Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Un recorrido por la Geometría Euclidiana

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Mayra Alejandra Herrera Cruz

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Fernando Macías Romero
Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE. 16 de agosto de 2024.

Agradecimientos

Primeramente le agradezco a Dios por haberme permitido conocer la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en donde obtuve muchos conocimientos, aprendí que todas las cosas tienen una razón de ser, ahora soy una persona más analitica aparte de que conocí gente maravillosa.

Quiero expresar mi cariño y agradecimiento a mis padres el Sr. Ruben Herrera Daran y a la Sra. Felipa Cruz Nieva porque a pesar de las dificultades que presenta la vida me brindaron su apoyo para tener una mejor educación y tener mas conocimientos para salir adelante y ser una buena persona. A mis hermanos Fatima Herrera Cruz y Ruben Herrera Cruz que me impulsan a salir adelante y que quiero tanto. A mi pareja Edgar Flores Lopez que siempre me ha motivado y me ha alentado para concluir con mis estudios.

De manera muy especial quiero agradecer al Dr. Fernando Macías y al Dr. David Herrera por confiar en mí, por haber sido muy pacientes y motivarme para la presentación de esta tesis. Mi agradecimento al Dr. Gerardo Hernández Valdez por el conocimiento que me compartió para poder presentar este trabajo. A mis Jurados de tesis: Dr. Raúl Escobedo Conde, Dra. Patricia Domínguez Soto y Dra. María de Jesús López Toriz, por haberme aportado tanto. A Todos, muchas gracias.

Introducción

La Geometría es una de las ramas más importantes de la matemática misma que estudia las figuras tanto en el plano como en el espacio. Todo lo que podemos ver tiene formas desde lo casi invisible hasta lo más grande que podamos imaginar es por ello la importancia de la misma. Su relación con la Aritmética es muy estrecha porque generalmente suelen aplicarse una a la otra y son la base de la matemática.

La enseñanza de ambas es crucial en la formación básica de estudiantes de nivel licenciatura en matemáticas para que puedan comprender la diferencia entre un sistema axiomático y la creatividad para taratar de resolver problemas.

Es por lo anterior ques este trabajo esta dedicado a la "Geometría"

El objetivo de los cursos que se imparten en los primeros años a nivel licenciatura es que los alumnos vayan aprendiendo el arte de la demostración y para empezar a demostrar es necesario saber el curso de Geometría Euclidiana y por eso que centraremos este trabajo en el estudio de la misma.

En el primer capítulo hablamos del origen de la geometría prehelénica, posteriormente hablamos de uno de los Siete Sabios de la antigua Grecia y el primero en dar a conocer resultados generales matemáticos, Thales de Mileto. A continuación, abordamos a un personaje determinante en la historia de la geometría, Euclides; y presentamos a los actores principales de la historia de la geometría, es decir, damos las definiciones de los elementos geométricos básicos y enunciamos los primeros cuatro postulados de Euclides, además de dar un pequeño resumen del contenido de cada uno de los libros de su obra.

En el siguiente capítulo nostramos las propiedades de la congruencia de triángulos basándonos en el esquema axiomático que dimos en el capítulo anterior. Enunciamos el quinto postulado de Euclides y sus equivalencias, para más adelante analizar los criterios de semejanza de triángulos. Hablaremos de la vida y obra del pensador griego Pitágoras y en la de los matemáticos de su escuela, con la finalidad de estudiar uno de los teoremas más demostrados de la historia: el Teorema de Pitágoras. Finalmente, analizaremos algunas propiedades de los puntos y rectas del triángulo.

Después de trabajar con figuras rectilíneas damos turno a el círculo en primer lugar porque no tiene más que una forma.

Finalmente, en el capítulo 3 consideramos brevemente algunos temas de la geometría moderna elemental, como: los Teoremas de Ceva, Menelao y

Desargues; que datan de la Grecia antigua, pero fueron enunciados en función de las magnitudes y adquirieron un aspecto particularmente moderno.

Ahora si, para concluir, siempre que abramos un libro de geometría y no veamos en él más que un cúmulo de verdades tristemente aburridas, preguntémonos: "¿Qué me cuentan estas páginas?" seguramente descubriremos como lo hemos hecho en este trabajo que tras esas verdades tenemos Geometría y algo más...

Índice general

Capítulo 1

Genésis de la Geometría

El aprendizaje de la geometría inicia cuando los niños empiezan "a ver" y "conocer" el mundo físico que los rodea y esto puede conducir a un pensamiento geométrico de alto nivel a tráves de procesos inductivos.

Los orígenes de los conceptos históricos de lo que hoy nosotros conocemos como conceptos matemáticos relacionados con un número, magnitud y forma-se pueden encontrar en el desarrollo de las civilizaciones que habitaron las cuencas de los ríos Nilo en Egipto, Indo y Ganges en la India, Hoang Ho y Yang Tsé Kiang en China y Tigris y Éufrates esto en la antigua Mesopotamia, hace aproximadamente dos mil o tres mil años a. C.

Los griegos, que sus investigaciones geométricas sentaron las bases para el desarrollo de gran parte de la matemática moderna, generalmente asumían que la geometría tuvo sus orígenes en Egipto debido ala necesidad de medir sus tierras. *Se narra que el Rey Sesostris otorgaba a cada habitante un cuadrángulo de tierra para recaudar impuestos en referencia al reparto. Continuamente las medidas de las mismas se hacian pequeñas por el desbordamiento del río Nilo, si esto sucedía tenian que notificarlo con el rey Sesostris para que enviará a sus supervisores para que fueran a medir en cuanto se redujo el terreno y pagar por el proporcional del terreno.* [10, pág. 3]

Por lo anterior es lo que nos hace ver la como una ciencia para La palabra "geometría" significa "medición de la tierra". Pero no podemos garantizar que la geometría científica surgiera por la necesidad práctica, apareciendo en miles de años a.C. en algunas partes del oriente antiguo como una ciencia para apoyar a quienes se hacían cargo de la ingeniería y agricultura.

Más información es otorgada por los papiros de **Moscú** y **Rhind**[1] Con respecto a las matemáticas egipcias, el más importante de ellos es el papiro Rhind, que fue copiado alrededor del 1650 a. C. Este documento se basa en una lista de problemas y sus soluciones, alrededor de 20 de los 85 problemas son geométricos y están relacionados con fórmulas de medida necesarias para calcular áreas de terrenos y volúmenes de los graneros. Cada problema es enunciado en términos de números particulares, y su solución en forma de receta, sin especificar explícitamente la fórmula general usada o la fuente o la derivación del método. Además de que recientemente hay estudios que parecen mostrar que los antiguos egipcios sabían que el área de un triángulo se calcula como la mitad del producto de la base y la altura.

En uno de los problemas del papiro Rhind se calculaba el área de un círculo como el área de un cuadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ de la longitud del diámetro. Comparando este método con la fórmula para calcular el área de un círculo $A = \pi r^2$ observemos que los egipcios sabían con precisión el cociente de la longitud de una circunferencia así como la de su diámetro, es decir, la aproximación de $\pi \approx 3.16$. Esta es una muy buena aproximación de π y puede ser obtenida como sigue. Trisecte cada lado del cuadrado circunscrito alrededor de un círculo de diámetro d, y excluya las cuatro esquinas como indica la Figura 1 [6, págs. 2 y 3].

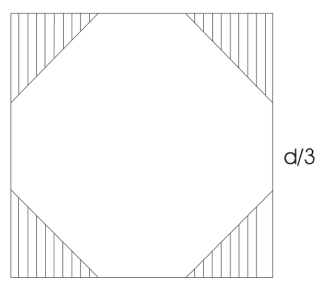


Figura 1.1: Figura 1

Muestre que el área del octágono resultante es

[1]Es un papiro que fue descubierto en el siglo XIX en el templo mortuorio de Ramsés II, en Tebas. Posteriormente, el anticuario Alexander (Harry) Rhind lo adquirió en 1858 y lo trasladó a Inglaterra, y fue entregado al Museo Británico, con excepción de algunos fragmentos que se encuentran en el Museo de Brooklin. El papiro que mide , más de cinco metros de longitud, formado por catorce hojas de papiro, presenta numerosos problemas de diversas clases. Es el tratado más antiguo de matemáticas que se ha encontrado hasta nuestros días.

$$A = d^2 - \frac{2}{9}d^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d^2\right).$$

Algunos de los inconvenientes reflejan familiaridad con los fundamentos de la teoría básica de figuras similares; por ejemplo, tenían conocimiento de que los segmentos correspondientes de triángulos rectángulos de características similares guardan proporciones. Asimismo, las comunidades en Mesopotamia poseían una comprensión del teorema de Pitágoras. Los investigadores de Egipto observaron que un triángulo con longitudes de 3, 4 y 5 unidades constituye un triángulo rectángulo.

En el papiro de Moscú se presenta un caso práctico que ilustra una fórmula exacta para calcular el volumen de una sección de una pirámide cuadrada,

$$V = \frac{h\left(a^2 + ab + b^2\right)}{3},$$

donde h representa la altura, y a y b son las longitudes de los lados de las dos bases cuadradas. Este ejemplo demuestra cómo una fórmula puede derivarse de manera orgánica y singular. Su descubrimiento resulta sorprendente y su demostración involucra cálculos integrales.

Dado que los egipcios escirbieron sus conocimientos en piedras y papiros, los babilonios optaron por tablillas fabricadas con arcilla dura, razón por la cual conocemos sus logros. En contraste, los indios y chinos emplearon materiales de corta duración, como las hojas de palma y el bambú, lo que explica por qué tenemos limitada información sobre sus contribuciones matemáticas.

1.1. Thales, el hombre de la sombra

En el séptimo siglo antes de Cristo, en las costas del mar Egeo Thales se dedicaba a examinar el firmamento en busca de revelaciones sobre el movimiento de los astros. “En una ocasión, mientras contemplaba las estrellas, cayó en un pozo. La gente se mofaba de el, argumentando que alguien incapaz de ver ni siquiera dónde pisaba difícilmente podría comprender los misterios celestiales.”[2].

Todo comenzó con un tropiezo ¿qué desencadenó la caída de Thales? Thales fue el primer “pensador ”registrado en la historia.

[2]Relato de Diógenes Laercio.

No significa que antes de él nadie hubiera reflexionado, pero Thales fue más allá al formular preguntas fundamentales. Se cuestionó sobre la naturaleza del pensamiento, la relación entre lo que piensa y la realidad, y si hay aspectos que escapan a su comprensión. También exploró la composición de la naturaleza. En esencia, esto es lo que conocemos como filosofía.

En la época de Thales, la filosofía y las matemáticas estaban estrechamente vinculadas. Es importante notar que en ese momento no existían los términos "filosofía "ni "matemáticas"; estos conceptos fueron posteriormente descubiertos y, con el tiempo, se diferenciaron.

Thales nació aproximadamente en el año 620 a.C. Dentro de las declaraciones notables que emanaron de su posición destacada, se destaca su famosa máxima: Çonócete a ti mismo"

Thales, fué uno de los siete sabios de la antigua Grecia[3] fue pionero al formular resultados generales sobre objetos matemáticos. No dedicó mucho tiempo a los números; en cambio, concentró su atención en las figuras geomtŕicas, tales como rectas, triángulos y circunferencias (vea las definiciones 1.3, 1.5, y 1.6).

Thales se distinguió al ser el pionero en conceptualizar el ángulo(vea la Definición 1.4) como una entidad matemática, añadiéndolo como la cuarta dimensión a la tríada geométrica preexistente que comprendía longitud, superficie y volumen.

En el siglo IV a. de C. el filósofo Proclo (en sus comentarios sobre el primer libro de Euclides de Los Elementos) afirma que Thales "demostró" los siguientes resultados:

1. Aseguro que los ángulos que se generan en el vértice por la intersección de dos líneas son equivalentes.[4] (vea la Figura 2).

[3] Los demás son Pítaco, Bías, Solón y otros tres que varían según diferentes autores.

[4] Aunque Thales, en efecto, descubriera el teorema, seguramente no lo probó de manera rigurosa. Fue Euclides quien lo hizo en su Proposición XV del Libro I de sus Elementos.

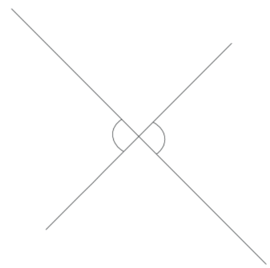


Figura 1.2: Figura 2

2. Demostró que a cada triángulo puede corresponder una circunferencia: la circunferencia circunscrita (vea la definición **??**), de la que propuso una construcción general (vea la Figura 3).

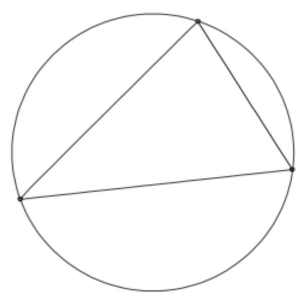


Figura 1.3: Figura 3

Una circunferencia circunscrita al triángulo es aquella que atraviesa cada uno de sus vértices. En otras palabras, si tenemos tres puntos que no están en línea recta, existe únicamente una circunferencia que los engloba. Esto implica que tres puntos no alineados no solo determinan un triángulo como es obvio, sino también una circunferencia.

A una figura geométrica compuesta por tres ángulos se le denomina triángulo aunque podríamos igualmente referirnos a ella como tri-lado. Los antiguos adoptaban esta terminología, utilizando la palabra trilátero, siguiendo el mismo esquema que empleaban para referirse a un cuadrilátero. En consonancia con este enfoque epistemológico ¿Isósceles? proviene de Iso: igual y Skelos: piernas. De esta manera, un triángulo isósceles es aquel que presenta dos lados de igual longitud, es decir, dos piernas iguales. En consecuencia, cualquier triángulo con sus tres lados de longitudes diferentes es denominado escaleno, es decir, no simétrico en términos de longitudes.

Definición 1.1 *Un triángulo* ***isósceles*** *presenta dos lados de igual longitud, denominados lados laterales, mientras que el tercer lado se designa como la base del triángulo.*

3. Thales mostro que en un triángulo isósceles dos ángulos iguales[5], estableciendo así una relación entre longitudes y ángulos: a lados iguales, ángulos iguales (vea la Figura 4).

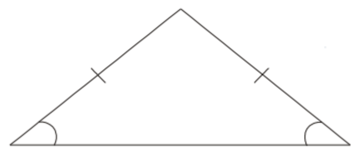


Figura 1.4: Figura 4

En un lenguaje más informal, podemos expresar que dos figuras geométricas son **congruentes** cuando comparten la misma figura y tamaño. En este sentido, dos segmentos se consideran “iguales ”si tienen la misma longitud, mientras que dos triángulos se consideran “iguales ”si comparten los mismos lados y ángulos. Para precisar tenemos la siguiente definición: Sean ABC y $A'B'C'$ triángulos, son **congruentes** si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $CA = C'A'$ y los ángulos en A, B y C son iguales a los ángulos A', B' y C', respectivamente.

4. Otro teorema debido a Thales es el de congruencia ángulo-lado-ángulo para triángulos (vea la Proposición 2.2)[6].

5. Asimismo, la afirmación de que unángulo inscrito en un semi-círculo es siempre un ángulo recto es reconocida como “teorema de Thales”[7] (vea la Figura 5).

---

[5]Es relevante señalar que Thales, en verdad, empleó la palabra “semejantes ”en lugar de “iguales ”, sugiriendo que no consideraba la amplitud del ángulo como una magnitud, sino más bien como una figura con una forma específica. El teorema en cuestión surgiría posteriormente como la Proposición V del Libro I de los Elementos de Euclides.

[6]Según Eudemo en su obra histórica, se menciona que Thales ya estaba familiarizado con este teorema. Además, dicho teorema aparece nuevamente en los Elementos de Euclides, específicamente en la Proposición XXVI del Libro I

[7]Algunos autores se refieren a este principio como el teorema de Thales. Sin embargo, se sugiere que esta idea ya era conocida por los geométricos babilonios y es posible que Thales la haya adquirido durante sus viajes a esas tierras. Resulta sorprendente, no obstante, que Thales haya tenido conocimiento de la existencia de infinitos triángulos rectágulos con

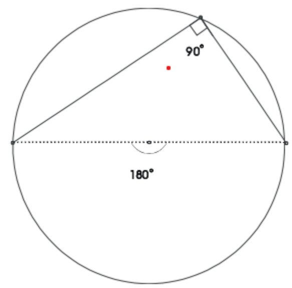


Figura 1.5: Figura 5

Thales no se enfoca en un resultado numérico específico derivado de un solo objeto, como lo hacían previamente los egipcios o los babilonios. En cambio, intenta alcanzar verdades generales sobre una clase completa de objetos en el mundo, una clase que es potencialmente infinita. Esto representa una ambición completamente novedosa. Para llegar a esas verdades generales, Thales se vio forzado a concebir, únicamente con su pensamiento, un ente ideal: "la circunferencia", que de alguna manera es ¡la representante de todas las circunferencias del mundo ! Al centrarse en todas las circunferencias en lugar de un grupo específico, Thales estableció verdades que eran inherentes a la naturaleza misma de las circunferencias. Es por esta razón que podemos atribuir a Thales el título de "Primer matemático de la historia". Su enfoque representó una perspectiva innovadora y original en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Es complicado pensar en lo que representa una frase como:

6. Cualquier línea que atraviese el centro de un círculo lo divide en dos segmentos de igual longitud.[8].

Ahora, una narrativa:[9]: Thales emprendió un viaje hacia Egipto. La embarcación, impulsada por los vientos efesios que solo soplan en verano, realizó

una hipotenusa común, pero no haya explorado la relación que guardan los catetos con dicha hipotenusa. Es peculiar, especialmente considerando la posibilidad de que Thales haya escuchado hablar en Egipto del ángulo rectángulo de lados 3, 4, 5.

[8]Este teorema se encuentra en el Comentario de Proclo. Aunque parece que Thales fue el primero en evidenciarlo, la palabra "demostrar "no debe interpretarse de la misma manera que lo hacemos hoy en día.

[9]Como es conocido, Thales calculó la altura de la Gran Pirámide de Giza a partir de la longitud de la sombra que proyectaba. Hay varias versiones de cómo lo hizo según Diógenes

la travesía de forma ininterrumpida en plena canícula. Más tarde, Thales abordó una falúa con la que remontaría el curso del Nilo. Después de varios días de viaje, interrumpido solo por paradas en ciudades y pueblos a lo largo del río, Thales la avistó. ¡la pirámide de Keops! Se encontraba en medio de una extensa elevación del terreno, no muy lejos de la orilla del río. Para Thales, era algo impresionante, ya que jamás había visto nada de esa magnitud. Las otras dos pirámides, las de Kefrén y Micerinos, estaban cerca pero parecían pequeñas en comparación. A pesar de haber recibido información sobre las dimensiones del monumento, la realidad superó todas las expectativas de Thales.

Descendió de la falúa y se dirigió hacia la pirámide, reduciendo su velocidad a medida que se acercaba, como si la masa imponente del monumento tuviera la capacidad de acortar sus pasos. Se sentó, exhausto. A su lado, se agachó un campesino egipcio, un fellah de edad indeterminada.

-Extranjero, ¿sabes cuantos muertos ha costado esta pirámide que tanto admiras?

-Miles, sin duda- respondió Thales.

-Mejor dicho, cientos de miles.

-¡Decenas de miles!

-Centenares de miles es más aproximado.

-¡Centenares de miles!- Thales lo miro con incredulidad.

-Posiblemente nos quedamos cortos- añadió el fellah, y ¿para qué tantas muertes?

¿Para abrir un canal? ¿Contener el río? ¿Tender un puente? ¿Construir una carretera? ¿Edificar un palacio? ¿Erigir un templo en honor de los dioses? ¿Excavar una mina? Thales negó con la cabeza. "Rotundamente no ".

Esta pirámide fue ordenada por el faraón Keops con el único propósito de obligar a los humanos a convencerse de su insignificancia. La construcción tenía que superar todos los límites para aplastarnos: cuanto más gigantesca fuera, más minúsculos seríamos nosotros, explicó el fellah.

"Logró su propósito. Observé tu expresión mientras te acercabas y vi los efectos de esta magnitud en tu rostro. El faraón y sus arquitectos quisieron forzarnos a admitir que, entre la pirámide y nosotros, no hay ninguna medida

---

Laercio, tomando como fuente a Jerónimo, Thales midió la altura observando la longitud de su sombra en el momento en que la sombra de el mismo era igual a su altura. Por otro lado, Plutarco relata que utilizó un bastón colocado verticalmente como elemento auxiliar, estableciendo una relación de proporcionalidad entre los lados de los triángulos formados por la pirámide y su sombra, y el bastón y su sombra.

común. Sea cual sea el propósito del faraón, una cosa era evidente: la altura de la pirámide era imposible de calcular. ¡La construcción más visible del mundo habitado también era la única imposible de medir! Thales decidió aceptar el desafío".

Se propuso a sí mismo: "Ya que mi mano no puede medir la pirámide, la voy a medir con el pensamiento". Thales contempló la pirámide con insistencia durante mucho tiempo; debía encontrar un aliado que estuviera a la altura de su desafío. Varias veces su mirada se desplazó de su propio cuerpo a su sombra y viceversa, y luego a la pirámide. Finalmente, levantó los ojos mientras el sol lanzaba sus rayos intensos. ¡Thales acababa de encontrar a su aliado!

El sol no hace distinciones entre las cosas del mundo y las trata a todas de la misma manera, ya sea que se le llame Helios en Grecia, Ra en Egipto o Tonatiu en Tenochtitlan. Si el sol trata al hombre, minúsculo, y a la pirámide, gigantesca, de manera similar, se establece la posibilidad de una medida común. Thales se aferró a esa idea: "La relación que establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual a mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura ". Aquí estaba la solución que buscaba. Solo quedaba llevarla a la práctica, para ello necesitaban ser dos y el fellah accedió a ayudarlo. Es posible que ocurriera de esa manera, ¿cómo llegar a saberlo?

Al día siguiente, al amanecer, Thales trazó en la arena una circunferencia con un radio igual a su propia estatura. Se colocó en el centro y se mantuvo de pie en posición recta. Luego, fijó la mirada en el extremo de su sombra. Cuando la sombra tocó la circunferencia, es decir, cuando la longitud de la sombra fue igual a su estatura, emitió un grito acordado. El fellah, alerta, clavó inmediatamente un palo en el lugar donde estaba el extremo de la sombra de la pirámide.

Con la ayuda de una cuerda bien tensa, midieron la distancia que separaba el palo de la base de la pirámide y así conocieron la altura de la pirámide. Thales se sentía orgulloso. Con la asistencia del fellah, había concebido un ingenioso método. "¿La vertical me resulta inaccesible? Midamos la horizontal. ¿No puedo medir la altura porque se pierde en el cielo? Mediré su sombra proyectada en el suelo. Con lo pequeño podré medir lo grande. Con lo accesible podremos medir lo inaccesible. Con lo cercano podremos medir lo lejano. No cabe duda de que las matemáticas son una astucia del espíritu ".

La resolución de esta cuestión marca el inicio de uno de los descubrimientos más significativos en el ámbito de las matemáticas griegas: el Teorema de Thales o la Proporcionalidad de Segmentos, que dará lugar al desarrollo de la ciencia de las proporciones.

Sin embargo, no se dispone de información detallada sobre el método utilizado por Thales. Su enfoque no consistía en idear una fórmula teórica, sino en medir una pirámide real.

Thales solo logró medir con precisión la porción de sombra que se proyectaba desde la base, ya que la parte interna del monumento le resultaba inaccesible. ¿Cómo abordó este desafío? Realizó las mediciones en el preciso momento en que los rayos solares eran perpendicularmente incidentes sobre el lado de la base, lo que implicaba que la sección oculta de la sombra era equivalente a la mitad de la longitud del lado.

De este modo, la altura de la pirámide resultaba ser la suma de la longitud de la sombra y la mitad de un lado.

Para Thales, la concepción de que el sol trata a todas las cosas de manera uniforme se manifiesta en la observación de que todos los rayos solares son paralelos. Dado que el astro está tan distante y nosotros somos tan diminutos, esta suposición está plenamente justificada. Analicemos la situación en el instante en que Thales llevó a cabo la medición de la sombra. (vea la Figura 6).

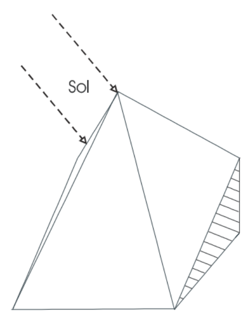


Figura 1.6: Figura 6

La pirámide que Thales necesitaba medir no era transparente, por lo que procederemos a realizar una especie de "autopsia ". Eliminaremos lo que obstaculiza la visión del interior, conservaremos la sombra y trazaremos el eje. La pirámide de Kepos posee una base cuadrada, y su eje atraviesa precisamente el centro de dicha base. La altura de la pirámide corresponde a la longitud de este eje, que es el parámetro que Thales estaba determinando. (vea la Figura 7).

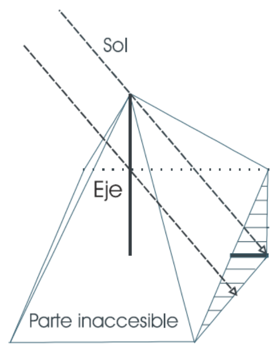


Figura 1.7: Figura 7

Si la pirámide hubiese sido transparente, la sombra del eje, cuya longitud Thales estaba intentando determinar, es ésta que vemos en la Figura 8:

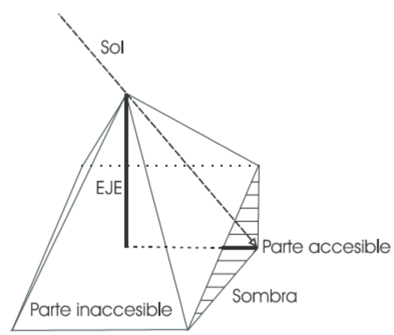


Figura 1.8: Figure 8

La porción de sombra que se encuentra dentro de la base y, por ende, en el interior de la pirámide, está representada con líneas discontinuas, lo que significa que es inaccesible para Thales, quien no puede medirla. Por otro lado, la sección que se extiende desde el lado de la base hasta el extremo de la sombra está coloreada en negro continuo, indicando que Thales puede medirla. De hecho, en todo este relato, es la única magnitud que puede cuantificar. (vea la Figura 9).

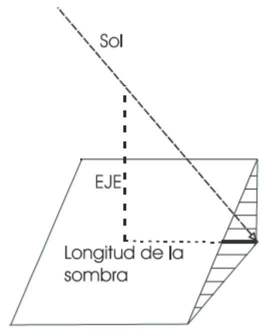


Figura 1.9: Figura 9

¿Qué ocurría en la arena que rodeaba la pirámide de Keops? Cuando la dirección de los rayos solares formaba un ángulo arbitrario con el lado de la base, lo cual ocurría prácticamente siempre, la sombra adoptaba la forma de un triángulo cualquiera, (vea la Figura 10) y en tales circunstancias, Thales no podía realizar ninguna medición.

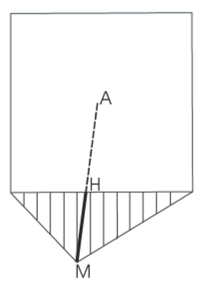


Figura 1.10: Figura 10

Thales exploró una situación específica que le permitiría resolver el problema. Lo logró al trasladar su dilema a un momento particular del día, aquel en el cual los rayos solares eran perpendiculares al lado de la base. En esta configuración, la sombra del eje de la pirámide también sería perpendicular a dicho lado. Además, dado que el eje se encuentra en el centro de la base, Thales dedujo que la parte inaccesible de la sombra del eje era precisamente igual a la mitad del lado de la base (ver Figura 11). Aquello que Thales no podía obtener mediante una medición directa lo deduciría a través del razonamiento. “Con qué herramientas contaba? Conocía únicamente el lado de la base de la pirámide, y estaba decidido a utilizarlo

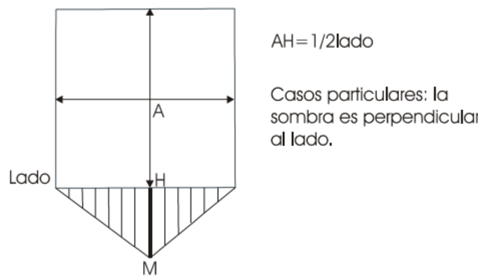


Figura 1.11: Figura 11

No obstante, ¿Cómo podía saber Thales que la sombra era perpendicular al lado? Carecía de escuadra o transportador, pero poseía algo aún más preciso: la orientación de la pirámide. Los arquitectos diseñaron el monumento de tal manera que una de sus caras estuviera alineada con el sur. La sombra sería perpendicular al lado en el instante en que el sol estuviera en su cenit, es decir, exactamente a mediodía.

Si hemos comprendido correctamente, se requiere, en primer lugar, una sombra visible, es decir, que se extienda más allá del límite de la pirámide. Esta sombra debe ocurrir exactamente al mediodía, ya que si ocurre en otro momento del día, Thales no puede llevar a cabo la medición. (vea la Figura 12).

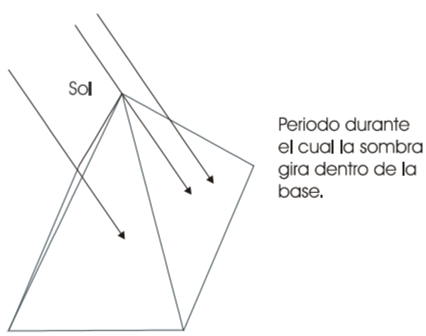


Figura 1.12: Figura 12

Con todas estas condiciones, nos enfrentamos a una serie de requisitos bastante difíciles de cumplir.

La dificultad radica en que la pirámide no proyecta, en cada mediodía, una sombra visible que sea perpendicular al lado. Es en esto donde reside todo el desafío. Para lograrlo, es necesario que el sol no esté demasiado alto en el cielo durante su trayectoria diurna. (vea la Figura 13).

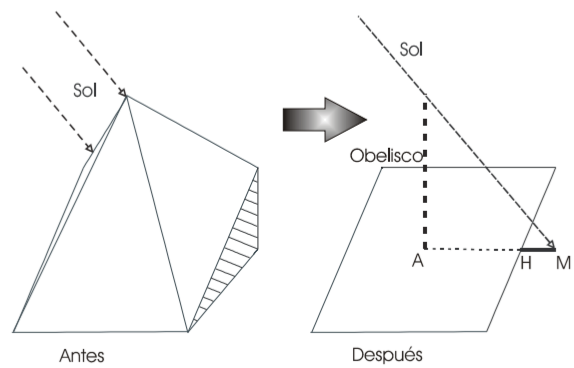


Figura 1.13: Figura 13

En resumen, se requieren dos condiciones fundamentales: la sombra debe ser igual a la pirámide y, al mismo tiempo, perpendicular a la base. Para abordar todo lo que se deriva de esto, es necesario salir del ámbito exclusivo de la geometría e ingresar en disciplinas como la astronomía, geodesia y geografía. Regresemos al terreno real: la pirámide de Keops está ubicada en Gizeh, a 30° ° de latitud en el hemisferio norte, por encima del trópico. Para que la sombra sea igual al objeto que la produce, los rayos solares deben tener una inclinación de 45°. En Gizeh, durante el verano y al mediodía, los rayos solares son casi verticales, lo que significa que prácticamente no habrá sombra durante una parte del año. Además, para que la sombra sea perpendicular a la base, esta última debe estar orientada en dirección norte-sur. En resumen, solo en dos días específicos del año se cumplen todas las condiciones mencionadas. Los astrónomos sostienen que Thales solo pudo llevar a cabo su medición el 21 de noviembre o el 20 de enero.

El teorema es, sin duda, general, pero la medición resulta muy específica. ¿Cuál fue el resultado? Pues, se trata de determinar la altura de la pirámide, ¿verdad? Thales tenía una cuerda a su disposición, pero carecía de una unidad de medida estándar. Entonces, utilizó el "talento ", es decir, su propia estatura. Midió la sombra con la cuerda ajustada a su estatura, obteniendo una longitud de 18 talentos. Luego midió el lado de la base, lo dividió por dos y obtuvo 67 talentos. Sumó ambas mediciones y registró el resultado. Según Thales, la pirámide de Keops tiene una altura de 85 talentos. En la unidad de medida local, un “talento ”equivalía a 3.23 codos egipcios, lo que nos da un total de 276.25 codos. Hoy en día, sabemos que la altura real de la pirámide es de 280 codos, es decir, 147 metros.

Para aclarar dudas, veamos la Figura 14:

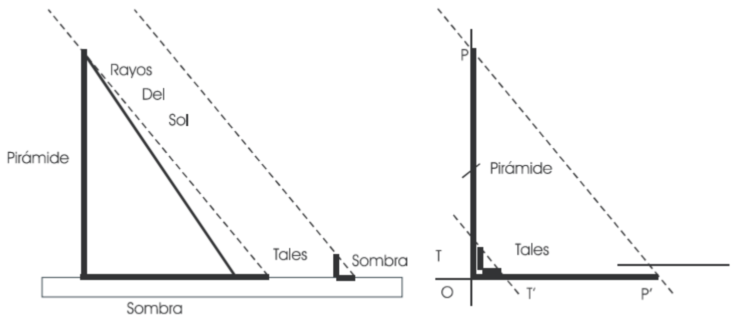


Figura 1.14: Figura 14

De donde se obtiene:

$$“\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OT'}}{\overline{OP'}}.”$$

Con esto, obtenemos la fórmula que representa el teorema de Thales. El teorema describe lo que ocurre cuando un conjunto de líneas paralelas corta a un par de secantes.

Teorema 1.2 *Teorema de Thales: Si dos o más líneas paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre estas son proporcionales.*

Cierto, aunque el teorema de Thales es trascendental en la geometría, la fama de Thales en su tiempo no se debió principalmente a sus contribuciones matemáticas, sino a su capacidad para predecir un eclipse. Se cuenta que Thales predijo con éxito un eclipse solar que tuvo lugar el 28 de mayo del año 585 a. C.

1.2. Euclides, el hombre del rigor

La información histórica sobre la vida de *Euclides* es bastante limitada y escasa, el autor de *Los Elementos,* a quien no hay que confundir con Euclides de Megara, quien sólo se interesó por la lógica [12, Ver biografía correspondiente a marzo de 2002]. Las escasas noticias que se tienen del Euclides el alejandrino provienen de *Proclo*[10] autor de unos comentarios a *Los Elementos* y de *Papo*[11] cuyos escritos son en ocasiones el único registro acerca de algunos autores. Papo describe a Euclides como una persona amable, aunque en ocasiones proclive a responder con sarcasmos a preguntas necias. Recordemos la ocasión en que ordenó se entregaran unas monedas a un estudiante que le había preguntado qué podría ganar si aprendía geometría. Así, dijo Euclides, podrá sentir que ganó algo. Proclo proporciona información valiosa sobre Euclides. Según sus comentarios, Euclides vivió en el período entre 306 y 285 a.C., durante el reinado de Ptolomeo I, quien lo habría invitado al Museo de Alejandría. La obra más notable de Euclides, que le garantiza su inmortalidad, es la titulada *Los Elementos*, equivalente a lo que hoy sería considerado un tratado. "Los Elementos "compiten en términos de difusión con los libros más famosos de la literatura universal, como La Biblia, El principito, La divina comedia, El Fausto y El Quijote. Este hecho es particularmente excepcional dado que se trata de una producción científica, no

[10]Proclo vivió en Alejandría y en Atenas entre 410 y 485 d. C.
[11]Papo vivió a fines del siglo III d. C.

accesible, por lo tanto, a las grandes masas de lectores. La influencia duradera de “Los Elementos ”destaca la importancia y la universalidad de los principios geométricos y matemáticos establecidos por Euclides. Los Elementos, después de la Biblia y las obras de Lenin, ha sido el libro más editado y traducido a numerosas lenguas. Ptolomeo I, rey egipcio del siglo III a.C., intentó leerlo pero abandonó debido a la dificultad de seguir los razonamientos extensos. Al consultar a Euclides en busca de una vía más corta, este afirmó que “en matemáticas no hay atajos reales”, mostrando su sarcasmo. Posteriormente, Adelardo de Bath y Gerardo de Cremona lo tradujeron *Los Elementos* al latín.

La mentalidad actual en matemáticas refleja el espíritu clásico de Euclides, donde se confía en que la inteligencia es suficiente para la creación científica, cuyo desarrollo sigue un proceso puramente racional. La modificación o eliminación coherente de algunos postulados permite seguir obteniendo geometrías coherentes. Fue en la segunda mitad del siglo pasado cuando se reconoció la independencia de todos los postulados y la viabilidad de construir nuevas geometrías. Surgieron así las Geometrías no Euclidianas, como la elíptica e hiperbólica, que poseen la misma coherencia que la euclidiana pero son independientes de esta última.

Los Elementos constan de trece libros, numerados del I al XIII, indicando que forman una obra completa que se desarrolla en un orden preciso, tanto dentro de cada volumen como entre ellos. Esta jerarquía establece la arquitectura del monumental trabajo de Euclides, que incluye 130 definiciones y 465 proposiciones. La estructura es clara, abordando primero la Geometría Plana, seguida de la Teoría de los Números y, finalmente, la Geometría del Espacio. Euclides, fiel a la tradición griega, otorgó a la geometría el honor de encabezar la obra, dedicando los primeros cuatro libros a esta disciplina. En ellos, se propuso identificar figuras, calcular áreas (excepto la del círculo) y realizar construcciones geométricas.

Libro I: Las 48 proposiciones de este libro se dividen en tres grupos. Las primeras 26 se centran principalmente en las propiedades de los triángulos, las proposiciones 27 a 32 establecen la teoría de las paralelas y demuestran que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Las proposiciones restantes en este primer libro abordan el paralelogramo, triángulo y cuadrado. El Libro I concluye con el “imprescindible”teorema de Pitágoras, presentado humildemente en las proposiciones 47 y 48, junto con su inverso, respectivamente. En este libro se observan entre otras las siguientes definiciones iniciales:

Definición 1.3 *(a) Una* ***línea*** *es una extensión de longitud sin ancho.*

(b) Una ***recta*** *es una línea que contiene todos sus puntos en la misma di- rección.*

(c) Un ***punto*** *es lo que no tiene parte ni dimensión.*

(d) Una ***superficie*** *es aquella que posee únicamente longitud y anchura*

¡Ángulo! El nombre viene de *ankon*, codo.

Definición 1.4 *(a) Un* ***ángulo*** *es una figura creada por dos semirrectas diferentes que comparten un punto de origen común. Este punto se conoce* ***vértice del ángulo*** *mientras que las semirrectas reciben el nombre de* ***lados de un ángulo****.*

(b) Ángulos adyacentes son aquellos que comparten un lado común y los otros lados se encuentran en línea recta.

(c) Cuando una recta se eleva sobre otra de manera que se crean ángulos adyacentes idénticos, cada uno de estos ángulos iguales recibe el nombre de ***recto****, además la recta que se eleva sobre la otra es denominada* ***perpendicular*** *a la primera.*

(d) ***Rectas paralelas*** *son aquellas que al estenderse indefinidamente en ambos sentidos, en el mismo plano, no se cruzan ni en una dirección ni en otra.*

(e) Un ***ángulo agudo*** *es mas pequeño que un ángulo recto.*

(f) Un ***ángulo obtuso*** *es más grande que un ángulo recto.*

(g) Cuando las líneas que forman el ángulo son rectas, se denomina que el ***ángulo*** *es* ***rectilíneo****.*

(h) Un ***límite*** *es es aquello que forma el extremo o la frontera de algo.*

(i) Una ***figura*** *es lo que se encuentra dentro de un límite o en varios límites.*

Posteriormente Euclides presenta diversas figuras comenzando con el círculo ya que este posee una única forma.

Definición 1.5 *(a) Un* ***círculo*** *es una figura plana delimitada por una línea, denominada* ***circunferencia****, de tal manera que todas las rectas que se extiende desde un punto específico hasta puntos de ella, permaneciendo dentro de la figura, son iguales. El punto específico se denomina* ***centro de la circunferencia o del círculo****.*

(b) Un ***diámetro*** *de un círculo o de una circunferencia es una línea recta que atraviesa su centro y termina, en ambos sentidos, en la circunferencia. Esta recta también divide la circunferencia y el círculo en dos partes iguales.*

(c) Un ***semicírculo*** *es la región encerrada por un diámetro y la mitad de una semicircunferencia, es decir, la parte de la circunferencia cortada por dicho diámetro. El centro del semicírculo coincide con el del círculo.*

Después, se aborda toda clase de figuras rectilíneas, comenzando con el triángulo. Es crucial entender que se requieren tres líneas rectas para definir un plano. El triángulo es la forma plana cerrada más básica.

Definición 1.6 *(a)* ***Figuras rectilíneas*** *son aquellas que están delimitadas por líneas rectas contenidas entre rectas, las figuras* trilaterales *o triángulos se forman entre tres líneas,* cuadriláterales *o* ***cuadriláteros*** *están circunscritos por cuatro líneas y los* ***polígonos*** *se configuran entre más de cuatro líneas.*

(b) Una figura es ***equilátera*** *si sus lados son iguales entre sí.*

(c) Un ***triángulo*** *Un triángulo es una figura geométrica formada por tres puntos que no se encuentran en una misma línea, y está constituido por tres segmentos que conectan estos puntos de dos en dos. Estos puntos se denominan vértices, y los segmentos que los unen se conocen como lados del triángulo. La identificación de un triángulo se realiza mediante la especificación de los tres puntos que lo determinan.*

La clasificación de los triángulos se realiza dependiendo del tamaño de sus ángulos o la comparación de sus longitudes.

En términos de sus ángulos, la clasificación de los distintos tipos de triángulos se basa en:

Definición 1.7 *(a) Un* ***triángulo rectángulo*** *es aquel que contiene un ángulo recto.*

(b) Un ***triángulo acutángulo*** *el que tiene todos sus ángulos agudos.*

(c) Un ***triángulo obtusángulo*** *el que tiene un ángulo obtuso.*

Más adelante nos convencemos de que éstas son las únicas posibilidades.

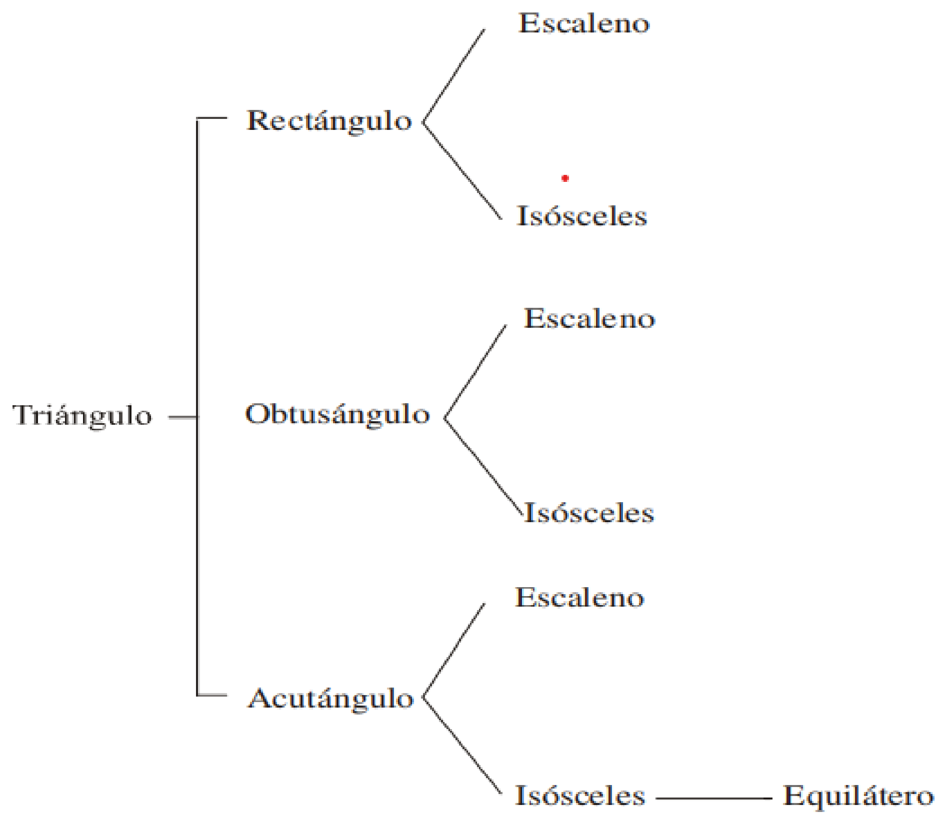
La clasificación de los triángulos dependiendo de sus lados es:

Definición 1.8 *(a) Un* ***triángulo equilátero*** *tiene sus tres lados iguales.*

(b) Un ***triángulo escaleno*** *tiene sus tres lados desiguales.*

La definición del *triángulo isósceles* la dimos anteriormente (vea la definición 1.1).

Un triángulo puede tener más de una categoría, como se muestra en el siguiente diagrama:



Después nos encontramos los cuadriláteros, siendo el *cuadrado*, el más destacado al tener una única forma que se conoce por completo al conocer uno de sus lados; el *rectángulo*, que requiere dos informaciones para ser completamente conocido; el *rombo*, el *paralelogramo*, el *trapecio;* y además, en gran cantidad, están aquellos cuadriláteros que carecen de características notables.

Definición 1.9 *Dentro de las figuras cuadriláterales, un* ***cuadrado****, se caracteriza por ser equilátero y tener ángulos rectos. Por otro lado un* ***rectángulo*** *tiene todos sus ángulos rectos, pero no es equilátero. En cambio un* ***rombo***

*es la equilátero pero carece ángulos rectos mientras que un **romboide** tiene sus lados y ángulos opuestos sí, aunque no es ni equilátero ni posee ángulos rectos. Los cuadriláteros distintos a los mencionados se denominan **trapecios** o **trapezoides**, dependiendo de si tienen un par de lados paralelos o ninguno.*

Euclides ha introducido a los elementos, y ahora procederá a trabajar con ellos. Al dividir un ángulo en dos partes iguales, se realiza la construcción de *bisectrices (ver la definición 2.9)*. De manera similar, al realizar la misma acción con un segmento, se llega a la construcción de *mediatrices (ver la definición 2.10)*.

Libro II: El Libro II aborda la transformación de áreas y la aplicación de la geometría algebraica griega, influenciada por la escuela pitagórica. En esta sección se establece la equivalencia geométrica entre diversas identidades algebraicas, así como una generalización del teorema de Pitágoras conocido como la ley los cosenos.

Libro III: Este libro se dedica a los teoremas relacionados con circunferencias, cuerdas, tangentes y la medición de ángulos. La división de un ángulo en dos partes iguales conduce a la construcción de bisectrices; de manera similar, al aplicar el mismo proceso a un segmento, se llega a la construcción de mediatrices. Además, se aborda el cálculo de áreas y se establecen los casos de dos figuras.

Libro IV: Para concluir de manera destacada la geometría plana, Euclides presenta las construcciones pitagóricas mediante regla y compás para polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y quince lados..

Libro V: El libro más renombrado de los trece de Euclides destaca por su exposición magistral de la teoría de la proporción, la cual es aplicable tanto a magnitudes inconmensurables como conmensurables. Esta teoría se extiende a magnitudes geométricas, como líneas, superficies y volúmenes, así como a magnitudes aritméticas, como números. En matemáticas, dos magnitudes están en *razón* cuando son capaces, de ser comparadas. La comparación puede llevarse a cabo de dos maneras: observando cuánto una excede a la otra, es decir, restando; o viendo cuántas veces una contiene a la otra, es decir, dividiéndolas. Esta última forma de comparación se denomina razón o relación por cociente. Correcto, al hablar de razón o relación en matemáticas, se da por sentado que se hace referencia a una razón por cociente. En cuanto a los pitagóricos, como es conocido, les resultaba difícil concebir relaciones entre dos magnitudes inconmensurables. No obstante, Euclides introdujo un cambio significativo al incorporarlos dentro de su teoría general de relaciones. Esta teoría resolvió un problema lógico que surgió con el descubrimiento pitagórico de los números irracionales, representando una auténtica revolución. Sin embargo, es importante destacar que no debemos atribuir esta revolución únicamente a Euclides, ya que él simplemente la popularizó.

Libro VI: El "Libro de las semejanzas". En realidad, resulta imposible "definir "la forma de un objeto en términos absolutos. Sin embargo, podemos afirmar que dos o más objetos comparten la misma forma.

De esta manera, dos figuras se consideran semejantes cuando son proporcionales, y se consideran proporcionales cuando sus lados correspondientes mantienen una proporción y sus ángulos son iguales uno a uno.

La teoría eudoxiana[12] se aplica a la geometría plana, donde se establecen los teoremas fundamentales sobre triángulos semejantes y se introducen construcciones que proporcionan la tercera, la cuarta y la media proporcional. Además, se presenta una solución geométrica para las ecuaciones cuadráticas y se enuncia la proposición de que la de un ángulo en un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados..

En los tres libros de aritmética (**VII**, **VIII** y **IX**), Euclides retoma una considerable porción de los estudios de los pitagóricos acerca de los números enteros, especialmente los realizados por *Arquitas*. Como hemos señalado, una de las principales ocupaciones de los matemáticos de la antigüedad era la clasificación.

Primera clasificación: Par *versus* Impar. También se mencionan los números que no pueden ser divididos por ningún otro número aparte del uno y ellos mismos; estos son conocidos como números **números primos**.

Segunda clasificación: Divisibles *versus* Primos. Los números primos se erigen como la piedra angular de la aritmética. ¡Euclides desatendió la suma y

[12]Eudoxo de Cnido, un destacado matemático y astrónomo, fue el creador de la teoría eudoxiana de la proporción. Euclides, en su libro, adoptó prácticamente en su totalidad el contenido de esta teoría de Eudoxo. Eudoxo de Cnido (408?-355? a. C.), fue un estudiante de la Academia de Platón, en Atenas, retomó las matematicas antiguas del cuarto siglo a. C.

se concentró en la división. Más tarde, surgió la reconocida descomposición en factores primos, (*Teorema Fundamental de la Aritmética*): según la cual, un número entero solo puede ser expresado de una única manera como producto de números primos (sin considerar el orden de los factores).

Libro X: El "Libro de los números irracionales", aborda segmentos rectilíneos que son inconmensurables respecto a un segmento dado.Euclides continúa aquí el trabajo iniciado por*Teodoro*, considerado el precursor en el estudio de los inconmensurables. Este tratado aborda tanto los segmentos conmensurables como los inconmensurables, así como las áreas cuadradas o rectangulares asociadas a ellos.

Mientras que los seguidores de Pitágoras solo tenían un número irracional, la raíz cuadrada de 2, Teodoro los expandió: demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de todos los enteros hasta 17, excluyendo, por supuesto, 4, 9 y 16, que son cuadrados perfectos. No está claro por qué se detiene en 17. *Teeteto* continuó y demostró la irracionalidad para los siguientes. Por cierto, este es, con diferencia, el libro más desafiante de los trece. Es por eso que se le llama la "cruz del matemático".

En este libro se examina cómo Euclides logra "controlar" a los irracionales, que habían generado gran inquietud entre los partidarios de Pitágoras. Si bien se atribuye gran parte del contenido de este libro a Teeteto, se reconoce a Euclides por su extraordinaria exhaustividad, clasificación y acabado.

Libros XI, **XII** y **XIII**: Los siguientes textos abordan la geometría tridimensional o del espacio, siguiendo el enfoque de , Euclides en la Geometría Plana, donde identifica diversos objetos matemáticos en el espacio, tales como pirámides, prismas, conos, cilindros y, por supuesto, la esfera, además de los poliedros regulares. Las definiciones, los teoremas acerca de rectas y planos en el espacio así como los teoremas relacionados con los paralelepípedos están detallados en el libro XI.

Los cálculos de volúmenes se abordan de manera experta en el libro XII, donde se calculan superficies y volúmenes de ciertas figuras, además de establecer relaciones entre los volúmenes de otras. Euclides emplea un método sumamente eficiente ideado por *Eudoxo*, al que más tarde denominaría el método de *exhaustión;* exhaustión implica "agotar mentalmente "cada posibilidad.

Una lista exhaustiva incluye todos los elementos que deben ser considerados. Esta método implica demostrar que dos magnitudes son iguales al mostrar que la diferencia entre ellas es menor que cualquier cantidad dada.

Por ejemplo, para hallar el área del círculo se inscribe un cuadrado dentro de él, luego se duplica el número de sus lados. La superficie del polígono inscrito que se saca en cada duplicación es cada vez mayor, pero menor que la superficie del círculo. Como se observa a continuación.

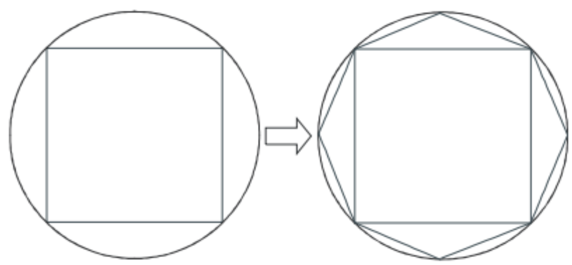


Figura 1.15: Figura 15

El valor de este método radica en que la disparidad entre la superficie del polígono, que podemos calcular, y la del círculo, que es la que estamos buscando, puede ser reducida a niveles insignificantes al aumentar el número de lados del polígono. La Figura 16 es continuación de la Figura 15.

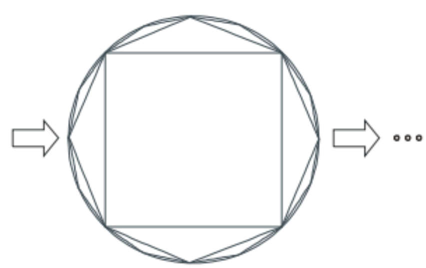
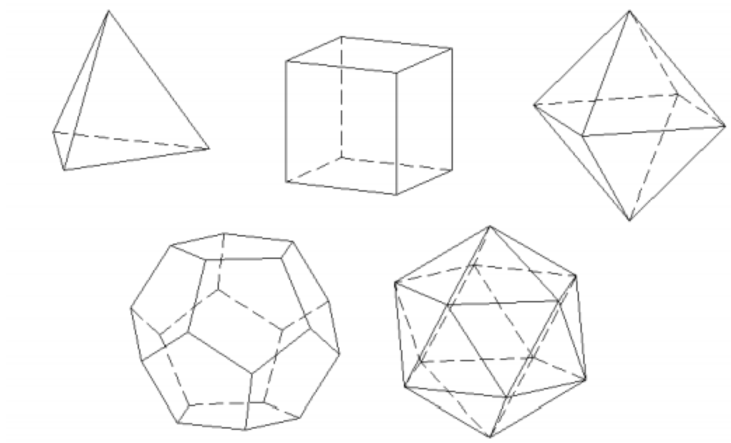


Figura 1.16: Figura 16

De esa manera, podemos determinar el área de la circunferencia con la precisión deseada, aunque no de manera exacta.

En el Libro XIII, el culmen de la obra completa, Euclides presenta lo que constituye el objetivo de los doce libros anteriores: la construcción de los cinco poliedros regulares que pueden inscribirse en una esfera.



Definición 1.10 *(a) El* ***tetraedro*** *es una figura geométrica que consiste en una pirámide con base triangular donde las cuatro caras son triángulos equiláteros.*

(b) El ***cubo*** *El cubo es una figura geométrica regular conformada por seis caras que son cuadrados y que lo limitan.*

(c) El ***octaedro*** *se compone de dos pirámides idénticas unidas por sus bases cuadradas; sus ocho caras son triángulos equiláteros.*

(d) El ***dodecaedro*** *es una figura geométrica regular que tiene doce caras que son pentágonos regulares.*

(e) El ***icosaedro*** *es una figura geométrica regular compuesta por veinte caras que son triángulos equiláteros.*

Sin embargo, ¿por qué precisamente cinco poliedros y no cuatro o seis? Este hecho es notable. Entre los infinitos poliedros en el espacio ¡solo existen exactamente cinco regulares! Cuando se buscan objetos matemáticos del mismo tipo que cumplan con una propiedad específica, por lo general, o no hay ninguno o hay solo uno. Es cierto, en algunos casos puede haber una infinidad de objetos que cumplan con ciertas propiedades. Por ejemplo, en el plano, hay una infinidad de polígonos regulares inscritos en una circunferencia. Sin embargo, Euclides demuestra que en el espacio tridimensional no existen más que cinco poliedros regulares inscritos en una esfera.

La explicación de Platón era que existen cinco poliedros regulares porque hay cinco elementos fundamentales en el cosmos. Según él, cada poliedro está ahí, en su perfección, para simbolizar a cada uno de estos elementos, y los cinco se inscriben en la esfera geométrica, que representa la esfera del universo. Participan en la creación del mundo y representan la absoluta armonía. Por esta razón, han sido solemnizados como los sólidos de Platón.

Como conclusión, el resultado al que apuntaba toda la estructura de "Los Elementos "es que solo existen estos cinco poliedros regulares.

No existe proposición matemática que deba ser aceptada sin demostración era una norma autoimpuesta por los matemáticos griegos. Esta regla era inédita. Pero, ¿cómo se demuestra una proposición? Se deduce de otra que ya se ha aceptado como verdadera ¿Es esto un círculo vicioso? ¿Cómo se rompe el círculo? ¡El problema reside en dar el primer paso!

Es necesario contar con un conjunto de verdades fundamentales. Solo podemos escapar del círculo vicioso si aceptamos algunas verdades iniciales, que se proponen de antemano y de forma definitiva. Estas bases son inalterables y no pueden ser modificadas según las necesidades ocasionales. Al principio, colocamos definiciones. Estas definiciones proclaman la existencia de los seres matemáticos primordiales, los entes fundadores a partir de los cuales se construirán otros. Así, el universo matemático se irá poblando con nuevos seres.

Justo después de las definiciones vienen los postulados y los axiomas. Los postulados afirman de antemano que ciertas construcciones son posibles. Los axiomas son nociones comunes aceptadas por todos, principios del pensamiento cuya legitimidad no necesita ser discutida.

Por todas estas razones, Euclides presentó con absoluta precisión esta lista de axiomas, cuya influencia se extiende más allá del ámbito estrictamente matemático:

1. Si dos cosas son iguales a una tercera cosa, entonces son iguales entre sí.
2. Si a dos cantidades iguales se les suma la misma cantidad, el resultado será igual.
3. Si de dos cantidades iguales se restan la misma cantidad, el resultado será igual
4. Si a cantidades desiguales se les suma la misma cantidad, el resultado será desigual.
5. Si dos cosas coinciden entre sí, entonces son iguales entre sí.
6. Los dobles de la misma cantidad son iguales entre sí.
7. Las mitades de la misma cantidad son iguales entre sí.

8. La suma total de un conjunto es mayor que cualquier parte individual del conjunto.

Estos axiomas nos proporcionan una base sólida para realizar comparaciones y razonamientos matemáticos.

Comentamos que en geometría solo encontramos postulados, mientras que en aritmética no. ¡Ahora es el turno de los **postulados**[13]!

Euclides seleccionó cinco postulados para la geometría.

Primer postulado. *Se puede trazar una línea recta desde cualquier punto a otro punto.*

Este postulado refleja la idea de que siempre se puede trazar una línea recta entre dos puntos sin necesidad de dar ningún rodeo, independientemente de su posición en el espacio.

Segundo postulado. *Cualquier recta finita puede extenderse continuamente y convertirse en una recta ilimitada o indefinida*

Este postulado hace referencia a que: "Un segmento de recta puede extenderse indefinidamente en cualquier dirección ". Este postulado refleja la idea de que un segmento de recta puede ser prolongado en longitud tanto como se desee en cualquiera de sus dos direcciones, lo que implica que el espacio no tiene límites en ninguna dirección.

De hecho, Euclides postula que el espacio debe ser infinito en todas las direcciones, lo cual es una demanda esencial para sus postulados.

Las circunferencias surgen posteriormente a las líneas rectas

[13]Dentro del PATRÓN DE LA AXIOMÁTICA MATERIAL tenemos:

A) Se ofrecen explicaciones iniciales sobre ciertos términos técnicos básicos utilizados en el discurso, con el fin de proporcionar al lector una idea de lo que significan estos términos básicos.

B) Se mencionan algunos principios fundamentales relacionados con los términos básicos, los cuales se asumen como verdaderos en la base de las propiedades sugeridas por las explicaciones iniciales. Estos principios se conocen como *axiomas* o *postulados* del discurso.

Los términos básicos iniciales y los postulados del discurso se consideran colectivamente como la *base* del discurso.

C) Todos los demás términos técnicos del discurso se definen utilizando los términos básicos.

D) Así es, todos los demás principios del discurso se deducen lógicamente de los axiomas o postulados. Estos principios deducidos se denominan *teoremas* del discurso.

Tercer postulado. *Una circunferencia puede ser definida por un punto central y una longitud de radio.*

Se puede seleccionar cualquier punto en el plano como el centro de un círculo (o un arco de círculo) de cualquier longitud de radio. Esto implica que pueden existir circunferencias en cualquier lugar del plano. Además, estas circunferencias pueden tener un tamaño variable según sea necesario.

Los ángulos aparecen después de las líneas rectas y las circunferencias.

Cuarto postulado. *Todos los ángulos rectos tienen la misma medida y son iguales entre sí.*

Exactamente, Euclides está afirmando con este postulado que los ángulos rectos conservan su medida de 90 grados sin importar su ubicación o contexto. Este principio proporciona una base sólida para demostrar teoremas y propiedades geométricas. Thales en el siglo VI a. de C, pudo deducir de esta afirmación la relación entre los ángulos formados por líneas paralelas cortadas por una transversal.

Proposición 1.11 *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Podemos utilizar la siguiente figura como apoyo para demostrar el postulado

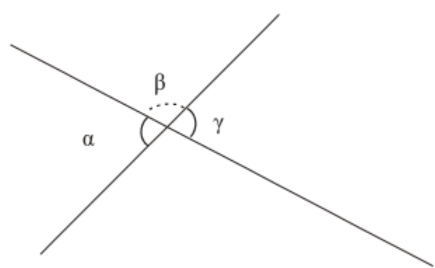


Figura 1.17: Figura 17

Demostración. La suma de los ángulos α y β es igual a dos ángulos rectos; de igual forma la suma de los ángulos γ y β es igual a dos ángulos rectos, de donde $\angle\alpha + \angle\beta = \angle\gamma + \angle\beta$, por lo tanto $\angle\alpha = \angle\gamma$. ■

El postulado de las paralelas establece que, dada una recta y un punto fuera de ella, existe exactamente una recta paralela a la dada que pasa por ese punto.

Quinto postulado. *si una recta corta a otras dos rectas y los ángulos interiores del mismo lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, eventualmente se cruzarán en el lado donde la suma de los ángulos sea menor que dos ángulos rectos..*

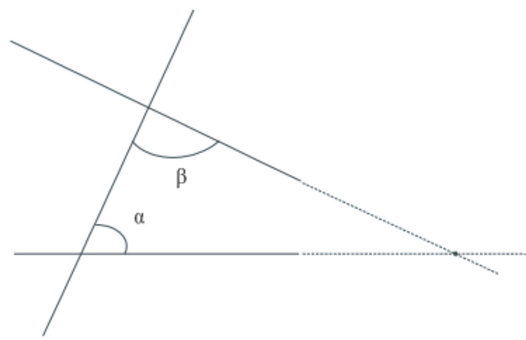


Figura 1.18: Figura 18

El quinto postulado de Euclides tiene varios enunciados equivalentes (Las pruebas las dejamos como ejercicio) . Usaremos el cualquiera de las siguientes a nuestra conveniencia.

5.1 *Por un punto dado sólo se puede trazar una paralela a una línea recta dada.*

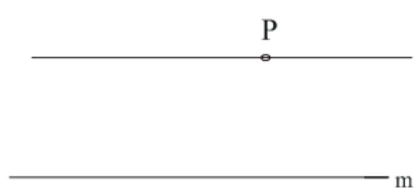


Figura 1.19: Figura 19

Por motivos pedagógicos, es comú n que en los textos modernos de geometría se presente la versión anterior como "El quinto postulado de Euclides ", en verdad esta proposición es conocida como el "axioma de Playfair ", en honor a John Playfair (1748-1819) [12, pág. 50].

5.2 *Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.*

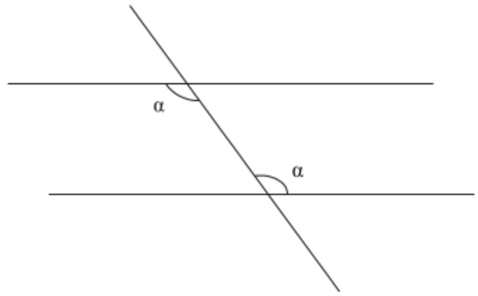


Figura 1.20: Figura 20

5.3 *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.*

5.4 *La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180◦.*

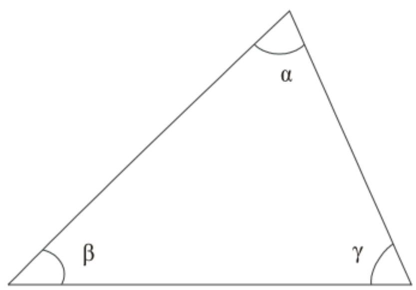


Figura 1.21: Figura 21

Definición 1.12 ***El ángulo exterior*** *de un triángulo es el que se forma con un lado y la prolongación, fuera del triángulo, de otro.*

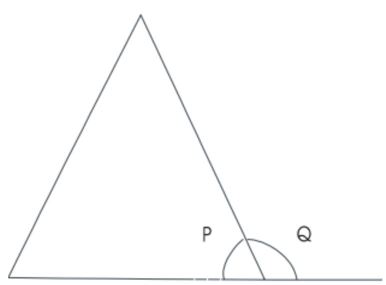


Figura 1.22: Figura 22

En la figura previa, **P** es un ángulo interior del triángulo mientras que **Q** es un ángulo exterior del mismo. Por mera curiosidad, ¿sabes cúantos ángulos exteriores tiene un triángulo?

La popularidad de *Los Elementos* ha dejado en la sombra la existencia de otras obras de Euclides, algunas de las cuales ya han desaparecido. Según otras fuentes, estas obras abordaban temas como las secciones cónicas, de falacias y de algunas cuestiones relacionadas con lo que aventualmente sería la geometría analítica. Hay otras obras que nos han llegado pero que no han tenido suficiente difusión, entre éstas se encuentran los siguientes títulos: los *Data*, la *División de la figura*, los *Phaenomena* -un tratado de astronomía- y la *Óptica*. De otras, como la *Catróptrica*, se tienen dudas acerca de si Euclides es su autor. Estos textos, que en su tiempo tuvieron una gran importancia, exhiben el rigor lógico que Euclides utilizaba para exponer sus resultados. Revelan, además, el interés de su autor por una matemática de carácter práctico.

Capítulo 2

Propiedades del triángulo

Es importante saber de antemano que si alguna vez le regalan un terreno pero solo le dan dos líneas rectas para delimitarlo, ni siquiera vale la pena intentarlo, porque no lo conseguirá. Se necesitan tres líneas rectas para delimitar un espacio plano. El triíngulo es la figura elemental de las formas planas cerradas. Además de ser el único polígono que tiene igual número de lados que de ángulos, un cuadrángulo completo[1], por ejemplo, tiene seis lados; además el triángulo tiene la propiedad de que cualquier otro polígono es suceptible de dividirse en triángulos.

Una particularidad del triángulo es ser el único polígono rígido, si visualizamos un triángulo construido con varillas unidas mediante pernos o tornillos, resulta imposible transformarlo en otro polígono sin necesidad de doblar o incluso romper las varillas, sin embargo, cualquier otro polígono se deformaría al girar las varillas en los pernos; podemos visualizar, por ejemplo, un bastidor de cuatro lados iguales que, al mover los lados podría tomar la forma de cuadrado o de rombo. Gracias a esta última característica, el triángulo resulta útil en la resolución de numerosos problemas de Geometría Plana.

2.1. Congruencia de triángulos

Nos permitimos hacer el siguiente planteamiento:

Problema 2.1 *Imaginemos una situación en un desierto, cuyo suelo es to-*

[1]Es una figura construida con cuatro vértices y las rectas que los unen.

talmente plano, y existe un lago. En lados opuestos del lago se encuentran dos objetos fijos (vea la Figura 23). Queremos medir la distancia entre dichos objetos sin introducirnos en el lago.

Figura 2.1: Figura 23

Una posible solución podría ser la siguiente:

Localizemos un punto a un lado del lago desde donde se puedan observar los puntos A y B. En ese punto, al que llamaremos C, dibujemos las rectas que unan a A y C, y a B y C como en la siguiente figura:

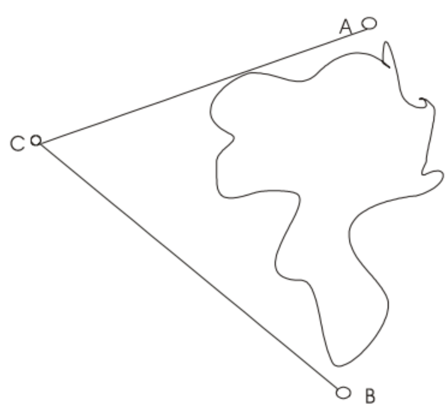


Figura 2.2: Figura 24

Alarguemos los segmentos AC y BC, hasta los puntos A' y B', de tal forma que las prolongaciones sean de igual tamaño que los propios segmentos, es decir, $AC = CA'$ y $BC = CB'$, con lo que tendremos que $B'A' = AB$, que es lo que queríamos hallar (vea la Figura 25).

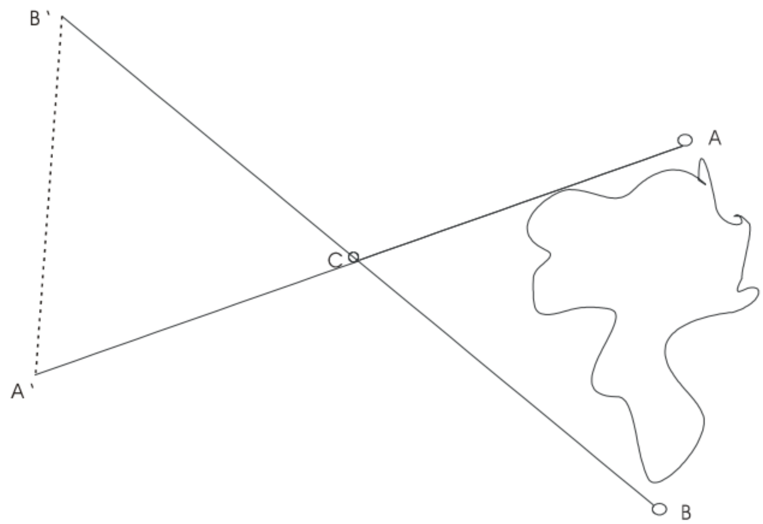


Figura 2.3: Figura 25

Pero ¿cómo podemos estar seguros de que realmente $B'A' = AB$? Quizá, alguien un sentido desarrollado de las proporciones podría argumentar que el triángulo $CA'B'$ cuyos vértices son C, A' y B' y el triángulo CAB cuyos vértices son C, A y B son "iguales" por lo que $B'A' = AB$.

Pero ¿por qué son iguales? Conocemos que tienen dos lados respectivamente iguales, porque así los elegimos. No obstante debemos preguntarnos ¿basta eso para que dos triángulos sean iguales? Claro que no, veamos, por ejemplo la siguiente figura:

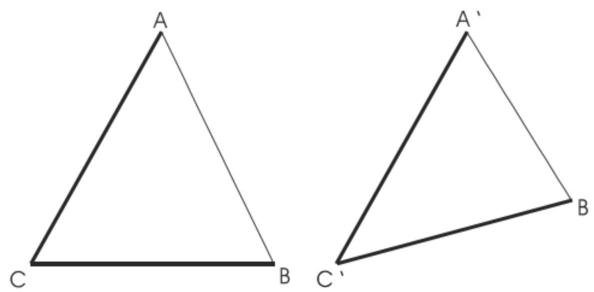


Figura 2.4: Figura 26

Aun cuando los lados AC y CB son en cada caso iguales a los lados $A'C'$ y $C'B'$, los lados adicionales , marcados con líneas más delgadas, no lo son. ¿Qué más se requiere para que dos triángulos sean iguales? Como mencionamos anteriormente, los triángulos son figuras rígidas, si los tres lados fueran uniformemente equivalentes, los triángulos serían idénticos. Sin embargo nuestro objetivo es demostrar que con nuestra construcción los terceros lados adicionales de los triángulos trazados deben ser iguales. Por lo tanto necesitamos otra característica que nos permita confirmar la auténtica igualdad de dichos triángulos.

Entonces la única opción que nos queda es apelar a los ángulos, por la Proposición 1.11 tenemos que los ángulos formados en la intersección de las rectas AA' y BB' (de la Figura 25) son iguales, los denominaremos $\angle ACB$ y $\angle A'CB'$, es decir, gracias al cuarto postulado podemos afirmar que, además de los lados respectivamente iguales que tienen nuestros triángulos, los ángulos adyacentes a ellos son también iguales, por lo que podríamos hacer coincidir los lados AC y $A'C$, de tal manera que, por la igualdad de los ángulos en C, el lado BC quedara superpuesto a $B'C$, pero como estos lados también son iguales, B coincidirá con B', lo que prueba que $AB = B'A'$. Hemos demostrado la siguiente propiedad:

Proposición 2.2 ***Primer criterio de congruencia de triángulos.*** *Si dos triángulos possen dos de sus lados respectivamente iguales y los ángulos creados por esos lados son también iguales, entonces esos triángulos serán* ***congruentes****. A este criterio de congruencia se le llama* ***lado-ángulo-lado*** *y lo denotamos como* ***LAL****.*

El término *congruentes* se utiliza en vez de *iguales* porque aunque tienen las mismas dimensiones, están situados en lugares diferentes en el plano, es decir, no son idénticos en posición.

Si los ángulos iguales no estuvieran construidos por los lados mencionados, en ese caso utlizamos la abreviatura ALL o bien LLA. Aquí se plantea la interrogante de naturaleza teórica: ¿qué otras condiciones, más allá de la simple igualdad en las medidas de los lados y los ángulos nos permiten establecer que dos triángulos son congruentes?

Las probabilidades son las siguientes:

a) Dos ángulos correspondientes iguales y el lado entre ellos también igual, es decir:

Proposición 2.3 ***Segundo criterio de congruencia de triángulos.*** *Si contamos con dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, por lo tanto esos triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como* ***ángulo-lado-ángulo*** *y lo denotamos como* ***ALA****.*

Demostración.

b) Si dos triángulos tiene dos lados respectivamente iguales y ángulo no adyacente a ambos también igual, entonces dichos triángulos son congruentes.

Podemos ilustrar fácilmente que esto no suele ser un caso de congruencia mediante un ejemplo. En la figura siguiente es evidente que existen dos triángulos que satisfacen las mismas condiciones pero no son congruentes entre sí.

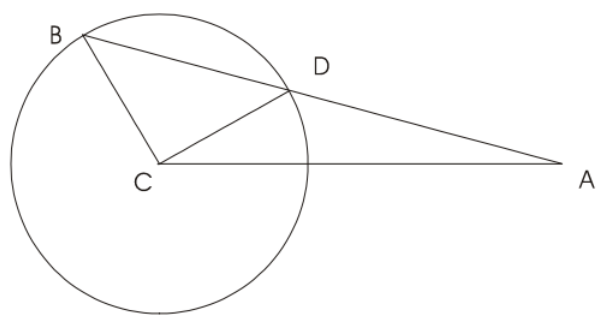


Figura 2.5: Figura 27

En la Figura 27 se pueden observar dos triángulos, es decir, el triángulo ABC y el triángulo ADC, esos triángulos tienen dos lados iguales, el AC, que es común y el CB y CD, ya que son radios del círculo; tienen tambié un ángulo igual -no adyacente a los lados iguales-, pues $\angle CAD = \angle CAB$, y evidentemente los triángulos no son congruentes.

Ahora volvamos a considerar la posibilidad de que los tres lados sean iguales, expresada como:

Ahora algunos ejemplos sobre congruencia de triángulos:

Proposición 2.4 ***Tercer criterio de congruencia de triángulos***. *Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales, entonces son congruentes. Este es el criterio* ***lado-lado-lado*** *y lo denotamos* ***LLL***.

Demostración. Ejercicio. Ahora algunos ejemplos sobre congruencia de triángulos:

Proposición 2.5 *Si se construyen triángulos equiláteros ABC' y CAB'(vea la Figura 28) sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC se cumple , entonces $BB' = CC'$.*

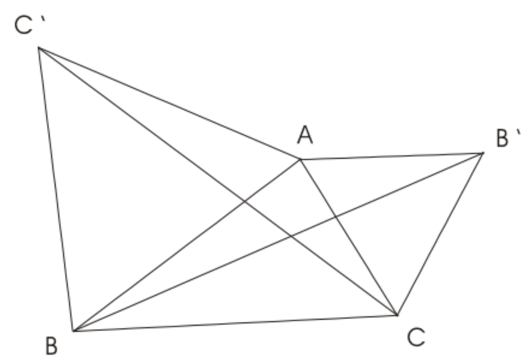


Figura 2.6: Figura 28

Demostración. Observemos que en los triángulos BAB' y $C'AC$ tenemos que $BA = C'A$, $AB' = AC$ y $\angle BAB' = \angle BAC + 60° = \angle C'AC$, entonces por el criterio **LAL**, dichos triángulos son congruentes, por lo que $BB' = CC'$. ■

Proposición 2.6 *Si ABC (vea la Figura 29) es un triángulo isósceles con $AB = CA$ y si A' es el punto medio de BC, entonces los triángulos ABA' y ACA' son congruentes.*

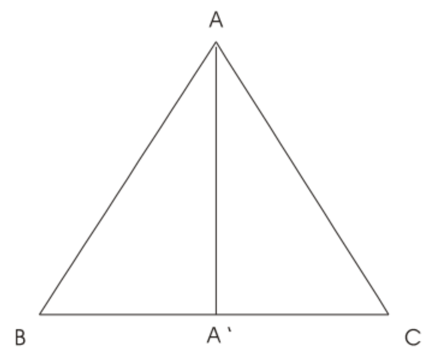


Figura 2.7: Figura 29

Demostrción. Los lados AB, BA' y $A'A$ del triángulo ABA' son respectivamente congruentes a los lados AC, CA' y $A'A$ del triángulo ACA', entonces por el criterio LLL (vea el ejercicio 3 correspondiente al Capítulo 2, pág. 147), entonces los triángulos son congruentes. ■

Proposición 2.7 *Si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$, entonces*

$$\angle ABC = \angle ACB.$$

Demostración. Analicemos el triángulo $A'B'C'$ donde $A' = A$, $B' = C$ y $C' = B$, esto es el triángulo ABC solo que los vértices tienen una trayectoria en sentido opuesto.

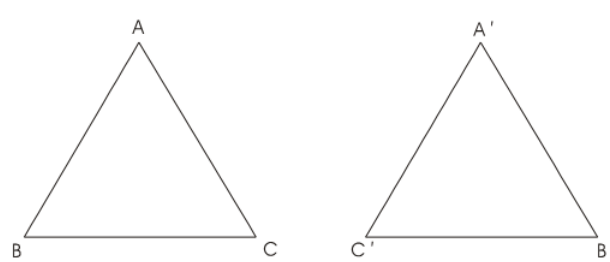


Figura 2.8: Figura 30

Por tanto es claro que

$$A'B' = AC = AB, \quad B'C' = CB = BC \quad \text{y} \quad C'A' = BA = CA.$$

Por el criterio LLL, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, por lo que $\angle ABC = \angle A'B'C' = \angle ACB$. ■

Utilizando el enunciado 5.2 demostremos la siguiente proposición.

Proposición 2.8 *La diagonal AC (vea la Figura 31) del paralelogramo $ABCD$ divide a éste en dos triángulos congruentes*

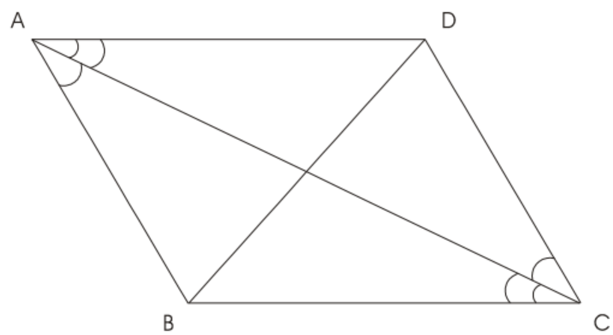


Figura 2.9: Figura 31

Demostración Dado que AC es una transversal a las paralelas AD y BC, los ángulos alternos internos DAC y ACB son iguales. Asimismo como AC corta a las paralelas AB y CD, los ángulos CAB y DCA son iguales. Por último como AC es un lado común a los triángulos ABC y CDA, según el criterio ALA, estos triángulos son congruentes. ■

Para continuar con el desarrollo matemático de esta historia, sería conveniente anotar dos conceptos geométricos elementales, para en seguida ver algunas aplicaciones de los criterios de congruencia.

Definición 2.9 *La **bisectriz** de un ángulo es la línea que lo divide en dos ángulos iguales.*

Definición 2.10 *La **mediatriz** de un segmento es la línea perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de éste. Esta línea tiene la particularidad de que la distancia desde cualquier punto de la mediatriz hasta los extremos del segmento es la misma.*

Ejemplo 2.11 *La construcción de la bisectriz de un ángulo dado.*

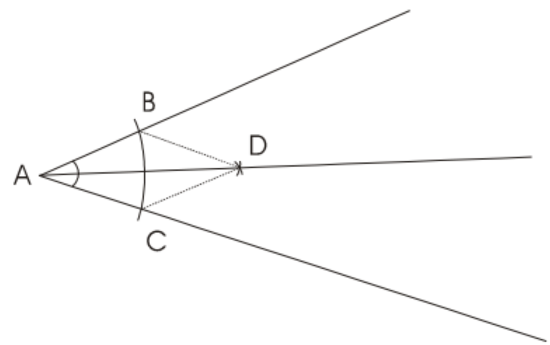


Figura 2.10: Figura 32

Así es , podemos proceder trazando una circunferencia con el vértice A del ángulo dado como centro (vea la Figura 32), y eligiendo un radio arbitrario. Entonces si llamamos B y C donde esta circunferencia interseca los lados del ángulo podemos trazar circunferencias de mismo radio y centro en los puntos B y C. Denotemos D al punto donde estas nuevas circunferencias se intersecan, excluyendo al punto A. La semirrecta AD biseca el ángulo A siendo la bisectriz de dicho ángulo. Esta propiedad se deriva de la congruencia de los triángulos ABD y ACD donde los ángulos correspondientes DAB y DAC son iguales.

Ejemplo 2.12 *La construcción de la mediatriz de un segmento dado.*

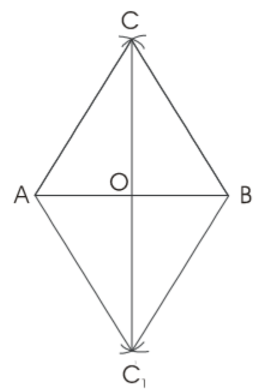


Figura 2.11: Figura 33

De echo, consideremos el segmento AB dado (vea la Figura 33). Dibujemos dos circunferencias con radios AB y centros en los puntos A y B. Llamemos C y C_1 los puntos donde estas circunferencias se intersectan. estos puntos se encuentran en semiplanos distintos en realcion con la línea AB. El segmento CC_1 intersecta a la recta AB en un punto O. Demostemos que O es exactamente el punto medio del segmento AB. En efecto , los triángulos CAC_1 y CBC_1 son iguales según del tercer criterio de igualdad de los triángulos. De esto se reduce que $\angle ACO = \angle BCO$. Por lo tanto, los triángulos ACO y BCO son iguales según LAL. Los lados AO y BO son lados correspondientes de estos triángulos y, por lo tanto son iguales. Es decir, O es el punto medio del segmento AB.

Dados estos resultados podemos demostrar una propiedad muy conocida de los triángulos isósceles y que Thales demostró. Además, esta propiedad era conocida en la Edad Media con el nombre de **El puente de los asnos** y era requisito saber hacer su demostración para aprobar un curso de matemáticas en las universidades medievales.

Teorema 2.13 *En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales. Es decir, si $AC = BC$ en el triángulo ABC, entonces $\angle A = \angle B$.*

Demostración. Para demostrar esto nos auxiliamos en la figura siguiente:

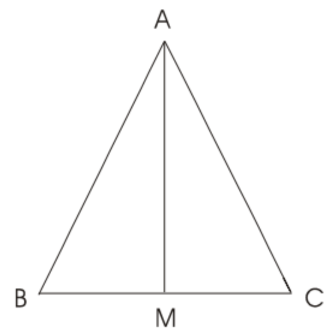


Figura 2.12: Figura 34

Sea ABC es un triángulo isósceles, con $AB = BC$ y AM es la bisectriz del ángulo $\angle A$. El $\triangle AMB$ y el $\triangle AMC$ son congruentes, puesto que tienen dos lados respectivamente iguales $AB = AC$, por hipótesis. El lado AM por ser común, y el ángulo adyacente a ellos también igual $\angle BAM = \angle CAM$, por ser AM bisectriz del ángulo $\angle A$ por el criterio LAL. Por lo tanto, los ángulos restantes serán también respectivamente iguales, es decir, $\angle ABM = \angle ACM$, que es lo que debíamos demostrar. ■

Como además $\angle AMB = \angle AMC = 90°$, resulta que la bisectriz del ángulo $\angle A$ es también una *altura* del triángulo ABC (vea la definición 2.17). Por otra parte, $BM = MC$, que son los terceros lados de cada uno de los triángulos en que dividimos al triángulo ABC, eso quiere decir que M es el punto medio de BC y, por lo tanto, AM va del vértice A al punto medio del lado opuesto BC.

Definición 2.14 *En un triángulo la recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto se llama* ***mediana****. Si A', B' y C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, las medianas son AA', BB' y CC'.*

En la demostración del Teorema 2.13 tenemos que AM resulta ser también mediana de dicho triángulo.

El siguiente teorema es el recíproco del Teorema 2.13.

Teorema 2.15 *Si en un triángulo ABC se tiene $\angle A = \angle B$, el triángulo es isósceles. A saber: $AC = BC$.*

Demostración. Se deja como ejercicio.

2.2. Semejanza de triángulos

Como vimos antes, los registros conocidos de la actividad humana en el ámbito de la geometría, estaban estrechamente relacionados con las necesidades de la medición y la práctica. Entre otros aspectos estaban familiarizados con las reglas para calcular el área de rectángulos, triángulos rectángulos e isósceles y, posiblemente á triángulos generales. Tomemos el registro más antiguo, que es del Papiro Rhind, donde al parecer, se da por sentado que el área de un rectángulo es el producto de su base y altura. El área de un triángulo es calculada multiplicando la mitad de su base por su altura. En un problema de área de un trapezoide isósceles, con bases 4 y 6 y altura 20, es calculada tomando la mitad de la suma de sus bases, "como lo hacían con un rectángulo" y, multiplicando esto por la altura obtenían 100, el área correcta. Este y ejemplos similares sugieren que las recetas egipcias para el cálculo de áreas pueden contener raíces elementales de métodos de disección que envuelven la idea de cortar una figura rectilínea en triángulos y entonces reordenando las partes obtener un rectángulo (vea el ejercicio 1 correspondiente a este Capítulo) [6, pág. 2].

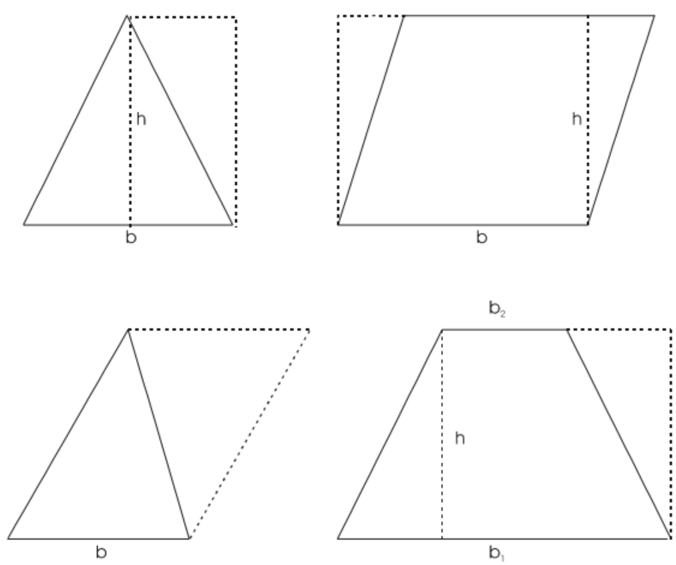


Figura 2.13: Figura 35

Basados en esos resultados tan antiguos ahora nosotros podemos hacer afirmaciones geométricas como la siguiente.

Proposición 2.16 *El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.*

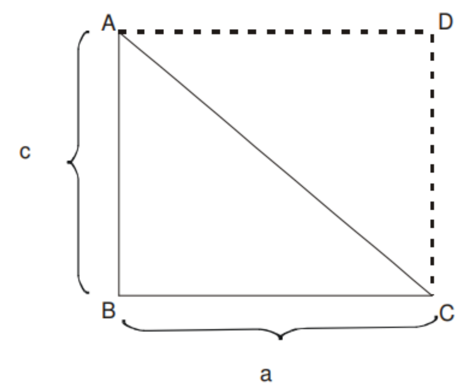


Figura 2.14: Figura 36

Demostración. Dado un triángulo rectángulo ABC de catetos AB y BC construyamos un rectángulo $ABCD$ al trazar DC paralela a AB y DA paralela a BC como se muestra en la Figura 35. Es evidente que CDA es congruente con ABC. El área del rectángulo es el producto de sus lados $AB \cdot BC$, por lo tanto, el área del triángulo rectángulo ABC es $\dfrac{AB \cdot BC}{2}$. A partir de este momento, el área de un triángulo XYZ la denotaremos como (XYZ), en general denotaremos el área de cualquier polígono entre paréntesis. ■

Para extender la definición de área a un triángulo cualquiera necesitamos proporcionar lo siguiente.

Definición 2.17 *La **altura** por el vértice A de un triángulo ABC, es la perpendicular al lado opuesto BC que pasa por A y será denotada por h_a. De manera similar se definen h_b y h_c las alturas por los vértices B y C. Al punto de intersección D, de la altura con BC, le llamamos el pie de la altura. La longitud de la altura que pasa por A para el triángulo ABC es la longitud del segmento AD. En muchas ocasiones es necesario considerar a la altura como toda la recta y no solamente como el segmento AD.*

Proposición 2.18 *El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente sobre la base considerada.*

Demostración. Supongamos que tenemos un triángulo ABC y consideramos la altura desde el vértice A. Hay dos posibilidades para el pie de la altura D, que D se encuentre dentro del segmento BC o bien, que D esté en la prolongación de BC. Supongamos que los lados del triángulo tienen longitudes a, b y c y que la altura AD tiene longitud h.

Primera posibilidad. Si D se encuentra entre B y C (vea la siguiente figura).

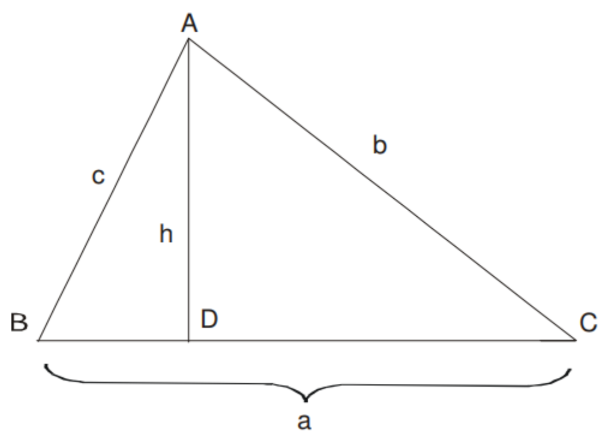


Figura 2.15: Figura 37

Claramente $(ABC) = (ABD)+(ADC)$, si $BD = a_1$ y $DC = a_2$, entonces

$$(ABC) = \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Segunda posibilidad. Si D está fuera del segmento BC. Supongamos que B se encuentra entre D y C como se muestra en la siguiente figura (el caso C entre B y D es análogo).

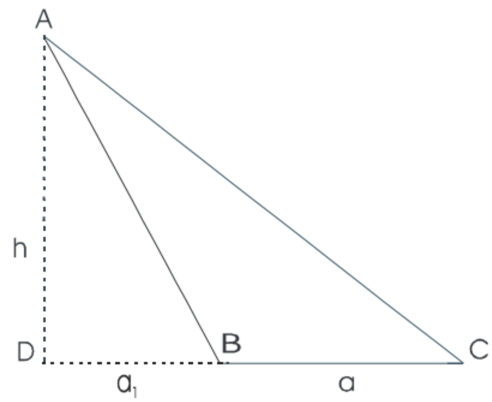


Figura 2.16: Figura 38

Si $BD = a_1$ y $DC = a_2$ entonces $a = a_2 - a_1$. Luego,

$$(ABC) = (ADC) - (ADB) = \frac{a_2 \cdot h}{2} - \frac{a_1 \cdot h}{2} = \frac{(a_2 - a_1) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}. \blacksquare$$

Ahora, del resultado anterior obtenemos lo siguiente.

Corolario 2.19 *Si dos triángulos tienen una misma altura, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura en común.*

Demostración. Sea h la altura común de los triángulos ABC y XYZ. Luego,

$$(ABC) = \frac{BC \cdot h}{2} \qquad \text{y} \qquad (XYZ) = \frac{YZ \cdot h}{2},$$

Así, la razón de sus áreas es

$$\frac{(ABC)}{(XYZ)} = \frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{YZ \cdot h}{2}} = \frac{BC}{YZ}. \qquad \blacksquare$$

De manera análoga obtenemos lo siguiente.

Corolario 2.20 *Si dos triángulos tienen una base igual entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual.*

El teorema que sigue es una de las aportaciones de Thales a la Geometría, también conocido como **Teorema Fundamental de Proporcionalidad.**

Teorema 2.21 ***(Primer teorema de Thales)*** *En el triángulo ABC, sean D y E puntos de AB y AC, respectivamente tales que DE es paralela a BC. Entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Demostración. Consideramos el triángulo ABC y DE una recta paralela a la base, vea la siguiente figura.

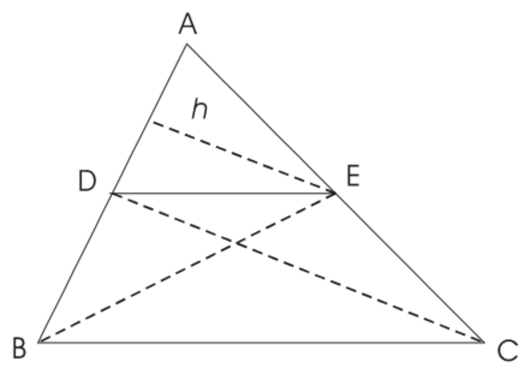


Figura 2.17: Figura 39

Notemos que los triángulos ABE y ADE tienen la misma altura desde el vértice E. Luego, la razón de sus bases es igual a la razón de sus áreas. Así

$$\frac{AB}{AD} = \frac{(ABE)}{(ADE)}. \tag{2.1}$$

Análogamente, considerando los triángulos ADC y ADE, tenemos que

$$\frac{AC}{AE} = \frac{(ADC)}{(ADE)}. \tag{2.2}$$

Observemos que los triángulos DEB y DEC tienen a DE como base común; y como DE y BC son paralelas, las respectivas alturas sobre esta base miden lo mismo, por lo que: $(DBE) = (DCE)$. Por lo tanto,

$$(ABE) = (ADE) + (DBE) = (ADE) + (DCE) = (ADC).$$

$$\text{De donde } (ABE) = (ADC). \tag{2.3}$$

(2.3)junto con (2.1) y (2.2), nos permiten concluir que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}. \blacksquare$$

El recíproco del teorema anterior también es cierto.

Teorema 2.22 *Si en el triángulo ABC tenemos D y E puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente tales que*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

entonces DE es paralela a BC.

Demostración. Supongamos que DE no es paralela a BC (vea la Figura 39). Sea BC' la recta que pasa por B paralela a DE y supongamos que interseca a AC en C'. Por el teorema anterior tenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}.$$

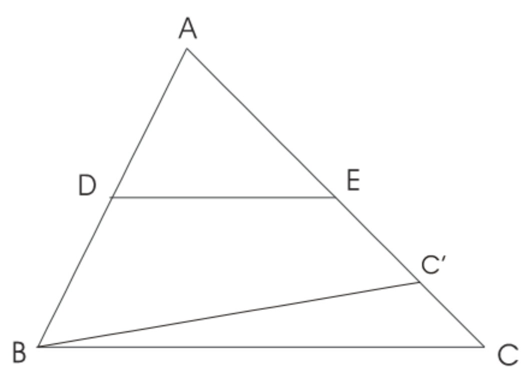


Figura 39

Figura 2.18: Figura 40

Como por hipótesis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

tenemos que

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}.$$

Por lo tanto, $AC' = AC$ y entonces $C' = C$. ∎

Observación 2.23 *La relación*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

del teorema anterior es equivalente a

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE},$$

que equivale a la siguiente expresión

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}.$$

Es decir, por el primer teorema de Thales, si tenemos dos rectas paralelas (vea por ejemplo, la Figura 39), la proporción que hay entre las rectas transversales que las cortan se conserva, sin importar quienes son estas rectas transversales.

El siguiente teorema se deriva del teorema fundamental de proporcionalidad o primer teorema de Thales.

Teorema 2.24 ***(Segundo teorema de Thales)*** *Si AD, BE y CF son tres rectas paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas entonces las tres rectas son paralelas (vea la Figura 41).*

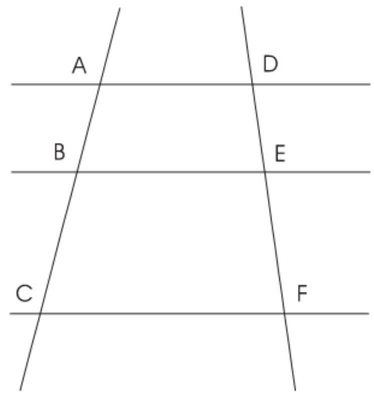


Figura 2.19: Figura 41

Demostración. Consideremos la transversal AF a las rectas AD, BE y CF y llamemos G al punto de intersección de AF con BE (vea la Figura 42).

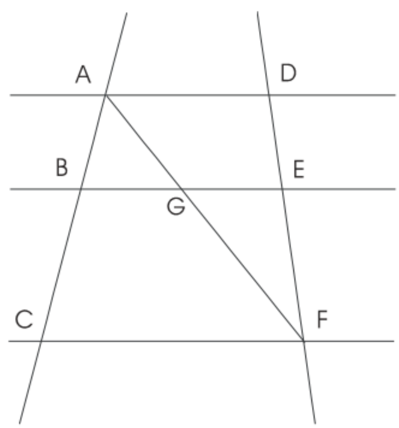


Figura 2.20: Figura 42

Como las rectas AD, BE y CF son paralelas, aplicando la Observación 2.23 a los triángulos ACF y FAD, tenemos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GF} \quad \text{y} \quad \frac{FG}{GA} = \frac{FE}{ED}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}.$$

Recíprocamente, supongamos que BE y CF son paralelas tales que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Sea G el punto de intersección de AF con BE (vea la Figura 41). Como BE y CF son paralelas, $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$. Por otro lado, como $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ tenemos que, $\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}$. Finalmente, por el recíproco del primer teorema de Thales, tenemos que GE y por lo tanto BE es paralela a AD. ■

Acontinuación precisamos algunas nociones y propiedades para entender cómo se establecen las proporciones entre segmentos en los triángulos semejantes, para después ejercitarlo un poco.

Definición 2.25 *Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son* ***semejantes****, si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales, es decir,*

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle A'B'C', \\ \angle ACB &= \angle A'C'B', \\ \angle BAC &= \angle B'A'C',\end{aligned}$$

y

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

El concepto de semejanza requiere de dos cosas:
1. Los ángulos correspondientes deben ser iguales.
2. Los lados correspondientes debes ser proporcionales.

En los siguientes teoremas de esta sección mostraremos que si se cumple una de las condiciones también se cumple la otra.

Teorema 2.26 ***(Teorema de semejanza AAA)****. Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y los triángulos son semejantes.*

Demostración. Sean ABC y DEF dos triángulos con ángulos correspondientes iguales (vea la Figura 42), tenemos que demostrar:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Demostraremos la primera igualdad, la segunda es análoga.

Sean $E\prime$ y F' los puntos en AB y AC respectivamente (vea la Figura 43), tales que:

$$DE = AE' \qquad \text{y} \qquad DF = AF'.$$

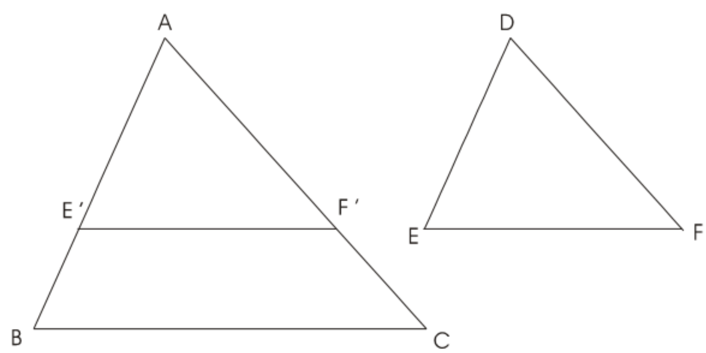


Figura 2.21: Figura 43

Por el criterio de congruencia LAL, tenemos que los ángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes. Por lo tanto, $\angle AE'F' = \angle DEF$. Como $\angle DEF = \angle ABC$ entonces $\angle AE'F' = \angle ABC$. Luego $E'F'$ y BC son paralelas, y por el primer teorema de Thales, tenemos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como $AE' = DE$ y $AF' = DF$,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

resulta lo que queríamos demostrar. ∎

Un resultado del teorema anterior y puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° es:

Proposición 2.27 *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y DEF son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como* $\boldsymbol{AA}$.

Teorema 2.28 ***(Teorema de semejanza LAL).*** *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos dos es igual, entonces son semejantes.*

Demostración. Consideremos dos triángulos ABC y DEF (vea la Figura 44) tales que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{y} \quad \angle BAC = \angle EDF.$$

Demostremos que son semejantes.

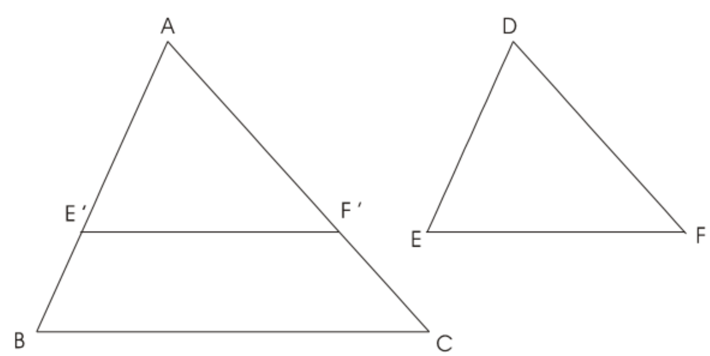


Figura 2.22: Figura 44

Sean E' y F' los puntos sobre el lado AB y AC, respectivamente tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por criterio de congruecia LAL, tenemos que los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes. Luego,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AF'}.$$

Por lo tanto

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Del primer teorema de Thales, tenemos que $E'F'$ es paralela a BC. Luego, los ángulos ABC y $AE'F'$ son iguales y, como por hipótesis tienen el ángulo en A igual, tenemos que los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes (semejanza **AA**). Como los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes, entonces ABC y DEF son semejantes, como se quería demostrar. ■

Teorema 2.29 ***(Teorema de Semejanza LLL)*** *Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales entonces los triángulos son semejantes.*

Demostración. Sean ABC y DEF dos triángulos (vea la Figura 45) que cumplen:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}. \tag{2.4}$$

Sean E' y F' puntos en AB y AC respectivamente, tales que $DE = AE'$ y $DF = AF'$. Sustituyendo en (2.4), tenemos que $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$. Como los triángulos ABC y $AE'F'$ comparten el ángulo en A, por el teorema de semejanza **LAL**, los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes.

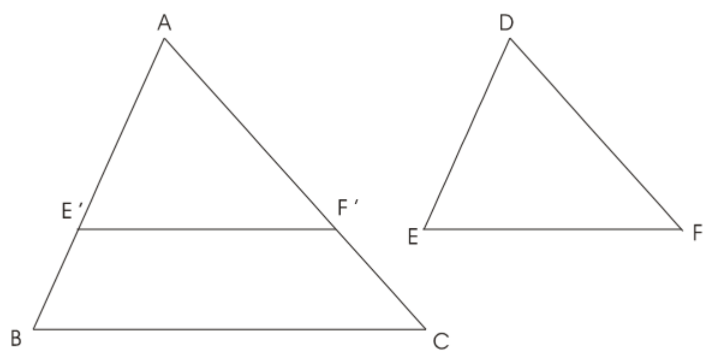


Figura 2.23: Figura 45

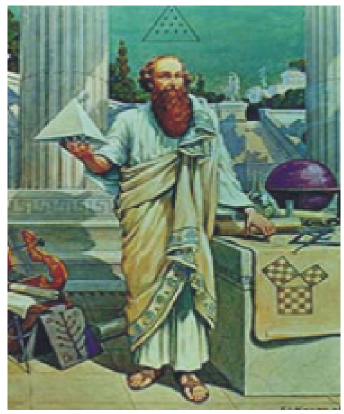
Por definición de semejanza $\dfrac{E'F'}{BC} = \dfrac{AE'}{AB}$, de donde, $E'F' = BC\dfrac{DE}{AB}$ ya que $AE' = DE$. De (2.4), tenemos que

$$EF = BC\frac{DE}{AB}.$$

Luego, $EF = E'F'$. Por el criterio de congruencia **LLL**, los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes, y los triángulos ABC y DEF son semejantes, como se quería. ■

Dos triángulos congruentes son semejantes, la razón de semejanza vale uno; así las condiciones de congruencia serán también de semejanza.

2.3. Pitágoras, el hombre que en todo veía números



Pitágoras inventó la palabra *filosofía*.

De la vida de Pitágoras, se sabe poco, como sucede con Thales y ni siquiera se sabe la fecha exacta de su nacimiento o de su muerte. Sabemos solamente que vivió en el siglo VI a. de C., nació en la isla de Samos, en el mar Egeo, y que murió en Crotona en el sur de Italia. A los 18 años, Pitágoras participó en los Juegos Olímpicos. Ganó todas las competiciones del pugilato.

Después, decidió viajar. Pasó algunos años en la cercana Jonia con Thales y su alumno *Anaximandro*. Después fue a Siria, donde los sabios fenicios le iniciaron en los misterios de Biblos. Luego pasó al monte Carmelo, en el actual Líbano, allí embarcó a Egipto, donde vivió 20 años; tiempo necesario para asimilar la sabiduría de los sacerdotes egipcios, en los templos a las orillas del Nilo.

Después de la invasión Persa, cayó prisionero y lo mandaron a Babilonia. Durante 12 años que estuvo ahí adquirió los valiosos conocimientos de los escribas y magos babilónicos. Regresó a Samos, de donde había salido 40 años antes en plenitud de juicio y raciocinio. Como el tirano Policrato reinaba en Samos, y Pitágoras "odiaba" a los tiranos, se volvió a marchar. Esta vez hacia la Magna Grecia, en el oeste. Pitágoras se instaló en Crotona, y allí fundo su "Escuela".

Desde Pitágoras, que, durante algunos años, fue discípulo de Thales, hasta Arquitas de Tarento, amigo fiel de Platón, la escuela Pitagórica duró cerca de 150 años y hubo 218 pitagóricos, ni uno más ni uno menos.

No todos fueron matemáticos. Los más conocidos fueron: Hipócrates de Quios, Teodoro de Cirene, Filolao, Arquitas de Tarento y por supuesto Hipaso.

Hipaso de Metaponte [11] fue uno de los primeros pitagóricos; era el jefe de los "acusmáticos[2]", mientras que Pitágoras dirigía a los "matemáticos[3]". Hipaso fue uno de los inventores de la tercera media. Las *medias* son números que designan los diferentes tipos de relaciones que tres números pueden mantener. Antes que el existían dos medias, la aritmética y la geométrica, a la nueva se le llamó la media armónica.

La **media aritmética** de dos números a y c es conocida simplemente como la media: su semisuma. Para ella se utilizan la suma y la diferencia y se define como: "El exceso del primer número en relación al segundo es el mismo que el exceso del segundo en relación al tercero".

$a - b = b - c$; b es la media aritmética de a y c, de donde $b = \dfrac{(a+c)}{2}$.

La **media geométrica** de dos números a y c pone en juego la multiplicación y la división. Se expresa como: " El primero es al segundo lo que el segundo es al tercero". Para los griegos la media geométrica es la figura de la analogía.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$; b es la media geométrica de a y c, de donde $b^2 = ac$.

La **media armónica**, es más complicada de definir "El primero sobrepasa al segundo con una fracción de si mismo, mientras que el segundo sobrepasa al tercero con la misma fracción del tercero".

4 es la *media armónica* de 6 y 3

6=4+2 con 2 igual a un tercio de 6

4=3+1 con 1 igual a un tercio de 3.

Hipócrates de Quios escribió, ciento cincuenta años antes de Euclides, los primeros *Elementos* de la historia de las matemáticas. No debemos confundir este Hipócrates con el padre de la medicina, el del juramento. Ambos vivieron en el siglo V a. de C., pero el matemático nació en la isla de Quíos y el médico en la isla de Cos.

[2] Así llamaban a los candidatos a pertenecer a la *escuela pitágorica.*

[3] Nombre que recibían los miembros de la *escuela.*

Hipócrates fue, después de Aristóteles, uno de los más eminentes geómetras que existieron, pero para los demás era "tonto y estúpido". Y como producto creativo de bobos y estúpidos, se afirma que Hipócrates fue el inventor del *razonamiento por reducción al absurdo* ¡casi nada! El razonamiento por el absurdo es una de las armas más temibles de la Lógica. Permite establecer la verdad de una proposición demostrando que la proposición contraria conduce a un absurdo del tipo "un número que es a la vez par e impar", etc.

Thales escrutaba el cielo. Hipócrates perseguía las fases de la Luna, que se llaman en matemáticas las lúnulas.

Definición 2.30 ***Lúnula*** *es la figura formada por dos arcos en círculo que se cortan volviendo la concavidad hacia el mismo lado (vea la siguiente Figura).*

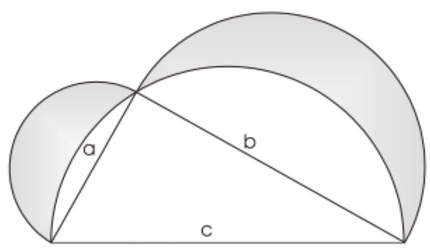


Figura 2.24: Figura 46

Estableció la cuadratura de las lúnulas, que fue el primer cálculo del área de una figura curva.

De acuerdo a un fragmento de la historia perdida de Eudemo que fue copiada fielmente en el siglo sexto por el comentador Aristoteliano Simplicio, Hipócrates de Quios probó que la razón de áreas de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de sus diámetros. Probablemente dedujo (si no probó rigurosamente) este resultado inscribiendo en dos círculos polígonos regulares semejantes y entonces "exhaustando" las áreas de los círculos, incrementando indefinidamente el número de lados de los polígonos:

Ya que, en cada etapa, la razón de las áreas de los dos polígonos inscritos es igual a la razón de los cuadrados de los diámetros de los dos círculos.

Sin embargo, Hipócrates probablemente no conoció el concepto de límite para "asegurar" su argumento esencialmente infinitesimal.

A través de esto aparece que el área de un círculo puede ser aproximada arbitrariamente cerca por el área de un polígono regular inscrito con el suficiente número de lados, el área del círculo no es precisamente igual al de ningún polígono inscrito. La cuadratura o “cuadratura del círculo” –el problema de encontrar un cuadrado con área precisamente igual que la de un círculo dado- fue uno de los problemas clásicos de la antigüedad (junto con la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo).

Este es un ejemplo de un problema, que envuelve una distinción entre aproximación y cálculo exacto, que es distinto a cualquiera considerado por los babilonios o egipcios.

Problema 2.31 *Hipócrates aplicó su resultado sobre áreas de círculos para obtener la cuadratura de una cierta “luna”. Considera un semicírculo alrededor de un triángulo rectángulo isósceles* ABC. *Sea* $ACBE$ *un segmento circular sobre la base (hipotenusa) que es semejante a los segmentos circulares sobre los lados del triángulo rectángulo. Use el hecho de que segmentos circulares semejantes son en área como los cuadrados de sus bases y el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo* ABC, *para mostrar que el área de la lúnula* $ADBC$ *entre el arco circular es igual al área del triángulo* ABC, *y por lo tanto la mitad del área del cuadrado* AB *[6, pág. 8].*

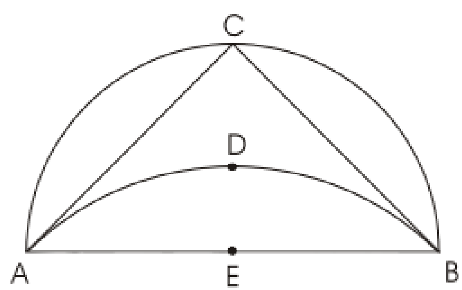


Figura 2.25: Figura 47

Hipócrates de viejo fue expulsado de la escuela pitagórica ¡porque cobró por enseñar geometría!

La escuela se instaló en Crotona, en el extremo inferior de la “bota” de la península italiana. En ella había un hombre rico y poderoso, llamado Cilón, que quería a toda costa ser admitido en las filas de los pitagóricos. Su solicitud fue rechazada en varias ocasiones. Autoritario y violento, Cilón no soportó que le negasen lo que deseaba y decidió vengarse. Los miembros de la escuela se reunían habitualmente en una gran mansión para discutir sobre asuntos ciudadanos. Cilón y los suyos les rodearon y prendieron fuego a la casa. Todos murieron entre las llamas, excepto uno. Dicen que se llamaba *Filolao*. Como muchos otros pensadores de la época, se dedicaba a la astronomía y a la cosmogonía; había ideado un extraño sistema del universo. ¡La tierra además de girar no era el centro! ¡Y lo había imaginado 2000 años antes que Copérnico y Galileo! Filolao situó un fuego en el centro del universo, un fuego alrededor del que la Tierra, el Sol y los otros planetas giraban.

Enfrente de Crotona, en el golfo que forma el escote de la "bota" italiana, está Tarento. "*Arquitas de Tarento* es el inventor del número uno". Los números comenzaban en "dos" para la mayor parte de los pensadores griegos. Para ellos estaba el uno... y los otros. El uno se refiere a existencia, no a cantidad, decían los griegos.

Arquitas sumó a su título de "padre del uno" el de "primer ingeniero". Aplicó un gran número de principios matemáticos de la geometría al estudio de dispositivos materiales, y creó el arte mecánico. No se contentó con dibujar las máquinas en el papiro, las construyó realmente. ¡Fabricó un pájaro mecánico! (¡Y aún más!, Arquitas fue el primer pintor de *graffiti* de la historia).

Además hacía política en la democrática Tarento y fue elegido 7 veces estratega. También salvó de la muerte a Platón. En opinión de algunos, este era su mayor timbre de gloria. Dionisio, tirano de Siracusa, planeó hacer asesinar al filósofo. En cuanto Arquitas lo supo, envió a Siracusa un barco lleno de soldados, con un mensajero que advirtió a Dionisio: Arquitas le exigía que dejara marchar a Platón. Dionisio accedió temeroso de una guerra con la poderosa Tarento. Así Platón pudo abandonar Siracusa sano y salvo.

Con los pitagóricos se engrandeció el universo de las matemáticas. Introdujeron la música y la mecánica. Su visión mística de los números no les impidió fundar la aritmética como la ciencia de los números. A ellos se deben las primeras verdaderas demostraciones de la historia. Demostraron, por ejemplo, que todos los triángulos tienen en común que la suma de sus ángulos internos es igual a 180°. Además de su demostración de la irracionalidad de la $\sqrt{2}$.

A propósito, ¿sabía Ud. que en cualquier triángulo de papel puede verificar de manera informal que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°?

Como hemos dicho, para los pitagóricos toda la naturaleza estaba determinada por números enteros o fracciones. En lenguaje moderno, las fracciones de la forma $\dfrac{a}{b}$ con a y b enteros se llaman **números racionales**. Entonces podemos decir que los pitagóricos pensaban que toda la naturaleza se podía entender por medio de los números racionales.

Pero, por otra parte, tenían el teorema de Pitágoras que, en el caso más simple, nos dice que un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 tiene una hipotenusa de longitud c que satisface $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Por supuesto, c denota $\sqrt{2}$. ¿Qué clase de número es $\sqrt{2}$?

¡Sorpresa! Este número no es racional. Es decir, para Pitágoras y su escuela, el número $\sqrt{2}$ no debería existir porque no se puede construir en forma de fracción a partir de los números enteros. Una demostración de este hecho se encuentra en el libro III de *Los Elementos* de Euclides.

Teorema 2.32 *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

La demostración de siempre. Se lleva a cabo por *reducción al absurdo*, esto es, se comienza suponiendo lo contrario de lo que se quiere demostrar y luego por medio de la lógica se deduce una afirmación absurda, lo que demuestra que nuestra suposición es insostenible.

Procedamos. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuese un número racional, es decir, de la forma $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ con a y b siendo números enteros. Simplificando la fracción podemos siempre suponer que a y b no tienen divisores comunes aparte del 1. Escribamos $a = \sqrt{2}b$ y elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad. Obtenemos $a^2 = 2b$. Esto quiere decir que 2 divide a a^2. Como un producto de dos números nones es non otra vez, entonces a debe ser par. Es decir, a es divisible por 2 y podemos escribirlo como $a = 2d$ para d otro número entero. Elevando otra vez al cuadrado tenemos: $4d^2 = a^2 = 2b^2$. Cancelamos un 2 de cada lado: $2d^2 = b^2$. Esto es, b^2 es divisible por 2 y como vimos antes, esto implica que b es divisible por 2.

Pero habíamos dicho que el único divisor común de a y b es 1 y ¡ahora encontramos que 2 es un divisor común! Ésta es la contradicción que deseábamos encontrar. ■

Probablemente este resultado es uno de los más fundamentales de las matemáticas. Es interesante que en 1975 el matemático alemán Estermann haya encontrado la siguiente bella demostración.

La nueva demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces hay un entero positivo mínimo k con la propiedad de que $k\sqrt{2}$ es entero. Por otra parte, sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, por lo tanto $k < \sqrt{2}k < 2k$ y luego, $k' = (\sqrt{2} - 1)k$ es un entero positivo menor que k. Pero:

$$k'\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - \sqrt{2}k$$

es un entero positivo (por ser diferencia de enteros), lo que contradice la minimalidad de k [7]. ■

¡Pitágoras veía números por todas partes! Todo cuanto existía era número para él. Los descubrió por primera vez en la música. Con la ayuda de este simple dispositivo.

Pitágoras hizo un descubrimiento espectacular: ¡un intervalo musical es una relación entre dos números!

El intervalo de octava producido por el jarrón vació y el medio lleno se expresaba por la relación 1/2, el de quinta por 2/3, y el de cuarta por 3/4. De este modo las relaciones numéricas eran capaces de producir armonías musicales. Es decir, la armonía misma era la realización en sonidos de las relaciones numéricas. ¡La escala era el número y la música matemáticas!

Pero no sólo era la música. Para los pitagóricos la armonía se extendía al universo; el mismo orden del cielo se expresaba por una escala musical. ¡La música de las esferas! Necesitaban una palabra para expresar esto, Pitágoras la inventó: ¡*Cosmos*! El orden y la belleza. Y la historia del mundo se explicó como la lucha del Cosmos contra el Caos.

Estos tres mínimos sonidos anunciaban el nacimiento de la primera ley matemática de la naturaleza. ¡Había comenzado la búsqueda de los números en las cosas!

Dar una base numérica al conocimiento de la naturaleza, ese era el proyecto de los pitagóricos. Para llegar a ello tenían que estudiar los números por si mismos.

Así fue la fundación de la *Aritmética*, la ciencia de los números, que ellos diferenciaron de la *logística*, el arte puro del cálculo. Con esta separación, elevaron la aritmética por encima de las necesidades de los mercaderes.

Pitágoras empezó por establecer una primera clasificación de los números. Hoy nos parece tan natural que podría haber existido siempre. Sin embargo, fue una gran novedad. Agrupó los números en dos categorías, los pares y los impares. Es decir, los que son divisibles por dos y los que no lo son. Pitágoras estableció las reglas de cálculo que concernían a la paridad.

Par mas par, es igual a par.

Impar mas impar, es igual a par.

Par mas impar, es igual a impar.

Y para multiplicar:

Par por par igual a par.

Impar por impar igual a impar.

Par por impar igual a par.

A continuación una revelación: el teorema de Pitágoras ¿no es de Pitágoras?

Bastante antes que él, los egipcios y, sobre todo, los babilonios habían descubierto la relación entre ternas de números señaladas en el famoso teorema. En la tablilla babilónica, la **Plimpton 322**[4], un escriba dejó grabadas una quincena de ternas de números enteros, que ponían de manifiesto que la suma de los cuadrados de dos de ellos era igual al cuadrado del tercero. ¡La tablilla había sido grabada más de mil años antes que naciera Pitágoras! Una de esas ternas era 45, 60, 75 que equivale a nuestra famosa terna 3, 4, 5.

Aunque no se sabe cuál era la demostración que Pitágoras tenía del teorema, se sabe que conocía una. Su escuela fue la primera en comprender la importancia de una demostración matemática rigurosa. Así, la demostración de una afirmación sobre los triángulos vale para todos los triángulos, no sólo para aquellos que tenemos enfrente. Además, es válida independientemente de los hombres y del tiempo. Es eterna.

Pero, ¿qué dice el teorema? antes de enunciarlo y proceder a su demostración haremos algunas aclaraciones con respecto a la notación:

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se conoce como **hipotenusa** y a los lados adyacentes al ángulo recto como los **catetos** del triángulo.

Lema 2.33 *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.*

Demostración. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice B y sea BD la altura sobre la hipotenusa CA, como se muestra en la siguiente figura.

[4]Nombre del arqueólogo inglés que la descubrió.

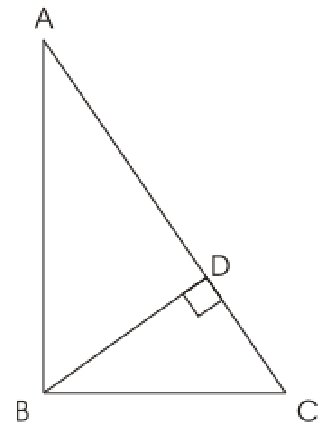


Figura 2.26: Figura 48

Tenemos que ABC es semejante a BCD por la relación **AA** (2.27), ya que ambos son triángulos rectángulos y el ángulo en C es común; de manera similar tenemos que los triángulos ABC y ABD son semejantes, en éstos el ángulo C es común. ∎

Ahora podemos hacer algunas observaciones:

La semejanse entre los triángulos ABC y BCD, nos da que: $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{CA}{BC}$, de donde,

$$BC^2 = CA \cdot CD. \tag{2.5}$$

La semejanza entre los triángulos ABC y ABD, nos da que: $\dfrac{AB}{DA} = \dfrac{CA}{AB}$, de donde,

$$AB^2 = CA \cdot DA. \tag{2.6}$$

Sumando (2.5) y (2.6), tenemos que:

$$BC^2 + AB^2 = CA \cdot CD + CA \cdot DA = CA \cdot (CD + DA) = CA^2.$$

Hemos hecho una demostración de lo siguiente.

Teorema 2.34 ***(Teorema de Pitágoras)*** *Dado un triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b e hipotenusa c, se tiene la siguiente relación*

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Cabe mencionar que se conocen como 450 demostraciones del Teorema de Pitágoras, cada una de ellas diferentes; aquí solo haremos tres, incluyendo la anterior.

Segunda Demostración. Consideremos el triángulo de la siguiente figura, donde indicamos los ángulos α, β y γ. Por definición, γ es de 90°.

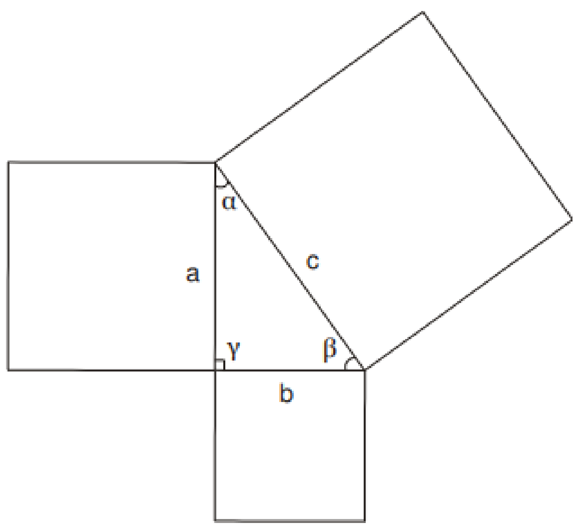


Figura 2.27: Figura 49

Como los ángulos internos de un triángulo suman 180°, tenemos que -$\alpha + \beta = 90°$. Entonces podemos disponer cuatro triángulos iguales al lado como en la figura que sigue.

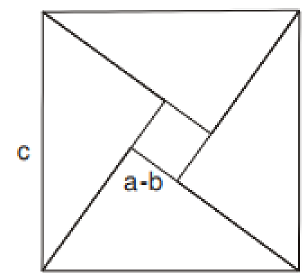


Figura 2.28: Figura 50

Si A es el área del triángulo dado, podemos calcular el área del cuadrado externo como:

$$c^2 = 4A + (a-b)^2 = 4\left[\tfrac{1}{2}ab\right] + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2. \qquad \blacksquare$$

Hay muchas otras pruebas del teorema de Pitágoras, la siguiente es corta y elegante.

Tercera demostración. Dividimos nuestro triángulo como se muestra en la figura.

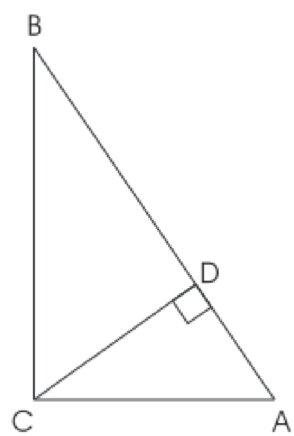


Figura 2.29: Figura 51

Los triángulos con vértices BCD y ACD son semejantes (porque, sus ángulos correspondientes son congruentes). También son semejantes al triángulo completo ABC. Aunque no sepamos la longitud de todos los lados del triángulo, sabemos que las longitudes de los lados correspondiente de triángulos semejantes son proporcionalmente iguales, es decir, para los triángulos ABC y ACD, tenemos que $AC\ /AD = AB/AC$, es decir:

$$\frac{b}{x} = \frac{c}{b}.$$

Similarmente, usando los triángulos ABC y BCD tenemos que

$$\frac{a}{c-x} = \frac{c}{a}.$$

Luego, $b^2 = cx$ y $a^2 = c^2 - cx$. Así,

$$b^2 = cx = c^2 - a^2. \qquad \blacksquare$$

La primera de las demostraciones que hemos presentado parece ser ¡anterior a Pitágoras! En efecto, en el libro chino *Chou pei suang ching*, que data probablemente de 1000 años a. C., aparece una ilustración muy similar a la de la primera prueba del teorema de Pitágoras. De hecho, en China nadie sabe qué es el teorema de Pitágoras puesto que al famoso enunciado lo conocen como el *teorema de Chou*. Esta demostración también es esencialmente la que presenta Euclides en su libro III de *Los Elementos*. La segunda de las demostraciones se atribuye al matemático inglés del siglo XVII *John Wallis* [7, págs. 33 a 37].

Sin defender a Pitágoras, hay que distinguir entre un resultado y su demostración. Los babilonios y egipcios tenían un resultado, pero ¿lo habían demostrado? Aparentemente no. Debemos decir, por lo tanto: "el resultado de los babilonios" y "el Teorema de Pitágoras y de Chou".

Una consecuencia del Lema (2.33) es lo siguiente.

Proposición 2.35 *En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es la media proporcional de los dos segmentos en que se divide la hipotenusa por el pie de la altura.*

Demostración. Sabemos que ABC es semejante tanto a ABD como a BCD, por lo tanto también son semejantes los triángulos ABD y BCD.

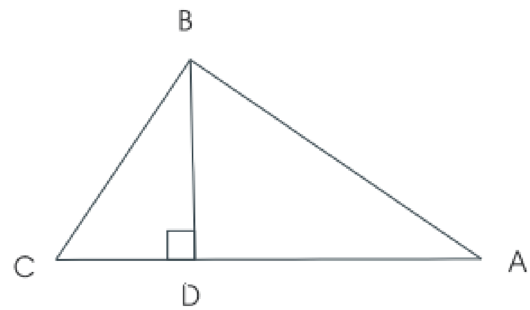


Figura 2.30: Figura 51

Esto implica que $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CD}{DB}$, entonces $BD^2 = CD \cdot DA$. Por lo tanto $BD = \sqrt{CD \cdot DA}$ como se planteaba. ■

Ejemplo 2.36 *Si a y c son catetos de un triángulo rectángulo, b la hipotenusa y h la altura sobre c. Sean x', y' las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (vea la Figura 51), entonces*

a) $h^2 = x'y'$.
b) $a^2 = bx'$.
c) $c^2 = by'$.
d) $bh = ac$.

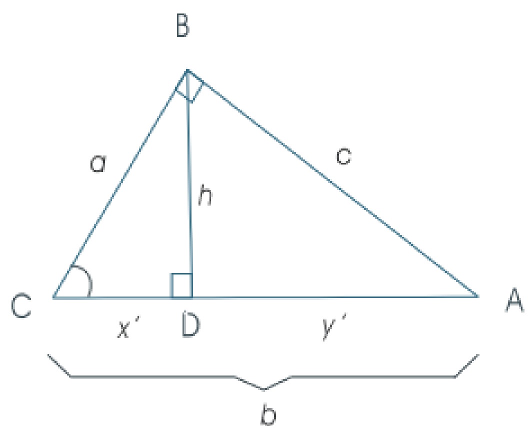


Figura 2.31: Figura 52

Demostración. La igualdad en a) se probó en la Proposición 2.35.

b) Como los triángulos ABC y BCD son semejantes se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{x'}{a}$, luego, $a^2 = bx'$.

c) Se demuestra de manera similar que b).

d) De los tres incisos anteriores tenemos que $h^2 = x'y'$, $c^2 = by'$ y $a^2 = bx'$ por lo tanto: $b^2h^2 = (bx')(by') = a^2c^2$, de donde, $bh = ac$. ■

Como hemos dicho anteriormente no todo teorema tiene recíproco, es decir, si el teorema es verídico, el teorema recíproco puede no serlo. A continuación veremos la Proposición 48 del libro I de los Elementos de Euclides (el *recíproco del teorema de Pitágoras*) con este fin, primero, enunciamos el siguiente lema.

Lema 2.37 *Sea ABC un triángulo, con ángulos en B y C menores que* $90°$*, y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si $AD^2 = BD \cdot DC$, entonces ABC es un triángulo rectángulo.*

Demostración. Trazamos la perpendicular a AB (vea la Figura 51.1) que pasa por A, ésta corta a la recta BC en un punto C' (si no fuera el caso, tal recta es paralela a BC y resulta entonces que $B = D$, por lo que $AD^2 = BD \cdot DC$ sería falso).

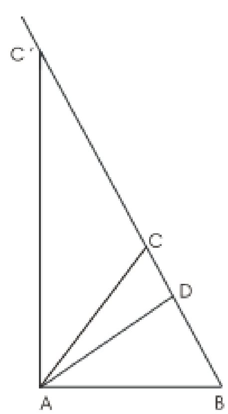


Figura 2.32: Figura 53

Tenemos ahora que el triángulo ABC' es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, por el resultado anterior, $AD^2 = BD \cdot DC'$, por lo que al igualar, con la hipótesis, y cancelar tenemos que $DC' = DC$ y entonces $C = C'$. Lo que muestra que ABC es triángulo rectángulo.

La condición de que el triángulo no tenga ángulos obtusos en B y C, obliga a que C y C' queden del mismo lado con respecto a D, entonces D se encuentra entre B y C. ■

Teorema 2.38 ***(Recíproco del teorema de Pitágoras)*** *Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.*

Demostración. Supongamos que ABC es un triángulo con

$$BC^2 = AB^2 + CA^2. \tag{2.7}$$

Notemos que como $BC > AB$ y $BC > CA$, los ángulos en B y C son menores a 90°. Sea D el pie de la perpendicular de A sobre BC. Los triángulos ABD y ADC son triángulos rectángulos con ángulo recto en D. Por el teorema de Pitágoras aplicado a éstos, tenemos:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \qquad \text{y} \qquad CA^2 = AD^2 + DC^2.$$

De donde, $AB^2 + CA^2 = BD^2 + 2AD^2 + DC^2$, y por (2.7), tenemos que

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 = BD^2 + 2AD^2 + DC^2$$

pero $BC^2 = (BD + DC)^2 = BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2$. Al reducir tenemos que $AD^2 = BD \cdot DC$. Por el Lema 2.37, tenemos que ABC es triángulo rectángulo. ■

Ahora veamos algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Una primera aplicación del teorema de Pitágoras es la caracterización de las alturas de un triángulo ABC (vea la Figura 52).

Lema 2.39 *Si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC, se tiene que $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$.*

Demostración.

Por el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos ABD y ADC (veamos la figura 54)

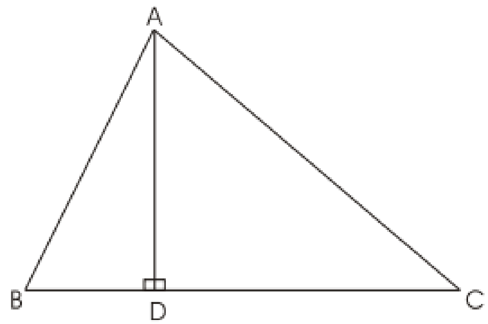


Figura 2.33: Figura 54

tenemos que

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 \qquad \text{y} \qquad AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Por lo tanto, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$. ■

Proposición 2.40 *La altura por A es el conjunto de puntos P tales que*

$$PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2.$$

Demostración. Si P se encuentra sobre la altura, por el Lema 2.39, $PB^2 - PC^2 = DB^2 - AC^2$. Recíprocamente, si P cumple que: $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$, entonces $PB^2 - PC^2 = DB^2 - DC^2$, donde D es el pie de la altura desde A. Ahora, si D' es el pie de la perpendicular de P sobre BC, también tenemos que: $PB^2 - PC^2 = D'B^2 - D'C^2$. Por lo que, $DB^2 - DC^2 = D'B^2 - D'C^2 = (DD' + DB)^2 - (D'D + DC)^2$ .Al desarrollar y cancelar obtenemos que $DD' = 0$, luego, $D = D'$, lo que garantiza que P se encuentra sobre la altura por A. ■

Hemos visto que en un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B, se sumple que $CA^2 = AB^2 + BC^2$ y solamente en este caso. Cuando el ángulo en B del triángulo es agudo u obtuso ¿hay igualdad?, ¿podemos decir algo sobre $CA^2 - AB^2$?

Primero aclaremos que todo triángulo que no sea rectángulo se llama **oblicuángulo**. Y precisamente en estos triángulos vemos una aplicación del teorema de Pitágoras que involucra a $CA^2 - AB^2$.

Teorema 2.41 *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo (obtuso) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos (más) el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

Demostración. Sea D el pie de la altua de A sobre BC (vea la Figura 57), notemos que si el ángulo en B es agudo, el punto D se encuentra del mismo lado de C con respecto a B y si el ángulo en B es obtuso entonces D y C quedan en diferentes lados de B.

Recíprocamente, dependiendo de si el pie de la perpendicular D de A cae del mismo lado de C o bien si C y D se encuentran en diferentes lados, el ángulo es agudo u obtuso.

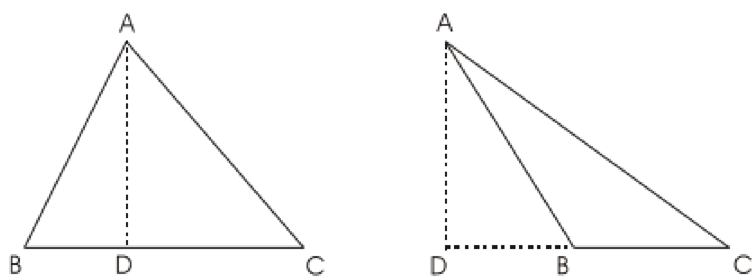


Figura 2.34: Figura 55

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ABD y ADC de la Figura 53, obtenemos

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 \quad \text{y} \quad CA^2 = AD^2 + DC^2.$$

Al tomar la diferencia obtenemos:

$$CA^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2. \tag{2.8}$$

Así, si el ángulo en B es agudo tenemos que $BC = BD + DC$, es decir, $DC = BC - BD$. Tomando en la igualdad (2.8) $(BC - BD)^2$ en lugar de DC^2 tendremos:

$$CA^2 - AB^2 = (BC - BD)^2 - BD^2 = BC^2 - 2BC \cdot BD. \tag{2.9}$$

Y si el ángulo en B es obtuso tenemos que $DC = BD + BC$. Tomando en la igualdad (2.8) $(BD + BC)^2$ en lugar de DC^2 y simplificando, encontramos:

$$CA^2 - AB^2 = (BD + BC)^2 - BD^2 = BC^2 + 2BC \cdot BD. \qquad (2.10)$$

De (2.9) y (2.10) obtenemos las siguientes igualdades, donde D es pie de la altura de A sobre BC:

$$\begin{aligned} \text{El ángulo } B \text{ es agudo si y sólo si } CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD. \\ \text{El ángulo } B \text{ es obuso si y sólo si } CA^2 &= AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD. \end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar. ■

Resumiendo, tenemos que para un triángulo ABC el ángulo B es recto si y sólo si $CA^2 = AB^2 + BC^2$, el ángulo B es agudo si y sólo si $CA^2 < AB^2 + BC^2$ y el ángulo B es obtuso si y sólo si $CA^2 > AB^2 + BC^2$.

Ejemplo 2.42

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (2.11)$$

La primera expresión se conoce como la ***media armónica****, la segunda es la* ***media geométrica****, la tercera* ***media aritmética*** *y la cuarta la* ***media cuadrática*** *de a y b.*

Demostraremos estas desigualdades geométricamente, para ello consideremos un semicírculo con radio $\frac{a+b}{2}$, denotemos con BC al diámetro y O su centro. Sea D un punto sobre BC de manera que $BD = a$ y $DC = b$. Sobre el semicírculo consideramos el punto A de tal manera que AD sea perpendicular a BC y sea E el pie de la perpendicular a OA trazada desde D, como se muestra en la figura.

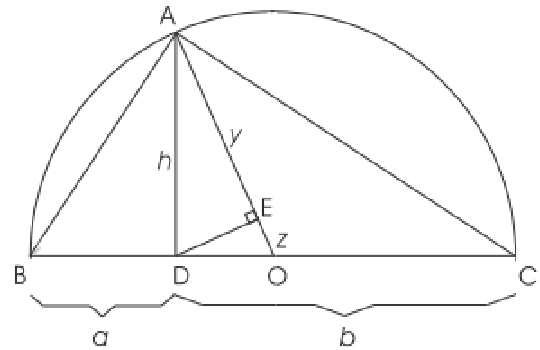


Figura 2.35: Figura 56

Dado que el triángulo ABC es rectángulo[5] sabemos por el lema (2.33) que los triángulos ABD y ADC son semejantes y, por el ejemplo (2.36) inciso a), tenemos que $h^2 = ab$, es decir, que la altura del triángulo ABC es $h = \sqrt{ab}$, que claramente es menor o igual que su radio. Con lo que hemos demostrado que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Para demostrar la primera desigualdad, observamos que los triángulos ADE y ADO son semejantes, entonces

$$\frac{h}{y} = \frac{y+z}{h}$$

donde $y + z$ es radio y $h^2 = ab$, entonces tenemos que

$$\frac{2ab}{a+b} = y$$

es decir, y representa la media armónica. Claramente tenemos que $y \leq h$, luego $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

Para demostrar la última desigualdad, consideremos la siguiente figura.

[5]Estamos utilizando esta afirmación hecha por Thales sin demostrar, más adelante lo haremos.

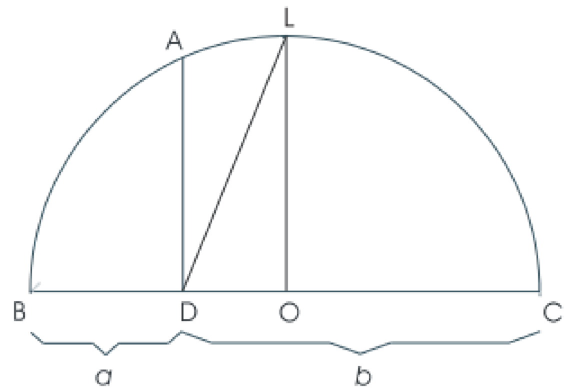


Figura 2.36: Figura 57

Tenemos que $DO = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ y utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned} LD^2 &= DO^2 + OL^2 \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} \end{aligned}$$

es decir, $LD = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ que claramente es mayor que $\dfrac{a+b}{2}$. ■

2.4. El triángulo, sus puntos y rectas

Presentaremos ahora algunas propiedades de los puntos y rectas de este polígono, por ser el más sencillo y porque como ya vimos, cualquier otro es suceptible de dividirse en triángulos.

En la sección 1.2 dimos la definición de una mediana (vea la Definición 2.14). A continuación enunciaremos algunas propiedades de esta recta del triángulo.

Lema 2.43 *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal tercer lado.*

Demostración. Sea ABC un triángulo, B', C' los puntos medios de los lados CA y AB, respectivamente como se muestra en la siguiente figura.

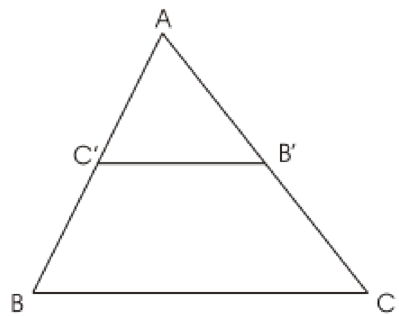


Figura 2.37: Figura 58

Como $\dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{AB'}{B'C}$, por el segundo teorema de Thales tenemos que $B'C'$ es paralelo a BC. Luego, como los lados de los triángulos ABC y $AC'B'$ son paralelos, estos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es es $\dfrac{AB}{AC'} = 2$, de donde $BC = 2C'B'$. ■

Teorema 2.44 *Las medianas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sea ABC el triángulo y A', B', C', los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente.

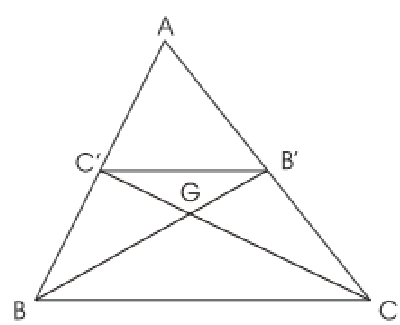


Figura 2.38: Figura 59

Si G es el punto de intersección de las medianas BB' y CC' (vea la Figura 57) y, como los lados de los triángulos GBC y $GB'C'$ son paralelos ($B'C'$ es paralelo a BC por el lema anterior), los triángulos son semejantes y en razón de semejanza $2 : 1$. Luego, las medianas BB' y CC' se cortan en el único punto G que divide a la mediana en razón $2 : 1$.

Así G es el único punto sobre BB' con $\dfrac{BG}{GB'} = \dfrac{2}{1}$ y el único sobre CC' con $\dfrac{CG}{GC'} = \dfrac{2}{1}$. De manera análoga se demuestra que la otra mediana AA' se intersecta con BB' (y por lo tanto con CC') en G. ∎

Del teorema anterior obtenemos la siguiente definición:

Definición 2.45 *El punto de concurrencia de las medianas del triángulo ABC se llama* ***centroide, centro de gravedad, punto mediano, gravicentro o baricentro*** *del triángulo y se denota por G.*

Definición 2.46 *La* ***bisectriz interna*** *del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo en dos ángulos iguales.*

Cada punto P de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo, es decir, si Z es el pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es el pie de la perpendicular de P sobre CA, entonces $PZ = PY$; ya que los triángulos rectángulos AZP y AYP son congruentes.

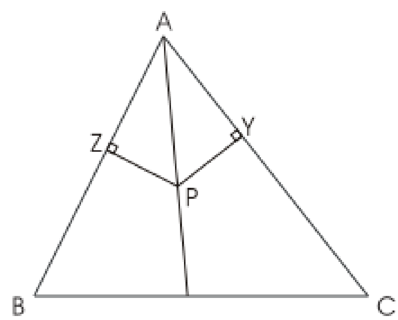


Figura 2.39: Figura 60

Recíprocamente, un punto P dentro del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC, que cumpla que $PZ = PY$ (donde Y y Z son los pies de las perpendiculares de P sobre CA y AB) es necesariamente un punto de la bisectriz interna; ya que los dos triángulos rectángulos APY y APZ son congruentes (porque tienen dos pares de lados iguales, a saber $PZ = PY$, y AP es común, luego aplicando el teorema de Pitágoras a ambos triángulos rectángulos tenemos que el otro par de catetos son iguales), por tanto $\angle PAZ = \angle PAY$, lo que muestra que P se encuentra sobre la bisectriz.

Notación 2.47 *En un triángulo ABC, denotaremos por b_a, b_b, b_c a las bisectrices internas de los ángulos en A, B y C, respectivamente.*

Ahora un teorema más de estas rectas del triángulo.

Teorema 2.48 *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sea I el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c (hay punto de intersección, pues en caso contrario los ángulos en B y C del triángulo sumarían 180°)**.** Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

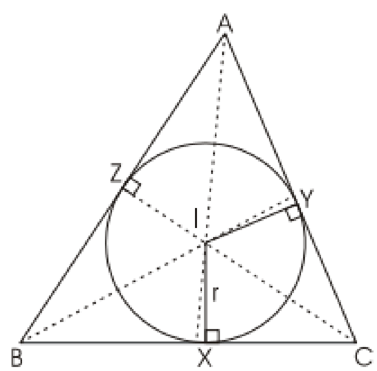


Figura 2.40: Figura 61

Como I está en la bisectriz b_c, tenemos que $IX = IY$ y por estar I en la bisectriz b_b, tenemos que $IX = IZ$. Luego, I cumple que $IY = IZ$, lo que demuestra que I se encuentra en la bisectriz b_a. ∎

Notación 2.49 *El punto de concurrencia de las bisectrices se denota por I y se conoce como **incentro del triángulo** ABC. La distancia del incentro a cada lado del triángulo es la misma, esta distancia se conoce como **inradio** y se denota con r. A la circunferencia de centro I y radio r le llamamos **incírculo.***

Resulta que el incírculo está completamente contenido en el triángulo y es tangente a los lados AB, BC y CA en los puntos Z, X y Y, respectivamente.

La definición de mediatriz de un segmento ya la hemos enunciado (vea la Definición 2.10). Una manera de caracterizarla es como el conjunto de puntos P que cumplen que la distancia a cada extremo A, B es la misma, es decir, $PA = PB$.

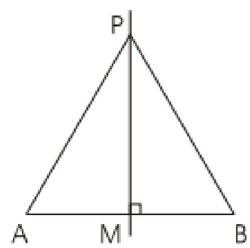


Figura 2.41: Figura 62

En efecto, si M es el punto medio de AB y P se encuentra en la mediatriz (vea la Figura 60), entonces podemos formar dos triángulos rectángulos PAM y PBM. Ya que $AM = MB$, PM es común y los ángulos entre los lados que se comparte son rectos, por el criterio de congruencia LAL tenemos que estos triángulos son congruentes, por lo tanto $PA = PB$.

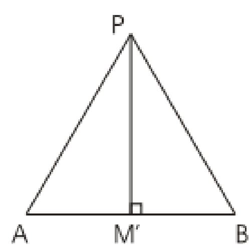


Figura 2.42: Figura 63

Recíprocamente, si P es un punto que satisface $PA = PB$ entonces P está spbre la mediatriz de AB. Para ver esto consideremos a M' el pie de la perpendicular de P sobre el segmento AB (vea la Figura 61). Veamos que $M' = M$ de la siguiente forma: Como los triángulos rectángulos PAM' y PBM' tienen dos pares de lados iguales ($PA = PB$ y PM' es común), el teorema de Pitágoras garantiza que los otros catetos son iguales, es decir, $AM' = M'B$. Por tanto, M' es el punto medio de AB.

Notación 2.50 *En un triángulo ABC, denotaremos por l_a, l_b, l_c a las mediatrices de los lados BC CA y AB, respectivamente.*

Teorema 2.51 *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sean l_a y l_b las mediatrices de los lados BC y CA del triángulo ABC. Sea O el punto de intersección de estas mediatrices (hay punto de intersección, ya que si son paralelas entonces también BC y CA son paralelos, por lo que no se formaría propiamente un triángulo).

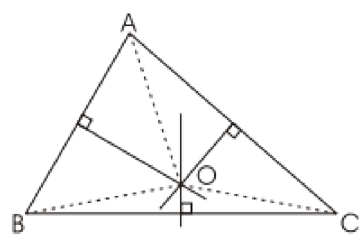


Figura 2.43: Figura 64

Veamos que el punto O se encuentra también en la mediatriz del segmento AB (vea la Figura 62). Como O está en l_a, $OB = OC$ y como O se encuentra en l_b, $OA = OC$. Luego, O cumple que $OA = OB$, es decir, O está en la mediatriz de AB. ■

Notación 2.52 *El punto de concurrencia de las mediatrices, que se denota por O, se conoce como el* ***circuncentro*** *del triángulo ABC. Como los vértices equidistan a O, la circunferencia de centro O y radio R (la distancia común a los vértices) pasa por los vértices. La circunferencia se llama el* ***circuncírculo*** *del triángulo ABC y el radio R el* ***circunradio****.*

La defición de altura se dió en la sección 2.2.

Teorema 2.53 *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Primera demostración. Sea ABC un triángulo y trazemos por cada vértice la recta que es paralela al lado opuesto de tal vértice, estas rectas paralelas determinan un triángulo $A'B'C'$, vea la siguiente figura.

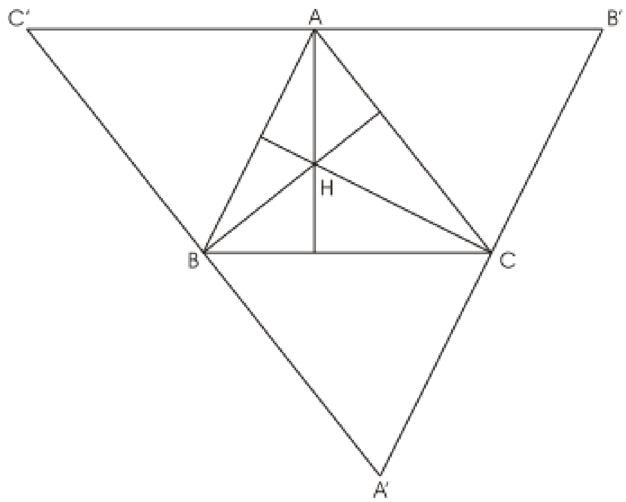


Figura 2.44: Figura 65

Como $ABCB'$, $AC'BC$ y $ABA'C$ son paralelogramos, tenemos que A, B y C son puntos medios de $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$, respectivamente y las alturas de ABC son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ y por la sección anterior, sabemos que son concurrentes. Luego, las alturas de ABC son concurrentes.

Segunda demostración. En la proposición 2.40 se dio una caracterización de la altura: h_a es el conjunto de puntos P tales que $BP^2 - CP^2 = BA^2 - CA^2$.

Supongamos que H es un punto común de las alturas h_a y h_b. Entonces H satisface, $BH^2 - CH^2 = BA^2 - CA^2$ y $CH^2 - AH^2 = CB^2 - AB^2$. Al sumar ambos lados de las igualdadades, tenemos que H satisface $BH^2 - AH^2 = CB^2 - CA^2 = BC^2 - AC^2$, lo cual nos garantiza que H se encuentra también en la otra altura h_c. ■

Notación 2.54 *El punto común o de concurrencia de las alturas se llama* ***ortocentro*** *y se denota por H.*

Capítulo 3

Teorema de Menelao

Una propiedad de los triángulo, imposible de ser demostrada usando los postulados de Euclides, es la siguiente:

Axioma 3.1 ***de Pasch***: *Si una recta que no pase por ningún vértice de un triángulo corta interiormente a uno de los lados de éste, entonces corta también interiormente a otro lado del mismo triángulo.*

Esta propiedad está relacionada con un teorema conocido como *Teorema de Menelao* que data de la Grecia antigua.

Menelao de Alejandría fue un astrónomo griego que vivió en el primer siglo d. de C. Aunque sus obras en el griego original no han llegado a nosotros, sabemos de algunas de ellas por las observaciones que han hecho comentadores posteriores y su tratado de tres libros *Sphaerica* se conserva hasta nuestros días en árabe. Este trabajo arroja considerable luz sobre el desarrollo griego de la trigonometría. El libro I establece para triángulos esféricos muchas de las proposiciones de los *Elementos* de Euclides que se verifican en los triángulos planos, tales como los teoremas de congruencias, los teoremas acerca de los triángulos isósceles, y así sucesivamente. Además, Menelao establece la congruencia de los triángulos esféricos en que los ángulos de uno son iguales a los de otro (para lo cual no hay anlogía en el plano) y el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos. El libro II contiene problemas de interés en astronomía. En el libro III se desarrolla la trigonometría esférica del tiempo, deducida en su mayor parte del análogo esférico de la proposición en el plano conocida comúnmente ahora como *teorema de Menelao.* Realmente, Menelao supone que el caso en el plano es bien conocido y lo utiliza para establecer el caso esférico. Gran parte de la trigonometría esférica puede deducirse de la versión esférica de dicho teorema tomando triángulos y transversales especiales. L. N. M. Carnot hizo básico el teorema de Menelao en su *Essai sur la théorie des transversales* de 1806.

El teorema de Menelao está estrechamente relacionado con otro teorema que eludio su descubrimiento hasta 1678, cuando el italiano Giovanni Ceva (1647-1736) publicó un trabajo que contenía tanto este teorema, es decir, el *teorema de Ceva* como el entonces evidentemente olvidado desde hacía tiempo, teorema de Menelao.

Los teoremas de Menelao y Ceva enunciados en función de las magnitudes con sentido adquirieron un aspecto particularmente moderno, son potentes, y con ellos pueden tratarse elegantemente muchos problemas en los que interviene la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Vayamos ahora al estudio de estos dos notables teoremas, observando cómo la convención respecto a puntos en el infinito elimina que hayan que considerarse independientemente varias situaciones que sin ella serían excepcionales [10, pág. 75].

Definición 3.2 *Un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincide con ningún vértice de éste, se llamará* ***punto de Menelao*** *del triángulo para dicho lado.*

Teorema 3.3 ***Teorema de Menelao:*** *Si tres puntos de Menelao D, E y F, de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC son colineales entonces* *cumple la siguiente relación:*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Demostración. Para demostrar el teorema vamos a auxiliarnos con la siguiente figura:

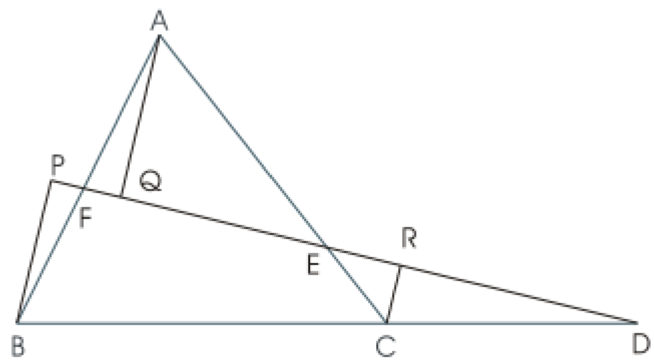


Figura 3.1: Figura 109

Tracemos desde los vértices del triángulo perpendiculares a la recta FD, llamémoslas PB, AQ y RC; luego, los triángulos AQF y BFP son semejantes, lo mismo que los triángulos CDR y BDP, entonces: $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PB}}$; $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{RC}}$ (ya que los sentidos de BD y DC son opuestos) y $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{AQ}}$. Multiplicando estas tres igualdades miembro a miembro, obtenemos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1. \qquad \blacksquare$$

¿Será cierto el recíproco del teorema? La respuesta es afirmativa.

Teorema 3.4 ***Recíproco del Teorema de Menelao:*** *Si D, E y F son puntos de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC para el cual se cumple la siguiente relación*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$$

entonces D, E y F son colineales.

Demostración. Supongamos que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$ y que EF corte a BC en D'. Entonces D' es un punto de Menelao y, por lo antes dicho, tenemos que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1$, luego $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}$, lo que implica que $D = D'$, puesto que no puede haber dos puntos distintos que corten a un segmento en la misma razón. De donde D, E y F son colineales. ■

Este teorema también se puede enunciar en función de los ángulo que se forman al trazar rectas que partan de los vértices y que lleguen a los puntos de intersección de la recta dada con los lados opuestos respectivos.

Teorema 3.5 ***Forma trigonométrica del Teorema de Menelao.*** *Tres puntos de Menelao D, E y F, de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC son colineales si y sólo si cumplen la siguiente relación:*

$$\frac{sen\overline{BAD}}{sen\overline{DAC}}\frac{sen\overline{CBE}}{sen\overline{EBA}}\frac{sen\overline{ACF}}{sen\overline{FCB}} = -1.$$

Por el ejercicio 5 del Capítulo **??** tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} &= \frac{ABsen\overline{BAD}}{ACsen\overline{DAC}}, \\ \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} &= \frac{BCsen\overline{CBE}}{BAsen\overline{EBA}}, \\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} &= \frac{CAsen\overline{ACF}}{CBsen\overline{FCB}}. \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{\left(sen\overline{BAD}\right)}{\left(sen\overline{DAC}\right)}\frac{\left(sen\overline{CBE}\right)}{\left(sen\overline{EBA}\right)}\frac{\left(sen\overline{ACF}\right)}{\left(sen\overline{FCB}\right)} = -1$$

si y sólo si

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1. \qquad ■$$

3.1. Teorema de Ceva

Otra propiedad importante de las líneas que parte de los vértices de un triángulo surge de la siguiente definición:

Definición 3.6 *Una recta que pase por un vértice de un triángulo, pero que no coincida con un lado de éste, se llamará* ***recta ceviana*** *del triángulo para dicho vértice. Una ceviana se identificará por el vértice al que pertenece y el punto en que corta al lado opuesto, como la ceviana AD que pasa por el vértice A de un triángulo ABC y que corta al lado opuesto BC en el punto D.*

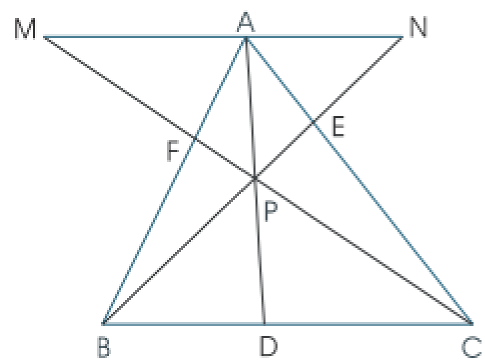


Figura 3.2: Figura 110

Teorema 3.7 ***Teorema de Ceva.*** *Si tres cevianas AD, BE y CF de un triángulo ABC son concurrentes, entonces las razones en que los puntos D, E y F dividen a los lados del triángulo cumplen con la siguiente propiedad:*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$

Demostración. Para demostrar este teorema nos apoyaremos en la figura anterior. Supongamos que AD, BE y CF concurren en el punto P. Sin perder generalidad, podemos suponer que P no está en la paralela a BC que pasa por A. Sean BE, CF tales que corten esta paralela en N y M. Entonces, sin considerar los signos, de la semejanza de los triángulos PBD y PNA obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PN}{PA} \tag{3.1}$$

$$\frac{BD}{PB} = \frac{NA}{PN} \tag{3.2}$$

otra semejanza entre los triángulos PDC y PAM nos lleva la siguiente relación:

$$\frac{AM}{PA} = \frac{DC}{PD} \tag{3.3}$$

Dividiendo (3.2) entre (3.3) obtenemos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{NA \cdot PA \cdot PB}{PN \cdot AM \cdot PD}$$

y sustituyendo (3.1) en el segundo mienbro de la igualdad anterior obtendremos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{NA}{AM} \tag{3.4}$$

Pero esas no son las únicas semejanzas que se obtienen en la figura anterior, también los triángulos AEN, CEB y FBC, FAM son respectivamente semejantes y de su semejanza obtenemos:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{NA} \tag{3.5}$$

y

$$\frac{AF}{FB} = \frac{MA}{BC}. \tag{3.6}$$

De (3.4), (3.5) y (3.6) tenemos que:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \pm 1.$$

Ahora, como ninguno de los puntos D, E y F, o bien sólo uno de ellos, dividen a sus lados correspondientes exteriormente, el signo debe ser $+$. ■

Podemos notar que este teorema abarca alguno de los casos de rectas notables que hemos visto separadamente en algunas secciónes de este trabajo, a saber, las alturas, las bisectrices interiores y las medianas.

El recíproco del Teorema de Ceva es también verdadero, veamos su demostración.

Teorema 3.8 ***Recíproco del Teorema de Ceva.*** *Tres cevianas AD, BE y CF de un triángulo ABC satisfacen la siguiente condición*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$$

entonces son concurrentes.

Demostración. Supongamos que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$$

y sean BE, CF tales que se corten en P, y trácese AP de modo que corte a BC en D'. Entonces AD' es una ceviana y por lo anterior, tenemos

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1.$$

Luego, $\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$, es decir $D=D'$. Esto es, AD, BE y CF son concurrentes. ∎

Este teorema también tiene una forma trigonométrica:

Teorema 3.9 ***Forma trigonométrica del Teorema de Ceva.*** *Tres cevianas AD, BE y CF de un triángulo ABC son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{sen\overline{BAD}}{sen\overline{DAC}}\frac{sen\overline{CBE}}{sen\overline{EBA}}\frac{sen\overline{ACF}}{sen\overline{FCB}}=1.$$

Su demostración es similar a la del Teorema de Menelao y se dejará como ejercicio.

A continuación pondremos de manifiesto el poder de los teoremas de Menelao y Ceva utilizándolos ahora para establecer tres teoremas útiles y muy interesantes.

Teorema 3.10 *Si AD, BE, CF son tres cevianas concurrentes cualesquiera de un triángulo ABC, y si se designa por D' el punto de intersección de BC y FE, entonces D y D' dividen a BC, uno interiormente y el otro exteriormente, en la misma razón numérica.*

Demostración.

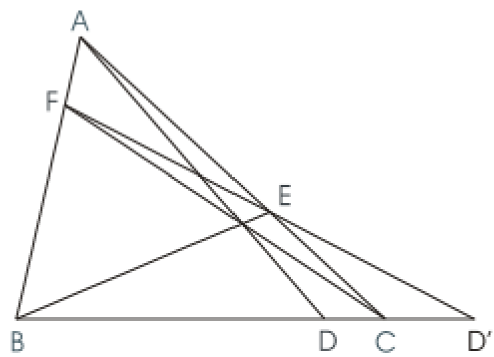


Figura 3.3: Figura 111

Ya que AD, BE, CF son tres cevianas concurrentes (vea la figura anterior), tenemos, por el teorema de Ceva,

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$

Y como D', E y F son puntos de Menelao colineales, tenemos, por el teorema de Menelao,

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1.$$

Luego,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}},$$

de donde D y D' dividen a BC, uno interiormente y el otro exteriormente, en la misma razón numérica. ∎

Veamos otro teorema cuya demostración se hará empleando el teorema de Menelao, sólo que antes de enunciarlo haremos unas definiciones:

Definición 3.11 *Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se dice que son* ***copolares*** *o* ***están en perspectiva*** *si AA', BB' y CC' son concurrentes. Al punto de concurrencia O lo llamaremos* ***centro de perspectiva.***

Definición 3.12 *Se dice que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son* ***coaxiales*** *si los puntos de intersección de BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ y AB y $A'B'$ son colineales. A la línea que contiene a esos puntos se le llama* ***eje de perspectiva.***

3.2. Teorema de Desargues

Teorema 3.13 ***Teorema de Desargues de dos triángulos.*** *Los triángulos copolares son coaxiales, y viceversa.*

Demostración.

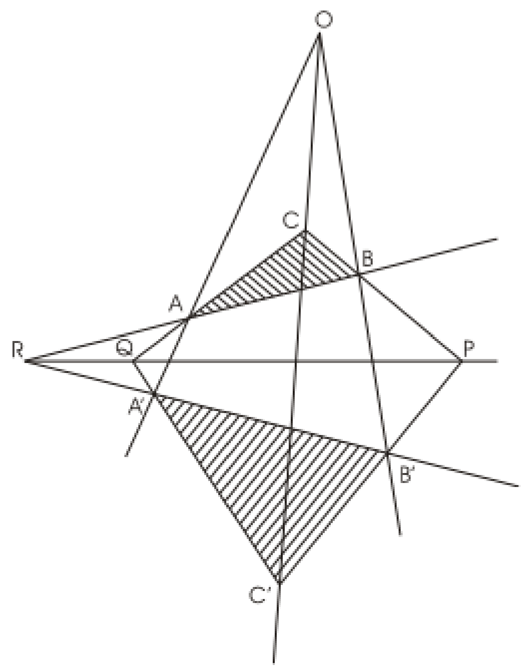


Figura 3.4: Figura 112

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos que están en perspectiva, es decir, AA', BB', CC' son concurrentes en un punto O. Observemos en la Figura 113 que los lados AB y $A'B'$ se intersecan en un punto P, así como BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ lo hacen respectivamente en los puntos Q y R, por lo que habrá que demostrar que P, Q y R son colineales.

Consideremos el triángulo ABO, observemos que los lados OB, BA y AO son cortados por una línea en los puntos B', P y A', repectivamente, por lo que se cumple el Teorema de Menelao, es decir:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}}\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}}\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} = -1,$$

Similarmente, en el triángulo BOC, los lados OC, CB y BO son cortados por una línea en los puntos C', Q y B', por lo que se cumple:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}}\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} = -1$$

De manera análoga, en el triángulo AOC, los lados OC, CA y AO son cortados por una línea en los puntos C', R y A', por lo que:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}}\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} = -1$$

Dividiendo miembro a miembro la segunda igualdad entre la tercera obtenemos:

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}}\frac{\overline{RA}}{\overline{CR}}\frac{\overline{A'O}}{\overline{AA'}} = 1$$

Y, multiplicando por la primera igualdad tenemos:

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}\frac{\overline{RA}}{\overline{CR}}\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = -1$$

Es decir:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = -1.$$

Que precisamente es el resultado de aplicar el Teorema de Menelao al triángulo ABC cuyos lados AB, BC y CA son cortados por una recta en los puntos P, Q y R , respectivamente, es decir, los puntos P, Q y R son colineales.

Recíprocamente, supongamos que los lados respectivos de dos triángulos se cortan en los puntos P, Q y R y estos son colineales. Si nos fijamos en el punto R, en él convergen las rectas AC, $A'C'$ y PQ, por lo tanto, R es un centro de perspectiva de los triángulos $PA'A$ y $QC'C$ y por el resultado anterior (Teorema de Desargues), los lados de éstos triángulos se cortarán respectivamente en tres puntos colineales, es decir, las intersecciones de PA' y QC', PA y QC y AA' y CC' son colineales, en otras palabras, B', B y O, que es el punto en donde concurren AA' y CC', son colineales, lo que implica que O es el centro de perspectiva de los triángulos ABC y $A'B'C'$. ∎

El Teorema de Desargues para dos triángulos parece que fue dado por Desargues en una obra de perspectiva en 1636, tres años antes de que se publicara su *Brouillon projet*. Este teorema se ha hecho básico en la teoría actual de la geometría proyectiva. Encontramos las llamadas *geometrías no desarguianas*, es decir, geometrías planas en que el teorema de dos triánguo no se verifica. El gran geómetra francés Jean-Victor Poncelet (1788-1876) hizo del teorema de Desargues de los dos triángulos el fundamento de su teoría de figuras homológicas.

Teorema 3.14 ***Teorema del "Hexagrama Místico" o Hexágono, de Pascal para una circunferencia.*** *Los puntos L, M y N de intersección de los tres pares de lados opuestos AB y DE, BC y EF y FA y CD de un hexágono (no necesariamente conexo) $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia están en una recta, sobre la llamada* recta de Pascal *del hexágono.*

Demostración. Sean X, Y y Z los puntos de intersección de AB y CD, CD y EF y EF y AB, y consideremos que DE, FA y BC son transversales que cortan a los lados del triángulo XYZ. Por el teorema de Menelao tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{XL}}{\overline{LZ}}\frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}}\frac{\overline{YD}}{\overline{DX}} &= -1,\\
\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}}\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} &= -1,\\
\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}}\frac{\overline{ZM}}{\overline{MY}}\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}} &= -1.
\end{aligned}$$

Igualando el producto de los tres primeros miembros de las ecuaciones anteriores al de los tres segundos miembros, y reordenando las razones, obtenemos:

$$\left(\frac{\overline{XL}}{\overline{LZ}}\frac{\overline{ZM}}{\overline{MY}}\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}\right)\left(\frac{\overline{XB}\cdot\overline{XA}}{\overline{XC}\cdot\overline{XD}}\right)\left(\frac{\overline{YC}\cdot\overline{YD}}{\overline{YE}\cdot\overline{YF}}\right)\left(\frac{\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}}{\overline{ZB}\cdot\overline{ZA}}\right) = -1. \tag{3.7}$$

Pero $\overline{XB}\cdot\overline{XA} = \overline{XC}\cdot\overline{XD}$, $\overline{YC}\cdot\overline{YD} = \overline{YE}\cdot\overline{YF}$ y $\overline{ZE}\cdot\overline{ZF} = \overline{ZB}\cdot\overline{ZA}$, por lo que cada uno de los tres últimos factores entre paréntesis de (3.7) tiene valor 1; luego

$$\frac{\overline{XL}}{\overline{LZ}}\frac{\overline{ZM}}{\overline{MY}}\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} = -1,$$

es decir, L, M y N son colineales. ■

Blaise Pascal (1623-1662) se inspiró en la obra de Desargues y obtuvo su teorema "del hexagrama místico" para una cónica general cuando sólo tenía 16 años. Las consecuencias del teorema "del hexagrama místico" son muy numerosas e interesantes, y se ha hecho una cantidad casi increibles de investigación sobre su configuración. Hay $\frac{5!}{2} = 60$ maneras posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una circunferencia, y, por el teorema de Pascal, a cada hexágono le corresponde una *recta de Pascal.* Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados *puntos de Steiner*, que a su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas *rectas de Plücker*. Las rectas de Pascal también concurren de tres en tres en otro conjunto de puntos, llamados *puntos de Kirkman*, de los cuales hay 60. Correspondiendo a cada punto de Steiner, hay tres puntos de Kirkman tales que los cuatro están sobre una recta, llamada *recta de Cayley.* Hay 20 de estas rectas de Cayley, que pasan de cuatro en cuatro por 15 puntos, llamados *puntos de Salomón.* Hay más extensiones y propiedades de la configuración, y el número de demostraciones distintas que se han proporcionado para el propio teorema "del hexagrama místico" es ahora una legión [10, pág. 81].

Finalmente enunciaremos una propiedad muy importante conocida como

Principio de dualidad:

Si una propiedad geométrica es verdadera, la propiedad que resulte de intercambiar las palabras recta y punto y sus respectivas propiedades es también verdadera. Por ejemplo, el dual de la proposición "la intersección de dos rectas es un punto" es "la unión de dos puntos es una recta". Otro ejemplo, el dual de "un conjunto de rectas concurrentes determinan un haz" es "un conjunto de puntos colineales determinan una hilera".

Un ejemplo más complejo: "Si los vértices de dos triángulos están respectivamente sobre tres rectas concurrentes, entonces sus lados correspondientes se intersecan en tres puntos colineales". El dual es: "Si los lados de dos triángulos se cortan respectivamente en tres puntos colineales, entonces sus vértices correspondientes se encuentran en tres rectas concurrentes". En otras palabras, el dual del Teorema de Desargues es su recíproco.

Bibliografía

[1] Aleksandrov, A. D., Kolmogorov A. N., Laurentiev M. A. y otros, *La matemática: su contenido, metódos y significado I,* Versión española de Manuel López Rodrigez, Alianza, Madrid 1980.

[2] Bulajich Manfrino, Radmila y Gómez Ortega, José Antonio, *Cuadernos de olimpiadas de matemáticas*, *Geometría.* Comité editorial, 2004.

[3] Bulajich Manfrino, Radmila y Gómez Ortega, José Antonio, *Cuadernos de olimpiadas de matemáticas. Geometría, Ejercicios y problemas*, Comité editorial, 2004.

[4] Cambray-Nuñez, Rodrigo, *El libro I de los Elementos de Euclides en las novelas de loros*, Miscelánea Matemática, Número 38, Diciembre 2003, pp. 43-61.

[5] Cárdenas Rubio, S., *Temas de matemáticas para bachillerato. Dos o tres trazos.* México, Comité editorial, 2003.

[6] Charles Henry, Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, Ney York Heidelberg Berlin.

[7] De la Peña, José Antonio, *Álgebra en todas partes*, México, Fondo de Cultura Económica, 1999.

[8] Guedj Denis, *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, Anagrama, Barcelona, 2000. [Quinta reimpresión: 2001. Versión en castellano de Consuelo Serra.]

[9] Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Elements,* (3 tomos), primera edición, Dover, New York, 1956.

[10] Howard Eves, *Estudio de las geometrías* (tomo I), México, UTEHA, 1969.

[11] Kurt Von, Fritz, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics, Vol. 46, No. 2, (1945), pp. 242-264.

[12] *Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Calendario 2002*, Morelos 2001.

[13] Pogorélov A. V., *Geometría elemental,* URSS, Mir 1974.

Sitios en internet

http://www.divulgamat.net/
http://www.matematicas.net
http://www.familia.cl/Seccion30.htm
http://www.filosofia.org/cur/pre/talesfyt.htm
http://nti.educa.rcanaria.es/fundoro/pub-actas1.htm
http://html.rincondelvago.com/postulados-de-euclides.html