportamiento. Aunque se logró en ellos un avance en el trabajo individual y ocasionalmente se involucraron con sus respectivos equipos, es importante mencionar que fue imposible cambiar sustancialmente su comportamiento durante los meses trabajados, por lo que considero que al iniciar un taller es importante tener claro cómo trabajar con las malas actitudes de algunos estudiantes.

Es importante recordar que los alumnos aprenden de diferente manera, por lo que es necesario tener presente desde el inicio del taller que obtendremos desempeños diferentes, que en algunos se notará mayor aprovechamiento que en otros, por lo cual es necesario trabajar en la homogeneización de los conocimientos y las habilidades.

En términos generales el trabajo en equipo es satisfactorio, ya que todos tuvieron oportunidad para decir lo que piensan sobre los problemas, en la mayoría se observó un buen desempeño durante las discusiones y los acuerdos de decisiones, así como responsabilidad según el papel que se les asignó.

7. BIBLIOGRAFÍA

Aguilera, García, Gómez, Hubard, y Pérez. (2016). *Problemas Introdutorios para la 30a Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. 2016, de Olimpiada Mexicana de Matemáticas Sitio web: http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introdutorio_30.pdf

Beltrán. (2017). *Aritmética de Baldor*. 2017, de Cálculo 21 Sitio web: https://calculo21.blogspot.com/2017/01/problemas-de-quebrados-aritmetica-de_5.html

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, España: Narcea.

Calvo, Durán, Rodríguez y Saras. (2010). *Problemas de Matemáticas de 1º a 3º de ESO*. 2010, de Matemáticas de 1º a 3º de ESO Sitio web: http://blogs.mat.ucm.es/rrdelrio/wpcontent/uploads/sites/26/2018/06/ejer_problemas_1_3eso-1.pdf

García, Aguilar y Pérez. (2003). *Problemas Introdutorios para la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. 2003, de Olimpiada Mexicana de Matemáticas Sitio web: http://www.ommenlinea.org/wpcontent/uploads/practica/folletos/Introdutorio_17.pdf

García, Pérez, Aguilar y Aguilera. (2013). *Problemas Introdutorios para la 27a Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. 2013, de Olimpiada Mexicana de Matemáticas Sitio web: http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introdutorio_27.pdf

García, Gómez, Hubard y Pérez. (2015). *Problemas Introdutorios para la 29a Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. 2015, de Olimpiada Mexicana de Matemáticas Sitio web: http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introdutorio_29.pdf

García, Gómez, Hubard y Pérez. (2018). *Problemas Introdutorios para la 32a Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. 2018, de Olimpiada Mexicana de Matemáticas Sitio web: http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introdutorio_32.pdf

Pifarré, M., & Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(2), 297-308.

Polya, G. (2016). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Sánchez, N. M. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Pedagogía Universitaria*, 8(3).

Sardina. (2011). *Pasatiempos*. 2011, de Departamento de matemáticas Sitio web: <http://enebro.pntic.mec.es/msardina/depa/pasat/colofon/cuatro.htm>

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370).