Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Licenciatura en matemáticas

Una introducción a la aritmética cardinal infinita

Tesis presentada para obtener el grado de

Licenciado en matemáticas

Presenta

Maximiliano Adrian Flores Meneses

Director de tesis

Manuel Ibarra Contreras

Puebla, Pue. Enero 2019

Dedicado a mi madre y mi padre
y a mi hermana y mi hermano

Agradecimientos

Este es un logro del que muchas personas aportaron para que se hiciera posible. Sin ellos nada de esto habría ocurrido.

En primer lugar quiero agradecer a mi madre Clara por la ayuda y comprensión que he recibido en toda mi vida. Que me has apoyado en todas mis decisiones y de ti he recibido todo a cambio de nada. No me alcanza la vida para devolverte todo lo que has hecho por mí, mil gracias.

A mí padre José Justo por los consejos que me ha dado a lo largo de mi vida. De ti he aprendido tantas cosas y me guiaste por el camino correcto.

Quiero agradecer y mis hermanos Augusto y Lializet por los momentos que he pasado con ellos. Aunque parece que siempre estuviéramos peleando, al final siempre nos apoyamos en las buenas y las malas. Hemos compartido todo; los aprecio mucho hermanos.

Al profesor Manuel Ibarra por aceptarme como su tesista, por el apoyo y la paciencia que me tuvo durante la elaboración de este trabajo.

A mis sinodales el Dr. Agustín Contreras Carreto, el M.C. Armando Martínez García y el Dr. Iván Martínez Ruiz por tomarse el tiempo de revisar y corregir mi tesis.

A todos mis amigos de la Facultad de Físico Matemáticas por los buenos momentos que pasamos en esta institución. Aprendimos juntos y nos apoyamos para graduarnos y seguir adelante.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla porque gracias a esta institución pude adquirir una gran cantidad de conocimiento de todo tipo.

Al Dr. Rodolfo Hernán Rodriguez Moreno por toda la ayuda que me brindó en los momentos más oscuros de mi vida y por darme buenos consejos; sin ellos, no habría sabido qué hacer.

Agradezco en especial a Google y DuckDuckGo, los buscadores de internet de los que obtuve gran información para poder hacer este trabajo de la mejor manera posible. También a aquellas personas anónimas que suben todo este conocimiento a la red.

Una introducción a la aritmética cardinal infinita

Autor: Maximiliano Adrian Flores Meneses

Tal vez la mejor manera de describir mi experiencia al hacer matemáticas sea la de entrar a una oscura mansión. Uno entra a la primera habitación y está oscura, muy oscura. Uno avanza a tientas, tropezando con los muebles, y gradualmente aprende dónde está cada mueble... y finalmente, al cabo de seis meses o así, encuentras el interruptor de luz, lo enciendes y de repente todo se ilumina, puedes ver exactamente dónde estabas.

Andrew Wiles

Comencemos en seguida con la más simple de las palabras: «infinito». Esta, como «Dios», «espíritu» y algunas expresiones que tienen equivalentes en todas las lenguas, en ningún modo es expresión de una idea, sino un esfuerzo hacia ella. Representa un intento posible hacia una concepción imposible. El hombre necesitaba un término para indicar la dirección de este esfuerzo, la nube tras la cual se halla, por siempre invisible, el objeto de esta tentativa. En fin, se requería una palabra por medio de la cual un hombre pudiera ponerse en relación, de inmediato, con otro hombre y con cierta tendencia del intelecto humano. De esta exigencia surgió la palabra «infinito», la cual no representa, pues, sino el pensamiento de un pensamiento.

Edgar Allan Poe

Introducción

La teoría de conjuntos es una disciplina matemática que tiene sus orígenes en el último tercio del siglo XIX. Surgió basada en la teoría del ruso Georg Cantor sobre los ordinales y cardinales infinitos, desarrollándose durante el siglo XX hasta convertirse en una área de investigación matemática de una gran complejidad técnica y conceptual. Ahora se le puede ver como fundamento de casi toda la matemática actual o como la teoría matemática del infinito. En las últimas décadas del siglo XX y lo que llevamos del siglo XXI, la teoría de conjuntos ha experimentado un crecimiento espectacular en ambas direcciones y se ha dividido en numerosas subáreas.

Fue el filósofo y matemático Bernard Bolzano el primero en tratar de fundamentar el concepto matemático de infinito en su obra *Paradojas del infinito*, publicada póstumamente. En este trabajo, aparece por primera vez de forma intuitiva el término *conjunto* y aporta ejemplos de correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto infinito y de un subconjunto propio del mismo y Bolzano aceptó esto como algo normal entre los conjuntos infinitos. Esta definición del infinito fue utilizada más adelante por Cantor y Dedekind.

La teoría de conjuntos nació en diciembre de 1873, cuando Georg Cantor estableció que no hay una correspondencia biunívoca entre los números reales y los números naturales, y en los siguientes años desarrolló una teoría matemática sobre el infinito. Rechazó la distinción aristotélica entre infinito actual e infinito potencial, ya que todo infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual. Cantor llegó a ver lo finito y lo transfinito como una pieza, igual y conjuntamente comprensible dentro de las matemáticas. En 1904, Ernst Zermelo formuló lo que actualmente se le conoce como el *axioma de elección* y el *principio del buen orden*; posteriormente, en 1908, publicó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos. Zermelo junto al trabajo de otros matemáticos tales como Thoralf Skolem, Abraham Fraenkel, John von Neumann y otros, dieron origen al ahora conocido como el *sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZF).*

El objetivo de esta tesis es estudiar las propiedades de la teoría de conjuntos relacionados con la aritmética. Los números naturales tienen dos usos principales: primero, el contar la cantidad de elementos de un conjunto; y segundo, de ordenar una cantidad cualquiera de elementos. Estos términos se diferencian en el lenguaje común cuando se habla de primero, segundo, tercero...; y de uno, dos, tres... Vamos a extender estos dos conceptos para conjuntos infinitos y van a ser definidos aquí de manera rigurosa, así como también definiremos operaciones de suma, producto y potencia. Sin embargo, para los conjuntos infinitos no es posible usar un solo tipo de números para el orden y la cantidad de elementos, de modo que se definirán dos tipos de números: ordinales y los cardinales. Los ordinales determinan un orden en un conjunto dado y los cardinales nos dicen cuantos elementos tiene. Cada tipo de números tendrá su propia aritmética y veremos las propiedades que cumplen.

Se ahondará en especial en la potenciación cardinal. Es sabido que no es posible saber el valor exacto de un cardinal de la forma κ^λ, por lo que es necesario agregar un axioma adicional. Desarrollaremos una teoría más profunda para saber qué valores puede tener κ^λ suponiendo axiomas adicionales tales como la hipótesis del continuo y la hipótesis de los cardinales singulares.

Más adelante, partiendo de la aritmética cardinal infinita, se tocan algunas de sus aplicaciones que tienen que ver con resultados fundamentales de combinatoria. También se estudia muy someramente el problema de los cardinales grandes al definir algunos de ellos y probar algunos resultados elementales. Los grandes cardinales son aquellos cuya existencia no se puede probar en ZFE y, por tanto, su existencia debe considerarse como un axioma adicional de la teoría de conjuntos. La teoría de los cardinales grandes se desarrolló enormemente desde mediados del siglo XX y en la actualidad constituye una de las áreas de mayor importancia, tanto por su sofisticación técnica como por sus aplicaciones.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección vamos a ver algunos resultados básicos acerca de la teoría de conjuntos que van a ser necesarios más adelante. Primero introduciremos la lista de axiomas que sustentan nuestra teoría y enseguida los resultados más inmediatos que se deducen de ellos. No hay demostraciones pues este capítulo solo cumple la función de que el trabajo sea autocontenido.

1.1. El sistema axiomático ZFE

Vamos a enunciar los axiomas establecidos por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel (**ZF**) para la teoría de conjuntos y agregando al famoso *axioma de elección* (**ZFE**).

En este sistema habrá dos relaciones $\in$ (*pertenencia*) y $=$ (*igualdad*). La expresión $A \in B$ significa «A pertenece a B», y $A = B$ quiere decir «A es igual a B». Usaremos $:=$ para establecer una igualdad por definición. ara formar las proposiciones en ZFE usamos los conectores lógicos $\wedge$ (conjunción —y—), $\vee$ (disyunción —o—), $\Longrightarrow$ (implicación —entonces—), $\Longleftrightarrow$ (bicondicional —si y solo si—) y $\neg$ (negación —no—); así como los cuantificadores $\forall$ (cuantificador universal —para todo—) y $\exists$ (cuantificador existencial —existe algún—). Las fórmulas $\neg(A \in B)$ y $\neg(A = B)$ se escribirán como $A \notin B$ y $A \neq B$ respectivamente.

($A1$) **Extensión.** Si A y B son conjuntos, entonces $A = B$ si $\forall x : x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

($A2$) **Clasificación.** Si P es una proposición y A es un conjunto, existe otro conjunto B tal que $x \in B \Longleftrightarrow x \in A \wedge P(x)$.

Por ($A1$) tal conjunto B es único y lo denotaremos como $\{x \in A \mid P(x)\}$.

Definición 1.1.1. Si P es una proposición y existe un conjunto A tal que $\forall x : x \in A \Longleftrightarrow P(x)$, por el axioma de extensión, A es el único conjunto que cumple tal propiedad. Cuando exista A, denotamos a A como $\{x \mid P(x)\}$ y le llamamos «el conjunto de todos aquellos x que satisfacen la propiedad P». La afirmación, «$\{x \mid P(x)\}$ es un conjunto» significa que «existe un conjunto A tal que $\forall x : x \in A \Longleftrightarrow P(x)$».

($A3$) **Conjunto vacío.** Existe un conjunto A con la propiedad de que $\forall x : x \notin A$. Este conjunto se llama *conjunto vacío* y se denota por $\emptyset$.

($A4$) **Par.** Si a y b son conjuntos, entonces $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ es un conjunto.

($A5$) **Amalgamación.** Si A es un conjunto, entonces $\{x \mid \exists a \in A : x \in a\}$ es un conjunto.

Antes de continuar, definiremos algunos conceptos, para que se puedan enunciar de forma más fácil los siguientes axiomas.

Definición 1.1.2. Sean A, B, R, a y b conjuntos:

1) A es *subconjunto* de B, denotado por $A \subseteq B$, si $\forall x : x \in A \Longrightarrow x \in B$. Decimos también que B es un *superconjunto* de A.

2) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ se llama *unión* de A y B.

3) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ se llama *intersección* de A y B.

4) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ es la *diferencia* de A y B.

5) $\bigcup A := \{x \mid \exists a \in A : x \in a\}$ se llama *unión amalgamada* de A.

6) $\bigcap A := \{x \mid \forall a \in A : x \in a\}$ se llama *intersección amalgamada* de A.

7) $\{A, B\} := \{x \mid x = A \vee x = B\}$ se llama *pareja no ordenada determinada por A y B*. Si $A = B$ denotamos $\{A\} := \{A, B\}$ y le llamamos el *singular* o *singulete* de A.

8) $(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$ se llama *pareja ordenada* determinada por A y B.

9) $\mathrm{dom}(A) := \{x \mid \exists y : (x, y) \in A\}$ es el *dominio* de A.

10) $\mathrm{ran}(A) := \{y \mid \exists x : (x, y) \in A\}$ es el *rango* de A.

11) R es una *relación* si $\forall x \in R : \exists a : \exists b : x = (a, b)$.

12) f es una función si f es una relación y $\forall x \forall y \forall z : ((x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$. Para decir que $\mathrm{dom}(f) = A$ y $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$ escribimos $f : A \longrightarrow B$, y B se llama *codominio* de f.

13) Para cada a elemento de $\mathrm{dom}(R)$, definimos $R(a) := \bigcap\{y \mid (a, y) \in R\}$ llamada la *imagen de a respecto a R*.

Continuamos con los axiomas:

($A6$) **Subconjuntos.** Si A es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(A) := \{a \mid a \subseteq A\}$ es un conjunto. $\mathcal{P}(A)$ se le conoce como el *conjunto potencia* de A.

($A7$) **Infinitud.** Existe un conjunto A tal que $\emptyset \in A$, y $b \cup \{b\} \in A$ siempre que $b \in A$.

($A8$) **Reemplazo.** Si f es una función y $\mathrm{dom}(f)$ es un conjunto, entonces $\mathrm{ran}(f)$ es un conjunto.

($A9$) **Regularidad** Si A es un conjunto donde $A \neq \emptyset$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$.

($A10$) **Elección.** Si A es un conjunto y $\forall a \in A : a \neq \emptyset$, entonces existe una función $f : A \longrightarrow \bigcup A$ tal que $\forall a \in A : f(a) \in a$.

1.2. Clases

Es razonable preguntarse si dada cualquier propiedad P, siempre va a existir el conjunto de todos aquellos elementos que cumplen la propiedad P. La respuesta es no, y podemos ver esto con un ejemplo:

Supongamos que $\Omega := \{x \mid x \notin x\}$ es un conjunto. Se debe cumplir que $\Omega \in \Omega$ o $\Omega \notin \Omega$. Si $\Omega \in \Omega$, entonces $\Omega \notin \Omega$. Si por el contrario $\Omega \notin \Omega$, entonces $\Omega \in \Omega$. Tenemos por lo tanto $\Omega \notin \Omega \Longleftrightarrow \Omega \notin \Omega$. Esto no puede ocurrir, así que Ω no es un conjunto.

Aunque no exista un conjunto para cualquier proposición, se puede introducir otro concepto que intuitivamente se entenderá como el de conjunto (una reunión o colección de objetos) al que llamamos *clase*. Dada cualquier proposición P vamos a denotar como $\{x \mid P(x)\}$ a la clase de todos los conjuntos que cumplen P.

Existe otro sistema axiomático de la teoría de conjuntos en el que se usa el concepto de clase. Este sistema es el sistema axiomático de *Von Neumann–Bernays–Gödel* (NBG). En tal sistema, *clase* es el concepto primitivo, y un conjunto se define como una clase que es elemento de alguna otra clase. Además hay también un axioma similar al de clasificación en ZFE:

NBG2 **(clasificación).** Para cualquier proposición P existe una clase B tal que:

$$X \in B \Longleftrightarrow P(X) \wedge X \text{ es un conjunto.}$$

La clase B se denota por $\{x \mid P(x)\}$.

Hay otra manera de resolver la cuestión de $\Omega := \{x \mid x \notin x\}$ en NBG. Por el axioma de clasificación de NBG, se tiene que $x \in \Omega \Longleftrightarrow (x \notin x \wedge x \text{ es un conjunto})$. Para que $\Omega \in \Omega$ se tienen que cumplir dos condiciones. Si Ω es conjunto se genera la misma contradicción que en ZFE, pero si no lo es, claramente $\Omega \notin \Omega$ sin que esto implique una contradicción.

En el desarrollo de la teoría que estamos haciendo, vamos a usar el concepto de clase de forma similar que en NBG. Esto es, dada cualquier proposición P, llamamos a $\{x \mid P(x)\}$ una clase y convenimos en que $a \in \{x \mid P(x)\}$ si y solo si $P(a)$ y a es un conjunto.

Por ejemplo, $\boldsymbol{\mathcal{U}} := \{x \mid x \textit{ es un conjunto}\}$ es una clase, la cual llamamos *clase universal*.

Dos clases son iguales si tienen los mismos elementos. Se definen de forma similar que en conjuntos, la unión, intersección, unión amalgamada, intersección amalgamada etc. de clases. Todo conjunto es una clase, pero no toda clase es un conjunto. Una clase que no es un conjunto se llama *clase propia*.

1.3. Propiedades básicas

Si A y B son clases, se definen $-A := \{x \mid x \notin A\}$ llamado el complemento de A, y $A \setminus B := A \cap (-B)$. Se cumplen las siguientes propiedades con los complementos: $-(-A) = A$, $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$, $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$ y $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

La clase universal y el conjunto vacío cumplen:
$-\emptyset = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, $-\boldsymbol{\mathcal{U}} = \emptyset$, $\bigcap \emptyset = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, $\bigcap \boldsymbol{\mathcal{U}} = \emptyset$, $\bigcup \boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, $\bigcup \emptyset = \emptyset$ y $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{U}}) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Para toda clase A, $A \cup (-A) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, $A \cap (-A) = \emptyset$, $(A \in \boldsymbol{\mathcal{U}} \Longleftrightarrow A \text{ es un conjunto})$, $A \cup \boldsymbol{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, $A \cap \boldsymbol{\mathcal{U}} = A$, $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Teorema 1.3.1. *Para cualesquiera clases A, B y C:*

a) $A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

b) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C$.

c) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

d) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

e) $A \subseteq B \Longrightarrow (\bigcup A \subseteq \bigcup B \ \wedge \ \bigcap B \subseteq \bigcap A)$

f) $A \in B \Longrightarrow (A \subseteq \bigcup B \ \wedge \ \bigcap B \subseteq A)$

g) $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

h) $\bigcap(A \cup B) = (\bigcap A) \cap (\bigcap B)$

i) $(\bigcap A) \cap (\bigcap B) \subseteq \bigcap(A \cap B)$

Teorema 1.3.2. *Si* $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, entonces*

a) $\bigcap\{A\} = A = \bigcup\{A\}$.

b) $\bigcap\{A, B\} = A \cap B = \bigcup\{A, B\}$.

Definición 1.3.1. Para cualesquiera clases R, S, A, B, a:

1) R es una *relación* si $\forall a \in R : \exists x, y \in \boldsymbol{\mathcal{U}} : a = (x, y)$.

2) $\mathrm{dom}(R) := \{x \mid \exists y : (x, y) \in R\}$.

3) $\mathrm{ran}(R) := \{y \mid \exists x : (x, y) \in R\}$.

4) $R(a) := \bigcap\{y \mid (a, y) \in R\}$.

5) La *composición* de S con R es $R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in S \ \wedge \ (y, z) \in R\}$.

6) La inversa de R es $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$.

7) La imagen directa de A respecto a R es $R[A] := \{y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.

8) La imagen inversa de A respecto a R es
$R^{-1}[A] = \{x \mid \exists y \in A : (y, x) \in R^{-1}\} = \{x \mid \exists y \in A : (x, y) \in R\}$.

9) R es una función si R es una relación y $\forall x \forall y \forall z : (x, y), (x, z) \in R \Longrightarrow y = z$.

Observar $\mathrm{dom}(\boldsymbol{\mathcal{U}}) = \boldsymbol{\mathcal{U}} = \mathrm{ran}(\boldsymbol{\mathcal{U}})$.

Teorema 1.3.3. *Para cualesquiera* R*,* S*,* T*,* A*,* B *clases:*

a) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

b) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.

c) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$.

d) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.

e) $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$.

f) $(R \cup S)[A] = R[A] \cup S[A]$.

g) *Si* $R \subseteq S$ *y* $A \subseteq B$*, entonces* $R[A] \subseteq S[B]$.

h) *Si* R *es una relación,* $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$ *y* $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$.

i) *Si* R *es una relación,* $(R^{-1})^{-1} = R$.

j) *Si* R *y* S *son relaciones,* $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Usaremos la expresión «$R : A \longrightarrow B$» para decir que $\mathrm{dom}(R) = A$ y $\mathrm{ran}(R) \subseteq B$.

Definición 1.3.2. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función diremos que:

1) f es *inyectiva* si $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$;

2) f es *sobreyectiva* (o *suprayectiva*) si $\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$;

3) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva.

Teorema 1.3.4. *Dadas* f *y* g *funciones:*

a) $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$*;*

b) f *es inyectiva si y solo si* f^{-1} *es una función;*

c) *Si* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$*, entonces* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *es una función;*

d) *Si* f^{-1} *es una función, entonces* $\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f^{-1}(f(x)) = x$ *y* $\forall y \in \mathrm{ran}(f) : f(f^{-1}(y)) = y$.

e) $f = g$ *si y solo si* $\forall x \in \boldsymbol{\mathcal{U}} : f(x) = g(x)$*;*

f) $f = g$ *si y solo si* $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g) : f(x) = g(x)$*;*

g) $f = g$ *si y solo si* $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \land \forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) = g(x)$.

Definición 1.3.3. Si A y B son clases:

1) Se define el producto cartesiano de A y B como $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$.

2) ${}^{A}B := \{f \mid f$ es una función con $\mathrm{dom}(f) = A$ y $\mathrm{ran}(f) \subseteq B\}$.

Teorema 1.3.5. *Si* A *y* B *son conjuntos, entonces* $A \times B$ *y* ${}^{A}B$ *son conjuntos. Si* f *es una función y su dominio es un conjunto, entonces* f *es un conjunto.*

Teorema 1.3.6. *Sean* A *y* B *clases y* $f : A \longrightarrow B$ *una función.*

a) *Si* $B_1, B_2 \subseteq B$*, entonces* $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$

b) *Si* $C \subseteq \mathcal{P}(B)$*, entonces*
$f^{-1}[\bigcup C] = \bigcup\{f^{-1}[c] \mid c \in C\}$ *y* $f^{-1}[\bigcap C] = \bigcap\{f^{-1}[c] \mid c \in C\}$.

Capítulo 2

Números ordinales

El objetivo de este capítulo es estudiar los conjuntos bien ordenados y sus características generales. Especialmente, veremos con más profundidad un tipo particular de conjuntos bien ordenados llamados *números ordinales*, los cuales caracterizan a todos los demás. Basta con estudiar los ordinales para estudiar a todos los conjuntos bien ordenados. La palabra «ordenado» tiene que ver aquí con darles una posición a los elementos de un conjunto; así pues, en un conjunto bien ordenado, habrá un primer elemento, un segundo elemento, tercer elemento...

2.1. Buenos órdenes

Definición 2.1.1. Sean R una relación y A una clase.

1) R es una relación en A si $R \subseteq A \times A$.

2) x *R-precede* a y si $(x, y) \in R$, y se denotará por $x \, R \, y$.

3) R es *transitiva* si $\forall x, y, z : (x \, R \, y \ \wedge \ y \, R \, z) \Longrightarrow x \, R \, y$.

4) R es *reflexiva* si $\forall x \in \operatorname{dom}(R) : x \, R \, x$.

5) R es *simétrica* si $\forall x, y : x \, R \, y \Longrightarrow y \, R \, x$.

6) R es *antisimétrica* si $\forall x, y : (x \, R \, y \ \wedge \ y \, R \, x) \Longrightarrow x = y$.

7) R es *asimétrica* si $\forall x, y : x \, R \, y \Longrightarrow \neg(y \, R \, x)$.

8) R *conecta a* A si para cualesquiera $x, y \in A$ se cumplen una y solo una de las siguientes proposiciones: $x \, R \, y$ o $y \, R \, x$ o $x = y$. Si se da esto, decimos que A tiene la propiedad *tricotómica* respecto a R.

9) Dado $a \in A$:
   i) a es un *elemento R-maximal* de A si $\forall x \in A : x \neq a \Longrightarrow \neg(x \, R \, a)$;
   ii) a es un *elemento R-minimal* de A si $\forall x \in A : x \neq a \Longrightarrow \neg(a \, R \, x)$;
   iii) a es un *R-primer elemento* de A si $\forall x \in A : x \neq a \Longrightarrow a \, R \, x$ —se denota $\min_R(A)$—;
   iv) a es un *R-último elemento* de A si $\forall x \in A : x \neq a \Longrightarrow x \, R \, a$ —se denota $\max_R(A)$—.

10) R *bien ordena* (o *es un buen orden*) a (en) A si:
   i) R conecta a A;

ii) toda subclase no vacía de A tiene un R-primer elemento;

iii) para todo $x \in A$, $\{a \in A \mid a\, R\, x\}$ es un conjunto.

Si R es un buen orden en A, decimos que (A, R) es una *clase (conjunto) bien ordenada* o que A es una clase bien ordenada por R.

Observación. Supongamos que R es una relación que conecta a A. Si $B \subseteq A$ y a es «un» R-primer elemento de B, entonces a es «el único» R-primer elemento de B: en efecto, si a' es otro R-primer elemento de B diferente de a, se tendría que aRa' y $a'Ra$, pero R conecta a A. Esto se cumple también para los R-últimos elementos.

Teorema 2.1.1. *Si R es una relación que conecta a A y toda subclase no vacía de A tiene un R-primer elemento; entonces R es asimétrica y transitiva; y además R^{-1} no necesariamente bien ordena a A.*

Definición 2.1.2. Si R es un buen orden A, decimos que B es una *R-sección* (o *R-segmento inicial*) de A si $B \subseteq A$ y $\forall u, v \in A : (u\, R\, v \ \wedge\ v \in B) \Longrightarrow u \in B$.

Ejemplo. Dado R un buen orden en A, para cualquier cualquier $u \in A$ los conjuntos $\{x \in A \mid x\, R\, u\}$ y $\{x \in A \mid x\, R\, u\} \cup \{u\}$ son R-secciones de A. El mismo A es una R-sección de sí misma.

Teorema 2.1.2. *Supongamos que R bien ordena a A.*

a) Si $B \subseteq A$, entonces R bien ordena a B.

b) Si B y B' son R-secciones de A, entonces $B \subseteq B'$ o $B' \subseteq B$.

c) Si $\mathcal{B}$ es una clase de R-secciones de A, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ y $\bigcap \mathcal{B}$ son R-secciones de A

Teorema 2.1.3. *Supongamos que $\prec$ es un buen orden en A. Si $B \subsetneq A$, entonces, B es una $\prec$-sección de A si y solo si existe (un único) $v \in A$ tal que $B = \{b \in A \mid b \prec v\}$.*

Demostración. Supongamos que B es una $\prec$-sección de A. Tenemos que $B \subsetneq A$, es decir, $A \setminus B \neq \emptyset$; por lo cual existe $v \in A$ tal que v es el $\prec$-primer elemento de $A \setminus B$. Vamos a probar que $B = \{b \in A \mid b \prec v\}$. Si $b \in B$, entonces $b \neq v$ pues $v \in A \setminus B$, así que $b \prec v$ o $v \prec b$, pero no puede ocurrir que $v \prec b$ porque B es una $\prec$-sección de A (se tendría que $v \in B$), en consecuencia, $b \prec v$; por tanto, $B \subseteq \{b \in A \mid b \prec v\}$. Ahora, si $a \in \{b \in A \mid b \prec v\}$, entonces $a \in A$ y $a \prec v$, como v es el $\prec$-primer elemento de $A \setminus B$, se sigue que $a \notin A \setminus B$, esto es, $a \notin A$ o $a \in B$, y así $a \in B$; por consiguiente, $\{b \in A \mid b \prec v\} \subseteq B$. En conclusión, $B = \{b \in A \mid b \prec v\}$.

Ahora, supongamos que existe $v_0 \in A$ tal que $B = \{b \in A \mid b \prec v_0\}$. Claramente, $B \subseteq A$. Si $u, w \in A$ tales que $u \prec w$ y $w \in B$, entonces $u \prec w$ y $w \prec v_0$, luego, del teorema 2.1.1, se cumple que $u \prec v_0$ y así $u \in B$. Por tanto, B es una $\prec$-sección de A.

Por otra parte, si $u, u' \in A$ cumplen que $B = \{b \in A \mid b \prec u\} = \{b \in A \mid b \prec u'\}$, entonces $\forall b \in A : b \prec u \Longleftrightarrow b \prec u'$. Aplicando esto para $b = u$ y $b = u'$: si $u' \prec u$, se tiene $u' \prec u'$; y si $u \prec u'$, resulta que $u \prec u$; pero $\prec$ conecta A, de tal forma que ninguno de los dos casos pueden ocurrir. Por ende, $u = u'$. †

Definición 2.1.3. Si R es un buen orden en A denotamos $\widehat{x} := \{y \in A \mid y\, R\, x\}$ al que llamamos el *conjunto de los R-predecesores de x*.

Como vimos en el teorema anterior, $\widehat{x}$ es una R-sección de A, y toda R-sección se puede expresar de la forma $\widehat{x}$ para algún $x \in A$. Por definición de buen orden, para toda $x \in A$, $\widehat{x}$ es un conjunto.

Teorema 2.1.4 (Principio de inducción transfinita)**.** *Supongamos que A es una clase bien ordenada por R. Si $B \subseteq A$ y se cumple que $\forall x \in A : \widehat{x} \subseteq B \Longrightarrow x \in B$, entonces $A = B$.*

Demostración. Si $B \subsetneq A$, se tiene que $A \setminus B \neq \emptyset$. Sea x el R-primer elemento de $A \setminus B$; entonces $\forall y \in \widehat{x} : y \in B$; es decir, $\widehat{x} \subseteq B$; luego, por hipótesis, $x \in B$, lo cual no es posible ya que $x \in A \setminus B$. Por lo tanto, $A = B$. †

Teorema 2.1.5 (Principio de inducción transfinita, 2ª versión)**.** *Supongamos que A es una clase bien ordenada por $\prec$. Si P es una proposición que depende de los elementos de A y cumple que $\forall x \in A : (\forall y \in \widehat{x} : P(y)) \Longrightarrow P(x)$; entonces $\forall x \in A : P(x)$.*

Demostración. Sea $B := \{x \in A \mid P(x)\}$. Si $x \in A$ es tal que $\widehat{x} \subseteq B$, entonces $\forall y \in \widehat{x} : y \in B$, así que $\forall y \in \widehat{x} : y \in P(x)$ y así, por hipótesis, $P(x)$. En conclusión, $\forall x \in A : \widehat{x} \subseteq B \Longrightarrow x \in B$, luego, por el teorema anterior, $A = B$, y con ello $\forall x \in A : P(x)$. †

2.2. Ordinales

Definición 2.2.1. 1) Una clase A es *llena* si $\forall a \in A : a \subseteq A$.

2) α es un *ordinal* si α es llena y la relación de pertenencia $\in$ conecta a α.

Teorema 2.2.1. *a) Si α es un ordinal, $A \subsetneq \alpha$ y A es llena, entonces $A \in \alpha$.*

b) Si α es un ordinal, entonces $\in$ bien ordena a α.

Demostración. a) Si $\mu, \nu \in A$ y $\mu \in \nu$, entonces $\mu \in \nu$ y $\nu \subseteq A$, luego $\mu \in A$; lo anterior implica que A es una $\in$-sección de α. Ahora, por el teorema 2.1.3, existe $\xi \in \alpha$ de tal forma que $A = \{\nu \in \alpha \mid \nu \in \xi\}$. Evidentemente, $A \subseteq \xi$. Si $x \in \xi$, como α es llena, resulta que $x \in \alpha$, en consecuencia, $x \in \{\nu \in \alpha \mid \nu \in \xi\} = A$; por ende, $\xi \subseteq A$. Concluimos que $A = \xi \in \alpha$.

b) Por definición de ordinal, la relación de pertenencia conecta a α. Si B un subconjunto no vacío de α, por el axioma de reemplazo existe $\nu \in B$ tal que $\nu \cap B = \emptyset$; luego, para todo $b \in B$, $b \notin B$; esto es, $\forall b \in B : \nu \in b \vee \nu = b$; en consecuencia, $\forall b \in B \setminus \{\nu\} : \nu \in b$; así, ν es el mínimo de B. Ahora sea $x \in \alpha$, entonces $\{b \in \alpha \mid b \in x\} \subsetneq \alpha$ pues $x \notin x$; además, por el teorema 2.1.1, $\in$ es transitiva en α, de modo que si $b' \in \{b \in \alpha \mid b \in x\}$, para cada $y \in b'$, se tiene $y \in x$; esto es, $b' \subseteq \{b \in \alpha \mid b \in x\}$; aplicando el inciso anterior, obtenemos que $\{b \in \alpha \mid b \in x\} \in \alpha$, lo que implica que $\{b \in \alpha \mid b \in x\}$ es un conjunto. Por tanto, $\in$ bien ordena a α. †

Teorema 2.2.2. *a) Si α y β son ordinales, entonces $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$.*

b) Para cualesquiera α y β ordinales, se cumplen una y solo una de las siguientes propiedades: $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ o $\alpha = \beta$.

c) Todo elemento de un ordinal es un ordinal.

d) Toda $\in$-sección de un ordinal es un ordinal.

Demostración. a) Probaremos que $\alpha \cap \beta = \alpha$ o $\alpha \cap \beta = \beta$, y esto nos llevará a que $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$. Obviamente, $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ y $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$. Supongamos que $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$ y $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$. Como α y β son ordinales, entonces α y β son llenas, de lo cual $\alpha \cap \beta$ es llena; por consiguiente, por el teorema anterior a), $\alpha \cap \beta \in \alpha$ y $\alpha \cap \beta \in \beta$, en consecuencia, $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. Esto último no puede ocurrir, por lo tanto, $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$.

b) Si $\beta \in \alpha$ y $\alpha = \beta$, entonces $\alpha \in \alpha$. Si $\alpha \in \beta$ y $\alpha = \beta$, entonces $\beta \in \beta$. Si $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, como α y β son llenas, se tiene que $\alpha \subseteq \beta$ y $\beta \subseteq \alpha$, luego $\alpha = \beta$, y con ello $\alpha \in \alpha$. No pueden ocurrir dos de las condiciones al mismo tiempo, esto es, solo una de ellas puede ocurrir.

   Ahora, por el inciso a): $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$. Si $\alpha \subseteq \beta$ y $\beta \subseteq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$. Si $\alpha \subseteq \beta$ y $\beta \nsubseteq \alpha$, por el teorema anterior a), $\alpha \in \beta$. Si $\alpha \nsubseteq \beta$ y $\beta \subseteq \alpha$, por el lema anterior, $\beta \in \alpha$. Por tanto, alguna de las tres siempre tiene que ocurrir.

c) Sean α un ordinal y $A \in \alpha$. Tenemos que $A \subseteq \alpha$ pues α es llena, de lo cual se deduce que $\in$ conecta a A. Para ver que A es llena, recordar primero que por el teorema 2.2.1, la relación $\in$ bien ordena a α; así que, por teorema 2.1.1, $\in$ es transitiva en α. Teniendo esto en cuenta y que $A \subseteq \alpha$, se tiene que dado $y \in A$: si $x \in y$, entonces $x \in y \in A$; por consiguiente, $x \in A$ (note que $x \in \alpha$ porque α es llena: $y \in A \subseteq \alpha$, por lo cual $y \in \alpha$ y así $y \subseteq \alpha$); por lo cual $y \subseteq A$. Por lo tanto, A es un ordinal.

d) Si A es una $\in$-sección de un ordinal α tal que $A \neq \alpha$, por el teorema 2.1.3, tenemos que existe $\nu \in \alpha$ tal que $A = \{u \in \alpha \mid u \in \nu\}$; como $\nu \subseteq \alpha$, entonces $A = \{u \in \alpha \mid u \in \nu\} = \{u \mid u \in \nu\} = \nu$; en consecuencia, $A = \nu \in \alpha$; y así, por el inciso anterior, A es un ordinal. †

De aquí en adelante vamos a denotar como $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ a la clase de todos los ordinales, esto significa que $\boldsymbol{\mathcal{R}} := \{\alpha \mid \alpha \text{ es un ordinal}\}$.

La clase de los ordinales $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ también cumple la definición de ordinal —así, $\in$ es un buen orden en $\boldsymbol{\mathcal{R}}$—, pero no puede ocurrir que $\boldsymbol{\mathcal{R}} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Así pues, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ es él único ordinal que no es un conjunto: si α y β son ordinales cualesquiera y ambos no son conjuntos; por el teorema anterior, $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ o $\alpha = \beta$; pero si $\alpha \in \beta$, implicaría que α es un conjunto; y si $\beta \in \alpha$, entonces β sería un conjunto; por tanto, $\alpha = \beta$. Los ordinales que son conjuntos les llamaremos también *números ordinales*.

Definición 2.2.2. Dados α y β un ordinales:

1) denotaremos $\alpha < \beta$ o $\beta > \alpha$, cuando $\alpha \in \beta$;

2) denotaremos $\alpha \leq \beta$ o $\beta \geq \alpha$, cuando $(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta)$.

Recordemos que $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ es un ordinal; por lo cual para todo ordinal α, $\alpha \leq \boldsymbol{\mathcal{R}}$; y para todo número ordinal α, $\alpha < \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Definición 2.2.3. Dado A una clase de ordinales y α un ordinal:

1) α es una *cota superior* de A si $\forall \xi \in A : \xi \leq \alpha$.

2) α es el *mínimo* de A, denotado como $\text{mín}(A)$, si α es el $<$-primer elemento de A.

3) α es el *supremo* de A si α es una cota superior de A y α es el mínimo de la clase de todas las cotas superiores de A. El supremo de A se denota como $\sup(A)$.

4) Si $A \subseteq B \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ diremos que A está *acotada (superiormente)* en B si existe $\beta \in B$ tal que β es una cota superior de A.

Observación. A no es acotada en B, si $\forall \beta \in B : \exists \alpha \in A : \beta < \alpha$.

Teorema 2.2.3. *a) Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$.*

b) Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\alpha = \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi < \alpha\}$.

c) Si $A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$*, entonces* $\bigcup A$ *es un ordinal y* $\bigcup A = \sup(A)$*; si además* $A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$*, claramente* $A \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$*.*

d) Si $A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *y* $A \neq \emptyset$*, entonces* $\bigcap A \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *y* $\bigcap A = \text{mín}(A)$*.*

Demostración. a) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha = \beta$ o $\alpha \in \beta$, luego $\alpha = \beta$ o $\alpha \subseteq \beta$ pues β es llena, con lo cual $\alpha \subseteq \beta$. Si $\alpha \subseteq \beta$, entonces $\alpha = \beta$ o $\alpha \subsetneq \beta$.

b) Claramente, $\alpha = \{\xi \mid \xi \in \alpha\}$; además, todo elemento de un ordinal es un ordinal, en consecuencia, $\alpha = \{\xi \mid \xi \in \alpha\} = \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi \in \alpha\} = \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi < \alpha\}$.

c) Si $x \in \bigcup A$, existe $y \in A$ tal que $x \in y$, luego $x \subseteq y \subseteq \bigcup A$ y, por consiguiente, $x \subseteq \bigcup A$; por tanto, $\bigcup A$ es llena. Como vimos, todo elemento de un ordinal es un ordinal, por lo cual todo elemento de $\bigcup A$ es un ordinal y, por el teorema 2.2.2 b), $\in$ conecta a $\bigcup A$. En conclusión, $\bigcup A$ es un ordinal.

Finalmente, veamos que $\bigcup A = \sup A$. Si $y \in A$, entonces y es un ordinal y $y \subseteq \bigcup A$, o sea, $y \leq \bigcup A$; consiguientemente, $\bigcup A$ es una cota superior de A. Si α es una cota superior de A, para cada $x \in \bigcup A$ hay un $y \in A$ tal que $x \in y$, luego $y \leq \alpha$ y, así, $x \in y \subseteq \alpha$; entonces, $\bigcup A \subseteq \alpha$ y, en consecuencia, $\bigcup A \leq \alpha$. Por lo tanto, $\bigcup A = \sup A$.

d) Como $A \neq \emptyset$, existe $\alpha := \text{mín}(A)$, esto es, $\alpha \in A$ y $\forall x \in A : \alpha \leq x$. Si $x \in \alpha$, para cada $y \in A$ se tiene que $x < \alpha \leq y$, y con ello $x \in y$; en resumen, si $x \in \alpha$, entonces $\forall y \in A : x \in y$, esto es, $x \in \bigcap A$; por ende, $\alpha \subseteq \bigcap A$. Si $x \in \bigcap A$, resulta que $\forall y \in A : x \in y$, en particular, como $\alpha \in A$, $x \in \alpha$; por tanto, $\bigcap A \subseteq \alpha$. De este modo, $\bigcap A = \alpha = \text{mín}(A)$, y así $\bigcap A \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. †

2.2.1. Inducción transfinita

Definición 2.2.4. Dado cualquier ordinal α, definimos su *sucesor* como $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Teorema 2.2.4. *Para todo* $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$*:*

a) $S(\alpha) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$*;*

b) no existe $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *tal que* $\alpha < \beta < S(\alpha)$*;*

c) $S(\alpha)$ *es el* $<$*-primer elemento del conjunto* $\{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi > \alpha\}$*.*

d) $\bigcup S(\alpha) = \alpha$*.*

Demostración. a) Si $x \in S(\alpha)$, entonces $x \in \alpha$ o $x = \alpha$, luego $x \subseteq \alpha$ pues α es llena, en consecuencia, $x \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$; por tanto, $S(\alpha)$ es llena. Del teorema 2.2.2 c), todo elemento de $S(\alpha)$ es un ordinal, así que, por el mismo teorema inciso b), la relación $\in$ conecta a $S(\alpha)$. Así, $S(\alpha)$ es un ordinal y es conjunto porque la unión de conjuntos es un conjunto, por lo cual $S(\alpha) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

b) Si $\beta < S(\alpha)$, entonces $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, es decir, $\beta \in \alpha$ o $\beta = \alpha$, esto es, $\beta \leq \alpha$. Por tanto, si hubiera β tal que $\alpha < \beta < S(\alpha)$, se tendría que $\alpha < \beta$ y $\beta \leq \alpha$, lo cual no es posible.

c) Claramente, $S(\alpha)$ pertenece a $\{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi > \alpha\}$, y si $S(\alpha)$ no es el mínimo de tal conjunto, existe $y \in \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi > \alpha\}$ tal que $y < S(\alpha)$, luego $\alpha < y < S(\alpha)$ lo cual contradice el inciso b). Por tanto, $S(\alpha) = \text{mín}\{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \xi > \alpha\}$.

d) $\bigcup S(\alpha) = \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\}) = \big(\bigcup \alpha\big) \cup \big(\bigcup \{\alpha\}\big) = \big(\bigcup \alpha\big) \cup \alpha$. Si $x \in \bigcup \alpha$, entonces $x \in \delta$ para algún $\delta \in \alpha$, luego $x \in \delta \subseteq \alpha$; por tanto, $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. Por esta última contención y por la serie de igualdades escritas al principio de este inciso, se sigue que $\bigcup S(\alpha) = \big(\bigcup \alpha\big) \cup \alpha = \alpha$. †

Claramente, $\emptyset$ es un número ordinal, de modo que $S(\emptyset)$ es también un número ordinal, $S(S(\emptyset))$ es un ordinal, y así sucesivamente. Vamos a denotar: $0 := \emptyset$, $1 := S(0)$, $2 := S(1)$, $3 := S(2)$, $4 := S(3)$...

Corolario 2.2.5. *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$:*

a) si $S(\alpha) = S(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$;

b) si $\alpha < S(\beta)$, entonces $\alpha \leq \beta$;

c) si $\alpha < \beta$, entonces $S(\alpha) \leq \beta$.

Definición 2.2.5. 1) Un ordinal α es un *ordinal sucesor* si existe $\beta \in \mathcal{R}$ tal que $\alpha = S(\beta)$.

2) Todo ordinal que no es un ordinal sucesor ni es el 0 se llama *ordinal límite*. Denotamos como **Lim** a la clase de los ordinales límites.

Se observa claramente que todo ordinal tiene que ser necesariamente, o un ordinal límite o un ordinal sucesor o es el 0.

Teorema 2.2.6. *Para cada ordinal α, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) α es un ordinal límite;

(ii) $\alpha \neq 0$ y $\forall \beta \in \mathcal{R} : \beta < \alpha \Longrightarrow S(\beta) < \alpha$;

(iii) $\alpha \neq 0$ y $\alpha = \sup(\alpha) = \bigcup \alpha$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que α es un ordinal límite. Si $\beta \in \mathcal{R}$ y $\beta < \alpha$, entonces $S(\beta) \leq \alpha$ —por el teorema 2.2.4 c)—, pero $S(\beta) \neq \alpha$, por lo cual $S(\beta) < \alpha$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que $\forall \beta \in \mathcal{R} : \beta < \alpha \Longrightarrow S(\beta) < \alpha$. Visto α primero como un ordinal y luego como conjunto, se observa que α es una cota superior de $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$, así que $\bigcup \alpha = \sup(\alpha) \leq \alpha$. Si $\sup(\alpha) < \alpha$, entonces $\sup(\alpha) < S(\sup(\alpha)) < \alpha$ (por hipótesis); dicho de otro modo, $\sup(\alpha) < \beta$ y $\beta \in \alpha$ donde $\beta := S(\sup(\alpha))$; de esta manera, $\sup(\alpha) < \beta$ y $\beta \leq \sup(\alpha)$ lo cual no puede ocurrir. Por tanto, $\sup(\alpha) = \alpha$ (ya se sabe que $\sup(\alpha) = \bigcup \alpha$).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Demostraremos esta implicación por contrarrecíproca. Si α no es un ordinal límite y $\alpha \neq 0$, $\alpha = S(\beta)$ para algún $\beta \in \mathcal{R}$, luego, por el teorema 2.2.4 d), $\bigcup \alpha = \bigcup S(\beta) = \beta < S(\beta) = \alpha$. †

Teorema 2.2.7 (Principio de inducción transfinita)**.** *Si $A \subseteq \mathcal{R}$ cumple que $\forall \alpha \in \mathcal{R} : (\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A)$, entonces $A = \mathcal{R}$.*

Demostración. Sabemos que $(\mathcal{R}, <)$ es una clase bien ordenada. Por el teorema 2.1.4, se cumple que si $\forall \alpha \in \mathcal{R} : (\widehat{\alpha} \subseteq A \Longrightarrow \alpha \in A)$, entonces $\mathcal{R} = A$, donde $\widehat{\alpha}$ es el conjunto de los $<$-predecesores estrictos de α; y por el teorema 2.2.3 b), $\widehat{\alpha} = \alpha$. †

De aquí en adelante, PIT será sinónimo de *Principio de inducción transfinita*.

Teorema 2.2.8 (Segunda versión del PIT)**.** *Si P es una propiedad que cumple que para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, $(\forall \beta < \alpha : P(\beta)) \Longrightarrow P(\alpha)$, entonces $\forall \alpha \in \mathcal{R} : P(\alpha)$.*

Demostración. Poniendo $A := \{\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid P(\alpha)\}$, se cumple que $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : (\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A)$; en consecuencia, por el PIT, $A = \boldsymbol{\mathcal{R}}$; es decir, $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : P(\alpha)$. †

De acuerdo al teorema 2.1.5, el principio de inducción transfinita se cumple para cualquier clase bien ordenada. En particular, todo ordinal es una clase bien ordenada, de modo que se puede aplicar el principio de inducción transfinita restringido a un número ordinal:

Teorema 2.2.9 (Principio de inducción transfinita restringido)**.** *Si $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \{0\}$ y P es una proposición que cumple que para $\forall \gamma < \beta : (\forall \xi < \gamma : P(\xi)) \Longrightarrow P(\gamma)$; entonces $\forall \gamma \in \beta : P(\gamma)$.*

Demostración. Se sigue del teorema 2.1.5 y del hecho de que $\widehat{\alpha} = \alpha$. †

Teorema 2.2.10 (Tercera versión de PIT)**.** *Si P es una proposición que cumple:*

i) $P(0)$;

ii) $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : P(\alpha) \Rightarrow P(S(\alpha))$;

iii) $\forall \alpha \in \mathbf{Lim} : (\forall \beta < \alpha : P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha)$;

entonces, $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : P(\alpha)$.

Demostración. Pongamos $A := \{\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid P(\alpha)\}$. Nuestro objetivo es probar que $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : (\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A)$, para usar el PIT. Sea α un número ordinal tal que $\alpha \subseteq A$:

i) Si $\alpha = 0$, claramente $\alpha \in A$.

ii) Si α es un ordinal sucesor, es decir, $S(\beta) = \alpha$ donde $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\beta \in \alpha \subseteq A$; luego $\beta \in A$, así que $P(\beta)$; por la hipótesis ii), $P(S(\beta))$ es verdadera; en consecuencia, $\alpha = S(\beta) \in A$

iii) Si α es un ordinal límite diferente, como $\alpha \subseteq A$, entonces $\forall \beta < \alpha : \beta \in A$, esto significa que $\forall \beta < \alpha : P(\beta)$, luego, por la hipótesis iii), $P(\alpha)$ es verdadera, y con ello $\alpha \in A$.

En resumen, $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : \alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A$, así que por el PIT, $A = \boldsymbol{\mathcal{R}}$, esto es, $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : P(\alpha)$. †

Similarmente, se puede definir una versión restringida a un número ordinal de esta tercera versión del principio de inducción transfinita; además, podemos empezar la inducción a partir de un número ordinal $\alpha \neq 0$ en adelante.

2.2.2. Números naturales

Definición 2.2.6. 1) α es un *natural* (o *número natural*) si α es un ordinal y todo subconjunto no vacío de α tiene $<$-último elemento.

2) Si $A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$, denotamos como $\text{máx}(A)$ al $<$-último elemento de A (en caso de que exista) y le llamamos el *máximo* de A.

3) $\omega := \{\alpha \mid \alpha \textit{ es un natural}\}$.

Teorema 2.2.11. *a) Todo elemento de un natural es un natural.*

b) Si $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\alpha = \text{máx}(\beta)$, entonces $\beta = S(\alpha)$. Si α es un ordinal sucesor, entonces α tiene un máximo y $\alpha = S(\text{máx}(\alpha))$.

c) Para todo natural n diferente de 0, existe un natural m tal que $n = S(m)$.

Demostración. a) Sea n un número natural. Si $m \in n$, por el teorema 2.2.2 b), m es un ordinal; y si $B \subseteq m$ con $B \neq \emptyset$, entonces $B \subseteq n$ pues n es llena, en consecuencia, B tiene un máximo. Por tanto, m es un natural.

b) Como $\alpha = \text{máx}(\beta)$, entonces $\alpha \in \beta$, por lo cual, $S(\alpha) \leq \beta$ —por corolario 2.2.5 c)—. Si $S(\alpha) < \beta$, como $\alpha = \text{máx}(\beta)$, entonces $S(\alpha) \leq \alpha$, lo cual no es posible porque ya sabemos que $\alpha < S(\alpha)$. Por lo tanto, $\beta = S(\alpha)$.

c) Si n es un natural diferente de 0; por definición de natural, existe $m = \text{máx}(n)$; por el inciso b), $n = S(m)$, y por el inciso a), m es un natural. †

Teorema 2.2.12 (Axiomas de Peano)**.** *(P1)* $0 \in \omega$.

(P2) Si $n \in \omega$, entonces $S(n) \in \omega$.

(P3) $\forall n \in \omega : S(n) \neq 0$.

(P4) Si $n, m \in \omega$ y $S(n) = S(m)$, entonces $n = m$.

(P5) (Principio de inducción matemática, PIM) Si $A \subseteq \omega$ cumple:

(i) $0 \in A$;

(ii) $\forall n \in \omega : (n \in A \Rightarrow S(n) \in A)$;

entonces $A = \omega$.

Demostración. P1) Claramente 0 un número natural.

P2) Si $n \in \omega$, entonces $n \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, así que $S(n) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Si $A \subseteq S(n)$ con $A \neq \emptyset$, tendremos que $A \subseteq n \cup \{n\}$, por ello $A \subseteq n$ o $n \in A$; si $A \subseteq n$, es claro que existe $\text{máx}(A)$; si $n \in A$, entonces $\text{máx}(A) = n$. Por tanto, $S(n) \in \omega$.

P3) Si $n \in \omega$, entonces $S(n) = n \cup \{n\}$, así que $n \in S(n)$, y con ello $S(n) \neq \emptyset$.

P4) Si $n, m \in \omega$ y $S(n) = S(m)$, por el corolario 2.2.4 d), $n = \bigcup S(n) = \bigcup S(m) = m$.

P5) Sea A un subconjunto de ω que cumple las propiedades (i) y (ii). Supongamos que $A \subsetneq \omega$, entonces $\emptyset \neq \omega \setminus A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$, por lo que existe $n_0 := \text{mín}(\omega \setminus A)$. Como $0 \in A$ y $n_0 \in \omega \setminus A$, tendremos que $n_0 \neq 0$; luego, por el teorema 2.2.11 c), existe $m \in \omega$ tal que $n_0 = S(m)$; en consecuencia, $m < n_0 = \text{mín}(\omega \setminus A)$; con lo cual $m \notin \omega \setminus A$, y así $m \in A$; pero la propiedad (ii) implica que $S(m) \in A$, esto es, $n_0 \in A$. Por lo tanto, $A = \omega$. †

Corolario 2.2.13. *ω es un número ordinal, pero no es un número natural.*

Demostración. Por el axioma de infinitud, existe un conjunto B tal que $0 \in B$ y $\forall b \in B : b \cup \{b\} \in B$. Luego entonces, $0 \in B \cap \omega$, y $\forall n \in \omega : (n \in B \cap \omega \Longrightarrow S(n) \in B \cap \omega)$. Por el principio de inducción matemática, $B \cap \omega = \omega$, así que $\omega \subseteq B$, y con ello ω es un conjunto.

Como $\omega \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$, claramente, $<$ conecta a ω. Por el teorema 2.2.11 a): si $n \in \omega$, entonces $n \subseteq \omega$; es decir, ω es llena. Por tanto, ω es un ordinal, y dado que $\omega \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, se sigue que $\omega \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

ω no es un natural, pues de lo contrario $\omega \in \omega$. †

2.2.3. Recurrencia transfinita

Definición 2.2.7. Si f es una relación y A es una clase se define la restricción de f a A como $f_{|A} := f \cap (A \times \boldsymbol{\mathcal{U}})$. Se usa también la notación $f \restriction A$.

Lema 2.2.14. *Bajo el supuesto de que f y h sean funciones, y A una clase, se cumple lo siguiente:*

a) $f_{|A}$ *es una función;*

b) $\operatorname{dom}(f_{|A}) = A \cap \operatorname{dom}(f)$*;*

c) $\forall x \in \operatorname{dom}(f_{|A}) : f_{|A}(x) = f(x)$*;*

d) si además $\forall x \in A : f(x) = h(x)$*, entonces* $f_{|A} = h_{|A}$*.*

Demostración. a) $f_{|A}$ es una función porque $f_{|A} \subseteq f$.

b) Sabemos que $(x, y) \in f$ si y solo si $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $y = f(x)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(f_{|A}) &= \{x \mid \exists y : (x, y) \in f_{|A}\} = \{x \mid \exists y : (x, y) \in f \wedge (x, y) \in A \times \boldsymbol{\mathcal{U}}\} \\ &= \{x \mid (x, f(x)) \in f \wedge (x, f(x)) \in A \times \boldsymbol{\mathcal{U}}\} = \{x \mid x \in \operatorname{dom}(f) \wedge x \in A\} = \operatorname{dom}(f) \cap A.\end{aligned}$$

c) Si $x \in \operatorname{dom}(f_{|A})$, entonces $(x, f_{|A}(x)) \in f_{|A}$, y como $f_{|A} \subseteq f$, se sigue que $(x, f_{|A}(x)) \in f$, de lo cual concluimos que $f(x) = f_{|A}(x)$.

d) Si $(x, y) \in f_{|A}$, entonces $x \in \operatorname{dom}(f_{|A}) = A \cap \operatorname{dom}(f)$, con lo cual $h(x) = f(x)$; por el inciso c) y la hipótesis de este, obtenemos que $y = f_{|A}(x) = f(x) = h(x)$, por consiguiente, $(x, y) \in h$; y como $x \in A$, se sigue que $(x, y) \in h_{|A}$. Por tanto, $f_{|A} \subseteq h_{|A}$. Similarmente se prueba que $h_{|A} \subseteq f_{|A}$, y con ello $f_{|A} = h_{|A}$. †

Definición 2.2.8. Una función f es g-inductiva, donde g es una clase cualquiera, si:

(i) $\operatorname{dom}(f)$ es un ordinal;

(ii) para todo $\alpha \in \operatorname{dom}(f)$, $f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$.

Recordar que dada cualquier clase g y cualquier otra clase a, $g(a) := \bigcap\{y \mid (a, y) \in g\}$; si se da el caso de que $\{y \mid (a, y) \in g\} = \emptyset$, entonces $g(a) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. En particular, cuando g es una función, se tiene que $\forall x \notin \operatorname{dom}(g) : g(x) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Lema 2.2.15. *Si f y h son g-inductivas, entonces $f \subseteq h$ o $h \subseteq f$.*

Demostración. Al ser f y h funciones g-inductivas, sus dominios son ordinales, entonces $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(h)$ o $\operatorname{dom}(h) \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(h)$. Veamos que $f \subseteq h$. Sea $A := \{\xi \in \operatorname{dom}(f) \mid f(\xi) \neq h(\xi)\}$. Si $A \neq \emptyset$, existe $\alpha := \operatorname{mín}(A)$; luego $\alpha \in \operatorname{dom}(f)$ y $\forall \xi < \alpha : \xi \notin A$; así que $\alpha \subseteq \operatorname{dom}(f)$ y $\forall \xi < \alpha : \xi \notin A$; en consecuencia, $\alpha \subseteq \operatorname{dom}(f)$ y $\forall \xi < \alpha : f(\xi) = h(\xi)$; por consiguiente, $f_{|\alpha} = h_{|\alpha}$, donde $\alpha \in \operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(h)$; así, como f y h son g-inductivas, $f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) = g(h_{|\alpha}) = h(\alpha)$; pero esto no puede ocurrir porque $\alpha \in A$. Por tanto, $A = \emptyset$, así que $\forall \beta \in \operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(h) : f(\beta) = h(\beta)$ y, con ello $f \subseteq h$. †

El lema que acabamos de probar implica que si f y h son g-inductivas, entonces $f \cup h$ es g-inductiva; porque de $f \subseteq h$ se sigue que $f \cup h = h$, e igualmente $f \cup h = f$ cuando $h \subseteq f$. Esto se puede generalizar para la unión amalgamada de funciones g-inductivas:

Lema 2.2.16. *Si A es una clase de funciones g-inductivas, entonces $\bigcup A$ es una función g-inductiva.*

Demostración. Pongamos $f := \bigcup A$.

Si $(x, y), (x, z) \in f$, existen $h, i \in A$ tales que $(x, y) \in h$ y $(x, z) \in i$. Por el lema anterior, $h \subseteq i$ o $i \subseteq h$, entonces $(x, y), (x, z) \in h$ o $(x, y), (x, z) \in i$ y, como h e i son funciones se sigue que $y = z$. Por tanto $\bigcup A$ es una función.

Veamos que $\mathrm{dom}(f)$ es un ordinal. Si $x \in \mathrm{dom}(f)$, entonces $(x, f(x)) \in f$, por lo que existe $h \in A$ tal que $(x, f(x)) \in h$, luego $x \in \mathrm{dom}(h)$; y si $x \in \mathrm{dom}(h)$ donde $h \in A$, claramente $(x, h(x)) \in f$, con lo cual $x \in \mathrm{dom}(f)$. Por tanto, $\mathrm{dom}(f) = \bigcup\{\mathrm{dom}(h) \mid h \in A\}$. Puesto que el dominio de toda función g-inductiva es un ordinal, del teorema 2.2.3 c), se tiene que $\mathrm{dom}(f)$ es un ordinal.

Resta verificar la segunda propiedad de las funciones g-inductivas. Si $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$, entonces $(\alpha, f(\alpha)) \in f$, por lo cual $(\alpha, f(\alpha)) \in h$ para alguna $h \in A$ y de lo que se sigue que $\alpha \in \mathrm{dom}(h)$. Como $h \subseteq \bigcup A = f$ y $\alpha \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h)$, resulta que $\forall \xi \in \alpha : f(\xi) = h(\xi)$ —incluso, $f(\alpha) = h(\alpha)$—, de modo que por el lema 2.2.14 d), $f_{|\alpha} = h_{|\alpha}$. Ahora, h es g-inductiva, por lo que cumple que $h(\alpha) = g(h_{|\alpha})$ y, por consiguiente, $f(\alpha) = h(\alpha) = g(h_{|\alpha}) = g(f_{|\alpha})$.

Por lo tanto, $f = \bigcup A$ es una función g-inductiva. †

Teorema 2.2.17 (Principio de definición por recurrencia)**.** *Si g es una clase, entonces existe una única función f tal que* $\mathrm{dom}(f)$ *es un ordinal y* $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$.

Demostración. Sea $f := \bigcup\{h \mid h \textit{ es una función } g\textit{-inductiva}\}$.

Por el lema anterior, f es una función g-inductiva, esto es, $\mathrm{dom}(f)$ es un ordinal y $\forall \alpha \in \mathrm{dom}(f) : f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$. Resta comprobar que $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{dom}(f) : f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$.

Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{dom}(f)$, entonces $f(\alpha) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$; de modo que tenemos que comprobar que $g(f_{|\alpha}) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Esto se obtendría si $f_{|\alpha} \notin \mathrm{dom}(g)$. Supongamos, por contradicción, que $f_{|\alpha} \in \mathrm{dom}(g)$. De $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{dom}(f)$ y de la propiedad tricotómica de los ordinales se sigue que $\mathrm{dom}(f) \leq \alpha$, luego $\mathrm{dom}(f) \subseteq \alpha$, y con ello $f = f_{|\alpha}$. Así, tenemos que $f = f_{|\alpha} \in \mathrm{dom}(g)$, lo cual implica que f y $g(f)$ son conjuntos. Pongamos $f' := f \cup \{(\mathrm{dom}(f), g(f))\}$; como $\mathrm{dom}(f) \notin \mathrm{dom}(f)$, se sigue que f' es una función. Ahora vamos a probar que f' es g-inductiva. En primer lugar, $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) \cup \{\mathrm{dom}(f)\} = S(\mathrm{dom}(f)) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Dado $\alpha \in \mathrm{dom}(f')$, tenemos $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ o $\alpha = \mathrm{dom}(f)$ —es decir, $\alpha \leq \mathrm{dom}(f)$—: si $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$, $f'(\alpha) = f(\alpha)$; y si $\alpha = \mathrm{dom}(f)$, $f'(\alpha) = g(f)$. Por consiguiente, si $\alpha \in \mathrm{dom}(f')$, para cada $\xi \in \alpha$ se tiene $f'(\xi) = f(\xi)$, de lo cual, usando el lema 2.2.14 d), $f'_{|\alpha} = f_{|\alpha}$. De este modo, para cualquier $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$: si $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$, resulta que $f'(\alpha) = f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) = g(f'_{|\alpha})$ —recordar que f es g-inductiva—; y si $\alpha = \mathrm{dom}(f)$, en ese caso $f'(\alpha) = g(f) = g(f_{|\alpha}) = g(f'_{|\alpha})$ —recordar que $f = f_{|\alpha}$—. Por tanto, f' es una función g-inductiva, en consecuencia, $f' \subseteq f$ (por definición de f), o sea, $f' = f \cup \{(\mathrm{dom}(f), g(f))\} \subseteq f$, de este modo, $(\mathrm{dom}(f), g(f)) \in f$, y por ello $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{dom}(f)$, lo cual no es posible.

Así, nuestra suposición de que $f_{|\alpha} \in \mathrm{dom}(g)$ cuando $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{dom}(f)$ es falsa, por ende, $f(\alpha) = \boldsymbol{\mathcal{U}} = g(f_{|\alpha})$ si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{dom}(f)$.

Finalmente probemos la unicidad de f. Supongamos que f y h son dos funciones como lo pide este teorema. Como $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{dom}(h)$ son ordinales, se tiene que $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(h)$ o $\mathrm{dom}(h) \subseteq \mathrm{dom}(f)$; en consecuencia, $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)$ o $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(h)$; lo cual significa que $\mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(h)$ es un ordinal. Sea $C := \{\xi \in \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(h) \mid f(\xi) \neq h(\xi)\}$. Si $C \neq \emptyset$, existe $\alpha := \mathrm{mín}(C)$, entonces $\forall \xi \in \alpha : f(\xi) = h(\xi)$, por lo cual $f_{|\alpha} = h_{|\alpha}$ y, consiguientemente, $f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) = g(h_{|\alpha}) = h(\alpha)$, pero esto contradice el hecho de que $\alpha \in C$. Por ende, $C = \emptyset$, o mejor dicho $\forall x \in \mathrm{dom}(h) \cup \mathrm{dom}(f) : f(x) = h(x)$; por lo que concluimos que $f = h$. †

2.3. Caracterización de los conjuntos bien ordenados

En esta sección veremos las relaciones y características similares entre los distintos conjuntos bien ordenados, y en especial la relaciones de los ordinales y los demás conjuntos bien ordenados.

Definición 2.3.1. Supongamos que $(A, \prec)$ y $(B, \preccurlyeq)$ son clases bien ordenadas. Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es $\prec$-$\preccurlyeq$ *preservadora de orden* si $\forall x, y \in A : x \prec y \Longrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)$. Decimos también que f es un un $\prec$-$\preccurlyeq$ *homomorfismo* o que $f : (A, \prec) \longrightarrow (B, \preccurlyeq)$ es un homomorfismo.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que $\prec$ es un buen orden en A, y denotemos $x \prec y \vee x = y$ como $x \preceq y$. Si B es una $\prec$-sección de A y $f : B \longrightarrow A$ es $\prec$-$\prec$ preservadora de orden, entonces $\forall x \in B : x \preceq f(x)$.*

Demostración. Bastará probar que $C := \{x \in B \mid f(x) \prec x\} = \emptyset$. Si $C \neq \emptyset$; existe $x \in C$ tal que x es el $\prec$-primer elemento de C, entonces $x \in B$ y $f(x) \prec x$, luego $f(x) \in B$ (pues B es una $\prec$-sección), por consiguiente, $f(f(x)) \prec f(x)$, y con ello $f(x) \in C$; pero, de $f(x) \prec x$ se sigue que $f(x) \notin C$, ya que x es el $\prec$-primer elemento de C (una contradicción). Por tanto, $\{x \in B \mid f(x) \prec x\} = \emptyset$. †

Teorema 2.3.2. *Si f es $\prec$-$\preccurlyeq$ preservadora de orden, entonces f es inyectiva y $\forall x, y \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \preccurlyeq f(y) \Longrightarrow x \prec y$. Por tanto, $\forall x, y \in \mathrm{dom}(f) : x \prec y \Longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)$.*

Demostración. Si $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ tales que $f(x) = f(y)$, como $\prec$ bien ordena a $\mathrm{dom}(f)$, resulta que $x = y$, $x \prec y$ o $y \prec x$: si $x \prec y$, se obtendría que $f(x) \preccurlyeq f(y)$; y si $y \prec x$, se tendría que $f(y) \preccurlyeq f(x)$; pero ninguno de estos casos puede ocurrir pues $f(x) = f(y)$; en consecuencia, $x = y$. Por tanto, f es inyectiva.

Supongamos que $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ de tal modo que $f(x) \preccurlyeq f(y)$, entonces $x = y$ o $x \prec y$ o $y \prec x$ pues $\prec$ bien ordena a $\mathrm{dom}(f)$. Si $x = y$, resulta que $f(x) = f(y)$; si $y \prec x$, en ese caso $f(y) \preccurlyeq f(x)$ pues f preserva el orden; pero estos dos casos contradicen la suposición inicial de $f(x) \preccurlyeq f(y)$. Por ende, $x \prec y$. †

Definición 2.3.2. Supongamos que $\lessdot$ bien ordena a A y $\lll$ bien ordena a B. Decimos que f *una función $\lessdot$-$\lll$ preservadora de orden en A y B* si f es una función $\lessdot$-$\lll$ preservadora de orden, $\mathrm{dom}(f)$ es una $\lessdot$-sección de A y $\mathrm{ran}(f)$ es una $\lll$-sección de B.

Lema 2.3.3. *Supongamos que $\lessdot$ bien ordena a A y $\lll$ bien ordena a B. Si f y g son funciones $\lessdot$-$\lll$ preservadoras de orden en A y B, entonces $f \subseteq g$ o $g \subseteq f$.*

Demostración. Como $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{dom}(g)$ son $\lessdot$-secciones de A, por el teorema 2.1.2 b), $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ o $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Supongamos que $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. Sea $C := \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\}$. Si $C \neq \emptyset$; existe $u \in A$ el $\lessdot$-primer elemento de C; por lo cual $u \in \mathrm{dom}(f)$, $f(u) \neq g(u)$ y $\forall y \in A : y \lessdot u \Longrightarrow f(y) = g(y)$. Además, como $\lll$ conecta a B, $f(u) = g(u)$ o $f(u) \lll g(u)$ o $g(u) \lll f(u)$. El primer caso, $f(u) = g(u)$, es falso porque $u \in C$. Si $f(u) \lll g(u)$, como $\mathrm{ran}(g)$ es una $\lll$-sección de B, tendremos que $f(u) \in \mathrm{ran}(g)$, luego $f(u) = g(w)$ para algún $w \in \mathrm{dom}(g)$, lo cual nos lleva a que $g(w) \lll g(u)$, entonces $w \lessdot u$; esto último nos dice que $w \in \mathrm{dom}(f)$ pues $\mathrm{dom}(f)$ es una $\lessdot$-sección de A, y también $w \notin C$ pues u es el $\lessdot$-primer elemento de C, en consecuencia, $f(w) = g(w) = f(u)$ y así $w = u$; lo que contradice nuestro resultado previo de que $w \lessdot u$. Si ahora $g(u) \lll f(u) \in \mathrm{ran}(f)$, de forma similar al caso anterior, $g(u) \in \mathrm{ran}(f)$, por lo cual $g(u) = f(w)$ para algún $w \in \mathrm{dom}(f)$, luego $f(w) \lll f(u)$, y así $w \lessdot u$; pero entonces obtenemos que $w \notin C$ y $w \in \mathrm{dom}(f)$, por consiguiente, $g(u) = f(w) = g(w)$, y con ello $u = w$. Acabamos de obtener que ninguno de los tres casos —$f(u) = g(u)$, $f(u) \lll g(u)$

o $g(u) \lessdot f(u)$— puede ocurrir. Por ende, $C = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$. Consiguientemente, $\forall x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) = g(x)$, y por ello $f = f_{|\,\mathrm{dom}(f)} = g_{|\,\mathrm{dom}(f)} \subseteq g$.

Análogamente, si $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$, entonces $g \subseteq f$. †

Lema 2.3.4. *Supongamos que $\lessdot$ es un buen orden en A y $\prec$ es un buen orden en B. Si A es una clase de funciones $\lessdot$-$\prec$ preservadoras de orden en A y B, entonces $\bigcup A$ es una función $\lessdot$-$\prec$ preservadora de orden en A y B.*

Demostración. Pongamos $f := \bigcup A$.

En primer lugar, veamos que f es una función. Si $(x, y), (x, y') \in f$, existen $g, h \in A$ tales que $(x, y) \in g$ y $(x, y') \in h$; por el lema anterior, $g \subseteq h$ o $h \subseteq g$, entonces $g \cup h \subseteq g$ o $g \cup h \subseteq h$; así que, $g \cup h \in A$ y $(x, y), (x, y') \in g \cup h$, lo cual implica que $y = y'$ pues $g \cup h$ es una función.

En segundo lugar, veamos que $\mathrm{dom}(f)$ es una $\lessdot$-sección de A y $\mathrm{ran}(f)$ es una $\prec$-sección de B. Como $f = \bigcup A$, se verifica que $\mathrm{dom}(f) = \bigcup\{\mathrm{dom}(g) \mid g \in A\}$ y $\mathrm{ran}(f) = \bigcup\{\mathrm{ran}(g) \mid g \in A\}$, luego, por el teorema 2.1.2 c), se obtiene el resultado deseado.

Finalmente, probemos que f es $\lessdot$-$\prec$ preservadora de orden. Si $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ cumplen que $x \lessdot y$, entonces existen $g, h \in A$ de tal modo que $(x, f(x)) \in g$ y $(y, f(y)) \in h$. Por el lema anterior, $g \subseteq h$ o $h \subseteq g$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $g \subseteq h$. Así, $(x, f(x)), (y, f(y)) \in h \subseteq f$, lo cual implica que $f(x) = h(x)$ y $f(y) = h(y)$; además, como $x \lessdot y$ y h es $\lessdot$-$\prec$ preservadora de orden, $h(x) \prec h(y)$; en consecuencia, $f(x) \prec f(y)$. †

Teorema 2.3.5. *Supongamos que A y B son clases. Si $\prec$ bien ordena a A y $\precsim$ bien ordena a B, existe una única función f que es $\prec$-$\precsim$ preservadora de orden en A y B tal que* $\mathrm{dom}(f) = A$ *o* $\mathrm{ran}(f) = B$.

Demostración. Sean $D := \{g \mid g$ *es una función* $\prec$-$\precsim$ *preservadora de orden en* A *y* $B\}$ y $f := \bigcup D$.

Por el lema 2.3.4, f es una función $\prec$-$\precsim$ preservadora de orden en A y B.

Supongamos que $\mathrm{dom}(f) \subsetneq A$ y $\mathrm{ran}(f) \subsetneq B$. Como $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{ran}(f)$ son $\prec$ y $\precsim$ secciones de A y B respectivamente, por el teorema 2.1.3, existen $u \in A$ y $v \in B$ tales que $\mathrm{dom}(f) = \{x \in A \mid x \prec u\}$ y $\mathrm{ran}(f) = \{y \in B \mid y \precsim v\}$ —notar que $u \notin \mathrm{dom}(f)$ y $v \notin \mathrm{ran}(f)$—. Definimos $f' := f \cup \{(u, v)\}$; f' es una función, pues $u \notin \mathrm{dom}(f)$. Esta función cumple:

1) $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) \cup \{u\} = \{x \in A \mid x \prec u\} \cup \{u\}$;
2) $\mathrm{ran}(f') = \mathrm{ran}(f) \cup \{v\} = \{y \in B \mid y \precsim v\} \cup \{v\}$;
3) $f'(u) = v$, y $\forall x \in \mathrm{dom}(f') \setminus \{u\} : f'(x) = f(x)$.

Lo anterior implica que $\mathrm{dom}(f')$ es una $\prec$-sección de A y $\mathrm{ran}(f')$ es una $\precsim$-sección de B. Además, si $x, y \in \mathrm{dom}(f')$ donde $x \prec y$, entonces $y \in \mathrm{dom}(f)$ o $y = u$: si $y \in \mathrm{dom}(f)$, tendríamos que $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, por lo cual $f'(x) = f(x) \precsim f(y) = f'(y)$; y si $y = u$, en ese caso $x \in \mathrm{dom}(f)$, y con ello $f'(x) = f(x) \precsim v = f'(y)$. Por lo tanto, f' es una función $\prec$-$\precsim$ preservadora de orden en A y B. Recordar también que los segmentos iniciales son siempre conjuntos, consiguientemente, $\mathrm{dom}(f')$ y $\mathrm{ran}(f')$ son conjuntos, con lo cual f' es un conjunto. Lo anterior implica que $f' \in D$ y así $f' \subseteq \bigcup D = f$; luego entonces $(u, v) \in f$ ya que $(u, v) \in f'$; pero esto no puede ocurrir dada la elección de u y de v. Por ende, nuestra suposición inicial, $\mathrm{dom}(f) \subsetneq A$ y $\mathrm{ran}(f) \subsetneq B$, es falsa.

Para la unicidad, supongamos que f y h son funciones $\prec$-$\precsim$ preservadora de orden en A y B tales que $\mathrm{dom}(f) = A$ o $\mathrm{ran}(f) = B$, y $\mathrm{dom}(h) = A$ o $\mathrm{ran}(h) = B$. Por el lema 2.3.3, $f \subseteq h$ o $h \subseteq f$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $f \subseteq h$. Tenemos dos casos:

i) Si $\mathrm{dom}(f) = A$, entonces $\mathrm{dom}(h) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Si $(x, y) \in h$, resulta que $x \in \mathrm{dom}(h)$, de modo que $x \in \mathrm{dom}(f)$, luego existe z tal que $(x, z) \in f$, en consecuencia, $(x, z), (x, y) \in h$, lo cual implica que $y = z$ y así $(x, y) \in f$. Por tanto, $h \subseteq f$, y con ello $f = h$.

ii) Si $\operatorname{ran}(f) = B$, entonces $\operatorname{ran}(h) \subseteq \operatorname{ran}(f)$. Si $(x, y) \in h$, se satisface que $y \in \operatorname{ran}(h)$, de este modo, $y \in \operatorname{ran}(f)$, luego existe x' tal que $(x', y) \in f$, en consecuencia, $(x', y), (x, y) \in h$, lo cual implica que $x = x'$ —h es inyectiva— y así $(x, y) \in f$. Por ende, $h \subseteq f$, por lo que concluimos que $f = h$.

†

Definición 2.3.3. Si $(A, \preccurlyeq)$ y $(B, \lessdot)$ son clases bien ordenadas:

1) Diremos que $f : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (B, \lessdot)$ es un *isomorfismo* si $f : A \longrightarrow B$ es una función biyectiva y $\preccurlyeq$-$\lessdot$ preservadora de orden.

2) $(A, \preccurlyeq)$ es *isomorfo* a $(B, \lessdot)$ si existe un isomorfismo $f : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (B, \lessdot)$.

Recordar que si $(A, \prec)$ es una clase bien ordenada, entonces todo subconjunto de A forma una clase bien ordenada junto con el orden $\prec$.

Teorema 2.3.6. *Si $(A, \preccurlyeq)$ y $(B, \lessdot)$ son clases bien ordenadas, entonces, $f : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (B, \lessdot)$ es un isomorfismo si y solo si f es una función $\preccurlyeq$-$\lessdot$ preservadora de orden en A y B tal que* $\operatorname{dom}(f) = A$ *y* $\operatorname{ran}(f) = B$.

Corolario 2.3.7. *Para cualesquiera conjuntos $(A, \preccurlyeq)$ y $(B, \lessdot)$ bien ordenados se cumple una de las siguientes proposiciones:*

a) $(A, \preccurlyeq)$ *es isomorfo a* $(B, \lessdot)$*;*

b) $(A, \preccurlyeq)$ *es isomorfo a un segmento inicial (propio) de* $(B, \lessdot)$*;*

c) $(B, \lessdot)$ *es isomorfo a un segmento inicial (propio) de* $(A, \preccurlyeq)$*.*

Teorema 2.3.8. *Si $(A, \preccurlyeq)$ es un conjunto bien ordenado, existe un único ordinal α tal que $(A, \preccurlyeq)$ es isomorfo a $(\alpha, <)$. Además, el isomorfismo $f : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (\alpha, <)$ es único.*

Demostración. Pongamos $g(x) = \min(A \setminus \operatorname{ran}(x))$ para toda función x tal que $\operatorname{ran}(x) \subseteq A$ y $A \setminus \operatorname{ran}(x) \neq \emptyset$. Por el principio de definición por recurrencia, existe una única función f tal que $\operatorname{dom}(f)$ es un ordinal y $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$. Notar que $\forall \alpha \in \operatorname{dom}(f) : f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) \in A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\alpha})$, así que $\operatorname{ran}(f) \subseteq A$.

Si $\alpha, \beta \in \operatorname{dom}(f)$ con $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \in \beta \cap \operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(f_{|\beta})$, por lo cual $f(\alpha) = f_{|\beta}(\alpha) \in \operatorname{ran}(f_{|\beta})$; y también, $f(\beta) = g(f_{|\beta}) \in A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\beta})$, en consecuencia, $f(\alpha) \neq f(\beta)$. El argumento anterior implica que f es inyectiva.

Ahora probemos que $\operatorname{ran}(f) = A$. Al ser f inyectiva, f^{-1} es una función, donde $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \operatorname{ran}(f) \subseteq A$, luego $\operatorname{dom}(f^{-1})$ es un conjunto (porque A es un conjunto), y por el axioma de reemplazo, $\operatorname{ran}(f^{-1}) = \operatorname{dom}(f)$ es un conjunto. Así, $\operatorname{dom}(f) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, y como $\operatorname{dom}(f) \notin \operatorname{dom}(f)$, se sigue que $f(\operatorname{dom}(f)) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$; sin embargo, $f(\operatorname{dom}(f)) = g(f_{|\operatorname{dom}(f)}) = g(f)$, con lo cual $g(f) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Esto nos dice que $f \notin \operatorname{dom}(g)$, y dado que $\operatorname{ran}(f) \subseteq A$, entonces $A \setminus \operatorname{ran}(f) = \emptyset$, por ello concluimos que $\operatorname{ran}(f) = A$.

Resumiendo, $f : \operatorname{dom}(f) \longrightarrow A$ es una función biyectiva, donde $\operatorname{dom}(f) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

A continuación, vamos a ver que f es $<$-$\preccurlyeq$ preservadora de orden. Sean $\alpha, \beta \in \operatorname{dom}(f)$ tales que $\alpha < \beta$, entonces $f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) \in \min(A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\alpha}))$. Note que $f(\beta) \in A = \operatorname{ran}(f_{|\alpha}) \cup (A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\alpha}))$. Si $f(\beta) \in \operatorname{ran}(f_{|\alpha})$, existe $\xi \in \operatorname{dom}(f_{|\alpha})$ tal que $f(\beta) = f(\xi)$, luego $\beta = \xi$ (pues f es inyectiva), en consecuencia, $\beta \in \operatorname{dom}(f_{|\alpha}) = \alpha \cap \operatorname{dom}(f)$ y así $\beta < \alpha$, pero esto no es posible. Así pues, $f(\beta) \in A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\alpha})$, y como $f(\alpha) \neq f(\beta)$ (por ser f inyectiva), se tiene que $f(\alpha) = \min(A \setminus \operatorname{ran}(f_{|\alpha})) \preccurlyeq f(\beta)$.

Por lo tanto, f es $<$-$\preccurlyeq$ preservadora de orden, con lo cual el isomorfismo que buscamos es $f^{-1} : \alpha \longrightarrow A$, el cual es $\preccurlyeq$-$<$ preservador de orden.

Finalmente supongamos que $f, h : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (\alpha, <)$ son isomorfismos; entonces, las funciones $f^{-1}, h^{-1} : (\alpha, <) \longrightarrow (A, \preccurlyeq)$ son isomorfismos; en consecuencia, $f^{-1} \circ h : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (A, \preccurlyeq)$ y $h^{-1} \circ f : (A, \preccurlyeq) \longrightarrow (A, \preccurlyeq)$ son igualmente isomorfismos. Para cada $x, y \in A$, denotemos $x \preceq y$ cuando $x \preccurlyeq y \vee x = y$. Por el teorema 2.3.1, $\forall x \in A : x \preceq f^{-1}(h(x))$ y $\forall x \in A : x \preceq h^{-1}(f(x))$; luego para todo $x \in A$, $f(x) \leq f(f^{-1}(h(x)))$ y $h(x) \leq h(h^{-1}(f(x)))$, ya que f y h preservan el orden; por lo cual para todo $x \in A$, $f(x) \leq h(x)$ y $h(x) \leq f(x)$ y, en consecuencia, $f = h$. †

Definición 2.3.4. Si $(A, \prec)$ es un conjunto bien ordenado, el único ordinal α dado por el teorema 2.3.8 se llama *tipo de orden* de $(A, \prec)$ y lo denotamos como $\operatorname{tpo}(A, \prec)$; cuando no hay confusión en cual es el orden que se está usando en A, se puede denotar simplemente por $\operatorname{tpo}(A)$. El único isomorfismo $f : (\alpha, <) \longrightarrow (A, \prec)$ se llama *isomorfismo de orden* de $(A, \prec)$.

Finalmente veamos que a todo conjunto se le puede asignar un buen orden:

Teorema 2.3.9 (Zermelo)**.** *Si A es un conjunto, entonces existe un ordinal α y una función biyectiva $f : \alpha \longrightarrow A$.*

Demostración. Pongamos $D := \{x \in \boldsymbol{\mathcal{U}} \mid A \backslash \operatorname{ran}(x) \neq \emptyset\}$. Por el axioma de elección, existe una función $g : D \longrightarrow \bigcup_{x \in D}(A \backslash \operatorname{ran}(x))$ tal que para todo $x \in D$, $g(x) \in A \backslash \operatorname{ran}(x)$. Por el principio de definición por recurrencia, existe una única función f tal que $\operatorname{dom}(f)$ es un ordinal y $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : f(\alpha) = g(f_{|\alpha})$. Notar que $\forall \alpha \in \operatorname{dom}(f) : f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) \in A \backslash \operatorname{ran}(f_{|\alpha})$, así que $\operatorname{ran}(f) \subseteq A$.

Si $\alpha, \beta \in \operatorname{dom}(f)$ con $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \in \beta \cap \operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(f_{|\beta})$, por lo cual $f(\alpha) = f_{|\beta}(\alpha) \in \operatorname{ran}(f_{|\beta})$, pero $f(\beta) = g(f_{|\beta}) \in A \backslash \operatorname{ran}(f_{|\beta})$, en consecuencia, $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Este argumento implica que f es inyectiva.

Finalmente, probemos que $\operatorname{ran}(f) = A$. Al ser f inyectiva, f^{-1} es una función, donde $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \operatorname{ran}(f) \subseteq A$, luego $\operatorname{dom}(f^{-1})$ es un conjunto (porque A es un conjunto), y por el axioma de reemplazo, $\operatorname{ran}(f^{-1}) = \operatorname{dom}(f)$ es un conjunto. Así, $\operatorname{dom}(f) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, y como $\operatorname{dom}(f) \notin \operatorname{dom}(f)$, se sigue que $f(\operatorname{dom}(f)) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$, pero $f(\operatorname{dom}(f)) = g(f_{|\operatorname{dom}(f)}) = g(f)$, con lo cual $g(f) = \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Esto nos dice que $f \notin \operatorname{dom}(g) = D$, luego $A \backslash \operatorname{ran}(f) = \emptyset$, y con ello $\operatorname{ran}(f) = A$.

Por tanto, $f : \operatorname{dom}(f) \longrightarrow A$ es una función biyectiva y $\operatorname{dom}(f) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. †

Corolario 2.3.10 (Teorema del buen orden)**.** *Para todo conjunto A existe una relación $\prec$ en A tal que $(A, \prec)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. Por el teorema de Zermelo, existen un ordinal α y una función biyectiva $f : \alpha \longrightarrow A$. Definamos la relación $\prec$ en A de la siguiente forma: $a \prec b$ si y solo si $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, para cualesquiera $a, b \in A$. La relación $\prec$ bien ordena a A. †

Capítulo 3

Aritmética ordinal

Nuestro objetivo aquí es definir las operaciones suma, producto y potenciación sobre la clase de los números ordinales. Estas operaciones se basarán en cómo se definen las las mismas operaciones sobre los naturales en la formación básica: la suma se obtiene en términos de los sucesores, sumando uno a uno hasta llegar al resultado; el producto es una especie de abreviación de una suma cuando se suman muchas veces el mismo número; la potenciación, de forma similar al producto, es una simplificación del producto. Veremos las propiedades generales de estas operaciones y sus relaciones entre ellas.

3.1. Suma

Lema 3.1.1. *Existe una única función $T:\boldsymbol{\mathcal{R}}\times\boldsymbol{\mathcal{R}}\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que para cualesquiera $\alpha,\,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

i) $T(\alpha,\,0)=\alpha$;

ii) $T(\alpha,\,S(\beta))=S(T(\alpha,\,\beta))$;

iii) *si β es un ordinal límite,* $T(\alpha,\,\beta)=\bigcup\{T(\alpha,\,\xi)\mid\xi<\beta\}=\sup\{T(\alpha,\,\xi)\mid\xi<\beta\}$.

Demostración. Este lema se justifica por el principio de definición por recurrencia.

Dado α un número ordinal cualquiera, definimos g_α como:

$$g_\alpha(h)=\begin{cases}\alpha & \textit{si } \mathrm{dom}(h)=0\\ S(h(\xi)) & \textit{si } \mathrm{dom}(h)=S(\xi) \textit{ y } h(\xi)\in\boldsymbol{\mathcal{R}} \textit{ para algún } \xi\in\boldsymbol{\mathcal{R}}\\ \bigcup\mathrm{ran}(h) & \textit{si } \mathrm{dom}(h)\in\mathbf{Lim}.\end{cases}$$

El dominio de g_α son los conjuntos cuyos dominios son números ordinales. Por el principio de definición por recurrencia, existe una única función f_α tal que $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ es un ordinal y

$$\forall\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}:f_\alpha(\beta)=g_\alpha(f_\alpha\restriction\beta).$$

Definamos $T(\alpha,\,\beta):=f_\alpha(\beta)$ para cualesquiera $\alpha,\,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Primero probemos que $\mathrm{dom}(f_\alpha)=\boldsymbol{\mathcal{R}}$. Por inducción: si $\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\forall\xi<\beta:\xi\in\mathrm{dom}(f_\alpha)$, entonces $\beta\subseteq\mathrm{dom}(f_\alpha)$, luego $\mathrm{dom}(f_\alpha\restriction\beta)=\mathrm{dom}(f_\alpha)\cap\beta=\beta$, con lo cual $f_\alpha\restriction\beta\in\mathrm{dom}(g_\alpha)$ y, en consecuencia, $\beta\in\mathrm{dom}(f_\alpha)$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}:\beta\in\mathrm{dom}(f_\alpha)$.

Luego probemos que $\mathrm{ran}(f_\alpha)\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y las tres propiedades *i*), *ii*) e *iii*). Sea $\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\forall\xi<\beta:$ $f_\alpha(\xi)\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$. Tenemos que $f_\alpha(\beta)=g_\alpha(f_\alpha\restriction\beta)$ y $\mathrm{dom}(f_\alpha\restriction\beta)=\mathrm{dom}(f_\alpha)\cap\beta=\boldsymbol{\mathcal{R}}\cap\beta=\beta$, de modo que el valor de $f_\alpha(\beta)$ depende directamente de β:

i) Si $\beta=0$, entonces $f_\alpha(\beta)=g_\alpha(f_\alpha\restriction\beta)=\alpha$ —de aquí que $T(\alpha,\,\beta)=\alpha$—.

ii) Si $\beta = S(\xi)$ para algún $\xi \in \mathcal{R}$, entonces $\xi < \beta$, por lo cual de la hip. de ind., $f_\alpha(\xi) \in \mathcal{R}$, y, en consecuencia, $f_\alpha(\beta) = f_\alpha(S(\xi)) = g_\alpha(f_\alpha \upharpoonright S(\xi)) = S(f_\alpha(\xi)) \in \mathcal{R}$ —se probó también $T(\alpha, S(\xi)) = S(T(\alpha, \xi))$—.

iii) Si β es un ordinal límite, $f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \upharpoonright \beta) = \bigcup \operatorname{ran}(f_\alpha \upharpoonright \beta) = \bigcup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \beta\} \in \mathcal{R}$, la última pertenencia se sigue del teorema 2.2.3 c) —además también se vió que $T(\alpha, \beta) = \bigcup\{T(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$—.

Por el principio de inducción transfinita, $\operatorname{ran}(f_\alpha) \subseteq \mathcal{R}$ y observar que también probamos las tres propiedades, tomando en cuenta solo que β es un número ordinal cualquiera.

Para probar la unicidad, supongamos que $P, T : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ son funciones que cumplen *i*), *ii*) e *iii*). Sea α un ordinal cualquiera. $P(\alpha, 0) = \alpha = T(\alpha, 0)$. Si $\beta \in \mathcal{R}$ cumple que $P(\alpha, \beta) = T(\alpha, \beta)$, entonces $P(\alpha, S(\beta)) = S(P(\alpha, \beta)) = S(T(\alpha, \beta)) = T(\alpha, S(\beta))$. Si β es un ordinal límite tal que $\forall \xi < \beta : P(\alpha, \xi) = T(\alpha, \xi)$, resulta que $\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \{T(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$, con lo cual $\bigcup\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \bigcup\{T(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$, y con ello $P(\alpha, \beta) = \bigcup\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \bigcup\{T(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = T(\alpha, \beta)$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall \beta \in \mathcal{R} : P(\alpha, \beta) = T(\alpha, \beta)$. †

Definición 3.1.1. La única función $T : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ del lema 3.1.1 se llama *suma ordinal*. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, denotamos $T(\alpha, \beta) := \alpha + \beta$ y se lee como «suma de α y β» o «α más β».

A continuación veremos algunas propiedades de la suma ordinal. Esta suma es similar en muchos aspectos a la suma de los números naturales que se estudia en los cursos básicos; sin embargo, tiene algunas diferencias. Veremos, por ejemplo, que la suma ordinal no es conmutativa.

Teorema 3.1.2. *Para cualesquiera* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ *:*

a) $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$*;*

b) $\alpha + 1 = S(\alpha)$*;*

c) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ *o, dicho de otra manera,* $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$*;*

d) si $\beta \in \mathbf{Lim}$*, entonces* $\alpha + \beta = \bigcup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$.

Demostración. La propiedad $\alpha + 0 = \alpha$ es la propiedad *i*) del lema anterior; la propiedad d) de este teorema es la propiedad *iii*) del lema anterior.

Para inciso b), usamos la propiedad *ii*) del lema anterior: $\alpha + 1 = \alpha + S(0) = S(\alpha + 0) = S(\alpha)$.

Para la propiedad $0 + \alpha = \alpha$, usamos inducción. Si $\alpha = 0$, entonces $0 + \alpha = 0 + 0 = 0$. Si $0 + \alpha = \alpha$, entonces $0 + S(\alpha) = S(0 + \alpha) = S(\alpha)$. Si $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $\forall \xi < \alpha : 0 + \xi = \xi$, entonces $0 + \alpha = \bigcup\{0 + \xi \mid \xi < \alpha\} = \bigcup\{\xi \mid \xi < \alpha\} = \alpha$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall \alpha \in \mathcal{R} : 0 + \alpha = \alpha$.

Para probar el inciso c), usamos el inciso b): $S(\beta) = \beta + 1$ y $S(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + 1$, en consecuencia, usando el lema anterior inciso *ii*), obtenemos que $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$. †

Ejemplos. $1 + 1 = S(1) = 2$; $2 + 1 = S(2) = 3$; $3 + 1 = S(3) = 4$; $4 + 1 = S(4) = 5$;
$1 + 2 = 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3$;
$1 + 3 = 1 + (1 + 2) = (1 + 1) + 2 = 2 + 2$;
$3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$;
$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3$.

Teorema 3.1.3. *Si* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$*, entonces* $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathcal{R}$.

Claramente, $\{\alpha+\xi \mid \xi < 0\} = \emptyset$, por lo cual $\alpha+0 = \alpha = \alpha \cup \{\alpha+\xi \mid \xi < 0\}$.

Si $\alpha+\beta = \alpha \cup \{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1 = (\alpha+\beta)\cup\{\alpha+\beta\} &= (\alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\})\cup\{\alpha+\beta\} \\ &= \alpha\cup(\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}\cup\{\alpha+\beta\}) = \alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta+1\}.\end{aligned}$$

Si $\beta \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall\gamma < \beta : \alpha+\gamma = \alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \gamma\}$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha+\beta = \bigcup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\} = \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma) &= \bigcup_{\gamma<\beta}\big(\alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \gamma\}\big) \\ &= \Big(\bigcup_{\gamma<\beta}\alpha\Big)\cup\Big(\bigcup_{\gamma<\beta}\{\alpha+\xi \mid \xi < \gamma\}\Big) = \alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}.\end{aligned}$$

Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta \in \mathcal{R} : \alpha+\beta = \alpha\cup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}$. †

Teorema 3.1.4. *a) Si $\alpha \in \mathcal{R}$ y $\beta \in \mathbf{Lim}$, entonces $\alpha+\beta \in \mathbf{Lim}$.*

b) (Cerradura de la suma en ω) Si $n, m \in \omega$, entonces $n+m \in \omega$.

Demostración. a) Sabemos que $\alpha+\beta = \bigcup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}$. Si $\gamma < \alpha+\beta$, existe $\xi < \beta$ tal que $\gamma < \alpha+\xi$, luego $\gamma+1 \leq \alpha+\xi < (\alpha+\xi)+1 = \alpha+(\xi+1)$, por lo cual $\gamma+1 < \alpha+(\xi+1)$, así que $\gamma+1 < \alpha+(\xi+1)$, y además $\xi+1 < \beta$ ($\beta \in \mathbf{Lim}$), en consecuencia, $\gamma+1 < \alpha+\beta$. Por tanto, $\alpha+\beta$ es un ordinal límite.

b) Sea $n \in \omega$. Claramente, $n+0 \in \omega$; y si $m \in \omega$ tal que $n+m \in \omega$, entonces $n+(m+1) = (n+m)+1 = S(n+m) \in \omega$. Por el principio de inducción matemática, $\forall m \in \omega : n+m \in \omega$. †

Teorema 3.1.5. *a) Para todo $n \in \omega$, $n+1 = 1+n$.*

b) (Conmutatividad de + en ω) Para cualesquiera $n, m \in \omega$, $n+m = m+n$.

Demostración. a) Ya se probó que 0+1=1+0. Si k es un número natural tal que $k+1 = 1+k$, entonces $S(k)+1 = (k+1)+1 = (1+k)+1 = 1+(k+1) = 1+S(k)$. Por el principio de inducción matemática, $\forall n \in \omega : n+1 = 1+n$.

b) Sea n un número natural cualquiera. Es claro que $n+0 = 0+n$. Si $k \in \omega$ tal que $n+k = k+n$, entonces

$$n+S(k) = S(n+k) = S(k+n) = k+S(n) = k+(n+1) = k+(1+n) = (k+1)+n = S(k)+n.$$

Por el principio de inducción matemática, $\forall m \in \omega : n+m = m+n$. †

Corolario 3.1.6. *La suma ordinal, en general, no es conmutativa.*

Demostración. Sabemos que ω es un número ordinal. Claramente, $\omega+1 = S(\omega) = \omega\cup\{\omega\}$. Además, $1+\omega = \sup\{1+n \mid n < \omega\} = \sup\{n+1 \mid n < \omega\} = \sup\{S(n) \mid n < \omega\} = \sup(\omega\setminus\{0\}) = \omega$. De este modo, $1+\omega < \omega+1$. †

Ejemplos. Podemos sumar cualquier ordinal con ω. Por ejemplo: $\omega+1 = S(\omega) = \omega\cup\{\omega\}$; $\omega+2 = (\omega+1)+1 = S(S(\omega))$; $\omega+3 = (\omega+1)+1 = S(S(S(\omega)))$; etc. Se observa que $\omega < \omega+1 < \omega+2$.

Como vimos $1+\omega = \omega$. Similarmente, $2+\omega = \sup\{2+n \mid n < \omega\} = \sup(\omega\setminus\{0, 1\}) = \omega$. De hecho, para cada $n < \omega$, $n+\omega = \omega$.

Teorema 3.1.7. *Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$:*

a) $\alpha < \beta \iff \gamma+\alpha < \gamma+\beta$;

b) *si* $\alpha \leq \beta$, *entonces* $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$.

Demostración. a) Probaremos, por inducción sobre β, que $\forall\beta \in \mathcal{R} : \alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$.

Para $\beta = 0$, es claro que $\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$. Supongamos $\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$. Si $\alpha < \beta+1$, entonces $\alpha \leq \beta$, por lo que hay dos casos. Si $\alpha = \beta$, entonces $\gamma+\alpha = \gamma+\beta < \gamma+(\beta+1)$. Si $\alpha < \beta$, usando la hipótesis de inducción, $\gamma+\alpha < \gamma+\beta < \gamma+(\beta+1)$.

Supongamos que β es un ordinal límite tal que $\forall\xi < \beta : \alpha < \xi \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\xi$. Por el teorema 3.1.2 d), $\gamma+\beta = \sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\}$; luego si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha < S(\alpha) < \beta$, de lo que se sigue que $\gamma+\alpha < \gamma+S(\alpha) \leq \sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta\} = \gamma+\beta$.

Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta \in \mathcal{R} : \alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$. Concluimos, por tanto, que $\forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R} : \alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$. (▲)

Ahora probemos la recíproca. Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ cumplen que $\gamma+\alpha < \gamma+\beta$, sabemos que $\beta < \alpha$ o $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$. Si $\beta < \alpha$, por (▲), se tiene que $\gamma+\beta < \gamma+\alpha$; y si $\alpha = \beta$, entonces $\gamma+\alpha = \gamma+\beta$. Ambos casos contradicen la suposición inicial de que $\gamma+\alpha < \gamma+\beta$, por lo cual concluimos que $\alpha < \beta$.

b) Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ tales que $\alpha \leq \beta$. Probemos por inducción que $\forall\gamma \in \mathcal{R} : \alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$.

Si $\gamma = 0$, entonces $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$.

Si $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$, entonces $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma < (\beta+\gamma)+1 = \beta+(\gamma+1)$, luego $\alpha+\gamma < \beta+(\gamma+1)$, en consecuencia, $(\alpha+\gamma)+1 \leq \beta+(\gamma+1)$ y, con ello, $\alpha+(\gamma+1) = (\alpha+\gamma)+1 \leq \beta+(\gamma+1)$.

Si $\gamma \in \mathbf{Lim}$ y $\forall\xi < \gamma : \alpha+\xi \leq \beta+\xi$, entonces $\forall\xi < \gamma : \alpha+\xi \subseteq \beta+\xi$, consiguientemente, $\bigcup\{\alpha+\xi \mid \xi < \gamma\} \subseteq \bigcup\{\beta+\xi \mid \xi < \gamma\}$, lo cual es equivalente a $\alpha+\gamma \subseteq \beta+\gamma$ y así $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$. †

Observación. La implicación $(\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha+\gamma < \beta+\gamma)$ es falsa. Por ejemplo: $1 < 2$, pero $1+\omega = 2+\omega$.

Corolario 3.1.8. *Para cualesquiera* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{R}$ *las siguientes proposiciones son verdaderas:*

a) $\alpha = \beta$ *si y solo si* $\gamma+\alpha = \gamma+\beta$.

b) *Si* $\alpha+\gamma < \beta+\gamma$, *entonces* $\alpha < \beta$.

c) *Si* $\alpha \leq \beta$ *y* $\gamma < \delta$, *entonces* $\alpha+\gamma < \beta+\delta$.

d) *Si* $0 < \beta$, *entonces* $\alpha < \alpha+\beta$.

e) $\beta \leq \alpha+\beta$.

Demostración. a) Por el teorema anterior, $\alpha < \beta \iff \gamma+\alpha < \gamma+\beta$ y $\beta < \alpha \iff \gamma+\beta < \gamma+\alpha$, en consecuencia, $\alpha \neq \beta \iff \gamma+\alpha \neq \gamma+\beta$, lo cual equivale a $\alpha = \beta \iff \gamma+\alpha = \gamma+\beta$.

b) Es la contrarrecíproca del inciso b) del teorema anterior.

c) Si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma < \delta$, entonces $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$ y $\beta+\gamma < \beta+\delta$, luego $\alpha+\gamma < \beta+\delta$.

d) Por el teorema anterior inciso a), si $0 < \beta$, entonces $\alpha+0 < \alpha+\beta$, y ya sabemos que $\alpha+0 = \alpha$.

e) $0 \leq \alpha$ y por el teorema anterior inciso b), $0+\beta \leq \alpha+\beta$ donde $0+\beta = \beta$. †

Observación. La implicación, $\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Longrightarrow \alpha=\beta$ es falsa; por ejemplo, $2+\omega=\omega=1+\omega$, pero $2\neq 1$.

Definición 3.1.2. Dada una función $f : A \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$, donde $A \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$, diremos que:

1) f es *estrictamente creciente* si f es $<$-$<$ preservadora de orden;

2) f es *creciente* si f es $\leq$-$\leq$ preservadora de orden.

Lema 3.1.9. *Supongamos que β y γ son números ordinales. Si $f : \beta \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $g : \gamma \longrightarrow \beta$ son funciones tales que $\beta = \sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\}$ y f es creciente, entonces*

$$\sup\{f(\xi) \mid \xi < \beta\} = \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}.$$

Demostración. Pongamos $\alpha := \sup\{f(\xi) \mid \xi < \beta\}$. Es claro que $\forall\zeta < \beta : f(\zeta) \leq \alpha$, en consecuencia, $\forall\xi < \gamma : f(g(\xi)) \leq \alpha$ y así $\sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\} \leq \alpha$.

Por otra parte, si $\zeta < \alpha = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \beta\}$, existe $\xi' < \beta$ de tal forma que $\zeta < f(\xi')$; dado que $\xi' < \beta = \sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\}$, existe $\zeta' < \gamma$ tal que $\xi' < g(\zeta')$; y dado que f es creciente, $f(\xi') \leq f(g(\zeta'))$; luego $\zeta < f(\xi') \leq f(g(\zeta')) \leq \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}$. En resumen, $\forall\zeta < \alpha : \zeta < \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}$, es decir, $\alpha \subseteq \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}$, por lo cual, $\alpha \leq \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}$

Por lo tanto, $\sup\{f(\xi) \mid \xi < \beta\} = \alpha = \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\}$. †

Lema 3.1.10. *Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\gamma \in \mathbf{Lim}$, entonces* $\sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta+\gamma\} = \sup\{\alpha+(\beta+\xi) \mid \xi < \gamma\}$.

Demostración. Como γ es límite, entonces $\beta+\gamma$ y $\alpha+(\beta+\gamma)$ son límites, lo cual significa que $\beta+\gamma = \sup\{\beta+\xi \mid \xi < \gamma\}$ y $\alpha+(\beta+\gamma) = \sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta+\gamma\}$. Si definimos $g : \gamma \longrightarrow \beta+\gamma$ como $g(\xi) := \beta+\xi$ y $f : \beta+\gamma \longrightarrow \alpha+(\beta+\gamma)$ como $f(\xi) := \alpha+\xi$; claramente, f es creciente (por el teorema 3.1.7) y $\beta+\gamma = \sup\{\beta+\xi \mid \xi < \gamma\} = \sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\}$. Deducimos, por el lema anterior, que

$$\sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \beta+\gamma\} = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \beta+\gamma\} = \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \gamma\} = \sup\{\alpha+(\beta+\xi) \mid \xi < \gamma\}.$$

†

Teorema 3.1.11 (Asociatividad)**.** *Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Probemos, por inducción, que $\forall\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

Si $\gamma = 0$, entonces $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+\beta = \alpha+(\beta+0) = \alpha+(\beta+\gamma)$.

Si $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, usando el lema 3.1.2 c), tenemos que:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+(\gamma+1) = ((\alpha+\beta)+\gamma))+1 &= (\alpha+(\beta+\gamma))+1 \\ &= \alpha+((\beta+\gamma))+1) = \alpha+(\beta+(\gamma+1)).\end{aligned}$$

Si $\gamma \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi < \gamma : (\alpha+\beta)+\xi = \alpha+(\beta+\xi)$, por el lema anterior, tenemos que:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \sup\{(\alpha+\beta)+\xi \mid \xi < \gamma\} = \sup\{\alpha+(\beta+\xi) \mid \xi < \gamma\} = \alpha+(\beta+\gamma).$$

Por el principio de inducción transfinita, $\forall\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$. †

Teorema 3.1.12 (Lema de la resta)**.** *Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\alpha \leq \beta$, existe un único $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\alpha+\gamma = \beta$.*

Demostración. Pongamos $A = \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \beta \leq \alpha+\xi\}$. $A \neq \emptyset$, pues $\beta \leq \alpha+\beta$. Sea $\gamma := \text{mín}(A)$. Vamos a ver que $\alpha+\gamma = \beta$.

Como $\gamma \in A$, entonces $\beta = \alpha+\gamma$ o $\beta < \alpha+\gamma$. Supongamos que $\beta < \alpha+\gamma$:

i) Si $\gamma = 0$, entonces $\beta < \alpha$.

ii) Si $\gamma = S(\xi)$ para algún $\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\xi \notin A$, pues $\gamma = \text{mín}(A)$; pero, $\beta < \alpha+\gamma = \alpha+(\xi+1) = (\alpha+\xi)+1$, por consiguiente, $\beta \leq \alpha+\xi$, así que $\xi \in A$.

iii) Si $\gamma \in \mathbf{Lim}$, entonces $\beta < \alpha+\gamma = \sup\{\alpha+\xi \mid \xi < \gamma\}$, por lo cual existe un $\xi < \gamma$ tal que $\beta \leq \alpha+\xi$, luego $\xi \in A$ y $\xi < \gamma = \text{mín}(A)$.

Cualquier caso genera una contradicción, de modo que la desigualdad $\beta < \alpha+\gamma$ no puede ocurrir; por ende, $\beta = \alpha+\gamma$.

La unicidad se sigue del corolario 3.1.8 a). †

3.2. Producto

Lema 3.2.1. *Existe una única función $P : \boldsymbol{\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\mathcal{R}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

i) $P(\alpha, 0) = 0$

ii) $P(\alpha, \beta+1) = P(\alpha, \beta)+\alpha$;

iii) *si* $\beta \in \mathbf{Lim}$, *entonces* $P(\alpha, \beta) = \bigcup\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$.

Demostración. Dado α definimos g_α como:

$$g_\alpha(h) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \operatorname{dom}(h) = 0 \\ h(\xi)+\alpha & \textit{si } \operatorname{dom}(h) = \xi+1 \ \textit{y } h(\xi) \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \ \textit{para algún } \xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \\ \bigcup \operatorname{ran}(h) & \textit{si } \operatorname{dom}(h) \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

El dominio de g_α son los conjuntos cuyos dominios son números ordinales. Por el principio de definición por recurrencia, existe una única función f_α tal que $\operatorname{dom}(f_\alpha)$ es un ordinal y

$$\forall \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta).$$

Definamos P como $P(\alpha, \beta) := f_\alpha(\beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Pero primero tenemos que probar ciertas características de las funciones f_α.

Si $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\forall \xi < \beta : \xi \in \operatorname{dom}(f_\alpha)$, entonces $\beta \subseteq \operatorname{dom}(f_\alpha)$, luego $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) = \operatorname{dom}(f_\alpha) \cap \beta = \beta$, esto es, $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y con ello $\beta \in \operatorname{dom}(f_\alpha)$. Por el principio de inducción transfinita, $\boldsymbol{\mathcal{R}} \subseteq \operatorname{dom}(f_\alpha)$.

Ahora probemos que $\operatorname{ran}(f_\alpha) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y las propiedades *i*), *ii*) e *iii*). Sea $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\forall \xi < \beta : f_\alpha(\xi) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Tenemos que $f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta)$ y $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) = \operatorname{dom}(f_\alpha) \cap \beta = \boldsymbol{\mathcal{R}} \cap \beta = \beta$, de modo que el valor de $f_\alpha(\beta)$ depende del valor de β, esto es:

$$f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \beta = 0 \\ f_\alpha(\xi)+\alpha & \textit{si } \beta = \xi+1 \ \textit{y } f_\alpha(\xi) \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \ \textit{para algún } \xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \\ \bigcup \operatorname{ran}(f_\alpha \restriction \beta) & \textit{si } \beta \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

Luego entonces:

a) Si $\beta = 0$, se tiene $f_\alpha(\beta) = 0 \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ —es decir, $P(\alpha, 0) = 0$—.

b) Si $\beta = \xi+1$ para algún $\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, por hipótesis de inducción, $f_\alpha(\xi) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y con ello $f_\alpha(\beta) = f_\alpha(\xi)+\alpha$ —esto es, $P(\alpha, \xi+1) = P(\alpha, \xi)+\alpha$—.

c) Si $\beta \in \mathbf{Lim}$, se tiene que $f_\alpha(\beta) = \bigcup \operatorname{ran}(f_\alpha \restriction \beta) = \bigcup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \beta\}$, luego, por hipótesis de inducción y el teorema 2.2.3 c), $f_\alpha(\beta) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ —así, $P(\alpha, \beta) = \bigcup\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$—.

Para el final, probemos la unicidad. Supongamos que $P, Q : \boldsymbol{\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\mathcal{R}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ son dos funciones que cumplen las propiedades *i*), *ii*) e *iii*). Sea $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ cualquiera. En primer lugar, $P(\alpha, 0) = 0 = Q(\alpha, 0)$. Si $P(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta)$, por lo cual $P(\alpha, \beta+1) = P(\alpha, \beta)+\alpha = Q(\alpha, \beta)+\alpha = Q(\alpha, \beta+1)$. Si suponemos que $\forall \xi < \beta : P(\alpha, \xi) = Q(\alpha, \xi)$, entonces $\{P(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \{Q(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$, en consecuencia,

$\bigcup\{P(\alpha,\xi)\mid \xi<\beta\}=\bigcup\{Q(\alpha,\xi)\mid \xi<\beta\}$, es decir, $P(\alpha,\beta)=Q(\alpha,\beta)$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}: P(\alpha,\beta)=Q(\alpha,\beta)$. †

Definición 3.2.1. La función P que cumple las propiedades $i)$, $ii)$ e $iii)$ del lema 3.2.1 se llama *producto ordinal*. Para cualesquiera $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$, denotamos $\alpha\cdot\beta:=P(\alpha,\beta)$ y le llamamos «α por β».

A continuación probaremos algunas propiedades que cumple el producto y también algunas que no cumplen. Haciendo un adelanto, el producto no es conmutativo y la distributividad no se cumple.

Teorema 3.2.2. *Para cualesquiera $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) $\alpha\cdot 0=0$*;*

b) $\alpha\cdot(\beta+1)=(\alpha\cdot\beta)+\alpha$*;*

c) si $\beta\in\mathbf{Lim}$*, entonces* $\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\alpha\cdot\xi\mid\xi<\beta\}=\sup\{\alpha\cdot\xi\mid\xi<\beta\}$*.*

Teorema 3.2.3. *Para todo $\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) $0\cdot\beta=0$*,*

b) $1\cdot\beta=\beta=\beta\cdot 1$*.*

Demostración. Si $\beta=0$, es claro que $0\cdot\beta=0$. Si $0\cdot\beta=0$, entonces $0\cdot(\beta+1)=(0\cdot\beta)+0=0+0=0$. Si β es un ordinal límite tal que $\forall\xi<\beta: 0\cdot\xi=0$, entonces $0\cdot\beta=\bigcup\{0\cdot\xi\mid\xi<\beta\}=\bigcup\{0\mid\xi<\beta\}=0$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}: 0\cdot\beta=0$.

En virtud del teorema anterior (inciso b)), si $\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\beta\cdot 1=\beta\cdot(0+1)=\beta\cdot 0+\beta=0+\beta=\beta$. En seguida probemos que $1\cdot\beta=\beta$. Por el teorema anterior, $1\cdot 0=0$. Si $\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $1\cdot\beta=\beta$, entonces $1\cdot(\beta+1)=(1\cdot\beta)+1=\beta+1$. Si $\beta\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\beta: 1\cdot\xi=\xi$, entonces $1\cdot\beta=\bigcup\{1\cdot\xi\mid\xi<\beta\}=\bigcup\{\xi\mid\xi<\beta\}=\bigcup\beta=\beta$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}: 1\cdot\beta=\beta$. †

Teorema 3.2.4. *a) Si* $\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ *y* $\beta\in\mathbf{Lim}$*, entonces* $\alpha\cdot\beta\in\mathbf{Lim}$ *y* $\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\xi\mid\xi<\alpha\cdot\beta\}$*.*

b) (Cerradura del producto en ω*) Si* $n,m\in\omega$*, entonces* $n\cdot m\in\omega$*.*

Demostración. a) Como β es un ordinal límite $\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\alpha\cdot\xi\mid\xi<\beta\}$. Si $\gamma<\alpha\cdot\beta$; existe $\xi<\beta$ tal que $\gamma<\alpha\cdot\xi$, donde $\xi>0$; entonces $\xi+1<\beta$, $\gamma+1\leq\alpha\cdot\xi$ y $\alpha\cdot\xi<\alpha\cdot\xi+\xi=\alpha\cdot(\xi+1)$; por lo cual, $\gamma+1<\alpha\cdot(\xi+1)$ y $\xi+1<\beta$, y en consecuencia $\gamma+1<\alpha\cdot\beta$. Por lo tanto, $\alpha\cdot\beta$ es un ordinal límite.

Por el teorema 2.2.3 b), $\alpha\cdot\beta=\{\xi\mid\xi<\alpha\cdot\beta\}$ y, por el teorema 2.2.6, $\alpha\cdot\beta=\bigcup\alpha\cdot\beta$; consecuencia, $\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\xi\mid\xi<\alpha\cdot\beta\}$.

b) Sea n un número natural. Claramente, $n\cdot 0=0\in\omega$; y si $n\cdot m\in\omega$, se sigue que $n\cdot(m+1)=(n\cdot m)+n\in\omega$, por el teorema 3.1.4. Por el PIM, $\forall m\in\omega: n\cdot m\in\omega$. †

Teorema 3.2.5. *El producto ordinal no es conmutativo.*

Demostración. Vamos a dar un contraejemplo. Se cumple que $2\cdot\omega=\sup\{2\cdot n\mid n<\omega\}=\omega$. Además, $\omega\cdot 2=\omega\cdot(1+1)=\omega+\omega$. En consecuencia, $2\cdot\omega<\omega\cdot 2$. †

Ejemplos. Para todo $n<\omega$, se tiene $n\cdot\omega\in\mathbf{Lim}$, donde $n\cdot\omega=\sup\{n\cdot m\mid m<\omega\}$, y como $\{n\cdot m\mid m<\omega\}\subseteq\omega$ no es acotado en ω, deducimos que $n\cdot\omega=\omega$.

Además, $\omega\cdot\omega=\sup\{\omega\cdot n\mid n<\omega\}$. También, $\omega\cdot 1=\omega$; $\omega\cdot 2=\omega+\omega$; $\omega\cdot 3=\omega+\omega+\omega$; etc.

Teorema 3.2.6. *Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) $\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$, *cuando* $\alpha \neq 0$;

b) *si* $\alpha \leq \beta$, *entonces* $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Demostración. a) Sean $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ donde $\alpha \neq 0$. Probemos que $\forall \gamma > \beta : \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. Tenemos que $\beta < \gamma$ si y solo si $\beta + 1 \leq \gamma$. Para $\gamma = \beta + 1$, resulta que $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \gamma$. Si $\beta < \gamma$ y $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$, entonces $\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \gamma + \alpha = \alpha \cdot (\gamma + 1)$ y así $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot (\gamma + 1)$. Si $\gamma \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall \xi \in [\beta + 1, \gamma) : \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \xi$, entonces $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot (\beta + 1) \leq \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \gamma\} = \alpha \cdot \gamma$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall \gamma > \beta : \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

Si $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ cumplen que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$; entonces, $\beta < \gamma$ o $\gamma < \beta$ o $\beta = \gamma$. Si se cumpliera $\beta = \gamma$, se tendría que $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$; y si se diera que $\gamma < \beta$, tendríamos que $\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \beta$ por el párrafo anterior. En estos dos casos se contradeciría la suposición de que $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$; por lo tanto, $\beta < \gamma$.

b) Supongamos que $\alpha \leq \beta$; vamos a usar inducción en γ. Claramente, $\alpha \cdot 0 \leq \beta \cdot 0$. Si $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$, como $\alpha \leq \beta$, del corolario 3.1.8 c), se cumple que $\alpha \cdot \gamma + \alpha \leq \beta \cdot \gamma + \beta$, por lo cual $\alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \leq \beta \cdot \gamma + \beta = \beta \cdot (\gamma + 1)$. Si $\gamma \in \mathbf{Lim}$ es tal que $\forall \xi < \gamma : \alpha \cdot \xi \leq \beta \cdot \xi$, entonces $\sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \gamma\} \leq \sup\{\beta \cdot \xi \mid \xi < \gamma\}$ y así $\alpha \cdot \gamma \leq \alpha \cdot \beta$. †

Corolario 3.2.7. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) *Si* $\alpha \neq 0$, *entonces,* $\beta = \gamma$ *si y solo si* $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$.

b) *Si* $\alpha \leq \beta$, $\gamma < \delta$ *y* $\alpha \neq 0$, *entonces* $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

c) *Si* $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, *entonces* $\alpha < \beta$.

d) *Si* $\beta \neq 0$, *entonces* $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$.

Observación. Si $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, no necesariamente $\alpha = \beta$. Por ejemplo: $1 \cdot \omega = \omega$ y $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n \mid n < \omega\} = \omega$; por lo cual, $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$, pero $1 \neq 2$.

Tampoco se cumple $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ pues $1 < 2$ y $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$.

Lema 3.2.8. *Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\gamma \in \mathbf{Lim}$, entonces:*

a) $\sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta + \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma) = \sup\{\alpha + (\beta + \xi) \mid \xi < \gamma\}$;

b) $\sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta \cdot \gamma\} = \alpha + (\beta \cdot \gamma) = \sup\{\alpha + (\beta \cdot \xi) \mid \xi < \gamma\}$;

c) $\sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta + \gamma\} = \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sup\{\alpha \cdot (\beta + \xi) \mid \xi < \gamma\}$;

d) $\sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta \cdot \gamma\} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \xi) \mid \xi < \gamma\}$.

Demostración. Se sigue del lema 3.1.9; la prueba es similar al lema 3.1.10. †

Teorema 3.2.9. *Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) *(Distributividad por la izquierda)* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$;

b) *(Asociatividad del producto)* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Demostración. a) Dados $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$, probemos que $\forall\gamma\in\mathcal{R}:\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. Para $\gamma=0$, $\alpha\cdot(\beta+0)=\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+0=\alpha\cdot\beta+\gamma\cdot 0$. Si $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+(\gamma+1))&=\alpha\cdot((\beta+\gamma)+1)=(\alpha\cdot(\beta+\gamma))+\alpha\\&=(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+\alpha=\alpha\cdot\beta+(\alpha\cdot\gamma+\alpha)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot(\gamma+1).\end{aligned}$$

Si $\gamma\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\gamma:\alpha\cdot(\beta+\xi)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi$, por el lema anterior:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\sup\{\alpha\cdot(\beta+\xi)\mid\xi<\gamma\}=\sup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi\mid\xi<\gamma\}=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

b) En primer lugar, $(\alpha\cdot\beta)\cdot 0=0=\alpha\cdot 0=\alpha\cdot(\beta\cdot 0)$. En segundo lugar, si $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$, entonces

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot(\gamma+1)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)+\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma+\beta)=\alpha\cdot(\beta\cdot(\gamma+1)).$$

Para terminar, si $\gamma\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\gamma:(\alpha\cdot\beta)\cdot\xi=\alpha\cdot(\beta\cdot\xi)$, se cumple que:

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\sup\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup\{\alpha\cdot(\beta\cdot\xi)\mid\xi<\gamma\}=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma).$$

†

Observación. La distributividad por la derecha no se cumple: $(1+2)\cdot\omega=3\cdot\omega=\sup\{3\cdot n\mid n<\omega\}=\omega$ y $1\cdot\omega+2\cdot\omega=\omega+\omega=\sup\{\omega+n\mid n<\omega\}$. Claramente, $\omega<\omega+\omega$, es decir, $(1+2)\cdot\omega<1\cdot\omega+2\cdot\omega$.

Lema 3.2.10. *Si $n,m\in\omega$, entonces $(n+1)\cdot m=n\cdot m+m$.*

Demostración. Si $n\in\omega$, se satisface que $(n+1)\cdot 0=0=0+0=0\cdot n+0$. Si $n,m\in\omega$ son tales que $(n+1)\cdot m=n\cdot m+m$, tendremos que

$$\begin{aligned}(n+1)\cdot(m+1)&=(n+1)\cdot m+(n+1)=(n\cdot m+m)+(n+1)\\&=(n\cdot m+n)+(m+1)=n\cdot(m+1)+(m+1)\end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, $\forall m\in\omega:\forall n\in\omega:(n+1)\cdot m=n\cdot m+m$. †

Teorema 3.2.11 (Conmutatividad del producto en ω)**.** *Si $n,m\in\omega$, entonces $n\cdot m=m\cdot n$.*

Demostración. Si $m\in\omega$, entonces $0\cdot m=0=m\cdot 0$. Si $n,m\in\omega$ cumplen que $n\cdot m=m\cdot n$, entonces

$$(n+1)\cdot m=n\cdot m+m=m\cdot n+m=m\cdot(n+1).$$

Por el principio de inducción matemática, $\forall n\in\omega:\forall m\in\omega:n\cdot m=m\cdot n$. †

Teorema 3.2.12 (Lema de la división)**.** *Si $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$ donde $\beta\neq 0$, existen únicos $\gamma,\delta\in\mathcal{R}$ tales que*

$$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta\quad y\quad \delta<\beta.$$

Demostración. Se cumple que $1\leq\beta$ porque $\beta\neq 0$, entonces $\alpha=1\cdot\alpha\leq\beta\cdot\alpha$; consiguientemente, el conjunto $A:=\{\xi\in\mathcal{R}\mid\alpha\leq\beta\cdot\xi\}$ es distinto del vacío. Pongamos $\eta:=\text{mín}(A)$; por ello $\alpha\leq\beta\cdot\eta$. Tenemos varios casos:

(*i*) Si $\alpha=\beta\cdot\eta$, se obtiene el resultado deseado tomando $\gamma=\eta$ y $\delta=0$.

(*ii*) El caso $\alpha<\beta\cdot\eta$ y $\eta=0$, no puede ocurrir.

(*iii*) Si $\alpha<\beta\cdot\eta$ y $\eta\in\mathbf{Lim}$, entonces $\alpha\in\beta\cdot\eta=\bigcup\{\beta\cdot\xi\mid\xi<\eta\}$, luego existe $\xi'<\eta$ tal que $\alpha<\beta\cdot\xi'$, lo que nos lleva $\xi'\in A$, y con ello $\eta=\text{mín}(A)\leq\xi'$; esto es una contradicción. Así pues, este caso tampoco puede ocurrir.

(*iv*) Si $\alpha<\beta\cdot\eta$ y $\eta=\gamma+1$ para algún $\gamma\in\mathcal{R}$, entonces $\gamma<\eta=\text{mín}(A)$, por consiguiente, $\beta\cdot\gamma<\alpha$. Por el lema de la resta, existe $\delta\in\mathcal{R}$ tal que $\beta\cdot\gamma+\delta=\alpha$. Además, de la suposición $\alpha<\beta\cdot\eta$ y sustiyendo, se sigue que $\beta\cdot\gamma+\delta<\beta\cdot(\gamma+1)$, por lo cual $\beta\cdot\gamma+\delta<\beta\cdot\gamma+\beta$ y así $\delta<\beta$.

Finalmente, probemos la unicidad. Supongamos que existen $\gamma_1,\delta_1,\gamma_2,\delta_2\in\mathcal{R}$ tales que

$$\alpha=\beta\cdot\gamma_1+\delta_1=\beta\cdot\gamma_2+\delta_2\quad y\quad \delta_1,\delta_2<\beta.$$

Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, sean $n, m \in \{1, 2\}$ tales que $\gamma_n = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$ y $\gamma_m = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$; entonces $\gamma_n < \gamma_m$. Por el lema de la resta, existe $\xi \in \mathcal{R}$ de modo que $\gamma_n + \xi = \gamma_m$ —notar que $\xi \neq 0$—; por consiguiente,

$$\beta \cdot \gamma_n + \delta_n = \beta \cdot \gamma_m + \delta_m = \beta \cdot (\gamma_n + \xi) + \delta_m = \beta \cdot \gamma_n + \beta \cdot \xi + \delta_m;$$

luego, por el corolario 3.1.8 a), $\delta_n = \beta \cdot \xi + \delta_m$, con lo cual $\beta \cdot \xi + \delta_m < \beta$ pues $\delta_n < \beta$. Pero $\xi \neq 0$, así que $\beta \leq \beta \cdot \xi \leq \beta \cdot \xi + \delta_m$. Obtuvimos una contradicción; en consecuencia, $\gamma_1 = \gamma_2$. Tenemos, por tanto, que $\beta \cdot \gamma_1 + \delta_1 = \beta \cdot \gamma_1 + \delta_2$ y con ello $\delta_1 = \delta_2$. †

3.3. Potenciación

Lema 3.3.1. *Existe una única función $p : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ de tal forma que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$:*

i) $p(\alpha, 0) = 1$;

ii) $p(\alpha, \beta + 1) = p(\alpha, \beta) \cdot \alpha$;

iii) *si $\beta \in \mathbf{Lim}$, entonces* $p(\alpha, \beta) = \bigcup\{p(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$.

Demostración. Paca todo $\alpha \in \mathcal{R}$ definimos g_α como:

$$g_\alpha(h) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \operatorname{dom}(h) = 0 \\ h(\xi) \cdot \alpha & \textit{si } \operatorname{dom}(h) = \xi + 1 \textit{ y } h(\xi) \in \mathcal{R} \textit{ para algún } \xi \in \mathcal{R} \\ \bigcup \operatorname{ran}(h) & \textit{si } \operatorname{dom}(h) \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

El dominio de g_α son los conjuntos cuyos dominios son números ordinales. Por el principio de definición por recurrencia, existe una única función f_α tal que $\operatorname{dom}(f_\alpha)$ es un ordinal y

$$\forall \beta \in \mathcal{R} : f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta).$$

Definamos P como $P(\alpha, \beta) := f_\alpha(\beta)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

Veamos primero que $\operatorname{dom}(f_\alpha) = \mathcal{R}$. Si $\beta \in \mathcal{R}$ tal que $\forall \xi < \beta : \xi \in \operatorname{dom}(f_\alpha)$, entonces $\beta \subseteq \operatorname{dom}(f_\alpha)$, luego $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) = \operatorname{dom}(f_\alpha) \cap \beta = \beta$, esto es, $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) \in \mathcal{R}$, y con ello $\beta \in \operatorname{dom}(f_\alpha)$. Por el principio de inducción transfinita, $\mathcal{R} \subseteq \operatorname{dom}(f_\alpha)$.

Ahora probemos las propiedades *i*), *ii*) e *iii*), y también que $\operatorname{ran}(f_\alpha) \subseteq \mathcal{R}$. Sea $\beta \in \mathcal{R}$ tal que $\forall \xi < \beta : f_\alpha(\xi) \in \mathcal{R}$. Tenemos que $f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta)$ y $\operatorname{dom}(f_\alpha \restriction \beta) = \operatorname{dom}(f_\alpha) \cap \beta = \mathcal{R} \cap \beta = \beta$, de modo que el valor de $f_\alpha(\beta)$ depende del valor de β, esto es:

$$f_\alpha(\beta) = g_\alpha(f_\alpha \restriction \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \beta = 1 \\ f_\alpha(\xi) \cdot \alpha & \textit{si } \beta = \xi + 1 \textit{ y } f_\alpha(\xi) \in \mathcal{R} \textit{ para algún } \xi \in \mathcal{R} \\ \bigcup \operatorname{ran}(f_\alpha \restriction \beta) & \textit{si } \beta \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

Luego entonces:

a) Si $\beta = 0$, se tiene $f_\alpha(\beta) = 1 \in \mathcal{R}$ —es decir, $p(\alpha, 0) = 1$—.

b) Si $\beta = \xi + 1$ para algún $\xi \in \mathcal{R}$, por hipótesis de inducción, $f_\alpha(\xi) \in \mathcal{R}$ y con ello $f_\alpha(\beta) = f_\alpha(\xi) \cdot \alpha$ —esto es, $p(\alpha, \xi + 1) = p(\alpha, \xi) \cdot \alpha$—.

c) Si $\beta \in \mathbf{Lim}$, se tiene que $f_\alpha(\beta) = \bigcup \operatorname{ran}(f_\alpha \restriction \beta) = \bigcup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \beta\}$, luego, por hipótesis de inducción y el teorema 2.2.3 c), $f_\alpha(\beta) \in \mathcal{R}$ — así, $p(\alpha, \beta) = \bigcup\{p(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$—.

Para finalizar, probemos la unicidad. Supongamos que $p, q : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ son dos funciones que cumplen las propiedades *i*), *ii*) e *iii*). Sea $\alpha \in \mathcal{R}$ cualquiera. Primero, $p(\alpha, 0) = 0 = q(\alpha, 0)$. Si $p(\alpha, \beta) = q(\alpha, \beta)$, entonces $p(\alpha, \beta + 1) = p(\alpha, \beta) + \alpha = q(\alpha, \beta) + \alpha = q(\alpha, \beta + 1)$. Si $\forall \xi < \beta : p(\alpha, \xi) = q(\alpha, \xi)$, resulta que $\{p(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \{q(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$. En consecuencia,

$$\bigcup\{p(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\} = \bigcup\{q(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\},$$

es decir, $p(\alpha, \beta) = q(\alpha, \beta)$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall \beta \in \mathcal{R} : p(\alpha, \beta) = q(\alpha, \beta)$. †

Definición 3.3.1. La función $p : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ del lema 3.3.1 se llama «potenciación ordinal». Para cualesquiera α, $\beta \in \mathcal{R}$, el ordinal $p(\alpha, \beta)$ se denotará como α^β y se llamará «α elevado a la β».

Observación. De acuerdo a la definición de potencia, resulta que $0^0 = 1$. En algunas áreas de las matemáticas el valor de 0^0 no se define, pero aquí su valor será 1 por definición.

Teorema 3.3.2. *Para cualesquiera α, $\beta \in \mathcal{R}$:*

a) $\alpha^0 = 1$;

b) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$;

c) *si* $\beta \in \mathbf{Lim}$, *entonces* $\alpha^\beta = \bigcup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta\}$.

Teorema 3.3.3. *Para cualesquiera α, $\beta \in \mathcal{R}$:*

a) $1^\beta = 1$;

b) $0^\beta = 0$ *si* $\beta \neq 0$;

c) *si* $\alpha \neq 0$, $\alpha^\beta \geq 1$;

d) *si* $\alpha > 1$ *y* $\beta \in \mathbf{Lim}$, *entonces* $\alpha^\beta \in \mathbf{Lim}$.

Demostración. a) Ya sabemos que $1^0 = 1$. Si $1^\beta = 1$, entonces $1^{\beta+1} = 1^\beta \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$. Si $\beta \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall \xi < \beta : 1^\xi = 1$, entonces $1^\beta = \bigcup\{1^\xi \mid \xi < \beta\} = \bigcup\{1\} = 1$.

b) Para $\beta = 1$, $0^\beta = 0^{0+1} = 0^0 \cdot 0 = 0$. Si $0^\beta = 0$, entonces $0^{\beta+1} = 0^\beta \cdot 0 = 0$. Si $\beta \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall \xi < \beta : 0^\xi = 0$, entonces $0^\beta = \bigcup\{0^\xi \mid \xi < \beta\} = \bigcup\{0\} = 0$.

c) $\alpha^0 = 1 \geq 1$. Si $\alpha^\beta \geq 1$, entonces $1 = 1 \cdot 1 \leq \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{\beta+1}$. Si $\beta \in \mathbf{Lim}$ tal que $\forall \xi < \beta : \alpha^\xi \geq 1$, entonces $1 \leq \alpha^1 \leq \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta\} = \alpha^\beta$.

d) Supongamos que $\alpha > 1$ y $\beta \in \mathbf{Lim}$. Si $\gamma < \alpha^\beta$; existe $\xi < \gamma$ tal que $\gamma < \alpha^\xi$; entonces
$$\xi + 1 < \beta \ \ y \ \ \gamma + 1 \leq \alpha^\xi < \alpha^\xi \cdot \alpha = \alpha^{\xi+1} \leq \sup\{\alpha^{\xi'} \mid \xi' < \beta\} = \alpha^\beta;$$
en consecuencia, $\gamma + 1 < \alpha^\beta$. Por tanto, $\alpha^\beta \in \mathbf{Lim}$. †

Teorema 3.3.4 (Cerradura de la potenciación en ω)**.** *Si n, $m \in \omega$, entonces $n^m \in \omega$.*

Demostración. $n^0 = 1 \in \omega$; si $n^m \in \omega$, entonces $n^{m+1} = n^m \cdot n \in \omega$. Por el principio de inducción matemática, $\forall n, m \in \omega : n^m \in \omega$. †

Ejemplos. $1^\omega = \sup\{1^n \mid n < \omega\} = \sup\{1\} = 1$;
$2^\omega = \sup\{2^n \mid n < \omega\} = \omega$;
$3^\omega = \sup\{3^n \mid n < \omega\} = \omega$;
$n^\omega = \sup\{n^m \mid m < \omega\} = \omega$.
$\omega^2 = \omega \cdot \omega$; $\omega^3 = \omega \cdot \omega \cdot \omega$; $\omega^4 = \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot \omega$.
$\omega^\omega = \sup\{\omega^n \mid n < \omega\} = \sup\{\omega, \ \omega \cdot \omega, \ \omega \cdot \omega \cdot \omega, \ ...\}$

Teorema 3.3.5. *Si α, β, $\gamma \in \mathcal{R}$ tales que $\alpha > 1$, entonces $\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.*

Demostración. Vamos a usar inducción en γ, empezando por $\gamma=\beta+1$, es decir, probaremos que $\forall\gamma>\beta:\alpha^\beta<\alpha^\gamma$. Como $1<\alpha$, entonces $\alpha^\beta\cdot 1<\alpha^\beta\cdot\alpha$, luego $\alpha^\beta<\alpha^{\beta+1}$. Si $\alpha^\beta<\alpha^\gamma$ con $\beta<\gamma$, entonces $\alpha^\beta\cdot\alpha\le\alpha^\gamma\cdot\alpha$, en consecuencia, $\alpha^\beta<\alpha^{\beta+1}\le\alpha^{\gamma+1}$. Si $\gamma\in\mathbf{Lim}$ cumple que $\gamma>\beta$ y $\forall\xi<\gamma:\xi>\beta\Longrightarrow\alpha^\beta<\alpha^\xi$; entonces, $\beta+1<\gamma$ y $\alpha^\beta<\alpha^{\beta+1}\le\sup\{\alpha^\xi\mid\xi<\gamma\}=\alpha^\gamma$. Por el principio de inducción transfinita, $\forall\gamma>\beta:\alpha^\beta<\alpha^\gamma$.

Por el párrafo anterior, $\gamma<\beta\Longrightarrow\alpha^\gamma<\alpha^\beta$; y también es claro que $\gamma=\beta\Longrightarrow\alpha^\gamma=\alpha^\beta$; entonces $\gamma\le\beta\Longrightarrow\alpha^\gamma\le\alpha^\beta$; lo cual equivale a (contrarrecíproca) $\alpha^\beta<\alpha^\gamma\Longrightarrow\beta<\gamma$. †

Lema 3.3.6. *Si $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\gamma\in\mathbf{Lim}$; entonces,*

a) $\alpha^{\beta+\gamma}=\sup\{\alpha^{\beta+\xi}\mid\xi<\gamma\}$;

b) $\alpha^{\beta\cdot\gamma}=\sup\{\alpha^{\beta\cdot\xi}\mid\xi<\gamma\}$;

c) $\beta\cdot\alpha^\gamma=\sup\{\beta\cdot\alpha^\xi\mid\xi<\gamma\}$.

Demostración. Similar al lema 3.1.10. †

Teorema 3.3.7. *Para cualesquiera $\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$;

b) $\alpha^{\beta\cdot\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$.

Demostración. a) $\alpha^\beta\cdot\alpha^0=\alpha^\beta\cdot 1=\alpha^\beta=\alpha^{\beta+0}$.

Si $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$, entonces
$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)}=\alpha^{(\beta+\gamma)+1}=\alpha^{\beta+\gamma}\cdot\alpha=(\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma)\cdot\alpha=\alpha^\beta\cdot(\alpha^\gamma\cdot\alpha)=\alpha^\beta\cdot\alpha^{\gamma+1}.$$

Si $\gamma\in\mathbf{Lim}$, tal que $\forall\xi<\gamma:\alpha^{\beta+\xi}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\xi$, entonces, por el lema anterior,
$$\alpha^{\beta+\gamma}=\sup\{\alpha^{\beta+\xi}\mid\xi<\gamma\}=\sup\{\alpha^\beta\cdot\alpha^\xi\mid\xi<\gamma\}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma.$$

b) $(\alpha^\beta)^0=1$ y $\alpha^{\beta\cdot 0}=\alpha^0=1$.

Si $\alpha^{\beta\cdot\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$, entonces, usando el inciso a),
$$\alpha^{\beta\cdot(\gamma+1)}=\alpha^{\beta\cdot\gamma+\beta}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}\cdot\alpha^\beta=(\alpha^\beta)^\gamma\cdot\alpha^\beta=(\alpha^\beta)^{\gamma+1}.$$

Si $\gamma\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\gamma:\alpha^{\beta\cdot\xi}=(\alpha^\beta)^\xi$, entonces, por el lema anterior:
$$\alpha^{\beta\cdot\gamma}=\sup\{\alpha^{\beta\cdot\xi}\mid\xi<\gamma\}=\sup\{(\alpha^\beta)^\xi\mid\xi<\gamma\}=(\alpha^\beta)^\gamma.$$
†

Observación. En general, no se cumple que $(\alpha\cdot\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$, pues $(2\cdot 3)^\omega=6^\omega=\omega$ y $2^\omega\cdot 3^\omega=\omega\cdot\omega$.

Teorema 3.3.8. *Para cualesquiera $\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$:*

a) si $\alpha\le\beta$, entonces $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$;

b) si $\alpha>1$, entonces $\beta\le\alpha^\beta$.

Demostración. a) Supongamos que $\alpha\le\beta$. Claramente, $\alpha^0=1=\beta^0$. Si $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$, por el corolario 3.2.7 b), $\alpha^\gamma\cdot\alpha\le\beta^\gamma\cdot\beta$, es decir, $\alpha^{\gamma+1}\le\beta^{\gamma+1}$. Si $\gamma\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\gamma:\alpha^\xi\le\beta^\xi$, entonces $\sup\{\alpha^\xi\mid\xi<\gamma\}\le\sup\{\beta^\xi\mid\xi<\gamma\}$, es decir, $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$.

b) Supongamos que $\alpha>1$. Si $\beta=1$, claramente, $\beta<\alpha=\alpha^\beta$. Si $\beta\le\alpha^\beta$, por el teorema 3.3.5, $\beta<\alpha^{\beta+1}$ y así $\beta+1\le\alpha^{\beta+1}$. Si $\beta\in\mathbf{Lim}$ tal que $\forall\xi<\beta:\xi\le\alpha^\xi$, entonces $\sup\{\xi\mid\xi<\beta\}\le\sup\{\alpha^\xi\mid\xi<\beta\}$, esto es, $\beta\le\alpha^\beta$. †

Observación. No se cumple $\alpha<\beta \Longrightarrow \alpha^\gamma<\beta^\gamma$. Por ejemplo, $2<3$ y $2^\omega=\omega=3^\omega$.

Corolario 3.3.9. *Si* $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{Lim}$, $\alpha\le\beta$ *y* $\gamma<\delta$, *entonces* $\alpha^\gamma\le\beta^\beta$.

Teorema 3.3.10 (Lema del logaritmo)**.** *Si* $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$, *donde* $\alpha\neq 0$ *y* $\beta>1$, *entonces existen únicos* $\gamma,\delta,\eta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ *tales que* $\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta+\eta$, $1\le\delta<\beta$ *y* $\eta<\beta^\gamma$.

Demostración. Por el teorema 3.3.8 b), $\alpha\le\beta^\alpha$; así que el conjunto $A:=\{\xi\in\boldsymbol{\mathcal{R}}\mid\alpha\le\beta^\xi\}$ es no vacío. Sea $\sigma=\text{mín}(A)$, entonces $\alpha\le\beta^\sigma$:

a) Si $\alpha=\beta^\sigma$, resulta que $\alpha=\beta^\sigma\cdot 1+0$, por lo que basta tomar $\gamma=\sigma$, $\delta=1$ y $\eta=0$, de donde $1\le\delta<\beta$ y $\eta<\beta^\gamma$.

b) Si $\alpha<\beta^\sigma$ y $\sigma\in\mathbf{Lim}$, en ese caso $\alpha\in\bigcup\{\beta^\xi\mid\xi<\sigma\}$, por lo que existe $\xi<\sigma$ tal que $\alpha<\beta^\xi$, de lo cual deducimos que $\xi\in A$ y $\xi<\sigma=\text{mín}(A)$. Por tanto, no puede ocurrir que $\alpha<\beta^\sigma$ y $\sigma\in\mathbf{Lim}$.

c) Si $\alpha<\beta^\sigma$ y $\sigma=\gamma+1$ para algún $\gamma\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$, por el lema de la división, existen $\delta,\eta\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ tales que $\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta+\eta$ y $\eta<\beta^\gamma$. Si $\delta=0$, entonces $\alpha=\beta^\gamma\cdot 0+\eta=\eta<\beta^\gamma$, en consecuencia, $\gamma\in A$ y $\gamma<\gamma+1=\sigma=\text{mín}(A)$ (contradicción); por tanto, $\delta\neq 0$, es decir, $1\le\delta$. Además, $\beta^\gamma\cdot\delta\le\beta^\gamma\cdot\delta+\eta=\alpha<\beta^\sigma=\beta^{\gamma+1}$, por lo cual $\beta^\gamma\cdot\delta<\beta^\gamma\beta$, y con ello $\delta<\beta$.

Ahora veamos la unicidad, supongamos que existen otros $\gamma',\delta',\eta'\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ tales que $\alpha=\beta^{\gamma'}\cdot\delta'+\eta'$, $1\le\delta'<\beta$ y $\eta'<\beta^{\gamma'}$. Si $\gamma\neq\gamma'$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\gamma<\gamma'$, por lo cual existe $\xi\in\boldsymbol{\mathcal{R}}\setminus\{0\}$ tal que $\gamma+\xi=\gamma'$. Luego:

$$\alpha=\beta^{\gamma'}\cdot\delta'+\eta'=\beta^{\gamma+\xi}\cdot\delta'+\eta'=\beta^\gamma(\beta^\xi\cdot\delta')+\eta',$$

de este modo,

$$\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta+\eta=\beta^\gamma\cdot(\beta^\xi\cdot\delta')+\eta'. \tag{3.1}$$

Por el lema de la división, existen $\delta'',\eta''\in\mathbf{Lim}$ tales que $\eta'=\beta^\gamma\cdot\delta''+\eta''$ y $\eta''<\beta^\gamma$. Luego, de la ecuación (3.1),

$$\beta^\gamma\cdot\delta+\eta=\beta^\gamma\cdot(\beta^\xi\cdot\delta')+(\beta^\gamma\cdot\delta''+\eta'')=\beta^\gamma\cdot(\beta^\xi\cdot\delta'+\delta'')+\eta''.$$

Tenemos pues, que $\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta+\eta=\beta^\gamma\cdot(\beta^\xi\cdot\delta'+\delta'')+\eta''$ y $\eta,\eta''<\beta^\gamma$; entonces, por el lema de la división, $\delta=\beta^\xi\cdot\delta'+\delta''$ y $\eta=\eta''$. Pero $1\le\xi$ y $1\le\delta'$, así que $\beta\le\beta^\xi\le\beta^\xi\cdot\delta'$, y como $\delta<\beta$, concluimos que $\delta<\beta<\beta^\xi\cdot\delta'\le\beta^\xi\cdot\delta'+\delta''$. Así pues, obtuvimos una contradicción. Por tanto $\gamma=\gamma'$, de modo que:

$$\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta+\eta=\alpha=\beta^\gamma\cdot\delta'+\eta'$$

donde $\eta,\eta'<\beta^\gamma$. En consecuencia, por el lema de la división, $\delta=\delta'$ y $\eta=\eta'$. †

Capítulo 4

Aritmética cardinal

En esta sección vamos a estudiar un tipo particular de ordinales a los que llamaremos *cardinales*. Tales ordinales van a servir para dar una definición del concepto de «número de elementos» o «cantidad de elementos» de un conjunto cualquiera (finito o infinito); esta propiedad se llama *cardinalidad*. Asimismo, definiremos una suma, un producto y una potenciación motivadas por el concepto de cardinalidad, además de definir sumas y productos infinitos. Para acabar ese capítulo estudiaremos una propiedad llamada *cofinalidad* que es parecida al concepto de *no ser acotado* de un conjunto.

4.1. Cardinalidad

Definición 4.1.1. Si A y B son clases se dice que «A es equipotente a B», denotado por $A \approx B$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$. También se dice que A y B son equipotentes.

Ejemplos.

1. Para cualquier clase A, se cumple que $A \approx A$. Si $A \approx B$ entonces $B \approx A$. Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

2. $\omega \approx \omega \setminus \{0\}$, pues la función $f : \omega \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$, definida por $f(n) = n+1$, es biyectiva.

3. Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\omega \approx \omega \setminus \{k \mid k < n\}$; notemos que $\{k \mid k < n\}$=n. Sea $f : \omega \longrightarrow \omega \setminus n$ definida como $f(k) = n+k$. puesto que $n \leq n+k$, se tiene que $n+k \in \omega \setminus n$. Si $k < l$, entonces $n+k < n+l$, o sea, $f(k) < f(l)$; por ende, f es inyectiva. Si $m \in \omega \setminus n$, entonces $n \leq m$, así que por el lema de la resta existe $k \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $n+k = m$, y así $f(k) = m$; además, $k \in \omega$ porque $k \leq n+k = m < \omega$.

4. Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \setminus \omega$, entonces $\alpha \approx S(\alpha)$. Tenemos que $\omega \subseteq \alpha$. Definimos $f : S(\alpha) \longrightarrow \alpha$ por
$$f(\xi) = \begin{cases} S(\xi) & si\ \xi < \omega \\ \xi & si\ \omega \leq \xi < \alpha \\ 0 & si\ \xi = \alpha \end{cases}$$
f es una función biyectiva, por lo cual $S(\alpha) \approx \alpha$ y, así, $\alpha \approx S(\alpha)$.

Lema 4.1.1. *Si A y B son clases tales que $A \approx B$, entonces para cualquier $a \in A$ y todo $b \in B$ existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a) = b$.*

Demostración. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como $A \approx B$ existe una función biyectiva $h : A \longrightarrow B$. Si $h(a) = b$ no hay nada que hacer. Si $h(a) \neq b$, existe un único $x \in A$ tal que $h(x) = b$, donde $x \neq a$. Pongamos $g := h \setminus \{(a, h(a)),\ (x, b)\}$; entonces g es una función inyectiva (por que $g \subseteq h$) que cumple que
$$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) \setminus \{a, x\} = A \setminus \{a, x\} \quad y \quad \mathrm{ran}(g) = \mathrm{ran}(f) \setminus \{h(a), b\} = B \setminus \{h(a), b\}.$$

Definamos ahora $f := g \cup \{(a, b),\ (x, h(a))\}$. f es una función porque $a, x \notin \mathrm{dom}(g)$; su dominio y rango son respectivamente $\mathrm{dom}(g) \cup \{a, x\} = A$ y $\mathrm{ran}(g) \cup \{b, h(a)\} = B$; f cumple también que $f(a) = b$ y $f(x) = h(a)$, de lo cual deducimos que f es inyectiva pues g lo es y también porque $b, h(a) \notin \mathrm{ran}(g)$ y $b \neq h(a)$. Así $f : A \longrightarrow B$ es una función biyectiva la cual satisface que $f(a) = b$. †

Teorema 4.1.2. *Sean A y B clases equipotentes. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_0, b_1, \ldots, b_n \in B$ (los a_i diferentes entre sí, de la misma forma que los b_i), entonces existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a_i) = b_i$ para cada $i \leq n$.*

Demostración. Procedemos por inducción matemática en n. En el caso $n = 0$, dados $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ existe tal función biyectiva por el lema anterior. Supongamos que este teorema es válido para $n \in \omega$, y sean $a_0, a_1, \ldots a_n, a_{n+1} \in A$ y $b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1} \in B$. Por hipótesis inductiva, existe una función biyectiva $g : A \longrightarrow B$ tal que $g(a_1) = b_1, \ldots, g(a_n) = b_n, g(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Si se diera el caso de que $g(a_0) = b_0$, no hay nada más que hacer. Si $g(a_0) \neq b_0$, existe un único $a \in A$ tal que $g(a) = b_0$, donde $a \neq a_0$, y también $a \notin \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. De la misma forma que la demostración del lema anterior, la función $f := (g \setminus \{(a, b_0),\ (a_0, g(a_0))\}) \cup \{(a, g(a_0)),\ (a_0, b_0)\}$ es biyectiva de A a B, y tal que $f(a_0) = b_0$. Además, $a_1, \ldots a_n, a_{n+1} \in A \setminus \{a, a_0\}$, por lo cual $f(a_1) = g(a_1) = b_1, \ldots, f(a_{n+1}) = g(a_{n+1}) = b_{n+1}$. †

Teorema 4.1.3. *Si $n \in \omega$, entonces para cada $m < n$, se tiene que $n \setminus \{m\} \approx \mathrm{máx}(n)$.*

Demostración. Para $n = 0$ se cumple claramente.

Para $n = 1$, si $m < 1$, como $1 = \{0\}$, entonces $m = 0$ y $\mathrm{máx}(n) = 0$, luego $n \setminus \{m\} = 0 \approx 0 = \mathrm{máx}(n)$.

Supongamos que $n \in \omega$ es tal que $\forall m < n : n \setminus \{m\} \approx \mathrm{máx}(n)$. Si $m < n+1$, entonces $m \leq n$, de los cual se tienen dos casos:

(i) Si $m = n$, resulta que $(n+1) \setminus \{m\} = (n \cup \{n\}) \setminus \{n\} = n = \mathrm{máx}(n+1)$.

(ii) Si $m < n$, por hipótesis de inducción, $n \setminus \{m\} \approx \mathrm{máx}(n)$. Sea $f : n \setminus \{m\} \longrightarrow \mathrm{máx}(n)$ una función biyectiva. Evidentemente, $n \notin n \setminus \{m\} = \mathrm{dom}(f)$, por lo cual $g := f \cup \{(n, \mathrm{máx}(n))\}$ es una función y, como $\mathrm{máx}(n) \notin \mathrm{máx}(n) = \mathrm{ran}(f)$, se sigue que g es inyectiva. Además,
$$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) \cup \{n\} = (n \setminus \{m\}) \cup \{n\} = (n \cup \{n\}) \setminus \{m\} = (n+1) \setminus \{m\}$$
y también
$$\mathrm{ran}(g) = \mathrm{ran}(f) \cup \{\mathrm{máx}(n)\} = \mathrm{máx}(n) \cup \{\mathrm{máx}(n)\} = S(\mathrm{máx}(n)) = n;$$
de modo que $g : (n+1) \setminus \{m\} \longrightarrow n$ es una función biyectiva y con ello
$$(n+1) \setminus \{m\} \approx n = \mathrm{máx}(n+1).$$

†

Definición 4.1.2. α es un *número cardinal* (o solamente *cardinal*) si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y ningún ordinal menor que α es equipotente con α, dicho de otro modo, $\forall \gamma < \alpha : \gamma \not\approx \alpha$. Denotamos como $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ a la clase de los números cardinales.

Ejemplo. Si $\alpha \geq \omega$, entonces $S(\alpha)$ no es un cardinal. Como vimos en los primeros ejemplos de equipotencia (Ejemplo 4), $\alpha \approx S(\alpha)$.

Teorema 4.1.4. *ω y todo elemento de ω es un cardinal, o sea, $\omega+1 \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}$.*

Demostración. Sea $\kappa < \omega+1$. Supongamos que existe $n < \kappa$ tal que $n \approx \kappa$, entonces $n < \omega$. Como $n \subseteq \kappa$, por el teorema 4.1.2, existe una función biyectiva $f : n \longrightarrow \kappa$ tal que $f(i) = i$ para cada $i < n$.

No obstante, $n \in \kappa$, así que existe un único $i \in n$ tal que $f(i) = n$, luego $n = f(i) = i < n$. Por lo tanto, $n \not\approx \kappa$.

Tenemos pues, que $\forall n < \kappa : n \not\approx \kappa$, es decir, κ es un cardinal. †

Teorema 4.1.5. *Para todo conjunto A existe un único cardinal λ tal que $A \approx \lambda$.*

Demostración. Sea A un conjunto cualquiera. Por el teorema de Zermelo, existen un ordinal α y una función biyectiva $f : \alpha \longrightarrow A$, esto es, existe un ordinal α tal que $\alpha \approx A$. Sea $\kappa := \text{mín}\{\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \beta \approx A\}$, entonces $\kappa \approx A$. Si existiera $\gamma < \kappa$ tal que $\gamma \approx \kappa$, como $\kappa \approx A$, se tendría $\gamma \approx A$, por lo cual $\gamma \in \{\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \beta \approx A\}$ y $\gamma < \kappa = \text{mín}\{\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \beta \approx A\}$, lo que no es posible. Por ende, κ es un cardinal. Si λ y μ son cardinales tales que $A \approx \lambda$ y $A \approx \mu$, entonces $\lambda \approx \mu$, de lo cual se sigue que $\lambda = \mu$. Por tanto, κ es el único cardinal equipotente con A. †

Definición 4.1.3. Para cualquier conjunto A, el único cardinal que es equipotente con A se llama la *cardinalidad* de A y se denota como $|A|$.

Teorema 4.1.6. *a)* $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : |\alpha| \leq \alpha$.

b) $\forall \kappa, \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}} : \kappa \approx \lambda \Longrightarrow \kappa = \lambda$.

c) $\forall \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}} : |\lambda| = \lambda$.

Demostración. Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\alpha < |\alpha|$, entonces $\alpha \not\approx |\alpha|$ pues $|\alpha| \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, lo que no puede ocurrir por definición de cardinalidad, luego $|\alpha| \leq \alpha$.

Si κ y λ son cardinales tales que $\kappa \approx \lambda$, usamos directamente la definición de cardinal: si $\kappa < \lambda$, resulta que $\kappa \not\approx \lambda$; y si $\lambda < \kappa$, en ese caso $\lambda \not\approx \kappa$. Por tanto, $\kappa = \lambda$.

Si $\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, entonces $\lambda, |\lambda| \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ y $\lambda \approx |\lambda|$, luego, por el inciso b), $\lambda = |\lambda|$. †

Corolario 4.1.7. *a)* $\forall A, B \in \boldsymbol{\mathcal{U}} : A \approx B \Longleftrightarrow |A| = |B|$.

b) $\forall A \in \boldsymbol{\mathcal{U}} : \big||A|\big| = |A|$.

Demostración. Sean $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ tales que $A \approx B$, entonces $|A| \approx A \approx B \approx |B|$, de lo cual $|A| \approx |B|$ y, así $|A| = |B|$.

Si A es un conjunto, entonces $|A| \approx \big||A|\big|$ y, además, $|A|$ y $\big||A|\big|$ son cardinales, en consecuencia, $\big||A|\big| = |A|$. †

Teorema 4.1.8. *Si B es un conjunto y $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.*

Demostración. Sea $f : B \longrightarrow |B|$ una función biyectiva. La restricción $f_{|A} : A \longrightarrow C$, donde $C := \text{ran}(f_{|A})$, es una función biyectiva. Sea $g : (C, <) \longrightarrow (\text{tpo}(C), <)$ el isomorfismo de orden de $(C, <)$, entonces $g^{-1} : \text{tpo}(C) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ es una función $<$-$<$ preservadora de orden y $\text{tpo}(C)$ es una $<$-sección de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$. Luego, por el teorema 2.3.1, $\forall \gamma \in \text{tpo}(C) : \gamma \leq g^{-1}(\gamma)$. Como $g : C \longrightarrow \text{tpo}(C)$ es biyectiva, la desigualdad anterior implica que $\forall \xi \in C : g(\xi) \leq g^{-1}(g(\xi)) = \xi$; además, $C = \text{ran}(f_{|A}) \subseteq |B|$, por consiguiente, $\forall \xi \in C : g(\xi) \leq \xi < |B|$; en consecuencia, $\text{tpo}(C) = \text{ran}(g) \subseteq |B|$, es decir, $\text{tpo}(C) \leq |B|$. Ahora bien, $g : C \longrightarrow \text{tpo}(C)$ y $f_{|A} : A \longrightarrow C$ son funciones biyectivas, por ende, $|A| = |C| = |\,\text{tpo}(C)| \leq \text{tpo}(C) \leq |B|$. †

Corolario 4.1.9. *Sean A y B conjuntos.*

a) Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$.

b) *Si existen $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ inyectivas, entonces $|A| = |B|$.*

c) *(Cantor-Bernstein-Schröder) Si existen $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ tales que $|A| = |B_1|$ y $|B| = |A_1|$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. a) Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, entonces $f : A \longrightarrow \operatorname{ran}(f)$ es biyectiva y $\operatorname{ran}(f) \subseteq B$, por lo cual $|A| = |\operatorname{ran}(f)| \leq |B|$.

b) Por el inciso a), si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ inyectivas, entonces $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ y con ello $|A| = |B|$.

c) Como $A_1 \subseteq A$, se sigue que $|A_1| \leq |A|$ y, así, $|B| = |A_1| \leq |A|$. Como $B_1 \subseteq B$, entonces $|B_1| \leq |B|$, luego $|A| = |B_1| \leq |B|$. Por tanto, $|A| = |B|$. †

Teorema 4.1.10. *Si f es una función y es un conjunto, resulta que $|\operatorname{ran}(f)| \leq |\operatorname{dom}(f)|$.*

Demostración. Para cada $y \in \operatorname{ran}(f)$, sea $A_y := \{x \in \operatorname{dom}(f) \mid f(x) = y\} = f^{-1}[\{y\}]$. Por el axioma de elección, existe una función $g : \operatorname{ran}(f) \longrightarrow \bigcup\{A_y \mid y \in \operatorname{ran}(f)\}$ tal que para todo $z \in \operatorname{ran}(f)$, tenemos que $g(z) \in A_z$. Si $w, z \in \operatorname{ran}(g)$ tales que $w \neq z$, entonces $A_w \cap A_z = \emptyset$, por lo cual $g(w) \neq g(z)$, pues $g(z) \in A_z$ y $g(w) \in A_w$. Por tanto, $g : \operatorname{ran}(f) \longrightarrow \bigcup\{A_y \mid y \in \operatorname{ran}(f)\}$ es una función inyectiva, así que, por el corolario anterior, $|\operatorname{ran}(f)| \leq |\bigcup\{A_y \mid y \in \operatorname{ran}(f)\}|$; y como $A_y \subseteq \operatorname{dom}(f)$ para todo $y \in \operatorname{ran}(f)$, se sigue que $\bigcup\{A_y \mid y \in \operatorname{ran}(f)\} \subseteq \operatorname{dom}(f)$; en consecuencia,

$$|\operatorname{ran}(f)| \leq \left|\bigcup\{A_y \mid y \in \operatorname{ran}(f)\}\right| \leq |\operatorname{dom}(f)|.$$

†

Teorema 4.1.11 (Cantor)**.** *Para cualquier conjunto A, se cumple que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración. La función $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, definida como $f(a) = \{a\}$, es inyectiva ($\{a\} = \{b\}$ si y solo si $a = b$); por tanto, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Si $|A| = |\mathcal{P}(A)|$ existe una función biyectiva $h : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Claramente, $\{a \in A \mid a \notin h(a)\} \in \mathcal{P}(A)$, así que existe $x \in A$ tal que $h(x) = \{a \in A \mid a \notin h(a)\}$, luego entonces, $x \in h(x)$ si y solo si $x \notin h(x)$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. †

Corolario 4.1.12. *$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ no es un conjunto.*

Demostración. Si $\boldsymbol{\mathcal{C}} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, entonces $\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, luego $\mathcal{P}\big(\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, por consiguiente, $\big|\mathcal{P}\big(\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big)\big| \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, lo cual implica que $\big|\mathcal{P}\big(\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big)\big| \subseteq \bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}$ y, en consecuencia, $\big|\mathcal{P}\big(\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big)\big| = \big|\big|\mathcal{P}\big(\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big)\big|\big| \leq \big|\bigcup \boldsymbol{\mathcal{C}}\big|$, pero esto contradice el teorema anterior. Por tanto $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ no es un conjunto. †

Que $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ no sea un conjunto significa que $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ no está acotada en $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, es decir, $\forall \alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : \exists \kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} : \alpha < \kappa$. Si existiera $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\forall \kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} : \kappa \leq \alpha$, se tendría que $\boldsymbol{\mathcal{C}} \subseteq \alpha + 1$ y, por lo cual, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ sería un conjunto.

Definición 4.1.4. Si A es un conjunto, diremos que:

1) A es *finito* si $|A| < \omega$;

2) A es *infinito* si $|A| \geq \omega$;

3) A es *numerable* si $|A| \leq \omega$.

4) A es *no numerable* si $|A| > \omega$.

Teorema 4.1.13. *Si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$ tal que $|A| = |B|$, entonces $A = B$.*

Demostración. Por el teorema 4.1.2, existe una función biyectiva $f : B \longrightarrow A$ tal que $\forall b \in B : f(b) = b$, porque $B \subseteq A$ y B es finito. Si $x \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $f(b) = x$, luego $x = f(b) = b \in B$. Por tanto, $A \subseteq B$, y por hipótesis $B \subseteq A$, en consecuencia, $A = B$. †

Teorema 4.1.14. *Si A es un conjunto infinito, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $B \approx A$ y $B \neq A$.*

Demostración. Bastará probar el teorema para cualquier cardinal κ infinito. Sea κ un cardinal con $\kappa \geq \omega$. Definimos $f : \kappa \longrightarrow \kappa$, como:

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi+1 & si\ \xi < \omega \\ \xi & si\ \omega \leq \xi < \kappa \end{cases}$$

Vamos a ver que $f : \kappa \longrightarrow \kappa \setminus \{0\}$ es biyectiva.

Sean $\xi, \zeta \in \kappa$ con $\xi \neq \zeta$. Si $\xi, \zeta < \omega$, entonces $f(\xi) = \xi+1 \neq \zeta+1 = f(\zeta)$. Si $\xi < \omega$ y $\omega \leq \zeta < \kappa$, resulta que $f(\xi) = \xi+1 < \omega$ y $\omega \leq \zeta = f(\zeta)$, y así $f(\xi) \neq f(\zeta)$. Si $\zeta < \omega$ y $\omega \leq \xi < \kappa$, en ese caso $f(\zeta) = \zeta+1 < \omega$ y $\omega \leq \xi = f(\xi)$, y así $f(\zeta) \neq f(\xi)$. Si $\omega \leq \xi, \zeta < \kappa$, pues $f(\xi) = \xi \neq \zeta = f(\zeta)$. Por tanto, f es inyectiva.

Si $\alpha \in \kappa \setminus \{0\}$, tenemos dos casos: $0 < \alpha < \omega$ o $\omega \leq \alpha < \kappa$. Si $0 < \alpha < \omega$, tendremos que existe $\xi < \omega$ tal que $\alpha = \xi+1$ y, en consecuencia, $f(\xi) = \xi+1 = \alpha$. Cuando $\omega \leq \alpha < \kappa$, claramente $f(\alpha) = \alpha$. Por lo tanto, $f : \kappa \longrightarrow \kappa \setminus \{0\}$ es sobreyectiva.

Concluimos que $f : \kappa \longrightarrow \kappa \setminus \{0\}$ es biyectiva, por lo cual, $\kappa \setminus \{0\} \approx \kappa$ y $\kappa \setminus \{0\} \subsetneq \kappa$.

Ahora, si A es un conjunto infinito, por lo que acabamos de probar, existe un $B \subsetneq |A|$ tal que $B \approx |A|$. Si $h : |A| \longrightarrow A$ es una función biyectiva, entonces $h_{|B} : B \longrightarrow \operatorname{ran}(h_{|B})$ es igualmente biyectiva y $\operatorname{ran}(h_{|B}) \subsetneq A$, por ende, $B \approx \operatorname{ran}(h_{|B})$, y como $B \approx |A| \approx A$, se sigue que $\operatorname{ran}(h_{|B}) \approx A$. †

Teorema 4.1.15. *a) Todo cardinal infinito es un ordinal límite.*

b) Si $C \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}$ y C es un conjunto, entonces $\sup(C) = \bigcup(C) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Demostración. a) Si $\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$ y $\xi < \lambda$, entonces $S(\xi) \leq \lambda$. Si ξ es finito, claramente $S(\xi) < \lambda$. Si $\xi \geq \omega$, como vimos, $S(\xi)$ no es un cardinal porque $S(\xi) \approx \xi$, de lo cual se sigue que $S(\xi) < \lambda$. Por tanto, λ es un ordinal límite.

b) Por el teorema 2.2.3 c), $\sup(C)$ es un número ordinal. Supongamos que existe $\gamma < \sup(C)$ tal que $\gamma \approx \sup(C)$, es decir, $|\gamma| = |\sup(C)|$. De $\gamma < \sup(C)$ se deduce que hay un $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ tal que $\gamma < \kappa \leq \sup(C)$ y, como $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, entonces $|\gamma| < |\kappa| \leq |\sup(C)| = |\gamma|$, lo cual no es posible. En conclusión, $\sup(C)$ es un cardinal. †

4.2. Suma, producto y potencia

Teorema 4.2.1. *Para cualesquiera conjuntos A, A', B y B' tales que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$, se cumple:*

a) si $A \cap B = \emptyset$ y $A' \cap B' = \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A' \cup B'|$;

b) $|A \times B| = |A' \times B'|$;

c) $|{}^{A}B| = |{}^{A'}B'|$.

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$ funciones biyectivas.

a) Supongamos que $A \cap B = \emptyset$ y $A' \cap B' = \emptyset$. Veamos que $f \cup g$ es una función biyectiva.

Es claro que $\mathrm{dom}(f \cup g) = \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g) = A \cup B$ y $\mathrm{ran}(f \cup g) = \mathrm{ran}(f) \cup \mathrm{ran}(g) = A' \cup B'$. Además, $f \cup g$ es una función porque $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \emptyset$; y por la misma razón, para cualquier $x \in \mathrm{dom}(f \cup g)$: si $x \in \mathrm{dom}(f)$, $(f \cup g)(x) = f(x)$; y si $x \in \mathrm{dom}(g)$, $(f \cup g)(x) = g(x)$.

Si $x, y \in \mathrm{dom}(f \cup g)$ cumplen que $(f \cup g)(x) = (f \cup g)(y)$, entonces $(f \cup g)(x), (f \cup g)(y) \in \mathrm{ran}(f)$ o $(f \cup g)(x), (f \cup g)(y) \in \mathrm{ran}(g)$ pues $\mathrm{ran}(f) \cap \mathrm{ran}(g) = \emptyset$, lo cual implica que $x = y$ porque f g son inyectivas. Por tanto, $f \cup g$ es inyectiva.

Si $y \in \mathrm{ran}(f \cup g)$ entonces $y \in \mathrm{ran}(f)$ o $y \in \mathrm{ran}(g)$: si $y \in \mathrm{ran}(f)$, existe $x \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f(x) = y$, de aquí que $x \in \mathrm{dom}(f \cup g)$ y $(f \cup g)(x) = f(x) = y$; similarmente, si $y \in \mathrm{ran}(g)$, existe $x \in \mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f \cup g)$ tal que $(f \cup g)(x) = g(x) = y$. Por tanto, $f \cup g$ es sobreyectiva.

Concluimos que $f \cup g : A \cup B \longrightarrow A' \cup B'$ es biyectiva, luego $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

b) Definamos $H : A \times B \longrightarrow A' \times B'$, como $H(a, b) = (f(a), g(b))$ para cualesquiera $(a, b) \in A \times B$. Si $H(a_1, b_1) = H(a_2, b_2)$, entonces $(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$, luego $f(a_1) = f(a_2)$ y $g(b_1) = g(b_2)$, de lo cual $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ (por que f y g son inyectivas), y con ello $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Si $(c, d) \in A' \times B'$, se cumple que $c \in A'$ y $d \in B'$, luego $f^{-1}(c) \in A$ y $g^{-1}(d) \in B$, en consecuencia, $(f^{-1}(c), g^{-1}(d)) \in A \times B$ y $H(f^{-1}(c), g^{-1}(d)) = (f(f^{-1}(c)), g(g^{-1}(d))) = (c, d)$. Por tanto, $H : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ es biyectiva, y por ello $|A \times B| = |A' \times B'|$.

c) Definimos $G : {}^{A}B \longrightarrow {}^{A'}B'$ por $G(x) = g \circ x \circ f^{-1}$ para todo $x \in {}^{A}B$. Si $G(x) = G(y)$, entonces $g \circ x \circ f^{-1} = g \circ y \circ f^{-1}$, luego $g^{-1} \circ g \circ x \circ f^{-1} = g^{-1} \circ g \circ y \circ f^{-1}$, lo cual nos lleva a $x \circ f^{-1} = y \circ f^{-1}$, en consecuencia, $x \circ f^{-1} \circ f = y \circ f^{-1} \circ f$ y, así, $x = y$; por tanto, G es inyectiva. Si $z \in {}^{A'}B'$, entonces $z \circ f : A \longrightarrow B'$, así que $g^{-1} \circ z \circ f : A \longrightarrow B$, y por lo cual $g^{-1} \circ z \circ f \in {}^{A}B$ y $G(g^{-1} \circ z \circ f) = g \circ (g^{-1} \circ z \circ f) \circ f^{-1} = (g \circ g^{-1}) \circ z \circ (f \circ f^{-1}) = z$; por tanto, G es sobreyectiva. Por ende, $G : {}^{A}B \longrightarrow {}^{A'}B'$ es biyectiva y, en conclusión, $|{}^{A}B| = |{}^{A'}B'|$.

†

Definición 4.2.1. Para cualesquiera cardinales κ y λ, se define la suma, producto y potenciación de κ y λ (respectivamente) como:

$$\kappa + \lambda := |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|,$$
$$\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|,$$
$$\kappa^{\lambda} := |{}^{\lambda}\kappa|.$$

Teorema 4.2.2. *Sea $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$:*

a) $\kappa + 0 = \kappa$*;*

b) $\kappa \cdot 0 = 0$ *y* $\kappa \cdot 1 = \kappa$*;*

c) $\kappa^1 = \kappa$ *y* $1^{\kappa} = 1$*;*

d) $\kappa^0 = 1$*, y si* $\kappa \neq 0$*,* $0^{\kappa} = 0$*.*

e) $2^{\kappa} = |\mathcal{P}(\kappa)|$

Demostración. a) $\kappa + 0 = |(\kappa \times \{0\}) \cup (0 \times \{1\})| = |(\kappa \times \{0\}) \cup \emptyset| = |\kappa \times \{0\}| = \kappa$.

b) $\kappa \cdot 0 = |\kappa \times 0| = |\kappa \times \emptyset| = |\emptyset| = 0$ y $\kappa \cdot 1 = |\kappa \times 1| = |\kappa \times \{0\}| = \kappa$;

c) $\kappa^1 = |{}^1\kappa| = |{}^{\{0\}}\kappa| = |\{f \mid f : \{0\} \longrightarrow \kappa \text{ es una función}\}| = |\{\{(0, \xi)\} \mid \xi \in \kappa\}| = \kappa$;
$1^\kappa = |{}^\kappa\{0\}| = |\{\{(\xi, 0) \mid \xi \in \kappa\}\}| = 1$.

d) $\kappa^0 = |{}^\emptyset\kappa| = |\{f \mid f \text{ es una función, } \mathrm{dom}(f) = \emptyset \text{ y } \mathrm{ran}(f) \subseteq \kappa\}| = |\{\emptyset\}| = 1$.
Si $\kappa \neq 0$, $0^\kappa = |{}^\kappa 0| = |\{f \mid f \text{ es una función, } \mathrm{dom}(f) = \kappa \text{ y } \mathrm{ran}(f) \subseteq 0\}| = |\emptyset| = 0$.

e) Definamos $\Psi : {}^\kappa 2 \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ como $\Psi(f) := \{x \in \kappa \mid f(x) = 1\}$ para cada $f \in {}^\kappa 2$. Ψ es biyectiva, lo cual implica que $2^\kappa = |{}^\kappa 2| = |\mathcal{P}(\kappa)|$. †

Observación. De la definición de potenciación se sigue que

$$0^0 = |{}^\emptyset\emptyset| = |\{f \mid f \textit{ es una función con } \mathrm{dom}(f) = \emptyset \textit{ y } \mathrm{ran}(f) = \emptyset\}| = |\{\emptyset\}| = 1.$$

Obtenemos el mismo resultado con la potenciación ordinal.

Teorema 4.2.3. *Para cualesquiera κ, λ, $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$:*

a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$;

b) $\kappa + 0 = \kappa$;

c) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$.

Demostración. a) $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| = |(\lambda \times \{1\}) \cup (\kappa \times \{0\})| = \lambda + \kappa$.

b) $\kappa + 0 = |(\kappa \times \{0\}) \cup (0 \times \{1\})| = |(\kappa \times \{0\}) \cup \emptyset| = |\kappa \times \{0\}| = \kappa$.

c) Sean $K := \kappa \times \{0\}$, $L := \lambda \times \{1\}$ y $M := \mu \times \{2\}$. Entonces, $\kappa = |K|$, $\lambda = |L|$ y $\mu = |M|$, y también $K \cap L = \emptyset$ y $L \cap M = \emptyset$. Luego $\kappa + \lambda = |K \cup L|$ y $\lambda + \mu = |L \cup M|$. Además, $(K \cup L) \cap M = \emptyset$ y $K \cap (L \cup M) = \emptyset$, por lo cual $(\kappa + \lambda) + \mu = |(K \cup L) \cup M| = |K \cup (L \cup M)| = \kappa + (\lambda + \mu)$. †

Teorema 4.2.4. *Para cualesquiera κ, λ, $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$:*

a) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$,

b) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$,

c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \mu)$.

Demostración. a) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = |(\kappa \cdot \lambda) \times \mu| = |(\kappa \times \lambda) \times \mu| = |\kappa \times (\lambda \times \mu)| = |\kappa \times (\lambda \cdot \mu)| = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.

b) $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda| = |\lambda \times \kappa| = \lambda \cdot \kappa$.

c) Denotemos $K := \kappa \times \{1\}$, $L := \lambda \times \{1\}$ y $M := \mu \times \{2\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (\lambda + \mu) = |\kappa \times (\lambda + \mu)| = |K \times (L \cup M)| = |(K \times L) \cup (K \times M)| \\ = |K \times L| + |K \times M| = |\kappa \times \lambda| + |\kappa \times \mu| = (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \mu). \end{aligned}$$ †

Teorema 4.2.5. *Si κ, λ, $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, entonces:*

a) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$;

b) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$;

c) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

Demostración. a) Pongamos $L := \lambda\times\{0\}$ y $M := \mu\times\{1\}$; entonces $\lambda = |L|$, $\mu = |M|$ y $L\cap M = \emptyset$. Se cumple:

$$\kappa^{\lambda+\mu} = |{}^{\lambda+\mu}\kappa| = |{}^{L\cup M}\kappa|$$
$$\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu} = |{}^{\lambda}\kappa\times{}^{\mu}\kappa| = |{}^{L}\kappa\times{}^{M}\kappa|.$$

La función $\Phi : {}^{L\cup M}\kappa \longrightarrow {}^{L}\kappa\times{}^{M}\kappa$, definida como $\Psi(f) := (f_{|L}, f_{|M})$, es biyectiva; en consecuencia, $|{}^{L\cup M}\kappa| = |{}^{L}\kappa\times{}^{M}\kappa|$ y, por lo tanto, $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$.

b) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = |{}^{\mu}(\kappa^{\lambda})| = |{}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)|$ y $\kappa^{\lambda\cdot\mu} = |{}^{\lambda\cdot\mu}\kappa| = |{}^{\lambda\times\mu}\kappa|$. Además, para toda $f\in{}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)$: si $x\in\mu$, entonces $f(x)\in{}^{\lambda}\kappa$, luego $(f(x))(y)\in\kappa$ siempre que $y\in\lambda$.

Definamos $\Psi : {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa) \longrightarrow {}^{\lambda\times\mu}\kappa$ de la siguiente manera: si $f\in{}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)$, entonces $\Psi(f) : \lambda\times\mu \longrightarrow \kappa$ tal que $\Psi(f)(y, x) := (f(x))(y)$ para cualesquiera $(y, x)\in\lambda\times\mu$. La función Ψ es biyectiva, de modo que $|{}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)| = |{}^{\lambda\times\mu}\kappa|$, y con ello $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

c) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu} = |{}^{\mu}(\kappa\cdot\lambda)| = |{}^{\mu}(\kappa\times\lambda)|$ y $\kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu} = |\kappa^{\mu}\times\lambda^{\mu}| = |{}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda|$.

Definamos $\Upsilon : {}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda \longrightarrow {}^{\mu}(\kappa\times\lambda)$ por $\Upsilon(f, g)(x) := \big(f(x), f(x)\big)$ para cada $(f, g)\in{}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda$. Esta función es biyectiva, en consecuencia, $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu} = |{}^{\mu}(\kappa\times\lambda)| = |{}^{\mu}\kappa\times{}^{\mu}\lambda| = \kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$. †

Teorema 4.2.6. *Si $\kappa, \lambda, \mu, \nu\in\boldsymbol{\mathcal{C}}$ son tales que $\kappa\le\mu$ y $\lambda\le\nu$, entonces:*

a) $\kappa+\lambda\le\mu+\nu$;

b) $\kappa\cdot\lambda\le\mu\cdot\nu$;

c) si $\lambda\ne 0$, entonces $\kappa^{\lambda}\le\mu^{\nu}$.

Demostración. a) Como $\kappa\le\mu$ y $\lambda\le\nu$, entonces $\kappa\subseteq\mu$ y $\lambda\subseteq\nu$, luego $\kappa\times\{0\}\subseteq\mu\times\{0\}$ y $\lambda\times\{1\}\subseteq\nu\times\{1\}$, por consiguiente, $(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})\subseteq(\mu\times\{0\})\cup(\nu\times\{1\})$, así que

$$\kappa+\lambda = \big|(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})\big| \le \big|(\mu\times\{0\})\cup(\nu\times\{1\})\big| = \mu+\nu.$$

b) Como $\kappa\subseteq\mu$ y $\lambda\subseteq\nu$, entonces $\kappa\times\lambda\subseteq\mu\times\nu$, por lo cual $\kappa\cdot\lambda = |\kappa\times\lambda| \le |\mu\times\nu| = \mu\cdot\nu$.

c) Si $\kappa = 0$, entonces $\kappa^{\lambda} = 0\le\mu^{\nu}$. Supongamos que $\kappa\ne 0$; por esto $0\in\kappa$. Definamos $\Phi : {}^{\lambda}\kappa \longrightarrow {}^{\nu}\mu$ de la siguiente forma: para toda $f\in{}^{\lambda}\kappa$, $\Phi(f) := f\cup\{(\xi, 0)\mid \xi\in\nu\setminus\lambda\}$; Φ es inyectiva, por lo cual $\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa| \le |{}^{\nu}\mu| = \mu^{\nu}$. †

Teorema 4.2.7. *En el conjunto de los números naturales, la suma, el producto y la potenciación ordinal (definidas en el capítulo 3) es igual a las correspondientes operaciones cardinales definidas en esta sección.*

Demostración. Primero probemos que las sumas son iguales. Denotemos «$+_{\mathcal{R}}$» a la suma ordinal, y como «$+_{c}$» a la suma cardinal. Vamos a probar que $\forall n, m\in\omega : n+_{\mathcal{R}}m = n+_{c}m$. Sea $n\in\omega$. Por los teoremas 3.1.2 y 4.2.2, $n+_{\mathcal{R}}0 = 0 = n+_{c}0$. Supongamos que $n+_{\mathcal{R}}m = n+_{c}m$, entonces

$$\begin{aligned} n+_{c}S(m) &= |(n\times\{0\})\cup(S(m)\times\{1\})| = |(n\times\{0\}\cup(m\cup\{m\})\times\{1\})| \\ &= |(n\times\{0\})\cup(m\times\{1\})\cup(\{m\}\times\{1\})| = |((n+_{c}m)\times\{0\})\cup\{(m, 1)\}| \\ &= |((n+_{c}m)\times\{0\})\cup\{n+_{c}m\}| = |(n+_{c}m)\cup\{n+_{c}m\}| \\ &= |S(n+_{c}m)| = |S(n+_{\mathcal{R}}m)| = S(n+_{\mathcal{R}}m) = n+_{\mathcal{R}}S(m). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, $\forall n\in\omega : \forall m\in\omega : n+_{\mathcal{R}}m = n+_{c}m$.

Denotemos «$\cdot_c$» a la suma cardinal y «$\cdot_{\mathcal{R}}$» a la suma ordinal. Es claro que $n\cdot_c 0 = 0 = n\cdot_{\mathcal{R}} 0$ para cada $n \in \omega$. Supongamos que $n, m \in \omega$ cumplen $n\cdot_c m = n\cdot_{\mathcal{R}} m$, luego (ya vimos que $+_{\mathcal{R}} = +_c$ en ω, con ello $S(m) = m+_c 1 = m+_{\mathcal{R}} 1$):

$$\begin{aligned} n\cdot_c S(m) &= |n\times S(m)| = |n\times(m\cup\{m\})| = |(n\times m)\cup(n\times\{m\})| \\ &= \big|\big((n\times m)\times\{0\}\big)\cup\big(n\times\{1\}\big)\big| = \big|\big((n\cdot_c m)\times\{0\}\big)\cup\big(n\times\{1\}\big)\big| \\ &= (n\cdot_c m)+_c n = (n\cdot_{\mathcal{R}} m)+_c n = (n\cdot_{\mathcal{R}} m)+_{\mathcal{R}} n = n\cdot_{\mathcal{R}}(m+_{\mathcal{R}} 1) = n\cdot_{\mathcal{R}} S(m). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, $\forall n\in\omega : \forall m\in\omega : n\cdot_c m = n\cdot_{\mathcal{R}} m$

Para la potencia, denotamos n^m a la potencia cardinal. Por el teorema 4.2.2 c) y d), $n^0 = 1$ y $n^1 = n$, lo cual coincide con la potencia ordinal. Supongamos que para $n, m \in \omega$ la potencia ordinal y cardinal coincide: por el teorema 4.2.5 a), $n^{m+1} = n^m\cdot n^1 = n^m\cdot n$. †

Veremos más adelante que para ordinales y cardinales infinitos estas operaciones no coinciden. En este capítulo, vamos a seguir usando los símbolos $+$ y $\cdot$ para la suma y producto cardinal, a menos que se diga lo contrario. Para acabar esta sección, veamos un resultado acerca de la finitud de ciertos conjuntos, el cual es consecuencia del teorema anterior.

Corolario 4.2.8. *Si A y B son conjuntos finitos, entonces los siguientes conjuntos son finitos: $A\cup B$, $A\times B$, $\mathcal{P}(A)$ y ${}^A B$; y si además para cada $a\in A$, a es finito, entonces $\bigcup A$ es finito.*

4.3. Suma, producto y potencia de cardinales infinitos

Como vimos en la sección anterior, la suma, producto y potencia cumplen muchas propiedades ya conocidas sobre los números a los que se está acostumbrado a trabajar, como los números reales, complejos, racionales etc. Sin embargo, los números cardinales contienen un tipo adicional de elementos, a diferencia de los naturales, que son los cardinales infinitos. Nos interesa saber que resultados se obtienen al operar con estos números.

Lema 4.3.1. *Para cualesquiera (α, β), $(\gamma, \delta) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}\times\boldsymbol{\mathcal{R}}$ definamos $(\alpha, \beta) \ll (\gamma, \delta)$ si y solo si*

(i) $\big(\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}\big)$ *o*

(ii) $\big(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha < \gamma\big)$ *o*

(iii) $\big(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta\big)$.

Entonces, $\ll$ es un buen orden en $\boldsymbol{\mathcal{R}}\times\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Demostración. La relación $\ll$ conecta a $\boldsymbol{\mathcal{R}}\times\boldsymbol{\mathcal{R}}$ porque la relación $<$ conecta a $\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Sea A una subclase no vacía de $\boldsymbol{\mathcal{R}}\times\boldsymbol{\mathcal{R}}$. Claramente, $\forall\alpha, \beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}} : \max\{\alpha, \beta\} = \alpha\cup\beta$. Tomemos $\eta := \min\{\max\{\alpha, \beta\} \mid (\alpha, \beta)\in A\}$; claramente, $\forall(\alpha, \beta)\in A : \eta \le \max\{\alpha, \beta\}$. Ahora bien, pongamos

$$B' := \{(\alpha, \beta)\in A \mid \max\{\alpha, \beta\} = \eta\},$$

y sean

$$\alpha_0 := \min\{\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \exists\beta : (\alpha, \beta)\in B'\} \qquad \text{y} \qquad \beta_0 := \min\{\beta\in\boldsymbol{\mathcal{R}} \mid (\alpha_0, \beta)\in B'\}.$$

Observar que $(\alpha_0, \beta_0)\in B'$, en consecuencia, $\max\{\alpha_0, \beta_0\} = \eta$. Si $(\gamma, \delta)\in A$, se cumple que $\max\{\alpha_0, \beta_0\} = \eta \le \max\{\alpha, \beta\}$:

1) Si $\max\{\alpha_0, \beta_0\} < \max\{\alpha, \beta\}$, resulta que $(\alpha_0, \beta_0) \ll (\alpha, \beta)$.
2) Si $\max\{\alpha_0, \beta_0\} = \max\{\alpha, \beta\}$, entonces $(\alpha, \beta)\in B'$, de aquí que $\alpha_0 \le \alpha$:
   i) Si $\alpha_0 < \alpha$, en tal caso $(\alpha_0, \beta_0) \ll (\alpha, \beta)$.
   ii) Si $\alpha_0 = \alpha$, tendremos que $\beta_0 \le \beta$ por definición de β_0:
      — si $\beta_0 < \beta$, en ese caso $(\alpha_0, \beta_0) \ll (\alpha, \beta)$;

— si $\beta_0 = \beta$, se satisface que $(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta)$.

Concluimos que (α_0, β_0) es el $\ll$-primer elemento de A.

Por lo tanto, $\ll$ es un buen orden en $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$. †

Teorema 4.3.2 (Teorema fundamental de los números cardinales)**.** *Todo cardinal infinito κ cumple que $\kappa\cdot\kappa = \kappa$.*

Demostración. Por el teorema 4.2.6 b), $\forall\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega : \kappa \leq \kappa\cdot\kappa = |\kappa\times\kappa|$.

Supongamos que $\kappa < |\kappa\times\kappa|$ para algún $\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega$. Tomemos $\lambda := \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega \mid \kappa < |\kappa\times\kappa|\}$.

Por el lema anterior, la relación $\ll$ es un buen orden en $\lambda\times\lambda$. Sea $f : (\lambda\times\lambda, \ll) \longrightarrow (\delta, <)$ el isomorfismo de orden de $(\lambda\times\lambda, \ll)$ con $\delta = \text{tpo}(\lambda\times\lambda, \ll)$. Vamos a probar que $\delta = \text{ran}(f) \subseteq \lambda$.

Sea $x := (\alpha, \beta) \in \lambda\times\lambda$. Dado que f es un $\ll$-$<$ isomorfismo, entonces

$$\{f(y) \mid y \in \widehat{x}\} = \{f(y) \mid y \ll x\} = \{f(y) \mid f(y) < f(x)\} = \{\sigma \mid \sigma < f(x)\} = f(x);$$

es decir, $f[\widehat{x}] = f(x)$ y, en consecuencia, $|\widehat{x}| = |f[\widehat{x}]| = |f(x)|$. Por otra parte, si $(\xi, \zeta) \in \widehat{x}$, se tiene que $(\xi, \zeta) \ll (\alpha, \beta) = x$, luego

$$\text{máx}\{\xi, \zeta\} \leq \text{máx}\{\alpha, \beta\} = \alpha\cup\beta < S(\alpha\cup\beta),$$

por consiguiente, $\xi, \zeta \in S(\alpha\cup\beta)$, de aquí que $(\xi, \zeta) \in S(\alpha\cup\beta)\times S(\alpha\cup\beta)$. Así, $\widehat{x} \subseteq S(\alpha\cup\beta)\times S(\alpha\cup\beta)$. Tenemos, por ello, que $|f(x)| = |\widehat{x}| \leq |S(\alpha\cup\beta)\times S(\alpha\cup\beta)|$.

Ahora, usando la última desigualdad, tenemos dos casos:

i) Si $\alpha\cup\beta < \omega$, entonces $|f(x)| \leq |S(\alpha\cup\beta)|^2 < \omega$, con lo cual $f(x) < \omega$, y como $\lambda \geq \omega$, se sigue que $f(x) < \lambda$.

ii) Si $\alpha\cup\beta \geq \omega$, en tal caso $|S(\alpha\cup\beta)| = |\alpha\cup\beta|$; además, $(\alpha, \beta) \in \lambda\times\lambda$, así que $\alpha\cup\beta < \lambda$, y con ello $S(\alpha\cup\beta) < \lambda$ pues $\lambda \in \mathcal{C}\setminus\omega$. De la definición de λ, se sigue que $|S(\alpha\cup\beta)\times S(\alpha\cup\beta)| \leq |S(\alpha\cup\beta)|$, por ello

$$|f(x)| \leq |S(\alpha\cup\beta)\times S(\alpha\cup\beta)| \leq |S(\alpha\cup\beta)| \leq S(\alpha\cup\beta) < \lambda;$$

así pues, $f(x) < \lambda$.

Hemos probado que $\forall\xi \in \lambda\times\lambda : f(x) \in \lambda$, es decir,$\text{ran}(f) \subseteq \lambda$, y con ello $|\lambda\times\lambda| = |\text{ ran}(f)| \leq |\lambda|$; pero esto no es posible ya que $\lambda := \text{mín}\{\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega \mid \kappa < |\kappa\times\kappa|\}$.

Concluimos que $\forall\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega : \kappa = |\kappa\times\kappa| = \kappa\cdot\kappa$. †

Corolario 4.3.3. *Si $\kappa, \lambda \in \mathcal{C}$ tales que $0 < \kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$, entonces $\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \lambda$.*

Demostración. De $\lambda \geq \omega$ se deduce que $\lambda\cdot\lambda = \lambda$. De $0 < \kappa \leq \lambda$ se siguen dos cosas:

1) $0+\lambda \leq \kappa+\lambda \leq \lambda+\lambda$, por lo cual $\lambda \leq \kappa+\lambda \leq 2\cdot\lambda \leq \lambda\cdot\lambda = \lambda$.

2) $1 \leq \kappa \leq \lambda$, luego $1\cdot\lambda \leq \kappa\cdot\lambda \leq \lambda\cdot\lambda$, esto es, $\lambda \leq \kappa\cdot\lambda \leq \lambda$.

†

El corolario anterior se puede enunciar de la siguiente forma: si κ y λ son cardinales diferentes de cero y alguno es infinito, entonces $\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \text{máx}\{\kappa, \lambda\}$.

Puesto que ω es un cardinal infinito, se cumple $\omega+\omega = \omega\cdot\omega = \omega$. Sin embargo, para la suma ordinal, $\omega+_{\mathcal{R}}\omega = \sup\{\omega+n \mid n < \omega\} > \omega$; y para el producto, $\omega\cdot_{\mathcal{R}}\omega = \sup\{\omega\cdot_{\mathcal{C}} n \mid n < \omega\} > \omega$. De la misma manera, para cardinales $\omega^2 = \omega\cdot\omega = \omega$ y para ordinales $\omega^2 = \omega\cdot_{\mathcal{R}}\omega \neq \omega$.

Corolario 4.3.4. *Supongamos que $\lambda, \kappa \in \mathcal{C}$ y $\lambda \geq \omega$. Si $2 \leq \kappa \leq \lambda$, entonces $2^\lambda = \kappa^\lambda$.*

Demostración. Como $2 \le \kappa \le \lambda$, por el teorema 4.2.6 c), $2^\lambda \le \kappa^\lambda$.

Por el corolario anterior, $\lambda \cdot \kappa = \lambda$, por lo que existe una función biyectiva $f : \lambda \times \kappa \longrightarrow \lambda$. Recordemos que $2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$. Definamos $\Phi : {}^\lambda\kappa \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, como $\Phi(g) := \{f(x, g(x)) \mid x \in \lambda\}$ para toda $g \in {}^\lambda\kappa$. Veamos que Φ es inyectiva. Si $g, h \in {}^\lambda\kappa$ tales que $\Phi(g) = \Phi(h)$, dado $x \in \lambda$, se cumple que $f(x, g(x)) \in \Phi(g)$, luego $f(x, g(x)) \in \Phi(h)$, por lo cual existe $y \in \lambda$ de tal forma que $f(x, g(x)) = f(y, h(y))$, por consiguiente, $(x, g(x)) = (y, h(y))$ pues f es biyectiva, en consecuencia, $x = y$ y $g(x) = h(y) = h(x)$; resumiendo, $\forall x \in \lambda : g(x) = h(x)$, esto es, $g = f$.

Acabamos de probar que $\Phi : {}^\lambda\kappa \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ es inyectiva, así que $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| \le |\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$. †

Ejemplos. Para cada $\kappa \ge \omega$ se cumple que $2^\kappa = 3^\kappa = 4^\kappa \cdots = \kappa^\kappa$; además, $0^\kappa = 0$ y $1^\kappa = 1$.

Corolario 4.3.5. *Para todo $\lambda \in \mathcal{C} \setminus \omega$, si $\kappa \in \mathcal{C}$ con $\kappa \le \lambda$, entonces $\kappa^\lambda \le 2^\lambda$.*

Definición 4.3.1. Para cada $\kappa \in \mathcal{C}$, se define su *cardinal sucesor*, denotado por κ^+, como:

$$\kappa^+ := \text{mín}\{\lambda \in \mathcal{C} \mid \kappa < \lambda\}.$$

Definición 4.3.2. 1) κ es un *cardinal sucesor* si existe un cardinal λ tal que $\kappa = \lambda^+$.

2) $\kappa \in \mathcal{C}$ es un *cardinal límite* si $\kappa \ne 0$ y κ no es un cardinal sucesor.

Todo natural diferente de cero es un cardinal sucesor y ω es un cardinal límite. Por el teorema 4.1.11, $\kappa < |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$, de modo que $\kappa^+ \le 2^\kappa$.

Corolario 4.3.6. *Para todo $\kappa \in \mathcal{C} \setminus \omega$:*

a) $(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa$,

b) $\kappa^+ = \big|\{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\}\big|$.

Demostración. a) Si $\kappa \in \mathcal{C} \setminus \omega$, entonces $2 < \kappa^+ \le 2^\kappa$, luego $2^\kappa \le (\kappa^+)^\kappa \le (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$, consiguientemente, $(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa$.

b) $\kappa^+ = \{\xi \in \mathcal{R} \mid \xi < \kappa^+\} = \big|\{\xi \in \mathcal{R} \mid \xi < \kappa^+\}\big| = \big|\{\xi \in \mathcal{R} \mid \xi < \kappa\} \cup \{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\}\big|$
$= \big|\kappa \cup \{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\}\big| = \big|\kappa \times \{0\} \cup \{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\} \times \{1\}\big|$
$= \kappa + \big|\{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\}\big| = \big|\{\xi \in \mathcal{R} \mid \kappa \le \xi < \kappa^+\}\big|$. †

4.3.1. La función álef

Teorema 4.3.7. *Existe un única función F <-< preservadora de orden en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C} \setminus \omega$ tal que* $\text{dom}(F) = \mathcal{R}$ *y* $\text{ran}(F) = \mathcal{C} \setminus \omega$.

Demostración. Sabemos que la relación $<$ es un buen orden $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C} \setminus \omega$, así que por el teorema 2.3.5, existe una única función F, <-< preservadora de orden en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C} \setminus \omega$ tal que $\text{dom}(F) = \mathcal{R}$ o $\text{ran}(F) = \mathcal{C} \setminus \omega$.

Si $\text{dom}(F) = \mathcal{R}$ y $\text{ran}(F) \subsetneq \mathcal{C} \setminus \omega$, existe $\kappa \in \mathcal{C} \setminus \omega$ tal que $\text{ran}(F) = \{y \in \mathcal{C} \setminus \omega \mid y < \kappa\} \subseteq \kappa$, en consecuencia, $\text{ran}(F)$ es un conjunto, luego, por axioma de reemplazo (aplicado a F^{-1}), $\text{dom}(F) = \mathcal{R}$ es un conjunto. Si $\text{dom}(F) \subsetneq \mathcal{R}$ y $\text{ran}(F) = \mathcal{C} \setminus \omega$, existe $\alpha \in \mathcal{R}$ tal que $\text{dom}(F) = \{x \in \mathcal{R} \mid x < \alpha\} = \alpha$, con lo cual $\text{dom}(F)$ es un conjunto, así que, por el axioma de reemplazo, $\text{ran}(F) = \mathcal{C} \setminus \omega$ es un conjunto. Concluimos que $\text{dom}(F) = \mathcal{R}$ y $\text{ran}(F) = \mathcal{C} \setminus \omega$. †

Definición 4.3.3. La única función biyectiva y <-< preservadora de orden de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{C} \setminus \omega$ se denota como $\aleph$ y se le llama la función *álef*. Para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, $\aleph(\alpha) := \aleph_\alpha$.

El primer cardinal infinito es $\aleph_0$, luego le siguen $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \cdots, \aleph_\omega$. Además, con la aritmética ordinal, obtenemos más cardinales $\aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \cdots, \aleph_{\omega+\omega}, \cdots, \aleph_{\omega\cdot\omega}, \cdots, \aleph_{\omega^\omega} \cdots$

Teorema 4.3.8. *a) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ si y solo si $\alpha < \beta$.*

b) $\aleph_0 = \omega$.

c) Para cada $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $(\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$.

d) Si γ es un ordinal límite, entonces $\aleph_\gamma = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \gamma\} = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

Corolario 4.3.9. *a) $\aleph_\alpha$ es un cardinal sucesor si y solo si α es un ordinal sucesor.*

b) $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite si y solo si α es un ordinal límite.

Hay que tener en cuenta que cualquier $\aleph_\alpha$ es también un número ordinal, así que existen, por ejemplo, los cardinales $\aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_1}, \aleph_{\aleph_\omega}$, ... y en general $\aleph_{\aleph_\alpha}$, e incluso $\aleph_{\aleph_{\aleph_\alpha}}$.

Cuando nos interesa ver a $\aleph_\alpha$ como un número ordinal cualquiera, y no como un cardinal, usamos la notación ω_α, es decir, $\omega_1 := \aleph_1$, $\omega_2 := \aleph_2$, $\omega_3 := \aleph_3$ ... de esta manera, $\aleph_{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1}$, $\aleph_{\aleph_2} = \aleph_{\omega_2}$, $\aleph_{\aleph_3} = \aleph_{\omega_3}$, etc.

4.4. Sumas y productos infinitos

Definición 4.4.1. Usamos la notación $(A_i)_{i\in I}$ para la función f tal que $\mathrm{dom}(f) = I$ y $\forall i \in I : f(i) = A_i$ y decimos que $(A_i)_{i\in I}$ es una *familia de conjuntos*. Una *función selectora* de $(A_i)_{i\in I}$ es una función $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $\forall i \in I : f(i) \in A_i$. Denotamos como $\mathop{\natural}\limits_{i\in I} A_i$ a la clase de las funciones selectoras de $(A_i)_{i\in I}$.

Definición 4.4.2. Una *sucesión* es una función cuyo dominio es un ordinal. Si f es una sucesión con $\mathrm{dom}(f) = \beta$, se acostumbra usar la notación $(f(\xi))_{\xi<\beta}$ o $(A_\xi)_{\xi<\beta}$ donde $A_\xi := f(\xi)$; al elemento, A_ζ se le llama el *ζ-ésimo* elemento de la sucesión.

Definición 4.4.3. Si $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de números cardinales, se define la *suma* y *producto* de esta sucesión, respectivamente, como:

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi := \Big|\bigcup_{\xi\in\beta} \kappa_\xi \times \{\xi\}\Big|;$$

$$\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi := \Big|\mathop{\natural}_{\xi\in\beta} \kappa_\xi\Big|.$$

Observación. $\sum\limits_{\xi<0} \kappa_\xi = 0$; $\prod\limits_{\xi<0} \kappa_\xi = 1$; $\sum\limits_{\xi<1} \kappa_\xi = \kappa_0 = \prod\limits_{\xi<1} \kappa_\xi$; $\sum\limits_{\xi<2} \kappa_\xi = \kappa_0 + \kappa_1$, y $\prod\limits_{\xi<2} \kappa_\xi = \kappa_0 \cdot \kappa_1$.

Teorema 4.4.1. *Si $(A_\xi)_{\xi<\beta}$ y $(B_\xi)_{\xi<\beta}$ son sucesiones de conjuntos tales que $\forall \xi < \beta : |A_\xi| = |B_\xi|$, entonces*

$$\Big|\bigcup_{\xi\in\beta} A_\xi\Big| = \Big|\bigcup_{\xi\in\beta} B_\xi\Big| \text{ si } A_\xi \cap B_\zeta = \emptyset \text{ siempre que } \xi \neq \zeta; \quad y \quad \Big|\mathop{\natural}_{\xi\in\beta} A_\xi\Big| = \Big|\mathop{\natural}_{\xi\in\beta} B_\xi\Big|.$$

Teorema 4.4.2. *Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales y $\gamma < \beta$, sabemos, por el lema de la resta, que existe un único $\delta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\gamma + \delta = \beta$; entonces:*

a) $\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi = \sum_{\xi<\gamma+\delta} \lambda_\xi = \Big(\sum_{\xi<\gamma} \lambda_\xi\Big) + \Big(\sum_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}\Big)$;

b) $\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi = \prod_{\xi<\gamma+\delta} \lambda_\xi = \Big(\prod_{\xi<\gamma} \lambda_\xi\Big) \cdot \Big(\prod_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}\Big)$.

En particular, $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \kappa_0 + \sum_{\xi<\delta} \kappa_{(1+\xi)}$ *y* $\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \kappa_0 \cdot \prod_{\xi<\delta} \kappa_{(1+\xi)}$, *donde* $\delta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *tal que* $1+\delta = \beta$.

Demostración. Por el teorema 3.1.3, $\beta = \gamma+\delta = \gamma \cup \{\gamma+\xi \mid \xi < \delta\}$, y es claro que $\gamma \cap \{\gamma+\xi \mid \xi < \delta\} = \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi &= \Big|\bigcup_{\xi<\beta} \lambda_\xi \times \{\xi\}\Big| = \Big|\Big(\bigcup_{\xi<\gamma} \lambda_\xi \times \{\xi\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi} \times \{\gamma+\xi\}\Big)\Big| \\
&= \Big|\Big(\bigcup_{\xi<\gamma} \lambda_\xi \times \{\xi\}\Big) \times \{1\} \cup \Big(\bigcup_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi} \times \{\gamma+\xi\}\Big) \times \{2\}\Big| \\
&= \Big|\bigcup_{\xi<\gamma} \lambda_\xi \times \{\xi\}\Big| + \Big|\bigcup_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi} \times \{\gamma+\xi\}\Big| = \sum_{\xi<\gamma} \lambda_\xi + \sum_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}.
\end{aligned}$$

Como se vio al principio, $\beta = \gamma+\delta = \gamma \cup \{\gamma+\xi \mid \xi < \delta\} = \gamma \cup B$ donde $B := \{\gamma+\xi \mid \xi < \delta\}$, y también $\gamma \cap B = \emptyset$. Si $f \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$, entonces $\forall \xi < \beta : f(\xi) \in \lambda_\xi$, en particular, como $B \subseteq \gamma$, resulta que $\forall \xi < \delta : f(\gamma+\xi) \in \lambda_{\gamma+\xi}$. Definamos $\sigma_0 : \delta \longrightarrow B$ por $\sigma_0(\xi) := \gamma+\xi$, la cual es una función biyectiva. Tenemos pues, que para cada $f \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$, se cumple que $f_{|\gamma} \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$ y $f_{|B} \circ \sigma_0 \in \natural_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}$. Recíprocamente, si $f \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$ y $g \in \natural_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}$, entonces $f \cup (g \circ \sigma_0^{-1}) \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$. La función Φ es biyectiva, donde

$$\Phi : \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi \longrightarrow \big(\natural_{\xi<\gamma} \lambda_\xi\big) \times \big(\natural_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}\big)$$

tal que $\Phi(f) := (f_{|\gamma}, (f_{|B}) \circ \sigma_0)$ para todo $f \in \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$. Así, $\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi = \Big(\prod_{\xi<\gamma} \lambda_\xi\Big) \cdot \Big(\prod_{\xi<\delta} \lambda_{\gamma+\xi}\Big)$. †

Teorema 4.4.3. *Si* $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *y* $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, *entonces:*

a) $\sum_{\xi<\beta} \kappa = |\beta| \cdot \kappa$;

b) $\prod_{\xi<\beta} \kappa = \kappa^{|\beta|}$.

Demostración. a) $\sum_{\xi<\beta} \kappa = \Big|\bigcup_{\xi\in\beta} (\kappa \times \{\xi\})\Big| = \Big|\kappa \times \Big(\bigcup_{\xi\in\beta} \{\xi\}\Big)\Big| = |\kappa \times \beta| = \kappa \cdot |\beta|$.

b) $\prod_{\xi<\beta} \kappa = \Big|\natural_{\xi\in\beta} \kappa\Big| = \big|\{f : \beta \longrightarrow \bigcup_{\xi\in\beta} \kappa \mid \forall \xi \in \beta : f(\xi) \in \kappa\}\big| = |{}^I\kappa| = \kappa^{|I|}$. †

Teorema 4.4.4. *Si* $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ *y* $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ *son sucesiones de cardinales tales que* $\forall \xi < \beta : \kappa_\xi \leq \lambda_\xi$, *entonces:*

a) $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi$;

b) $\displaystyle\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi$.

Demostración. a) Como $\forall \xi < \beta : \kappa_\xi \leq \lambda_\xi$, entonces $\forall \xi < \beta : \kappa_\xi \times \{\xi\} \subseteq \lambda_\xi \times \{\xi\}$, en consecuencia, $\bigcup_{\xi<\beta} \kappa_\xi \times \{\xi\} \subseteq \bigcup_{\xi<\beta} \lambda_\xi \times \{\xi\}$, por lo que deducimos que $\big| \bigcup_{\xi<\beta} \kappa_\xi \times \{\xi\}\big| \leq \big| \bigcup_{\xi<\beta} \lambda_\xi \times \{\xi\}\big|$, es decir, $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi$.

b) Si f es una función selectora de $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$, entonces $\forall \xi < \beta : f(\xi) \in \kappa_\xi$, pero $\kappa_\xi \subseteq \lambda_\xi$ si $\xi < \beta$, por lo cual $\forall \xi < \beta : f(\xi) \in \lambda_\xi$, de modo que f es una función selectora de $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$. Por tanto, $\natural_{\xi<\beta} \kappa_\xi \subseteq \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi$, y por ello $\prod_{\xi<\beta} \kappa_\alpha = \big| \natural_{\xi<\beta} \kappa_\xi \big| \leq \big| \natural_{\xi<\beta} \lambda_\xi \big| = \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi$. †

Teorema 4.4.5. *Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales y $\kappa \in \boldsymbol{C}$, entonces:*

a) $\displaystyle\sum_{\xi<\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi = \kappa \cdot \Big(\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big)$;

b) $\displaystyle\prod_{\xi<\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi = \kappa^{|\beta|} \cdot \Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big)$;

c) $\displaystyle\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi^\kappa = \Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big)^\kappa$.

Demostración. a)

$$\kappa \cdot \Big(\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big) = \Big| \kappa \times \big(\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi \big) \Big| = \Big| \kappa \times \big(\bigcup_{\xi<\beta} \lambda_\xi \times \{\xi\} \big) \Big| = \Big| \bigcup_{\xi<\beta} \kappa \times (\lambda_\xi \times \{\xi\}) \Big|$$
$$= \Big| \bigcup_{\xi<\beta} (\kappa \times \lambda_\xi) \times \{\xi\} \Big| = \sum_{\xi<\beta} |\kappa \times \lambda_\xi| = \sum_{\xi<\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi.$$

b) Tenemos que $\displaystyle\prod_{\xi<\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi \approx \natural_{\xi\in\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi \approx \natural_{\xi\in\beta} \kappa \times \lambda_\xi$, y también $\displaystyle\kappa^{|\beta|} \cdot \Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big) \approx \kappa^{|\beta|} \times \Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big) \approx {}^\beta\kappa \times \Big(\natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \Big)$.

Definamos $\Psi : {}^\beta\kappa \times \Big(\natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \Big) \longrightarrow \natural_{\xi\in\beta} \kappa \times \lambda_\xi$ de la siguiente forma: si $(f, h) \in {}^\beta\kappa \times \Big(\natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \Big)$, entonces $\Psi(f, h) : \beta \longrightarrow \bigcup_{\xi\in\beta} \kappa \times \lambda_\xi$ tal que $\Psi(f, h)(\xi) := (f(\xi), h(\xi))$ para cada $\xi \in \beta$. La función Ψ es biyectiva, en consecuencia, $\prod_{\xi<\beta} \kappa \cdot \lambda_\xi = \kappa^{|\beta|} \cdot \big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \big)$.

c) $\displaystyle\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi^\kappa \approx \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi^\kappa \approx \natural_{\xi\in\beta} {}^\kappa\lambda_\xi$ y $\displaystyle\Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big)^\kappa \approx {}^\lambda\Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big) \approx {}^\kappa\Big(\natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \Big)$.

Definamos $\Phi : \natural_{\xi\in\beta} {}^\kappa\lambda_\xi \longrightarrow {}^\kappa\Big(\natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \Big)$ como: si $f \in \natural_{\xi\in\beta} {}^\kappa\lambda_\xi$, entonces $\Phi(f) : \kappa \longrightarrow \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi$ tal que para todo $\xi \in \kappa$, $\Phi(f)(\xi) : \beta \longrightarrow \bigcup_{\xi\in\beta} \lambda_\xi$ con $(\Phi(f)(\xi))(\zeta) := f(\zeta)(\xi)$ para cada $\zeta \in \beta$. Esta función es biyectiva, así que $\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi^\kappa = \Big(\prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi \Big)^\kappa$. †

Teorema 4.4.6. *Si $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales y $\lambda \in \boldsymbol{C}$, entonces*

$$\lambda^{\sum\limits_{\xi<\beta} \kappa_\xi} = \prod_{\xi<\beta} \lambda^{\kappa_\xi}.$$

Demostración. Observar que $\lambda^{\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi} = \left|{}^{\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi}\lambda\right| = \left|{}^{\bigcup_{\xi\in\beta}\kappa_\xi\times\{\xi\}}\lambda\right| = \left|{}^{\bigcup_{\xi\in\beta}A_\xi}\lambda\right|$, donde $A_\xi := \kappa_\xi \times \{\xi\}$ para cada $\xi \in \beta$.

También, se tiene que $\prod\limits_{\xi<\beta} \lambda^{\kappa_\xi} = \left|\natural_{\xi\in\beta} \lambda^{\kappa_\xi}\right| = \left|\natural_{\xi\in\beta} {}^{\kappa_\xi}\lambda\right| = \left|\natural_{\xi\in\beta} {}^{A_\xi}\lambda\right|$.

Definamos $\Phi : {}^{\bigcup_{\xi\in\beta}A_\xi}\lambda \longrightarrow \natural_{\xi\in\beta} {}^{A_\xi}\lambda$, como $\Phi(f) : I \longrightarrow \bigcup\limits_{\xi\in\beta} {}^{A_\xi}\lambda$ tal que $\Phi(f)(\xi) := f_{|A_\xi}$. Esta función es biyectiva, por ende,

$$\lambda^{\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi} = \left|{}^{\bigcup_{\xi\in\beta}A_\xi}\lambda\right| = \left|\natural_{\xi\in\beta} {}^{A_\xi}\lambda\right| = \prod_{\xi<\beta}\lambda^{\kappa_\xi}.$$

†

Definición 4.4.4. Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales, una *reordenación* de esta, es una sucesión de la forma $(\lambda_{f(\xi)})_{\xi<\gamma}$, donde $f : \gamma \longrightarrow \beta$ es una función biyectiva.

Teorema 4.4.7. *Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales y $(\lambda_{f(\xi)})_{\xi<\gamma}$ es una reordenación, entonces:*

$$\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi = \sum_{\xi<\gamma}\lambda_{f(\xi)} \quad y \quad \prod_{\xi<\beta}\lambda_\xi = \prod_{\xi<\gamma}\lambda_{f(\xi)}.$$

Demostración. Para cada $\xi < \beta$, $\lambda_\xi = \lambda_{f(f^{-1}(\xi))} = \lambda_{f(\zeta)}$ con $\zeta = f^{-1}(\xi)$.

La función $\Phi : \bigcup\limits_{\xi<\beta} \lambda_\xi \times \{\xi\} \longrightarrow \bigcup\limits_{\xi<\gamma} \lambda_{f(\xi)} \times \{\xi\}$ definida como $\Phi(x, \xi) := (x, f^{-1}(\xi))$ es una biyección. También $\Psi : \prod\limits_{\xi<\beta}\lambda_\xi \longrightarrow \prod\limits_{\xi<\gamma}\lambda_{f(\xi)}$ definida como $\Psi(h) := h \circ f$ si $h \in \prod_{\xi<\beta}\lambda_\xi$ es una biyección.

†

Como acabamos de ver, el orden en que se haga una suma o producto no importa, pues siempre nos va a dar el mismo resultado. Algunas veces es más cómodo trabajar una suma o producto sin importarnos el orden en que se suman. Por eso la siguiente definición también es válida y la usaremos algunas veces: dada $(\lambda_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos, donde I es un conjunto cualquiera, la suma y producto de esta familia es

$$\sum_{i\in I}\lambda_i = \left|\bigcup_{i\in I}\lambda_i \times \{i\}\right| \text{ y } \prod_{i\in I}\lambda_i = \left|\natural_{i\in I}\kappa_i\right|.$$

Por el teorema de Zermelo, existen un número ordinal β y una función biyectiva $f : \beta \longrightarrow I$, de modo que la familia $(\lambda_i)_{i\in I}$ se (bien) ordena como la sucesión $(\lambda_{f(\xi)})_{\xi<\beta}$. De la misma forma que el teorema 4.4.7 se prueba que:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i = \sum_{\xi<\beta}\lambda_{f(\xi)} \text{ y } \prod_{i\in I}\lambda_i = \prod_{\xi<\beta}\lambda_{f(\xi)}.$$

Dicho de otro, $\bigcup_{i\in I}\lambda_i \times \{i\} \approx \bigcup_{\xi<\beta}\lambda_{f(\xi)} \times \{f(\xi)\}$ y $\natural_{i\in I}\lambda_i \approx \natural_{\xi<\beta}\lambda_{f(\xi)}$.

Por ejemplo, el teorema 4.4.2 se puede enunciar así: Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales y $\gamma < \beta$, entonces: $\sum\limits_{\xi<\beta}\lambda_\xi = \Big(\sum\limits_{\xi<\gamma}\lambda_\xi\Big) + \Big(\sum\limits_{\gamma\leq\xi<\beta}\lambda_\xi\Big)$ y $\prod\limits_{\xi<\beta}\lambda_\xi = \Big(\prod\limits_{\xi<\gamma}\lambda_\xi\Big) \cdot \Big(\prod\limits_{\gamma\leq\xi<\beta}\lambda_\xi\Big)$.

Esta propiedad de dividir una suma (producto) en dos sumas (producto), se puede generalizar dividiendo una suma infinita en infinitas sumas. Esto es la generalización de la propiedad asociativa:

Teorema 4.4.8. *Si $(\kappa_i)_{i\in I}$ es una familia de números cardinales y $\{A_j \mid j \in J\}$ es una partición de I, entonces:*

a) $\displaystyle\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big)$;

b) $\displaystyle\prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{j\in J}\Big(\prod_{i\in A_j}\kappa_i\Big)$;

c) $\displaystyle\prod_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big) = \sum_{f\in A}\Big(\prod_{j\in J}\kappa_{f(j)}\Big)$ *donde* $\displaystyle A := \natural_{j\in J} A_j$.

Demostración. a) Como $\{A_j \mid j\in J\}$ es una partición de I, entonces $\{(\kappa_i)_{i\in A_j} \mid j\in J\}$ es una partición de $(\kappa_i)_{i\in I}$. Así que

$$\bigcup_{i\in I}\kappa_i\times\{i\} = \bigcup_{j\in J}\big(\bigcup_{i\in A_j}\kappa_i\times\{i\}\big) \approx \bigcup_{j\in J}\Big(\big(\bigcup_{i\in A_j}\kappa_i\times\{i\}\big)\times\{j\}\Big) \approx \bigcup_{j\in J}\Big(\big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\big)\times\{j\}\Big);$$

por lo cual

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \Big|\bigcup_{i\in I}\kappa_i\times\{i\}\Big| = \Big|\bigcup_{j\in J}\Big(\big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\big)\times\{j\}\Big)\Big| = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big).$$

b) Observemos que $\prod_{j\in J}\Big(\prod_{i\in A_j}\kappa_i\Big) \approx \natural_{j\in J}\Big(\natural_{i\in A_j}\kappa_i\Big)$. Definamos,

$$\Phi : \natural_{i\in I}\kappa_i \longrightarrow \natural_{j\in J}\Big(\natural_{i\in A_j}\kappa_i\Big)$$

tal que para toda $f\in\natural_{i\in I}\kappa_i$, y toda $j\in J$, $\Phi(f)(j) := f_{|A_j}$. Esta función es biyectiva, por lo que concluimos que $\prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{j\in J}\Big(\prod_{i\in A_j}\kappa_i\Big)$.

c) Notemos que $\prod_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big) = \Big|\natural_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big)\Big| = \Big|\natural_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in A_j}\kappa_i\times\{i\}\Big)\Big|$. Pongamos $d_i := \kappa_i\times\{i\}$ para todo $i\in I$, entonces

$$\prod_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big) \approx \natural_{j\in J}\big(\bigcup_{i\in A_j}d_i\big) \approx \{x : J\longrightarrow \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in A_j}d_i \mid \forall j\in J : x(j)\in\bigcup_{i\in A_j}d_i\}$$

Se observa que si x es una función (selectora), en el último conjunto, para cada $j\in J$ existe $i'\in A_j$ tal que $x(j)\in d_{i'}$; esto define una función $f : J\longrightarrow\bigcup_{j\in J}A_j$ tal que $f(j)\in A_j$ y $x(j)\in d_{f(j)}$; dado que que los A_i son ajenos entre sí y los d_i lo son igualmente, la función f es única. Notar que $f\in\natural_{j\in J}A_j = A$ y $x\in\natural_{j\in J}d_{f(j)}$. Definamos $f_0 : \natural_{j\in J}\big(\bigcup_{i\in A_j}d_i\big)\longrightarrow A$ tal que para toda $x\in\natural_{j\in J}\big(\bigcup_{i\in A_j}d_i\big)$, $f_0(x)$ es la única función en A tal que $x\in\natural_{j\in J}d_{f_0(x)(j)}$. De aquí se verifica que $x\in\natural_{j\in J}d_{f_0(x)(j)}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\sum_{f\in A}\Big(\prod_{j\in J}\kappa_{f(j)}\Big) &\approx \bigcup_{f\in A}\Big(\prod_{j\in J}\kappa_{f(j)}\Big)\times\{f\}\\ &\approx \bigcup_{f\in A}\big(\natural_{j\in J}\kappa_{f(j)}\big)\times\{f\} \approx \bigcup_{f\in A}\big(\natural_{j\in J}d_{f(j)}\big)\times\{f\}.\end{aligned}$$

Definamos

$$\Phi : \natural_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in A_j}d_i\Big)\longrightarrow\bigcup_{f\in A}\Big(\natural_{j\in J}d_{f(j)}\Big)\times\{f\}$$

como $\Phi(x) := (x, f_0(x))$ para todo x en su dominio. Esta función es claramente inyectiva. Si $f\in A = \natural_{j\in J}A_j$ y $y\in\natural_{j\in J}d_{f(j)}$, entonces para todo $j\in J$, $y(j)\in d_{f(j)}$ y $f(j)\in A_j$; lo cual nos dice que $d_{f(j)}\subseteq\bigcup_{i\in A_j}d_i$; consecuentemente, para todo $j\in J$, $y(j)\in\bigcup_{i\in A_j}d_i$, es decir,

$y \in \natural_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in A_j} d_i\right) = \mathrm{dom}(\Phi)$; por definición de f_0, $f_0(y) = f$, por lo cual, $\Phi(y) = (y, f_0(y)) = (y, f(y))$. Por ende, Φ es biyectiva, lo cual implica que

$$\prod_{j\in J}\Big(\sum_{i\in A_j}\kappa_i\Big) = \Big|\natural_{j\in J}\Big(\bigcup_{i\in A_j} d_i\Big)\Big| = \Big|\bigcup_{f\in A}\Big(\natural_{j\in J} d_{f(j)}\Big)\times\{f\}\Big| = \sum_{f\in A}\Big(\prod_{j\in J}\kappa_{f(j)}\Big).$$

†

Enseguida vamos a probar un teorema que nos da una forma saber el valor de una suma infinita:

Lema 4.4.9. *Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales, entonces* $\displaystyle\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi \le |\beta|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}$.

Demostración. Denotemos $\nu := \sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}$. Para todo $\xi<\beta$, se tiene que $\lambda_\xi \le \nu$, luego existe una función inyectiva $f_\xi : \lambda_\xi \longrightarrow \nu$ para cada $\xi<\beta$; entonces, $\bigcup_{\xi<\beta} f_\xi\times\{\xi\}$ es una función inyectiva de $\bigcup_{\xi<\beta}\lambda_\xi\times\{\xi\}$ en $\bigcup_{\xi<\beta}\nu\times\{\xi\}$. Tenemos pues,

$$\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi = \Big|\bigcup_{\xi<\beta}\lambda_\xi\times\{\xi\}\Big| \le \Big|\bigcup_{\xi<\beta}\nu\times\{\xi\}\Big| = \Big|\nu\times\Big(\bigcup_{\xi<\beta}\{\xi\}\Big)\Big| = |\nu\times\beta| = |\beta|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}.$$

†

Corolario 4.4.10. *a) Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces*

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \le |I|\cdot\sup\{|A_i| \mid i\in I\}.$$

b) Si $\kappa\in\boldsymbol{\mathcal{C}}\setminus\omega$, la unión de a lo más κ conjuntos de cardinalidad a lo más κ, tiene cardinalidad a lo más κ.

Demostración. a) La función $f : \bigcup_{i\in I} A_i\times\{i\} \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$, definida como $f(a, j) = a$ (para todo $j\in I$ y todo $a\in A_j$) es sobreyectiva. Luego, y por el lema 4.4.9,

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \le \Big|\bigcup_{i\in I} A_i\times\{i\}\Big| = \sum_{i\in I}|A_i| \le |I|\cdot\sup\{|A_i| \mid i\in I\}$$

b) Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que $\forall i\in I : |A_i|\le\kappa$ y $|I|\le\kappa$, entonces, por el inciso a): $|\bigcup_{i\in I} A_i| \le |I|\cdot\sup\{|A_i| \mid i\in I\} \le \kappa\cdot\kappa = \kappa$. †

Teorema 4.4.11. *Si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión no vacía de cardinales diferentes de 0 tal que β o algún λ_ξ es infinito; entonces,*

$$\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi = |\beta|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\} = \max\big\{|\beta|, \sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}\big\}.$$

Demostración. Por hipótesis, $\forall\xi<\beta : 1\le\lambda_\xi$, lo cual implica que $|\beta| = \sum_{\xi<\beta}1 \le \sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi$. Por otra parte, para todo $\zeta<\beta$ se cumple que $\lambda_\zeta \approx \lambda_\zeta\times\{\zeta\} \subseteq \bigcup_{\xi<\beta}\lambda_\xi\times\{\xi\}$, en consecuencia,

$$\lambda_\zeta \le \Big|\bigcup_{\xi<\beta}\lambda_\xi\times\{\xi\}\Big| \text{ para cada } \zeta<\beta,$$

y con ello $\sup\{\lambda_\zeta \mid \zeta<\beta\} \le \sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi$. Ahora bien, como β es infinito o algún λ_ξ es infinito, entonces $|\beta|$ o $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}$ infinito; además, $|\beta| \le \sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi$ y $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\} \le \sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi$, de lo que se siguen dos cosas: $\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi$ es infinito y, también,

$$|\beta|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \zeta<\xi\} \le \Big(\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi\Big)\cdot\Big(\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi\Big) = \sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi.$$

Finalmente, por el lema 4.4.9, $\sum_{\xi<\beta}\lambda_\xi = |\beta|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}$. †

Podemos usar el teorema anterior para una sucesión que tenga elementos iguales a 0 de la siguiente manera: si $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales tal que algún λ_ξ es cero, pongamos $I_1 := \{\xi < \beta \mid \lambda_\xi \neq 0\}$, entonces, si I_1 o algún λ_ξ es infinito, resulta que

$$\sum_{\xi<\beta} \lambda_\xi = \sum_{\xi\in I_1} \lambda_\xi = |I_1|\cdot\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}.$$

Tenemos por ejemplo que $\sum\limits_{n<\omega} n = |\omega|\cdot\sup\{n \mid n<\omega\} = \aleph_0$. Más aun, si κ es un cardinal infinito, $\sum\limits_{n<\kappa} n = |\kappa|\cdot\sup\{n \mid n<\kappa\} = \kappa$.

Corolario 4.4.12. *Si β es un ordinal límite y $(\sigma_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión estrictamente creciente de ordinales, entonces $\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha$ donde $\alpha = \sup\{\sigma_\xi \mid \xi<\beta\}$. En particular, $\sum_{\xi<\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta$ y $\sum_{\xi<\alpha+1} \aleph_\xi = \aleph_\alpha$ donde α es un número ordinal cualquiera.*

Demostración. Por el teorema 4.4.11, se cumple que $\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = |\beta|\cdot\sup\{\aleph_{\sigma_\xi} \mid \xi<\beta\}$. Como $\beta\in$ **Lim** y $(\sigma_\xi)_{\xi<\beta}$ es estrictamente creciente, entonces $\alpha = \sup\{\sigma_\xi \mid \xi<\beta\} \in$ **Lim**, luego $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi<\alpha\}$. En consecuencia, por el lema 3.1.9, $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_{\sigma_\xi} \mid \xi<\beta\}$. Además, por el teorema 2.3.1, $\forall\xi<\beta : \xi \le \sigma_\xi < \sigma_{\xi+1} \le \aleph_{\sigma_{\xi+1}} \le \aleph_\alpha$, de este modo $\beta \subseteq \aleph_\alpha$, y por ello $|\beta| \le \aleph_\alpha$. Por lo tanto,

$$\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = |\beta|\cdot\sup\{\aleph_{\sigma_\xi} \mid \xi<\beta\} = |\beta|\cdot\aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

†

Lema 4.4.13. *Si $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ y $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ son sucesiones de cardinales tales que $\forall\xi<\beta : (\kappa_\xi \le \lambda_\xi \wedge \lambda_\xi \ge 2)$, entonces*

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi \le \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi.$$

Demostración. Vamos dividir el lema en tres casos:

Caso 1. Supongamos que todos los λ_ξ son infinitos. Entonces, para todo $\xi\in I$, $\lambda_\xi \approx S(\lambda_\xi)$. Definimos

$$f : \bigcup_{\xi\in I} \kappa_\xi \times \{\xi\} \longrightarrow \natural_{\xi\in I} S(\lambda_\xi)$$

tal que para cada $(\gamma, \zeta) \in \bigcup_{\xi\in I} \kappa_\xi \times \{\xi\}$, $f_{\gamma,\zeta} : I \longrightarrow \bigcup_{\xi\in I} S(\lambda_\xi)$ es tal que

$$f_{\gamma,\zeta}(\xi) := \begin{cases} \kappa_\xi & si\ \xi\neq\zeta \\ \gamma & si\ \xi=\zeta \end{cases}$$

Observar que $f_{\gamma,\zeta} \in \natural_{\xi\in I} S(\lambda_\xi)$, pues $\kappa_\xi \le \lambda_\xi < S(\lambda_\xi)$ y $f_{\gamma,\zeta}(\zeta) = \gamma \in \kappa_\zeta$. Veamos que f es inyectiva. Sean $(\gamma, \zeta), (\gamma', \zeta') \in \bigcup_{\xi\in I} \kappa_\xi \times \{\xi\}$ —de esto se sigue que $\gamma\in\kappa_\zeta$ y $\gamma'\in\kappa_{\zeta'}$— tales que $f_{\gamma,\zeta} = f_{\gamma',\zeta'}$, entonces $\gamma = f_{\gamma,\zeta}(\zeta) = f_{\gamma',\zeta'}(\zeta)$; si se diera que $\zeta\neq\zeta'$, se tendría que $\gamma = f_{\gamma,\zeta}(\zeta) = f_{\gamma',\zeta'}(\zeta) = \kappa_\zeta$, pero $\gamma\in\kappa_\zeta$; en consecuencia, $f_{\gamma,\zeta} = f_{\gamma',\zeta}$; por lo cual $\gamma = f_{\gamma,\zeta}(\zeta) = f_{\gamma',\zeta}(\zeta) = \gamma'$; por tanto, $(\gamma, \zeta) = (\gamma', \zeta')$. Concluimos que f es inyectiva, lo cual implica que

$$\sum_{\xi\in I} \kappa_\xi = \Big|\bigcup_{\xi\in I} \kappa_\xi \times \{\xi\}\Big| \le \Big|\natural_{\xi\in I} S(\lambda_\xi)\Big| = \Big|\natural_{\xi\in I} \lambda_\xi\Big| = \prod_{\xi\in I} \lambda_\xi.$$

Caso 2. Supongamos que todos los λ_ξ son finitos. Aquí, se subdividirá en dos subcasos:

(I) Supongamos que I es finito. Usaremos inducción para probar que $\forall A\subseteq I : \sum_{\xi\in A} \kappa_\xi \le \prod_{\xi\in A} \lambda_\xi$.

Si $|A| = 0$, entonces $A = \emptyset$, así que $\sum_{\xi\in A} \kappa_\xi = 0 < 1 = \prod_{\xi\in A} \lambda_\xi$.

Sea $n < |I|$ tal que $\forall A \subseteq I : |A| = n \Longrightarrow \sum_{\xi\in A} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi\in A} \lambda_\xi$. Si $B \subseteq I$ con $|B| = n+1$; tomemos $\zeta \in B$ tal que $\kappa_\zeta = \text{mín}\{\kappa_\xi \mid \xi \in B\}$; entonces $|B\setminus\{\zeta\}| = n$ y $\kappa_\zeta \leq \sum_{B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi$; luego $\sum_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \lambda_\xi$ y, en consecuencia,

$$\sum_{\xi\in B} \kappa_\xi = \Big(\sum_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi\Big) + \kappa_\zeta \leq \Big(\sum_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi\Big) + \Big(\sum_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi\Big)$$

$$\leq 2\cdot\Big(\sum_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi\Big) \leq 2\cdot\Big(\prod_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \kappa_\xi\Big) \leq \lambda_\zeta\cdot\Big(\prod_{\xi\in B\setminus\{\zeta\}} \lambda_\xi\Big) = \prod_{\xi\in B} \lambda_\xi$$

Por el principio de inducción matemática, $\displaystyle\sum_{\xi\in I_1} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi\in I_1} \lambda_\xi$.

(II) Supongamos que I es infinito, es decir $\aleph_0 \leq |I|$. Se tiene que $\forall \xi \in I : \kappa_\xi < \aleph_0$, entonces $\sup\{\kappa_\xi \mid \xi \in I\} \leq \aleph_0 \leq |I|$. Luego, por el teorema 4.4.11,

$$\sum_{\xi\in I} \kappa_\xi = |I|\cdot\sup\{\kappa_\xi \mid \xi\in I\} = |I| < 2^{|I|} = \prod_{\xi\in I} 2 \leq \prod_{\xi\in I} \lambda_\xi.$$

Caso 3. Supongamos que al menos un λ_ξ es infinito y al menos un λ_ξ es finito. Sean $I_0 := \{\xi < \beta \mid \lambda_\xi \geq \aleph_0\}$ e $I_1 := \{\xi < \beta \mid \lambda_\xi < \aleph_0\}$. Aplicando los casos 1 y 2, se tiene

$$\sum_{\xi\in I_0} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi\in I_0} \lambda_\xi \quad \text{y} \quad \sum_{\xi\in I_1} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi\in I_1} \lambda_\xi$$

La pareja $\{I_0, I_1\}$ es una partición de β, así que, por el teorema 4.4.8,

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \big(\sum_{\xi\in I_0} \kappa_\xi\big) + \big(\sum_{\xi\in I_1} \kappa_\xi\big) \quad \text{y} \quad \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \big(\prod_{\xi\in I_0} \kappa_\xi\big)\cdot\big(\prod_{\xi\in I_1} \kappa_\xi\big).$$

Además, $I_1 \neq \emptyset$, así que $\prod_{\xi\in I_1} \kappa_\xi \geq \aleph_0$, en consecuencia,

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \Big(\sum_{\xi\in I_0} \kappa_\xi\Big) + \Big(\sum_{\xi\in I_1} \kappa_\xi\Big) \leq \Big(\prod_{\xi\in I_0} \kappa_\xi\Big) + \Big(\prod_{\xi\in I_1} \kappa_\xi\Big) = \Big(\prod_{\xi\in I_0} \kappa_\xi\Big)\cdot\Big(\prod_{\xi\in I_1} \kappa_\xi\Big) = \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi.$$

†

Teorema 4.4.14 (Lema de König)**.** *Si $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ y $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ son sucesiones de cardinales que cumplen que $\forall \xi < \beta : (\kappa_\xi < \lambda_\xi \wedge 2 \leq \lambda_\xi)$, entonces*

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi.$$

Demostración. Por el lema anterior, $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi$. Supongamos que $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi$ y sea $F : \bigcup_{\xi\in\beta} \kappa_\xi \times \{\xi\} \longrightarrow \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi$ una función biyectiva. Para cada $(\gamma, \zeta) \in \bigcup_{\xi\in\beta} \kappa_\xi$, denotemos $F(\gamma, \zeta) := F_{\gamma,\zeta}$. Dado $\xi < \beta$, sea $B_\xi := \{F_{\gamma,\xi}(\xi) \mid \gamma \in \kappa_\xi\}$, entonces $|B_\xi| \leq \kappa_\xi$ y $B_\xi \subseteq \lambda_\xi$ y, como $\kappa_\xi < \lambda_\xi$, se sigue que $B_\xi \subsetneq \lambda_\xi$, o sea, $\lambda_\xi \setminus B_\xi \neq \emptyset$. Por el axioma de elección, existe una función $f \in \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \setminus B_\xi$, de lo cual, se observa que $f \in \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi$; dado que F es biyectiva, existen un $\zeta < \beta$ y un $\gamma \in \kappa_\zeta$ tales que $F_{\gamma,\zeta} = f$, por lo cual $f(\zeta) \in B_\zeta$; pero esto último no puede ser ya que $f \in \natural_{\xi\in\beta} \lambda_\xi \setminus B_\xi$.

En conclusión, $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta} \lambda_\xi$. †

Corolario 4.4.15. *Si β es un ordinal límite y $(\kappa_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión de cardinales estrictamente creciente con $\forall \xi < \beta : \kappa_\xi \geq 2$, entonces:*

a) $\displaystyle\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi$;

b) $\displaystyle\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \Big(\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi\Big)^{|\beta|}$;

c) $\Big(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|} = \Big(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|}$.

Demostración. a) Tenemos que $\forall \xi<\beta : 2 \leq \kappa_\xi < \kappa_{\kappa+1}$, entonces, por el lema de König,

$$\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta}\kappa_{\xi+1} = \prod_{\xi\in\beta\setminus\{0\}}\kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi.$$

b) Se cumple $\forall\xi<\beta : 2\leq\kappa_\xi\leq\sum_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta$, por lo cual $\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\beta}\big(\sum_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta\big)$, y por el inciso a):

$$\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\beta}\Big(\sum_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta\Big) = \Big(\sum_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta\Big)^{|\beta|}.$$

c) En el inciso b) obtuvimos que $\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \leq \Big(\sum_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta\Big)^{|\beta|}$. Elevando todo a $|\beta|$ obtenemos:

$$\Big(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|} \leq \Big(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|} \leq \Big(\Big(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|}\Big)^{|\beta|} = \Big(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|\cdot|\beta|} = \Big(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\Big)^{|\beta|} = \aleph_\alpha,$$

$|\beta|\cdot|\beta| = |\beta|$ pues $\beta\in\mathbf{Lim}$. †

4.5. Cofinalidad

Definición 4.5.1. Dados α un número ordinal y $A, B\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}$:

1) Decimos que A es *cofinal* en B si $A\subseteq B$ y $\forall\xi\in B : \exists\alpha\in A : \xi\leq\alpha$.

2) Si $f : A\longrightarrow\alpha$, diremos que f *es cofinal en* α (o simplemente cofinal) si $\operatorname{ran}(f)$ es cofinal en α.

3) La *cofinalidad* de α se define como $\operatorname{cf}(\alpha) := \min\{\mu\in\boldsymbol{\mathcal{R}} \mid$ *existe* $f : \mu\longrightarrow\alpha$ *cofinal en* $\alpha\}$.

Recordemos que dados $A\subseteq B\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}$, A es no acotada en B si $\forall\xi\in B : \exists\alpha\in A : \xi<\alpha$. Esto es similar a la definición de cofinal; de hecho, si A es no acotado en B, entonces A es cofinal en B; pero el recíproco no es verdad. Por ejemplo, el conjunto $A = \{3, 1, \omega\}$ es cofinal en $\omega+1$: para todo $\xi\in\omega+1$, se tiene que $\omega\in A$ y $\xi\leq\omega$; pero A sí está acotado en $\omega+1$, $\forall\xi\in A : \xi\leq\omega$ (ω es una cota superior de este).

Si B es una subconjunto de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y existe $\max(B)$, entonces toda subconjunto de B que tenga como elemento a $\max(B)$, será cofinal en B y estará acotado por $\max(B)$. ¿Y qué pasa si no existe $\max(B)$?

Lema 4.5.1. *Si $B\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (B un conjunto) no tiene un máximo, entonces para cada $A\subseteq B$, A es cofinal en B si y solo si A es no acotado en B.*

Demostración. El recíproco claramente es cierto. Supongamos que A es cofinal en B; si $\xi\in B$, existe $\beta\in B$ tal que $\xi<\beta$ (pues B no tiene un máximo), luego existe $\alpha\in A$ tal que $\beta\leq\alpha$, en consecuencia, $\xi<\beta\leq\alpha$; por tanto, A es no acotado en B. †

Teorema 4.5.2. *Para todo $\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$, $\operatorname{cf}(\alpha)\leq\alpha$ y $\operatorname{cf}(\alpha)\in\boldsymbol{\mathcal{C}}$.*

Demostración. Si $\alpha = 0$, 0 es una función tal que su rango ($\operatorname{ran}(0) = 0$) es cofinal en 0, por lo cual $\operatorname{cf}(0) \leq 0$. Si $\alpha \neq 0$, claramente α es cofinal en α, entonces la función $I_d : \alpha \longrightarrow \alpha$, dada por $I_d(\xi) = \xi$, es cofinal en α (pues el $\operatorname{ran}(I_d) = \alpha$); así, $\alpha \in \{\mu \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \textit{existe } f : \mu \longrightarrow \alpha \textit{ es cofinal en } \alpha\}$ y, en consecuencia, $\operatorname{cf}(\alpha) = \text{mín}\{\mu \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \textit{existe } f : \mu \longrightarrow \alpha \textit{ es cofinal en } \alpha\} \leq \alpha$.

Si existe $\beta < \operatorname{cf}(\alpha)$ tal que $\beta \approx \operatorname{cf}(\alpha)$, entonces hay una función biyectiva $f : \beta \longrightarrow \operatorname{cf}(\alpha)$, y por definición de $\operatorname{cf}(\alpha)$, existe una función $h : \operatorname{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ cofinal en α. Veamos que $h \circ f : \beta \longrightarrow \alpha$ es cofinal: si $\xi \in \alpha$ existe $\delta \in \operatorname{cf}(\alpha)$ tal que $\xi \leq h(\delta)$, luego $\delta' := f^{-1}(\delta) \in \beta$ y $(h \circ f)(\delta') = h(f(f^{-1}(\delta))) = h(\delta) \geq \xi$. Por tanto, $h \circ f : \beta \longrightarrow \alpha$ es cofinal en α, lo cual implica que $\operatorname{cf}(\alpha) \leq \beta$, pero supusimos inicialmente que $\beta < \operatorname{cf}(\alpha)$. En conclusión, $\operatorname{cf}(\alpha) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$. †

Teorema 4.5.3. *a)* $\operatorname{cf}(0) = 0$.

b) Si α es un ordinal sucesor, $\operatorname{cf}(\alpha) = 1$.

Demostración. a) Sabemos que para todo ordinal α, se cumple que $0 \leq \alpha$; en particular, $0 \leq \operatorname{cf}(0)$; además, por el teorema 4.5.2, $\operatorname{cf}(0) \leq 0$. Por tanto, $\operatorname{cf}(0) = 0$.

b) Sea α un ordinal sucesor; α tiene un máximo y $S(\text{máx}(\alpha)) = \alpha$, por lo cual $\{\text{máx}(\alpha)\}$ es cofinal en α. La función $f : 1 \longrightarrow \{\text{máx}(\alpha)\}$, definida como $f(0) := \text{máx}(\alpha)$, es cofinal en α. En consecuencia, $\operatorname{cf}(\alpha) \leq 1$, pero no puede ser que $\operatorname{cf}(\alpha) = 0$, así que $\operatorname{cf}(\alpha) = 1$. †

A continuación veamos dos caracterizaciones de la cofinalidad:

Teorema 4.5.4. *Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces*

$$\begin{aligned}\operatorname{cf}(\alpha) &= \text{mín}\{\mu \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \textit{existe } f : \mu \longrightarrow \alpha \textit{ cofinal en } \alpha \textit{ y estrictamente creciente}\}\\ &= \text{mín}\{\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \mid \exists A \subseteq \alpha : |A| = \kappa \ \wedge \ A \textit{ es cofinal en } \alpha\}.\end{aligned}$$

Demostración. Sean $C_s := \{\mu \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \textit{existe } f : \mu \longrightarrow \alpha \textit{ es cofinal en } \alpha \textit{ y estrictamente creciente}\}$ y $C_w := \{\mu \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \textit{existe } f : \mu \longrightarrow \alpha \textit{ es cofinal en } \alpha\}$. Por definición, $\operatorname{cf}(\alpha) = \text{mín}(C_w)$.

Antes que nada, $C_s \neq \emptyset$, pues la función $I_d = \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \alpha\}$ es estrictamente creciente y cofinal en α. Se observa que $C_s \subseteq C_w$ y, de este modo, $\operatorname{cf}(\alpha) = \text{mín}(C_w) \leq \text{mín}(C_s)$. Si $\alpha = 0$, entonces $\operatorname{cf}(\alpha) = 0$, y la función $f := 0$ es cofinal en α y estrictamente creciente, luego $0 = \operatorname{cf}(\alpha) \leq \text{mín}(C_s) \leq 0$. Si α es un ordinal sucesor; entonces, $\operatorname{cf}(\alpha) = 1$ y la función $f : 1 \longrightarrow \alpha$, donde $f := \{0, \text{máx}(\alpha)\}$, es estrictamente creciente y cofinal en α; en consecuencia, $1 = \operatorname{cf}(\alpha) \leq \text{mín}(C_s) \leq 1$; así, $\text{mín}(C_s) = \operatorname{cf}(\alpha) = 1$. Si α es un ordinal límite, sea $f : \operatorname{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ una función cofinal en α y definamos $h : \operatorname{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$, como:

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \textit{si } \xi = 0 \\ \text{máx}\left\{f(\xi),\ \sup\{h(\zeta) \mid \zeta < \xi\}\right\} + 1 & \textit{si } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Claramente, $h(0) < \alpha$, y si $\xi < \operatorname{cf}(\alpha)$ tal que $\forall \zeta < \xi : h(\zeta) < \alpha$, entonces $\sup\{h(\zeta) \mid \zeta < \xi\} < \alpha$ por la minimilidad de $\operatorname{cf}(\alpha)$, luego $\text{máx}\{f(\xi),\ \sup\{h(\zeta) \mid \zeta < \xi\}\} < \alpha$ y así $f(\xi) < \alpha$ pues α es límite; por el PIT, $\forall \xi < \operatorname{cf}(\alpha) : h(\xi) < \alpha$. Ahora, si $\xi, \zeta \in \operatorname{cf}(\alpha)$ de tal forma que $\xi < \zeta$, entonces

$$\begin{aligned}h(\zeta) &= \text{máx}\left\{f(\zeta),\ \sup\{h(\zeta') \mid \zeta' < \zeta\}\right\} + 1\\ &> \text{máx}\left\{f(\zeta),\ \sup\{h(\zeta') \mid \zeta' < \zeta\}\right\} \geq \sup\{h(\zeta') \mid \zeta' < \zeta\} \geq h(\xi);\end{aligned}$$

por tanto, h es estrictamente creciente. Además, si $\beta < \alpha$, como $\operatorname{ran}(f)$ es cofinal en α, existe $\xi < \operatorname{cf}(\alpha)$ tal que $\beta \leq f(\xi)$ y, de este modo, $\beta \leq f(\xi) \leq \text{máx}\left\{f(\xi),\ \sup\{h(\zeta) \mid \zeta < \xi\right\} < h(\xi)$. Tenemos, por ello, que $h : \operatorname{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ es una función estrictamente creciente y cofinal, entonces $\operatorname{cf}(\alpha) \in C_s$ y así $\text{mín}(C_s) \leq \operatorname{cf}(\alpha)$; y ya vimos al principio que $\operatorname{cf}(\alpha) \leq \text{mín}(C_s)$. Por lo tanto, $\text{mín}(C_s) = \operatorname{cf}(\alpha)$.

Por otra parte, sea $C_c := \{\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \mid \exists A \subseteq \alpha : |A| = \kappa \ \wedge \ A \textit{ es cofinal en } \alpha\}$; $C_c \neq \emptyset$ pues $|\alpha| \in C_c$. Como vimos en el párrafo anterior, existe una función $f : \operatorname{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ estrictamente creciente y cofinal en α; esto implica que $f:\mathrm{cf}(\alpha)\longrightarrow \mathrm{ran}(f)$ es biyectiva, por lo cual $|\,\mathrm{ran}(f)|=\mathrm{cf}(\alpha)$, y como $\mathrm{ran}(f)$ es cofinal en α, se sigue que $\mathrm{cf}(\alpha)\in C_c$, y con ello $\mathrm{mín}(C_c)\leq \mathrm{cf}(\alpha)$. Ahora bien, sea $A\subseteq\alpha$ tal que $|A|=\mathrm{mín}(C_c)$ y A es cofinal en α; sabemos que existe $h:\mathrm{mín}(C_c)\longrightarrow A$ una función biyectiva, entonces $\mathrm{mín}(C_c)\in C_w$, luego $\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{mín}(C_w)\leq \mathrm{mín}(C_c)$. Por lo tanto, $\mathrm{mín}(C_c)=\mathrm{cf}(\alpha)$. †

Corolario 4.5.5. *Si α es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un ordinal límite.*

Demostración. Supongamos que α un ordinal límite. Por el teorema 4.5.4, existe una función $f:\mathrm{cf}(\alpha)\longrightarrow\alpha$ cofinal en α y estrictamente creciente. Si $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un ordinal sucesor, existe $\delta\in\mathrm{cf}(\alpha)$ tal que $\mathrm{máx}(\mathrm{cf}(\alpha))=\delta$, entonces $f(\delta)\in\alpha$, de aquí que $f(\delta)+1\in\alpha$ (α es límite), luego existe un $\zeta\in\mathrm{cf}(\alpha)$ tal que $f(\delta)+1\leq f(\zeta)$, por lo cual $f(\delta)<f(\zeta)$; pero f es estrictamente creciente y $\forall\xi\in\mathrm{cf}(\alpha):\xi\leq\delta$, en consecuencia, $f(\zeta)\leq f(\delta)$. Obtenemos una contradicción, por ende, concluimos que $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un ordinal límite. †

Teorema 4.5.6. *Sea $f:\alpha\longrightarrow B$ es una función con $\alpha\leq\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $B\subseteq\boldsymbol{\mathcal{R}}$.*

a) Si para cada $\xi<\alpha$:
   (i) $\xi+1<\alpha\Longrightarrow f(\xi)<f(\xi+1)$, y
   (ii) $\xi\in\mathbf{Lim}\Longrightarrow\forall\zeta<\xi:f(\zeta)<f(\xi)$;
   entonces, f es estrictamente creciente.

b) Si $f:\alpha\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{R}}$ es una función estrictamente creciente, entonces $\forall\xi<\alpha:\xi\leq f(\xi)$.

Demostración. a) Vamos a probar que $\forall\zeta<\alpha:\forall\xi<\zeta:f(\xi)<f(\zeta)$ haciendo inducción en ζ.

Para $\zeta=0$, es claro que $\forall\xi<0:f(\xi)<f(0)$.

Supongamos que para $\zeta<\alpha$ se cumple $\forall\xi<\zeta:f(\xi)<f(\zeta)$. Si $\zeta+1<\alpha$ y $\xi<\zeta+1$, entonces $\xi<\zeta$ o $\xi=\zeta$; cuando $\xi=\zeta$, por la hipótesis (i), $f(\xi)<f(\xi+1)=f(\zeta)<f(\zeta+1)$; cuando $\xi<\zeta$, por hipótesis de inducción, $f(\xi)<f(\zeta)<f(\zeta+1)$. Por tanto, $\forall\xi<\zeta+1:f(\xi)<f(\zeta+1)$.

Supongamos que $\zeta\in\mathbf{Lim}$ tal que para todo $\xi<\zeta$ se cumple que $\forall\xi'<\xi:f(\xi')<f(\xi)$; entonces se cumple que $\forall\zeta<\xi:f(\zeta)<f(\xi)$, por la hipótesis (ii).

Por el principio de inducción transfinita, $\forall\zeta<\alpha:\forall\xi<\zeta:f(\xi)<f(\zeta)$, es decir, f es estrictamente creciente.

b) La proposición $\forall\xi<\alpha:\xi\leq f(\xi)$ es verdadera por el teorema 2.3.1. †

No solo existe una función estrictamente creciente y cofinal, sino que es posible construir una función estrictamente creciente y cofinal a partir de una que solo es cofinal:

Teorema 4.5.7. *Si γ es un ordinal límite y $f:\mathrm{cf}(\gamma)\longrightarrow\gamma$ es una función cofinal en γ y $\beta<\gamma$, entonces existe una función $g:\mathrm{cf}(\gamma)\longrightarrow\mathrm{cf}(\gamma)$ estrictamente creciente tal que $f\circ g:\mathrm{cf}(\gamma)\longrightarrow\gamma$ es estrictamente creciente, cofinal en γ y $\forall\xi<\mathrm{cf}(\gamma):\beta\leq(f\circ g)(\xi)<\gamma$.*

Demostración. Para cada $\alpha<\mathrm{cf}(\gamma)$ el conjunto $\{f(\xi)\mid\alpha<\xi<\mathrm{cf}(\gamma)\}$ es cofinal en γ; de lo contrario, si $\{f(\xi)\mid\alpha<\xi<\mathrm{cf}(\gamma)\}$ no es cofinal en γ para algún α, como $\{f(\xi)\mid\xi<\mathrm{cf}(\gamma)\}$ es cofinal en γ, se debe tener que $\{f(\xi)\mid\xi\leq\alpha\}$ es cofinal en γ, de modo que $f_{|\alpha+1}:\alpha+1\longrightarrow\gamma$ es cofinal en γ donde $\alpha+1<\mathrm{cf}(\gamma)$, pero esto sería una contradicción. Lo anterior significa que para cualquier $\delta<\gamma$ y todo $\alpha<\mathrm{cf}(\gamma)$ existe $\xi<\mathrm{cf}(\gamma)$ tal que $\alpha<\xi$ y $\delta<f(\xi)$.

Definamos $g:\mathrm{cf}(\gamma)\longrightarrow\mathrm{cf}(\gamma)$ como:

(i) $g(0):=\mathrm{mín}\{\xi'<\mathrm{cf}(\gamma)\mid\beta\leq f(\xi')\wedge f(0)<f(\xi')\}$;

(*ii*) si $\xi+1 < \mathrm{cf}(\gamma)$, sea $g(\xi+1) := \min\{\xi' < \mathrm{cf}(\gamma) \mid f(g(\xi)) < f(\xi') \wedge f(\xi+1) < f(\xi') \wedge g(\xi) < \xi'\}$;

(*iii*) si $\xi \in \mathbf{Lim} \cap \mathrm{cf}(\gamma)$, tomemos

$$g(\xi) := \min\big\{\xi' < \mathrm{cf}(\gamma) \mid \sup\{f(g(\zeta)) \mid \zeta < \xi\} < f(\xi') \wedge f(\xi) < f(\xi') \wedge \sup\{g(\zeta') \mid \zeta' < \xi\} < g(\xi')\big\}.$$

Para todo $\xi < \mathrm{cf}(\gamma)$ se cumple:

(*i*) $g(\xi) < g(\xi+1)$ si $\xi+1 < \mathrm{cf}(\gamma)$;

(*ii*) si $\xi \in \mathbf{Lim}$, entonces $\forall\zeta < \xi : g(\zeta) \leq \sup\{g(\zeta') \mid \zeta' < \xi\} < g(\xi)$.

Por lo tanto, debido al teorema 4.5.6, g es estrictamente creciente.

También se satisface que:

(*i*) $\beta \leq f(g(0))$;

(*ii*) $f(g(\xi)) < f(g(\xi+1))$ para cada $\xi < \mathrm{cf}(\gamma)$ con $\xi+1 < \mathrm{cf}(\gamma)$;

(*iii*) si $\xi \in \mathbf{Lim} \cap \mathrm{cf}(\gamma)$, entonces $\forall\zeta < \xi : f(g(\zeta)) \leq \sup\{f(g(\zeta')) \mid \zeta' < \xi\} < f(g(\xi))$.

Así que, por el teorema 4.5.6, $f \circ g$ es estrictamente creciente. Es claro que $\forall\xi < \mathrm{cf}(\gamma) : f(g(\xi)) \geq \beta$.

Además, de la definición de g, se cumple que $f(0) < f(g(0))$; $f(\xi+1) < f(g(\xi+1))$ si $\xi+1 < \mathrm{cf}(\gamma)$; y $f(\xi) < f(g(\xi))$ si $\xi \in \mathbf{Lim} \cap \mathrm{cf}(\gamma)$. En resumen, $\forall\xi < \mathrm{cf}(\gamma) : f(\xi) < f(g(\xi))$, en consecuencia, $\gamma = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \mathrm{cf}(\gamma)\} \leq \sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \mathrm{cf}(\gamma)\}$; y como $\{f(g(\xi)) \mid \xi < \mathrm{cf}(\gamma)\} \subseteq \gamma$, resulta que $\sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \mathrm{cf}(\gamma)\} \leq \gamma$. En conclusión, $\sup\{f(g(\xi)) \mid \xi < \mathrm{cf}(\gamma)\} = \gamma$, lo cual implica que $\mathrm{ran}(f \circ g)$ es cofinal en γ. †

Definición 4.5.2. Si $f : \alpha \longrightarrow \mathcal{R}$ es una función, con $\alpha \in \mathcal{R}$ o $\alpha = \mathcal{R}$, entonces:

1) f es *continua* si para todo $\gamma \in \mathbf{Lim} \cap \alpha$ se tiene que $f(\gamma) = \bigcup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} = \bigcup f[\gamma]$;

2) f es *normal* si f es continua y estrictamente creciente.

Teorema 4.5.8. *Si $\alpha \leq \mathcal{R}$ y $f : \alpha \longrightarrow \mathcal{R}$ es una función estrictamente creciente; entonces, f es continua si y solo si para todo $b \in \mathcal{P}(\alpha) \setminus \{\emptyset\}$, si $\sup(b) < \alpha$, entonces $f(\sup(b)) = \sup(f[b])$.*

Demostración. Supongamos, primero, que f es continua. Sea b un subconjunto no vacío de α tal que $\sup(b) < \alpha$; tenemos dos casos:

(*i*) Si $\sup(b) \in b$, entonces $f(\sup(b)) \in f[b]$ y $\forall\xi \in b : f(\xi) \leq f(\sup(b))$ (pues f es estrictamente creciente), por lo cual $\sup(f[b]) = f(\sup(b))$.

(*ii*) Si $\sup(b) \notin b$; entonces $\sup(b)$ es un ordinal límite ($x < \sup(b)$ implica que $x < b'$ para algún $b' \in b$, de este modo, $x+1 \leq b' < \sup(b)$); luego, dado que f es continua, $f(\sup(b)) = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \sup(b)\}$; además, $\sup\{f(\xi) \mid \xi < \sup(b)\} = \sup\{f(\xi) \mid \xi \in b\}$ —porque f es estrictamente creciente—; en consecuencia, $f(\sup(b)) = \sup\{f(\xi) \mid \xi \in b\} = \sup(f[b])$.

Por otra parte, supongamos que $\forall b \in \mathcal{P}(\alpha) \setminus \{\emptyset\} : \sup(b) < \alpha \Longrightarrow f(\sup(b)) = \sup(f[b])$. Si γ es un ordinal límite menor que α, entonces $\sup(\gamma) = \gamma$, luego $f(\gamma) = f(\sup(\gamma)) = \sup(f[\gamma])$. Por tanto, f es continua. †

Teorema 4.5.9. *Si α es un ordinal límite, entonces existe una función $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ normal y cofinal en α.*

Demostración. Por el teorema 4.5.4, existe $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ una función estrictamente creciente y cofinal en α. Definamos $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ como:

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \textit{si } \xi = 0 \textit{ o } \xi \textit{ es un ordinal sucesor} \\ \sup\{f(\zeta) \mid \zeta < \xi\} & \textit{si } \xi \textit{ es un ordinal límite} \end{cases}$$

Vamos a demostrar que g es normal y cofinal en α.

Claramente, $\forall \xi \in \mathrm{cf}(\alpha) \setminus \mathbf{Lim} : g(\xi) = f(\xi)$. Además, para cualquier $\gamma \in \mathrm{cf}(\alpha) \cap \mathbf{Lim}$ se cumple que $\forall \xi < \gamma : f(\xi) < f(\gamma)$, luego $g(\gamma) = \sup\{f(\zeta) \mid \zeta < \gamma\} \leq f(\gamma)$. Por ende, $\forall \delta \in \mathrm{cf}(\alpha) : g(\delta) \leq f(\delta)$.

Veamos que g es estrictamente creciente. Sean $\gamma, \delta \in \mathrm{cf}(\alpha)$ tales que $\gamma < \delta$. Si $\delta \in \mathbf{Lim}$, entonces $g(\gamma) \leq f(\gamma) < f(\gamma+1) \leq \sup\{f(\xi) \mid \xi < \delta\} = g(\delta)$. Si δ es un ordinal sucesor, en ese caso $g(\gamma) \leq f(\gamma) < f(\delta) = g(\delta)$.

Ahora probemos que g es normal. Sea $\gamma \in \mathrm{cf}(\alpha)$ un ordinal límite. Entonces, $\forall \xi < \gamma : g(\xi) \leq f(\xi)$, por lo cual $\sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} = g(\gamma)$. Además, para todo $\xi < \gamma$ se cumple que $f(\xi) < f(\xi+1) = g(\xi+1) \leq \sup\{g(\zeta) \mid \zeta < \gamma\}$; en consecuencia, $g(\gamma) = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\}$. Por tanto, $g(\gamma) = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} = \sup\{g(\xi) \mid \xi < \gamma\}$.

Finalmente, veamos que $\mathrm{ran}(g)$ es cofinal en α. Si $\delta < \alpha$, como $\mathrm{ran}(f)$ es cofinal en α, existe $\xi \in \mathrm{cf}(\alpha)$ tal que $\delta \leq f(\xi)$, y dado que $\mathrm{cf}(\alpha) \in \mathbf{Lim}$, se tiene que $\xi+1 \in \mathrm{cf}(\alpha)$ y $\delta \leq f(\xi) < f(\xi+1) = g(\xi+1)$. †

Lema 4.5.10. *Sean α, β y γ números ordinales. Si $f : \alpha \longrightarrow \beta$ y $h : \beta \longrightarrow \gamma$ son funciones cofinales y, además, h es creciente; entonces, $h \circ f : \alpha \longrightarrow \gamma$ es cofinal en γ.*

Demostración. Si $\delta \in \gamma$, como $\mathrm{ran}(h)$ es cofinal en γ, existe $\zeta \in \beta$ tal que $\delta \leq h(\zeta)$; luego existe $\xi \in \alpha$ tal que $\zeta \leq f(\xi)$, pues $\mathrm{ran}(f)$ es cofinal en β; y como h es creciente, se sigue que $\delta \leq h(\zeta) \leq h(f(\xi))$, o sea, $\delta \leq h \circ f(\xi)$. Por lo tanto, $\mathrm{ran}(h \circ f)$ es cofinal en γ. †

Teorema 4.5.11. *Supongamos que α y β son ordinales límites. Si $f : \alpha \longrightarrow \beta$ es una función cofinal y creciente, entonces $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.*

Demostración. Sea $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ una función cofinal en α. Por el lema anterior, $f \circ g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \beta$ es cofinal en β, lo cual implica que $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

Sea $h : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ una función cofinal en β. Dado $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$, se cumple que $h(\xi) < \beta$, por lo cual existe $\gamma < \alpha$ tal que $h(\xi) \leq f(\gamma)$, porque f es cofinal en β; esto nos dice que $\{\gamma < \alpha \mid h(\xi) \leq f(\gamma)\} \neq \emptyset$. Por lo anterior, podemos definir $l : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ como $l(\xi) := \mathrm{mín}\{\gamma < \alpha \mid h(\xi) \leq f(\gamma)\}$ para cada $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$; notar que $h(\xi) \leq f(l(\xi))$. Veamos que l es cofinal en α. Si $\delta < \alpha$, entonces $f(\delta) < \beta$, así que existe $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$ de tal modo que $f(\delta) \leq h(\xi) \leq f(l(\xi))$; y como f es creciente obtenemos que $\delta \leq l(\xi)$. Así, $l : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ es cofinal en α, por consiguiente, $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$. †

Consecuencia inmediata de este teorema es lo siguiente:

Corolario 4.5.12. *Si α es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.*

Demostración. Sea $f : \alpha \longrightarrow \aleph_\alpha$ definida por $f(\xi) := \aleph_\xi$ para todo $\xi < \alpha$. La función f es creciente y cofinal. †

Definición 4.5.3. Para cualquier α ordinal límite decimos que:

1) α es *regular* si $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$;

2) α es *singular* si $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

Teorema 4.5.13. *a) $\aleph_0$ es regular.*

b) Si α es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}(\alpha)$ es regular.

c) Todo cardinal sucesor e infinito es regular.

Demostración. a) Por el teorema 4.5.2, $\mathrm{cf}(\aleph_0) \leq \aleph_0$, y por el corolario 4.5.5, $\mathrm{cf}(\aleph_0)$ es un ordinal límite; en consecuencia, $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$.

b) Por el teorema 4.5.4, existe $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ función estrictamente creciente y cofinal. Además, por el corolario 4.5.5, $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un ordinal límite. Entonces, del teorema 4.5.11, se sigue que $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

c) Sea $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$; probaremos que $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. Sea $f : \mathrm{cf}(\kappa^+) \longrightarrow \kappa^+$ una función cuyo rango es cofinal en κ^+. Entonces, $\bigcup(\mathrm{ran}(f)) = \sup(\mathrm{ran}(f)) = \kappa^+$, luego, por el corolario 4.4.10:
$$\kappa^+ = |\kappa^+| = \left|\bigcup(\mathrm{ran}(f))\right| = \left|\bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)} f(\xi)\right| \leq \mathrm{cf}(\kappa^+) \cdot \sup\{|f(\xi)| \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)\}.$$
Ahora bien, $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa^+) : |f(\xi)| \leq f(\xi) < \kappa^+$, por ello $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa^+) : |f(\xi)| \leq \kappa$, consecuentemente, $\sup\{|f(\xi)| \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)\} \leq \kappa$, y de este modo:
$$\kappa^+ = |\kappa^+| \leq \mathrm{cf}(\kappa^+) \cdot \sup\{|f(\xi)| \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa^+)\} \leq \mathrm{cf}(\kappa^+) \cdot \kappa.$$
Si $\mathrm{cf}(\kappa^+) \leq \kappa$, entonces $\mathrm{cf}(\kappa^+) \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, lo cual nos dice que $\kappa^+ \leq \mathrm{cf}(\kappa^+) \cdot \kappa \leq \kappa$, pero esto no puede ser. Por tanto, $\kappa < \mathrm{cf}(\kappa^+)$ y así $\kappa^+ \leq \mathrm{cf}(\kappa^+)$; y ya se sabe que $\mathrm{cf}(\kappa^+) \leq \kappa^+$. En consecuencia, $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. †

Como consecuencia del inciso c) del teorema anterior:

Corolario 4.5.14. *Si κ es un cardinal singular, entonces κ es un cardinal límite.*

Ya vimos un teorema acerca de cardinales regulares; corresponde, entonces, un resultado sobre cardinales singulares.

Teorema 4.5.15. *a) Para todo $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \aleph_0$; lo cual implica que $\aleph_{\alpha+\omega}$ es singular.*

b) $\aleph_\omega$ es el mínimo de los cardinales singulares.

c) La clase de los cardinales singulares no está acotada en $\boldsymbol{\mathcal{R}}$.

Demostración. a) Definamos $f : \omega \longrightarrow \aleph_{\alpha+\omega}$ como $f(n) := \aleph_{\alpha+n}$ para todo $n \in \omega$. Si $n < m < \omega$, entonces $\alpha+n < \alpha+m$, luego $\aleph_{\alpha+n} < \aleph_{\alpha+m}$; por tanto f es creciente. Por el teorema 4.3.8, $\aleph_{\alpha+\omega} = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha+\omega\}$; además, $\alpha+\omega = \sup\{\alpha+n \mid n < \omega\}$; así que por el lema 3.1.9, $\aleph_{\alpha+\omega} = \sup\{\aleph_{\alpha+n} \mid n < \omega\}$.En consecuencia, $f : \omega \longrightarrow \aleph_{\alpha+\omega}$ es creciente y cofinal, de modo que, por el teorema 4.5.11, $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \mathrm{cf}(\omega) = \mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$. Luego $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \aleph_0 < \aleph_{\alpha+\omega}$ y así $\aleph_{\alpha+\omega}$ es singular.

b) Por el inciso a), $\aleph_\omega$ es singular. Ahora bien, todos los cardinales infinitos menores que $\aleph_\omega$ son de la forma $\aleph_n$ con $n \in \omega$; pero, todos estos cardinales son regulares por el teorema 4.5.13. Por tanto, $\aleph_\omega$ es el mínimo de los cardinales singulares infinitos.

c) Si α es un número ordinal cualquiera, entonces $\alpha \leq \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\omega}$ y $\aleph_{\alpha+\omega}$ es singular; lo cual prueba que la clase de los cardinales singulares no está acotada en $\boldsymbol{\mathcal{R}}$. †

Para acabar este capítulo, vamos a ver que todo cardinal infinito κ se puede ver como una suma de $\mathrm{cf}(\kappa)$ cardinales.

Teorema 4.5.16. *Sea $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$.*

a) κ es la suma de $\mathrm{cf}(\kappa)$ cardinales menores que κ. Más aun, dado $\alpha < \kappa$, existe una sucesión de cardinales $(\lambda_\xi)_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)}$ tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \alpha \leq \lambda_\xi < \kappa$ y $\sum_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi = \kappa$

b) Si κ es un cardinal límite y $\beta < \kappa$, existe una sucesión estrictamente creciente $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ de cardinales tal que:

$$\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \beta < \lambda_\xi < \kappa \qquad \wedge \qquad \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa.$$

c) Si κ es un cardinal singular de cofinalidad no numerable y $\beta < \kappa$, existe una sucesión normal de cardinales singulares con las mismas propiedades que en b).

Demostración. a) Vamos a probar este inciso solo para el caso en que κ es un cardinal sucesor; el otro caso se verificará en el inciso b). Si κ es un cardinal sucesor, entonces $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Tomemos λ un cardinal cualquiera menor que κ pero diferente de 0, entonces la sucesión constante $(\lambda)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ cumple que:

$$\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda = \sum_{\xi<\kappa} \lambda = \kappa \cdot \sup\{\lambda \mid \xi < \kappa\} = \kappa \cdot \lambda = \kappa.$$

b) Sean κ es un cardinal límite y $\beta < \kappa$. Tomemos $h : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ una función estrictamente creciente y cofinal en κ. Definamos $|h| : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ como $|h|(\xi) := |h(\xi)|$. Vamos a probar que $|h|$ es cofinal. Si $x \in \kappa$, existe $\xi \in \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $x \leq h(\xi)$; como $h(\xi) < |h(\xi)|^+ < \kappa$, existe otro $\zeta < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $|h(\xi)|^+ < h(\zeta)$; luego $|h(\xi)|^+ = ||h(\xi)|^+| \leq |h(\zeta)|$ y, en consecuencia, $x \leq h(\xi) < |h(\xi)|^+ \leq |h(\zeta)|$. Así pues, $|h| : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ es cofinal en κ. Por el teorema 4.5.7, existe una función $g : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $|h| \circ g : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ es estrictamente creciente y cofinal en κ y $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \beta < (|h| \circ g)(\xi)$. Sea $f := |h| \circ g$; entonces $f : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ es estrictamente creciente, $\sup\{f(\xi) \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$ y $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \beta < f(\xi)$; además, $\mathrm{ran}(f) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}$ pues $\mathrm{ran}(|h|) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}$. Para acabar,

$$\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} f(\xi) = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \sup\{f(\xi) \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \kappa = \kappa.$$

c) Supongamos que κ es un cardinal tal que $\omega < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ y sea $\beta < \kappa$. Se sigue que κ es un cardinal límite, por lo cual existe una sucesión de cardinales $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ estrictamente creciente tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \text{máx}\{\beta, \mathrm{cf}(\kappa)\} < \lambda_\xi < \kappa$ y $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$. Observar que $|\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}| = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Definamos la sucesión $(\sigma_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ como:

(*i*) Sea $\sigma_0 := \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \omega\}$. Note que $\mathrm{cf}(\sigma_0) = \omega < \lambda_0 < \sigma_0$ y $\beta < \lambda_0 < \sigma_0 < \kappa$.

(*ii*) Dados $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ y un σ_ξ cardinal singular con $\beta < \sigma_\xi < \kappa$, sea $\xi' < \mathrm{cf}(\kappa)$ de tal forma que $\text{máx}\{\sigma_\xi, \lambda_\xi\} < \lambda_{\xi'}$, y tomemos $\sigma_{\xi+1} := \sup\{\lambda_{\xi'+n} \mid n < \omega\}$; en consecuencia, $\beta < \sigma_\xi < \lambda_{\xi'} < \sigma_{\xi+1}$ y $\mathrm{cf}(\sigma_{\xi+1}) = \omega < \lambda_{\xi'} < \sigma_{\xi+1}$, y además $\lambda_\xi < \lambda_{\xi'} < \sigma_{\xi+1}$.

(*iii*) Si $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$ es un ordinal límite distinto $(\gamma \geq \omega)$, pongamos $\sigma_\gamma := \sup\{\sigma_\xi \mid \xi < \gamma\}$. Luego $\forall \xi < \gamma : \sigma_\xi < \sigma_\gamma < \kappa$ y $\mathrm{cf}(\sigma_\gamma) \leq \gamma < \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda_0 < \sigma_0 < \sigma_\gamma$.

Por el PIT $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \mathrm{cf}(\sigma_\xi) < \sigma_\xi \wedge \beta < \sigma_\xi < \kappa$. Por el teorema 4.5.6, $(\sigma_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es estrictamente creciente. Dicha sucesión es normal por definición de σ_ξ en iii). Vamos ahora a probar que $\{\sigma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ es cofinal en κ. Si $\alpha < \kappa$ existe $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $\alpha < \lambda_\xi$, y por la definición de $\sigma_{\xi+1}$ en ii), tenemos $\lambda_\xi < \sigma_{\xi+1}$, por lo cual $\alpha < \sigma_{\xi+1}$. Por tanto, $\sup\{\sigma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$, en consecuencia:

$$\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \sigma_\xi = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \sup\{\sigma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \kappa = \kappa.$$

†

Capítulo 5

Propiedades de los cardinales de la forma κ^{λ}

En el capítulo 4 vimos que el cálculo de la adición y producto de números cardinales infinitos es bastante fácil, a saber: si $\kappa,\, \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$ y alguno es infinito, entonces $\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \text{máx}\{\kappa,\, \lambda\}$. También, tenemos una forma concreta de saber el valor de una suma infinita (teorema 4.4.11). Pero, para las potencias de cardinales y los productos infinitos no sabemos mucho. Hasta ahora, solo tenemos unas cotas: $\lambda^+ \leq 2^{\lambda}$; $\kappa^{\lambda} \leq 2^{\lambda}$ si $\kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \aleph_0$ (teorema 4.3.5); para productos infinitos tenemos el lema de König. En este capítulo vamos a enfocarnos en hallar los posibles valores de los cardinales κ^{λ}, cuando algún cardinal es infinito; haremos lo mismo para los productos infinitos.

5.1. Preliminares

Vamos a usar la relaciones $<_c$, $\leq_c$, ${}_c\!>$ y ${}_c\!\geq$, las cuales definimos así:

- $\kappa <_c \alpha$ si y solo si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\kappa < \alpha$;
- $\kappa \leq_c \alpha$ si y solo si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\kappa \leq \alpha$;
- $\kappa \;{}_c\!\!> \alpha$ si y solo si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\kappa > \alpha$;
- $\kappa \;{}_c\!\!\geq \alpha$ si y solo si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\kappa \geq \alpha$.

Para cualesquiera $\alpha,\, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ definimos :

- $(\alpha,\, \beta) := \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \alpha < \xi < \beta\}$;
- $[\alpha,\, \beta) := \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \alpha \leq \xi < \beta\}$;
- $(\alpha,\, \beta] := \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \alpha < \xi \leq \beta\}$;
- $[\alpha,\, \beta] := \{\xi \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \mid \alpha \leq \xi \leq \beta\}$.

Llamamos a estos conjuntos *intervalos*. A partir de estos también definimos los intervalos:
$(\alpha,\, \beta)_{\mathcal{C}} := (\alpha,\, \beta) \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}$; $[\alpha,\, \beta)_{\mathcal{C}} := [\alpha,\, \beta) \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}$; $(\alpha,\, \beta]_{\mathcal{C}} := (\alpha,\, \beta] \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}$, y $[\alpha,\, \beta]_{\mathcal{C}} := [\alpha,\, \beta] \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Antes de comenzar, vamos a ver dos resultados que serán importantes en el desarrollo de la teoría:

Lema 5.1.1. *a) Si* $A \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{R}})$ *y* $\gamma \in A$, *entonces* $\sup(A) = \sup\{\xi \mid \gamma \leq \xi \in A\}$.

b) Si A y B son subconjuntos de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $f : A \longrightarrow B$ es creciente, entonces, para cada $\xi_0 \in A$ se cumple que $\sup\{f(\xi) \mid \xi \in A\} = \sup\{f(\xi) \mid \xi_0 \le \xi \in A\}$.

Demostración. Claramente, $\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\} \subseteq A$, luego $\sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\} \le \sup(A)$. Dado $\zeta \in A$: si $\zeta < \gamma$, se cumple que $\zeta < \gamma \le \sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$; y si $\gamma \le \zeta$, entonces $\zeta \in \{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$, así, $\zeta \le \sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$; o sea, $\forall \zeta \in A : \zeta \le \sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$, y con ello $\sup(A) \le \sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$. Por tanto, $\sup(A) = \sup\{\xi \mid \gamma \le \xi \wedge \xi \in A\}$.

El inciso b), se cumple aplicando el caso a) para $A' := \operatorname{ran}(f)$ y $\gamma' := f(\xi_0)$. †

Lema 5.1.2. *a) Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\beta < \operatorname{cf}(\alpha)$, entonces ${}^{\beta}\alpha = \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\}$. Más aun, para todo $\delta < \alpha$, $\bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \delta \le \gamma < \alpha\}$.*

b) Si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, $\lambda <_c \operatorname{cf}(\kappa)$, $\mu <_c \kappa$ y κ es un cardinal límite, entonces ${}^{\lambda}\kappa = \bigcup\{{}^{\lambda}\nu \mid \mu \le \nu <_c \kappa\}$.

Demostración. a) Como $\beta < \operatorname{cf}(\alpha)$, ninguna función de la forma $f : \beta \longrightarrow \alpha$ puede ser cofinal en α, esto es, existe $\gamma < \alpha$ tal que $\forall \xi < \beta : f(\xi) < \gamma$, lo cual significa que $\operatorname{ran}(f) \subseteq \gamma$. Así pues, para cualquier $f \in {}^{\beta}\alpha$ existe $\gamma < \alpha$ tal que $f \in {}^{\beta}\gamma$. Por tanto, ${}^{\beta}\alpha \subseteq \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, y claramente $\bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\} \subseteq {}^{\beta}\alpha$, en consecuencia, ${}^{\beta}\alpha = \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\}$. Ahora, si $\delta < \alpha$, tendremos que para toda $\gamma < \delta$, ${}^{\beta}\gamma \subseteq^{\beta} \delta$, entonces $\bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \delta\} \subseteq^{\beta} \delta$, y con ello
$$\bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \gamma < \delta \wedge \delta \le \gamma < \alpha\} = \bigcup\{{}^{\beta}\gamma \mid \delta \le \gamma < \alpha\}.$$

b) Por el inciso a), ${}^{\lambda}\kappa = \bigcup\{{}^{\lambda}\gamma \mid \gamma < \kappa\}$. Si $f \in {}^{\lambda}\kappa$ y $\gamma < \kappa$ tal que $f \in {}^{\lambda}\gamma$, como κ es un cardinal límite, entonces $\gamma \le |\gamma|^+ < \kappa$ y $f \in {}^{\lambda}|\gamma|^+$. Así, ${}^{\lambda}\kappa \subseteq \bigcup\{{}^{\lambda}\nu \mid \nu <_c \kappa\}$ y consiguientemente ${}^{\lambda}\kappa = \bigcup\{{}^{\lambda}\nu \mid \nu <_c \kappa\} = \bigcup\{{}^{\lambda}\nu \mid \mu \le \nu <_c \kappa\}$. †

Teorema 5.1.3. *a) Si $\kappa \;{}_c\!\ge 2$ y $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\aleph_\alpha < \operatorname{cf}(\kappa^{\aleph_\alpha})$.*

b) Si $\kappa \;{}_c\!\ge \aleph_0$, entonces $\kappa < \kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}$.

Demostración. a) Sea $f : \aleph_\alpha \longrightarrow \kappa^{\aleph_\alpha}$ una función cualquiera. Nuestro objetivo es probar que $\operatorname{ran}(f)$ no es cofinal en $\kappa^{\aleph_\alpha}$. Definamos $\Phi : \bigcup_{\xi<\aleph_\alpha} f(\xi) \times \{\xi\} \longrightarrow \sup(\operatorname{ran}(f))$ tal que para todo $\xi < \aleph_\alpha$ y todo $\beta \in f(\xi)$, $\Phi(\beta, \xi) := \beta$. Esta función es sobreyectiva, pues si $\beta \in \sup(\operatorname{ran}(f))$, existe $\xi < \aleph_\alpha$ tal que $\beta \in f(\xi)$, luego $(\beta, \xi) \in \operatorname{dom}(\Phi)$ y $\Phi(\beta, \xi) = \beta$. Por el teorema 4.1.10,
$$|\sup(\operatorname{ran}(f))| \le |\bigcup_{\xi<\aleph_\alpha} f(\xi) \times \{\xi\}| = \sum_{\xi<\aleph_\alpha} |f(\xi)|. \tag{5.1}$$

Por otra parte, $\forall \xi < \aleph_\alpha : |f(\xi)| \le f(\xi) < \kappa^{\aleph_\alpha}$ y $\kappa^{\aleph_\alpha} > 2$, de modo que por el lema de König tenemos que $\sum_{\xi<\aleph_\alpha} |f(\xi)| < \prod_{\xi<\aleph_\alpha} \kappa^{\aleph_\alpha} = (\kappa^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = \kappa^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = \kappa^{\aleph_\alpha}$. Esto último, junto con la desigualdad (5.1), nos lleva a $|\sup(\operatorname{ran}(f))| \le \sum_{\xi<\aleph_\alpha} |f(\xi)| < \kappa^{\aleph_\alpha}$, así que $\sup(\operatorname{ran}(f)) < \kappa^{\aleph_\alpha}$.

En resumen, para cualquier función $f : \aleph_\alpha \longrightarrow \kappa^{\aleph_\alpha}$ se cumple que $\sup(\operatorname{ran}(f)) < \kappa^{\aleph_\alpha}$. Es decir, ninguna función de la forma $f : \aleph_\alpha \longrightarrow \kappa^{\aleph_\alpha}$ es cofinal en $\kappa^{\aleph_\alpha}$. Por lo tanto, $\aleph_\alpha < \operatorname{cf}(\kappa^{\aleph_\alpha})$.

b) Sea $f : \operatorname{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ una función cofinal y definamos $\Phi : \bigcup_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} f(\xi) \times \{\xi\} \longrightarrow \kappa$ de tal modo que $\Phi(\beta, \xi) := \beta$. Si $\beta < \kappa$, como $\operatorname{ran}(f)$ es cofinal en κ, existe $\xi < \operatorname{cf}(\kappa)$ tal que $\beta < f(\xi)$, de lo cual $(\beta, \xi) \in \operatorname{dom}(\Phi)$ y $\Phi(\beta, \xi) = \beta$. Por tanto, $\Phi : \bigcup_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} f(\xi) \times \{\xi\} \longrightarrow \kappa$ es sobreyectiva y, en consecuencia, $\kappa \le |\bigcup_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} f(\xi) \times \{\xi\}| = \sum_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} |f(\xi)|$. Además, $\forall \xi < \operatorname{cf}(\kappa) : |f(\xi)| \le f(\xi) < \kappa$ y $\kappa \ge \aleph_0$, entonces, por el lema de König,
$$\kappa \le \sum_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} |f(\xi)| < \prod_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}.$$
†

Corolario 5.1.4. *a) Para todo* $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *se cumple* $\aleph_\alpha \neq 2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$.

b) Si $\alpha \in \mathbf{Lim}$, $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *y* $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \aleph_\beta$, *entonces* $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ *y* $\forall \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : \aleph_\alpha \neq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.

Demostración. a) Supongamos que existe $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\aleph_\alpha = 2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$. $\aleph_\alpha$ es un ordinal límite, por lo cual $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ lo es también, y así $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \geq \aleph_0$. En virtud del teorema 5.1.3 b), obtenemos que $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = (2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)})^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = 2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\cdot \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = 2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha$, o sea, $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha$, pero esto no es posible. Por tanto, $\aleph_\alpha \neq 2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$ si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

b) Del teorema 5.1.3 b), $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$. Además, por el corolario 4.5.8, $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$ pues $\alpha \in \mathbf{Lim}$, y como $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \aleph_\beta$, obtenemos que $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, luego $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Ahora, si $\aleph_\alpha = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$ para algún $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$, lo cual es falso. Por ende, $\forall \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : \aleph_\alpha \neq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. †

Teorema 5.1.5 (Fórmula de recursión de Tarski)**.** *Sean* $\beta \in \mathbf{Lim}$, $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ *y* $(\alpha_\xi)_{\xi<\beta}$ *una sucesión de ordinales. Si* $(\alpha_\xi)_{\xi<\beta}$ *es estrictamente creciente y* $\alpha := \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\}$ *y* $\aleph_\gamma < \mathrm{cf}(\beta)$, *entonces*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} = \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} = \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}.$$

Demostración. Dado que α es el supremo de una función infinita y estrictamente creciente, se tiene que α es un ordinal límite y $\forall \xi < \beta : \alpha_\xi < \alpha$. Por el teorema 4.5.11 y el corolario 4.5.12, tenemos $\aleph_\gamma < \mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, y por los lemas 5.1.1 y 5.1.2,

$$^{\aleph_\gamma}\aleph_\alpha = \bigcup\{^{\aleph_\gamma}\lambda \mid \lambda <_c \aleph_\alpha\} = \bigcup\{^{\aleph_\gamma}\lambda \mid \aleph_0 \leq \lambda <_c \aleph_\alpha\} = \bigcup\{^{\aleph_\gamma}\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\};$$

además, $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\}$, entonces

$$^{\aleph_\gamma}\aleph_\alpha = \bigcup\{^{\aleph_\gamma}\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\} = \bigcup\{^{\aleph_\gamma}\aleph_{\alpha_\xi} \mid \xi < \beta\}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} &= \left|^{\aleph_\gamma}\aleph_\alpha\right| = \left|\bigcup\{^{\aleph_\gamma}\aleph_{\alpha_\xi} \mid \xi < \beta\}\right| \\ &\leq \left|\bigcup\{(^{\aleph_\gamma}\aleph_{\alpha_\xi}) \times \{\xi\} \mid \xi < \beta\}\right| = \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} = \text{máx}\,\left\{|\beta|, \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}\right\}.\end{aligned}$$

Las funciones $\aleph$ y $(\alpha_\xi)_{\xi<\beta}$ son estrictamente crecientes, consiguientemente, para cada $\xi \in \beta \setminus \{0\}$ se tiene: $\xi \leq \alpha_\xi \leq \aleph_{\alpha_\xi} \leq \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\gamma}$, y con ello $\beta = \sup\{\xi \mid \xi < \beta\} \leq \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\gamma}$. Por lo tanto:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} \leq \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} = \text{máx}\,\left\{|\beta|, \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}\right\} = \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\gamma}.$$

†

Corolario 5.1.6. *Si* $\alpha, \gamma \in \mathbf{Lim}$ *con* $\aleph_\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$, *entonces*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} = \sum_{\xi<\beta} \aleph_\xi^{\aleph_\gamma} = \sup\{\aleph_\xi^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \alpha\}.$$

Teorema 5.1.7. *Sean* $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.

a) Si $\alpha \leq \beta$, *entonces* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

b) (Fórmula de Hausdorff) $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

c) (Fórmula de Tarski) Si $|\gamma| \leq \aleph_\beta$, *entonces* $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Demostración. a) Como $\alpha \leq \beta$, entonces $2 < \aleph_\alpha < \aleph_\beta$, luego, por el corolario 4.3.4, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

b) Vamos a dividir esta igualdad en dos casos:

Si $\alpha < \beta$, aplicando el inciso a), resulta que $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, en consecuencia, $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$; elevando a $\aleph_\beta$, se sigue que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, por consiguiente, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, y por ello $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Además, al principio también tuvimos que $\aleph_{\alpha+1} < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, lo que nos lleva a que $\aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$.

Supongamos, por otra parte, que $\beta \leq \alpha$. Entonces, $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} = \mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1})$, así que, usando el lema 5.1.2:

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = |{}^{\aleph_\beta}\aleph_{\alpha+1}| = \Big|\bigcup_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} {}^{\aleph_\beta}\gamma\Big| \leq \Big|\bigcup_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} ({}^{\aleph_\beta}\gamma)\times\{\gamma\}\Big| = \sum_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} |{}^{\aleph_\beta}\gamma| = \sum_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta}$$
$$\leq \sum_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}.$$

En resumen, $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ y, en consecuencia, $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

c) Vamos a usar inducción en γ, para todo $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $|\gamma| \leq \aleph_\beta$.

Para $\gamma = 0$, $\aleph_{\alpha+0}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 1\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^0\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+0}^{|0|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Supongamos que $|\gamma| \leq \aleph_\beta$ y $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$; es claro que $|\gamma+1| \leq \aleph_\beta$. Usando la fórmula de Hausdorff:

$$\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot(\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta});$$

por lo cual

$$\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{\aleph_\beta} = (\aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|})\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \tag{5.2}$$

A partir de aquí, dividimos en dos casos:

i) Si γ es finito, entonces $\gamma+1$ es finito, de lo cual $\aleph_\delta^{|\gamma|} = \aleph_\delta^{|\gamma+1|} = \aleph_\delta$ para cualquier $\delta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. Luego, de (5.2), $\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{\aleph_\beta} = (\aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_{\alpha+\gamma})\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}^{|\gamma+1|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ y, por ende, $\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{|\gamma+1|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

ii) Si γ es infinito, entonces $|\gamma| = |\gamma+1|$, y por la fórmula de Hausdorff, $\aleph_{(\alpha+\gamma)+1}^{|\gamma|} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|}$, de aquí que $\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{|\gamma+1|} = \aleph_{(\alpha+\gamma)+1}\cdot\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|}$; sustituyendo esto en (5.2), obtenemos que $\aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+(\gamma+1)}^{|\gamma+1|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Finalmente, sea $\gamma \in \mathbf{Lim}$ con $|\gamma| \leq \aleph_\beta$ tal que $\forall\xi < \gamma : \aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ —notar que si $\xi < \gamma$, entonces $|\xi| \leq |\gamma| \leq \aleph_\beta$—. En primer lugar, $\alpha+\gamma$ es un ordinal límite, lo que nos lleva a

$$\aleph_{\alpha+\gamma} = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha+\gamma\} = \sup\{\aleph_{\alpha+\xi} \mid \xi < \gamma\} \leq \sum_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi} \leq \prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi},$$

lo cual implica que $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leq \big(\prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}\big)^{\aleph_\beta}$. En seguida, vamos a aplicar la hipótesis de inducción:

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leq \Big(\prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}\Big)^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}\cdot\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{|\gamma|}\cdot\prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|} = \aleph_\alpha^{|\gamma|\cdot\aleph_\beta}\cdot\prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}.$$

En resumen, $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{|\gamma|\cdot\aleph_\beta}\cdot\prod_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}$; además, estamos suponiendo que $|\gamma| \leq \aleph_\beta$, lo cual nos dice que $\aleph_\beta \cdot |\gamma| = \aleph_\beta$; consecuentemente:

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha^{|\gamma|\cdot\aleph_\beta} \cdot \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|})^{|\gamma|}.$$

Resumimos nuevamente:

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|})^{|\gamma|} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|\cdot|\gamma|} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

Por tanto, $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \le \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}$, y en consecuencia $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Por el principio de inducción transfinita, obtenemos el resultado deseado. †

Corolario 5.1.8. *Si $\alpha, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $n \in \omega$, entonces:*

a) (Fórmula generalizada de Hausdorff) $\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+n} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$;

b) (Fórmula de Bernstein) $\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n$;

c) $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{|\alpha|}$ cuando $|\alpha| \le \aleph_\beta$.

Demostración. a) Por la fórmula de Tarski, tomando $\gamma := n < \aleph_\beta$, tenemos que $\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+n}^{|n|} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, y como n es finito, $\aleph_{\alpha+n}^{|n|} = \aleph_{\alpha+n}$.

c) Por la fórmula de Tarski, para $\alpha = 0$ y $\gamma := \alpha'$ con $|\alpha'| \le \aleph_\beta$, entonces $\aleph_{\alpha'}^{\aleph_\beta} = \aleph_{0+\alpha'}^{\aleph_\beta} = \aleph_{0+\alpha'}^{|\alpha'|} \cdot \aleph_0^{\aleph_\beta}$, en consecuencia, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{|\alpha|} \cdot \aleph_0^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{|\alpha|} \cdot 2^{\aleph_\beta}$ si $|\alpha| \le \aleph_\beta$.

b) La fórmula de Bernstein es un caso particular del inciso c) para $\alpha \in \omega$. †

5.2. Las reglas de oro de la aritmética cardinal

Teorema 5.2.1 (Tarski)**.** *Si $\nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$ y $(\lambda_\xi)_{\xi<\nu}$ es una sucesión creciente de cardinales infinitos, entonces*

$$\prod_{\xi<\nu} \lambda_\xi = (\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\})^\nu.$$

Demostración. Como $|\nu \times \nu| = \nu \cdot \nu = \nu$, existe una función biyectiva $\Phi : \nu \times \nu \longrightarrow \nu$. La familia de conjuntos $(\nu \times \{\alpha\})_{\alpha\in\nu}$ es una partición de $\nu \times \nu$, así que $(\Phi[\nu \times \{\alpha\}])_{\alpha<\nu}$ es una partición de ν y $|\Phi[\nu \times \{\alpha\}]| = |\nu \times \{\alpha\}| = \nu$. Denotemos $B_\alpha := \Phi[\nu \times \{\alpha\}]$ para cada $\alpha \in \nu$.

Claramente, $\{\lambda_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} \subseteq \{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\}$, entonces $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} \le \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\}$. Si suponemos que $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} < \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\}$, existiría $\zeta < \nu$ tal que $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} < \lambda_\zeta$, de lo cual $\forall \xi \in B_\alpha : \lambda_\xi < \lambda_\zeta$, y como $(\lambda_\xi)_{\xi<\nu}$ es creciente, entonces $\forall \xi \in B_\alpha : \xi < \zeta$; esto nos diría que $B_\alpha \subseteq \zeta$ y, en consecuencia, $\nu = |B_\alpha| \le |\zeta| \le \zeta < \nu$, pero esto no puede ocurrir.

Por tanto, para todo $\alpha < \nu$ se tiene que

$$\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\} = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} \le \sum_{\xi\in B_\alpha} \lambda_\xi \le \prod_{\xi\in B_\alpha} \lambda_\xi;$$

por consiguiente,

$$\prod_{\alpha<\nu} (\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\}) \le \prod_{\alpha<\nu} \Big(\prod_{\xi\in B_\alpha} \lambda_\xi \Big).$$

Ahora bien, la familia $(\Phi[\nu \times \{\alpha\}])_{\alpha<\nu} = (B_\alpha)_{\alpha<\nu}$ es una partición de ν, de lo cual deducimos que

$$(\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\})^\nu = \prod_{\alpha<\nu} (\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\}) \le \prod_{\alpha<\nu} \Big(\prod_{\xi\in B_\alpha} \lambda_\xi \Big) = \prod_{\xi<\nu} \lambda_\xi.$$

Asimismo, $\forall \xi < \nu : \lambda_\xi \leq \sup\{\lambda_{\xi'} \mid \xi' < \nu\}$, y de este modo,
$$\prod_{\xi<\nu} \lambda_\xi \leq \prod_{\xi<\nu} \sup\{\lambda_{\xi'} \mid \xi' < \nu\} = (\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\})^\nu$$

Por lo tanto, $\prod_{\xi<\nu} \lambda_\xi = (\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \nu\})^\nu$. †

Ejemplos. I) $\prod_{n<\omega} \aleph_n = (\sup\{\aleph_n \mid n < \omega\})^\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

II) Vamos a calcular la el producto $\prod_{\xi<\omega_1+\omega} \aleph_\xi$. Por el teorema 4.4.2:
$$\prod_{\xi<\omega_1+\omega} \aleph_\xi = \Big(\prod_{\xi<\omega_1} \aleph_\xi\Big)\cdot\Big(\prod_{\xi<\omega} \aleph_{\omega_1+\xi}\Big) = \big(\sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \omega_1\}\big)^{\omega_1}\cdot\big(\sup\{\aleph_{\omega_1+\xi} \mid \xi < \omega\}\big)^\omega$$
$$= \aleph_{\omega_1}^{\omega_1}\cdot\aleph_{\omega_1+\omega}^{\omega} = \aleph_{\omega_1+\omega}^{\omega}\cdot\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+\omega}^{\aleph_1}.$$
La última igualdad se sigue de la fórmula de Tarski y porque $\omega < \aleph_1$.

Teorema 5.2.2. *Si $\kappa \ {}_c\!\geq \aleph_0$ y $\lambda \ {}_c\!\geq \operatorname{cf}(\kappa)$, entonces*
$$\kappa^\lambda = (\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\})^{\operatorname{cf}(\kappa)}.$$

Demostración. Por el teorema 4.5.16, existe una sucesión $(\kappa_\xi)_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)}$ de cardinales tal que $\forall \xi < \operatorname{cf}(\kappa) : 2 \leq \kappa_\xi < \kappa$ y $\sum_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa$. Claramente $\kappa_\xi^\lambda \leq \sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa^\lambda$ para todo $\xi < \operatorname{cf}(\lambda)$; entonces
$$\kappa^\lambda = \Big(\sum_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\Big)^\lambda \leq \Big(\prod_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\Big)^\lambda = \prod_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda \leq \prod_{\xi<\operatorname{cf}(\kappa)} (\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\})$$
$$= (\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\})^{\operatorname{cf}(\kappa)} \leq (\kappa^\lambda)^{\operatorname{cf}(\kappa)} = \kappa^{\lambda\cdot\operatorname{cf}(\kappa)} = \kappa^\lambda.$$
En resumen, $\kappa^\lambda \leq (\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\})^{\operatorname{cf}(\kappa)} \leq \kappa^\lambda$. †

Teorema 5.2.3 (Tarski)**.** *Si $\kappa \ {}_c\!\geq \aleph_0$ y $0 < \lambda <_c \operatorname{cf}(\kappa)$, entonces*
$$\kappa^\lambda = \kappa\cdot\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} = \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa} \nu^\lambda$$

Demostración. Por el lema 5.1.2, ${}^\lambda\kappa = \bigcup\{{}^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, luego
$$\kappa^\lambda = \Big|\bigcup\{{}^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}\Big| \leq \kappa\cdot\sup\{|{}^\lambda\alpha| \mid \alpha < \kappa\} = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda.$$
La familia de conjuntos $\{[\nu, \nu^+) \mid \nu <_c \kappa\}$ es una partición de κ, y $|\alpha|^\lambda = \nu^\lambda$ si $\nu \leq \alpha < \nu^+$; en consecuencia:
$$\sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda = \sum_{\nu<_c\kappa}\ \sum_{\nu\leq\alpha<\nu^+} |\alpha|^\lambda = \sum_{\nu<_c\kappa}\ \sum_{\nu\leq\alpha<\nu^+} \nu^\lambda = \sum_{\nu<_c\kappa} |[\nu, \nu^+)|\cdot\nu^\lambda.$$
Como $[\nu, \nu^+) \subseteq \nu^+$, entonces $|[\nu, \nu^+)| \leq \nu^+$ con $\nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$; de este modo:
$$\sum_{\nu<_c\kappa} |[\nu, \nu^+)|\cdot\nu^\lambda \leq \sum_{\nu<_c\kappa} \nu^+\cdot\nu^\lambda \leq \sum_{\nu<_c\kappa} \kappa\cdot\nu^\lambda = \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa} \nu^\lambda$$
$$= \kappa\cdot|\kappa\cap\boldsymbol{\mathcal{C}}|\cdot\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} = \kappa\cdot\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa\cdot\kappa^\lambda = \kappa^\lambda.$$
En resumen,
$$\kappa^\lambda \leq \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda = \sum_{\nu<_c\kappa} |[\nu, \nu^+)|\cdot\nu^\lambda \leq \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa} \nu^\lambda = \kappa\cdot\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa^\lambda.$$
Por tanto, $\kappa^\lambda = \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa} \nu^\lambda = \kappa\cdot\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\}$. †

Teorema 5.2.4. *Si* $\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega$*, entonces* $2^\kappa = \Big(\sum_{\nu<_c\kappa} 2^\nu\Big)^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Demostración. Debido al teorema 4.4.11, $\sum_{\nu<_c\kappa} 2^\nu = |\kappa\cap\mathcal{C}|\cdot\sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$. Además se cumple que $\sup\{\nu \mid \nu <_c \kappa\} \le \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$, por lo cual $|\kappa\cap\mathcal{C}| \le \kappa \le \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$ —si κ es un cardinal límite, resulta que $\kappa = \sup\{\nu \mid \nu <_c \kappa\}$; y si κ es un cardinal sucesor, existe $\nu_0 < \kappa$ tal que $\kappa = \nu_0^+$, luego $\kappa = \nu_0^+ \le 2^{\nu_0} \le \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$—. Así pues,
$$\sum_{\nu<_c\kappa} 2^\nu = \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}.$$
Por el teorema 4.5.16, existe una sucesión de cardinales $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ tal que $\forall\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : 1 \le \kappa_\xi < \kappa$ y $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa$, entonces $\forall\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : 2^{\kappa_\xi} \le \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\} \le 2^\kappa$, consiguientemente:
$$2^\kappa = 2^{\sum \kappa_\xi} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\xi} \le \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\} = (\sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\})^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\kappa\cdot\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa.$$
Así, $2^\kappa \le (\sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \Big(\sum_{\nu<_c\kappa} 2^\nu\Big)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le 2^\kappa$. †

Corolario 5.2.5. *Si* $\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega$ *y* $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ *es una sucesión de cardinales tales que* $\forall\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : 2 \le \kappa_\xi < \kappa$ *y* $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$*, entonces:*

a) $\displaystyle\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$*;*

b) $\displaystyle\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda = \kappa^\lambda$ *donde* $\mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda \in \mathcal{C}$.

Demostración. a) Si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, entones
$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa = \prod_{\xi<\kappa} 2 \le \prod_{\xi<\kappa} \kappa_\xi \le \prod_{\xi<\kappa} \kappa = \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$
Si κ es singular, en ese caso $\aleph_0 \le \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ y κ es un cardinal límite, consecuentemente,
$$\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \mathrm{cf}(\kappa)\cdot\sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \mathrm{máx}\{\mathrm{cf}(\kappa),\ \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}\},$$
por lo cual $\sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$. Por el teorema 4.5.7, existe una subsucesión $(\kappa_{\alpha_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ estrictamente creciente tal que $\forall\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \kappa_{\alpha_\xi} \ge \aleph_0$ y $\sup\{\kappa_{\alpha_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$. Luego, por el teorema 5.2.1,
$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (\sup\{\kappa_{\alpha_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_{\alpha_\xi} \le \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi \le \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

b) Como $\aleph_0 \le \mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda \in \mathcal{C}$, entonces $\mathrm{cf}(\kappa)\cdot\lambda = \lambda$, por consiguiente, aplicando el inciso a), tenemos:
$$\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda = \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\Big)^\lambda = (\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)})^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)\cdot\lambda} = \kappa^\lambda.$$
†

5.3. Cardinales λ-fuerte

Definición 5.3.1. Si $\kappa \mathrel{_c{>}} \aleph_0$ y $\lambda \mathrel{_c{\ge}} \aleph_0$, decimos que κ es λ-*fuerte* si $\forall\rho <_c \kappa : \rho^\lambda < \kappa$.

Observación. Si κ es λ-fuerte, como $2 < \kappa$, entonces $\lambda < 2^\lambda < \kappa$.

Teorema 5.3.1. *a) Si $\lambda \,{}_c\!\geq \aleph_0$, entonces $(2^\lambda)^+$ es el cardinal λ-fuerte más pequeño.*

b) Si $\kappa,\, \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}}\setminus\omega$ y κ^+ es λ-fuerte, entonces κ^{++} es también λ-fuerte.

c) Para cualesquiera $\kappa,\, \lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}}\setminus\omega$ existe un cardinal λ-fuerte regular y mayor que κ.

Demostración. a) Si $\rho <_c (2^\lambda)^+$, resulta que $\rho \leq_c 2^\lambda$, por lo cual $\rho^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda < (2^\lambda)^+$; por ende, $(2^\lambda)^+$ es λ-fuerte. Para ver que $(2^\lambda)^+$ es el mínimo, sea $\aleph_0 < \kappa \leq_c 2^\lambda$, entonces $\aleph_0 < \kappa \leq \lambda$ o $\lambda < \kappa \leq 2^\lambda$, luego, por el teorema 4.3.4, $\aleph_0^\lambda = 2^\lambda = \lambda^\lambda$; en cualquier caso, existe $\rho < \kappa$ tal que $\kappa \leq \rho^\lambda$, por tanto, κ no puede ser λ-fuerte.

b) Como κ^+ es λ-fuerte y $\kappa < \kappa^+$, entonces $\kappa^\lambda < \kappa^+$. Si $\rho < \kappa^{++}$, se tiene que $\rho \leq \kappa^+$: si $\rho < \kappa^+$, claramente $\rho^\lambda < \kappa^+ < \kappa^{++}$; si $\rho = \kappa^+$, por la fórmula de Hausdorff, $\rho^\lambda = (\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda = \text{máx}\{\kappa^+,\, \kappa^\lambda\} \leq \kappa^+ < \kappa^{++}$. Así, κ^{++} es λ-fuerte.

c) Sea $\mu := (\kappa^\lambda)^+$. Claramente μ es regular y $\kappa \leq \kappa^\lambda < (\kappa^\lambda)^+ = \mu$. Si $\rho < (\kappa^\lambda)^+$, entonces $\rho \leq \kappa^\lambda$ y así $\rho^\lambda \leq (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^{\lambda\cdot\lambda} = \kappa^\lambda < (\kappa^\lambda)^+$. Por lo tanto, $(\kappa^\lambda)^+$ es λ-fuerte y mayor que κ. †

Lema 5.3.2. *Sean $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$.*

a) Si α es un ordinal límite y $\aleph_\alpha$ es $\aleph_\beta$-fuerte, entonces $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}$.

b) Si $\gamma < \alpha$ y $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.

Demostración. a) Por hipótesis, $\forall \gamma < \alpha : \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$, entonces $\sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\} \leq \aleph_\alpha$. Además, tenemos que $\forall \delta < \alpha : \aleph_\delta \leq \aleph_\delta^{\aleph_\beta} \leq \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}$, en consecuencia,

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\delta \mid \delta < \alpha\} \leq \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\},$$

pues α es límite. Por tanto, $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}$.

b) Como $\gamma < \alpha$, entonces $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$ y así $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Por otra parte, dado que $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta\cdot\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Por tanto, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. †

Teorema 5.3.3. *Si $\alpha,\, \beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\aleph_\alpha$ es $\aleph_\beta$-fuerte, entonces:*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \textit{si } \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta \\ \aleph_\alpha^{\operatorname{cf}(\aleph_\alpha)} & \textit{si } \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

Demostración. Como $\aleph_\alpha$ es $\aleph_\beta$-fuerte, tendremos que $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, con lo cual $\beta < \alpha$.

Supongamos, primero, que $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $\aleph_\beta < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$. Por el lema anterior parte a), se cumple que $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}$. Por el lema 5.1.2, ${}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha = \bigcup\{{}^{\aleph_\beta}\nu \mid \aleph_0 \leq \nu <_c \aleph_\alpha\} = \bigcup\{{}^{\aleph_\beta}\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, entonces

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |{}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha| = \left|\bigcup\{{}^{\aleph_\beta}\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\}\right| \leq |\alpha| \cdot \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\} = |\alpha| \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

En resumen $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$, y es claro que $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Por lo tanto. $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Supongamos que $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $\operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$. Usando el lema anterior y aplicando el teorema 5.2.2, tenemos:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\sup\{\nu^{\aleph_\beta} \mid \nu <_c \aleph_\alpha\})^{\operatorname{cf}(\aleph_\alpha)} = (\sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha)\})^{\operatorname{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\operatorname{cf}(\aleph_\alpha)}.$$

Ahora supongamos que $\alpha = \sigma + 1$ para algún $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\operatorname{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha > \aleph_\beta$. Por la fórmula de Hausdorff, $\aleph_{\sigma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\sigma+1} \cdot \aleph_\sigma^{\aleph_\beta} = \text{máx}\{\aleph_{\sigma+1},\, \aleph_\sigma^{\aleph_\beta}\}$. Al ser $\aleph_{\sigma+1}$ es $\aleph_\beta$-fuerte, $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_{\sigma+1}$, en consecuencia, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\sigma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\sigma+1} = \aleph_\alpha$. †

El teorema anterior se puede enunciar de la siguiente manera:
Si κ, $\lambda \in \mathcal{C}\setminus\omega$ cumplen que κ es λ-fuerte, entonces

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} \kappa & si \ \ \mathrm{cf}(\kappa) > \lambda \\ \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} & si \ \ \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \end{cases}$$

Ejemplo. Por el teorema 5.3.1, dado $\lambda \in \mathcal{C}\setminus\omega$, $(2^{\lambda})^{+}$ es λ-fuerte, además $\mathrm{cf}((2^{\lambda})^{+}) = (2^{\lambda})^{+} > \lambda$, en consecuencia, $((2^{\lambda})^{+})^{\lambda} = (2^{\lambda})^{+}$

Teorema 5.3.4 (Jech)**.** *Si $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ y $\aleph_\alpha \neq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq 2^{\aleph_\beta}$; entonces, existe un ordinal γ de tal forma que $\beta < \gamma \leq \alpha$, $\aleph_\gamma$ es singular, $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta$, $\aleph_\gamma$ es $\aleph_\beta$-fuerte y $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$.*

Demostración. Si $\alpha \leq \beta$, por el teorema 4.3.4, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Por tanto, $\beta < \alpha$.

Si $\aleph_\alpha$ es $\aleph_\beta$-fuerte, por el teorema anterior, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \in \{\aleph_\alpha, \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}\}$. Pero suponemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq \aleph_\alpha$, entonces $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$ y $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$. Tomando $\gamma = \alpha$ obtenemos casi todas las condiciones que se piden. Solo resta ver que $\aleph_\alpha$ es singular. Esto se sigue porque $\beta < \alpha$, y así $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha$.

Supongamos que $\aleph_\alpha$ no es $\aleph_\beta$-fuerte y sea ρ el mínimo cardinal tal que $\rho < \aleph_\alpha$ y $\aleph_\alpha \leq \rho^{\aleph_\beta}$. Si $\rho \leq \aleph_\beta$; por el teorema 4.3.4, $\aleph_\alpha \leq \rho^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$; como $\beta < \alpha$, entonces $\aleph_\beta < \aleph_\alpha \leq 2^{\aleph_\beta}$; en consecuencia, $\aleph_\beta^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq (2^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta}$ donde $\aleph_\beta^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = (2^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta}$; de ahí que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$ (contradicción). Por tanto, $\aleph_\beta < \rho$ y existe un ordinal γ tal que $\rho = \aleph_\gamma$. Vamos a probar que γ es el ordinal que cumple las propiedades que se piden.

Hasta este momento tenemos que $\aleph_\beta < \aleph_\gamma$ y $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$ y $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$; entonces, $\beta < \gamma < \alpha$, y por el lema 5.3.2 b), $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.

Veamos que $\aleph_\gamma$ es $\aleph_\beta$-fuerte. Basta probar que $\forall \sigma < \gamma : \aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_\gamma$. Si $\sigma < \gamma$, de la minimilidad de $\aleph_\gamma$ se cumple que $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$; si se diera que $\aleph_\gamma \leq \aleph_\sigma^{\aleph_\beta}$, tendríamos que $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leq (\aleph_\sigma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$, pero $\aleph_\gamma$ es el mínimo tal que $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. En consecuencia, $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_\gamma$ para todo $\sigma < \gamma$.

Ahora podemos aplicar el teorema anterior 5.3.3, pues $\beta < \gamma$ y $\aleph_\gamma$ es $\aleph_\beta$-fuerte. Así pues,

$$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\gamma & si \ \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) > \aleph_\beta \\ \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} & si \ \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

Si $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) > \aleph_\beta$, entonces $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma$, y ya sabemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, por esto $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma < \aleph_\alpha$, lo cual no es posible. Por tanto, $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta$, y así $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$; en consecuencia, $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta < \aleph_\gamma$ ($\aleph_\gamma$ es singular) y $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$. †

Corolario 5.3.5. *Si α y β son números ordinales, entonces:*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta} & si \ \alpha \leq \beta \\ \aleph_\alpha & si \ \aleph_\alpha \ es \ \aleph_\beta\text{-}fuerte \ y \ \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta \\ \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} & para \ algún \ \gamma \leq \alpha \ tal \ que \ \aleph_\gamma \ es \ \aleph_\beta\text{-}fuerte \ y \ \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

Este último corolario pone de manifiesto que para saber los valores de la potenciación basta con saber los valores de los cardinales 2^{κ} y $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. De hecho estos cardinales definen dos funciones muy importantes para la aritmética cardinal:

Definición 5.3.2.

1) La función $\gimel : \mathcal{C}\setminus\omega \longrightarrow \mathcal{C}\setminus\omega$ definida como $\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, para todo $\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega$, se llama la *función guímel.*

2) La función con dominio $\mathcal{C}\setminus\omega$ y cuya regla de correspondencia es $\kappa \longmapsto 2^{\kappa}$ se le llama la *función del continuo.*

5.4. Potencias $\kappa^{<\lambda}$

Definición 5.4.1. Si A es un conjunto y λ es un número cardinal:

1) $[A]^{<\lambda} := \{B \subseteq A \mid |B| < \lambda\}$;

2) $[A]^{\lambda} := \{B \subseteq A \mid |B| = \lambda\}$;

3) $[A]^{\leq\lambda} := \{B \subseteq A \mid |B| \leq \lambda\}$.

Teorema 5.4.1. *Si A es un conjunto infinito y λ es un número cardinal, entonces:*

$$\big|[A]^\lambda\big| = \begin{cases} |A|^\lambda & si\ \ \lambda \leq |A| \\ 0 & si\ \ \lambda > |A| \end{cases}$$

Demostración. Si $\lambda > |A|$, claramente $[A]^\lambda = \emptyset$, y por ello $\big|[A]^\lambda\big| = 0$.

Supongamos que $\lambda \leq |A|$. Para todo $B \in [A]^\lambda$ se cumple que $|B| = \lambda$, por lo cual existe una función biyectiva $f : \lambda \longrightarrow B$ la cual pertenece a ${}^\lambda A$ pues $B \subseteq A$. De lo anterior deducimos que hay una función $\Phi : [A]^\lambda \longrightarrow {}^\lambda A$ tal que para todo B, $\Phi(B) : \lambda \longrightarrow B$ es biyectiva. Si $B, C \in [A]^\lambda$ tales que $\Phi(B) = \Phi(C)$, entonces $B = \operatorname{ran}(\Phi(B)) = \operatorname{ran}(\Phi(C)) = C$. Por tanto, $\Phi : [A]^\lambda \longrightarrow {}^\lambda A$ es inyectiva y con ello $\big|[A]^\lambda\big| \leq |{}^\lambda A| = |A|^\lambda$. Por otra parte, toda $f \in {}^\lambda A$ satisface que $f \subseteq \lambda \times A$ y $|f| = |\operatorname{dom}(f)| = \lambda$, en consecuencia, $f \in [\lambda \times A]^\lambda$; esto nos dice que ${}^\lambda A \subseteq [\lambda \times A]^\lambda$. También se sabe que $|A| \geq \aleph_0$ y $\lambda \leq |A|$, por consiguiente, $|\lambda \times A| = \lambda \cdot |A| = |A|$, y con ello $\big|[\lambda \times A]\big| = \big|[A]\big|$. Luego entonces, $|A|^\lambda = |{}^\lambda A| \leq \big|[\lambda \times A]^\lambda\big| = \big|[A]^\lambda\big|$. En resumen, $\big|[A]^\lambda\big| \leq |A|^\lambda$ y $|A|^\lambda \leq \big|[A]^\lambda\big|$. †

Definición 5.4.2. Para $\kappa, \lambda \in \mathcal{C}$, se define $\kappa^{<\lambda} := \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\}$.

Observación. Para todo $\mu <_c \lambda$, $\kappa^\mu \leq \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \kappa^{<\lambda} \leq \kappa^\lambda$. Además, por el lema 5.1.1, para cada $\nu_0 < \lambda$ se satisface que $\sup\{\kappa^\nu \mid \nu_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \kappa^{<\lambda}$.

Teorema 5.4.2. *a) Si $\kappa \ {}_c\!\geq 2$ y $\lambda \ {}_c\!\geq \aleph_0$, entonces $\lambda \leq \kappa^{<\lambda}$.*

b) Si $\kappa \ {}_c\!\geq \aleph_0$ y $2 \leq \lambda \leq_c \kappa$, para cada $\nu_0 <_c \lambda$ se cumple que $\kappa^{<\lambda} = \sum\limits_{\nu <_c \lambda} \kappa^\nu = \sum\limits_{\nu_0 \leq \nu <_c \lambda} \kappa^\nu$.

c) Si $\kappa \ {}_c\!\geq \aleph_0$, entonces $2^{<\kappa} = \sum\limits_{\nu <_c \kappa} 2^\nu = \sum\limits_{\nu_0 \leq \nu <_c \kappa} 2^\nu$ *donde $\nu_0 <_c \kappa$.*

Demostración. a) Si λ es un cardinal sucesor, existe $\mu \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda = \mu^+$, luego

$$\kappa^\lambda = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \mu^+\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \leq_c \mu\} = \kappa^\mu \geq 2^\mu,$$

entonces $\mu < 2^\mu \leq \kappa^\mu \leq \kappa^\lambda$ y así $\lambda = \mu^+ \leq 2^\mu \leq \kappa^\lambda$.

Si λ es un cardinal limite, para todo cardinal ν menor que λ se tiene que $\nu < 2^\nu \leq \kappa^\nu \leq \kappa^{<\lambda}$, por consiguiente, $\lambda = \sup\{\nu \in \mathcal{C} \mid \nu < \lambda\} \leq \kappa^{<\lambda}$.

b) Claramente $[\kappa]^{<\lambda} = \bigcup_{\nu <_c \lambda} [\kappa]^\nu$; y si $\nu, \mu <_c \lambda$ con $\nu \neq \mu$, entonces $[\kappa]^\nu \cap [\kappa]^\mu = \emptyset$. Por el teorema 5.4.1, $\big|[\kappa]^\nu\big| = \kappa^\nu$ si $\nu <_c \lambda$; además, $\lambda \geq \aleph_0$, así que $|\lambda \cap \mathcal{C}| \geq \aleph_0$; en consecuencia,

$$\begin{aligned}\big|[\kappa]^{<\lambda}\big| &= \Big|\bigcup_{\nu <_c \lambda} [\kappa]^\nu\Big| = \Big|\bigcup_{\nu <_c \lambda} [\kappa]^\nu \times \{\nu\}\Big| = \Big|\bigcup_{\nu <_c \lambda} \kappa^\nu \times \{\nu\}\Big| \\ &= \sum_{\nu <_c \lambda} \kappa^\nu = |\lambda \cap \mathcal{C}| \cdot \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = |\lambda \cap \mathcal{C}| \cdot \kappa^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda},\end{aligned}$$

pues del inciso a) se cumple que $|\lambda \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| \leq \lambda \leq \kappa^{<\lambda}$. Si $\nu_0 <_c \lambda$, por el lema 5.1.1, se satisface que $\sup\{\kappa^\nu \mid \nu_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \kappa^{<\lambda}$, por lo tanto,

$$\sum_{\nu \in [\nu_0, \lambda)_{\mathcal{C}}} \kappa^\nu = \left|[\nu_0, \lambda)_{\mathcal{C}}\right| \cdot \sup\{\kappa^\nu \mid \nu_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \left|[\nu_0, \lambda)_{\mathcal{C}}\right| \cdot \kappa^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda}.$$

c) Sea $\nu_0 <_c \kappa$ cualquiera. Por el teorema 4.4.11,

$$\sum_{\nu_0 \leq \nu <_c \kappa} 2^\nu = |[\nu_0, \kappa)_{\mathcal{C}}| \cdot \sup\{2^\nu \mid \nu_0 \leq \nu <_c \kappa\} = |[\nu_0, \kappa)_{\mathcal{C}}| \cdot \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\} = |[\nu_0, \kappa)_{\mathcal{C}}| \cdot 2^{<\kappa}.$$

Por otra parte, $\forall \nu <_c \kappa : \nu < 2^\nu$, en consecuencia, $\sup\{\nu \mid \nu <_c \kappa\} \leq \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$, de este modo, $\kappa \leq \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$ —si κ es un cardinal límite, resulta que $\kappa = \sup\{\nu \mid \nu <_c \kappa\}$; y si κ es un cardinal sucesor, existe $\nu_0 < \kappa$ tal que $\kappa = \mu_0^+$, luego $\kappa = \mu_0^+ \leq 2^{\mu_0} \leq \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\}$—. Por lo tanto, $|[\nu_0, \kappa)_{\mathcal{C}}| \leq \kappa \leq \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \kappa\} = 2^{<\kappa}$, y por ello

$$\sum_{\nu_0 \leq \nu <_c \kappa} 2^\nu = |[\nu_0, \kappa)_{\mathcal{C}}| \cdot 2^{<\kappa} = 2^{<\kappa}.$$

†

Definición 5.4.3. 1) Para $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, la *función del continuo para* κ es la función $\{(\rho, \kappa^\rho) \mid \rho \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega\}$.

2) Si $\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$, la función del continuo para κ es *eventualmente constante debajo de* λ si existe $\rho_0 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ tal que $\forall \rho \in [\rho_0, \lambda)_{\mathcal{C}} : \kappa^\rho = \kappa^{\rho_0}$, y decimos, también, que la función del continuo para κ es *eventualmente constante debajo de* λ *a partir de* ρ_0.

Observación. Si $2 \leq \kappa < \omega$, entonces $\forall \rho \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega : \kappa^\rho = 2^\rho$, lo cual implica que la función del continuo para κ es igual a la función del continuo.

Teorema 5.4.3. *Sean $\kappa, \lambda, \rho_0 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ con $\kappa \geq 2$ y $\lambda \geq \aleph_0$. Si la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0, entonces $\forall \rho \in [\rho_0, \lambda)_{\mathcal{C}} : \kappa^{<\lambda} = \kappa^\rho = \kappa^{\rho_0}$; y si no lo es, entonces $\forall \nu <_c \lambda : \kappa^\nu < \kappa^{<\lambda}$.*

Demostración. Si la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0, entonces $\forall \rho \in [\rho_0, \lambda)_{\mathcal{C}} : \kappa^\rho = \kappa^{\rho_0}$, en consecuencia,

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \rho_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^{\rho_0} \mid \rho_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \kappa^{\rho_0} = \kappa^\rho,$$

para todo cardinal ρ con $\rho_0 \leq \rho < \lambda$.

Por otra parte, supongamos que la función del continuo para κ no es eventualmente constante debajo de λ. Si $\nu <_c \lambda$, existe $\rho <_c \lambda$ tal que $\nu < \rho$ y $\kappa^\nu \neq \kappa^\rho$, entonces $\kappa^\nu < \kappa^\rho \leq \kappa^{<\lambda}$. †

Teorema 5.4.4. *Si $\kappa \;_c\!\geq 2$ y $\lambda \;_c\!\geq \omega$, alguna de las siguientes proposiciones siempre se cumplen:*

a) la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ;

b) existe una sucesión de cardinales $(\lambda_\xi)_{\xi < \mathrm{cf}(\lambda)}$ estrictamente creciente y cofinal en λ tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \beta \leq \lambda_\xi < \lambda$, (donde $\beta < \lambda$), y la sucesión $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi < \mathrm{cf}(\lambda)}$ es estrictamente creciente y cofinal en $\kappa^{<\lambda}$.

Demostración. Si $\lambda = \mu^+$, entonces la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de μ.

Supongamos que λ es un cardinal límite y que la función del continuo para κ no es eventualmente constante debajo de λ. Dado $\beta < \lambda$, por el teorema 4.5.16, existe una sucesión de cardinales $(g(\xi))_{\xi < \mathrm{cf}(\lambda)}$ estrictamente creciente y cofinal en λ tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \beta < g(\xi) < \lambda$. Además, por el teorema anterior, $\forall \nu <_c \lambda : \kappa^\nu < \kappa^{<\lambda}$. Afirmamos que la sucesión $(\kappa^{g(\xi)})_{\xi < \mathrm{cf}(\lambda)}$ es cofinal en $\kappa^{<\lambda}$.

Si $\alpha < \kappa^{<\lambda}$, existe $\nu <_c \lambda$ tal que $\alpha < \kappa^\nu < \kappa^{<\lambda}$, luego existe $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ tal que $\nu < g(\xi) < \lambda$, en consecuencia, $\alpha < \kappa^\nu \leq \kappa^{g(\xi)} < \kappa^{<\lambda}$. Así pues, $(\kappa^{g(\xi)})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es cofinal en $\kappa^{<\lambda}$. Ahora, por el teorema 4.5.7, existe una función $\alpha : \mathrm{cf}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{cf}(\lambda)$ estrictamente creciente tal que $(\kappa^{g(\alpha_\xi)})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es estrictamente creciente y cofinal en $\kappa^{<\lambda}$; de esto obtenemos que $(g(\alpha_\xi))_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es estrictamente creciente y $\forall\xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \beta < g(\alpha_\xi) < \lambda$, pues $(g(\xi))_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$es estrictamente creciente y todos los $g(\xi)$ son mayores que β. Resta ver que $(g(\alpha_\xi))_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es cofinal en λ. Si $\delta < \lambda$, entonces $\delta < |\delta|^+ < \lambda$, así que $\kappa^{|\delta|^+} < \kappa^{<\lambda}$ y existe $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ tal que $\kappa^{|\delta|^+} < \kappa^{g(\xi)}$, luego $\delta < |\delta|^+ < g(\xi)$; por tanto, $(g(\alpha_\xi))_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es cofinal en λ. En conclusión, la sucesión $(g(\alpha_\xi))_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ cumple con los requerimientos del inciso b). †

Teorema 5.4.5. *Sean κ, λ, $\rho_0 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ con $\kappa \geq 2$ y $\lambda \geq \aleph_0$:*

a) Si la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0, entonces $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \geq \lambda$.

b) Si la función del continuo para κ no es eventualmente constante debajo de λ, resulta que $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\lambda)$.

Demostración. a) No puede ocurrir que $\lambda = \aleph_0$ y $\kappa < \aleph_0$ pues, de lo contrario, si $\rho_0 <_c \rho <_c \lambda$, entonces $\kappa^{\rho_0} < \kappa^\rho$, lo que nos diría que la función del continuo para κ no es eventualmente constante debajo de λ. Ahora, si $\lambda = \aleph_0$, entonces $\kappa \geq \aleph_0$, de lo cual $\rho_0 < \lambda = \aleph_0$ y $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \kappa$, y así $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_0 = \lambda$. Por otra parte, si $\lambda > \aleph_0$, por el teorema 5.1.3 a), para cada $\rho \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ tal que $\max\{\rho_0, \aleph_0\} \leq \rho < \lambda$ se tiene que $\rho < \mathrm{cf}(\kappa^\rho)$ y $\kappa^\rho = \kappa^{<\lambda}$, con lo cual $\forall\rho <_c \lambda : \rho < \mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda})$, y con ello $\lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda})$.

b) Si la función del continuo para κ no es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0, por el teorema anterior, existe una sucesión de cardinales $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ tal que la sucesión $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es estrictamente creciente y cofinal en $\kappa^{<\lambda}$. Por el teorema 4.5.11, $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda)$. †

Teorema 5.4.6. *Si $\kappa\ {}_c{\geq}\ 2$ y $\lambda\ {}_c{\geq}\ \aleph_0$ y $\nu\ {}_c{>}\ 0$, entonces*

$$(\kappa^{<\lambda})^\nu = \begin{cases} \kappa^\nu & \text{si } \lambda \leq \nu \\ \kappa^\lambda & \text{si } \mathrm{cf}(\lambda) \leq \nu < \lambda \\ \kappa^{<\lambda} & \text{si } \nu < \mathrm{cf}(\lambda) \end{cases}$$

Demostración. Por el teorema 5.4.4, se tienen dos casos:

Caso 1. Supongamos que la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0. Por el teorema 5.4.3, $\kappa^{<\lambda} = \kappa^\rho = \kappa^{\rho_0}$ para todo cardinal ρ tal que $\rho_0 \leq \rho < \lambda$.

(i) Si $0 < \nu < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces $1 \leq \nu < \lambda$ y así $\rho_0 \leq \nu \cdot \rho_0 < \lambda$. En consecuencia, $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\nu\cdot\rho_0} = \kappa^{\rho_0}$, con lo cual $(\kappa^{<\lambda})^\nu = (\kappa^{\rho_0})^\nu = \kappa^{\nu\cdot\rho_0} = \kappa^{<\lambda}$.

(ii) Si $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \nu < \lambda$, entonces λ es un cardinal límite, por lo que existe una sucesión de cardinales estrictamente creciente $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ tal que $\lambda = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi$ y $\forall\xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \max\{\rho_0, \mathrm{cf}(\lambda)\} < \lambda_\xi < \lambda$. De ahí que $\rho_0 \leq \rho_0 \cdot \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ y $\forall\xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \rho_0 < \lambda_\xi < \lambda$. Por consiguiente, $\forall\xi < \lambda :$ $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \kappa^{\rho_0\cdot\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\lambda_\xi}$. Esto implica que:
$$\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0\cdot\mathrm{cf}(\lambda)} = (\kappa^{\rho_0})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\rho_0} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi} = \kappa^{\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi} = \kappa^\lambda$$
y con esto $(\kappa^{<\lambda})^\nu = (\kappa^\lambda)^\nu = \kappa^{\lambda\cdot\nu} = \kappa^\lambda$ pues $\nu < \lambda$.

(iii) Si $\lambda \leq \nu$, entonces $\rho_0 < \nu$ y $\nu \geq \aleph_0$, por lo cual $(\kappa^{<\lambda})^\nu = (\kappa^{\rho_0})^\nu = \kappa^{\rho_0 \cdot \nu} = \kappa^\nu$.

Caso 2. Supongamos ahora que existe una sucesión de cardinales $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ tal que las sucesiones $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ y $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ son estrictamente crecientes y cofinales en λ y en $\kappa^{<\lambda}$ respectivamente. λ tiene que ser un cardinal límite pues la función del continuo para κ siempre es eventualmente constante debajo de un cardinal sucesor.

(i) Si $\lambda = \aleph_0$ y $0 < \nu < \mathrm{cf}(\lambda)$, tenemos que $\mathrm{cf}(\lambda) = \aleph_0 = \lambda$ y $\forall \xi < \mathrm{cf}(\lambda) : \lambda_\xi < \lambda = \aleph_0$ y, al ser $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ estrictamente creciente, se debe tener que $\kappa < \aleph_0$. Por lo tanto, $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales, consiguientemente, $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \aleph_0\} = \aleph_0 = \lambda$. Por tanto, $(\kappa^{<\lambda})^\nu = \lambda^\nu = \lambda = \kappa^{<\lambda}$ pues ν es finito.

(ii) Si $\lambda > \aleph_0$ y $0 < \nu < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces $\kappa^{<\lambda} \geq \aleph_0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\max\{\nu, \aleph_0\} \leq \lambda_\xi < \lambda$ para todo $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$. Por el teorema 5.4.5 b), $0 < \nu < \mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\lambda)$; así que podemos aplicar el teorema 5.2.3 y obtenemos que $(\kappa^{<\lambda})^\nu = \kappa^{<\lambda} \cdot \sup\{\mu^\nu \mid \mu <_c \kappa^{<\lambda}\}$. Como $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}$, entonces
$$\sup\{\mu^\nu \mid \mu <_c \kappa^{<\lambda}\} = \sup\{(\kappa^{\lambda_\xi})^\nu \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi \cdot \nu} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}.$$
Además, $\lambda_\xi \cdot \nu = \lambda_\xi$ pues $\max\{\nu, \aleph_0\} \leq \lambda_\xi$. Dado que $(\kappa^{\lambda_\xi})_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ es cofinal en $\kappa^{<\lambda}$, tenemos:
$$\begin{aligned}(\kappa^{<\lambda})^\nu = \kappa^{<\lambda} \cdot \sup\{\mu^\nu \mid \mu <_c \kappa^{<\lambda}\} &= \kappa^{<\lambda} \cdot \sup\{\kappa^{\lambda_\xi \cdot \nu} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\} \\ &= \kappa^{<\lambda} \cdot \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\} = \kappa^{<\lambda} \cdot \kappa^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda}.\end{aligned}$$

(iii) Si $\lambda \leq \nu$ o $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \nu < \lambda$, en ambos casos se cumple que $\aleph_0 \leq \mathrm{cf}(\lambda) \leq \nu$, entonces $\nu \cdot \mathrm{cf}(\lambda) = \nu$. La sucesión $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ cumple que $\lambda = \sum_{\xi<\lambda} \lambda_\xi$. También, como $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ y $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \leq \kappa^{<\lambda}$, se sigue que
$$\kappa^{<\lambda} = \mathrm{cf}(\lambda) \cdot \kappa^{<\lambda} = \mathrm{cf}(\lambda) \cdot \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\} = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}.$$
Además, por el corolario 4.4.15 c),
$$\Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$
Por consiguiente y teniendo en cuenta que $\nu \cdot \mathrm{cf}(\lambda) = \nu$:
$$\begin{aligned}(\kappa^{<\lambda})^\nu &= \Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^\nu = \Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^{\nu\cdot\mathrm{cf}(\lambda)} = \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^{\nu\cdot\mathrm{cf}(\lambda)} = \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\Big)^\nu \\ &= \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} (\kappa^{\lambda_\xi})^\nu = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\nu\cdot\lambda_\xi} = \kappa^{\sum \nu\cdot\lambda_\xi} = \kappa^{\nu\cdot\sum\lambda_\xi} = \kappa^{\nu\cdot\lambda}\end{aligned}$$
Así, $(\kappa^{<\lambda})^\nu = \kappa^{\nu\cdot\lambda} = \kappa^{\max\{\nu,\lambda\}} = \begin{cases} \kappa^\nu & \textit{si } \lambda \leq \nu \\ \kappa^\lambda & \textit{si } \mathrm{cf}(\lambda) \leq \nu < \lambda. \end{cases}$

†

Observación. Por el teorema anterior, para $\kappa = 2$ y $\nu = \mathrm{cf}(\lambda)$, se tiene que $(2^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = 2^\lambda$. Esta igualdad es el teorema 5.2.4 pues probamos en dicho teorema que $\sum_{\nu<_c\lambda} 2^\nu = \sup\{2^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = 2^{<\lambda}$.

Teorema 5.4.7 (Bukovsky, Hechler)**.** *Si λ es un cardinal singular y si la función del continuo para κ es eventualmente constante debajo de λ a partir de ρ_0, entonces $\kappa^\lambda = \kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0}$.*

Demostración. Aplicando el teorema 5.4.6, $(\kappa^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^\lambda$ pues $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$. Por el teorema 5.4.5, $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \kappa^\rho$ para todo cardinal ρ con $\rho_0 \leq \rho < \lambda$. Por tanto, $\kappa^\lambda = (\kappa^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = (\kappa^{\rho_0})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\rho_0\cdot\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\rho_0}$ ya que $\rho_0 \leq \rho_0 \cdot \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$, en consecuencia, $\kappa^\lambda = \kappa^{\rho_0} = (\kappa^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. †

Teorema 5.4.8. *La función del continuo puede caracterizarse mediante la función guímel, de la siguiente forma:*

a) Si κ es un cardinal regular, entonces $2^\kappa = \gimel(\kappa)$;

b) Si κ es un cardinal singular y la función del continuo es eventualmente constante debajo de κ, entonces $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

c) Si κ es un cardinal singular y la función del continuo no es eventualmente constante debajo de κ, entonces $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$.

Demostración. a) Si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, entonces $2^\kappa = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$, y así $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \gimel(\kappa)$.

b) Si κ es un cardinal singular y la función del continuo es eventualmente constante debajo de κ, por el teorema anterior (Bukovsky), $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

c) Si κ es un cardinal singular y la función del continuo no es eventualmente constante debajo de κ, por el teorema 5.4.5, $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$ y usando el teorema 5.4.6 tenemos $\gimel(2^{<\kappa}) = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa$. †

5.5. La hipótesis generalizada del continuo

Un problema que Georg Cantor se planteó fue el de calcular valor de la cardinalidad de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Sabemos que todo número real ente 0 y 1 admite una representación (única) de la forma $0.a_1a_2a_3\cdots$, donde los a_n son números naturales del 0 al 9; esta representación se asocia a su vez a una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y viceversa. Esto implica que la cardinalidad del intervalo de números reales $[0, 1)_\mathbb{R}$ es igual a la cardinalidad del conjunto de sucesiones con dominio ω y con rango $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, es decir, $|[0, 1)_\mathbb{R}| = |{}^{\mathbb{N}}\{0, 1, 2, \ldots, 9\}| = 10^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$. Ahora bien, se puede demostrar fácilmente que $|[0, 1)| = |[n, n+1)|$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y que esta familia de intervalos forman una partición para $\mathbb{R}$, en consecuencia, $|\mathbb{R}| = |\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |[n, n+1)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\aleph_0} = |\mathbb{Z}|\cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Justamente eso es lo que probó Cantor, pero, ¿cuál es el valor exacto de $2^{\aleph_0}$? Sabemos que $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ para algún $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$. En 1883, Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, lo cual intentó probar sin éxito. Esta proposición se le conoce como la *hipótesis del continuo*. En ZFE no podemos saber cuánto vale $2^{\aleph_0}$; sin embargo, del corolario 5.1.4 a), se cumple que para todo $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $\aleph_{\alpha+\omega} \neq 2^{\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega})}$; y ya sabemos que $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \aleph_0$. Por lo tanto, $\forall\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : 2^{\aleph_0} \neq \aleph_{\alpha+\omega}$.

De aquí se desprende otra proposición, llamada la *hipótesis generalizada del continuo* (HGC), a saber:

Para cualquier $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, se cumple que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Durante mucho tiempo, no se supo si esta propiedad era verdadera o falsa. En 1939, Kurt Gödel demostró que la HGC es consistente con los axiomas de ZFE, dando un modelo en el que la HGC se satisface. En 1963, Paul Cohen construyó un modelo de ZFE en que la HGC es falsa. Gracias a estos dos resultados, se prueba que la hipótesis generalizada del continuo es independiente de ZFE, es decir, que no se puede demostrar ni refutar con los axiomas de ZFE.

La suposición de la HGC determina por completo la potenciación de cardinales infinitos que es lo que vamos a ver.

Teorema 5.5.1. *Supongamos la hipótesis generalizada del continuo. Para cualesquiera* $\kappa\,{}_c\!\geq 2$ *y* $\lambda\,{}_c\!\geq \aleph_0$ *se cumple:*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+ & si\ \kappa \leq \lambda \\ \kappa^+ & si\ \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa \\ \kappa & si\ \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}$$

Demostración. Si $\kappa \leq \lambda$, por el teorema 4.3.4, $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$.

Si $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, por los teoremas 5.1.3 y 4.2.6: $\kappa^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. Así, $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

Si $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, por el teorema 5.2.3, $\kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\}$. Para cada $\nu <_c \kappa$, tenemos dos casos:

i) cuando $\lambda \leq \nu$, se tiene que $\nu^\lambda \leq \nu^\nu = 2^\nu = \nu^+ \leq \kappa$, pues $\nu < \kappa$;

ii) si $\nu < \lambda$, resulta que $\nu^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+ \leq \kappa$, pues $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa$.

Tenemos, por tanto, que $\forall \nu <_c \kappa : \nu^\lambda \leq \kappa$, con lo cual $\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa$. Luego entonces, $\kappa \leq \kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. Así, $\kappa^\lambda = \kappa$. †

Teorema 5.5.2. *Supongamos la HGC. Si* $\kappa\,{}_c\!\geq 2$ *y* $\lambda\,{}_c\!\geq \aleph_0$, *entonces*

$$\kappa^{<\lambda} = \begin{cases} \lambda & si\ \ \kappa < \lambda \\ \kappa^+ & si\ \ \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leq \kappa \\ \kappa & si\ \ \lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}$$

Demostración. Por el lema 5.1.1, $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \mu \leq \nu <_c \lambda\}$ para cualquier $\mu <_c \lambda$. Además, por el teorema 5.5.1, para cada $\nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$ se tiene:

$$\kappa^\nu = \begin{cases} \nu^+ & si\ \ \kappa \leq \nu \\ \kappa^+ & si\ \ \mathrm{cf}(\kappa) \leq \nu < \kappa \\ \kappa & si\ \ \nu < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}$$

De aquí tenemos cuatro casos:

(i) Si $\lambda = \aleph_0$, entonces $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^n \mid n < \omega\}$, de lo que se desprenden dos subcasos. Cuando κ es finito, cada κ^n es finito y la sucesión $(\kappa^n)_{n<\omega}$ no es acotada en $\aleph_0$, por lo cual $\kappa^{<\lambda} = \aleph_0 = \lambda$ (y $\kappa < \aleph_0 = \lambda$). Si κ es infinito, entonces $\forall n < \omega : \kappa^n = \kappa$, y así $\kappa^{<\lambda} = \kappa$ (sin olvidar que $\lambda = \aleph_0 \leq \mathrm{cf}(\kappa)$).

(ii) Si $\kappa < \lambda$, tendremos que $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \mathrm{máx}\{\aleph_0, \kappa\} \leq \nu <_c \lambda\} = \sup\{\nu^+ \mid \mathrm{máx}\{\aleph_0, \kappa\} \leq \nu <_c \lambda\} = \lambda$.

(iii) Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leq \kappa$, en ese caso $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \mathrm{cf}(\kappa) \leq \nu <_c \lambda \leq \kappa\} = \sup\{\kappa^+ \mid \mathrm{cf}(\kappa) \leq \nu <_c \lambda\} = \kappa^+$.

(iv) Si $\lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa)$, resulta que $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \aleph_0 \leq \nu <_c \lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa)\} = \sup\{\kappa \mid \aleph_0 \leq \nu <_c \lambda\} = \kappa$. †

Teorema 5.5.3. *Si* $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$, *entonces* $\displaystyle\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$ *si y solo si* $\displaystyle\sum_{\lambda <_c \kappa} 2^\lambda = \kappa \ \wedge\ \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Demostración. Supongamos que $\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$. Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, entonces $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$, lo cual no es posible por el teorema 5.1.3 b); por tanto, $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Por el teorema 5.4.2, $\kappa \leq 2^{<\kappa}$; además, para cada $\nu <_c \kappa$, tenemos que $2^\nu \leq \kappa^\nu \leq \sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$, por lo cual $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} \leq \kappa$. En consecuencia, $2^{<\kappa} = \kappa$, así que

$$\sum_{\lambda <_c \kappa} 2^\lambda = |\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \kappa| \cdot \sup\{2^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} = |\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \kappa| \cdot 2^{<\kappa} = |\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \kappa| \cdot \kappa = \kappa.$$

Por otra parte, supongamos que $\sum_{\lambda<_c\kappa} 2^\lambda = \kappa$ y $\mathrm{cf}(\kappa)=\kappa$. Si $\kappa=\aleph_0$, en tal caso
$$\sum_{\lambda<_c\kappa} \kappa^\lambda = \sum_{n<\omega} \kappa^n = \sum_{n<\omega} \kappa = \kappa.$$
Suponiendo que $\kappa>\aleph_0$, por el teorema 5.4.2 b), $\sum_{\lambda<_c\kappa} \kappa^\lambda = \sum_{\aleph_0\le\lambda<_c\kappa} \kappa^\lambda = \kappa^{<\kappa}$; y por el teorema 5.2.3, para cada $\lambda<_c\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)$, se satisface que $\kappa^\lambda = \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa}\nu^\lambda$. Si $\aleph_0\le\lambda<_c\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)$ y $\nu<_c\kappa$, entonces $\nu\le\lambda+\nu=\max\{\lambda,\nu\}<\kappa$, luego $\nu^{\lambda+\nu}\le 2^{\lambda+\nu}$, por consiguiente,
$$\kappa^\lambda = \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa}\nu^\lambda =\le \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa}\nu^{\lambda+\nu} =\le \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa}2^{\lambda+\nu} \le \kappa\cdot\sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu = \kappa\cdot\kappa=\kappa;$$
por lo tanto,
$$\kappa\le\sum_{\lambda<_c\kappa}\kappa^\lambda = \sum_{\aleph_0\le\lambda<_c\kappa}\kappa^\lambda \le \sum_{\aleph_0\le\lambda<_c\kappa}\kappa = |[\aleph_0,\kappa)_{\mathcal{C}}|\cdot\kappa=\kappa.$$
†

Observación. Debido al teorema 5.4.2, el teorema anterior se puede enunciar de la siguiente forma:

Si $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, entonces $\kappa^{<\kappa}=\kappa$ si y solo si $2^{<\kappa}=\kappa \wedge \mathrm{cf}(\kappa)=\kappa$

Teorema 5.5.4. *La HGC equivale a que* $\forall\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega : 2^{<\kappa} = \sum_{\nu<_c\kappa} 2^\nu = \kappa.$

Demostración. Por el teorema 5.4.2, $2^{<\kappa}=\sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu$.

Supongamos la HGC. Para $\kappa=\aleph_0$, es claro que $\sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu=\sum_{n<\omega}2^n=\kappa$. Si $\kappa\in\mathcal{C}$ con $\kappa>\aleph_0$, entonces
$$\sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu = |\mathcal{C}\cap\kappa|\cdot\sup\{2^\nu \mid \nu<_c\kappa\} = |\mathcal{C}\cap\kappa|\cdot\sup\{2^\nu \mid \aleph_0\le\nu<_c\kappa\}$$
$$= |\mathcal{C}\cap\kappa|\cdot\sup\{\nu^+ \mid \aleph_0\le\nu<_c\kappa\} = |\mathcal{C}\cap\kappa|\cdot\kappa=\kappa.$$
Ahora, supongamos que $\forall\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega : \sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu=\kappa$. Si $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, entonces
$$\kappa=\sum_{\nu<_c\kappa}2^\nu = \max\{|\mathcal{C}\cap\kappa|,\ \sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}\},$$
por lo cual $\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}\le\kappa$; pero si $\nu<_c\kappa$, resulta que $\nu<2^\nu\le\kappa$ (ningún cardinal menor que κ es cota superior de $\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}$); por lo tanto, $\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}=\kappa$. Así, para cada $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, $\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}=\kappa$; en particular, para todo $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, $\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa^+\}=\kappa^+$. En consecuencia, si $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, entonces $\kappa^+=\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa^+\}=\sup\{2^\nu\mid\nu\le_c\kappa\}=2^\kappa$. †

Teorema 5.5.5. *HGC si y solo si* $\forall\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega : \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$.

Demostración. Supongamos la HGC. Si $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$, por el teorema 5.1.3 b), $\kappa^+\le\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$; y como $\mathrm{cf}(\kappa)\le\kappa$, entonces $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\le\kappa^\kappa=2^\kappa=\kappa^+$; por tanto, $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$.

Supongamos que $\forall\in\mathcal{C}\setminus\omega : \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$. Vamos a probar por inducción que $\forall\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega : 2^\kappa=\kappa^+$. Para $\kappa=\aleph_0$, tenemos que $\mathrm{cf}(\aleph_0)=\aleph_0$, en consecuencia, $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_0^{\mathrm{cf}(\aleph_0)}=\aleph_0^+$. Si $\kappa\in\mathcal{C}\setminus\omega$ cumple que $2^\kappa=\kappa^+$, entonces $\mathrm{cf}(\kappa^+)=\kappa^+$, y con ello $2^{(\kappa^+)}=(\kappa^+)^{(\kappa^+)}=(\kappa^+)^{\mathrm{cf}(\kappa^+)}=(\kappa^+)^+$. Si κ es un cardinal límite tal que $\forall\nu\in\mathcal{C}\setminus\omega : (\nu<\kappa\Rightarrow 2^\nu=\nu^+)$; entonces, $\forall\nu\in\mathcal{C}\setminus\omega : (\nu<\kappa\Longrightarrow 2^\nu=\nu^+<\kappa)$; en consecuencia, $2^{<\kappa}=\sup\{2^\nu\mid\nu<_c\kappa\}\le\kappa$; luego, por el teorema 5.2.4, $2^\kappa=(2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\le\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$, y ya se sabe que $\kappa^+\le2^\kappa$, por lo tanto, $2^\kappa=\kappa^+$. Por el PIT, $\forall\in\mathcal{C}\setminus\omega : 2^\kappa=\kappa^+$. †

5.6. La hipótesis de los cardinales singulares

De acuerdo con el corolario 5.3.5, para saber los valores de la potenciación no basta con saber los valores de la función del continuo (los valores 2^κ), sino que también hace falta saber los valores de la función $\gimel$ (los cardinales $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$). Sin embargo, en el teorema 5.4.8 probamos que la función del continuo puede caracterizarse a partir de la función guímel: si $\kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega$ es regular, entonces $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa$ y, si κ es singular, la cosa se vuelve un poco más compleja. Pero, por el corolario 5.1.4, $\kappa \neq 2^\kappa$. Si $\kappa < 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, se tiene que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq (2^{\mathrm{cf}(\kappa)})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)\cdot\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, por lo cual $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Ahora, ¿qué pasa cuando $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$?, pues lo que podemos deducir es que κ es singular. Recordemos también que $\kappa^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ (teorema 5.1.3).

La hipótesis de los cardinales singulares (HCS) dice lo siguiente:

$$\forall \kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega : 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa \Longrightarrow \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+.$$

Como vimos en la sección anterior, la proposición $\forall \kappa \in \mathcal{C}\setminus\omega : \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$, es equivalente a la HGC (teorema 5.5.5), de modo que la HCS es más débil. Observamos, también, que la HGC implica la HCS; de este modo, todo lo que se cumpla bajo el supuesto de la HCS, se va a cumplir también si suponemos la HGC.

Teorema 5.6.1. *Supongamos la HCS. Si κ es un cardinal singular, entonces*

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \textit{si la función del continuo es eventualmente constante debajo de } \kappa \\ (2^{<\kappa})^+ & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. En el primer caso, la igualdad se da por el teorema 5.4.7.

Supongamos que la función del continuo no es eventualmente constante debajo de κ. Como $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, existe $\nu \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{cf}(\kappa) < \nu < \kappa$ y $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < 2^\nu \leq 2^{<\kappa}$. Por el teorema 5.4.5 b), tenemos que $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$, con lo cual $2^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < 2^\nu \leq 2^{<\kappa}$ y, en consecuencia, aplicando la HCS, $(2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = (2^{<\kappa})^+$. Volviendo a usar el hecho de que $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$, obtenemos $(2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^{<\kappa})^+$. Finalmente, aplicando el teorema 5.2.4, tenemos que $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^{<\kappa})^+$. †

Teorema 5.6.2. *Supongamos la HCS. Si κ y λ son cardinales infinitos, entonces*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & \textit{si } 2^\lambda \geq \kappa \\ \kappa^+ & \textit{si } 2^\lambda < \kappa \textit{ y } \lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa & \textit{si } 2^\lambda < \kappa \textit{ y } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}$$

Demostración. Si $\kappa \leq 2^\lambda$, entonces $\kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$, y es claro que $2^\lambda \leq \kappa^\lambda$, en consecuencia, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Para los dos casos restantes vamos a probar por inducción transfinita que

$$\forall \kappa \in \mathcal{C} : \kappa > 2^\lambda \Longrightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa^+ & \textit{si } \lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa & \textit{si } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases}$$

Comenzando para el caso $\kappa = (2^\lambda)^+$ tenemos que $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa > 2^\lambda > \lambda$, y aplicando la fórmula de Hausdorff $\kappa^\lambda = [(2^\lambda)^+]^\lambda = (2^\lambda)^+ \cdot (2^\lambda)^\lambda = (2^\lambda)^+ \cdot 2^\lambda = (2^\lambda)^+ = \kappa$.

Sea κ un cardinal mayor que 2^λ y que cumpla la hipótesis de inducción, entonces $\kappa^\lambda \in \{\kappa^+, \kappa\}$, con lo cual $\kappa^\lambda \leq \kappa^+$. Luego, aplicando la fórmula de Hausdorff, $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda = \kappa^+$.

Sea ahora κ un cardinal límite con $\kappa > 2^\lambda$ tal que todo cardinal ν con $2^\lambda < \nu < \kappa$, ν cumple la hipótesis de inducción, esto implica que $\nu^\lambda \in \{\nu, \nu^+\}$. Para todo cardinal $\nu < \kappa$ se tiene: si $\nu \leq 2^\lambda$, entonces $\nu^\lambda \leq 2^\lambda < \kappa$; y si $2^\lambda < \nu$, entonces $\nu^\lambda \leq \nu^+ < \kappa$. Lo anterior implica que κ es λ-fuerte. Por el teorema 5.3.3,

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \textit{si } \mathrm{cf}(\kappa) > \lambda \\ \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} & \textit{si } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \end{cases}$$

Si $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$. Si $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$, resulta que $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq 2^\lambda < \kappa$, luego, aplicando la HCS y el teorema 5.3.3, $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. †

Incluso podemos saber el valor de los productos infinitos:

Teorema 5.6.3. *Supongamos la HCS. Si $\lambda \in \mathbf{Lim}$ y $(\kappa_\xi)_{\xi<\lambda}$ es una sucesión de cardinales mayores o iguales que 2 tales que $\forall \xi < \lambda : \kappa_\xi < \sup\{\kappa_\zeta \mid \zeta < \lambda\}$; entonces,*

$$\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = (\sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \lambda\})^{|\lambda|}.$$

Demostración. Denotemos $\kappa := \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \lambda\}$.

Si $\kappa \leq 2^{|\lambda|}$, entonces $\kappa^{|\lambda|} \leq 2^{|\lambda|}$, por lo cual $\kappa^{|\lambda|} = 2^{|\lambda|}$. Luego

$$\kappa^{|\lambda|} = 2^{|\lambda|} = \prod_{\xi<\lambda} 2 \leq \prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\lambda} \kappa \leq \kappa^{|\lambda|}.$$

Por otra parte, supongamos que $2^{|\lambda|} < \kappa$, y sea $(\alpha_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)}$ una sucesión creciente de ordinales menores que λ tal que $\lambda = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}$. Se deduce entonces que $\kappa = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \lambda\} = \sup\{\kappa_{\alpha_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}$, y como $\mathrm{cf}(\lambda) \leq |\lambda| < 2^{|\lambda|} < \kappa$, se sigue que $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi} = \mathrm{cf}(\lambda)\cdot\kappa = \kappa$. Aplicando el corolario 4.4.15 c):

$$\begin{aligned}\kappa^{|\lambda|} = \Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}\Big)^{|\lambda|} &= \Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}\Big)^{\mathrm{cf}(\lambda)\cdot|\lambda|} \\ &= \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}\Big)^{\mathrm{cf}(\lambda)\cdot|\lambda|} = \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}\Big)^{|\lambda|} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}^{|\lambda|}.\end{aligned}$$

Por el teorema 5.6.2, $\kappa_{\alpha_\xi}^{|\lambda|} \in \{2^{|\lambda|}, \kappa_{\alpha_\xi}^+, \kappa_{\alpha_\xi}\}$; además, $2^{|\lambda|} < \kappa$ y $\kappa_{\alpha_\xi}^+ \leq \kappa$ y $\kappa_{\alpha_\xi} < \kappa$; en consecuencia, $\kappa_{\alpha_\xi}^{|\lambda|} \leq \kappa$ para cada $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$. Entonces, usando el corolario 5.2.5 a):

$$\kappa^{|\lambda|} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi}^{|\lambda|} \leq \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa_{\alpha_\xi} \leq \prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$$

Finalmente, tenemos $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\lambda} \kappa = \kappa^{|\lambda|}$ pues $\forall \xi < \lambda : \kappa_\xi < \kappa$.

Por lo tanto, $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \kappa^{|\lambda|}$. †

Capítulo 6

Conjuntos estacionarios

En este capítulo se verán tipos especiales de conjuntos tales como los clubes, los filtros, ideales y los conjuntos estacionarios. Para terminar, vamos a usar algunas propiedades de estos conjuntos para demostrar un resultado importante acerca de la hipótesis del continuo y de la hipótesis de los cardinales singulares.

6.1. Clubes

Definición 6.1.1. Sean $\alpha \in \mathcal{R}$, $A \subseteq \mathcal{R}$ y $C \subseteq \alpha$.

1) γ es un *punto límite* de A si γ es un ordinal límite y $\gamma = \sup(A \cap \gamma) = \bigcup(A \cap \gamma)$.

2) C es *cerrado* en α si todo punto límite de C menor que α pertenece a C.

3) Todo subconjunto cerrado y que no es acotado en α se llama *club* en α.

4) Si λ es un cardinal límite con $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$, decimos que C es un *club especial* en λ si C es un club en λ con tipo de orden $\mathrm{cf}(\lambda)$ y todos sus elementos son cardinales singulares mayores que $\mathrm{cf}(\lambda)$.

El primer resultado relaciona el concepto de conjunto cerrado definido anteriormente con el concepto de conjunto cerrado en topología.

Teorema 6.1.1. *Para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$ denotemos $(\leftarrow, \gamma) := \{\xi \in \mathcal{R} \mid \xi < \alpha\}$ y $(\alpha, \rightarrow) := \{\xi \in \mathcal{R} \mid \alpha < \xi\}$. Sea $A \subseteq \mathcal{R}$ no vacío. La topología del orden en A, es la generada por:*

$$\big\{(\sigma, \gamma) \cap A \ \mid \ \sigma, \gamma \in A\big\} \cup \big\{(\leftarrow, \gamma) \cap A \ \mid \ \gamma \in A\big\} \cup \big\{(\sigma, \rightarrow) \cap A \mid \sigma \in A\big\} \cup \big\{A\big\} \tag{6.1}$$

Si α es un ordinal límite y τ_α es la topología del orden en α, entonces un subconjunto C en α es cerrado en el sentido de la definición 6.1.1 si y solo si C es cerrado en el espacio topológico (α, τ_α).

Demostración. En primer lugar observemos que dado que $\alpha \in \mathcal{R}$, para cualesquiera $\sigma, \gamma \in \alpha$ tenemos, $(\sigma, \gamma) \cap \alpha = (\sigma, \gamma)$, $(\leftarrow, \gamma) \cap \alpha = [0, \gamma)$, $(\sigma, \rightarrow) \cap \alpha = (\sigma, \alpha)$ y $\alpha = [0, \alpha)$. En consecuencia, la base (6.1) que genera a τ_α es $\mathcal{B} := \{(\sigma, \gamma) \mid \sigma, \gamma \leq \alpha\} \cup \{[0, \gamma) \mid \gamma \leq \alpha\}$.

Supongamos que C es cerrado en (α, τ_α). Sea $\delta \in \alpha$ un ordinal límite tal que $\sup(\delta \cap C) = \delta$. Probaremos que $\delta \in \overline{C}$ (la *cerradura* de C), demostrando que $\forall A \in \mathcal{B} : \delta \in A \Longrightarrow A \cap C \neq \emptyset$. Sean $\sigma, \gamma \in \mathcal{R}$ con $\sigma, \gamma \leq \alpha$ tales que $\delta \in (\sigma, \gamma)$, entonces $\sigma < \delta = \sup(\delta \cap C)$, por lo que existe $c \in \delta \cap C$ tal que $\sigma < c$, por lo cual $c \in C$ y $\sigma < c < \delta < \gamma$, y así $c \in C \cap (\sigma, \gamma)$. Ahora, si $\delta \in [0, \gamma)$ con $\gamma \leq \alpha$, como $\delta \neq 0$, se tiene que $\delta \in (0, \gamma)$ y por lo que acabamos de probar (tomando $\sigma = 0$), obtenemos que $(0, \gamma) \cap C \neq \emptyset$, y de aquí $[0, \gamma) \cap C \neq \emptyset$. Por tanto $\gamma \in \overline{C} = C$.

Ahora supóngase que C es cerrado según la definición 6.1.1. Sea $\delta \in \overline{C}$ y probemos que $\delta \in C$. Si $\delta = 0$, entonces $\delta \in [0, 1) \in \tau_\alpha$, con lo cual $[0, 1) \cap C \neq \emptyset$, pero $[0, 1) = \{0\} = \{\delta\}$, así que $\delta \in C$. Si $\delta = \beta + 1$ para algún $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, se tiene que $\delta \in (\beta, \beta+2) \in \tau_\alpha$, entonces $(\beta, \beta+2) \cap C \neq \emptyset$, y como $(\beta, \beta+2) = \{\beta+1\} = \{\delta\}$, se obtiene que $\delta \in C$. Finalmente, si $\delta \in \mathbf{Lim}$, entonces

$$\forall \beta < \delta : \delta \in (\beta, \delta+1) \in \tau_\alpha \wedge (\beta, \delta+1) = (\beta, \delta],$$

en consecuencia, $\forall \beta < \delta : (\beta, \delta] \cap C \neq \emptyset$, por lo cual $\forall \beta < \delta : \exists c \in C : \beta < c \leq \delta$. Ahora, si se diera el caso que $\forall \beta < \delta : \exists c \in C : \beta < c < \delta$ (si $c = \delta$ para algún $c \in C$, entonces $\delta \in C$ inmediatamente), tendríamos que $\forall \beta < \delta : \exists c \in C \cap \delta : \beta < c$, lo cual nos diría $\sup(C \cap \delta) = \delta$, y de la cerradura de C obtendríamos $\delta \in C$; así pues, en cualquier caso $\delta \in C$. Por ende, $\overline{C} \subseteq C$. †

Teorema 6.1.2. *Si $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $C \subseteq \alpha$, entonces C es cerrado en α si y solo si para cualquier sucesión $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ ($\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$) de elementos en C: si $\sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} < \alpha$, entonces $\sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} \in C$.*

Demostración. Supongamos que C es un conjunto cerrado de α y sea $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ una sucesión de elementos de C tal que $\beta := \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} < \alpha$.

(i) Si $\beta = \sigma + 1$ para algún $\sigma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\sigma < \sup\{\beta_\xi \mid \xi \in A\}$, lo que implica que existe $\xi < \lambda$ tal que $\sigma < \beta_\xi \leq \sigma + 1$, en consecuencia, $\beta_\xi = \sigma + 1 = \beta$, y así $\beta \in C$.

(ii) Si $\beta = 0$, como $\forall \xi < \lambda : \beta_\xi \leq \beta$, entonces $\forall \xi < \lambda : \beta_\xi = 0$, con lo cual $\beta = 0 \in C$.

(iii) Si $\beta \in \{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\}$, es claro que $\beta \in C$.

(iv) Si $\beta \notin \{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\}$ y $\beta \in \mathbf{Lim}$, resulta que $\forall \xi < \lambda : \beta_\xi < \beta$, por esto $\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} \subseteq \beta \cap C \subseteq \beta$, luego $\beta = \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} \leq \sup(\beta \cap C) \leq \sup(\beta) = \beta$, y así $\sup(\beta \cap C) = \beta$. Por tanto, β es un punto límite de C menor que α, lo que implica que $\beta \in C$ pues C es cerrado.

Por otro lado, supongamos que para toda sucesión $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ en C; si $\sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} < \alpha$, entonces $\sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} \in C$. Sea γ un punto límite de C menor que α. Entonces todos los miembros de la sucesión $(\xi)_{\xi \in \gamma \cap C}$ pertenecen a C y $\sup\{\xi \mid \xi \in \gamma \cap C\} = \sup(\gamma \cap C) = \gamma < \alpha$, de lo que se sigue, por hipótesis, que $\sup\{\xi \mid \xi \in \gamma \cap C\} = \gamma \in C$. Por tanto, C es cerrado en α. †

Ejemplos. A continuación veremos algunos ejemplos de clubes. En lo que sigue, α será un ordinal límite:

1. Si $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, $\alpha \cap \mathbf{Lim}$ es un club en α.

   Claramente, $\alpha \cap \mathbf{Lim}$ es cerrado en α. Solo hay que ver que no es acotado. Si $\xi < \alpha$, como α es un ordinal límite, entonces $\forall n < \omega : \xi + n < \alpha$ y $\xi + \omega = \sup\{\xi + n \mid n < \omega\} \in \mathbf{Lim}$, en consecuencia, $\xi + \omega < \alpha$ pues $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Tenemos, entonces, que $\xi < \xi + \omega$ y $\xi + \omega \in \mathbf{Lim} \cap \alpha$ (para todo $\xi < \alpha$); por tanto, $\mathbf{Lim} \cap \alpha$ no es acotado en α. Así, $\mathbf{Lim} \cap \alpha$ un club en α.

2. Para todo $\beta < \alpha$, el intervalo $[\beta, \alpha)$ es un club en α.

   Claramente, $[\beta, \alpha)$ no es acotado en α. Sea γ un punto límite de $[\beta, \alpha)$ menor que α, entonces $\gamma = \sup(\gamma \cap [\beta, \alpha))$. Dado que $\gamma \neq \emptyset$, existe $\xi \in \gamma \cap [\beta, \alpha)$. Tomemos ξ cualquiera en $\gamma \cap [\beta, \alpha)$, entonces $\xi < \gamma$ y $\beta \leq \xi < \alpha$, por consiguiente, $\beta \leq \xi < \gamma < \alpha$, luego $\gamma \in [\beta, \alpha)$.

3. Si λ es un cardinal límite y $\beta < \lambda$, entonces $[\beta, \lambda)_{\mathcal{C}}$ es un club en κ.

   Es obvio que $[\beta, \lambda)_{\mathcal{C}}$ no es acotado en λ. Si γ es un punto límite de $[\beta, \lambda)_{\mathcal{C}}$ menor que λ, entonces $\gamma = \sup(\gamma \cap [\beta, \lambda)_{\mathcal{C}})$, lo cual implica que $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, por el teorema 4.1.15 b); además, tomando $\xi \in \gamma \cap [\beta, \lambda)_{\mathcal{C}}$, se tiene que $\xi < \gamma$ y $\beta \leq \xi < \lambda$, por consiguiente, $\beta \leq \xi < \gamma < \lambda$, de este modo, $\gamma \in [\beta, \lambda)_{\mathcal{C}}$.

4. Si $\alpha > \omega$, el conjunto de los ordinales sucesores menores que α no es un club en α.

   Observemos que $\{\xi+1 \mid \xi < \alpha\} \cap \omega = \omega \setminus \{0\}$, entonces $\sup(\{\xi+1 \mid \xi < \alpha\} \cap \omega) = \sup(\omega \setminus \{0\}) = \omega$. Esto implica que ω es un punto límite de $\{\xi+1 \mid \xi < \alpha\}$ y es menor que α, pero $\omega \notin \{\xi+1 \mid \xi < \alpha\}$. Por lo tanto, $\{\xi+1 \mid \xi < \alpha\}$ no es un club en α.

5. Si λ es un cardinal $\mathrm{cf}(\lambda)$-fuerte tal que $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$, entonces $\{\mu < \lambda \mid \mu \text{ es } \mathrm{cf}(\lambda)\text{-fuerte}\}$ es un club en λ.

   Denotemos $C := \{\mu < \lambda \mid \mu \text{ es } \mathrm{cf}(\lambda)\text{-fuerte}\}$. Si $\kappa <_c \lambda$, por la demostración del teorema 5.3.1 c) se verifica que $(\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)})^+$ es $\mathrm{cf}(\lambda)$-fuerte, y se observa claramente que es mayor que κ. Como λ es $\mathrm{cf}(\lambda)$-fuerte, si $\kappa <_c \lambda$, se cumple que $\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \lambda$, con lo cual $(\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)})^+ < \lambda$ pues λ es singular. Tenemos, en consecuencia, que para todo $\kappa <_c \lambda$, $(\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)})^+ \in C$ y $\kappa < (\kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)})^+$; esto es, C no es acotado en λ.

   Sea κ un punto límite de C menor que λ, entonces $\kappa = \sup(C \cap \kappa)$. Si $\rho <_c \kappa$, existe $\mu \in C \cap \kappa$ tal que $\rho < \mu < \kappa$, entonces $\rho^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \mu$ porque μ es $\mathrm{cf}(\lambda)$-fuerte, luego $\rho^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \mu < \kappa$; en resumen, $\forall \rho <_c \kappa : \rho^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \kappa$; en consecuencia, $\rho \in C$. Por ende, C es cerrado en λ.

El siguiente lema también da ejemplos de clubes, pero los presentamos como un teorema porque son importantes en la teoría que estamos desarrollando, además de que son más complejos.

Lema 6.1.3. *Sea α un ordinal límite.*

a) Si $\alpha > \omega$, $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ y $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ es una función, entonces $\{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$ es un club en α.

b) Supongamos que $E \subseteq \alpha$ no es acotado en α y sea $E' := \{\gamma < \alpha \mid \gamma \text{ es un punto límite de } E\}$. Entonces, $E \cup E'$ es un club en α; y si $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, E' también es un club en α.

Demostración. a) Pongamos $C := \{\beta < \alpha \mid f[\beta] \subseteq \beta\}$. Para ver que C es cerrado usaremos el teorema 6.1.2. Sea $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ una sucesión en C tal que $\beta := \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} < \alpha$. Tenemos que $\forall \xi < \lambda : f[\beta_\xi] \subseteq \beta_\xi$, entonces $\bigcup_{\xi<\lambda} f[\beta_\xi] \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi$. Como $\beta = \bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi$, resulta que

$$f[\beta] = f\Big[\bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi\Big] = \bigcup_{\xi<\lambda} f[\beta_\xi] \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi = \beta,$$

con lo cual $\beta \in C$. Por tanto, C es cerrado en α.

Veamos que C no es acotado. Sea $\sigma < \alpha$ cualquiera. Definamos $\beta_0 := \max\{\sigma+1, \sup(f[\sigma])+1\}$, y para $n < \omega$, $\beta_{n+1} := \max\{\beta_n+1, \sup(f[\beta_n])+1\}$. Como $\sigma < \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$, entonces $\sup(f[\sigma]) < \alpha$, con lo cual $\beta_0 < \alpha$; similarmente, si $\beta_n < \alpha$ con $n < \omega$, resulta que $\sup(f[\beta_n]) < \alpha$, y así $\beta_{n+1} = \max\{\beta_n+1, \sup(f[\beta_n])+1\} < \alpha$. Por el PIM, $\forall n < \omega : \beta_n < \alpha$, de lo cual implicamos que $\sup\{\beta_n \mid n < \omega\} < \alpha$ porque $\omega < \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$. Sea $\beta := \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} = \bigcup_{n<\omega} \beta_n$; probaremos que $\beta \in C$ y $\sigma < \beta$. Claramente, $\sigma < \sigma+1 \leq \beta_0 \leq \beta$. Si $n < \omega$ y $f(\xi) \in f[\beta_n]$ con $\xi \in \beta_n$, entonces $f(\xi) \leq \sup(f[\beta_n]) < \sup(f[\beta_n])+1 \leq \beta_{n+1}$; lo que nos dice que $f[\beta_n] \subseteq \beta_{n+1}$ (para todo $n < \omega$). Por lo tanto, $\bigcup_{n<\omega} f[\beta_n] \subseteq \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1}$. Luego

$$f[\beta] = f\Big[\bigcup_{n<\omega} \beta_n\Big] = \bigcup_{n<\omega} f[\beta_n] \subseteq \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1} = \beta.$$

Así, $\beta \in C$ y $\sigma < \beta$. Esto prueba que C no es acotado en α.

b) Como $E \subseteq E \cup E'$, entonces $E \cup E'$ no es acotado en α. Sea γ un punto límite de $E \cup E'$ menor que α, entonces

$$\gamma = \bigcup \big(\gamma \cap (E \cup E')\big) = \bigcup \big((\gamma \cap E) \cup (\gamma \cap E')\big) = \Big(\bigcup (\gamma \cap E)\Big) \cup \Big(\bigcup (\gamma \cap E')\Big).$$

Si $\beta \in \bigcup(\gamma \cap E')$, existe $\sigma \in \gamma \cap E'$ tal que $\beta \in \sigma$, luego $\beta \in \sigma = \bigcup(\sigma \cap E)$, por lo que $\beta \in \tau$ para algún $\tau \in \sigma \cap E$; resumiendo: $\beta \in \tau \in \sigma \in \gamma$ y $\tau \in E$, de lo cual $\tau \in \gamma \cap E$ y $\beta \in \tau$ y, en consecuencia, $\beta \in \bigcup(\gamma \cap E)$. Se concluye que $\bigcup(\gamma \cap E') \subseteq \bigcup(\gamma \cap E)$, por consiguiente,

$$\gamma = \bigcup \left(\gamma \cap (E \cup E')\right) = \left(\bigcup(\gamma \cap E)\right) \cup \left(\bigcup(\gamma \cap E')\right) = \bigcup(\gamma \cap E)$$

y, por ende, $\gamma \in E' \subseteq E \cup E'$. Por tanto, $E \cup E'$ es cerrado en α. Así, $E \cup E'$ es un club.

Supongamos ahora que $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Primero probemos que E' no es acotado en α. Si $\xi < \alpha$, como E no es acotado, existe una sucesión $(\gamma_n)_{n<\omega}$ en E tal que $\xi < \gamma_0$ y $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ para todo $n < \omega$; tomemos $\gamma := \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\}$, entonces $\gamma < \alpha$ pues $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, y γ es un ordinal límite ya que $(\gamma_n)_{n<\omega}$ es estrictamente creciente; además, $\{\gamma_n \mid n < \omega\} \subseteq \gamma \cap E \subseteq \gamma$, con lo cual $\gamma = \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\} \leq \sup(\gamma \cap E) \leq \sup(\gamma) = \gamma$; así, $\gamma = \sup(\gamma \cap E)$; por lo cual $\gamma \in E'$ y $\xi < \gamma$. Por tanto, E' no es acotado. Para ver que E' es cerrado, vamos a usar el teorema 6.1.2. Sea $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ una sucesión en E' tal que $\beta := \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \lambda\} < \alpha$; entonces, $\bigcup(\beta_\xi \cap E) = \beta_\xi$ para toda $\xi < \lambda$; luego

$$\sup(\beta \cap E) = \bigcup \left(\left(\bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi \right) \cap E \right) = \bigcup \left(\bigcup_{\xi<\lambda} (\beta_\xi \cap E) \right) = \bigcup_{\xi<\lambda} \left(\bigcup(\beta_\xi \cap E) \right) = \bigcup_{\xi<\lambda} \beta_\xi = \beta;$$

por lo cual tenemos que $\beta \in E'$. Por el teorema 6.1.2, E' es cerrado.

†

Teorema 6.1.4. *Sea α un ordinal con $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$. Las siguientes proposiciones se satisfacen:*

a) Si $f : \alpha \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ es una función normal, entonces $\mathrm{ran}(f)$ es un club en $\sup(\mathrm{ran}(f))$. Si, además, $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ es normal, entonces $\mathrm{ran}(f)$ es un club en α.

b) Recíprocamente, para todo club C en α, existe una función normal $f : \mathrm{tpo}(C) \longrightarrow C$ tal que $\mathrm{ran}(f) = C$; en particular, si α es regular, $\mathrm{tpo}(C) = \alpha$ y C es el rango de una función normal $f : \alpha \longrightarrow C$.

Demostración. a) Supongamos que $f : \alpha \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ es normal. Denotemos $C := \mathrm{ran}(f)$ y pongamos $\beta := \sup(\mathrm{ran}(f))$. Claramente C no es acotado en β. Sea γ es un ordinal límite tal que $\gamma < \beta$ y $\sup(\gamma \cap C) = \gamma$, entonces existe $\xi \in \alpha$ tal que $\gamma < f(\xi) \leq \beta$; como $f^{-1}[\gamma \cap C] \subseteq \alpha$, se tiene que $\sup(f^{-1}[\gamma \cap C]) \leq \alpha$. Si se diera que $\sup(f^{-1}[\gamma \cap C]) = \alpha$, se tendría que $\xi < \sup(f^{-1}[\gamma \cap C])$, de lo cual existiría $\zeta \in f^{-1}[\gamma \cap C]$ tal que $\xi < \zeta$, luego $\gamma < f(\xi) < f(\zeta) < \gamma$ (contradicción). Por lo tanto, $\sup(f^{-1}[\gamma \cap C]) < \alpha$. Se sigue, del teorema 4.5.8, que

$$f(\sup(f^{-1}[\gamma \cap C])) = \sup(f[f^{-1}[\gamma \cap C]]) = \sup(\gamma \cap C) = \gamma,$$

por lo cual $\gamma \in \mathrm{ran}(f) = C$. Así pues, C es cerrado en β. Concluimos que $C = \mathrm{ran}(f)$ es un club en $\beta = \sup(\mathrm{ran}(f))$.

Si, por otra parte, $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ es normal, por lo que acabamos de probar, $\mathrm{ran}(f)$ es un club en $\sup(\mathrm{ran}(f))$. Vamos a probar que $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \alpha$. Por el teorema 4.5.6 b), para todo $\xi < \alpha$, resulta que $\xi \leq f(\xi) < f(\xi+1) < \alpha$. Así, $\mathrm{ran}(f)$ no es acotado en α, y con ello $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \alpha$.

b) Sea C un club en α. Por definición, existe un isomorfismo $f : (\mathrm{tpo}(C), <) \longrightarrow (C, <)$, por lo cual f es estrictamente creciente. Solo resta probar que f es continua. En primer lugar, $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \sup(C) = \alpha$ —$\mathrm{ran}(f)$ es cofinal en α—, así que $\omega \leq \mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{tpo}(C)$. Sea γ un ordinal límite con $\gamma < \mathrm{tpo}(C)$. Como $\forall \xi < \gamma : f(\xi) < f(\gamma)$, se tiene que $\sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq f(\gamma)$. Pongamos $\sigma := \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\}$, entonces $\forall \xi < \gamma : f(\xi) < \sigma$ y σ es un ordinal límite; con lo cual $\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} \subseteq \sigma \cap C \subseteq \sigma$; luego $\sigma = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \sup(\sigma \cap C) \leq \sigma$; y por ello $\sigma = \sup(\sigma \cap C)$; por lo que deducimos que $\sigma \in C$ porque C es cerrado. Así, $\sup\{f(\xi) \mid \xi <$

$\gamma\} = \sigma = f(\gamma')$ para algún $\gamma' \in \mathrm{tpo}(C)$; obtenemos luego $f(\gamma') \leq f(\gamma)$ y de ahí que $\gamma' \leq \gamma$. Si $\gamma' < \gamma$, entonces $\gamma' < \gamma'+1 < \gamma$, por ende, $f(\gamma') < f(\gamma'+1) \leq \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\} = f(\gamma')$ lo cual no es posible; por consiguiente, $\gamma = \gamma'$ y así $f(\gamma) = f(\gamma') = \sup\{f(\xi) \mid \xi < \gamma\}$. Por lo tanto, f es continua.

Si suponemos que $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, entonces $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{tpo}(C)$. Además, $\forall \xi < \mathrm{tpo}(C) : \xi \leq f(\xi)$ pues f es estrictamente creciente; de este modo,

$$\mathrm{tpo}(C) = \sup\{\xi \mid \xi < \mathrm{tpo}(C)\} \leq \sup\{f(\xi) \mid \xi < \mathrm{tpo}(C)\} = \sup(C) = \alpha.$$

Por lo tanto, $\mathrm{tpo}(C) = \alpha$. †

Corolario 6.1.5. *a) Si $\alpha \in \mathbf{Lim}$, entonces α contiene un club con tipo de orden $\mathrm{cf}(\alpha)$.*

b) Si α es un cardinal singular con cofinalidad no numerable, entonces α contiene un club especial.

Demostración. a) Por el teorema 4.5.9, existe una función normal $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ cuyo rango es cofinal en α. Por la parte a) del teorema anterior, $\mathrm{ran}(f)$ es un club en $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \alpha$. Es claro que $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{ran}(f)$ es un $<$-$<$ isomorfismo; por lo cual $\mathrm{ran}(f)$ tiene tipo de orden $\mathrm{cf}(\alpha)$.

b) Por el teorema 4.5.16, existe una sucesión normal de cardinales singulares $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\alpha) : \mathrm{cf}(\alpha) < \lambda_\xi < \alpha$ y $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha)\} = \alpha$. El rango de $(\lambda_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ es $C := \{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$, así que, por el teorema anterior inciso a), C es un club en $\sup(C) = \alpha$. El conjunto C está formado por cardinales singulares mayores que $\mathrm{cf}(\alpha)$, y al ser tal sucesión normal, C tiene tipo de orden $\mathrm{cf}(\alpha)$. Por tanto, C es un club especial en α. †

Teorema 6.1.6. *Si α es un ordinal de cofinalidad no numerable, la intersección de no más de $\mathrm{cf}(\alpha)$ clubes en α es un club en α.*

Demostración. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado porque el concepto de cerradura es equivalente al concepto de cerradura en un espacio topológico (la topología del orden).

Para probar que la intersección no es acotada usaremos inducción transfinita, esto es: para todo $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$, la intersección de τ clubes en α no es acotada en α.

Sean C_0 y C_1 clubes en α. Si $\sigma < \alpha$, como C_0 y C_1 no son acotados en α, existen una sucesión $(\beta_n)_{n<\omega}$ en C_0 y una sucesión $(\gamma_n)_{n<\omega}$ en C_1 tales que $\forall n < \omega : \sigma < \beta_n < \gamma_n < \beta_{n+1} < \gamma_{n+1} < \alpha$. En consecuencia,

$$\sigma < \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} \leq \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\} \ \text{ y } \ \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\} \leq \sup\{\beta_{n+1} \mid n < \omega\};$$

de lo cual $\sup\{\beta_n \mid n < \omega\} = \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\}$. Además, $\sup\{\gamma_n \mid n < \omega\} < \alpha$ pues $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Tomando $\beta := \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\} = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\}$, por el teorema 6.1.2, tenemos que $\beta \in C_0 \cap C_1$ donde $\sigma < \beta$. Por tanto, $C_0 \cap C_1$ no es acotado en α.

Supongamos que para $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$, la intersección de τ clubes en α no es acotado en α. Sea $(C_\xi)_{\xi\in\tau+1}$ una familia de clubes en α, entonces $\bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$ no es acotado en α y así $\bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$ es un club en α. Aplicando el lo que probamos en el párrafo anterior para $C_0 = \bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$ y $C_1 = C_{\xi+1}$, tenemos que $(\bigcap_{\xi<\tau} C_\xi) \cap C_{\tau+1} = \bigcap_{\xi<\tau+1} C_\xi$ no es acotado en α.

Supongamos que $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ es un ordinal límite de tal modo que la intersección de una cantidad menor a τ clubes en α no es acotada en α. Sea $(C_\xi)_{\xi\in\tau}$ una familia de clubes en α, entonces, por hipótesis, para cada $\beta < \tau$, $\bigcap_{\xi<\beta} C_\xi$ no es acotado y por ende es un club en α. Dado $\sigma < \alpha$ definimos una sucesión $(\gamma_\xi)_{\xi<\sigma}$ por:

(i) $\gamma_0 := \sigma + 1$;

(ii) $\gamma_1 \in \bigcap_{\xi<1} C_\xi$ tal que $\gamma_0 < \gamma_1 < \alpha$;

(iii) dado $\gamma_\xi < \alpha$, sea $\gamma_{\xi+1} \in \bigcap_{\zeta<\xi+1} C_\zeta$ tal que $\gamma_\xi < \gamma_{\xi+1} < \alpha$;

(iv) si $\xi < \tau$ es un ordinal límite, tomemos $\gamma_\xi \in \bigcap_{\zeta<\xi} C_\zeta$ tal que $\sup\{\gamma_\zeta \mid \zeta < \xi\} < \gamma_\xi < \alpha$.

La sucesión $(\gamma_\xi)_{\xi<\sigma}$ es estrictamente creciente y $\forall\xi \in \tau\setminus\{0\} : \gamma_\xi \in \bigcap_{\zeta<\xi} C_\zeta$. Si $\xi < \tau$, para cada ζ, con $\xi < \zeta < \tau$, se satisface que $\gamma_\zeta \in \bigcap_{\zeta<\zeta} C_\zeta \subseteq C_\xi$; esto es, $\{\gamma_\zeta \mid \xi < \zeta < \tau\} \subseteq C_\xi$ y, por el teorema 6.1.2, resulta que $\sup\{\gamma_\zeta \mid \zeta < \tau\} = \sup\{\gamma_\zeta \mid \xi < \zeta < \tau\} \in C_\xi$ —$\sup\{\gamma_\zeta \mid \zeta < \tau\} < \alpha$ pues $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$—. Entonces, tomando $\gamma := \sup\{\gamma_\zeta \mid \zeta < \tau\}$, se tiene que $\tau < \gamma$ y $\forall\xi < \tau : \gamma \in C_\xi$, con lo cual $\gamma \in \bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$. En resumidas cuentas, para todo $\sigma < \alpha$ existe $\gamma \in \bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$ tal que $\sigma < \gamma$. Por lo tanto, $\bigcap_{\xi<\tau} C_\xi$ no es acotado en α.

Por el PIT, para cada $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ la intersección de τ clubes en α no es acotada en α, y por ende es un club. †

Definición 6.1.2. Para todo ordinal límite β y cualquier sucesión $(X_\xi)_{\xi<\beta}$ de subconjuntos de β definimos:

(i) la *intersección diagonal* de $(X_\xi)_{\xi<\beta}$ como
$$\bigtriangleup(X_\xi)_{\xi<\beta} := \mathop{\bigtriangleup}_{\xi<\beta} X_\xi := \{\gamma \in \beta \mid \forall\xi < \gamma : \gamma \in X_\xi\} = \{\gamma < \beta \mid \gamma \in \bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi\};$$

(ii) la *unión diagonal* de $(X_\xi)_{\xi<\beta}$ como
$$\bigtriangledown(X_\xi)_{\xi<\beta} := \mathop{\bigtriangledown}_{\xi<\beta} X_\xi := \{\gamma \in \beta \mid \exists\xi < \gamma : \gamma \in X_\xi\} = \{\gamma < \beta \mid \gamma \in \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi\}.$$

Teorema 6.1.7. *Supongamos que $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Si $(C_\xi)_{\xi<\alpha}$ es una sucesión de clubes en α y para cada $\beta < \alpha$, el conjunto $\bigcap\{C_\xi \mid \xi < \beta\}$ no es acotado, entonces $\bigtriangleup_{\xi<\alpha} C_\xi$ es un club en α.*

Demostración. Pongamos $C := \bigtriangleup_{\xi<\alpha} C_\xi$.

Sea $\gamma < \alpha$ un ordinal límite tal que $\sup(C\cap\gamma) = \gamma$. Si $\xi < \gamma$, entonces $\sup(C\cap(\xi, \gamma)) = \sup(C\cap\gamma) = \gamma$ y, si $\beta \in C\cap(\xi, \gamma)$, tenemos que $\forall\zeta < \beta : \beta \in C_\zeta$ y $\xi < \beta < \gamma$, por lo cual $\beta \in C_\xi$. En consecuencia, $C\cap(\xi, \gamma) \subseteq C_\xi$, de lo cual deducimos que $C\cap(\xi, \gamma) \subseteq C_\xi\cap\gamma \subseteq \gamma$, y con ello $\gamma = \sup(C\cap(\xi, \gamma)) \leq \sup(C_\xi\cap\gamma) \leq \gamma$. Por tanto, $\forall\xi < \gamma : \sup(C_\xi\cap\gamma) = \gamma$, luego $\forall\xi < \gamma : \gamma \in C_\xi$, esto es, $\gamma \in C$. Concluimos que C es cerrado en α.

Sea $\sigma < \alpha$. Construyamos una sucesión $(\gamma_n)_{n<\omega}$ en α de la forma siguiente:

(i) tomemos (cualquiera) $\gamma_0 \in C_0$ tal que $\sigma < \gamma_0$;

(ii) luego tomemos $\gamma_1 \in \bigcap_{\xi<\gamma_0} C_\xi$ tal que $\gamma_0 < \gamma_1$;

(iii) dado $n < \omega$ y $\gamma_n < \alpha$, sea $\gamma_{n+1} \in \bigcap_{\xi<\gamma_n} C_\xi$ tal que $\gamma_n < \gamma_{n+1}$.

Sea $\gamma := \sup\{\gamma_n \mid n < \omega\}$. Ciertamente, $\sigma < \gamma$, γ es un ordinal límite, y $\gamma < \alpha$ pues $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Probemos que $\gamma \in C = \bigtriangleup_{\xi<\alpha} C_\xi$. Si $\xi < \gamma$ existe $n_0 < \omega$ tal que $\xi < \gamma_{n_0}$; luego para cada $n \geq n_0$ tenemos que $\gamma_{n+1} \in \bigcap_{\xi'<\gamma_n} C_{\xi'} \subseteq C_\xi$ pues $\xi < \gamma_{n_0} \leq \gamma_n$; así, $\{\gamma_{n+1} \mid n_0 \leq n < \omega\} \subseteq C_\xi$ y, por el teorema 6.1.2, $\gamma = \sup\{\gamma_{n+1} \mid n < \omega\} = \sup\{\gamma_{n+1} \mid n_0 \leq n < \omega\} \in C_\xi$. En resumen, $\forall\xi < \gamma : \gamma \in C_\xi$, lo cual implica que $\gamma \in C$, y ya sabíamos que $\sigma < \gamma$. Por tanto, C no es acotado en α. †

Corolario 6.1.8. *Sea $(C_\xi)_{\xi<\alpha}$ una familia de clubes en α, donde $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Las siguientes proposiciones son ciertas:*

a) Si $(C_\xi)_{\xi<\alpha}$ es decreciente respecto a $\subseteq$, entonces $\bigtriangleup_{\xi<\alpha} C_\xi$ es un club en α.

b) Si α es regular, entonces $\bigtriangleup_{\xi<\alpha} C_\xi$ es un club en α.

Demostración. a) Supongamos que $(C_\xi)_{\xi<\alpha}$ es decreciente respecto a $\subseteq$. Para cada $\beta<\alpha$ tenemos que $\forall\xi<\beta: C_\beta\subseteq C_\xi$, por lo cual $C_\beta\subseteq\bigcap\{C_\xi \mid \xi<\beta\}$. Esto implica que $\bigcap\{C_\xi \mid \xi<\beta\}$ no es acotado en α, pues contiene un conjunto que no es acotado. Debido al teorema anterior, $\triangle_{\xi<\alpha} C_\xi$ es un club en α.

b) Si $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$, por el teorema 6.1.6, para cada $\beta<\alpha$ tenemos que $\bigcap\{C_\xi \mid \xi<\beta\}$ es un club en α, y de ahí que no es acotado.

†

6.2. Filtros

Definición 6.2.1. Sea A un conjunto no vacío. Para cualquier $F\subseteq\mathcal{P}(A)$, decimos que F es un *filtro* en A si:

(F1) $A\in F$ y $\emptyset\notin F$;

(F2) para cualesquiera $X, Y\in F$, se cumple que $X\cap Y\in F$;

(F3) si $X\in F$ y $X\subseteq Y\subseteq A$, entonces $Y\in F$.

Un filtro que sea maximal respecto a la relación $\subseteq$ se llama *ultrafiltro.*

La propiedad (F2) es equivalente a la siguiente propiedad: si $X_1, X_2, \ldots, X_n\in F$, (donde $0<n<\omega$) entonces $X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n\in F$. Dicho de otro modo, si $B\in\mathcal{P}(F)\setminus\{\emptyset\}$ tal que B es finito, entonces $\bigcap B\in F$.

Definición 6.2.2. Sea S un conjunto cualquiera. Denotamos $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S):=\{X\subseteq S \mid X \textit{ es finito}\}$ (el conjunto de los subconjuntos finitos de S). S tiene la propiedad de intersección finita (p. i. f.) si $\forall X\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S):\bigcap X\neq\emptyset$.

Teorema 6.2.1. *Sea A un conjunto no vacío. Se cumplen las siguientes proposiciones:*

a) Si $S\subseteq\mathcal{P}(A)$ tiene la propiedad de intersección finita (p. i. f.), el conjunto
$$\langle S\rangle:=\{X\subseteq A \mid \exists S'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S):\bigcap S'\subseteq X\}$$
es un filtro en A y es el filtro más pequeño (respecto a $\subseteq$) que contiene a S.

b) Si F es un filtro en A y $X\in\mathcal{P}(A)$ tal que $A\setminus X\notin F$, entonces $F\cup\{X\}$ tiene la p. i. f. y
$$F\restriction X:=\langle F\cup\{X\}\rangle=\{Z\subseteq A \mid \exists X'\in F: X'\cap X\subseteq Z\}=\{Z\subseteq A \mid (A\setminus X)\cup Z\in F\}.$$

Demostración. a) Como S tiene la p. i. f., $\forall S'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S):\bigcap S'\neq\emptyset$, entonces $\forall X\in\langle S\rangle: X\neq\emptyset$ y así $\emptyset\notin\langle S\rangle$. Tomando $S'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ cualquiera, tenemos que $\bigcap S'\subseteq A$, así que $A\in\langle S\rangle$. Si $X, Y\in\langle S\rangle$ existen $S', T'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ tales que $\bigcap S'\subseteq X$ y $\bigcap T'\subseteq Y$, por consiguiente, $S'\cup T'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ y $\bigcap(S'\cup T')=(\bigcap S')\cap(\bigcap T')\subseteq X\cap Y$, de ahí que $X\cap Y\in\langle S\rangle$. Si $X\in\langle S\rangle$ y $X\subseteq Y\subseteq A$, existe $S'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ tal que $\bigcap S'\subseteq X\subseteq Y$ y así $Y\in\langle S\rangle$. En conclusión, $\langle S\rangle$ es un filtro en A.

Por otra parte, sea F un filtro en A que contiene a S. Si $X\in\langle S\rangle$, existe $S'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ tal que $\bigcap S'\subseteq X$, entonces $S'\subseteq S\subseteq F$, luego $\bigcap S'\in F$ pues S' es finito, y como $\bigcap S'\subseteq X\subseteq A$, se sigue que $X\in F$. Por lo tanto, $\langle S\rangle\subseteq F$.

b) Si $X=\emptyset$, se tendría que $A\setminus X=A\in F$, lo que no puede ser. Por tanto, $X\neq\emptyset$.

Veamos que $F\cup\{X\}$ tiene la p. i. f. Sea S un subconjunto finito de $F\cup\{X\}$:

(i) si $X \notin S$, entonces $S \subseteq F$, de este modo $\bigcap S \in F$, luego $\bigcap S \neq \emptyset$;

(ii) si $S = \{X\}$, en tal caso $\bigcap S = X \neq \emptyset$;

(iii) si $X \in S$ y $S \neq \{X\}$, resulta que $\emptyset \neq S \setminus \{X\} \subseteq F$ y $S \setminus \{X\}$ es finito, consiguientemente,
$$\bigcap S = \bigcap((S \setminus \{X\}) \cup \{X\}) = \bigcap(S \setminus \{X\}) \cap (\bigcap\{X\}) = Y \cap X$$
donde $Y := \bigcap(S \setminus \{X\}) \in F$; si $Y \cap X = \emptyset$, tendríamos que $Y \subseteq A \setminus X$, lo que implicaría que $A \setminus X \in F$, pero esto no ocurre; en consecuencia, $\bigcap S = Y \cap X \neq \emptyset$.

Por ende, $F \cup \{X\}$ tiene la p. i. f.

Si $Y \in \langle F \cup \{X\} \rangle$, existe $S' \subseteq F \cup \{X\}$ finito tal que $\bigcap S' \subseteq Y$, con lo cual
$$(\bigcap S') \cap X \subseteq Y \cap X \subseteq Y;$$
además,
$$(\bigcap S') \cap X = (\bigcap S') \cap (\bigcap\{X\}) = \bigcap(S' \cup \{X\}) = \bigcap(S' \setminus \{X\} \cup \{X\}) = \bigcap(S' \setminus \{X\}) \cap X;$$
así que $\bigcap(S' \setminus \{X\}) \cap X \subseteq Y$ donde $S' \setminus \{X\}$ es un subconjunto finito de F. Si $S' \setminus \{X\} \neq \emptyset$, entonces $\bigcap(S' \setminus \{X\}) \cap X \subseteq Y$ con $\bigcap(S' \setminus \{X\}) \in F$; y si $S' \setminus \{X\} = \emptyset$, tendremos que
$$\bigcap(S' \setminus \{X\}) \cap X = \boldsymbol{\mathcal{U}} \cap X = A \cap X \subseteq Y \text{ con } A \in F.$$
Por tanto, $\langle F \cup \{X\} \rangle \subseteq \{Z \subseteq A \mid \exists X' \in F : X' \cap X \subseteq Z\}$.

Si $Z \subseteq A$ y $X' \in F$ tales que $X' \cap X \subseteq Z$, se tiene que $(A \setminus X) \cup (X' \cap X) \subseteq (A \setminus X) \cup Z$ y
$$(A \setminus X) \cup (X' \cap X) = ((A \setminus X) \cup X') \cap ((A \setminus X) \cup X) = ((A \setminus X) \cup X') \cap A = (A \setminus X) \cup X';$$
luego $X' \subseteq (A \setminus X) \cup X' \subseteq (A \setminus X) \cup Z \subseteq A$, con lo cual $(A \setminus X) \cup Z \in F$ pues $X' \in F$. Por lo tanto, $\{Z \subseteq A \mid \exists X' \in F : X' \cap X \subseteq Z\} \subseteq \{Z \subseteq A \mid (A \setminus X) \cup Z \in F\}$.

Si $Z \subseteq A$ y $(A \setminus X) \cup Z \in F$, tomando $S' := \{(A \setminus X) \cup Z, X\}$; tendremos que $S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(F \cup \{X\})$ y $\bigcap S' = ((A \setminus X) \cup Z) \cap X = ((A \setminus X) \cap X) \cup (Z \cap X) = Z \cap X \subseteq Z$; en consecuencia, $Z \in \langle F \cup \{X\} \rangle$. Por lo tanto, $\{Z \subseteq A \mid (A \setminus X) \cup Z \in F\} \subseteq \langle F \cup \{X\} \rangle$. †

Observación. Cuando F es un filtro en A, se satisface que $\langle F \rangle = F$. Para verificar esto notemos primero que $\forall S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(F) : \bigcap S' \in F$, y también que $\forall X \in F : \{X\} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(F)$; por consiguiente,
$$\langle F \rangle = \{X \subseteq A \mid \exists S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(F) : \bigcap S' \subseteq X\} = \{Y \mid \exists X \in F : X \subseteq Y \subseteq A\}.$$
De la propiedad (F3) de los filtros, se observa que este conjunto está contenido en F; además, $F \subseteq \langle F \rangle$ por el teorema anterior. Recíprocamente, si $\langle S \rangle = S$, es evidente que S es un filtro.

Definición 6.2.3. Sea A un conjunto no vacío.

1) Dado $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ con la p. i. f. el filtro $\langle S \rangle$, definido en el teorema 6.2.1, se llama *filtro generado por* S. Cuando $S = \{Y\}$, se usa la notación $\langle Y \rangle$ en vez de $\langle \{Y\} \rangle$ (siempre que no haya confusión) y se le llama filtro generado por Y.

2) Si F es un filtro en A y $X \subseteq A$ tal que $A \setminus X \notin F$, denotamos por $F \upharpoonright X$ al filtro $\langle F \cup \{X\} \rangle$.

Teorema 6.2.2. *Si U es un filtro en un conjunto A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *U es un ultrafiltro en A;*

(ii) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) : (X \cup Y \in U \Longrightarrow X \in U \vee Y \in U)$;

(iii) $\forall X \in \mathcal{P}(A) : (X \notin U \Longrightarrow A \setminus X \in U)$;

(iv) $U^+ := \{X \subseteq A \mid A \setminus X \notin U\}$ *es un filtro en A.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iv)$. Antes que nada, si $X \in U$ y $X \notin U^+$, entonces $X \in U$ y $A \setminus X \in U$, luego $\emptyset = X \cap (A \setminus X) \in U$, lo cual es falso. Por ende, $U \subseteq U^+$. Esta contención es cierta sin suponer hipótesis adicional más que la de que U es un filtro. Ahora, supongamos que U es un ultrafiltro en A. Como $\emptyset = A \setminus A \notin U$, tenemos que $A \in U^+$. Si $\emptyset \in U^+$, entonces $A = A \setminus \emptyset \notin U$; así, $\emptyset \notin U^+$. Si $X, Y \in U^+$, resulta que $A \setminus X$, $A \setminus Y \notin U$, lo cual implica que $\langle U \cup \{X\} \rangle$ y $\langle U \cup \{Y\} \rangle$ son filtros en A que contienen a U; pero, como U es un ultrafiltro, tenemos que $\langle U \cup \{X\} \rangle = U = \langle U \cup \{Y\} \rangle$; en consecuencia, $X, Y \in U$, y por ello $X \cap Y \in U$; luego $X \cap Y \in U^+$ porque $U \subseteq U^+$. Si $X \in U^+$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, entonces $A \setminus X \notin U$ y, consiguientemente, $\langle U \cup \{X\} \rangle$ es un filtro en U que contiene a U. De este modo, $U = \langle U \cup \{X\} \rangle$, lo cual implica que $X \in U$ y, en consecuencia, $Y \in U$, y con esto $Y \in U^+$. Por lo tanto, U^+ es un filtro en A.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que U^+ es un filtro en A. Veamos que $U^+ \subseteq U$. Si $X \in U^+$ y $X \notin U$, entonces $X \in U^+$ y $A \setminus (A \setminus X) \notin U$, por lo que $X \in U^+$ y $A \setminus X \in U^+$, en consecuencia, $X \cap (A \setminus X) = \emptyset \in U^+$ lo cual no puede ocurrir. Por tanto, $U^+ \subseteq U$. Ahora bien, si $X \notin U$, entonces $A \setminus (A \setminus X) \notin U$, de este modo, $A \setminus X \in U^+$, y por ello $A \setminus X \in U$, ya que $U^+ \subseteq U$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que $\forall X \in \mathcal{P}(A) : (X \notin U \Rightarrow A \setminus X \in U)$. Si existen $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ tales que $X \cup Y \in U$ y $X \notin U$ y $Y \notin U$; entonces, $A \setminus X$, $A \setminus Y \in U$; con lo cual $A \setminus (X \cup Y) = (A \setminus X) \cap (A \setminus Y) \in U$. Así, $A \setminus (X \cup Y) \in U$ y $X \cup Y \in U$, por consiguiente, $\emptyset = [A \setminus (X \cup Y)] \cap [X \cup Y] \in U$ (contradicción). Por lo tanto, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) : (X \cup Y \in U \Longrightarrow X \in U \vee Y \in U)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) : (X \cup Y \in U \Longrightarrow X \in U \vee Y \in U)$. Sea F un filtro en A que contiene a U. Si $X \in F$, como $X \cup (A \setminus X) = A \in U$, entonces $X \in U$ o $A \setminus X \in U$; si $A \setminus X \in U$, resulta que $A \setminus X \in F$ pues $U \subseteq F$, y con ello $\emptyset = (A \setminus X) \cap X \in F$ lo que no es posible; en consecuencia, $X \in U$. Por tanto, $F \subseteq U$ y así $F = U$. En conclusión, U es un ultrafiltro. †

A continuación se expondrán un par de filtros que serán importantes en la teoría que se está desarrollando:

Ejemplos.

1. Para cada subconjunto B de A, no vacío, el conjunto $\{X \in \mathcal{P}(A) \mid B \subseteq X\}$ es un filtro en A. En efecto:
   Sea $S := \{B\}$ (S es finito), entonces $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S) = \{S, \emptyset\}$ y es claro que S tiene la propiedad de intersección finita. Por el teorema 6.2.1, $\langle S \rangle$ es un filtro en A. Además,
   $$\begin{aligned}\langle \{B\} \rangle = \langle S \rangle &= \{X \subseteq A \mid \exists S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(S) : \bigcap S' \subseteq X\} \\ &= \{X \subseteq A \mid \bigcap S \subseteq X\} = \{X \subseteq A \mid \bigcap \{B\} \subseteq X\} = \{X \subseteq A \mid B \subseteq X\}.\end{aligned}$$
   En resumen, $\{X \in \mathcal{P}(A) \mid B \subseteq X\} = \langle \{B\} \rangle$ es un filtro en A.

2. Para cada $a \in A$, el conjunto $\{X \subseteq A \mid a \in X\}$ es un ultrafiltro en A. Tal conjunto es un filtro por el ejemplo anterior tomando $B = \{a\}$:
   $$\langle \{B\} \rangle = \langle \{\{a\}\} \rangle = \{X \subseteq A \mid \{a\} \subseteq X\} = \{X \subseteq A \mid a \in X\}.$$
   Para ver que $\langle \{\{a\}\} \rangle$ es un ultrafiltro en A, observemos que $\forall X \in \mathcal{P}(A) : a \in A = X \cup (A \setminus X)$ y de aquí que $\forall X \in \mathcal{P}(A) : X \notin \langle S \rangle \Longrightarrow A \setminus X \in \langle S \rangle$. En consecuencia, en virtud del teorema 6.2.2, $\{X \subseteq A \mid a \in X\}$ es un ultrafiltro en A.

3. Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_0$, entonces $F_c(\alpha) := \{X \subseteq \alpha \mid \textit{existe un club en } \alpha \textit{ contenido en } X\}$ es un filtro en α.

4. Si A es infinito, entonces $\{X \subseteq A \mid A \setminus X \textit{ es finito}\}$ es un filtro en A. Pongamos $F := \{X \subseteq A \mid A \setminus X \textit{ es finito}\}$. $A \in F$ porque $A \setminus A = \emptyset$ es finito. $\emptyset \notin F$ porque $A \setminus \emptyset = A$ es infinito. Si $X, Y \in F$, entonces $A \setminus X$ y $A \setminus Y$ son finitos, luego $(A \setminus X) \cup (A \setminus Y)$ es finito, donde $(A \setminus X) \cup$

$(A\setminus Y) = A\setminus(X\cap Y)$, por lo cual $X\cap Y \in F$. Si $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, entonces $A\setminus X$ es finito y $A\setminus Y \subseteq A\setminus X$, así que $A\setminus Y$ es finito, y con ello $Y \in F$.

Definición 6.2.4. Sean A un conjunto no vacío y $\alpha \in \mathbf{Lim}$.

1) Para todo $a \in A$, llamamos al ultrafiltro $\{X \subseteq A \mid a \in X\}$ *ultrafiltro principal generado por* $\{a\}$.

2) Todo ultrafiltro en A que no sea principal se llama *no principal* o *libre*.

3) Si $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_0$ el filtro $F_c(\alpha) := \{X \subseteq \alpha \mid \text{existe un club } C \text{ en } \alpha \text{ tal que } C \subseteq X\}$ se llama *filtro de los clubes* en α.

4) Un filtro F en α es normal si para cualquier sucesión $(X_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ de miembros de F, se cumple que $\triangle_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} X_\xi \in F$.

5) Cuando A es infinito, el filtro $\{X \subseteq A \mid A\setminus X \text{ es finito}\}$ se llama *filtro de Fréchet* o *filtro cofinito*; lo denotaremos como F_{cof}.

Teorema 6.2.3. *Si A es un conjunto infinito y U es un ultrafiltro en A, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) U no es principal;

(ii) $F_{\mathrm{cof}} := \{X \subseteq A \mid A\setminus X \text{ es finito}\} \subseteq U$;

(iii) ningún miembro de U es finito.

Demostración. $(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que todo miembro de U es infinito. Si $X \in F_{\mathrm{cof}}$, entonces $A\setminus X$ es finito, luego $A\setminus X \notin U$; así que, por el teorema 6.2.2, $X \in U$. Por tanto, $F_{\mathrm{cof}} \subseteq U$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $F_{\mathrm{cof}} \subseteq U$. Si U es un ultrafiltro principal en A, existe $a \in A$ tal que $U = \{X \subseteq A \mid a \in X\}$. Poniendo $X := A\setminus\{a\}$ tenemos que: $A\setminus X = A\setminus(A\setminus\{a\}) = \{a\}$ (es finito), en consecuencia, $X \in F_{\mathrm{cof}}$; con lo cual $X \in U$, pero $a \notin X$ (contradicción). Por lo tanto, U no es principal.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Se demostrará por contrarrecíproca. Supongamos que U tiene un elemento X_0 que es finito. Para cada $x \in X_0$ tenemos que $X_0 = (X_0\setminus\{x\})\cup\{x\} \in U$, y del teorema 6.2.2 se cumple que $X_0\setminus\{x\} \in U$ o $\{x\} \in U$. Si $\forall x \in X_0 : \{x\} \notin U$, entonces $\forall x \in X_0 : X_0\setminus\{x\} \in U$, y como X_0 es finito, obtenemos que $\bigcap_{x\in X_0} X_0\setminus\{x\} \in U$, pero $\bigcap_{x\in X_0} X_0\setminus\{x\} = \emptyset$. Por lo tanto, existe $x_0 \in X_0$ tal que $\{x_0\} \in U$. Si $Y \in U$, entonces $Y \cap\{x_0\} \in U$, y dado que $\emptyset \notin U$, concluimos que $x_0 \in Y$. Recíprocamente, si $x_0 \in Y \subseteq A$, resulta que $\{x_0\} \subseteq Y \subseteq A$; luego $Y \in U$ pues $\{x_0\} \in U$. Por tanto, $U = \{Y \subseteq A \mid x_0 \in Y\}$, es decir, U es principal. †

Para el siguiente teorema vamos a emplear el lema de Zorn:

Teorema 6.2.4 (Lema de Zorn)**.** *Si $(H, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual toda cadena no vacía tiene una cota superior, entonces $(H, \preceq)$ tiene un elemento maximal.*

Si H es un conjunto, un *orden parcial* en H es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. La pareja $(H, \preceq)$, se llama *conjunto parcialmente ordenado*. Una cadena en $(H, \preceq)$ es un subconjunto C de H tal que $\forall x, y \in C : x \preceq y \vee y \preceq x$.

El lema de Zorn es equivalente al axioma de elección. Para más detalles de este resultado puede ver [2, pág. 183].

Pero antes un lema.

Lema 6.2.5. *Si $\mathscr{F}$ es un conjunto de filtros (no vacío) en A, entonces $\bigcap \mathscr{F}$ es un filtro en A. Si $\mathscr{K}$ es una $\subseteq$-cadena no vacía de filtros en A, entonces $\bigcup \mathscr{K}$ es un filtro en A.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}$ es un conjunto de filtros en A. Para todo $F \in \mathscr{F}$, $A \in F$ y $\emptyset \notin F$, por lo cual $A \in \bigcap \mathscr{F}$ y $\emptyset \notin \bigcap \mathscr{F}$. Si $X, Y \in \bigcap \mathscr{F}$, tendremos que $\forall F \in \bigcap \mathscr{F} : X, Y \in F$, luego $\forall F \in \bigcap \mathscr{F} : X \cap Y \in F$, y de aquí que $X \cap Y \in \bigcap \mathscr{F}$. Si $X \in \bigcap \mathscr{F}$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, entonces $\forall F \in \bigcap \mathscr{F}$: $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, por tal motivo $\forall F \in \bigcap \mathscr{F} : Y \in F$, y con ello $Y \in \bigcap \mathscr{F} : Y \in F$. Por lo tanto, $\bigcap \mathscr{F}$ es un filtro en A.

Supongamos que $\mathscr{K}$ es una $\subseteq$-cadena no vacía de filtros en A. Tomando un filtro F en $\mathscr{K}$, tenemos que $A \in F \subseteq \bigcup \mathscr{K}$, luego $A \in \bigcup \mathscr{K}$; si $\emptyset \in \bigcup \mathscr{K}$, entonces $\emptyset \in F$ para algún $F \in \mathscr{K}$, pero esto no puede ocurrir pues F es un filtro; así, $\emptyset \notin \bigcup \mathscr{K}$. Si $X, Y \in \bigcup \mathscr{K}$, resulta que existen $F, G \in \mathscr{K}$, tales que $X \in F$ y $Y \in G$, en consecuencia $X, Y \in F \cup G$; como $\mathscr{K}$ es una $\subseteq$-cadena, $F \cup G \in \mathscr{K}$, por lo cual $X \cap Y \in F \cup G \subseteq \bigcup \mathscr{K}$. Si $X \in \bigcup \mathscr{K}$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, existe F en $\mathscr{K}$ de tal suerte que $X \in F$, luego $Y \in F$, y por esto $Y \in \bigcup \mathscr{K}$. Concluimos que $\bigcup \mathscr{K}$ es un filtro en A. †

Teorema 6.2.6. *Todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea F un filtro en un conjunto A. Pongamos

$$\mathscr{F} := \{G \subseteq \mathcal{P}(A) \mid G \textit{ es un filtro en } A \textit{ y } F \subseteq G\}.$$

$\mathscr{F}$ es distinto del vacío pues $F \in \mathscr{F}$ y es un conjunto parcialmente ordenado respecto a la contención. Vamos a demostrar que toda cadena no vacía tiene una cota superior en $\mathscr{F}$ —para poder aplicar el lema de Zorn—. Sea $\mathscr{C}$ una $\subseteq$-cadena no vacía en $\mathscr{F}$, entonces existe algún $G \in \mathscr{C}$, de lo cual $F \subseteq G \subseteq \bigcup \mathscr{C}$; además, por el lema anterior, $\bigcup \mathscr{C}$ es un filtro en A; por lo tanto, $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{F}$; también es cierto que $\forall G \in \mathscr{C} : G \subseteq \bigcup \mathscr{C}$; en consecuencia, $\bigcup \mathscr{C}$ es una cota superior de $\mathscr{C}$.

Por el lema de Zorn existe un elemento U de $\mathscr{F}$ que es un elemento $\subseteq$-maximal de $\mathscr{F}$. Claramente, U contiene a F. Vamos a probar que U es un ultrafiltro. Si $X \subseteq A$ con $X \notin U$, por el teorema 6.2.1 b), $\langle U \cup \{A \setminus X\}\rangle$ es un filtro en A, el cual cumple que $F \subseteq U \subseteq \langle U \cup \{A \setminus X\}\rangle$; consiguientemente, $\langle U \cup \{A \setminus X\}\rangle \in \mathscr{F}$; pero U es maximal en $\mathscr{F}$, así que $\langle U \cup \{A \setminus X\}\rangle = U$; con ello $A \setminus X \in U$. En virtud del teorema 6.2.2, U es un ultrafiltro. †

Teorema 6.2.7. *Sea X un subconjunto de A.*

a) Si F es un filtro en A y $X \in F$, entonces $F \cap \mathcal{P}(X)$ es un filtro en X; si además F es un ultrafiltro, entonces $F \cap \mathcal{P}(X)$ también lo es.

b) Si G es un filtro en X, entonces G puede ser extendido a un ultrafiltro en A.

Demostración. a) Supongamos que F es un filtro en A y que $X \in F$. Claramente, $X \in F \cap \mathcal{P}(X)$, y como $\emptyset \notin F$, entonces $\emptyset \notin F \cap \mathcal{P}(X)$. Si $Y, Z \in F \cap \mathcal{P}(X)$, evidentemente $Y \cap Z \in F \cap \mathcal{P}(X)$. Si $Y \in F \cap \mathcal{P}(X)$ y $Y \subseteq Z \subseteq X$, entonces $Y \subseteq Z \subseteq A$, por lo cual $Z \in F$ (pues F es un filtro en A), así que $Z \in F \cap \mathcal{P}(X)$. Por tanto, $F \cap \mathcal{P}(X)$ es un filtro en X.

Supongamos, en adición, que F es un ultrafiltro en A. Si $Y, Z \subseteq X$ con $Y \cup Z \in F \cap \mathcal{P}(X)$, por el teorema 6.2.2, $(Y \in F) \vee (Z \in F)$, lo que implica que $(Y \in F \cap \mathcal{P}(X)) \vee (Z \in F \cap \mathcal{P}(X))$. Por el teorema 6.2.2, $F \cap \mathcal{P}(X)$ es un ultrafiltro en X.

b) Si G un filtro en X, entonces G tiene la p. i. f., y como $X \subseteq A$, es claro que $G \subseteq \mathcal{P}(A)$. Por el teorema 6.2.1, $\langle G\rangle$ es un filtro en A, luego, del teorema 6.2.6, existe un ultrafiltro U en A que contiene a $\langle G\rangle$, con lo cual $G \subseteq \langle G\rangle \subseteq U$.

†

Definición 6.2.5. Un filtro en un conjunto A se llama *filtro uniforme* si todos sus elementos tienen la misma cardinalidad que A.

Teorema 6.2.8. *Si A es infinito, entonces:*

a) existe un ultrafiltro uniforme en A;

b) el conjunto de los ultrafiltros uniformes y el conjunto de los ultrafiltros no principales coinciden si y solo si A es numerable.

Demostración. a) Sea $F := \{Y \subseteq A \mid |A \setminus Y| < |A|\}$. Veamos que F es un filtro en A. Primero, $A \in F$ porque $|A \setminus A| = 0 < |A|$. Además, $\emptyset \notin F$ pues $|A \setminus \emptyset| = |A|$. Si $X, Y \in F$, entonces $|A \setminus X| < |A|$ y $|A \setminus Y| < |A|$, de ahí que

$$|A \setminus (X \cap Y)| = |(A \setminus X) \cup (A \setminus Y)| \leq |(A \setminus X)| + |(A \setminus Y)| < |A|,$$

con lo cual $X \cap Y \in F$. Si $X \in F$ y $X \subseteq Y \subseteq A$, resulta que $|A \setminus X| < |A|$ y $A \setminus Y \subseteq A \setminus X$, en consecuencia, $|A \setminus Y| \leq |A \setminus X| < |A|$, y así $Y \in F$. Por tanto, F es un filtro en A. Debido al teorema 6.2.6, existe un ultrafiltro U en A que contiene a F. Vamos a probar que $\forall X \in U : |X| = |A|$. Si $|X| < |A|$ para algún $X \in U$, entonces $A \setminus X \in F$; como $F \subseteq U$, obtendremos que X, $A \setminus X \in U$, y en consecuencia $\emptyset = X \cap (A \setminus X) \in U$. Por lo tanto U, es un ultrafiltro uniforme.

b) Sean

$$\mathscr{U} := \{F \mid F \textit{ es un ultrafiltro uniforme en } A\},$$
$$\mathscr{N} := \{F \mid F \textit{ es un ultrafiltro no principal en } A\}.$$

Supongamos que $\mathscr{U} = \mathscr{N}$. Sea $B \subseteq A$ con $|B| = \omega$. Por el inciso a), existe un ultrafiltro uniforme D en B. Definamos $F := \{X \subseteq A \mid \exists Y \in D : Y \subseteq X\}$. F es un filtro en A por lo siguiente: si $S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(D)$, entonces $\bigcap S' \in D$ ya que D es un filtro; consecuentemente,

$$F = \{X \subseteq A \mid \exists S' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(D) : \bigcap S' \subseteq X\} = \langle D \rangle.$$

Ahora bien, si $X \cup Y \in F$, existe algún $Z \in D$ de modo que $Z \subseteq X \cup Y$, por lo cual $Z = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y) \in D$; como D es un ultrafiltro, $Z \cap X \in D$ o $Z \cap Y \in D$, y puesto que $Z \cap X \subseteq X$ y $Z \cap Y \subseteq Y$, deducimos que $X \in F$ o $Y \in F$; por tanto, F es un ultrafiltro. Observemos que todo elemento de F es infinito, pues todo elemento de F contiene a algún miembro de D, y todo elemento de D tiene cardinalidad ω. Por el teorema 6.2.3, F es un ultrafiltro no principal en A, de lo cual concluimos, por hipótesis, que F es un ultrafiltro uniforme en A; claramente, B es un elemento de F, en consecuencia $|A| = |B| = \omega$.

Supongamos que $|A| = \omega$. Si F es un ultrafiltro uniforme en A, entonces $\forall X \in F : |X| = \omega$; como consecuencia del teorema 6.2.3, F es no principal. Si F es un ultrafiltro no principal, entonces todos sus elementos son infinitos (teorema 6.2.3), pero como $|A| = \omega$, para todo $X \in F$, $|X| \leq \omega$; consiguientemente, $\forall X \in F : |X| = \omega$, esto es, F es uniforme. Por tanto, $\mathscr{U} = \mathscr{N}$. †

Definición 6.2.6. Si F es un filtro en A y κ es un cardinal infinito, decimos que F es κ-completo si cualquier subconjunto M de F de cardinalidad menor que κ, cumple que $\bigcap M \in F$; en caso contrario decimos que F es κ-incompleto.

Teorema 6.2.9. *a) Si A es un conjunto infinito, entonces todo ultrafiltro no principal en A es $|A|^+$-incompleto.*

b) Si U es un ultrafiltro en A, no principal y $|A|$-completo, entonces U es un ultrafiltro uniforme.

Demostración. a) Sea U un ultrafiltro no principal en A. En virtud del teorema 6.2.3, se satisface que $F_{\text{cof}} = \{X \subseteq A \mid A \setminus X \text{ es finito}\} \subseteq U$. Para cada $a \in A$, tenemos que $A \setminus \{a\} \in U$, pues $A \setminus \{a\} \in F_{\text{cof}}$. Así pues, $\{A \setminus \{a\} \mid a \in A\} \subseteq U$; además, $|\{A \setminus \{a\} \mid a \in A\}| = |A|$ y $\bigcap_{a \in A}(A \setminus \{a\}) = \emptyset \notin F$. Por lo tanto, F es $|A|^+$-incompleto.

b) Si U no es uniforme en A, existe $X \in A$ tal que $|X| < |A|$. Además, para todo $x \in X$ se tiene que $A \setminus \{x\} \in F_{\text{cof}} \subseteq U$; y también $|\{A \setminus \{x\} \mid x \in X\}| = |X| < |A|$. En consecuencia, $\bigcap_{x \in X}(A \setminus \{x\}) = \emptyset \in F$, porque suponemos que U es $|A|$-completo. Por tanto, U es uniforme. †

6.3. Ideales

Definición 6.3.1. Sean A un conjunto no vacío e $I \subseteq \mathcal{P}(A)$. Se dice que I es un *ideal* en A si:

(I1) $\emptyset \in I$ y $A \notin I$;

(I2) $\forall X, Y \in I : X \cup Y \in I$;

(I3) si $Y \subseteq X$ y $X \in I$, entonces $Y \in I$.

El *dominio* de un ideal I es $\text{dom}(I) := \bigcup I$.

De la propiedad (I2) se sigue que la unión finita de elementos de I, es un elemento de I.

Teorema 6.3.1. *Sean A un conjunto no vacío e I un ideal en A.*

a) Si $M \subseteq \mathcal{P}(A)$ y cumple que $\forall M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M) : \bigcup M' \neq A$, entonces:
$$\langle M \rangle := \{X \subseteq A \mid \exists M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M) : X \subseteq \bigcup M'\}$$
es un ideal en A y es el ideal más pequeño que contiene a M.

b) Si I es un ideal en A y $X \subseteq A$ tal que $A \setminus X \notin I$, entonces $\forall M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I \cup \{X\}) : \bigcup M' \neq A$ y, además:
$$\langle I \cup \{X\} \rangle = \{Z \subseteq A \mid (A \setminus X) \cap Z \in I\} = \{Z \subseteq A \mid \exists X' \in I : Z \subseteq X' \cup X\}.$$

Demostración. a) Si $A \in \langle M \rangle$, existe $M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ finito tal que $A \subseteq \bigcup M'$, y como $\bigcup M' \subseteq A$, entonces $\bigcup M' = A$, lo cual no es posible; así que $A \notin \langle M \rangle$. $\emptyset \in \langle M \rangle$ porque $\emptyset \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ y $\emptyset \subseteq \bigcup \emptyset$. Si $X, Y \in \langle M \rangle$; existen $M', N' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ tales que $X \subseteq \bigcup M'$ y $Y \subseteq \bigcup N'$; luego $M' \cup N' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ y $X \cup Y \subseteq (\bigcup M') \cup (\bigcup N') = \bigcup (M' \cup N')$; por tanto, $X \cup Y \in \langle M \rangle$. Si $X \in I$ y $Y \subseteq X$, existe $M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ tal que $Y \subseteq X \subseteq \bigcup M'$, por lo cual $Y \in \langle M \rangle$. Por lo tanto, $\langle M \rangle$ es un ideal en A.

b) Notemos que si $X = A$, entonces $\emptyset = A \setminus X \notin I$. Por lo tanto, $X \neq A$.

Si $\bigcup M' = A$ para algún $M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I \cup \{X\})$, entonces $X \in M'$, pues si no, tendríamos que $M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$, y así $A = \bigcup M' \in I$, pero esto no puede ocurrir porque I es un ideal. En consecuencia, $M' = N' \cup \{X\}$ con $N' := M \setminus \{X\} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I)$; de este modo,
$$A = \bigcup M' = \bigcup (N' \cup \{X\}) = (\bigcup N') \cup (\bigcup \{X\}) = (\bigcup N') \cup X \ \text{ y } \ \bigcup N' \in I;$$
de ahí que $A \setminus X \subseteq \bigcup N' \in I$ y así $A \setminus X \in I$ (contradicción). Por tanto, $\forall M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I \cup \{X\}) : \bigcup M' \neq A$.

Si $Z \in \langle I \cup \{X\} \rangle$, existe $M' \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I \cup \{X\})$ tal que $Z \subseteq \bigcup M'$, entonces
$$Z \cap (A \setminus X) \subseteq (\bigcup M') \cap (A \setminus X) \subseteq \bigcup (M' \setminus \{X\}) \in I;$$

en consecuencia, $Z\cap(A\setminus X)\in I$. Por tanto, $\langle I\cup\{X\}\rangle\subseteq\{Z\subseteq A\mid(A\setminus X)\cap Z\in I\}$.

Si $Z\subseteq A$ y $(A\setminus X)\cap Z\in I$, tomando $X':=(A\setminus X)\cap Z$, tenemos que
$$X'\cup X=((A\setminus X)\cap Z)\cup X=((A\setminus X)\cup X)\cap(Z\cup X)=A\cap(Z\cup X)=Z\cup X;$$
así, $X'\in I$ y $Z\subseteq Z\cup X=X'\cup X$. Por tanto, $\{Z\subseteq A\mid(A\setminus X)\cap Z\in I\}\subseteq\{Z\subseteq A\mid\exists X'\in I: Z\subseteq X'\cup X\}$.

Si $Z\subseteq A$ y existe $X'\in I$ tal que $Z\subseteq X'\cup X$, tendremos que $\{X',X\}\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(I\cup\{X\})$, y también $Z\subseteq\bigcup\{X',X\}=X'\cup X$. Por ende, $\{Z\subseteq A\mid\exists X'\in I: Z\subseteq X'\cup X\}\subseteq\langle I\cup\{X\}\rangle$. †

Definición 6.3.2. Sean A un conjunto no vacío e I un ideal en A.

1) Si $M\subseteq\mathcal{P}(A)$ y cumple que $\forall M'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(M):\bigcup M'\neq A$, entonces:
$$\langle M\rangle:=\{X\subseteq A\mid\exists M'\in\mathcal{P}_{\text{fin}}(M): X\subseteq\bigcup M'\}$$
se le llama *ideal generado por* M.

2) Si $X\subseteq A$ y $X\notin I$, el ideal $I\restriction X:=\langle I\cup\{A\setminus X\}\rangle$ se llama restricción de I a X.

Teorema 6.3.2. *Sean A un conjunto no vacío e $I\subseteq\mathcal{P}(A)$. Entonces, I es un ideal en A si y solo si el conjunto $\{A\setminus X\mid X\in I\}$ es un filtro en A.*

Demostración. Sea $F:=\{A\setminus X\mid X\in I\}$. Se tiene que $(X\in I\iff A\setminus X\in F)$; también $(Y\in F\iff A\setminus Y\in I)$.

Supongamos que I es un ideal en A. Como $\emptyset\in I$, entonces $A=A\setminus\emptyset\in F$. Si $\emptyset\in F$, entremos que $A=A\setminus\emptyset\in I$, lo cual no es posible; por tanto, $\emptyset\notin F$. Si $X,Y\in F$, resulta que $A\setminus X, A\setminus Y\in I$, en consecuencia, $(A\setminus X)\cup(A\setminus Y)\in I$, pero $(A\setminus X)\cup(A\setminus Y)=A\setminus(X\cap Y)$, por lo cual $X\cap Y\in F$. Si $X\subseteq Y\subseteq A$ y $X\in F$, entonces $A\setminus Y\subseteq A\setminus X$ y $A\setminus X\in I$, por consiguiente $A\setminus Y\in I$, y con ello $Y\in F$. Por ende, F es un filtro en A.

Supongamos que F es un filtro en A. Como $A\in F$, entonces $\emptyset=A\setminus A\in I$. Si $A\in I$, se satisface $\emptyset=A\setminus A\in F$, lo cual no es posible; por tanto, $A\notin I$. Si $X,Y\in I$, entonces $A\setminus X, A\setminus Y\in F$, en consecuencia, $(A\setminus X)\cap(A\setminus Y)\in F$, pero $(A\setminus X)\cap(A\setminus Y)=A\setminus(X\cup Y)$, así que $X\cup Y\in I$. Si $X\subseteq Y$ y $Y\in I$, se cumple que $A\setminus Y\subseteq A\setminus X\subseteq A$ y $A\setminus Y\in F$, por lo cual $A\setminus X\in F$, y con ello $X\in I$. Por lo tanto, I es un ideal en A. †

Definición 6.3.3. Si A es un conjunto no vacío e I es un ideal en A, el filtro $\{A\setminus X\mid X\in I\}$ se llama *filtro dual* de I. De forma similar, dado un filtro F en A el ideal $\{A\setminus X\mid X\in F\}$ se le llama *ideal dual* de F. Un ideal es un *ideal primo* o *ideal maximal* si su filtro dual es un ultrafiltro.

Teorema 6.3.3. *Sea A un conjunto no vacío. Si F es un filtro e I es un ideal, ambos en A y ajenos entre sí, entonces existe un ultrafiltro D en A tal que $F\subseteq D$ y $D\cap I=\emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathscr{M}:=\{G\subseteq\mathcal{P}(A)\mid G\ \textit{es un filtro en}\ A,\ F\subseteq G\ \textit{y}\ G\cap I=\emptyset\}$. Nuestro objetivo es aplicar el lema de Zorn. Notemos que $\mathscr{M}\neq\emptyset$ pues $F\in\mathscr{M}$.

Sea $\mathscr{C}$ una cadena no vacía en $(\mathcal{M},\subseteq)$. Para todo $G\in\mathscr{C}$, tenemos que $F\subseteq G\subseteq\bigcup\mathscr{C}$ y $G\cap I=\emptyset$, de lo que deducimos que $\bigcup\mathscr{C}$ es una cota superior de $\mathscr{C}$, $F\subseteq\bigcup\mathscr{C}$ y $(\bigcup\mathscr{C})\cap I=\emptyset$; además, por el lema 6.2.5, $\bigcup\mathscr{C}$ es un filtro en A, por lo tanto, $\bigcup\mathscr{C}\in\mathscr{M}$.

Por el lema de Zorn, $\mathscr{M}$ tiene un elemento maximal, llamémosle D. Queremos probar que D es un ultrafiltro con las propiedades que pide este teorema. Por ser elemento de $\mathscr{M}$ se cumple que D es un filtro en A, $F\subseteq D$ y $D\cap I=\emptyset$. Solo falta verificar que D es un ultrafiltro.

Supongamos que D no es un ultrafiltro en A. Por el teorema 6.2.2, existe $X\subseteq A$ tal que $X\notin D$ y $A\setminus X\notin D$, así que existen los filtros $D\restriction X=\langle D\cup\{X\}\rangle$ y $D\restriction(A\setminus X)=\langle D\cup\{A\setminus X\}\rangle$. Como $D\restriction X$ y

$D\restriction(A\setminus X)$ contienen propiamente a D, el cual es un elemento maximal de $\mathscr{M}$, entonces $D\restriction X, \notin \mathscr{M}$ y $D\restriction(A\setminus X)\notin\mathscr{M}$; además, estos dos filtros contienen a F (porque contienen a D), en consecuencia, $D\restriction(A\setminus X)\cap I\neq\emptyset$ y $D\restriction X\cap I\neq\emptyset$. Tomemos $Z_1\in D\restriction X\cap I$ y $Z_2\in D\restriction(A\setminus X)\cap I$. Por el teorema 6.2.1 b), existen $Y_1, Y_2\in D$ tales que $Y_1\cap X\subseteq Z_1$ y $Y_2\cap(A\setminus X)\subseteq Z_2$; de lo cual deducimos que $Y_1\cap X\in I$ y $Y_2\cap(A\setminus X)\in I$ puesto que $Z_1, Z_2\in I$; por consiguiente, $(Y_1\cap X)\cup(Y_2\cap(A\setminus X))\in I$. Notemos que

$$Y_1\cap Y_2=(Y_1\cap Y_2)\cap(X\cup(A\setminus X))=(Y_1\cap Y_2\cap X)\cup(Y_1\cap Y_2\cap(A\setminus X))\subseteq(Y_1\cap X)\cup(Y_2\cap(A\setminus X)),$$

luego $Y_1\cap Y_2\in I$. También, $Y_1, Y_2\in D$, entonces $Y_1\cap Y_2\in D$. Por lo tanto, Obtenemos que $D\cap I\neq\emptyset$, pero esto no es posible pues $D\in\mathscr{M}$. Por ende, D tiene que ser un ultrafiltro en A. †

Corolario 6.3.4. *Sea A un conjunto no vacío. Las siguientes proposiciones se cumplen:*

a) Si I es un ideal en A y $d\in\mathcal{P}(A)\setminus I$, entonces existe un ultrafiltro D en A tal que $d\in D$ y $D\cap I=\emptyset$.

b) Para todo ideal I en A existe un ideal primo P en A tal que $I\subseteq P$.

c) Si A es infinito, entonces A contiene un ultrafiltro que no es principal.

Demostración. a) Como vimos en un ejemplo, $F:=\langle\{d\}\rangle=\{X\subseteq A\mid d\subseteq X\}$ es un filtro en A. Si $X\in F\cap I$, entonces $d\subseteq X\in I$, de lo cual $d\in I$, pero estamos suponiendo que $d\in\mathcal{P}(A)\setminus I$. Por lo tanto, $F\cap I=\emptyset$; así que, por el teorema anterior, existe un ultrafiltro D en A tal que $d\in F\subseteq D$ y $D\cap I=\emptyset$.

b) Dado un ideal I y F su filtro dual, tenemos que $F\cap I=\emptyset$. Por el teorema 6.3.3, existe un ultrafiltro U tal que $F\subseteq U$ y $U\cap I=\emptyset$. Sea P el ideal dual de U. P es un ideal primo por definición. Como $P\cap U=\emptyset$ y $U\cap I=\emptyset$, si $X\in I$, entonces $X\notin U$, con lo cual $A\setminus X\in U$ (por teorema 6.2.2), y así $X\in P$. Por tanto, $I\subseteq P$.

c) Sea A un conjunto infinito y pongamos $I:=\{X\subseteq A\mid X \text{ es finito}\}$. I es un ideal en A, porque la intersección de conjuntos finitos es finito; todo subconjunto de un conjunto finito es finito; $\emptyset$ es finito; y $A\notin I$ porque A es infinito. En consecuencia, $F:=\{A\setminus X\mid X\subseteq A \text{ y } X \text{ es finito}\}$ es un filtro, por ser dual de I. Por el inciso a) de este corolario, existe un ultrafiltro U que contiene a F. Observemos que $F=\{A\setminus X\mid X\subseteq A \text{ y } X \text{ es finito}\}=\{Y\subseteq A\mid A\setminus Y \text{ es finito}\}\subseteq U$, entonces, por el teorema 6.2.3, U no es principal. †

Lema 6.3.5. *a) Si A es un conjunto de ordinales no vacío con $\sup(A)\notin A$, entonces*

$$I_b(A):=\{X\subseteq A\mid \exists\beta\in A: X\subseteq\beta\}$$

es un ideal en A.

b) Si $\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha)>\aleph_0$, entonces

$$I_d(\alpha):=\{X\subseteq\alpha\mid \textit{existe un club } C \textit{ en } \alpha \textit{ tal que } C\cap X=\emptyset\}$$

es un ideal en α.

Demostración. a) Tomando cualquier elemento $\beta\in A$ tenemos que $\emptyset\subseteq\beta$, por lo cual $\emptyset\in I_b(A)$. Si $A\in I_b(A)$, entonces $A\subseteq\beta$ para algún $\beta\in A$, en consecuencia, $\sup(A)\leq\beta$ y $\beta\leq\sup(A)$, luego $\sup(A)=\beta\in A$, pero esto no puede ocurrir por hipótesis; por tanto, $A\notin I_b(A)$. Si $X, Y\in I_b(A)$, existen $\beta,\gamma\in A$ tales que $X\subseteq\beta$ y $Y\subseteq\gamma$, entonces $X\cup Y\subseteq\beta\cup\gamma=\max\{\beta,\gamma\}\in A$, y así $X\cup Y\in I_b(A)$. Si $X\in I_b(A)$ y $Y\subseteq X$, existe $\beta\in A$ tal que $Y\subseteq X\subseteq\beta$, luego $Y\in I_b(A)$. Por lo tanto, $I_b(A)$ es un ideal en A.

b) α es un club en α y $\alpha \cap \emptyset = \emptyset$, con lo cual $\emptyset \in I_d(\alpha)$. Para todo club C en α, $C \cap \alpha = C \neq \emptyset$, así que $\alpha \notin I_d(\alpha)$. Si $X, Y \in I_d(\alpha)$, entonces $C_1 \cap X = \emptyset$ y $C_2 \cap Y = \emptyset$ para ciertos clubes C_1 y C_2 en α; por el teorema 6.1.6, $C_1 \cap C_2$ es un club en α; además, $(C_1 \cap C_2) \cap (X \cup Y) = (C_1 \cap C_2 \cap X) \cup (C_1 \cap C_2 \cap Y) = \emptyset$; en consecuencia, $X \cap Y \in I_d(\alpha)$. Si $X \in I_d(\alpha)$ y $Y \subseteq X$, entonces $C \cap X = \emptyset$ donde C es algún club en A, entonces $C \cap Y = \emptyset$, y con ello $Y \in I_d(\alpha)$. Por tanto, $I_d(\alpha)$ es un ideal en A. †

Definición 6.3.4. Sea I un ideal en un ordinal límite α.

1) I es *normal* si para cualquier sucesión $(X_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ en I, $\nabla_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} X_\xi \in I$.

2) Si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa$, decimos que I es *κ-completo* si toda unión de menos de κ miembros de I, es un miembro de I. Los ideales $\aleph_1$-completos se llaman σ-completos.

3) Si $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_0$ el ideal
$$I_d(\alpha) := \{X \subseteq \alpha \mid \textit{existe un club } C \textit{ en } \alpha \textit{ tal que } C \cap X = \emptyset\}$$
se llama el *ideal de los subconjuntos finos* de α. Como vimos $I_d(\alpha)$ es el ideal dual del filtro de los clubes $F_c(\alpha)$.

4) Para todo A subconjunto no vacío de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, con $\sup(A) \notin A$ llamamos a
$$I_b(A) := \{X \subseteq A \mid \exists \beta \in A : X \subseteq \beta\}$$
el *ideal de los subconjuntos acotados* de A. Un ultrafiltro D en A es *no acotado* si $D \cap I_b(A) = \emptyset$.

Teorema 6.3.6. *Si $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ es regular y no numerable, entonces $I_d(\kappa)$ es un ideal normal en κ, es κ-completo y $I_b(\kappa) \subseteq I_d(\kappa)$.*

Demostración. Sean $\gamma < \kappa$ y $(X_\xi)_{\xi<\gamma}$ una sucesión en $I_d(\kappa)$, entonces para todo $\xi < \gamma$ existe un club C_ξ en κ tal que $C_\xi \cap X_\xi = \emptyset$. Por el teorema 6.1.6, y dado que $\gamma < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ es un club es κ. Como $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi \subseteq C_{\xi'}$ y $C_{\xi'} \cap X_{\xi'} = \emptyset$ para todo $\xi' < \gamma$, entonces $(\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi) \cap X_{\xi'} = \emptyset$ para cada $\xi' < \gamma$, en consecuencia, $(\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi) \cap (\bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi) = \emptyset$, y de aquí que $\bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \in I_d(\kappa)$. Por lo tanto, $I_d(\kappa)$ es κ-completo.

Si $X \in I_b(\kappa)$, existe $\beta \in \kappa$ tal que $X \subseteq \beta$; como $[\beta, \kappa)$ es un club en κ y $[\beta, \kappa) \cap X = \emptyset$, se sigue que $X \in I_d(\kappa)$. Por lo tanto, $I_b(\kappa) \subseteq I_d(\kappa)$.

Sean $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ una sucesión en $I_d(\kappa)$ y para cada $\xi < \gamma$ tomemos un club C_ξ en κ tal que $C_\xi \cap X_\xi = \emptyset$. Por el corolario 6.1.8 b), $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club en κ. Si $\beta \in (\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi) \cap (\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi)$, se tendría que $\forall \xi < \beta : \beta \in C_\xi$ y $\exists \xi' < \beta : \beta \in X_{\xi'}$, por lo cual $\exists \xi' < \beta : \beta \in C_{\xi'} \cap X_{\xi'}$, pero esto no puede ocurrir por como elegimos los C_ξ; en consecuencia, $(\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi) \cap (\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi) = \emptyset$ donde $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club en κ; y por ende, $\nabla_{\xi<\kappa} X_\xi \in I_d(\kappa)$. Concluimos que $I_d(\kappa)$ es normal. †

Teorema 6.3.7. *Sea $\kappa \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ regular y no numerable y sea I un ideal normal en κ.*

a) Si I es κ-completo y $\mathrm{dom}(I) = \kappa$, entonces $I_b(\kappa) \subseteq I$ y $\{\xi+1 \mid \xi < \kappa\} \in I$.

b) Si $I_b(\kappa) \subseteq I$, entonces $I_d(\kappa) \subseteq I$.

Demostración. a) Supongamos que I es κ-completo y $\mathrm{dom}(I) = \kappa$.

Como $\mathrm{dom}(I) = \kappa$, para cada $\xi < \kappa$ existe $X \in I$ tal que $\xi \in X$, y además $\{\xi\} \subseteq X \in I$. Así, $\forall \xi < \kappa : \{\xi\} \in I$. Al ser I κ-completo, si $\gamma < \kappa$, entonces $\gamma = \{\xi \mid \xi < \gamma\} = \bigcup_{\xi<\gamma} \{\xi\} \in I$. En consecuencia, $\forall\gamma<\kappa:\gamma\in I$. Por esto $\{\xi+2\mid\xi<\kappa\}\subseteq I$, y de la normalidad de I tenemos que $\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+2)\in I$; pero

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+2)&=\{\gamma\in\kappa\mid\exists\xi<\gamma:\gamma\in\xi+2\}=\{\gamma\in\kappa\mid\exists\xi\in\boldsymbol{\mathcal{R}}:\xi<\gamma<\xi+2\}\\&=\{\gamma\in\kappa\mid\exists\xi\in\boldsymbol{\mathcal{R}}:\gamma=\xi+1\}=\{\xi+1\mid\xi<\kappa\},\end{aligned}$$

así que $\{\xi+1\mid\xi<\kappa\}\in I$.

Si $X\in I_b(\kappa)$, existe $\beta\in\kappa$ de tal manera que $X\subseteq\beta$, y ya vimos que $\beta\in I$, en consecuencia, $X\in I$. Por lo tanto, $I_b(\kappa)\subseteq I$.

b) Supongamos que $I_b(\kappa)\subseteq I$.

Al ser κ un ordinal, cualquiera de sus elemento es también un subconjunto de él, entonces $\kappa\subseteq I_b(\kappa)\subseteq I$; en particular, $\{\xi+2\mid\xi<\kappa\}\subseteq I$. De la misma forma que en el inciso a), se satisface que $\{\xi+1\mid\xi<\kappa\}=\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+2)\in I$.

Sean $X\in I_d(\kappa)$ y C un club en κ tal que $X\cap C=\emptyset$; por el teorema 6.1.4 b), existe una función normal $f:\kappa\longrightarrow C$ con $\operatorname{ran}(f)=C$; de este modo, $\{f(\xi)+1\mid\xi<\kappa\}\subseteq I$ pues $\kappa\subseteq I$; luego, de la normalidad de I y la regularidad de κ, tenemos que $\nabla_{\xi<\kappa}(f(\xi)+1)\in I$. Podemos concluir que $(\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+1))\cup(\nabla_{\xi<\kappa}(f(\xi)+1))\cup\{0\}\in I$ pues estos tres conjuntos pertenecen a I. Vamos a probar que $X\subseteq(\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+1))\cup(\nabla_{\xi<\kappa}(f(\xi)+1)\cup\{0\})$, para obtener que $X\in I$, pero lo vamos a hacer por contrarrecíproca. Si $\alpha\in\kappa\setminus[(\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+1))\cup(\nabla_{\xi<\kappa}(f(\xi)+1))\cup\{0\}]$, como $\nabla_{\xi<\kappa}(\xi+1)=\{\xi+1\mid\xi<\kappa\}$, entonces α es un ordinal límite y $\alpha\notin\nabla_{\xi<\kappa}(f(\xi)+1)$, por consiguiente, $\neg(\exists\xi<\alpha:\alpha\in f(\xi)+1)$, esto es, $\forall\xi<\alpha:f(\xi)+1\leq\alpha$, con lo cual $f(\alpha)=\sup\{f(\xi)\mid\xi<\alpha\}\leq\alpha$ (f es normal); además, $\alpha\leq f(\alpha)$ pues f es estrictamente creciente; así que $f(\alpha)=\alpha\in C$, y como $X\cap C=\emptyset$, obtenemos que $\alpha\in\kappa\setminus X$. Así pues, $X\in I$. Por lo tanto, $I_d(\kappa)\subseteq I$. †

Teorema 6.3.8. *Sea $\kappa\in\boldsymbol{\mathcal{C}}$ regular y no numerable. Si I es un ideal normal en κ tal que $I_b(\kappa)\subseteq I$, entonces I es κ-completo.*

Demostración. Sean $\alpha<\kappa$ y $(X_\xi)_{\xi<\alpha}$ una sucesión en I. Definamos Y_ξ como

$$Y_\xi=\begin{cases}X_\xi\setminus\alpha & si\ \ \xi<\alpha\\ \emptyset & si\ \ \alpha\leq\xi<\kappa\end{cases}$$

Como $X_\xi\setminus\alpha\subseteq X_\xi\in I$ y $\emptyset\in I$, concluimos que cada elemento de la sucesión $(Y_\xi)_{\xi<\kappa}$ pertenece a I. Además, I es normal, así que $\nabla_{\xi<\kappa}Y_\xi\in I$, donde

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi<\kappa}Y_\xi&=\{\beta<\kappa\mid\exists\xi<\beta:\beta\in Y_\xi\}=\{\beta<\kappa\mid\exists\xi<\beta:\xi<\alpha\wedge\beta\in X_\xi\setminus\alpha\}\\&=\{\beta<\kappa\mid\exists\xi<\alpha:\beta\in X_\xi\setminus\alpha\}=\bigcup_{\xi<\alpha}(X_\xi\setminus\alpha)\qquad(\text{notar que }\beta\in X_\xi\setminus\alpha\Longrightarrow\alpha\leq\beta).\end{aligned}$$

Además, $\alpha\in\kappa$ y $\alpha\subseteq\alpha$, por lo cual $\alpha\in I_b(\kappa)\subseteq I$. Tenemos, por tanto, que $\bigcup_{\xi<\alpha}(X_\xi\setminus\alpha)\in I$ y $\alpha\in I$, en consecuencia, $\bigcup_{\xi<\alpha}X_\xi\subseteq(\bigcup_{\xi<\alpha}X_\xi)\cup\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}(X_\xi\setminus\alpha)\cup\alpha\in I$, y con ello $\bigcup_{\xi<\alpha}X_\xi\in I$. Así pues, I es κ-completo. †

6.4. Conjuntos estacionarios

Definición 6.4.1. Dados $\alpha\in\mathbf{Lim}$ y $S\subseteq\alpha$, decimos que S es *estacionario en α* o *subconjunto estacionario de α* si para todo club C en α, $C\cap S\neq\emptyset$.

Teorema 6.4.1. *Sea $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_0$. Se cumplen:*

a) Todo superconjunto de un club en α es estacionario en α.

b) Todo subconjunto estacionario de α no es acotado en α.

c) La unión de menos de $\mathrm{cf}(\alpha)$ subconjuntos que no son estacionarios en α no es estacionario en α.

Demostración. a) Sea C un club en α y sea S un conjunto tal que $C \subseteq S \subseteq \alpha$. Si D es un club en α, por el teorema 6.1.6, $C \cap D \neq \emptyset$, y dado que $C \subseteq S$, entonces $C \cap D \subseteq S \cap D$, luego $S \cap D \neq \emptyset$. Por tanto, S es estacionario.

b) Sea S un subconjunto estacionario de α. Si $\beta < \alpha$, entonces $\beta + 1 < \alpha$ y $[\beta+1, \alpha)$ es un club en α, por lo cual existe $\xi \in [\beta+1, \alpha) \cap S$, y con ello $\xi \in S$ y $\beta < \xi$. Por ende, S no es acotado.

c) Sean $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$ y $\{T_\xi \mid \xi < \gamma\}$ una familia de subconjuntos que no son estacionarios en α. Para cada $\xi < \gamma$, sea C_ξ un club en α tal que $C_\xi \cap T_\xi = \emptyset$, entonces $(\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi) \cap (\bigcup_{\xi<\gamma} T_\xi) = \emptyset$, y por el teorema 6.1.6, $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ es un club en α. En conclusión, $\bigcup_{\xi<\gamma} T_\xi$ no es estacionario en α.

†

Definición 6.4.2. Si $A, B \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $f : A \longrightarrow B$ es una función, decimos que f es *regresiva* si $\forall \gamma \in A \setminus \{0\} : f(\gamma) < \gamma$.

Teorema 6.4.2 (Fodor). *Sea $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_0$. Si S es un subconjunto estacionario de α y $f : S \longrightarrow \alpha$ es una función regresiva, entonces existe $\eta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\eta]$ es estacionario en α; si además α es regular, entonces $f^{-1}[\{\eta\}]$ estacionario en α para algún $\eta < \alpha$.*

Demostración. Supongamos que $f^{-1}[\eta]$ no es estacionario en α para ningún $\eta < \alpha$, entonces para cada $\eta < \alpha$ existe un club en D_η en α tal que $D_\eta \cap f^{-1}[\eta] = \emptyset$. Sea E un club en α con tipo de orden $\mathrm{cf}(\alpha)$ (existe por el corolario 6.1.5). Para cada $\eta < \alpha$ sea $\tau(\eta) := \min\{\xi \in E \mid \xi \geq \eta\}$, y pongamos $C_\eta := \bigcap\{D_\xi \mid \xi \in E \wedge \xi \leq \tau(\eta)\}$. Como $\mathrm{tpo}(E) = \mathrm{cf}(\alpha)$, entonces $|E| = \mathrm{cf}(\alpha)$, en consecuencia, $|\{\xi \in E \mid \xi \leq \tau(\eta)\}| < \mathrm{cf}(\alpha)$; por consiguiente, C_η es la intersección de menos de $\mathrm{cf}(\alpha)$ clubes en α, así que, por el teorema 6.1.6, C_η es un club. Por otro lado, si $\eta_1 < \eta_2 < \alpha$, entonces $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \tau(\eta_2)$, por ello $\tau(\eta_1) \leq \tau(\eta_2)$, y por ende $C_{\eta_2} \subseteq C_{\eta_1}$. Obtenemos así, que la sucesión de clubes $(C_\eta)_{\eta<\alpha}$ es decreciente respecto a $\subseteq$, por lo que del corolario 6.1.8, $\triangle_{\eta<\alpha} C_\eta$ es un club, y de ahí que $\mathbf{Lim} \cap \triangle_{\eta<\alpha} C_\eta$ es también un club. Puesto que S estacionario, tenemos $\mathbf{Lim} \cap (\triangle_{\eta<\alpha} C_\eta) \cap S \neq \emptyset$, esto es, existe un ordinal límite, digamos γ en S, tal que $\forall \eta < \gamma : \gamma \in C_\eta$. Al ser la función f regresiva, se cumple que $f(\gamma) < \gamma$ y $f(\gamma)+1 < \gamma$ pues γ es límite; consecuentemente, $\gamma \in C_{f(\gamma)+1}$; además, $f(\gamma) \in f(\gamma)+1$, de modo que $\gamma \in f^{-1}[f(\gamma)+1]$. Concluimos, por tanto, que existe algún $\sigma < \alpha$ tal que $C_\sigma \cap f^{-1}[\sigma] \neq \emptyset$. Sin embargo, cada $D_{\tau(\eta)}$ —con $\eta < \alpha$— fue elegido de tal forma que $D_{\tau(\eta)} \cap f^{-1}[\tau(\eta)] = \emptyset$, y como $C_\eta \subseteq D_{\tau(\eta)}$ y $f^{-1}[\eta] \subseteq f^{-1}[\tau(\eta)]$ (pues $\eta \leq \tau(\eta)$), se satisface que $C_\eta \cap f^{-1}[\eta] = \emptyset$; lo cual contradice nuestro resultado anterior. Por ende, debe existir algún $\eta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\eta]$ es estacionario en α.

Supongamos adicionalmente que α es regular. En el párrafo anterior concluimos que existe $\eta < \alpha$ tal que $f^{-1}[\eta]$ es estacionario en α. Notemos que $\eta = \{\sigma \mid \sigma < \eta\} = \bigcup_{\sigma<\eta}\{\sigma\}$, en consecuencia, $f^{-1}[\eta] = f^{-1}[\bigcup_{\sigma<\eta}\{\sigma\}] = \bigcup_{\sigma<\eta} f^{-1}[\{\sigma\}]$, donde $\eta < \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$. Si ningún conjunto $f^{-1}[\{\sigma\}]$ fuera estacionario, entonces $f^{-1}[\eta]$ sería la unión de menos de $\mathrm{cf}(\alpha)$ conjuntos que no son estacionarios, por lo que el teorema 6.4.1 c) nos llevaría a concluir que $f^{-1}[\eta]$ no es estacionario. Por lo tanto, $f^{-1}[\{\sigma\}]$ es estacionario para algún $\sigma < \eta$.

†

Teorema 6.4.3. *Si $\kappa \in \mathcal{C}$ es regular e I un ideal en κ, entonces I es normal si y solo si para todo $S \in \mathcal{P}(\kappa)\setminus I$ y toda función regresiva $f : S \longrightarrow \kappa$ existe $S_0 \subseteq S$ tal que $S_0 \notin I$ y f es constante en S_0.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que I es normal. Sean $S \in \mathcal{P}(\kappa)\setminus I$ y $f : S \longrightarrow \kappa$ una función regresiva. Si existe $\xi_0 < \kappa$ tal que $f^{-1}[\{\xi_0\}] \notin I$, tomando $S_0 := f^{-1}[\{\xi_0\}]$, tenemos que $S_0 \subseteq S$, $S_0 \notin I$, y f es constante en S_0. Si $f^{-1}[\{\xi\}] \in I$ para todo $\xi < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, obtenemos que $\bigtriangledown_{\xi<\kappa} f^{-1}[\{\xi\}] \in I$ —de la normalidad de I— y donde

$$\bigtriangledown_{\xi<\kappa} f^{-1}[\{\xi\}] = \{\beta < \kappa \mid \exists \xi < \beta : \beta \in f^{-1}[\{\xi\}]\}$$

$$= \{\beta < \kappa \mid \exists \xi < \beta : f(\beta) = \xi\} = \{\beta < \kappa \mid f(\beta) < \beta\} = S\setminus\{0\},$$

ya que f es regresiva. Por tanto, $S\setminus\{0\} \in I$. Si $0 \notin S$, entonces $S = S\setminus\{0\} \in I$, lo cual no es posible por hipótesis. Si $0 \in S$, entonces $\{0\} \notin I$, pues de contrario $S = S\cup\{0\} \in I$; Así que, tomando $S_0 := \{0\}$, se sigue que $S_0 \notin I$, $S_0 \subseteq S$ y f es constante en S_0.

$\Leftarrow$] Supongamos que para todo $S \in \mathcal{P}(\kappa)\setminus I$ y toda función regresiva $f : S \longrightarrow \kappa$ existe $S_0 \subseteq S$ tal que $S_0 \notin I$ y f es constante en S_0. Si I no es normal existe una sucesión $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ en I, tal que $\bigtriangledown_{\xi<\kappa} X_\xi \notin I$. Pongamos $S := \bigtriangledown_{\xi<\kappa} X_\xi$. Para cada $\sigma \in S$, el conjunto $\{\xi < \sigma \mid \sigma \in X_\xi\}$ es distinto del vacío, por definición de unión diagonal. Definamos $f : S \longrightarrow \kappa$ por $f(\sigma) = \mathrm{mín}\{\xi < \sigma \mid \sigma \in X_\xi\}$ para cada $\sigma \in S$; entonces, $f(\sigma) < \sigma$ y $\sigma \in X_{f(\sigma)}$ siempre que $\sigma \in S$. Así, f es regresiva. Como $S \notin I$, por hipótesis, existe $S_0 \subseteq S$ tal que $S_0 \notin I$ y f es constante en S_0, entonces hay algún $\gamma < \kappa$ tal que $\forall \xi \in S_0 : f(\xi) = \gamma$. Sin embargo para cada $\xi \in S_0$, tendríamos que $\xi \in X_{f(\xi)} = X_\gamma$, por consiguiente, $S_0 \subseteq X_\gamma \in I$, y con ello $S_0 \in I$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por tanto, I es normal. †

Corolario 6.4.4. *Sean $\kappa \in \mathcal{C}$ regular. Si I es un ideal normal en κ y $X \in \mathcal{P}(\kappa)\setminus I$, entonces $I \restriction X$ es un ideal normal en κ.*

Demostración. Por definición $I \restriction X = \langle I\cup\{\kappa\setminus X\}\rangle$, y por el teorema 6.3.1, $I \restriction X = \{Z \subseteq \kappa \mid X\cap Z \in I\}$. Sea $S \subseteq \kappa$ con $S \notin I \restriction X$, y sea $f : S \longrightarrow \kappa$ una función regresiva, entonces $X\cap S \notin I$ y $f_{|X\cap S} : X\cap S \longrightarrow \kappa$ es regresiva. Como I es normal, del teorema anterior, existe $S_0 \subseteq X\cap S$ tal que $S_0 \notin I$ y $f_{|X\cap S}$ es constante en S_0. Viendo que $S_0 \subseteq X\cap S$, obtenemos que $S_0 \subseteq S$ y $S_0 \subseteq X$, luego $X\cap S_0 = S_0 \notin I$ y así $S_0 \notin I \restriction X$. Tenemos en resumen que $S_0 \notin I \restriction X$, $S_0 \subseteq S$ y f es constante en S_0. Por el teorema anterior, $I \restriction X$ es normal. †

Lema 6.4.5. *Supongamos que κ es un cardinal regular no numerable. Si S es estacionario en κ, entonces el conjunto*

$$T := \{\alpha \in S \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega \vee (\mathrm{cf}(\alpha) > \omega \wedge S\cap\alpha \textit{ no es estacionario en } \alpha)\}$$

es estacionario en κ.

Demostración. Sea C un club en κ. Por el lema 6.1.3, $C' := \{\gamma < \kappa \mid \gamma \textit{ es un punto límite de } C\}$ es un club en κ, por lo cual $S\cap C' \neq \emptyset$ ya que S es estacionario en κ. Sea $\alpha := \mathrm{mín}(S\cap C')$; vamos a probar que $\alpha \in T\cap C$. Como $\alpha \in C'$, entonces $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$. Si $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, claramente $\alpha \in T$. Si $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, como $\sup(C\cap\alpha) = \alpha$, por el teorema 6.1.5, $E' := \{\gamma < \alpha \mid \gamma \textit{ es un punto límite de } C\cap\alpha\}$ es un club en α. Observar que si $\gamma < \alpha$: γ es un punto límite de $C\cap\alpha$ si y solo si $\gamma \in \mathbf{Lim}$ y $\sup(C\cap\alpha\cap\gamma) = \gamma = \sup(C\cap\gamma)$, y esto se cumple si y solo si γ es un punto límite de C, o sea, si y solo si $\gamma \in C'$; por lo tanto, $E' = C\cap\alpha$; en consecuencia, $C\cap\alpha$ es un club en α. Además, $(S\cap\alpha)\cap(C'\cap\alpha) = (C'\cap S)\cap\alpha = \emptyset$ pues $\alpha = \mathrm{mín}(S\cap C')$; por tanto, $S\cap\alpha$ no es estacionario en α; de ahí que $\alpha \in T$. También $\alpha \in C$ pues los clubes contienen a todos sus puntos límites. En resumen, $\alpha \in C\cap T$, es decir, $C\cap T \neq \emptyset$. Por tanto, T es estacionario en κ. †

Lema 6.4.6. *Sean κ un cardinal regular no numerable y T un subconjunto estacionario de κ con $T \subseteq \mathbf{Lim}$. Si para todo $\alpha \in T$, f_α es una función tal que $\mathrm{dom}(f_\alpha) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $\mathrm{ran}(f_\alpha)$ es cofinal en α, entonces alguna de las siguientes proposiciones siempre se cumple:*

(1) Existe $\xi < \kappa$ tal que $\forall \eta < \kappa$ ($T_\eta := \{\alpha \in T \mid \xi \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\xi) \geq \eta\}$ es estacionario en κ).

(2) Existe un club D en κ tal que $\forall \alpha, \gamma \in D \cap T : (\gamma < \alpha \Rightarrow f_\alpha(\gamma) = \gamma)$.

Demostración. Para probar este lema, basta ver que la negación de (1) implica (2).

Supongamos que para todo $\xi < \kappa$ existe $\eta' < \kappa$ tal que $T_{\eta'}$ no es estacionario en κ; esto implica que existe una función $\eta : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que para cada $\xi < \kappa$, $T_{\eta(\xi)}$ no es estacionario, y existe un club C_ξ en κ de tal manera que $C_\xi \cap T_{\eta(\xi)} = \emptyset$. Por el corolario 6.1.8 b), $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club en κ, y por el lema 6.1.3, $E := \{\beta < \kappa \mid \eta[\beta] \subseteq \beta\}$ es un club en κ; entonces, por el teorema 6.1.6, $E \cap \triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club en κ. Vamos a probar que $E \cap \triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$ es un club que cumple la proposición (2). Sean $\alpha, \gamma \in (E \cap \triangle_{\xi<\kappa} C_\xi) \cap T$ tales que $\gamma < \alpha$, entonces $\alpha \in T$ y $\forall \xi < \alpha : \alpha \in C_\xi$ y $\eta[\gamma] \subseteq \gamma$; en consecuencia,

$$\forall \xi < \alpha : \alpha \in C_\xi \wedge (\xi \notin \mathrm{dom}(f_\alpha) \vee f_\alpha(\xi) < \eta(\xi)),$$

pues $C_\xi \cap T_{\eta(\xi)} = \emptyset$. Para cada $\xi \in \gamma \cap \mathrm{dom}(f_\alpha)$, se cumple que $\xi < \gamma < \alpha$ y $\xi \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$, de lo cual se deduce que $f_\alpha(\xi) < \eta(\xi)$; además, $\eta[\gamma] \subseteq \gamma$, así $\eta(\xi) < \gamma$. En resumen,

$$\forall \xi \in \gamma \cap \mathrm{dom}(f_\alpha) : f_\alpha(\xi) < \eta(\xi) < \gamma. \tag{6.2}$$

Si suponemos que $\mathrm{dom}(f_\alpha) \leq \gamma$, tendríamos que $\forall \xi \in \gamma \cap \mathrm{dom}(f_\alpha) = \mathrm{dom}(f_\alpha) : f_\alpha(\xi) < \eta(\xi) < \gamma$, con lo cual $\sup(\mathrm{ran}(f_\alpha)) \leq \gamma < \alpha$, pero estamos suponiendo que $\mathrm{ran}(f_\alpha)$ es cofinal en α. Por tanto, $\gamma \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$ y así $\gamma \subseteq \mathrm{dom}(f_\alpha)$. Por (6.2), $\forall \xi \in \gamma : f_\alpha(\xi) < \eta(\xi) < \gamma$ y, por consiguiente, $\sup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \gamma$; como f_α es normal y γ es un ordinal límite, se sigue que $f_\alpha(\gamma) = \sup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \gamma$. Además, f_α es estrictamente creciente, así que $\gamma \leq f_\alpha(\gamma)$. Por ende $f_\alpha(\gamma) = \gamma$. †

Teorema 6.4.7 (Solovay)**.** *Sea κ un cardinal regular no numerable. Si S es un conjunto estacionario en κ, entonces S se puede particionar en κ subconjuntos estacionarios de κ.*

Demostración. Por el lema 6.4.5, el conjunto

$$T := \{\alpha \in S \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega \vee (\mathrm{cf}(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \textit{ no es estacionario en } \alpha)\}$$

es estacionario en κ. Nos interesa aplicar el lema 6.4.6, así que para todo $\alpha \in T$ hallaremos una función normal f_α tal que $\mathrm{ran}(f_\alpha)$ es cofinal en α. Si $\alpha \in T$ y $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, entonces $S \cap \alpha$ no es estacionario en α, por lo que existe un club C_α en α tal que $C_\alpha \cap (S \cap \alpha) = \emptyset$; luego, por el teorema 6.1.4 b), existe una función normal f_α tal que $\mathrm{ran}(f_\alpha) = C_\alpha$, y de aquí que $\mathrm{ran}(f_\alpha)$ es cofinal en α. Si $\alpha \in T$ y $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ por el teorema 4.5.9 c), existe una función normal $h_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ tal que $\mathrm{ran}(h_\alpha)$ es cofinal en α; luego definamos $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ por $f_\alpha(n) := h_\alpha(n) + 1$ para cada $n < \omega$. Ahora, por el lema 6.4.6, se tiene que cumplir alguna de las dos proposiciones del citado lema. Por cómo construimos la funciones f_α, tenemos que si $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, entonces $\mathrm{ran}(f_\alpha) \cap S = \mathrm{ran}(f_\alpha) \cap (S \cap \alpha) = \emptyset$ (pues $\mathrm{ran}(f_\alpha) \subseteq \alpha$), por lo cual $\mathrm{ran}(f_\alpha) \cap T = \emptyset$ ya que $T \subseteq S$. Asimismo, cuando $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, $\mathrm{ran}(f_\alpha)$ está formado solo por ordinales sucesores, y con ello $\mathrm{ran}(f_\alpha) \cap T = \emptyset$. Si suponemos que la proposición (2) se cumple, es decir, existe un club D en κ tal que $\forall \alpha, \gamma \in D \cap T : (\gamma < \alpha \Rightarrow f_\alpha(\gamma) = \gamma)$; entonces tomando $\alpha, \gamma \in D \cap T$ distintos entre sí, con $\gamma < \alpha$, tendremos que $f_\alpha(\gamma) = \gamma \in T \cap \mathrm{ran}(f_\alpha)$, lo que no puede ocurrir. Por lo tanto, la proposición (1) del lema 6.4.6, se satisface.

Tomemos $\xi < \kappa$, que cumple que para cada $\eta < \kappa$ el conjunto

$$T_\eta := \{\alpha \in T \mid \xi \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\xi) \geq \eta\}$$

es estacionario en κ. Definamos una función $f : T \longrightarrow \kappa$ por

$$f(\alpha) = \begin{cases} f_\alpha(\xi) & \textit{si } \xi \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Para cada η, con $0<\eta<\kappa$, tenemos $T_\eta=\{\alpha\in T \mid f(\alpha)\geq\eta\}$, y para todo $\alpha\in T_\eta$, como $\operatorname{ran}(f_\alpha)\subseteq\alpha$, se cumple que $f(\alpha)=f_\alpha(\xi)<\alpha$. Por tanto, si $0<\eta<\kappa$, la función restricción, $f_{|T_\eta}:T_\eta\longrightarrow\kappa$ es regresiva (sin olvidar que κ es regular); en consecuencia, por el teorema de Fodor, existe $\gamma_\eta<\kappa$ tal que $f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]=f^{-1}[\{\gamma_\eta\}]\cap T_\eta$ es estacionario en κ. Claramente, si $\gamma_\eta\neq\gamma_\theta$, entonces $f^{-1}[\{\gamma_\eta\}]\cap f^{-1}[\{\gamma_\theta\}]=\emptyset$, y así $f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]\cap f^{-1}_{|T_\theta}[\{\gamma_\theta\}]=\emptyset$; de modo que la familia $\{f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]\mid 0<\eta<\kappa\}$ es ajena. Además, dado $\eta<\kappa$ cualquiera, y tomando $\alpha\in f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]$, observamos que $\gamma_\eta=f(\alpha)\geq\eta$; lo que significa que el conjunto $\{\gamma_\eta\mid 0<\eta<\kappa\}$ no es acotado en κ; con lo cual $|\{\gamma_\eta\mid 0<\eta<\kappa\}|=\kappa$ pues κ es regular. Por tanto, la familia $\{f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]\mid 0<\eta<\kappa\}$ tiene cardinalidad κ. No sabemos con certeza si la unión de todos los elementos de esta familia sea igual a S, pero, en cualquier caso, es suficiente con notar lo siguiente: puesto que $f^{-1}_{|T_1}[\{\gamma_1\}]$ estacionario, es claro que $f^{-1}_{|T_1}[\{\gamma_1\}]\cup A$, donde A es subconjunto cualquiera de S, es también estacionario; en particular para $A:=S\setminus(\bigcup_{0<\eta<\kappa}f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}])$. Por tanto, tomando $B_1:=f^{-1}_{|T_1}[\{\gamma_1\}]\cup A$ y $B_\eta:=f^{-1}_{|T_\eta}[\{\gamma_\eta\}]$ para cada η con $2\leq\eta<\kappa$, obtenemos una partición de S de conjuntos estacionarios de κ, con cardinalidad igual a κ. †

Definición 6.4.3. Sean $\alpha\in\mathbf{Lim}$ y $S\subseteq\alpha$. Decimos que S *no se refleja* en α si S es estacionario en α y para todo $\beta\in\mathbf{Lim}\cap\alpha$, el conjunto $\beta\cap S$ no es estacionario en β.

Lema 6.4.8. *Sea $\alpha\in\boldsymbol{\mathcal{R}}$ con $\operatorname{cf}(\alpha)>\aleph_0$. Si $\lambda\in\boldsymbol{\mathcal{C}}$ regular con $\lambda<\operatorname{cf}(\alpha)$, entonces el conjunto*

$$\sum_{\alpha,\lambda}:=\{\beta<\alpha\mid\operatorname{cf}(\beta)=\lambda\}$$

es estacionario en α. Además, para todo club C en α existe $\beta\in C\cap\sum_{\alpha,\lambda}$ tal que $C\cap\beta$ es un club en β.

Demostración. Sean $\lambda<\operatorname{cf}(\alpha)$ un cardinal regular y C un club en α. Construimos una sucesión $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ de la siguiente forma: β_0 es un elemento cualquiera de C diferente de 0; dados $\xi<\lambda$ y $\beta_\xi\in C$, tomemos $\beta_{\xi+1}\in C$ tal que $\beta_\xi<\beta_{\xi+1}$ (existe porque C no es acotado en α); si $\xi<\lambda$ es un ordinal límite, sea $\beta_\xi\in C$ tal que $\sup\{\beta_\zeta\mid\zeta<\xi\}<\beta_\xi$ —$\sup\{\beta_\zeta\mid\zeta<\xi\}<\alpha$ ya que $\xi<\lambda=\operatorname{cf}(\lambda)<\operatorname{cf}(\alpha)$—. La sucesión $(\beta_\xi)_{\xi<\lambda}$ es estrictamente creciente y cada uno de sus elementos pertenece a C; además, $\sup\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}<\alpha$ pues $\lambda=\operatorname{cf}(\lambda)<\operatorname{cf}(\alpha)$. Por el teorema 6.1.2, $\sup\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}\in C$, y por el teorema 4.5.11, $\operatorname{cf}(\beta)=\operatorname{cf}(\lambda)=\lambda$ donde $\beta:=\sup\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}$; en consecuencia, $\beta\in C\cap\sum_{\alpha,\lambda}$. Por tanto, $\sum_{\alpha,\lambda}$ es estacionario en α.

Por otra parte, tomando C un club en α, y β definido igual que el párrafo anterior, tenemos que $\beta\in C\cap\sum_{\alpha,\lambda}$. Si $\gamma\in\mathbf{Lim}\cap\beta$ tal que $\sup((C\cap\beta)\cap\gamma)=\gamma$, entonces $\beta\cap\gamma=\gamma$, con lo cual $\sup(C\cap\gamma)=\sup((C\cap\beta)\cap\gamma)=\gamma$, por consiguiente, $\gamma\in C$ —pues C es cerrado en α y $\gamma<\beta<\alpha$—, y así $\gamma\in C\cap\beta$. Por ende, $C\cap\beta$ es cerrado en β. $C\cap\beta$ no es acotado en β porque β es el supremo de una sucesión de elementos de elementos de C, esto es, $\beta=\sup\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}\in C$ con $\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}\subseteq C$; luego $\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}\subseteq C\cap\beta\subseteq\beta$, y así $\beta=\sup\{\beta_\xi\mid\xi<\lambda\}\leq\sup(C\cap\beta)\leq\beta$. Por lo tanto, $C\cap\beta$ es un club en β. †

Teorema 6.4.9. *Si $\lambda\in\boldsymbol{\mathcal{C}}\setminus\omega$ regular, entonces el conjunto $\sum_{\lambda^+,\lambda}:=\{\sigma<\lambda^+\mid\operatorname{cf}(\sigma)=\lambda\}$ no se refleja en λ^+.*

Demostración. Como $\lambda<\lambda^+=\operatorname{cf}(\lambda^+)$ y $\lambda^+>\aleph_0$, por el lema anterior, $\sum_{\lambda^+,\lambda}$ es estacionario en λ^+.

Sea $\beta<\lambda^+$ un ordinal límite, entonces $\operatorname{cf}(\beta)\leq\beta\leq\lambda$. Por el teorema 4.5.9, existe una función $f:\operatorname{cf}(\beta)\longrightarrow\beta$ normal con $\operatorname{ran}(f)$ cofinal en β. Definamos $g:\operatorname{cf}(\beta)\longrightarrow\beta$, como $g(\xi):=f(\xi)+1$ para cada $\xi\in\operatorname{cf}(\beta)$; entonces g es estrictamente creciente y su rango es cofinal en β. Por el teorema

6.1.3 b), $C := \operatorname{ran}(g) \cup \{\gamma < \beta \mid \gamma \textit{ es un punto límite de } \operatorname{ran}(g)\}$ es un club en β. Vamos a probar que $C \cap \sum_{\lambda^+,\lambda} = \emptyset$, con lo que concluiríamos que $\beta \cap \sum_{\lambda^+,\lambda}$ no es estacionario en β. Si $\gamma \in C$ y γ es un ordinal sucesor, entonces $\mathrm{cf}(\gamma) = 1 < \lambda$, y con ello $\gamma \notin \sum_{\lambda^+,\lambda}$. Si $\gamma \in C$ y γ es un ordinal límite, entonces γ tiene que ser un punto límite de $\operatorname{ran}(g)$ menor que β, pues $\operatorname{ran}(g)$ está formado únicamente por ordinales sucesores; pongamos $\sigma := \mathrm{mín}\{\xi < \mathrm{cf}(\beta) \mid \gamma \leq g(\xi)\}$, entonces $\forall \xi < \sigma : g(\xi) < \gamma$, por lo cual la función restricción $g_{|\sigma} : \sigma \longrightarrow \gamma$ está bien definida; si $\delta < \gamma$, como $\gamma = \sup(\operatorname{ran}(g) \cap \gamma)$, existe $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$ tal que $\delta < g(\xi) < \gamma$, y como $\gamma \leq g(\sigma)$, obtenemos que $g(\xi) < g(\sigma)$ y así $\xi < \sigma$ (g es estrictamente creciente); en consecuencia, el rango de $g_{|\sigma} : \sigma \longrightarrow \gamma$ es cofinal en γ, de ahí que $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \sigma < \mathrm{cf}(\beta) \leq \lambda$, y con ello $\gamma \notin \sum_{\lambda^+,\lambda}$. Concluimos que $C \cap (\beta \cap \sum_{\lambda^+,\lambda}) = C \cap \sum_{\lambda^+,\lambda} = \emptyset$. Por lo tanto, $\sum_{\lambda^+,\lambda}$ no se refleja en λ^+. †

6.5. Un teorema de Silver

Definición 6.5.1. Dos funciones f y g, con $\beta := \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, son casi ajenas si el conjunto $\{\xi < \beta \mid f(\xi) = g(\xi)\}$ está acotado en β. Una familia de funciones, con el mismo dominio, es casi ajena si está formada por funciones casi ajenas dos a dos.

Lema 6.5.1. *Sean κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable y $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión normal de cardinales, cofinal en κ, y $\{A_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ cualquier familia de conjuntos. Si κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$ es una familia casi ajena y el conjunto $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |A_\xi| \leq \kappa_\xi\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $|\mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demostración. Basta probar el teorema para el caso en que $\{A_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y cuando $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid A_\xi \subseteq \kappa_\xi\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Pongamos $E_0 := \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid A_\xi \subseteq \kappa_\xi\} \cap \mathbf{Lim}$; notemos que E_0 es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Si $f \in \mathcal{F}$, entonces $\forall \alpha \in E_0 : f(\alpha) \in A_\alpha \subseteq \kappa_\alpha$, y como $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es normal, $f(\alpha) \in \kappa_\alpha = \bigcup\{\kappa_\xi \mid \xi < \alpha\}$, por lo que para cada $\alpha \in E_0$ existe $\xi < \alpha$ tal que $f(\alpha) \in \kappa_\xi$; con lo anterior se define una función $g : E_0 \longrightarrow \mathrm{cf}(\kappa)$ de tal modo que para todo $\alpha \in E_0$, $g(\alpha) < \alpha$ y $f(\alpha) \in \kappa_{g(\alpha)}$; con lo cual g es regresiva, y como $\mathrm{cf}(\kappa)$ es regular —por el teorema de Fodor—, existe $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$ de tal suerte que $g^{-1}[\{\eta\}]$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$; esto significa que existe un $E_f \subseteq E_0$ estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ de modo que g es constante; por consiguiente, existe $c < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que para cada $\alpha \in E_f$, $g(\alpha) = c$, y así $f(\alpha) \in \kappa_{g(\alpha)} = \kappa_c$. En resumen, para cada $f \in \mathcal{F}$ existe un conjunto estacionario E_f en $\mathrm{cf}(\kappa)$ tal que f está acotada en E_f por algún cardinal κ_α. Definamos $G : \mathcal{F} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{U}}$, como $G(f) = f_{|E_f}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. La función G es inyectiva; pues si $f_{|E_f} = g_{|E_g}$, entonces $E_f = E_g$, lo cual implica que las funciones casi ajenas f y g son iguales en un conjunto que no es acotado en $\mathrm{cf}(\kappa)$ (E_f es estacionario y así no acotado), en consecuencia, $f = g$. Por tanto, $|\mathcal{F}| = |\mathrm{dom}(G)| = |\operatorname{ran}(G)|$. Además, cada elemento de $\operatorname{ran}(G)$ es una funcion cuyo dominio es algún subconjunto de $\mathrm{cf}(\kappa)$ y su rango está contenido en algún κ_α; por consiguiente, $\operatorname{ran}(G) \subseteq \bigcup\{{}^E\kappa_\alpha \mid E \subseteq \mathrm{cf}(\kappa) \wedge \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$, luego:

$$|\mathcal{F}| = |\mathrm{dom}(G)| = |\operatorname{ran}(G)| \leq \left|\bigcup\{{}^E\kappa_\alpha \mid E \subseteq \mathrm{cf}(\kappa) \wedge \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}\right|. \tag{6.3}$$

Tomando $E \subseteq \mathrm{cf}(\kappa)$ fijo, tenemos:

$$\left|\bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} {}^E\kappa_\alpha\right| = \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} |{}^E\kappa_\alpha| = \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^{|E|} \leq \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa; \tag{6.4}$$

en la última desigualdad usamos la hipótesis de que κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte. Ahora, para cada $E \subseteq \mathrm{cf}(\kappa)$ denotemos $\mathcal{E}(E) = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} {}^E\kappa_\alpha$. De la desigualdad (6.4), tenemos que $|\mathcal{E}(E)| \leq \kappa$ para todo $E \subseteq$

$\mathrm{cf}(\kappa)$. Aplicando las desigualdades (6.3) y (6.4), obtenemos que:

$$|\mathcal{F}| \leq \Big|\bigcup\{{}^{E}\kappa_\alpha \mid E \subseteq \mathrm{cf}(\kappa) \wedge \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}\Big| = \Big|\bigcup_{E\subseteq \mathrm{cf}(\kappa)}\ \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} {}^{E}\kappa_\alpha\Big| = \Big|\bigcup_{E\in\mathcal{P}(\mathrm{cf}(\kappa))}\mathcal{E}(E)\Big|$$

$$\leq \sum_{E\in\mathcal{P}(\mathrm{cf}(\kappa))}|\mathcal{E}(E)| \leq \sum_{E\in\mathcal{P}(\mathrm{cf}(\kappa))}\kappa = |\mathcal{P}(\mathrm{cf}(\kappa))|\cdot\kappa = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}\cdot\kappa.$$

$2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$ porque κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, así que $|\mathcal{F}| \leq 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}\cdot\kappa = \kappa$. †

Lema 6.5.2. *Sean κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable y $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión normal de cardinales, cofinal en κ, y sea $\{A_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ una familia de conjuntos cualquiera. Si κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, $\mathcal{F} \subseteq \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$ es una familia casi ajena y el conjunto $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |A_\xi| \leq \kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $|\mathcal{F}| \leq \kappa^+$.*

Demostración. Para probar este lema, es suficiente demostrarlo para el caso en que $\{A_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{R}}$ y $E_0 := \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid A_\xi \subseteq \kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $E \subseteq E_0$ estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, definamos

$$\mathcal{F}(f, E) := \{g \in \mathcal{F} \mid \forall\alpha \in E : g(\alpha) \leq f(\alpha)\}.$$

$\mathcal{F}(f, E)$ es casi ajena pues $\mathcal{F}(f, E) \subseteq \mathcal{F}$. Dados $f \in \mathcal{F}$ y $E \subseteq E_0$, definamos

$$B_\alpha = \begin{cases} f(\alpha)+1 & si\ \alpha \in E \\ A_\alpha & si\ \alpha \in \mathrm{cf}(\kappa)\setminus E \end{cases}.$$

Para todo $g \in \mathcal{F}(f, E)$, si $\alpha \in E$, resulta que $g(\alpha) \leq f(\alpha) < f(\alpha)+1 = B_\alpha$; y si $\alpha \in \mathrm{cf}(\kappa)\setminus E$, claramente $g(\alpha) \in B_\alpha$. Por tanto $\mathcal{F}(f, E) \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} B_\alpha$. Además, si $\alpha \in E$, se satisface que $f(\alpha) \in A_\alpha \subseteq \kappa_\alpha^+$, luego $B_\alpha = f(\alpha)+1 < \kappa_\alpha^+$, y con ello $|B_\alpha| = |f(\alpha)+1| \leq \kappa_\alpha$. Por tanto, $E \subseteq \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |B_\alpha| \leq \kappa_\alpha\}$, de lo que concluimos que $\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |B_\alpha| \leq \kappa_\alpha\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ pues E lo es. Por lo tanto, tenemos todas las condiciones para aplicar el lema 6.5.1, así que $|\mathcal{F}(f, E)| \leq \kappa$.

Sea $\mathcal{E} := \{E \subseteq E_0 \mid E$ *es estacionario en* $\mathrm{cf}(\kappa)\}$, y para cada $f \in \mathcal{F}$ sea $\mathcal{F}_f := \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{F}(f, E)$; entonces,

$$|\mathcal{F}_f| = \Big|\bigcup_{E\in\mathcal{E}}\mathcal{F}(f, E)\Big| \leq \sum_{E\in\mathcal{E}}|\mathcal{F}(f, E)| \leq \sum_{E\in\mathcal{E}}\kappa = |\mathcal{E}|\cdot\kappa \leq 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}\cdot\kappa = \kappa.$$

Prosiguiendo, por contradicción, supongamos que $|\mathcal{F}| > \kappa^+$. Sean $\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$ una familia de κ^+ funciones en $\mathcal{F}$. Observemos que

$$\Big|\bigcup_{\alpha<\kappa^+}\mathcal{F}_{f_\alpha}\Big| \leq \sum_{\alpha<\kappa^+}|\mathcal{F}_{f_\alpha}| = \sum_{\alpha<\kappa^+}|\kappa| = \kappa^+\cdot\kappa = \kappa^+.$$

Como resultado podemos tomar una función f en $\mathcal{F}\setminus\bigcup_{\alpha<\kappa^+}\mathcal{F}_{f_\alpha}$. Dado $\beta < \kappa^+$ cualquiera, el conjunto $G := \{\xi \in E_0 \mid f(\xi) \leq f_\beta(\xi)\}$ no es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$; si lo fuera, se puede definir

$$\mathcal{F}(f_\beta, G) := \{g \in \mathcal{F} \mid \forall\xi \in G : g(\xi) \leq f_\beta(\xi)\};$$

por lo que $f \notin \mathcal{F}(f_\beta, G)$ (por como elegimos f), y de ahí que existe $\xi \in G$ tal que $f_\beta(\xi) < f(\xi)$, pero esto contradice el que $\xi \in G$. Por lo tanto, G no es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Ahora, el conjunto $G' := \{\xi \in E_0 \mid f_\beta(\xi) \leq f(\xi)\}$ es estacionario; de lo contrario, por el teorema 6.4.1 c), $E_0 = G\cup G'$ no sería estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Resumiendo: para cada $\alpha < \kappa^+$, el conjunto $G'_\alpha := \{\xi \in E_0 \mid f_\alpha(\xi) \leq f(\xi)\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, por lo que están definidos lo conjuntos $\mathcal{F}(f, {G'}_\alpha) = \{g \in \mathcal{F} \mid \forall\xi \in {G'}_\alpha : g(\xi) \leq f(\xi)\}$. Se observa, claramente, que $f_\alpha \in \mathcal{F}(f, G_\alpha)$ y, en consecuencia,

$$\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+}\mathcal{F}(f, G_\alpha) \subseteq \bigcup_{E\in\mathcal{E}}\mathcal{F}(f, E) = \mathcal{F}_f,$$

de este modo, $|\{f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}| \leq |\mathcal{F}_f| \leq \kappa$, lo cual no es posible.

Por lo tanto, $|\mathcal{F}| \leq \kappa^+$. †

Teorema 6.5.3. *Sean κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable y $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión normal de cardinales, cofinal en κ. Si el conjunto $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid 2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $2^\kappa=\kappa^+$.*

Demostración. Primero probemos que κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte. Si $\nu<_c\kappa$, existe $\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $\nu<\kappa_\alpha$ y $\mathrm{cf}(\kappa)<\kappa_\alpha$; como $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid 2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ y el intervalo $[\alpha,\mathrm{cf}(\kappa))$ es un club, debe de existir un $\xi\in[\alpha,\mathrm{cf}(\kappa))$ tal que $2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+$; entonces $\nu,\mathrm{cf}(\kappa)<\kappa_\alpha\le\kappa_\xi$; en consecuencia, $\nu^{\mathrm{cf}(\kappa)}\le\kappa_\xi^{\kappa_\xi}=2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+\le\kappa_{\xi+1}<\kappa$. Así pues, κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte.

Para cada $X\subseteq\kappa$, definamos $f_X:\mathrm{cf}(\kappa)\longrightarrow\mathcal{P}(\kappa)$, por $f_X(\xi):=X\cap\kappa_\xi$. Si $\xi<\kappa$, entonces $f_X(\xi)\subseteq X\cap\kappa_\xi\subseteq\kappa_\xi$, luego $f_X(\xi)\in\mathcal{P}(\kappa_\xi)$; por tanto, $f_X\in\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\mathcal{P}(\kappa_\xi)$ para todo $X\in\mathcal{P}(\kappa)$. Pongamos $\mathcal{F}:=\{f_X\mid X\subseteq\kappa\}$, por lo anterior $\mathcal{F}\subseteq\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\mathcal{P}(\kappa_\xi)$.

Veamos que $\mathcal{F}$ es casi ajena. Sean f_X, $f_Y\in F$ tales que $f_X\ne f_Y$, entonces existe $\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)$ tales que $X\cap\kappa_\alpha=f_X(\alpha)\ne f_Y(\alpha)=Y\cap\kappa_\alpha$. Si $\xi>\alpha$ y $X\cap\kappa_\xi=f_X(\xi)=f_Y(\xi)=Y\cap\kappa_\xi$, entonces $\kappa_\alpha\subseteq\kappa_\xi$ y $X\cap\kappa_\xi\cap\kappa_\alpha=Y\cap\kappa_\xi\cap\kappa_\alpha$, y con ello $X\cap\kappa_\alpha=Y\cap\kappa_\alpha$ pues $\kappa_\alpha=\kappa_\alpha\cap\kappa_\xi$, lo cual es falso. Por tanto, el conjunto $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid f_X(\xi)=f_Y(\xi)\}$ está acotado por $\alpha+1$, es decir, f_X y f_Y son casi ajenas. Por ende, $\mathcal{F}$ es una familia casi ajena.

Además, por hipótesis, el conjunto $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid |\mathcal{P}(\kappa_\xi)|=2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, en consecuencia, $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid |\mathcal{P}(\kappa_\xi)|\le\kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Tenemos todas las hipótesis del lema 6.5.2, respecto a $\mathcal{F}\subseteq\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\mathcal{P}(\kappa_\xi)$. Por tanto, $|\mathcal{F}|\le\kappa^+$.

Observar que si $X,Y\subseteq\kappa$ con $X\ne Y$, tomando $\xi\in X\setminus Y$ (similarmente si $\xi\in Y\setminus X$), existe $\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $\xi<\kappa_\alpha$, entonces $\xi\in X\cap\kappa_\alpha$ y $\xi\notin Y\cap\kappa_\alpha$, con lo cual $f_X\ne f_Y$. Consiguientemente,

$$|\mathcal{F}|=|\{f_X\mid X\in\mathcal{P}(\kappa)\}|=|\mathcal{P}(\kappa)|=2^\kappa,$$

de ahí que $2^\kappa=|\mathcal{F}|\le\kappa^+$; y ya sabemos que $\kappa^+\le2^\kappa$. En conclusión, $2^\kappa=\kappa^+$. †

Corolario 6.5.4 (Silver a)**.** *Si κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable y todo cardinal infinito menor que κ cumple la HGC, entonces κ también cumple la HGC.*

Demostración. Por el teorema 4.5.9, existe una sucesión normal $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ con rango cofinal en κ. Se sigue, por hipótesis, que $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid 2^{\kappa_\xi}=\kappa_\xi^+\}=\mathrm{cf}(\kappa)$, de lo que se deduce claramente que este conjunto es estacionario $\mathrm{cf}(\kappa)$. Por el teorema 6.5.3, $2^\kappa=\kappa^+$. †

Lema 6.5.5. *Sean κ un cardinal singular de cofinalidad no numerable. Si κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte y existe una sucesión normal $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ de cardinales, cofinal en κ, tal que el conjunto $\{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)\mid\kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa_\xi)}=\kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$.*

Demostración. Para cada $h\in{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$ sea $f_h:\mathrm{cf}(\kappa)\longrightarrow{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$ definida por

$$f_h(\alpha)(\beta)=\begin{cases}h(\beta) & si\ \ h(\beta)<\kappa_\alpha\\ 0 & si\ \ \kappa_\alpha\le h(\beta)<\kappa\end{cases}$$

Denotemos $\mathcal{F}:=\{f_h\mid h\in{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa\}$. Se observa que $f_h(\alpha)(\beta)\in\kappa_\alpha$ para cada $\beta<\mathrm{cf}(\kappa)$; por lo cual $f_h(\alpha)\in{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha$ para toda $\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)$; en consecuencia, $f_h\in\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha$ para cada $h\in{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$. Por lo tanto, $\mathcal{F}\subseteq\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha$.

Veamos que $\mathcal{F}$ es casi ajena. Sean f_h, $f_g\in\mathcal{F}$ tales que $f_h\ne f_g$ (h, $g\in{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$), entonces $h\ne g$, de modo que existe $\delta<\mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $h(\delta)\ne g(\delta)$. Tomemos $\alpha<\kappa$ tal que $h(\delta)$, $g(\delta)<\kappa_\alpha$. Si $\xi<\mathrm{cf}(\kappa)$ con $f_h(\xi)=f_g(\xi)$ entonces $\forall\beta<\mathrm{cf}(\kappa):(h(\beta),\,g(\beta)<\kappa_\xi\Longrightarrow h(\beta)=g(\beta))$; en consecuencia, $\kappa_\xi<\kappa_\alpha$, pues de lo contrario $h(\delta)$, $g(\delta)<\kappa_\alpha\le\kappa_\xi$, con lo cual $h(\delta)=g(\delta)$; por tanto, $\kappa_\xi<\kappa_\alpha$, y así $\xi<\alpha$.

Por ende, el conjunto $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid f_h(\xi) = f_g(\xi)\}$ está acotado por α, lo que implica que f_g y f_h son casi ajenas. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es casi ajena.

Para usar el lema 6.5.2, falta probar que $E := \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha| = \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Sean $A := \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \alpha \in \mathbf{Lim} \wedge \kappa_\alpha \textit{ es } \mathrm{cf}(\kappa)\textit{-fuerte}\}$ y $D := \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa_\xi)} = \kappa_\xi^+\}$. El objetivo es probar que A es un club en $\mathrm{cf}(\kappa)$ y que $A \cap D \subseteq E$, lo cual implicaría que E es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. En efecto: si A es un club en $\mathrm{cf}(\kappa)$, para cualquier club C en $\mathrm{cf}(\kappa)$, $C \cap A$ también sería un club, por lo cual $C \cap A \cap D \neq \emptyset$ (por hipótesis D es estacionario); y como $C \cap A \cap D \subseteq A \cap D \subseteq E$, resulta que $E \cap C \neq \emptyset$.

Veamos que $A \cap D \subseteq E$. Si $\alpha \in A$, entonces $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $\kappa_\alpha = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \alpha\}$ y la sucesión $(\kappa_\xi)_{\xi<\alpha}$ es estrictamente creciente —recordemos que $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es normal—; luego, por el teorema 4.5.11, $\mathrm{cf}(\kappa_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Tomemos una sucesión $(\nu_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)}$ de cardinales estrictamente creciente tal que $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa_\alpha) : 2 \leq \nu_\xi < \kappa_\alpha$ y $\kappa_\alpha = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \nu_\xi$. Como κ_α es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, $\forall \xi < \mathrm{cf}(\kappa_\alpha) : \nu_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\alpha$. Ahora, usando las desigualdades que acabamos de obtener, tenemos:

$$\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \leq \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \Big(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \nu_\xi\Big)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \Big(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \nu_\xi\Big)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \nu_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \kappa_\alpha = \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)}.$$

Concluimos que $\forall \alpha \in A : \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Luego, si $\alpha \in A \cap D$, entonces $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+$, y con ello $\alpha \in E$. Por tanto, $A \cap D \subseteq E$.

Definamos la función $l : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \mathrm{cf}(\kappa)$, por $l(\alpha) := \min\{\beta < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\beta\}$. Probaremos que $A = \mathbf{Lim} \cap \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid l[\alpha] \subseteq \alpha\}$, lo que va implicar que A es un club (ver lema 6.1.3). Si $\alpha \in A$ y $\xi \in l[\alpha]$; entonces $\alpha \in \mathbf{Lim}$, κ_α es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, y existe $\gamma < \alpha$ tal que $\xi = l(\gamma)$; luego $\kappa_\gamma < \kappa_\alpha$; con lo cual $\kappa_\gamma^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\alpha = \bigcup\{\kappa_\beta \mid \beta < \alpha\}$; de este modo, existe $\beta < \alpha$ tal que $\kappa_\gamma^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\beta$; por consiguiente, $\xi = l(\gamma) \leq \beta < \alpha$. Por tanto, si $\alpha \in A$, entonces $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $l[\alpha] \subseteq \alpha$. Por otra parte, si $\alpha \in \mathbf{Lim}$ y $l[\alpha] \subseteq \alpha$; entonces $\kappa_\alpha = \bigcup\{\kappa_\beta \mid \beta < \alpha\}$; luego, si $\nu < \kappa_\alpha$, existe $\beta < \alpha$ tal que $\nu < \kappa_\beta$, y como $l(\beta) \in l[\alpha]$, se sigue que $l(\beta) < \alpha$, y en consecuencia $\nu^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa_\beta^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_{l(\beta)} < \kappa_\alpha$; por lo cual κ_α es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte, y así $\kappa_\alpha \in A$. Concluimos, por tanto, que $A = \mathbf{Lim} \cap \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid l[\alpha] \subseteq \alpha\}$, así que, por el lema 6.1.3, A es un club en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

En resumen, $A \cap D \subseteq E$ donde A es un club y D es estacionario. En consecuencia,

$$E = \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid |^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha| = \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa_\xi^+\} \text{ es estacionario en } \mathrm{cf}(\kappa).$$

Por el lema 6.5.2, $|\mathcal{F}| \leq \kappa^+$, donde $\mathcal{F} = \{f_h \mid h \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa\}$. Notemos que si $h, g \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$, con $h \neq g$, entonces existe $\delta < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $g(\delta) \neq h(\delta)$; tomemos $\alpha < \mathrm{cf}(\alpha)$ de tal forma que $g(\delta), h(\delta) < \kappa_\alpha$; en consecuencia, $f_g(\alpha)(\delta) = g(\delta) \neq h(\delta) = f_h(\alpha)(\delta)$; así, $f_g \neq f_h$. Por tanto, $|\mathcal{F}| = |^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa| = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^+$; aparte, del teorema 5.1.3 b), $\kappa^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Por lo tanto, $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. †

Teorema 6.5.6 (Silver b)**.** *Si no se cumple la HCS, entonces el mínimo cardinal que no la cumple tiene cofinalidad numerable.*

Demostración. Sea κ el mínimo cardinal infinito que no cumple la HCS, entonces $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$ y $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \neq \kappa^+$. Por el teorema 5.1.3 b), $\kappa^+ \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Por tanto, $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$ y $\kappa^+ < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Además, κ es singular porque $\mathrm{cf}(\kappa) < 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, de lo que se deduce también que κ es un cardinal límite.

Vamos a hacer la prueba por contradicción: supongamos que $\mathrm{cf}(\kappa) > \aleph_0$.

Sea $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión normal de cardinal infinitos con rango cofinal en κ (tal sucesión existe por el teorema 4.5.16). Por la suposición de minimilidad de κ, todo cardinal infinito menor que κ cumple la HCS, de modo que el teorema 5.6.2 se satisface para cualesquiera $\mu, \nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$ con $\mu, \nu < \kappa$; esto implica que si $\nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$ y $\nu < \kappa$, entonces $\nu^{\mathrm{cf}(\kappa)} \in \{2^{\mathrm{cf}(\kappa)}, \nu^+, \nu\}$. Estamos suponiendo que $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$; y si $\nu \in \mathcal{C} \setminus \omega$ y $\nu < \kappa$, entonces $\nu^+ < \kappa$, por ser κ un cardinal límite. En consecuencia, tenemos que $\forall \nu \in \mathcal{C} \setminus \omega : (\nu < \kappa \Longrightarrow \nu^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa)$, esto es, κ es $\mathrm{cf}(\kappa)$-fuerte.

Nos interesa probar que $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa_\xi)} = \kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ para aplicar el lema 6.5.5. Como $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $2^{\aleph_0} \leq 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. Sea $\alpha_0 < \mathrm{cf}(\kappa)$ el mínimo ordinal tal que $2^{\aleph_0} < \kappa_{\alpha_0}$. Sabemos que $[\alpha_0, \mathrm{cf}(\kappa))$ es un club en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Por el lema 6.4.8, se cumple que

$$\sum := \{\beta < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \mathrm{cf}(\beta) = \aleph_0\} \text{ es estacionario en } \mathrm{cf}(\kappa).$$

Por tanto, $\sum \cap [\alpha_0, \mathrm{cf}(\kappa))$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Además, si $\alpha \in \sum \cap [\alpha_0, \mathrm{cf}(\kappa))$, resulta que $\mathrm{cf}(\alpha) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < \kappa_{\alpha_0} \leq \kappa_\alpha$; se observa que α es un ordinal límite, luego $\kappa_\alpha = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \alpha\}$; por consiguiente, del teorema 4.5.11, $\mathrm{cf}(\kappa_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) = \aleph_0$; en consecuencia, $2^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = 2^{\aleph_0} < \kappa_\alpha$; por lo cual $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+$, ya que la HCS se cumple para cardinales infinitos menores que κ. Lo anterior implica que $\sum \cap [\alpha_0, \mathrm{cf}(\kappa)) \subseteq \{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa_\xi)} = \kappa_\xi^+\}$, de este modo, $\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\xi^{\mathrm{cf}(\kappa_\xi)} = \kappa_\xi^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ (contiene un conjunto que es estacionario).

Ahora podemos aplicar el lema 6.5.5 para concluir que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$, lo cual es falso ya que κ no cumple la HCS. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$. †

Corolario 6.5.7 (Silver c)**.** *Si la HCS se cumple sobre los cardinales de cofinalidad numerable, entonces la HCS se cumple sobre todos los cardinales.*

Capítulo 7

Cardinales inaccesibles

En esta sección vamos a ver un tipo de cardinales cuya existencia no se puede demostrar en ZFE. La motivación viene del hecho de que todos los cardinales singulares son cardinales límite. Nos preguntamos, entonces, por la recíproca, ¿todo cardinal límite es singular? Sabemos que $\aleph_0$ es un cardinal límite y regular, pero ¿hay otros? La respuesta es que no se puede probar ni refutar la existencia de cardinales límite regulares, a excepción de $\aleph_0$. No vamos a probar esta afirmación aquí porque la teoría para desarrollarla es realmente amplia, aunque podemos estudiar varias propiedades de estos cardinales suponiendo su existencia.

7.1. Inaccesibilidad débil

Definición 7.1.1. Un cardinal κ es *débilmente inaccesible* si κ es no numerable, regular y un cardinal límite.

Este concepto fue dado por Hausdorff, aunque el término «inaccesible» se le atribuye a Kazimierz Kuratowski [7, pág. 16].

Teorema 7.1.1. *Si κ es un cardinal regular, entonces κ es débilmente inaccesible si y solo si $\kappa = \aleph_\kappa$.*

Demostración. Supongamos que κ es débilmente inaccesible. Se sabe que $\kappa \leq \aleph_\kappa$, pues la función $\aleph$ es estrictamente creciente. Además, κ es un ordinal límite, así que $\aleph_\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Para demostrar la desigualdad $\aleph_\kappa \leq \kappa$ usaremos inducción transfinita. Veamos que $\forall \alpha < \kappa : \aleph_\alpha < \kappa$. Por definición de débilmente inaccesible, $\aleph_0 < \kappa$. Si $\alpha < \kappa$ y $\aleph_\alpha < \kappa$, entonces $\aleph_{\alpha+1} < \kappa$ pues κ es un cardinal límite. Si β es un ordinal límite menor que κ tal que $\forall \alpha < \beta : \aleph_\alpha < \kappa$, entonces $\aleph_\beta = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\} < \kappa$ porque $\beta < \kappa = \operatorname{cf}(\kappa)$. Por el PIT, $\forall \alpha < \kappa : \aleph_\alpha < \kappa$, luego $\aleph_\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \leq \kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \aleph_\kappa$.

Supongamos que $\kappa = \aleph_\kappa$, entonces κ es claramente no numerable. Por ser κ un cardinal infinito se sigue que κ es un ordinal límite, así que $\aleph_\kappa$ es un cardinal límite, o sea, κ es un cardinal límite. Por lo tanto κ es débilmente inaccesible. †

En una función f, los elementos $x \in \operatorname{dom}(f)$ que cumplen que $f(x) = x$ se llaman *puntos fijos* de f. Los puntos fijos de la función $\aleph$ que son regulares son cardinales débilmente inaccesibles. ¿Y qué pasa con los puntos fijos singulares? El siguiente teorema muestra que hay muchos de ellos.

Teorema 7.1.2. *La clase de los puntos fijos singulares de la función álef, es una clase propia.*

Demostración. Sea β un ordinal infinito cualquiera. Definimos $\kappa_0 = \beta + 1$; $\kappa_1 := \aleph_{\kappa_0}$; y para $n < \omega$, sea $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$. Pongamos $\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}$. Probaremos que $\kappa = \aleph_\kappa$ y $\operatorname{cf}(\kappa) < \kappa$.

κ_0 es un ordinal, pero no es un cardinal, por tanto $\kappa_0 < \aleph_{\kappa_0} = \kappa_1$. Por el teorema 4.5.11, $\mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\omega) = \omega$; además, $\omega \leq \beta + \omega = \kappa_0 < \kappa_1 \leq \kappa$, con lo cual $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega < \kappa$. Por otro lado,
$$\aleph_\kappa = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \kappa\} = \sup\{\aleph_{\kappa_n} \mid n < \omega\} = \sup\{\kappa_{n+1} \mid n < \omega\} = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\} = \kappa.$$
Notemos también que $\beta < \kappa_0 \leq \kappa$.

Por tanto, para todo β existe un cardinal singular κ tal que $\kappa > \beta$, y $\kappa = \aleph_\kappa$. Por consiguiente, la clase de los puntos fijos singulares de la función $\aleph$ no está acotada en $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ y por ello forman una clase propia. †

Teorema 7.1.3. *Si κ es un cardinal infinito y no numerable, entonces, $\kappa = \aleph_\kappa$ si y solo si $|\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| = \kappa$.*

Demostración. Como $\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}} \subseteq \kappa$, entonces $|\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| \leq \kappa$.

Si $\kappa = \aleph_\kappa$, se tiene que $\{\aleph_\xi \mid \xi < \kappa\} \subseteq \aleph_\kappa = \kappa$, y como $\{\aleph_\xi \mid \xi < \kappa\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{C}}$, obtenemos que $\{\aleph_\xi \mid \xi < \kappa\} \subseteq \kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}} \subseteq \kappa$, en consecuencia, $\kappa = |\{\aleph_\xi \mid \xi < \kappa\}| \leq |\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| \leq \kappa$.

Supongamos que $|\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| = \kappa$. Como $\kappa >_c \aleph_0$, existe $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\aleph_\alpha = \kappa$, entonces
$$\kappa = |\kappa \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| = |\aleph_\alpha \cap \boldsymbol{\mathcal{C}}| = |\omega \cup \{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\}| = |\omega| + |\{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\}| = \aleph_0 + |\alpha| = \text{máx}\{\aleph_0, |\alpha|\}.$$
Lo anterior implica que $\aleph_0 = \kappa$ o $|\alpha| = \kappa$, pero κ no es numerable, así que $|\alpha| = \kappa$. De esto se sigue que $\alpha \leq \aleph_\alpha = \kappa = |\alpha|$ y, por consiguiente, $\kappa = |\alpha| = \alpha$. Así pues, $\aleph_\kappa = \aleph_\alpha = \kappa$. †

Teorema 7.1.4. *Si κ es débilmente inaccesible, entonces $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.*

Demostración. Vamos a probar que
$$\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} = 2^{<\kappa}.$$
Como $2 \leq \kappa$, entonces $\forall \lambda <_c \kappa : 2^\lambda \leq \kappa^\lambda$, por lo cual $\sup\{2^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} \leq \sup\{\kappa^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\}$, esto significa que $2^{<\kappa} \leq \kappa^{<\kappa}$. Se sabe que $\kappa \leq 2^{<\kappa}$ y $\forall \lambda <_c \kappa : 2^\lambda \leq 2^{<\kappa}$. Si $0 < \lambda <_c \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, por el teorema 5.2.3, tenemos que $\kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\}$; si además $\aleph_0 \leq \nu <_c \kappa$, entonces $\nu + \lambda = \text{máx}\{\nu, \lambda\} < \kappa$ y $2 \leq \nu \leq \lambda + \nu$, luego $\nu^{\lambda+\nu} = 2^{\lambda+\nu} \leq 2^{<\kappa}$, y así $\nu^\lambda \leq \nu^{\lambda+\nu} \leq 2^{<\kappa}$. En consecuencia,
$$\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} = \sup\{\nu^\lambda \mid \aleph_0 \leq \nu <_c \kappa\} \leq 2^{<\kappa}.$$
Así pues, $\kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\} \leq \kappa \cdot 2^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$ para todo $\lambda <_c \kappa$; y por ello $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} \leq 2^{<\kappa}$. Concluimos que $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$. †

A continuación se enuncian algunas propiedades acerca de clubes en cardinales inaccesibles:

Teorema 7.1.5. *Sea κ un cardinal débilmente inaccesible.*

a) Si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ es normal, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$ es un club en κ.

b) Si C es un club en κ, entonces $\{\lambda < \kappa \mid |C \cap \lambda| = \lambda\}$ es un club en κ.

Demostración. a) Pongamos $C := \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$.

Si $(\alpha_\xi)_{\xi<\beta}$ es una sucesión en C tal que $\alpha := \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\} < \kappa$, entonces, por el teorema 4.5.8,
$$f(\alpha) = f(\sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\}) = \sup\{f(\alpha_\xi) \mid \xi < \beta\} = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\} = \alpha,$$
luego $\alpha \in C$. Por tanto, C es cerrado en κ.

Dado $\beta < \kappa$, tomemos γ tal que $\beta < \gamma < \kappa$ y pongamos $\alpha := \sup\{f^n(\gamma) \mid n < \omega\}$. Como $\aleph_0 < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, resulta que $\alpha < \kappa$; y como f es estrictamente creciente, se cumple que $\beta < \gamma \leq f(\gamma) \leq \alpha$. Además, de la continuidad de f,
$$f(\alpha) = f(\sup\{f^n(\gamma) \mid n < \omega\}) = \sup\{f(f^n(\gamma)) \mid n < \omega\} = \sup\{f^{n+1}(\gamma) \mid n < \omega\} = \alpha.$$
Por tanto, $\beta < \alpha$ y $\alpha \in C$. Así pues, C no es acotado en κ.

b) Sea $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ una sucesión en $\{\lambda<\kappa \mid |C\cap\lambda|=\lambda\}$ tal que $\mu:=\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}<\kappa$. Se tiene que $C\cap\mu\subseteq\mu$, en consecuencia, $|C\cap\mu|\leq\mu$; además, $\forall\xi<\beta:\lambda_\xi\subseteq\mu$, de modo que $\forall\xi<\beta:$ $C\cap\lambda_\xi\subseteq C\cap\mu$, consiguientemente, $\forall\xi<\beta:\lambda_\xi=|C\cap\lambda_\xi|\leq|C\cap\mu|$, y con ello $\mu=\sup\{\lambda_\xi \mid \xi<\beta\}\leq|C\cap\mu|$; por lo tanto, $|C\cap\mu|=\mu$. Lo anterior prueba que $\{\lambda<\kappa \mid |C\cap\lambda|=\lambda\}$ es cerrado.

Por el teorema 6.1.4, existe una función normal $f:\kappa\longrightarrow C$ con $C=\operatorname{ran}(f)$. Por el inciso anterior $\{\alpha<\kappa \mid f(\alpha)=\alpha\}$ es un club en κ; también, $[0,\kappa)_{\mathcal{C}}$ es un club; por consiguiente, $\{\lambda<_c\kappa \mid f(\lambda)=\lambda\}$ es un club en κ. Si $\alpha<\kappa$, existe $\lambda<_c\kappa$ tal que $\alpha<\lambda$ y $f(\lambda)=\lambda$. Notemos que

$$f[\lambda]=\{f(\xi)\mid\xi<\lambda\}=\{f(\xi)\mid f(\xi)<f(\lambda)\}=\{c\mid c\in C\wedge c<f(\lambda)\}=C\cap f(\lambda)=C\cap\lambda.$$

Luego, como f es biyectiva, $\lambda=|f[\lambda]|=|C\cap\lambda|$. Así pues, C no es acotado. †

Una consecuencia del teorema anterior es que el conjunto $\{\lambda<\kappa \mid \aleph_\lambda=\lambda\}$ es un club en κ, pues la función $\aleph$ es normal y $\forall\xi<\kappa:\aleph_\xi<\aleph_\kappa=\kappa$.

7.2. Inaccesibilidad fuerte

Definición 7.2.1. Un cardinal κ no numerable es *límite fuerte* si κ es λ-fuerte para todo $\lambda<_c\kappa$.

Observación. λ es un cardinal límite fuerte si y solo si $\forall\rho,\nu<_c\lambda:\rho^\nu<\lambda$.

Teorema 7.2.1. *Si λ es un cardinal no numerable, entonces λ es límite fuerte si y solo si $\forall\nu<_c\lambda:$ $2^\nu<\lambda$.*

Demostración. Si λ es un cardinal límite fuerte, entonces $\rho^\nu<\lambda$ para cualesquiera $\rho,\nu<_c\lambda$; en particular, para $\rho=2$, se tiene que $2^\nu<\lambda$ para todo $\nu<_c\lambda$.

Supongamos que $\forall\nu<_c\lambda:2^\nu<\lambda$. Sean ν y ρ cardinales menores que λ. Tenemos varios casos:

i) Si ν y ρ son finitos, claramente $\rho^\nu<\lambda$.

ii) Si $\nu<\aleph_0$ y $\rho\geq\aleph_0$, entonces $\rho^\nu\in\{\rho,1\}$, por lo cual $\rho^\nu<\lambda$.

iii) Si $\nu\geq\aleph_0$ y $\rho\leq\nu$, por el corolario 4.3.5, $\rho^\nu\leq2^\nu<\lambda$.

iv) Si $\nu\geq\aleph_0$ y $\nu<\rho$, entonces $2\leq\nu\leq\nu+\rho$, luego $\rho^\nu\leq\rho^{\nu+\rho}$; pero también $2\leq\rho\leq\nu+\rho$ y $\nu+\rho\geq$ $\aleph_0$, en consecuencia, del teorema 4.3.4, $2^{\nu+\rho}=\rho^{\nu+\rho}$. Por tanto, $\rho^\nu\leq\rho^{\nu+\rho}=2^{\nu+\rho}<\lambda$ donde $\nu+\rho=\max\{\nu,\rho\}<\lambda$. †

Teorema 7.2.2. *La clase de los cardinales límite fuerte no está acotada en $\mathcal{R}$.*

Demostración. Sea μ un cardinal cualquiera. Definamos $(\kappa_n)_{n<\omega}$ como: $\kappa_0:=\max\{\mu,\aleph_0\}$, y $\kappa_{n+1}:=$ 2^{κ_n} para cada $n<\omega$. Vamos a probar que $\kappa:=\sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}$ es un cardinal límite fuerte. Notar que $(\kappa_n)_{n<\omega}$ es estrictamente creciente —$\kappa_n<2^{\kappa_n}=\kappa_{n+1}$—, todos los κ_n son infinitos y $\mu=\kappa_0<\kappa$.

Si $\rho,\nu\in\mathcal{C}$ con $\rho,\nu<\kappa$, entonces existe $n<\omega$ tal que $\rho<\kappa_n$ y $\nu<\kappa_n$. Luego $\rho^\nu\leq\kappa_n^{\kappa_n}=2^{\kappa_n}=$ $\kappa_{n+1}<\kappa$. Esto prueba que κ es límite fuerte.

Tenemos, por lo tanto, que para todo cardinal μ existe un cardinal límite fuerte κ tal que $\mu<\kappa$. †

Teorema 7.2.3. *Si κ es un cardinal límite fuerte, entonces $2^{<\kappa}=\kappa$ y $2^\kappa=\kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}$.*

Demostración. Por definición $2^{<\kappa}=\sup\{2^\nu \mid \nu<_c\kappa\}$. Al ser κ límite fuerte, $2^\nu<\kappa$ para todo $\nu<_c\kappa$, lo que nos dice que κ es una cota superior de $\{2^\nu \mid \nu<_c\kappa\}$. Ahora, si λ es un cardinal con $\lambda<\kappa$, entonces $\lambda<2^\lambda$, lo cual no implique que λ no es una cota superior de $\{2^\nu \mid \nu<_c\kappa\}$. Por tanto, $2^{<\kappa}=\sup\{2^\nu \mid \nu<_c\kappa\}=\kappa$

Como $2^{<\kappa}=\kappa$, entonces $(2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}(\kappa)}=\kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}$, y por el teorema 5.2.4, $2^\kappa=(2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}(\kappa)}=\kappa^{\operatorname{cf}(\kappa)}$. †

Definición 7.2.2. Un cardinal κ es *fuertemente inaccesible* si κ es regular, no numerable y un cardinal límite fuerte.

Teorema 7.2.4. *Todo cardinal fuertemente inaccesible es débilmente inaccesible. Además, si suponemos la HGC, entonces los conceptos de fuertemente inaccesible y débilmente inaccesible son equivalentes; específicamente, κ es un cardinal límite fuerte si y solo si κ es un cardinal límite.*

Demostración. Si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, por el teorema 7.2.1, $\forall \nu <_c \kappa : \nu^+ \leq 2^\nu < \kappa$, lo cual nos dice que κ es un cardinal límite y, por ende, es débilmente inaccesible.

Supongamos la HGC. Si κ es un cardinal débilmente inaccesible, se cumple que $\forall \nu \in \mathcal{C} \setminus \omega : (\nu < \kappa \Rightarrow 2^\nu = \nu^+ < \lambda)$, por lo cual κ es un cardinal límite fuerte y, en consecuencia, un cardinal fuertemente inaccesible. †

Lema 7.2.5. *Si κ es fuertemente inaccesible, entonces $\kappa^\lambda = \kappa$ para todo cardinal λ menor que κ y diferente de 0.*

Demostración. Si $0 < \lambda <_c \kappa$, como $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, por el lema 5.1.2,

$$\kappa^\lambda = \left| \bigcup \{ {}^\lambda \nu \mid \nu <_c \kappa \} \right| \leq \left| \bigcup_{\nu <_c \kappa} ({}^\lambda \nu) \times \{\nu\} \right| = \sum_{\nu <_c \kappa} \nu^\lambda.$$

Como κ es un límite fuerte, para todo cardinal $\nu < \kappa$ se tiene que $\nu^\lambda < \kappa$, por consiguiente,

$$\kappa^\lambda \leq \sum_{\nu <_c \kappa} \nu^\lambda \leq \sum_{\nu <_c \kappa} \kappa = \kappa.$$

Por tanto, $\kappa^\lambda \leq \kappa$, y claramente $\kappa \leq \kappa^\lambda$, en consecuencia, $\kappa^\lambda = \kappa$. †

Teorema 7.2.6. *a) Si κ es fuertemente inaccesible, entonces $\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$.*

b) Supongamos la HGC. Si κ es un cardinal límite no numerable, entonces κ es fuertemente inaccesible si y solo si $\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$.

Demostración. a) Si $\lambda <_c \kappa$ y λ es finito, claramente $\kappa^\lambda = \kappa$. Si $\aleph_0 \leq \lambda < \kappa$, tenemos que κ es λ-fuerte, por definición de límite fuerte, y como $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, por el teorema 5.3.3, $\kappa^\lambda = \kappa$. Por tanto,

$$\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa = |\mathcal{C} \cap \kappa| \cdot \kappa = \kappa.$$

b) La primera implicación se sigue del inciso a). Para probar que $\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa$ implica que κ es fuertemente inaccesible, vamos a proceder por contrarrecíproca. Supongamos que κ es un cardinal límite, no numerable, pero no es fuertemente inaccesible; entonces κ es singular o no es un cardinal límite fuerte. Al suponer la HGC, κ no es límite fuerte porque este concepto equivale al de cardinal límite. Por tanto $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Por el teorema 5.1.3 b), $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, luego

$$\sum_{\lambda <_c \kappa} \kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} + \sum_{\substack{\lambda <_c \kappa \\ \lambda \neq \mathrm{cf}(\lambda)}} \kappa^\lambda \geq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa.$$

†

Teorema 7.2.7. *Si κ es fuertemente inaccesible, entonces $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.*

Demostración. Si κ es fuertemente inaccesible, entonces κ es un cardinal límite. Si $\nu <_c \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, por el lema 5.1.2, tenemos que

$$\kappa^\nu = |{}^\nu\kappa| = \Big|\bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\nu\alpha\Big| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |{}^\nu\alpha| = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu$$
$$= \kappa\cdot\sup\{|\alpha|^\nu \mid \alpha < \kappa\} = \kappa\cdot\sup\{\mu^\nu \mid \mu <_c \kappa\} \leq \kappa\cdot\kappa = \kappa.$$

$\mu^\nu < \kappa$ porque κ es un cardinal límite fuerte. Así, para todo ν con $0 < \nu <_c \kappa$, se cumple que $\kappa^\nu \leq \kappa \leq \kappa^\nu$; consiguientemente $\forall\nu \in \boldsymbol{\mathcal{C}} : \kappa^\nu = \kappa$, y con ello $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu <_c \kappa\} = \sup\{\kappa \mid \nu <_c \kappa\} = \kappa$. †

Teorema 7.2.8. *Sea κ un cardinal singular infinito. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

a) Si κ no es límite fuerte, entonces $\kappa < 2^{<\kappa} = \kappa^{<\kappa}$.

b) Si κ es límite fuerte, entonces $\kappa^{<\kappa} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Demostración. a) Si κ no es límite fuerte, existe $\lambda_0 <_c \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^{\lambda_0}$ y $\lambda_0 \geq \aleph_0$. Claramente $2^\lambda \leq \kappa^\lambda$ para cada $\lambda <_c \kappa$. Si $\lambda_0 \leq \lambda <_c \kappa$, entonces $\kappa \leq 2^{\lambda_0} \leq 2^\lambda$, luego $\kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$. Por tanto, $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ siempre que $\lambda_0 \leq \lambda <_c \kappa$; En consecuencia,

$$2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda <_c \kappa\} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda_0 \leq \lambda <_c \kappa\} = \sup\{\kappa^\lambda \mid \lambda_0 \leq \lambda <_c \kappa\} = \kappa^{<\kappa}.$$

Como $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, usando el teorema 5.1.3, $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$.

b) Supongamos que κ es límite fuerte. Notemos que $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\lambda \mid \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda <_c \kappa\}$. Si $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda <_c \kappa$, por el teorema 5.2.2 y porque κ es límite fuerte, se sigue que $\kappa^\lambda = (\sup\{\nu^\lambda \mid \nu <_c \kappa\})^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Así, $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\lambda \mid \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda <_c \kappa\} \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, y es claro que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{<\kappa}$ pues $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. En conclusión, $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{<\kappa}$.

†

Teorema 7.2.9. *Si κ no es numerable, entonces, κ es fuertemente inaccesible si y solo si $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \kappa$ y $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \kappa$ para cualquier cardinal $\lambda < \kappa$ y cualquier sucesión $(\kappa_\xi)_{\xi<\lambda}$ de cardinales menores que κ.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que κ es fuertemente inaccesible. Sean $\lambda <_c \kappa$ y $(\kappa_\xi)_{\xi<\lambda}$ una sucesión de cardinales menores que κ. Si λ y todos los κ_ξ son finitos, entonces $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ y $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ son finitos, por lo cual ambos son menores que κ. Si λ o algún κ_ξ es infinito, como $\lambda < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $\rho := \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \lambda\} < \kappa$; luego $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda\cdot\rho = \text{máx}\{\lambda, \rho\} < \kappa$; y $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \prod_{\xi<\lambda} \rho = \rho^\lambda < \kappa$ pues κ es limite fuerte.

$\Leftarrow$] Supongamos que para cualquier cardinal $\lambda < \kappa$ y cualquier sucesión $(\kappa_\xi)_{\xi<\lambda}$ de cardinales menores que κ, se cumple que $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \kappa$ y $\prod_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \kappa$. Si λ y ρ son cardinales menores que κ, aplicando la hipótesis para la sucesión constante $(\rho)_{\xi<\lambda}$, tenemos que $\rho^\lambda = \prod_{\xi<\lambda} \rho < \kappa$. Por tanto, κ es un cardinal límite fuerte. Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, entonces κ es un cardinal límite y existe una sucesión $(\alpha_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ de ordinales menores que κ tales que $\sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$; tomando $\kappa_\xi := |\alpha_\xi|^+$ para cada $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, tenemos que $\kappa_\xi < \kappa$ y $\alpha_\xi \leq \kappa_\xi$ si $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, en consecuencia, $\sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$; por consiguiente, $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \mathrm{cf}(\kappa)\cdot\sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \mathrm{cf}(\kappa)\cdot\kappa = \kappa$; pero esto no es posible ya que $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \kappa$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Así, demostramos que κ es regular y límite fuerte, y desde un principio estamos suponiendo que κ no es numerable; de este modo, κ es fuertemente inaccesible. †

Definición 7.2.3. La *función bet*, $\beth : \boldsymbol{\mathcal{R}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}} \setminus \omega$, está definida como $\beth(0) := \aleph_0$, $\beth(\alpha+1) := 2^{\beth(\alpha)}$ y $\beth(\gamma) := \sup\{\beth(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \sup\{2^{\beth(\alpha)} \mid \alpha < \gamma\}$ si γ es un ordinal límite. Escribiremos $\beth_\alpha$ en vez de $\beth(\alpha)$.

Por el teorema 4.5.6 a), la función bet es estrictamente creciente.

Teorema 7.2.10. *La hipótesis generalizada del continuo equivale a que las funciones $\beth$ y $\aleph$ sean iguales.*

Demostración. Supongamos la HGC. Por definición, $\beth_0 = \aleph_0$. Si $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ tal que $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$, entonces $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Si α es un ordinal límite tal que $\forall \gamma < \alpha : \beth_\gamma = \aleph_\gamma$, resulta que $\beth_\alpha = \sup\{\beth_\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \sup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \aleph_\alpha$. Por el PIT, $\forall \gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}} : \beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

Supongamos que $\beth = \aleph$. Para cada $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}$. †

Teorema 7.2.11. *Los cardinales límite fuerte son exactamente los de la forma $\beth_\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{Lim}$.*

Demostración. Sea α un ordinal límite diferente de 0, entonces $\beth_\alpha = \sup\{\beth_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$. Si $\lambda < \beth_\alpha$ con $\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$, existe $\gamma < \alpha$ tal que $\lambda < \beth_\gamma$, en consecuencia $\gamma+1 < \alpha$ y $2^\lambda \leq 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} < \beth_\alpha$. Por tanto $\beth_\alpha$ es límite fuerte.

Por otra parte, sea κ un cardinal límite fuerte. Como $\beth$ es estrictamente creciente, $\kappa \leq \beth_\kappa < \beth_{\kappa+1}$, de modo que existe el mínimo ordinal α tal que $\kappa < \beth_\alpha$. $\alpha \neq 0$ pues κ no es numerable. Si α es un ordinal límite diferente de 0, entonces $\kappa < \beth_\alpha = \sup\{\beth_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$, lo cual implicaría que existe $\gamma < \alpha$ tal que $\kappa < \beth_\gamma < \beth_\alpha$, pero esto no puede ser por la minimalidad de α. Por tanto $\alpha = \beta+1$ para algún $\beta \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\beta < \alpha$, en consecuencia $\beth_\beta \leq \kappa < \beth_\alpha$. Si $\beth_\beta < \kappa$, como κ es límite fuerte, tendríamos que $\beth_\alpha = \beth_{\beta+1} = 2^{\beth_\beta} < \kappa$, pero $\kappa < \beth_\alpha$. Por tanto $\beth_\beta = \kappa$. β es un ordinal límite, porque si $\kappa = \beth_{\gamma+1}$ para algún $\gamma \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, entonces $\kappa = \beth_{\gamma+1} = 2^{\beth_\gamma}$, con $\beth_\gamma < \kappa$, pero contradiría la hipótesis de que κ es límite fuerte. Por tanto β es un ordinal límite tal que $\beth_\beta = \kappa$. †

Teorema 7.2.12. *Un cardinal regular κ es fuertemente inaccesible si y solo si $\kappa = \beth_\kappa$.*

Demostración. Supongamos que κ es fuertemente inaccesible. Por el teorema anterior, $\beth_\kappa$ es un cardinal limite fuerte y existe un ordinal límite γ tal que $\beth_\gamma = \kappa$. Además, $\kappa \leq \beth_\kappa$. Por el teorema 4.5.11 y dado que $\beth_\gamma = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ y la función bet es estrictamente creciente, $\mathrm{cf}(\beth_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$. Por todo lo anterior, $\gamma \leq \beth_\gamma = \kappa = \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\beth_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma) \leq \gamma$, en consecuencia $\kappa = \gamma$.

Si $\kappa = \beth_\kappa$; entonces, κ es un cardinal límite fuerte, por el teorema anterior; y como $\aleph_0 = \beth_0 < \beth_\kappa$, se sigue que κ no es numerable. Por tanto, κ es fuertemente inaccesible. †

7.3. Otros cardinales inaccesibles

En esta última sección vamos a mostraremos muchos más tipos de cardinales llamados *cardinales grandes*, justo para ver la gran riqueza de conceptos que hay en la aritmética cardinal.

Los siguientes cardinales fueron estudiados por el matemático Paul Mahlo inspirado por el trabajo Hausdorff [7, pág. 36]:

Definición 7.3.1. Para κ cardinal infinito:

(*i*) κ es *débilmente* 0-*inaccesible* si κ es regular;

(*ii*) dado $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, κ es *débilmente* $(\alpha+1)$-*inaccesible* si κ es regular y un punto límite de clase de los cardinales débilmente α-inaccesible;

(*iii*) si $\alpha \in \mathbf{Lim}$, κ es *débilmente* α-*inaccesible* si κ es débilmente δ-inaccesible para todo $\delta < \alpha$.

Se puede demostrar, por inducción, que si κ es débilmente α-inaccesible y $\beta < \alpha$, entonces κ también es débilmente β-inaccesible. Además de que los cardinales débilmente 1-inaccesible son precisamente los cardinales débilmente inaccesibles, de acuerdo a la definición 7.1.1.

Los siguientes cardinales, definidos por Mahlo, usaron por primera vez el concepto de ser estacionario:

Definición 7.3.2. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es *débilmente de Mahlo* si el conjunto $\{\rho <_c \kappa \mid \rho \text{ es regular}\}$ es estacionario en κ.

Una primera característica de estos cardinales es:

Teorema 7.3.1. *Si κ es débilmente Mahlo, entonces κ es regular y es κ-débilmente inaccesible.*

Se definen a partir de los cardinales Mahlo otros cardinales de forma similar a los α-débilmente inaccesible:

Definición 7.3.3. Si $\kappa \,_c\!> \aleph_0$, entonces:

(i) κ es *débilmente* 0-*Mahlo* si κ es regular;

(ii) κ es *débilmente* $(\alpha+1)$-*Mahlo* si $\{\lambda <_c \kappa \mid \lambda \text{ es débilmente } \alpha\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ;

(iii) κ es *débilmente α-Mahlo* si κ es *débilmente δ-Mahlo* para todo $\delta < \alpha$ con $\alpha \in \mathbf{Lim}$.

Similarmente, se cumple que si κ es α-débilmente Mahlo y $\beta < \alpha$, entonces β-débilmente Mahlo También hay una versión fuerte de los cardinales Mahlo:

Definición 7.3.4. Un cardinal κ es *fuertemente de Mahlo* si $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ es fuertemente inaccesible}\}$ es estacionario en κ.

Existen asimismo cardinales fuertemente α-inaccesibles y α-Mahlo:

Definición 7.3.5. Para κ cardinal infinito:

(i) κ es *fuertemente* 0-*inaccesible* si κ es débilmente inaccesible;

(ii) dado $\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, κ es *fuertemente* $(\alpha+1)$-*inaccesible* si κ es débilmente inaccesible y un punto límite de clase de los cardinales fuertemente α-inaccesible;

(iii) si $\alpha \in \mathbf{Lim}$, κ es *fuertemente α-inaccesible* si κ es fuertemente δ-inaccesible para todo $\delta < \alpha$.

Definición 7.3.6. Si $\kappa \,_c\!> \aleph_0$, entonces:

(i) κ es *fuertemente* 0-*Mahlo* si κ es fuertemente inaccesible;

(ii) κ es *fuertemente* $(\alpha+1)$-*Mahlo* si $\{\lambda <_c \kappa \mid \lambda \text{ es fuertemente } \alpha\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ;

(iii) κ es *fuertemente α-Mahlo* si κ es *fuertemente δ-Mahlo* para todo $\delta < \alpha$ con $\alpha \in \mathbf{Lim}$.

Es posible definir otros cardinales grandes como los cardinales débilmente compactos, los cardinales medibles, los fuertemente compactos, los supercompactos y los cardinales enormes...

Los cardinales grandes son importantes en la teoría de conjuntos pues se usan para probar problemas de consistencia. Por ejemplo, la negación de la hipótesis de los cardinales singulares implica la consistencia de que existan infinitos cardinales débilmente compactos, y cada cardinal débilmente compacto κ es fuertemente κ-Mahlo. En consecuencia, para poder demostrar la consistencia de $\neg$HCS es necesario suponer la consistencia de que existan cardinales débilmente compactos [4, pág. 413]. Además, se ha demostrado que la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible implicaría la consistencia de ZFE, por lo que dicha existencia no puede probarse [3, pág. 71].

Bibliografía

[1] Keith Devlin. *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory*. Springer-Verlag New York, 1993. 194 págs. DOI: 10.1007/978-1-4612-0903-4.

[2] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos. Una introducción*. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2003. 342 págs. URL: https://books.google.com.mx/books?id=ulN6AAAACAAJ.

[3] Michael Holz, Karsten Steffens y Edmund Weitz. *Introduction to cardinal arithmetic*. Birkhäuser Basel, 1999. 304 págs. DOI: 10.1007/978-3-0346-0330-0.

[4] Carlos Ivorra Castillo. *Lógica y teoría de conjuntos*. 2016. 446 págs. URL: https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf.

[5] Thomas Jech. *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 772 págs. DOI: 10.1007/3-540-44761-X.

[6] Thomas Jech. «Singular cardinals and the pcf theory». En: *The Bulletin of Symbolic Logic* 1.4 (1995), págs. 408-424. DOI: 10.2307/421130. URL: https://www.jstor.org/stable/i217390.

[7] Akihiro Kanamori. *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. 538 págs. DOI: 10.1007/978-3-540-88867-3.

[8] José Ramón Ortiz. «El concepto de infinito». En: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* 1.2 (1994), págs. 59-81. URL: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol1/vol1n2p59-81.pdf.

Índice alfabético