BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LAS SOLUCIONES QUE DAN LOS ALUMNOS A UN ACERTIJO MATEMÁTICO: UN ESTUDIO DE CASO CON LOS PARTICIPANTES EN EL CONCURSO ESTATAL DE TALENTOS EN FÍSICA.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

MARTHA PATRICIA VELASCO ROMERO

DIRECTOR DE TESIS

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

CODIRECTORA DE TESIS

DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA

DICIEMBRE 2017

La tesis fue realizada como una parte del proyecto "***Aprendizaje activo de la física y de las matemáticas: El diseño y la implementación de actividades y posibles predictores del desempeño estudiantil***" financiado por la VIEP de la BUAP en el año 2017.

Resumen

La importancia de los acertijos matemáticos hoy en día se ven reflejados en su uso, desde los problemas recreativos en libros de texto para atraer a los alumnos a apreciar la belleza de las matemáticas hasta las pruebas de reflexión cognitiva que se emplean en entrevistas de trabajo de empresas mundiales.

Los humanos usan dos sistemas de razonamiento al enfrentar un problema: el “pensamiento rápido” y “pensamiento lento” (Kahneman, 2011). El “pensamiento rápido” es intuitivo, emotivo, sin esfuerzo y sin control consciente. Al contrario, el “pensamiento lento” es una actividad mental controlada, llena de esfuerzo y abierta hacia las consideraciones lógicas y complejas.

En este trabajo se analizan los diagramas y las soluciones del acertijo matemático: “el problema del caracol” de los alumnos de secundaria que participaron en el Concurso Estatal de Talentos en Física en el año 2017.

Las matemáticas son el alfabeto

con el que Dios ha escrito el universo.

Galileo Galilei

Agradecimientos

A mi familia que ha sido el pilar de muchos sueños: Martha, Avelino, Andrea, Leticia, Guadalupe y Mateo.

Maestro Raúl Cuellar del Águila, gracias por la confianza, los consejos y paciencia. Dr. Josip Slisko Ignjatov, Dra. Honorina Ruíz Estrada y Dra. Araceli Juárez Ramírez, gracias por guiarme en este trabajo. A los profesores que me guiaron en esta etapa en especial al Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez y Lic. Jaime Badillo Márquez.

A mis amigos, que han sido mi segunda casa durante este camino. Invaluables en consejo, trabajo y esfuerzo: Mary, Fer, Ale, Cris, Kike, Ricardo, Iván, Kary, Carmen, Triny, Mariana, Olivia, Norma, Tati, Andrea, Severiano, Pedro, Juanita, Dionisia, Gerardo, José, Isme y Lupita; y a los muchos que encontré al paso.

Finalmente a mi pequeña familia peluda y no tan peluda, a mi pequeño ángel que cuida de nuestro camino y a Job.

“Voilà”, hemos terminado esta sección.

Introducción

Los humanos son los únicos animales que crean y resuelven acertijos o rompecabezas desde tiempos inmemorables. Su popularidad y larga existencia revelan la profunda obsesión con lo desconocido y misterioso (Danesi, 2002).

En el Concurso Estatal de Talentos de Física se agregó un acertijo matemático: "el problema del caracol", este acertijo es un problema matemático no común. El Concurso está dirigido a alumnos de Educación Básica Secundaria entre edades de 12 a 15 años, en el cuál se seleccionan a 12 representantes que participarán en el Concurso Nacional de Talentos de Física que organiza la Sociedad Mexicana de Física.

En este trabajo se investigó la relación que existe entre la puntuación del participante que obtuvo en el Concurso Estatal de Talentos de Física de 2017 y el desempeño alcanzado durante el acertijo matemático.

El acertijo matemático se tomó de un estudio mexicano (Cenobio *et al.,* 2017) y dice lo siguiente:

> "Sin revelar sus razones, un caracol decide trepar un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche resbala 2 metros. ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?" (Cenobio *et al.,* 2017).

En este estudio mexicano (Cenobio *et al.,* 2017), las respuestas al acertijo matemático fueron de opción múiltiple.

Existen otros estudios del problema del caracol:

- El estudio italiano (D'Amore, 1995). Se analizaron los dibujos de las soluciones del problema del caracol.
- El estudio australiano (Diezmann C. M., 1997). En este estudio se consideraron dos versiones del problema del caracol, donde los protagonistas eran un koala y una rana; además, generar un dibujo no garantiza la solución correcta del problema, pero si aumenta la posibilidad de que el problema sea conceptualizado correctamente (van Essen, 1990).
- El estudio alemán (Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R., 2015). Donde se preparó a los estudiantes en el uso de diagramas para solucionar problemas no rutinarios, donde se incluyó otra versión del problema del caracol.

A través de la historia se han formulado problemas semejantes al acertijo del caracol.

Fibonacci escribió en 1202 en su libro "*Liberabaci"* un problema con un león que subía por un hoyo:

- Calindri, en su libro *"Arithmetica"* publicado en 1491, usaba el mismo contexto, pero el animal que subía era una serpiente.
- Adam Riese, matemático alemán fue el primero en formular al caracol como el animal que trepaba (Deschauer, 2013):
- El problema del caracol ha atraído a matemáticos conocidos. Peano incluye el problema del caracol en *"Giochi di aritmética e problema interessanti (1925)"*como sigue (Peano, 1925):
- Arnold lo han incluido en un libro que contiene 77 problemas seleccionados por él mismo, traducido en cinco idiomas distintos (Arnold, 2004).

English (English, 1996), define un problema no rutinario como aquel que no implica cálculos rutinarios, pero si la aplicación de cierta estrategia, en donde se incluyen los diagramas. Los problemas no rutinarios se consideran más complicados y difíciles que los problemas rutinarios (Schoenfeld, 1992).

Polya define un diagrama como una representación visual que presenta información distribuida en espacios (Polya, 1965), mientras que Diezmann los define como representaciones estructuradas que representan los componentes de la situación de manera organizada (Diezmann. C., 2001). Un diagrama es exitoso si se representa la estructura del problema eficazmente (Booth, 2000).

Los humanos usan dos sistemas de razonamiento al enfrentar un problema: el "pensamiento rápido" y "pensamiento lento" (Kahneman, 2011). El "pensamiento rápido" es intuitivo, emotivo, sin esfuerzo y sin control consciente. Al contrario, el "pensamiento lento" es una actividad mental controlada, llena de esfuerzo y abierta hacia las consideraciones lógicas y complejas.

Siguiendo a Kahneman, un buen acertijo matemático activa en muchas personas el pensamiento rápido que llamaremos "Sistema 1" el cual lleva a una respuesta "obvia" pero incorrecta. La respuesta correcta se puede obtener solamente usando el pensamiento lento el cual llamaremos "Sistema 2", ya que analiza críticamente todos los detalles de la situación referente al problema (Kahneman, 2011).

En consonancia con Jim Holtnov "El que acepta la historia fácil pero poco confiable sobre el mundo es el sistema 2 y se alimenta de ella el sistema 1. Aunque el Sistema 2 se cree a sí mismo donde está la acción, el Sistema automático 1 es el héroe del libro de Kahneman". En palabras de Kahneman, "Yo soy mi yo que se recuerda, y el yo que experimenta, que vive, es como un extraño para mí" (Holtnov, 2011).

En el capítulo 1 se presentan las versiones a través de la historia del problema del caracol, así como los estudios publicados en revistas internaciones. También se presenta la justificación de esta tesis.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, principalmente se muestra del trabajo de Kahneman en su libro *"Thinking, fast ans slow"*, así como el uso de los diagramas en problemas matemáticos.

En el capítulo 3 se analizaron y clasificaron las respuestas del acertijo matemático. Se examinó el tipo de pensamiento que se usó en la resolución del acertijo matemático. Dentro del proceso de clasificación de las respuestas, se compararon e interpretaron el uso de los diagramas para la solución correcta.

Finalmente en el capítulo 4 tenemos el estudio de la comparación entre los puntajes obtenidos en el Concurso Estatal de Talentos en Física y las respuestas del acertijo matemático.

Índice

Capítulo 1

Antecedentes y Justificación

1.1. Antecedentes

Hay diversos estudios hechos con versiones distintas del problema del caracol.

1.1.1. El estudio italiano

En Italia la educación es obligatoria de los 6 a los 16 años y se divide en tres etapas fundamentales: primaria, secundaria y superior. D'Amore hizo un estudio de exploración cualitativo, donde se recolectaron y analizaron dibujos generados de la resolución del problema del caracol. Estos dibujos fueron hechos por estudiantes de nivel primaria (D'Amore, 1995).

1.1.2. El estudio australiano

Un estudio experimental de intervención realizado en Australia a 12 estudiantes cuya edad promedio era de 10.25 años, estos estudiantes eran de quinto año (Diezmann C. M., 1997).

El uso de un diagrama en la solución de un problema puede asumir dos roles importantes: el de representar la estructura del problema, así como base para el desarrollo de un plan de trabajo para llegar a la solución. Generar un dibujo no garantiza la solución correcta del problema, pero si aumenta la posibilidad de que el problema sea conceptualizado correctamente (van Essen, 1990).

A pesar de que un diagrama puede ayudar en la resolución de un problema, su uso entre los estudiantes no es popular, es decir, aunque se le sugiera al estudiante el uso de un diagrama, lo llega a considerar inadecuado.

La ventaja de generar un diagrama se basa en el hecho de mejorar la conceptualización del problema. Sin embargo, al ver la estructura de un problema, el diagrama que se puede generar a partir del problema no tiene por qué ser único y correcto.

Dentro del estudio se planteó la hipótesis de qué después de un programa de 12 sesiones de media hora cada una, se mejoraría la generación de diagramas, los estudiantes no fueron instruidos específicamente a usar diagramas, sin embargo, cuando su uso era espontaneo por parte del estudiante se le dieron nuevas sugerencias que referían al uso de algún diagrama.

En este estudio se usaron dos versiones del problema: en la primera versión del problema un koala subía un árbol, en la segunda versión del problema una rana subía una pared (Diezmann C. M., 1997).

El problema del Koala dice lo siguiente:

> "Un koala soñoliento quiere subir a la cima de un árbol que tiene 10 metros de altura. Cada día el Koala sube 5 metros, pero cada noche mientras duerme, retrocede 4 metros. A esta velocidad, ¿cuántos días tardará el koala en llegar a la cima?"

El problema de la rana:

> "Una rana estaba tratando de salir de un pozo. Cada vez que la rana salta, sube cuatro filas de ladrillos, pero debido a que los ladrillos eran resbalosos, se desliza una fila hacia abajo. ¿Cuántos saltos tendrá que hacer la rana si el pozo tiene 22 filas de altura?

Antes del curso, el principal problema que se pudo identificar en este estudio estaba relacionada a la dificultad de representar la estructura del problema y en la utilidad del diagrama, ya que el estudiante no pensaba que ayudaría en algo o que el dibujo no alcanzaría en el espacio que tenía para resolver el problema. Después del curso, hubo un cambio positivo hacia el uso de diagramas.

1.1.3. El estudio alemán

Los participantes de este estudio fueron alemanes de cuarto año de primaria, con una edad promedio de 9.21 años. El total de alumnos fue de 199, de los cuales 103 eran mujeres y 96 hombres. Durante la resolución del problema fue más significativo el uso de dibujos que el de tablas (Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R., 2015).

Esta es la versión del problema del caracol:

> "Un caracol se encuentra en un pozo de 24 metros de profundidad quiere subir hasta la cima del pozo. Cada día se arrastra 6 metros hacia arriba del pozo y se desliza por la noche la mitad de distancia que se arrastró durante el día. El caracol empieza a subir el lunes por la mañana. ¿En qué día llegará el caracol a la cima del pozo?

La dificultad principal del problema anterior radica en la necesidad de entender toda la situación descriptiva que lo acompaña, no es sólo sumar y restar los datos que nos dan, ni se trata de sólo dividir 24 entre 3. Un modelo mental adecuado a este problema es tener en cuenta que el caracol cuando alcance la cima del pozo, este ya no retrocederá durante la noche.

Dentro de este estudio se incluyeron problemas de combinatoria, problemas de comparación y movimiento; estos fueron 12 problemas, 4 de cada tipo. Los escenarios y números variaban entre cada actividad. Durante el experimento se dividió al grupo en dos, un grupo experimental con 159 estudiantes y un grupo control que contó con 40 estudiantes. El grupo control no contó con ninguna representación externa para resolver los problemas.

Se debe de fomentar un programa de enseñanza temprana donde intervenga el uso adecuado de diagramas como son dibujos y tablas para representar los esquemas de los problemas y tener una mejor administración cognitiva.

1.1.4. El estudio mexicano

Un estudio mexicano (Cenobio *et al.*, 2017) se llevó a cabo con alumnos de secundaria y preparatoria de edades distintas. Ellos contestaron un test de dos versiones del problema del caracol de opción múltiple. En una versión la respuesta correcta se encontraba como primera opción (N=68 estudiantes) y en la otra versión como última opción (N=81 estudiantes).

La versión del problema del caracol es la misma que se analiza en este estudio (Anexo 2). Las respuestas que se dieron como opción múltiple fueron: 8 días y 7 noches, 9 días y 8 noches, 10 días y 9 noches; 10 días y 10 noches. En este estudio se ve la influencia de la posición de la respuesta correcta en un test de opción múltiple (Cenobio *et al.*, 2017).

1.1.5. El problema del caracol a través de la historia

A través de la historia se han formulado problemas semejantes al acertijo del caracol. En la edad media, Fibonacci escribió en 1202 en su libro "*Liberabaci"* un problema con un león que subía por un hoyo:

> "*Un león estaba en un hoyo, cuya profundidad es de 50 palmeras, y sube diariamente 1/7 de palma y desciende 1/9. Se busca en cuantos días pueda dejar el pozo el león".*

Calindri, en su libro *"Arithmetica"* publicado en 1491, usaba el mismo contexto, pero el animal que subía era una serpiente.

Adam Riese, matemático alemán fue el primero en formular al caracol como el animal que trepaba (Deschauer, 2013):

> *"Un caracol está en un pozo de profundidad de 32 codos, cada día sube 4 2/3 de codo y cada noche baja 3 ¾. ¿Cuántos días después saldrá el caracol?".*

El problema del caracol ha atraído a matemáticos conocidos. Peano incluye el problema del caracol en *"Giochi di aritmética e problema interessanti (1925)"*como sigue (Peano, 1925):

> "*Un caracol sube a lo largo de una pared de 5 metros. Cada día sube 3 metros y desciende 2, ¿después de cuántos días el caracol llegará a la parte superior de la pared?*

Arnold lo han incluido en un libro que contiene 77 problemas seleccionados por él mismo, traducido en cinco idiomas distintos. Estos problemas favorecen el desarrollo del pensamiento, entre ellos se encuentra la versión siguiente del problema del caracol (Arnold, 2004):

> *"Durante el día un caracol sube 3 metros por un poste y durante la noche, cayendo dormido, accidentalmente baja 2 metros. Si el poste tiene 10 metros de altura y un dulce delicioso está en la parte superior, ¿en cuántos días llegará el caracol?*

El problema del caracol es popular en la web, y los animales que trepan la pared, pozo o árbol son diversos, como por ejemplo: monos, serpientes, ranas, caracoles, marsupiales, etc.

1.2. Objetivo general y objetivos específicos

1.2.1. Objetivo general

En este trabajo se investigará la relación que existe entre la puntuación del participante que obtuvo en el Concurso Estatal de Talentos de Física de 2017 y el desempeño alcanzado durante el acertijo matemático, "el problema del caracol".

1.2.2. Objetivos específicos

- Analizar y clasificar las respuestas del acertijo matemático de los alumnos que participaron en el Concurso Estatal de Talentos en Física de 2017.
- Examinar el tipo de pensamiento que se usó para la resolución del acertijo matemático.
- Clasificar, comparar e interpretar el uso de diagramas para la resolución correcta del problema del caracol.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. El sistema 1 y el sistema 2

Cuando una persona se enfrenta a un problema: por ejemplo, el decidir una jugada de ajedrez o el invertir en acciones de una compañía, el pensamiento intuitivo hace lo mejor que puede en la toma de decisiones. Sí el individuo tiene una experiencia relevante pasada, reconocerá la situación y es probable que la solución intuitiva llegue a su mente y esta sea correcta. La búsqueda espontanea de una de una solución intuitiva, a veces fracasa.

El pensamiento rápido incluye dos variantes del pensamiento intuitivo: el experto y el heurístico, así como, las actividades mentales puramente automáticas de la percepción y de la memoria.

Durante varios años los psicólogos han mostrado interés por dos modos de pensamiento: el pensamiento rápido y el pensamiento lento o, en términos generales, el uso de dos sistemas de razonamiento, llamados “el sistema 1” y “el sistema 2” (Frankish, 2010).

Kahneman y Tversky hicieron una serie de experimentos ingeniosos que revelaron más de veinte prejuicios cognitivos, entre los cuales se destacan los siguientes: el efecto anclaje, que es nuestra tendencia a ser influenciado en la toma de decisiones, y generalmente no se maximiza la utilidad (Kahneman, 2011). Además, el Sistema 1 utiliza la asociación y la metáfora para producir un borrador rápido y sucio de la realidad, mientras que el Sistema 2 utiliza para llegar a creencias explícitas y opciones razonadas. El sistema 1 propone, el Sistema 2 dispone, pero se cansa rápidamente y es perezoso.

2.1.1. El sistema 1: “Pensamiento rápido”

El sistema 1 opera de manera automática y rápida, con casi nada de esfuerzo y ninguna sensación de control voluntario. Puede generar patrones de pensamientos sorprendentemente complejos, pero sin orden. Algunos ejemplos del uso del pensamiento rápido en nuestra vida cotidiana son los siguientes:

- ✓ 14x18 pensar la operación que se debe hacer para encontrar el resultado.
- ✓ Percibir la lejanía de un objeto a otro.
- ✓ Detectar alegría en la voz.

Algunas de las capacidades del sistema 1 incluyen:

- ✓ Destrezas innatas que compartimos con otros animales.

- ✓ La percepción de nuestro entorno: orientación, reconocimiento de objetos, miedo, etc.
- ✓ Las actividades que se vuelven rápidas y automáticas, por ejemplo: amarrarse las agujetas.
- ✓ Asociación de ideas, por ejemplo la capital de un estado del país.
- ✓ Interpretar y entender matices dentro de la sociedad.

Este conocimiento se almacena en la memoria sin intención ni trabajo; e incluso algunas de estas actividades son totalmente involuntarias.

El sistema 1, entiende el lenguaje y tiene acceso a categorías de normas relativas que especifican el rango de valores aprobados así como de los casos típicos, puede representarlos en conjuntos con normas y prototipos por separado. Es como un agente con ciertos rasgos y preferencias y otras veces como una máquina asociativa que representa la realidad mediante una compleja red de vínculos. En ausencia de un contexto explícito, el sistema 1 genera un contexto probable con ideas activadas en la memoria asociativa.

Tras un adecuado entrenamiento, puede producir respuestas e intuiciones. Es radicalmente insensible a la cualidad y a la cantidad de información que da lugar a las impresiones y las intuiciones, sin embargo, asocian una sensación de facilidad cognitiva a ilusiones de verdad, sensaciones placenteras y vigilancia reducida. Es capaz de distinguir lo sorprendente de lo normal.

El sistema 1 se inclina a creer y confirmar, ignora la ambigüedad y elimina la duda. Se centra principalmente en la evidencia existente e ignora la evidencia ausente, con ello genera un conjunto limitado de evaluaciones básicas. A su vez, da importancia a las probabilidades bajas, como consecuencia, responde más a las probabilidades bajas que a las ganancias; es más sensible a los cambios de estado ya que exagera la conciencia emocional.

En pocas ocasiones el sistema 1 calcula más de lo deseado, además de sustituir una pregunta difícil por una más fácil.

2.1.2. El sistema 2: "Pensamiento lento"

Se centra principalmente en la atención en las actividades mentales forzadas que lo demandan. En estos se incluyen: los cálculos complejos, las experiencias en la manera de actuar, elegir y concentración.

El sistema 2 requiere de atención en el momento donde se desarrolla la actividad, por ejemplo:

- ✓ Estar preparado al disparo de salida en una carrera de velocidad.
- ✓ Escuchar la voz de una persona en un concierto de rock.
- ✓ Caminar más rápido de lo usual durante un tiempo prolongado.
- ✓ Contar el número de veces que aparece la letra "a" en esta línea.

- ✓ Estacionar un auto en un espacio estrecho.
- ✓ Buscar a una persona entre una multitud.
- ✓ Manejar un automóvil en horas pico.

Si por alguna razón la actividad que se está llevando a cabo no tiene la atención suficiente, esta actividad se realizará de manera deficiente o no se podrá realizar.

2.1.3. La relación entre ambos sistemas

El sistema 1 hace continuamente sugerencias al sistema 2. Si se cuenta con la aprobación del sistema 2, las impresiones e intuiciones se tornan en creencias y los impulsos en acciones voluntarias. Si todo esto se desarrolla sin ninguna complicación, con el avance del tiempo el sistema 2 acepta todas las sugerencias del sistema 1 con ninguna o alguna escasa modificación. En cambio cuando el sistema 1 encuentra alguna dificultad acerca de un problema o no encuentra una solución, llama al sistema 2 para que le sugiera un procedimiento más detallado y preciso para que se pueda llegar a una solución. También se pueden incluir los casos “extraños” en los cuales un evento que siempre ha sido el mismo se vea afectado drásticamente como escuchar a un gato ladrar.

El sistema 2 entra en acción cuando se ponen difíciles las cosas para el sistema 1, por ejemplo:

- mantener la compostura cuando se está enojado con alguien
- mantenerse atento al manejar un automóvil de noche
- esforzarse al máximo para no cometer algún error en alguna actividad que no sea usual.

El sistema 1 genera impresiones, sensaciones e inclinaciones; cuando estás son aprobadas por el sistema 2, se convierten en creencias, actitudes e intenciones. El sistema 2 es el único que puede seguir reglas, comparar objetos en sus diversas características y hacer elecciones deliberadas entre opciones. El sistema 1 puede ser programado por el Sistema 2 para movilizar la atención cuando un hecho particular es detectado.

Una de las principales tareas del sistema 2 es observar y controlar situaciones que ha sugerido el sistema 1 permitiendo que realicen o se supriman; la función de la memoria es un atributo del sistema 1.

El sistema 2 tiene capacidad de razonamiento y es prudente, sin embargo en algunas personas es perezoso. Cuando el sistema 2 se compromete en otra operación o es perezoso, creemos cualquier cosa, ya que el sistema 1 es crédulo, tiende a creer mientras que el sistema 2 se encarga de dudar.

La división del trabajo entre el sistema 1 y el sistema 2 es muy eficiente y optimiza la ejecución. El sistema 1 es muy bueno en su trabajo, pero tiene sesgos, errores sistemáticos que es propenso a cometer errores en circunstancias específicas. El sistema 2 está encargado del autocontrol.

Generalmente el sistema 2 tiene la última palabra en cuanto a las acciones que se deben de llevar a cabo para resolver alguna problemática.

Stanovich en su libro "Rationality and the Reflective mind" (Stanovich, 2011), hace una distinción entre dos partes del sistema 2: la parte algorítmica que se encarga de practicar el pensamiento lento y el cálculo exigente, sin embargo, la inteligencia elevada no hace a las personas que sean inmunes a sesgos en sus pensamientos y acciones (Diezmann C. M., 1997).

Algunas personas están más cerca de su sistema 1 que del sistema 2 y viceversa.

Las ideas se activan unas más que otras, sólo algunas quedan registradas en la conciencia. El efecto de una predisposición es llamado priming o primicia; por ejemplo si tenemos en la mente la idea de comer y enseguida quisiéramos completar la palabra ja_on, la letra que se pondría sería "m" para la palabra jamón. El priming no se limita a conceptos y palabras, también la influencia del priming a una acción es conocida como efecto ideomotor. Los gestos simples y comunes pueden influir de manera inconsciente en nuestros pensamientos, sentimientos y acciones.

2.2. Uso de diagramas como herramienta para la solución de problemas no rutinarios

En la comunidad de matemática educativa se ha reconocido a lo largo del tiempo la importancia del uso de los diagramas en la solución de problemas de matemáticas. Particularmente, el comenzar a usar un diagrama facilita la solución de problemas matemáticos porque en ellos se representa la información y la estructura del problema (Novick, 2001; Diezmann C. , 2005).

Polya define un diagrama como una representación visual que presenta información distribuida en espacios (Polya, 1965). Diezmann define a los diagramas como representaciones estructuradas en donde los detalles superficiales no importan y suelen basarse en convenciones que representen los componentes de la situación de manera organizada. Estas convenciones deben ser aprendidas y entendidas antes de que los diagramas se usen con éxito (Diezmann. C., 2001). Un diagrama es exitoso para algunos estudiantes en la resolución de un problema si se representa la estructura del problema eficazmente, sin embargo para otros que no pueden ver la estructura del problema debido a que no están familiarizados con el proceso de resolución de problemas mediante los diagramas (Booth, 2000).

Usar diagramas ha sido una de las estrategias más eficaces para mejorar la resolución de problemas matemáticos (Hembree, 1992; Uesaka, 2007). Un fuerte indicador de la importancia del uso de diagramas es la representación que hacen los maestros de matemáticas durante la clase (Dufour-Janvier, 1987).

Novick y Hurley (Novick, 2001), proponen tres tipos de diagramas que se pueden aplicar a problemas de matemáticas con características distinguibles entre cada uno, estos diagramas son: diagrama de red, diagramas jerárquicos y tablas.

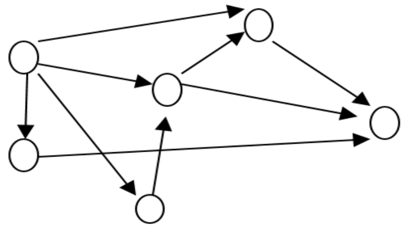


Figura 1. Diagrama de red

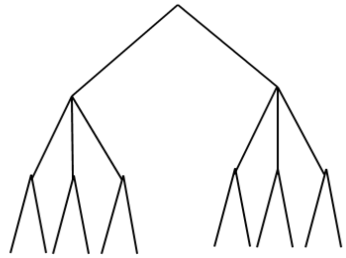


Figura 2. Diagrama jerárquico

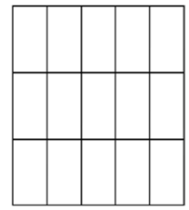


Figura 3. Tabla

Figura 1. Diagrama de red

En los anteriores diagramas se pueden apreciar 6 propiedades discretas de las 10 que se encontraron durante un estudio de Novick y Hurley (Novick, 2001). (Tabla 1)

Tabla 1. Propiedades discretas de diagramas (Pantziara, 2009).

Propiedad	Diagrama de red	Diagrama jerárquico	Tabla
Estructura global.	No tiene estructura formal predefinida.	Organización dentro de niveles, comienza con un nodo principal que ramifica los niveles siguientes.	Todos los valores de una variable tienen los valores de otra variable en común.
Conjuntos de números.	Un conjunto de información.	No tiene límite en un conjunto de información.	Dos conjuntos de información.
Entrelazar información.	Cualquier nodo se puede enlazar con cualquier otro.	No puede haber enlaces entre nodos que se encuentran en el mismo nivel.	Los valores en una misma dimensión no pueden ser enlazados.
Tipo de enlace.	Cada dos nodos hay un enlace, estos nodos son flexibles.	Un solo nodo da lugar al menos a dos más, sus enlaces son direccionales.	

Relaciones de enlace: uno a muchos, muchos a uno o ambos.	Ambas relaciones de enlace.	Una de las relaciones de enlace, pero no ambas al mismo tiempo.	Los enlaces asociados con cada valor de fila o columna representan a muchas o muchas representan a una sola, estas relaciones se deben inferir.
Caminos transversales posibles.	Múltiples rutas de nodo a nodo son posibles	Para cualquier par de nodos A y B, solo hay un camino posible para pasar de uno a otro.	No tiene caminos la representación.

Se necesita distinguir entre situaciones que requieren de una interpretación y uso de un diagrama dado y situaciones en donde se construirá algún diagrama.

Un estudio reciente de Elia, Gagatsis y Demetriou (Elia, 2007), describen diferentes tipos de representación: texto escrito, texto con imágenes y la recta numérica presentaron como maneras distintas de la resolución de un problema en tareas similares.

Zhang y Norma (Zhang, 1994), sostienen que para una serie de tareas, las representaciones externas guían y limitan las acciones cognitivas del estudiante. Por otra parte una serie de estudios ha demostrado que los diagramas son estrategias heurísticas en la solución de problemas (Uesaka, 2007).

Cuando los estudiantes construyen sus propios diagramas en la resolución de un problema, el conocimiento aun no encontrado puede ser generado, asociando datos del problema que no se consideran al principio.

English (English, 1996), define un problema no rutinario como aquel que no implica cálculos rutinarios, pero si la aplicación de cierta estrategia, en donde se incluyen los diagramas. Los problemas no rutinarios se consideran más complicados y difíciles que los problemas rutinarios los cuales implican cálculos usuales (Schoenfeld, 1992).

Las representaciones en un problema pueden ser autónomas o auxiliares. En las representaciones autónomas se puede expresar cualquier tipo de información relacionada con el problema mientras que las representaciones auxiliares no son tan necesarias para resolver un problema, pero pueden ayudar durante el proceso de solución.

Diezmann sostiene que los diagramas tienen tres ventajas cognitivas en la resolución de un problema, (Diezmann C. , 2005).

- Primera, los diagramas contribuyen a la conceptualización del problema, mediante ellos el solucionador da una estructura específica a la problemática que se presenta; esta estructura tiene los elementos que el solucionador identificó como la situación del problema, las relaciones entre sus elementos y el significado de ello, por lo cual los diagramas deben de reflejar la estructura del problema del solucionador. El uso eficiente de los diagramas dependen de la adecuación del problema para la situación requerida.

- Segundo, los diagramas son un sistema de representación de conocimiento basados en la deducción, esto a su vez pueden generar más conocimientos. Los diagramas específicos pueden representar problemas distintos pero que comparten la misma estructura (English, 1996). Los solucionadores principiantes tienden a enfocarse en los rasgos superficiales del problema y pueden presentar dificultades para ver la estructura del problema, sin embargo, los estudiantes que ya se han enfrentado a problemas que comparten la misma estructura pueden ser capaces de ver la misma estructura, y familiarizado a esto llegar a una solución correcta.

- Tercero, los diagramas apoyan el razonamiento visual, que complementa al razonamiento lingüístico. El razonamiento espacial y visual comprende las habilidades: comprensión, manipulación y reorganización o visualización de las relaciones.

Polya, así como Schoenfeld argumentaron que las representaciones visuales tales como imágenes y diagramas son esenciales en la resolución de un problema. (Polya, 1965; Garatsis, 2004; Meyer III, 2014; Schoenfeld, 1992).

Capítulo 3

Contexto del estudio, resultados y análisis

3.1. Concurso Estatal y Nacional de Talentos en Física

El Concurso Estatal de Talentos en Física se lleva a cabo en el Estado de Puebla desde hace varios años y está dirigido a estudiantes de Educación Básica Secundaria de edades que van de los 12 a los 15 años cumplidos hasta el mes de diciembre.

En el programa de Educación Básica de Secundaria de Ciencias, se divide por año: en primer año se da énfasis a Biología; en segundo año, énfasis en Física y en tercer año, énfasis en Química, por lo que el Concurso está dirigido a alumnos que cursan o cursaron el segundo año Educación Básica Secundaria.

El proceso del Concurso Estatal de Talentos en Física tiene como fin promover la física como ciencia y acercar a los jóvenes que gustan de ella, además de que durante este proceso se seleccionan a los 12 participantes que representarán al Estado de Puebla en el Concurso Nacional de Talentos de Física organizado por la Sociedad Mexicana de Física. Enseguida se presentan las etapas de ambos concursos.

3.1.1. Fase por escuela

Las escuelas que quieran participan en el Concurso Estatal de Talentos en Física se postulan mediante la inscripción vía correo electrónico llenando un formulario con los participantes de la escuela, en ese formulario se incluye: el nombre del alumno, la edad, el sexo, la fecha de nacimiento así como el nombre del asesor de la materia de ciencias.

Se designa a un maestro representante de cada escuela. Durante esta etapa se seleccionan a 12 estudiantes que representarán a su escuela mediante un examen de selección que mandan los organizadores del Concurso Estatal de Talentos en Física a cada escuela inscrita. Los exámenes son calificados por el maestro representante de cada institución y envía las calificaciones y los datos de los 12 finalistas de cada escuela.

3.1.2. Fase estatal

En esta fase, los alumnos que fueron seleccionados de cada institución educativa, llevan a cabo un examen que seleccionará a 30 de ellos. Estos exámenes son aplicados por miembros del Comité

Organizador del Concurso Estatal de Talentos en Física en 4 sedes distintas dentro del Estado de Puebla: Atlixco, Nuevo Necaxa, Tehuacán y en la Facultad de Ciencias de Físico Matemáticas de la BUAP (FCFM-BUAP). Los exámenes son calificados por el Comité y se publican los resultados una semana después de la aplicación del examen.

3.1.3. Fase de selección para el Concurso Nacional de Talentos en Física

Los 30 estudiantes seleccionados durante la fase estatal, son preparados por profesores de la Facultad de Ciencias de Físico Matemáticas, durante 8 sesiones sabatinas de 4 horas, donde se presentan experimentos y problemas de física clásica. Cabe señalar que los alumnos que no pueden asistir al curso dado por la FCFM-BUAP, el curso lo da un representante del Comité Organizador en las Sedes: Atlixco, Nuevo Necaxa y Tehuacán.

Al término del curso, se aplica un examen de selección a los 30 participantes en la FCFM-BUAP, donde solo 12 de ellos representarán al Estado de Puebla.

3.1.4. Concurso Nacional de Talentos en Física

En esta etapa los 12 estudiantes son citados en la Sede de cada Estado, y se les aplica el examen nacional que mandan los organizadores del Concurso Nacional de Talentos en Física. La hoja de respuestas de cada estudiante se escanea y se manda al Comité Nacional que se encarga de evaluar todos los exámenes de los concursantes del país. Posteriormente se publican los resultados del Concurso Nacional de Talentos de Física y se hace una ceremonia de premiación a los participantes de cada Estado con un representante de la Sociedad Mexicana de Física.

3.2. Participantes

La aplicación del acertijo matemático así como el examen del Concurso Estatal de Talentos (Anexo 1 y Anexo 2) se llevó a cabo el 18 de Febrero de 2017 en las cuatro sedes del evento: Atlixco, Nuevo Necaxa, Tehuacán y en la FCFM-BUAP.

Se dio un tiempo de 120 minutos.

Los participantes fueron 291, de los cuales 151 son mujeres y 140 hombres (Tabla 2), la edad promedio de los participantes es de 13.7 años.

Tabla 2. Participantes por sede y género**.**

Sede	Hombres	Mujeres	Total
Atlixco	19	11	30
Nuevo Necaxa	22	15	37
Puebla	50	66	116
Tehuacán	49	59	108

3.3. El examen estatal de talentos

El contenido del examen se incluyen los temas que tiene el Programa de Educación Básica de la SEP de nivel Secundaria: Ciencias II, énfasis en física del 2011. Algunas de las preguntas que incluyen el examen estatal son de los exámenes nacionales y estatales de años anteriores. El total de preguntas fue de 45 con opción múltiple y una hoja de respuestas.

La calificación se calculó a partir del número de respuestas correctas que se contestó el estudiante en la hoja de respuestas, con una escala del 1 al 45. Las puntuaciones que se obtuvieron fueron de: 6 la mínima y 29 la máxima. El promedio de puntuación fue de 15.76

3.4. El acertijo matemático

El acertijo matemático se planteó de la siguiente manera:

> "Sin revelar sus razones, un caracol decide trepar un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche resbala 2 metros. ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?".

La prueba se secciono en cuatro partes:

- en la primera se indicará la respuesta final del acertijo matemático,
- en la segunda parte el estudiantes debe señalar detalladamente su razonamiento que uso para llegar a su respuesta,

- en la tercera parte se le sugiere de ser necesario que se apoye de alguna representación gráfica para su respuesta
- en la cuarta parte se le pregunto al estudiante si la respuesta a la que llegó la podía justificar con al menos tres elementos que uso en la resolución del acertijo.

Las respuestas que los estudiantes dieron al acertijo matemático son las siguientes:

- 10 días y 10 noches
- 10 días y 9 noches
- 9 días y 10 noches
- 8 días y 7 noches
- respuesta con diferencia de más de un día o una noche o excede de 10 días
- 8 días y 8 noches
- 9 días y 8 noches
- 9 días y 9 noches
- distintas repuestas dentro del intervalo de 1-7 días y 1-7 noches
- No contestó la prueba

Los puntajes de Examen Estatal de Talentos en física se compararon con las respuestas del acertijo matemático (Tabla 3). Se incluyen todas las respuestas por separado, incluyendo el promedio de los estudiantes, el mínimo y máximo y el total de participantes que llegaron a esta respuesta.

Tabla 3. Describe las distintas respuestas de los estudiantes

Respuesta	No. de participantes	Promedio en examen Estatal	Mínima calificación en examen	Máxima calificación en examen	Incluye diagrama
8 días y 7 noches	90	18	6	29	85/90
10 días y 10 noches	76	15.44	6	24	69/76
Diferencia mayor a un día o excede de 10 días y 10 noches (varias respuestas)	33	13.57	7	21	28/33
10 días y 9 noches	27	14.48	9	20	24/27
7 días y 6 noches	11	16.09	10	21	11/11

9 días y 8 noches	11	15.63	9	22	10/11
No contestó la prueba o la respuesta	10	15.2	7	23	1/10
1-4 días y 1-5 noches (varias respuestas)	10	12.2	7	17	7/10
5 días y 5 noches	6	15.66	11	19	6/6
8 días y 8 noches	5	13	7	17	5/5
6 días y 5 noches	5	15	11	20	5/5
5 días y 4 noches	2	12.5	10	15	2/2
6 días y 6 noches	1	9	9	9	1/1
6 días y 7 noches	1	16	16	16	1/1
7 días y 7 noches	1	23	23	23	1/1
9 días y 10 noches	1	16	16	16	1/1
9 días y 9 noches	1	10	10	10	1/1

De la Tabla 3 se concluye que las respuestas más comunes dentro del acertijo matemático (con más de 10 estudiantes) fueron:

- 8 días y 7 noches (repuesta correcta), la dieron 90 estudiantes
- 10 días y 10 noches (respuesta "rápida"), la dieron 76 estudiantes
- Arbitrario número de días y noche ("contrato didáctico"), la dieron 33 estudiantes
- 10 días y 9 noches (otra respuesta "rápida"), la dieron 27 estudiantes
- 9 días y 8 noches, la dieron 11 estudiantes
- 7 días y 6 noches, la dieron 11 estudiantes

Las respuestas de mayor importancia para este estudio son las respuestas "10 días y 10 noches" y "8 días y 7 noches". Estas se relacionan con el sistema 1 y el sistema 2, ya que la primer de ellas se obtiene con el pensamiento rápido y la segunda se obtiene mediante el pensamiento lento.

3.4.1. La respuesta del sistema 2: 8 días y 7 noches

De los 291 participantes, solo 90 obtuvieron la respuesta correcta, la cual es 8 días y 7 noches.

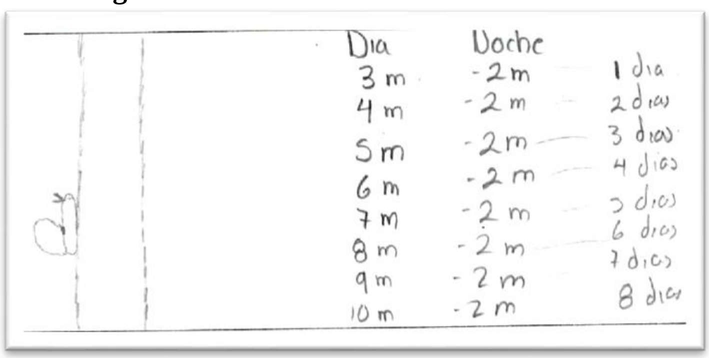
Entonces, el porcentaje es 30 % y es muy por arriba del porcentaje de respuestas correctas en el estudio realizado con alumnos ordinarios de secundaria y bachillerato (Cenobio, *et. al* 2017)

En las respuestas correctas se puede apreciar más de un procedimiento correcto en los cuáles se usaron diferentes representaciones (tabla, diagrama).

Tabla

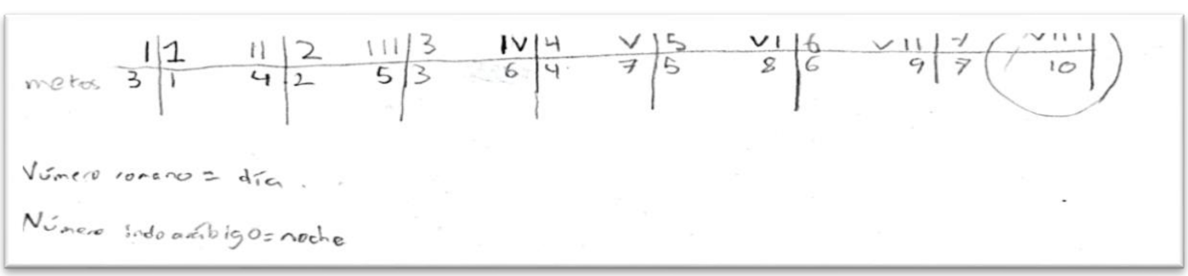
Desarrolla las sumas y restas para el día y noche respectivamente, separa los días y las noches en columnas, note que el participante no anota la distancia recorrida por el caracol al paso de los días (Figura 4).

Figura 4. Tabla con recorrido del caracol



El alumno añade y quita el recorrido del caracol durante el día y la noche, en su notación incluye números arábigos para representar el día y números romanos para representar las noches, así también separa los días completos por medio de las columnas de la tabla. (Figura 5).

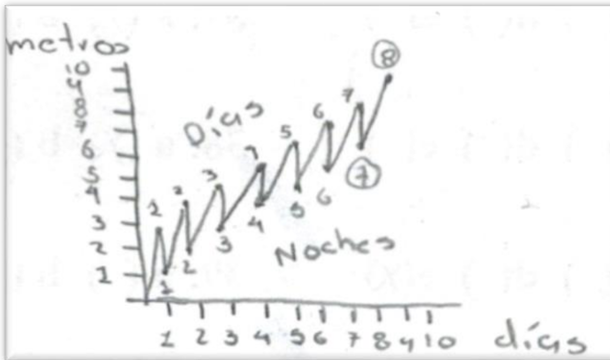
Figura 5. Recorrido del caracol representado mediante una tabla.



Gráfica posición-tiempo

Se representa el recorrido del caracol mediante una gráfica posición - tiempo añadiendo los metros que subía el caracol y disminuyendo los metros por día y noche. Los ejes fueron días contra metros, en la gráfica señala el número de picos superiores como los días y los picos inferiores como las noches (Figura 6).

Figura 6. Gráfica posición-tiempo



Recta numérica

Línea recta numérica horizontal numerada y posteriormente por medio de líneas curvas simulo el recorrido del caracol en el trascurso de los días. Las noches las marca en la parte de arriba, mientras que el recorrido del caracol en el día lo marca en la parte inferior de la recta (Figura 7).

Figura 7. Recta numérica.

Línea recta vertical, se señala el recorrido del caracol por medio de la posición que tiene el caracol al finalizar el día o la noche (Figura 8). En el recorrido del caracol el recorrido se hace por medio de dos colores, uno para el día y otro para la noche (Figura 9).

Figura 8. Línea vertical, los puntos representan el recorrido.

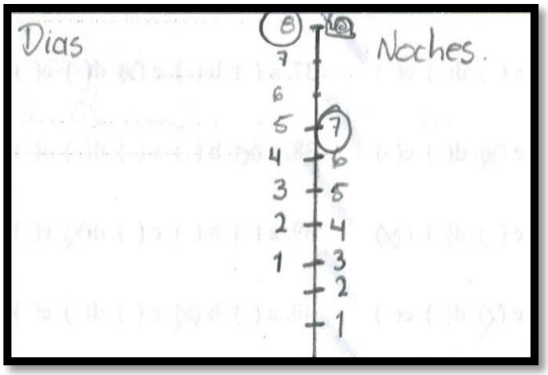
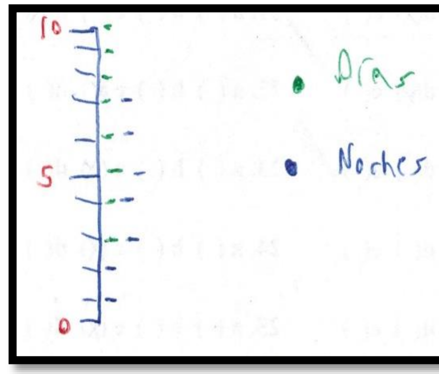


Figura 9. Línea vertical, los puntos de colores representan el recorrido.



Se hicieron 8 líneas verticales que representan el camino del caracol por día completo. El participante marca con una línea adicional el recorrido total que hará el caracol. Cada día separa la distancia total recorrida del caracol, y en el día 7 el caracol está en el metro 7, por lo que él llegará el día 8 al metro 10 (Figura 10). Las representaciones por día pueden incluir dibujos del caracol al término de ese día marcando cada día con una abreviación como es D1, D2, etc. (Figura 11).

Figura 10. Recorrido por día.

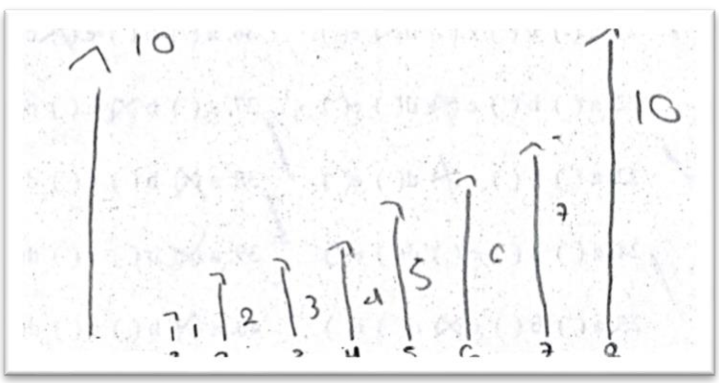
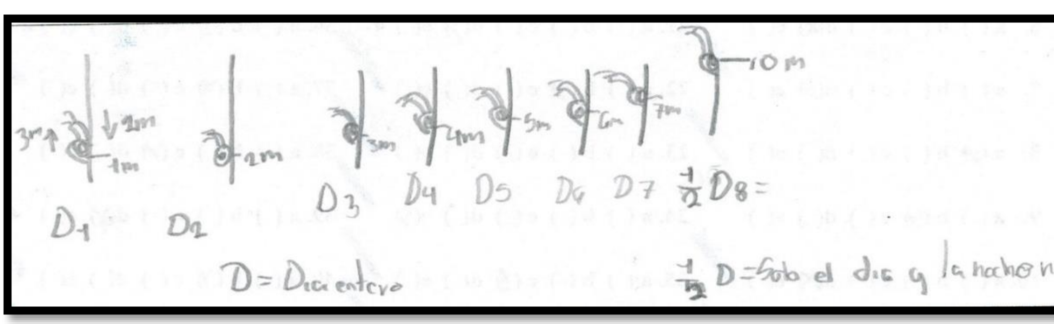


Figura 11. Recorrido del caracol.



Los participantes también rotularon las líneas verticales de manera que se representará aún más el ascenso y descenso por día completo, con la finalidad de saber en qué posición se quedó al finalizar el día y posteriormente no perder la secuencia del ascenso (Figura 12). Otros estudiantes rotularon aún más las líneas verticales separando en 10 pedazos, para ver la distancia que recorría cada día en base a los 10 metros que tiene que subir el caracol.

Figura 12. Recorrido por día completo

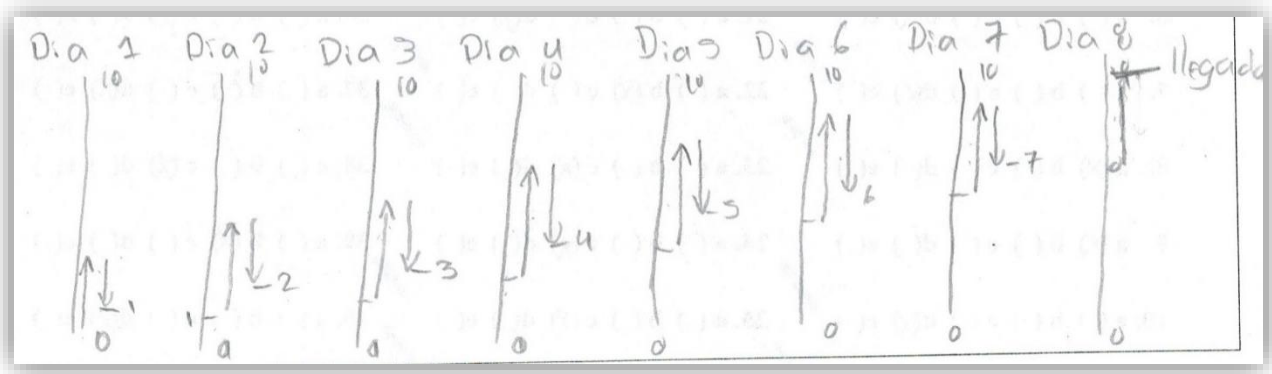
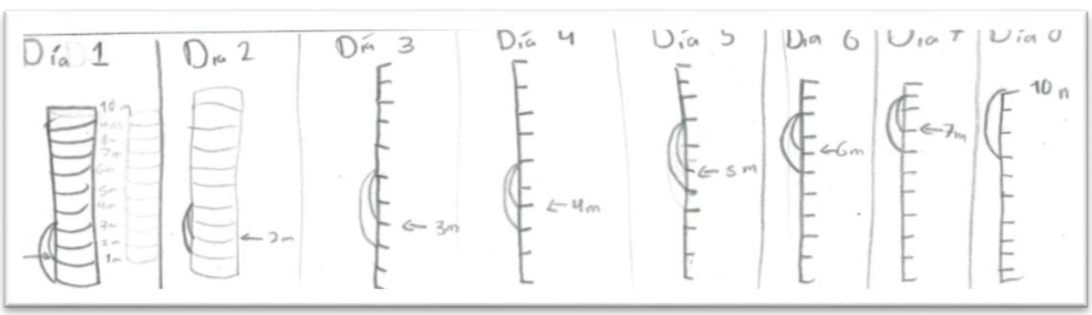


Figura 13. Recorrido por día completo



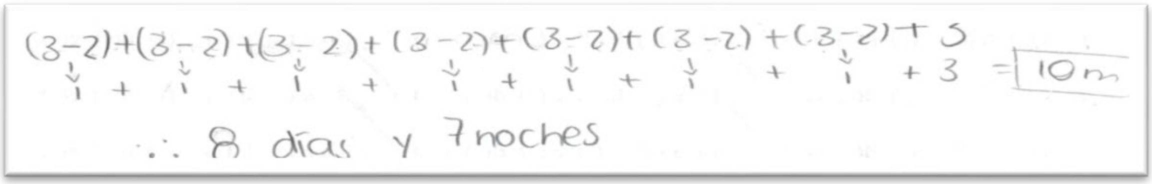
Sin representación de diagrama

Algunos estudiantes optaron por no hacer las representaciones mediante un diagrama, sin embargo, la sucesión al finalizar el día y pasar la noche; se incluye dentro del pensamiento del razonamiento cognitivo del estudiante. Mediante operaciones básicas logra llegar a la respuesta correcta.

Suma de días y noches

Se suman y restan por día y por noche. En palabras del alumno: *"Lo que realicé fue empezar a sumar y restar día con día= 3-2=1+3-2=2+3-2=5-2=3+3=6-2=… y así sucesivamente hasta que me diera 10 y después conté los días y las noches y así me dio el resultado"* (Figura 14).

Figura 14. Suma y resta sucesiva del recorrido del caracol



Multiplicando días y noches

El participante calculó al azar un número de días y un número menor a uno de días como noches, con esto, el caracol sube 15 metros y desciende 8, por lo que la posición del caracol es de 7 metros, adicionalmente buscó dos números que restados le dieran 10 (Figura 15). En estas respuestas el estudiante calculó el total que sube el caracol, multiplicando 8x3=24 metros y a este resultado le resto 7 x 2 = 14 metros. Dando como resultado 24 - 14=10 metros (Figura 16).

Figura 15.Suma y resta sucesiva del recorrido del caracol

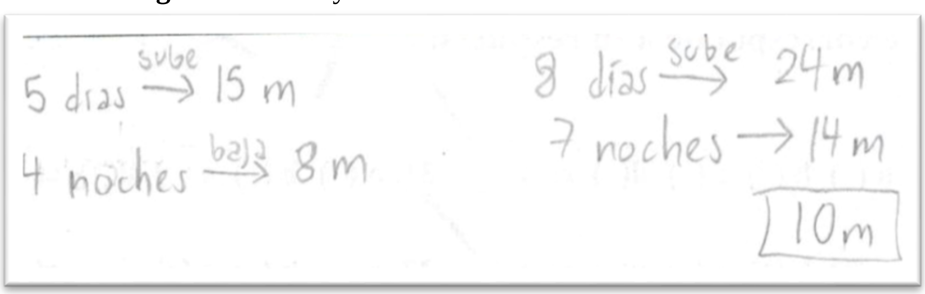
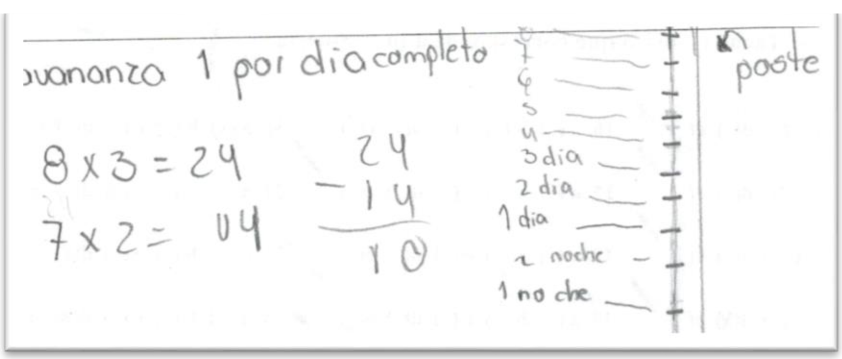


Figura 16.Suma y resta sucesiva del recorrido del caracol



3.4.2. La respuesta del Sistema 1: 10 días y 10 noches

Suma y resta de números por día

Se considera el recorrido del caracol día a día, como si el recorrido del caracol de un día no está relacionado con el recorrido del día siguiente. El resultado final por día es de 1 metro ya que sube tres metros y desciende dos. Este razonamiento lleva al estudiante a sumar diez veces 1, que lleva a la respuesta de 10 días y 10 noches (Figura 17). Esta respuesta está representada mediante una tabla (Figura 18 y Figura 19)

Figura 17. Suma y resta no sucesiva del recorrido del caracol

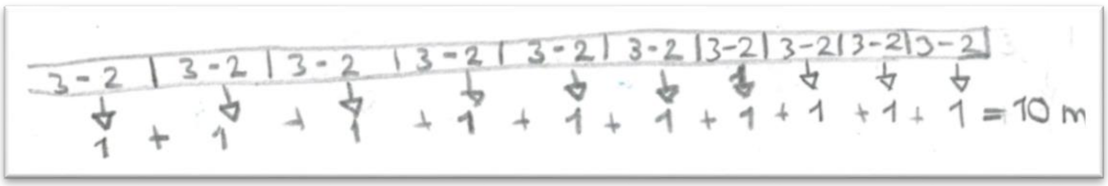


Figura 18. Tabla que representa el recorrido del caracol por día

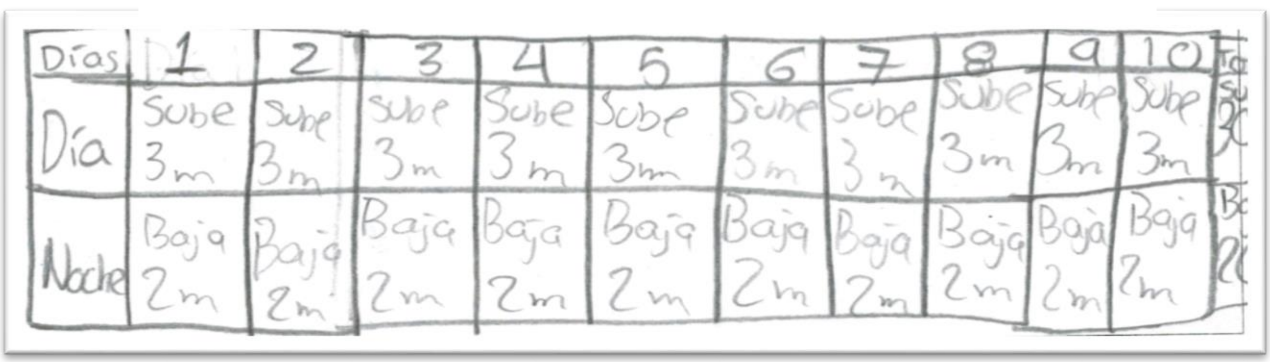
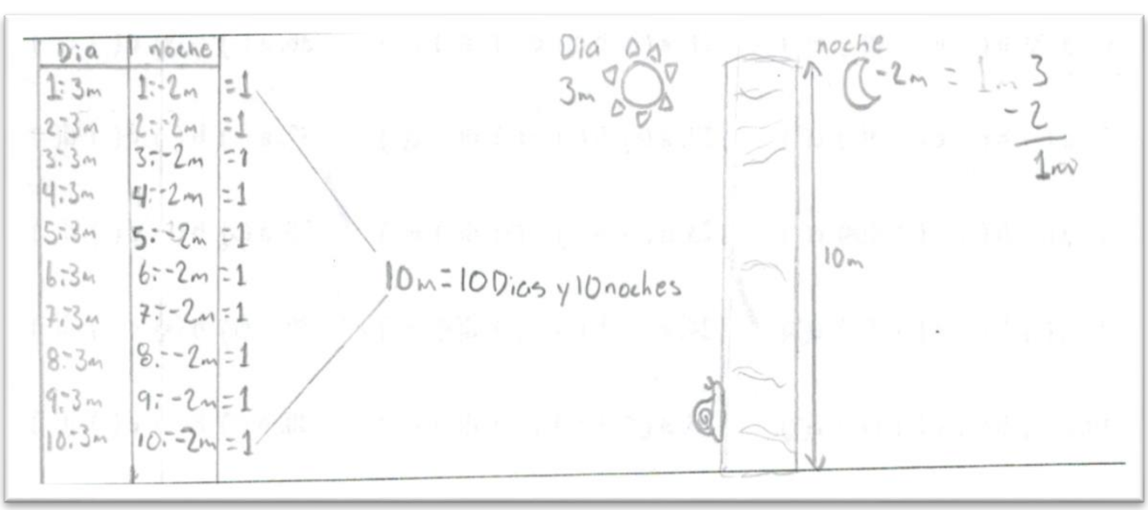


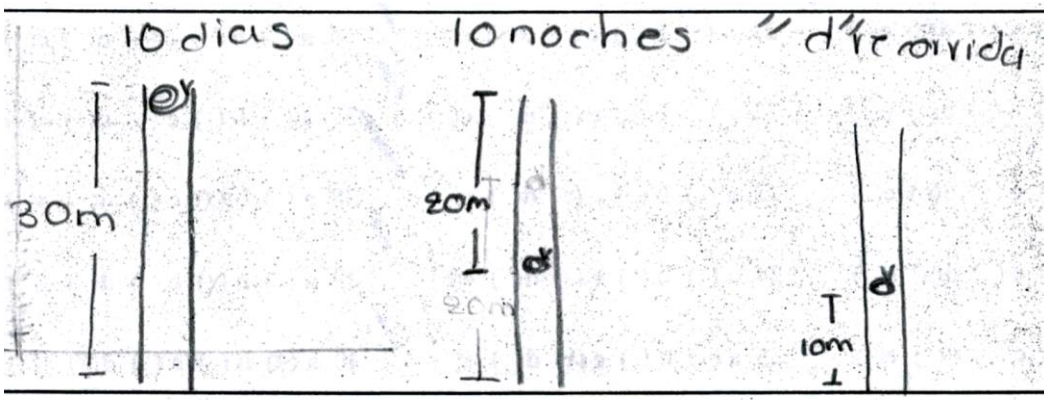
Figura 19. Recorrido del caracol por día



Producto de días menos noches

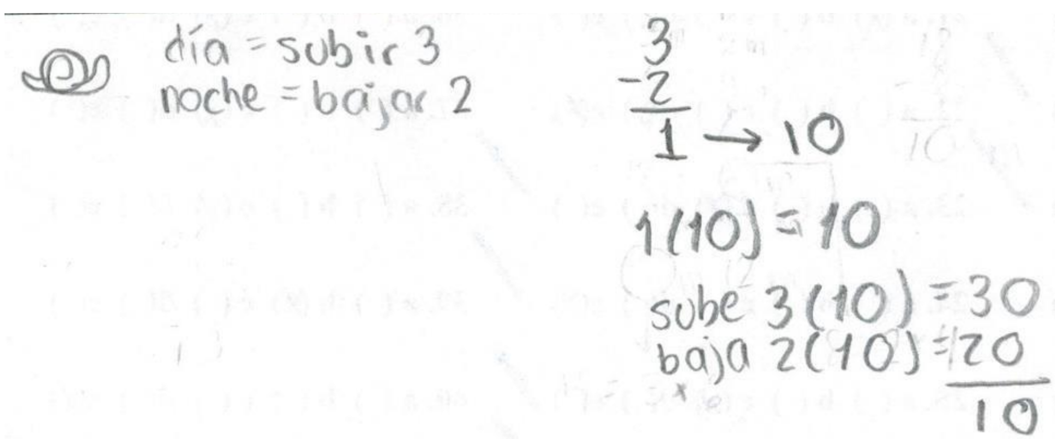
Algunos participantes calcularon dos números que restados les diera 10 mediante la multiplicación de 2 y 3, esto es, en el día sube tres metros 3 x 10= 30 y le restaron el descenso del caracol por la noche 2 x 10 =20 por lo que, 30-20=10 metros (Figura 20).

Figura 20. Recorrido del caracol separando día y noches.



Como el caracol sube 3 metros y desciende 2, el caracol recorre en total 1 metro (Figura 21).

Figura 21. Recorrido del caracol separando días y noches.

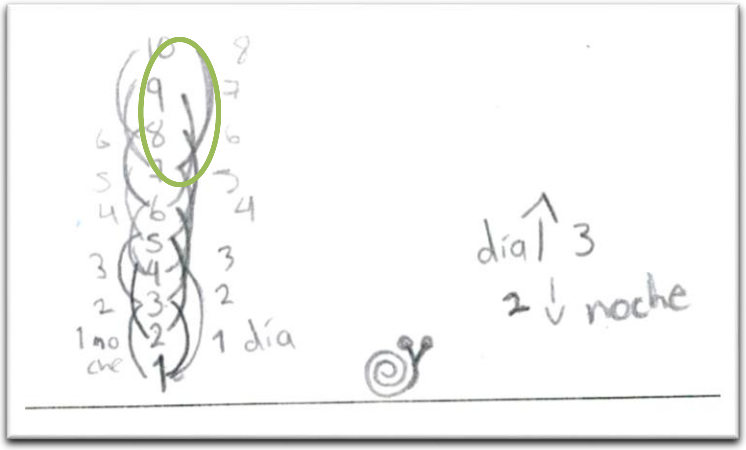


3.4.3. Procedimientos que no concluyeron en una respuesta correcta

En los siguientes procedimientos podemos encontrar procedimientos incompletos, que simulan el trascurso del caracol por el poste pero en algún momento se pierde la continuidad y dan una respuesta errónea menor o superior a 8 días y 7 noches.

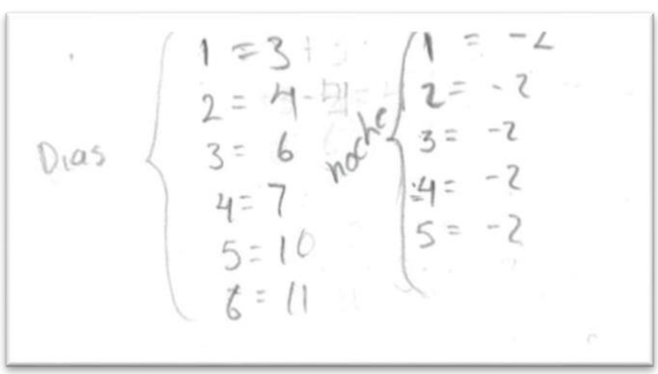
Se ayudan de líneas curvas para simular el avance del caracol, pero en un determinado momento se pierde la secuencia y su resultado no llego a ser el correcto, no se consideró al número 9 (Figura 22).

Figura 22. Llega a la cima el caracol y desciende.



Se puede apreciar el ascenso y descenso del caracol, en la columna izquierda son los días, el primer día recorre hasta el metro 3, en la noche resbala al metro 1; en el día 2 llega al metro 4 y desciende hasta el 2, sin embargo al sumarle 3 al 2 da 5, pero el estudiante puso 6, así obtiene la respuesta 6 días y 5 noches (Figura 23). Si no hubiera hecho ese error aritmético, la respuesta hubiese sido 8 días y 7 noches.

Figura 23. Error al sumar números



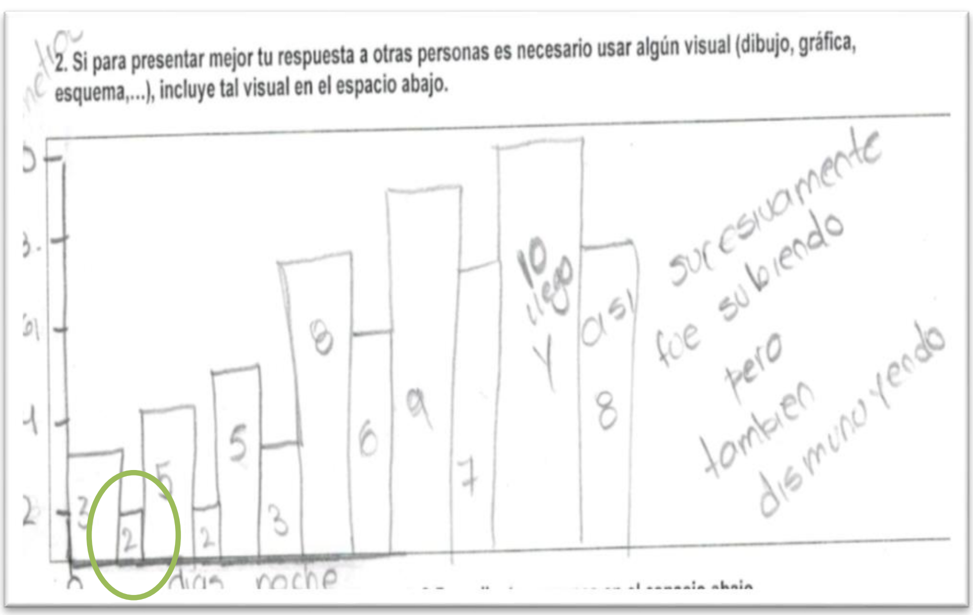
En la siguiente tabla el estudiante comienza a hacer el procedimiento pero no lo termina de desarrollar, sólo ve el recorrido del caracol en los tres primeros días y noches (Figura 24).

Figura 24. Error al sumar números

Días	Aumenta	Disminuye	Total
1	3	-2	1
2	3+1	2	2
3	3+3	2	4
			...

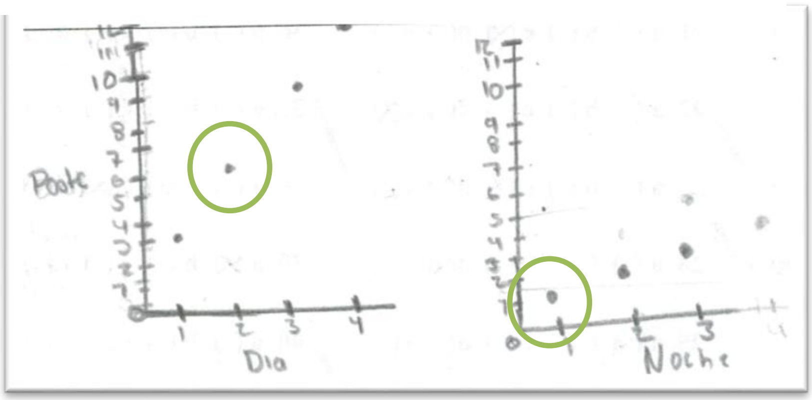
En la gráfica de barras, se van sumando y restando las posiciones del caracol a lo largo de su recorrido. Al finalizar el día completo 1, el caracol queda en la posición 1 metro, sin embargo, el estudiante comete un error al restar 3-2 por lo que en al día 2, el caracol aparece en el metro 2, por lo cual le genera una respuesta final de 7 días y 6 noches (Figura 25).

Figura 25. Error al sumar números



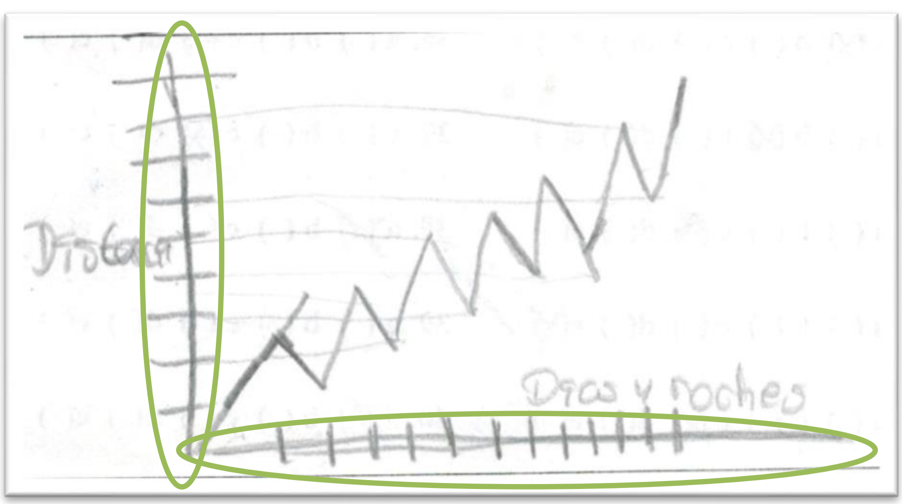
Las gráficas se usaron como diagrama para representar el recorrido del caracol, se realizan dos gráficas, una para el recorrido del día y otra para la noche. El procedimiento muestra que el caracol después de estar en el metro 3 y desciende al metro 1, no se retoma esa posición, lo cual hace que el día y la noche sean caminos independiente (Figura 26).

Figura 26. Gráficas independientes del recorrido.



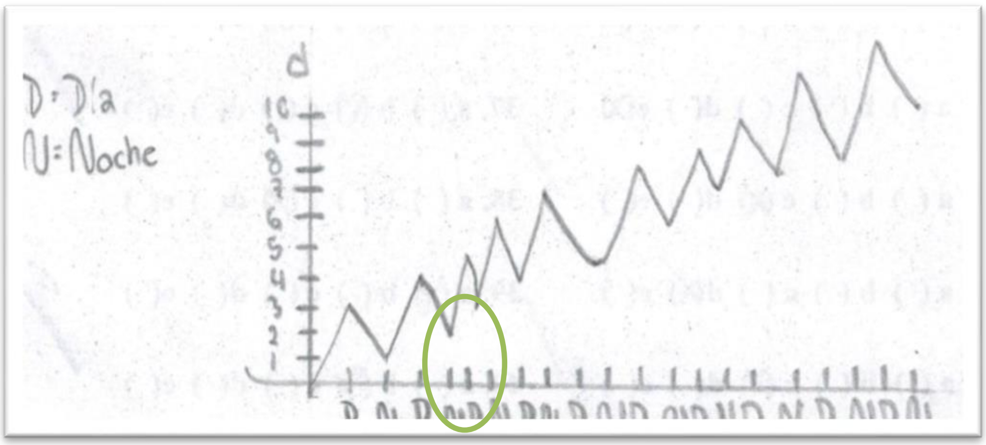
En la gráfica se puede apreciar que los ejes no están rotulados con números, por lo que se pierde la posición en la cual el caracol esta (Figura 27).

Figura 27. Ejes sin escala



En el gráfico no se localiza bien un pico inferior que indica un descenso, que es la noche 5, por lo cual el resultado final se ve afectado (Figura 28).

Figura 28. Error sobre el eje y al localizar un punto de la gráfica



3.4.4. Anclaje del sistema 1

Kahnemann y Amos señalan un efecto ancla, el cual se produce cuando las personas consideran un valor en particular para una cantidad desconocida antes de estimar esa cantidad. Las estimaciones están cerca del número que las personas consideraban, de ahí la imagen de un ancla (Kahneman, 2011).

Un ejemplo del efecto ancla es el siguiente:

> "Si alguien considera cuánto pagaría por una casa, estaría influenciado por el precio que se le pide. La misma casa le parecerá más valiosa si su precio establecido es alto que si es bajo, aunque este determinado a resistir de la influencia de ese número".

Existen dos anclajes, uno en cada sistema. En el sistema 2 ocurre un proceso deliberado de ajuste, mientras que en el sistema 1 ocurre el efecto de priming (Kahneman, 2011). El efecto de anclaje del acertijo matemático es del "Sistema 1".

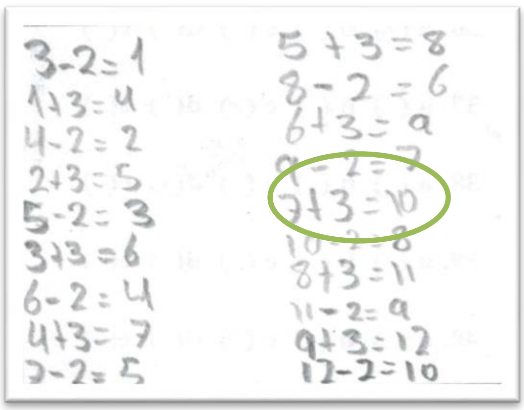
Una consideración donde el caracol sube en el día 9 y 10 el poste implicaría "un caracol volador" (Cenobio *et al.*, 2017), este error también se puede ver las respuestas de los participantes del Concurso Estatal de Talento en Física.

En los siguientes esquemas podemos ver la representación visual de la solución, aunque los participantes escribieron en la sección de respuestas 10 días y 10 noches. Sin embargo el diagrama representado como parte de la solución muestra la respuesta 8 días y 7 noches.

Ejemplo 1:

> “Se suman los ascensos y descensos del caracol, en el día 8 se llega a la cima, en este diagrama no se marcan los días, noches y distancia que se ha recorrido (Figura 29)”.

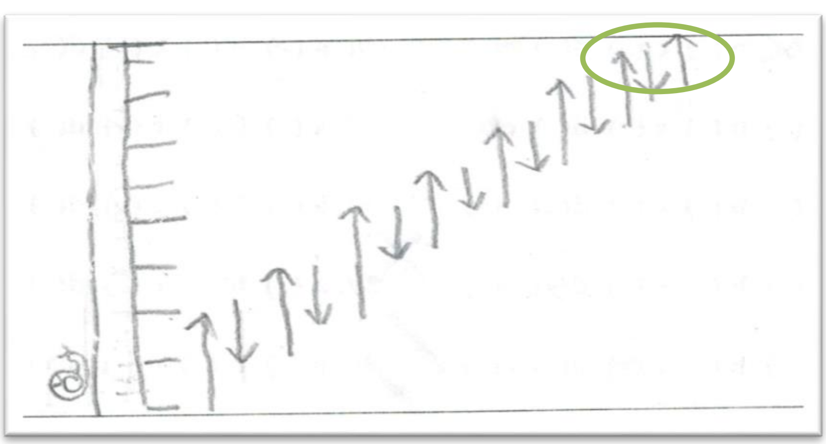
Figura 29. No se marcan los días y noches transcurridos.



Ejemplo 2

> “El diagrama muestra por medio de flechas el recorrido del caracol, una flecha que apunta hacia arriba para subir y una flecha que apunta para abajo para el descenso del caracol (Figura 30)”

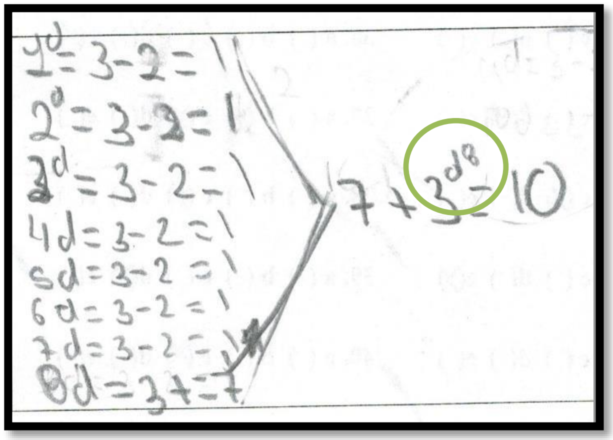
Figura 30. El estudiante llega a la meta sin darse cuenta.



Ejemplo 3:

"El participante detalla las sumas y restas por día y los denota por una "d" como superíndice, la respuesta es 8 días y las noches son 7 (Figura 31)"

Figura 31. El estudiante llega a la respuesta correcta.



Ejemplo 4, 5 y 6:

"En los siguientes dos diagramas posteriores, el participante muestra el recorrido del caracol mediante líneas, pero en algún momento durante el conteo, pierde la secuencia dando como respuesta una menor (Figura 32) e incluso con la idea en mente de la respuesta 10 días y 10 noches ignora el diagrama (Figura 33 y Figura 34)"

Figura 32. El estudiante pierde la secuencia.

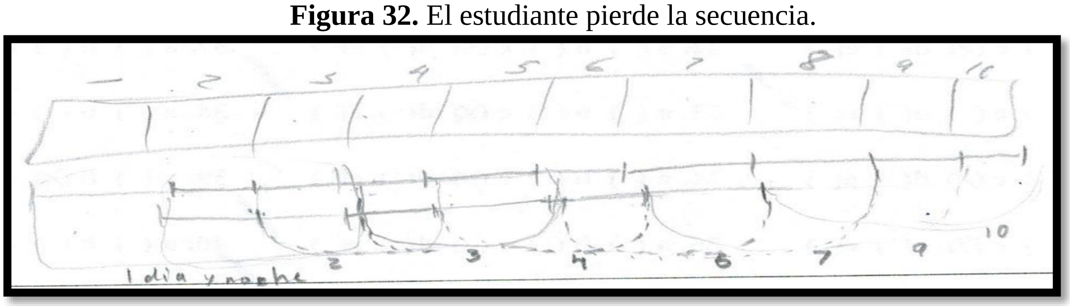


Figura 33. El participante hace la secuencia del caracol llegando a la cima dos veces.

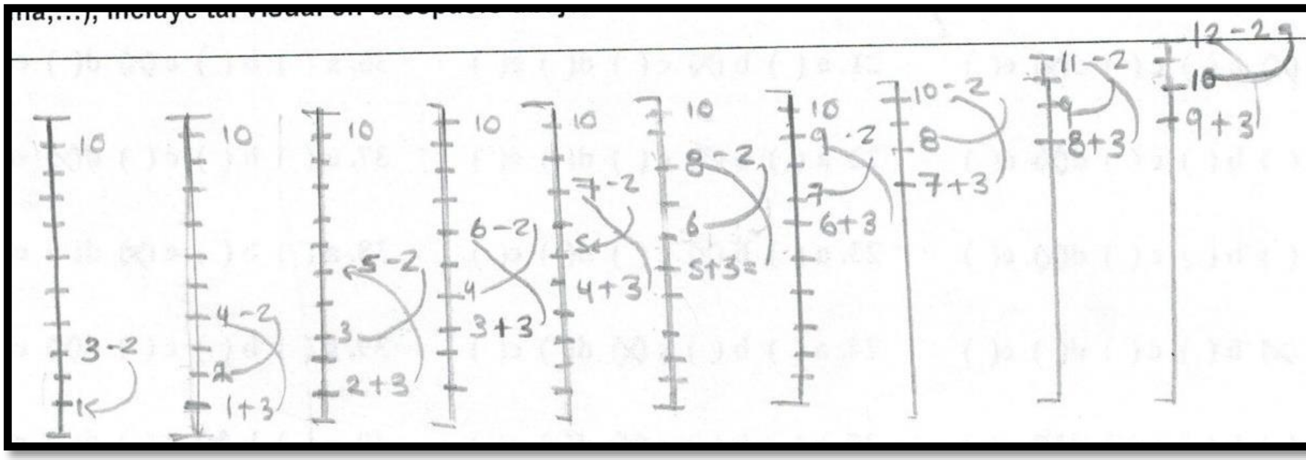
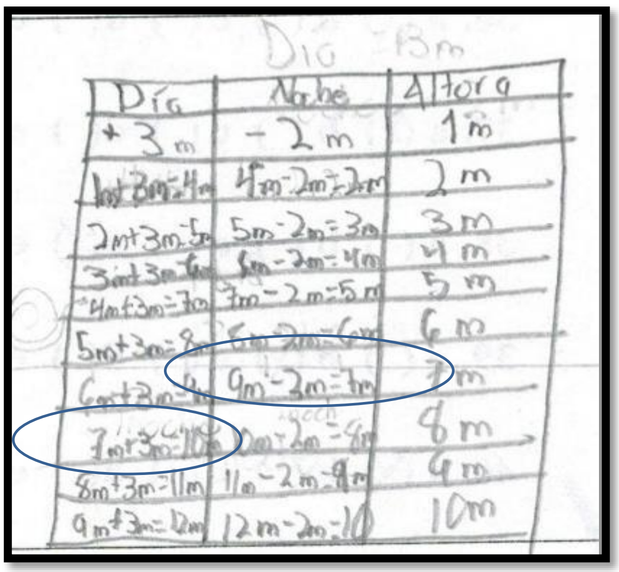


Figura 34. El participante hace la secuencia del caracol, este llega a la cima, pero lo hace descender, siguiendo la respuesta de 10 días y 10 noches.



Día 10 = 13m

Día	Noche	Altura
+3m	-2m	1m
1m+3m=4m	4m-2m=2m	2m
2m+3m=5m	5m-2m=3m	3m
3m+3m=6m	6m-2m=4m	4m
4m+3m=7m	7m-2m=5m	5m
5m+3m=8m	8m-2m=6m	6m
6m+3m=9m	9m-2m=7m	7m
7m+3m=10m	10m-2m=8m	8m
8m+3m=11m	11m-2m=9m	9m
9m+3m=12m	12m-2m=10	10m

Recta numérica

2 personas (puntaje: 23, 24). Se hizo el recorrido del caracol por medio de líneas (Figura 35), no se separaron los días y noches por lo que fue más difícil distinguirlos, por lo cual se pierde la secuencia. En la Figura 36 podemos observar que se representan ambas respuestas; el diagrama que se encuentra en la parte derecha, representa el recorrido del caracol haciendo distinción en días y noches, el recorrido que representa es de 7 días y 7 noches. En la parte izquierda de la figura,

podemos observar un diagrama que representa la respuesta 10 días y 10 noches. La respuesta final de este estudiante es de 7 días y 7 noches.

Figura 35. El participante no distingue días y noches.

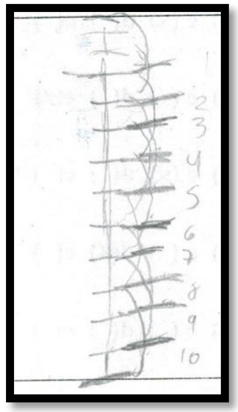
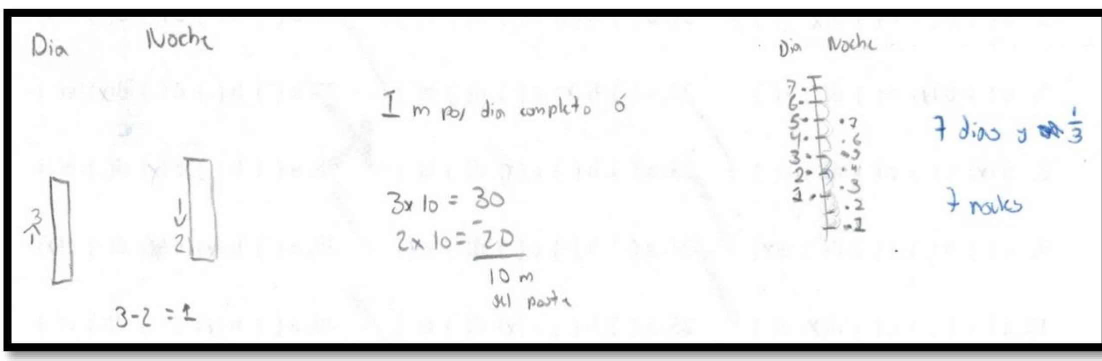


Figura 36. El participante realiza ambos procedimientos.



Números sumados y restados con gráfica sin terminar

1 persona (Puntaje: 23). No se distingue entre días y noches, solo se suma y resta la serie de números sin analizar la secuencia generada al término del día 7 (Figura 37). En la figura 38 se pierde la secuencia al término del tercer día, ya que no hay distinción entre días y noches como consecuencia no se llega a representar la respuesta correcta.

Figura 37. Secuencia numérica del recorrido del caracol.

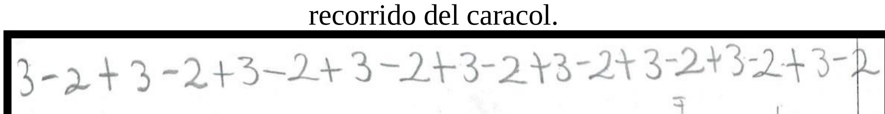
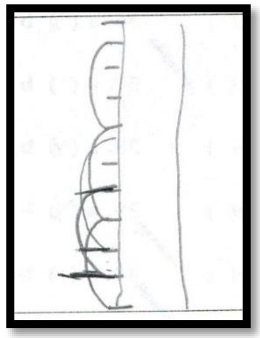


Figura 38. El diagrama no representa distinción entre días y noches.



3.4.5. Procedimientos que difieren más de un día o una noche

Estos procedimientos reflejan el fenómeno del “contrato didáctico” que genera en los estudiantes un sistema de creencias que perfilan fuertemente su desempeño en la resolución de problemas y en otras actividades de aprendizaje (Tiberghien, 2014). El este caso concreto, los estudiantes “juegan” con los números para obtener una respuesta esperada, sin pensar sobre las implicaciones qué estos números tienen en el mundo real: el movimiento del caracol no puede realizarse si el número de los días y las noches usadas difieren por un número mayor que uno.

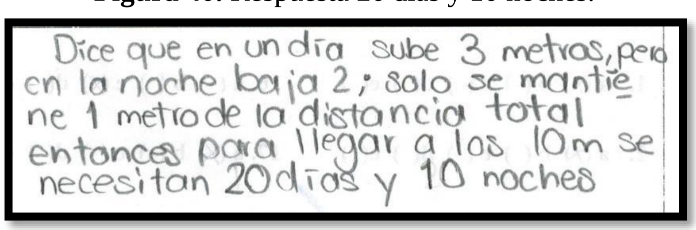
En lo que sigue se presentan varios ejemplos de este tipo de procedimientos y respuestas.

Respuesta 20 días y 10 noches

2 personas (puntajes: 13,11).

> Toman en cuenta que en total al día suben un metro, por lo cual deberá de subir el caracol en 20 días ya que 20 x 1=20 y le restan 10 noches, ya que por noche descenderá 1 metro lo cual es 10 x 1=10, con lo cual 20-10= 10 metros. (Figura 40).

Figura 40. Respuesta 20 días y 10 noches.



Dice que en un día sube 3 metros, pero en la noche baja 2; solo se mantiene 1 metro de la distancia total entonces para llegar a los 10m se necesitan 20 días y 10 noches

Respuesta 30 días y 20 noches

2 personas (puntajes: 16,18)

Toman en cuenta que por día completo subirá un metro en el día y descenderá un metro durante la noche, por lo cual: 1x30=30 y 1x20=20, restando ambas cantidades da: 30-20=10 metros. (Figuras 41 y 42).

Figura 41. Respuesta 30 días y 20 noches

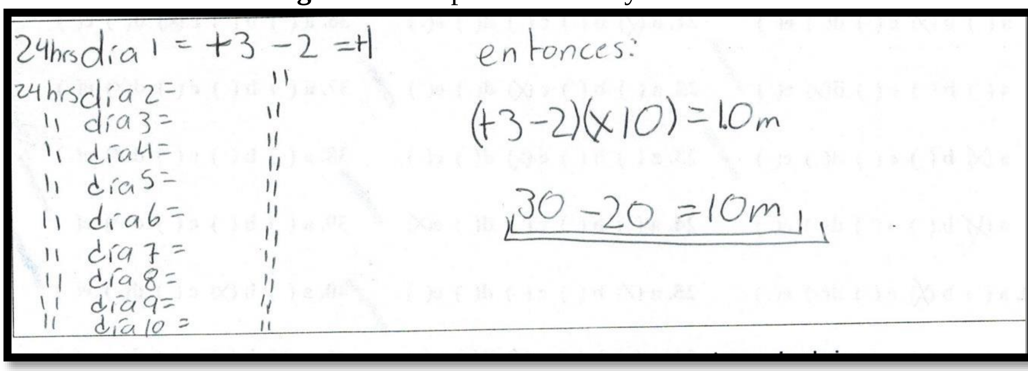
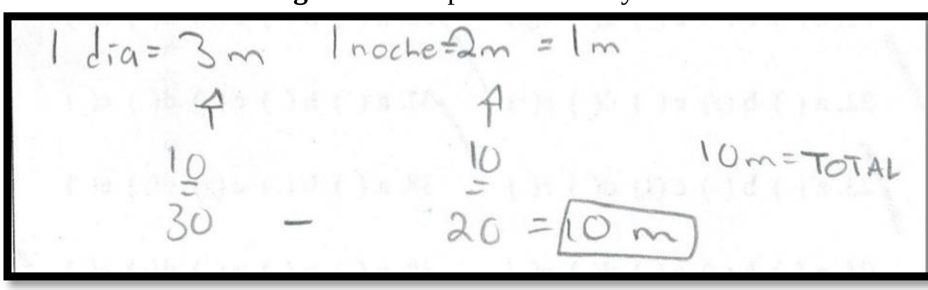


Figura 42. Respuesta 30 días y 20 noches.

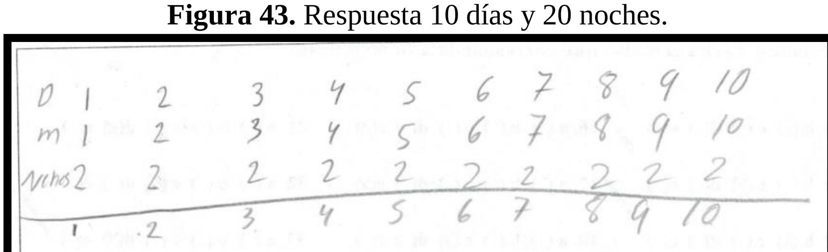


Respuesta 10 días y 20 noches

2 personas (puntaje: 20, 7).

Multiplica lo que sube por día que son 3 metros por 10 y las noches en total las considera 1 metro, por lo cual multiplica 1x20=20. Enseguida realiza la resta de 30-20=10, con lo cual ya subió los 10 metros el caracol (Figura 43).

Figura 43. Respuesta 10 días y 20 noches.

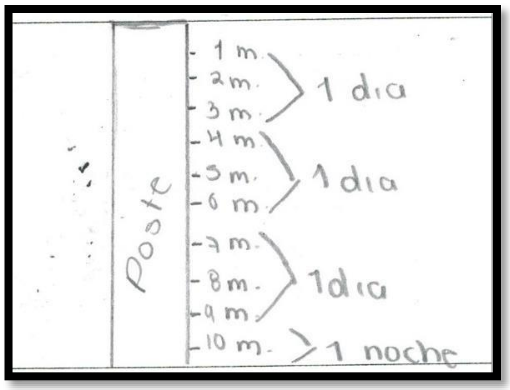


Respuesta 3 días y 1 noches

2 personas (puntaje: 15,12).

Multiplica los días por tres y le da 9 metros, supone que no se desliza el caracol, por lo cual considera que durante la noche el caracol puede subir un metro más (Figura 44).

Figura 44. Respuesta 3 días y 1 noches.

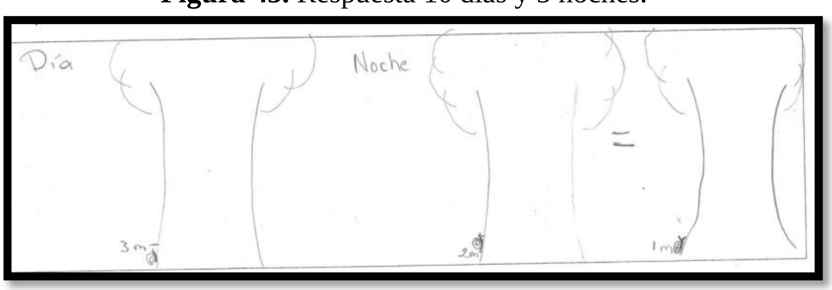


Respuesta 10 días y 5 noches

5 personas (puntajes: 17, 16, 15, 13, 11).

En realidad por día solo puede subir 1 metro, así que serán 10 días. Como en la noche baja 2 y son 10 días entonces, divide 10/2=5 que son el número de noches. Otra manera de pensarlo es que en la noche resbala el doble, que son 10 metros y en 10 días superara lo que resbala y llegará a la cima. (Figura 45).

Figura 45. Respuesta 10 días y 5 noches.

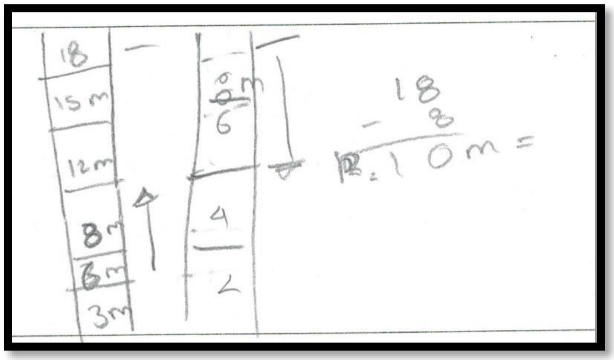


Respuesta 6 días y 4 noches

2 personas (puntaje: 11, 14).

En este procedimiento se hizo multiplicaciones y restas. 6x3=18 – 4x2= 8; restando ambos resultados quedo como 10 metros en total.

Figura 46. Respuesta 6 días y 4 noches.



Respuesta 4 días y 1 noche

1 persona (puntaje: 12).

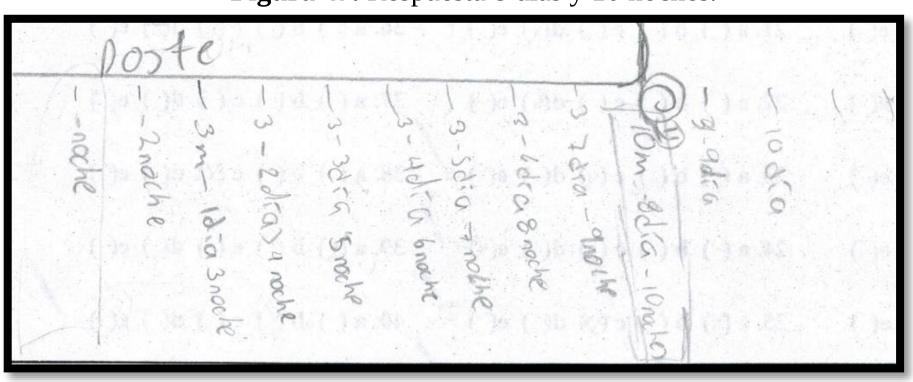
Realiza multiplicaciones del número de días y noches por el recorrido, esto es: 3x4=12 y lo resta a 2x1=2, por último 12-2=10, que son los 10 metros.

Respuesta 8 días y 10 noches.

1 persona (puntaje: 15).

Tiene un diagrama donde explica el recorrido del caracol, pero no enumera las noches y pierde la continuidad en el conteo. (Figura 47).

Figura 47. Respuesta 8 días y 10 noches.



Respuesta 13 días y 11 noches

1 persona (puntaje: 9).

En el día el caracol sube 10 metros por lo cual, suma 10+3, donde 3 es el recorrido que hace por día. Después 10+3-2=11 es el recorrido de la noche, ya que son 10 metros más lo que sube en un día menos lo que baja por día.

Respuesta 11 días y 9 noches

1 persona (puntaje: 17).

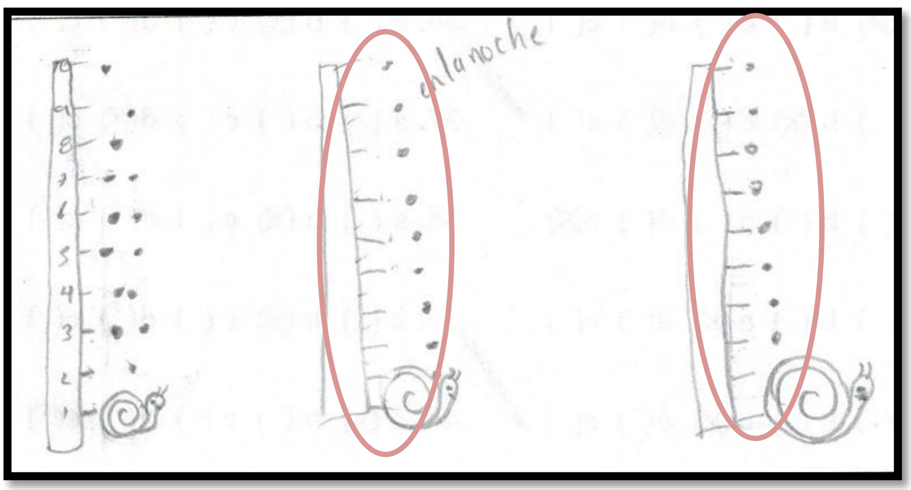
El alumno hace referencia en los detalles de su prueba que al caracol le tomará 10 días para llegar, por lo que podemos considerar que fue un error de escritura al colocar la respuesta en la parte superior de la prueba.

Respuesta 8 días y 5 noches

1 persona (puntaje: 14).

Hace un diagrama para simular la trayectoria del caracol. En el segundo y tercer diagramas se puede apreciar que solo grafica hasta el 9 por lo cual, le da 5 noches. (Figura 48).

Figura 48. Respuesta 8 días y 5 noches.



Respuesta 3 días y 10 noches

1 persona (puntaje: 19).

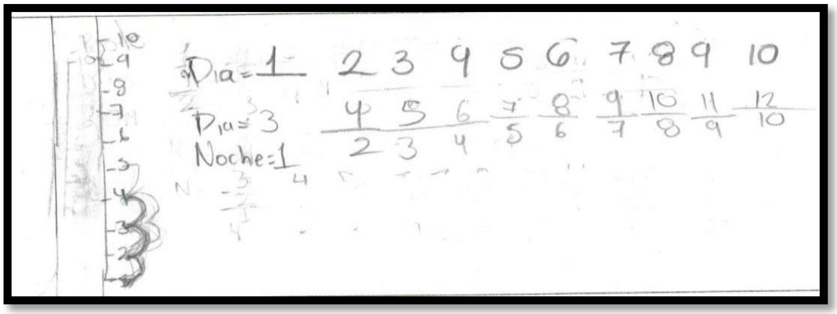
Por el modo de la respuesta, el argumento del alumno es que el caracol necesitará más días para subir, ya que sólo sube 1 metro por día, así que podemos interpretar su respuesta: el 3 significa que es lo que sube en un día, mientras que el 10 es el total de días enteros contando la noche, por lo cual pone el 10 en noches.

Respuesta 12 días y 27 noches

1 persona (puntaje 18).

Tiene un procedimiento correcto en la tabla. (Figura 49).

Figura 49. Respuesta 12 días y 27 noches.



Respuesta 11 días y 6 noches

1 persona (puntaje: 11).

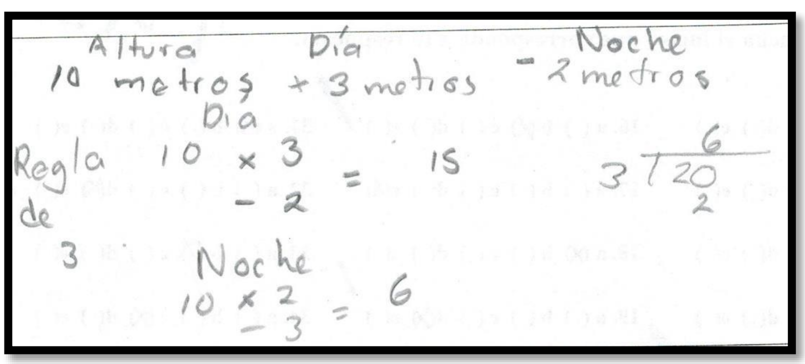
Sumó a los 10 metros tres, lo que salió 13, luego resto 2 que es lo que resbala el caracol, por lo cual da 11, que es el total de días. Podríamos considerar que las 6 noches las saca de dividir 13 entre 2 y el número que más se aproxima es el 6.

Respuesta 15 días y 6 noches

1 persona (puntaje: 12).

El alumno multiplica y divide. 10x3=30/2=15, por lo cual son 15 días. 12x2=20/3=6 por lo que son 6 noches. Este procedimiento es un regla de tres.

Figura 50. Respuesta 15 días y 6 noches.

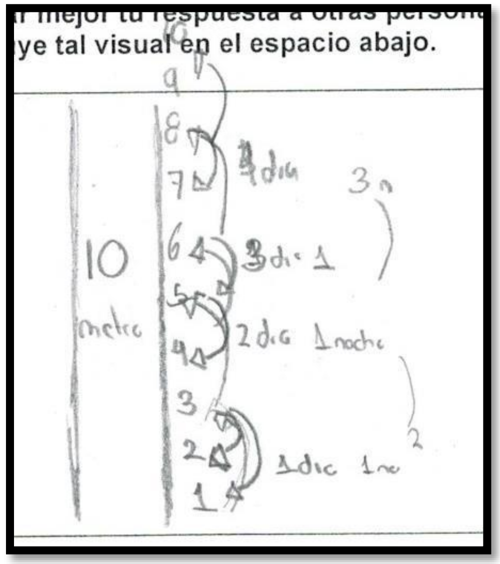


Respuesta 5 días y 3 noches

1persona (puntaje: 9).

El diagrama que realizo el alumno está correcto, pero durante el recorrido del caracol el estudiante no cuenta los días y las noches. La otra respuesta del estudiante es: en 5 días el caracol subió 15 metros y en 3 noches el caracol bajo 5 metros, ya que en la tercera noche el caracol resbaló 1 metro, por lo que llega a la meta en la tercera noche y ya no disminuye el metro faltante, ya se queda ahí. (Figura 51).

Figura 51. Respuesta 5 días y 3 noches.

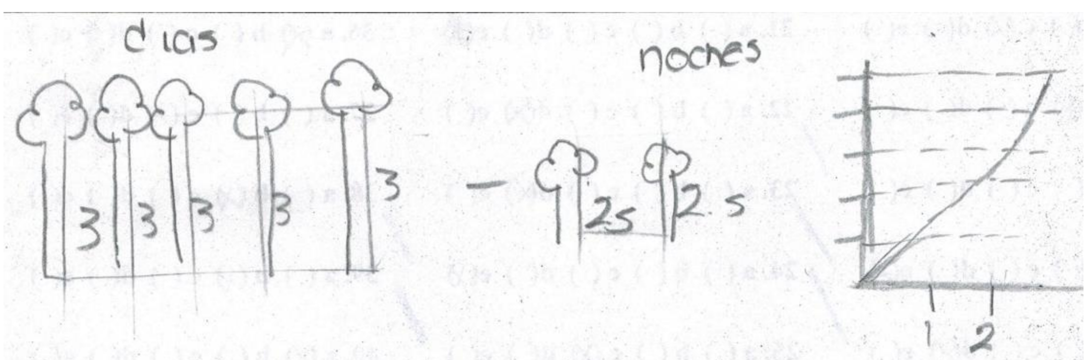


Respuesta 5 días y 2 noches

1 persona (puntaje: 15).

El caracol sube tres metros por día por lo cual en 5 días subirá 15 metros; pone 2 noches, ya que por noche desciende 2 metros por lo cual desciende 4 metros en total. (Figura 52).

Figura 52. Respuesta 5 días y 2 noches.

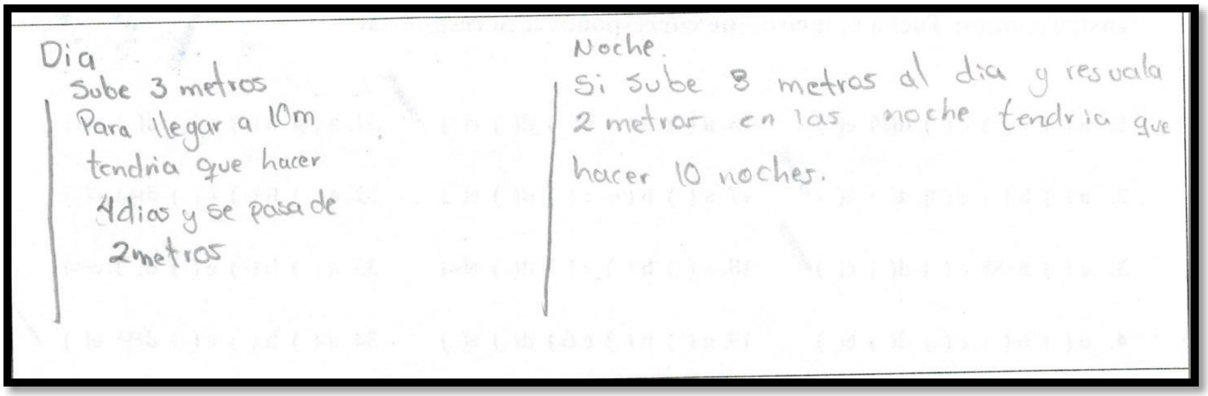


Respuesta 4 días y 10 noches

1 persona (puntaje: 12).

El estudiante separa los días de las noches, durante la noche en estudiante considera el recorrido de los días completos, es decir, cuenta con el día y la noche; sin embargo en el primer análisis solo considera la distancia que sube el caracol. (Figura 53).

Figura 53. Respuesta 4 días y 10 noches.



3.5. Análisis de los diagramas en el acertijo matemático

En la tabla 4, se describe la participación por la zona de aplicación del examen en las cuatro sedes, se incluyen la respuesta correcta y el número de finalistas de la etapa estatal.

Tabla 4. Población por sede con respuesta 8 días y 7 noches.

Población	Descripción	Hombres	Mujeres	Total
Atlixco	Cantidad de participantes	19	11	30
	Respuesta 8 días y 7 noches	5	2	7
	Finalistas en fase estatal	3		3
Nuevo Necaxa	Cantidad de participantes	19	15	37
	Respuesta 8 días y 7 noches	10	4	14
	Finalistas en fase estatal	3		3
Puebla	Cantidad de participantes	50	66	116
	Respuesta 8 días y 7 noches	19	22	41
	Finalistas en fase estatal	7	3	10
Tehuacán	Cantidad de participantes	49	59	108
	Respuesta 8 días y 7 noches	14	14	28
	Finalistas en fase estatal	8	6	14

Dentro de las respuestas de los estudiantes se pueden clasificar en que las pruebas tienen o no una representación gráfica según la categorización de Novick (Novick, 2001). El total de participantes que hicieron un diagrama fueron 259 y los que no incluyeron diagrama fueron 32 personas.

Los participantes que no incluyeron, sólo incluyeron la respuesta al acertijo matemático, e incluso la respuesta 8 días y 7 noches aparece en esta sección.

Tabla 5. No incluyen diagrama en el acertijo matemático.

Tipo de diagrama	Respuesta	Total	Suma de puntajes	Promedio	Mínimo	Máximo
No incluye diagrama	10 días y 10 noches	7	94	13.42	7	16
	8 días y 7 noches	5	106	21.2	13	27
	Diferencia de más de un día o noche	5	68	13.6	9	16
	No contestó la prueba	5	88	17.6	13	23
	10 días y 9 noches	3	40	13.33	11	17
	No contestó la sección de respuesta	3	46	15.33	13	17
	Intervalo de 1-4 días, 1-5 noches	3	39	13	9	16
	9 días y 8 noches	1	9	9	9	9

En la sección donde se pedía que el participante justificará la solución del problema mediante el uso de un diagrama, se pueden clasificar en tres secciones:

- el diagrama representa la respuesta 8 días y 7 noches y coincide con el diagrama
- el diagrama no representa el recorrido del caracol
- el diagrama representa el recorrido del caracol con la respuesta 8 días y 7 noches pero no es escribe en la sección de respuestas.
- El diagrama no representa la respuesta 8 días y 7 noche y tiene en la sección de respuesta 8 días y 7 noches

Los participantes que incluyeron un diagrama fueron 153, se podían observar tanto representaciones que no mostraban una aproximación del problema, sino que eran dibujos que mostraban: caracoles, arboles, sol, luna para representar el día y la noche, postes con un caracol. Así mismo se incluyen diagramas que incluyen la respuesta 8 días y 7 noches sin ser el diagrama una representación del recorrido del caracol. Además podemos encontrar diagramas como son: diagramas de red, postes, árboles, líneas numeradas horizontales y verticales, mapas mentales y gráficas (Tabla 6).

Tabla 6. El diagrama no representa el recorrido del caracol

Tipo de diagrama	Respuesta	Total	Suma de puntajes	Promedio	Mínimo	Máximo
El diagrama no representa el recorrido del caracol	10 días y 10 noches	53	819	15.45	6	24
	Diferencia mayor a 1 día o noche	23	309	13.43	7	21
	10 días y 9 noches	17	246	14.47	9	20
	8 días y 7 noches	8	115	14.37	13	17
	1-4 días y 1-5 noches	6	76	12.66	8	7
	9 días y 8 noches	5	66	13.2	10	15
	6 días y 5 noches	4	64	16	12	20
	7 días y 6 noches	3	35	11.66	10	13
	8 días y 8 noches	3	43	14.33	12	17
	5 días y 4 noches	2	25	12.5	10	15
	No contestó la prueba	2	18	9	7	11
	9 días y 9 noches	1	10	10	10	10
	9 días y 10 noches	1	16	16	16	16
	6 días y 6 noches	1	9	9	9	9

Algunas de las pruebas en la sección del diagrama el participante representaba la respuesta correcta, sin embargo, el efecto del priming del anclaje del sistema 1 tiende a que se aferre el pensamiento a la primera impresión de la solución del acertijo matemático (Tabla7) (Kahneman, 2011).

Tabla 7. El diagrama representa la respuesta 8 días y 7 noches, no se escribe en la sección de respuestas.

Tipo de diagrama	Respuesta	Total	Suma de puntajes	Promedio	Mínimo	Máximo
El diagrama representa la respuesta 8 días y 7 noches pero no se escribe en la sección de respuesta.	10 días y 10 noches	16	242	16.31	7	22
	7 días y 6 noches	8	142	17.75	14	21
	10 días y 9 noches	7	105	15	9	19
	9 días y 8 noches	5	97	19.4	17	22
	Diferencia mayor a 1 día o noche	5	57	14.2	9	20
	8 días y 7 noches	2	22	11	7	15
	6 días y 5 noches	1	11	11	11	11
	6 días y 7 noches	1	16	16	16	16
	7 días y 7 noches	1	23	23	23	23
	1-4 días y 1-5 noches	1	7	7	7	7

Por último se clasificó en otra sección, los diagramas cuya representación corresponde a la respuesta 8 días 7 y noches (Tabla 8).

Tabla 8. El diagrama representa la respuesta 8 días y 7 noches.

Tipo de diagrama	Respuesta	Total	Suma de puntajes	Promedio	Mínimo	Máximo
Diagrama representa el recorrido del caracol.	8 días y 7 noches	73	1335	18.28	6	29

En la sección donde se le pidió al participante que incluyera todos los diagramas realizados dentro de la hoja de aplicación, algunos de ellos solo respondieron la sección de respuesta sin incluir algún detalle como justificación, la respuesta 8 días y 7 noches fue clasificada (Tabla 9).

Tabla 9. El diagrama no representa la respuesta 8 días y 7 noches y tiene respuesta 8 días y 7 noches

Tipo de diagrama	Respuesta	Total	Suma de puntajes	Promedio	Mínimo	Máximo
No tiene diagrama que represente la respuesta 8 días y 7 noches, pero tiene la respuesta8 días y 7 noches.	8 días y 7 noches	4	64	16	15	18

Para evaluar la relación entre la calificación obtenida en el examen con las diferentes respuestas obtenidas en el acertijo, se realizó una rúbrica que contempla cuatro características (Anexo 3. Rúbrica para determinar la puntuación del acertijo matemático) en la cual se evaluó cada una asignándole una calificación y obteniendo un puntaje final para cuantificar el desempeño en la respuesta del acertijo. El índice de correlación **r** entre la calificación del examen **X** con el puntaje obtenido de la rúbrica **Y** es:

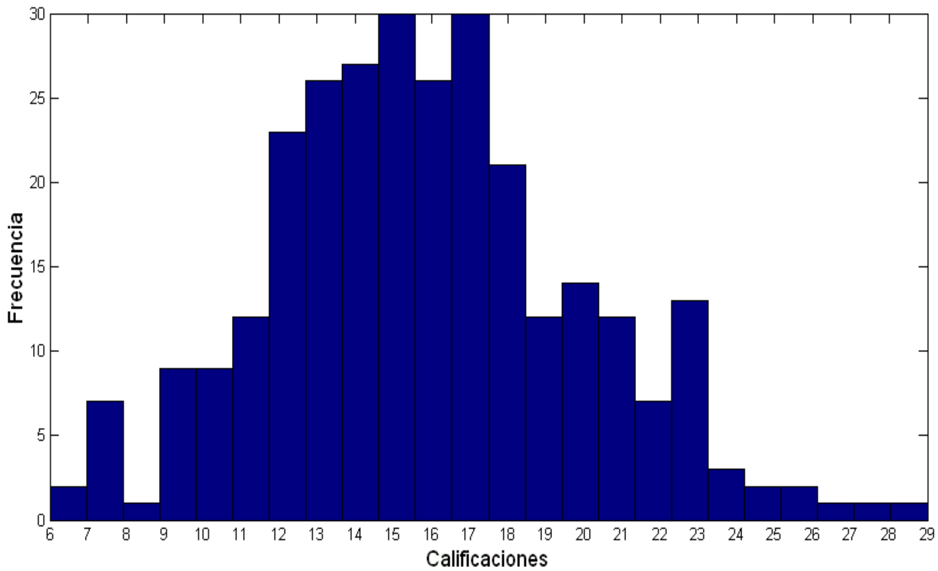
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Capítulo 4

Conclusiones

El número de participantes fue de 291, la calificación mínima obtenida en el examen del Concurso Estatal de Talentos en Física fue de 6 y la máxima de 29. Un histograma de calificaciones es mostrada en la Figura 54.

Figura 54. Gráfica de calificaciones del Concurso Estatal



Las respuestas obtenidas durante el acertijo matemático fueron 18, las cuales están representadas en la tabla 10.

Tabla10. Las respuestas obtenidas

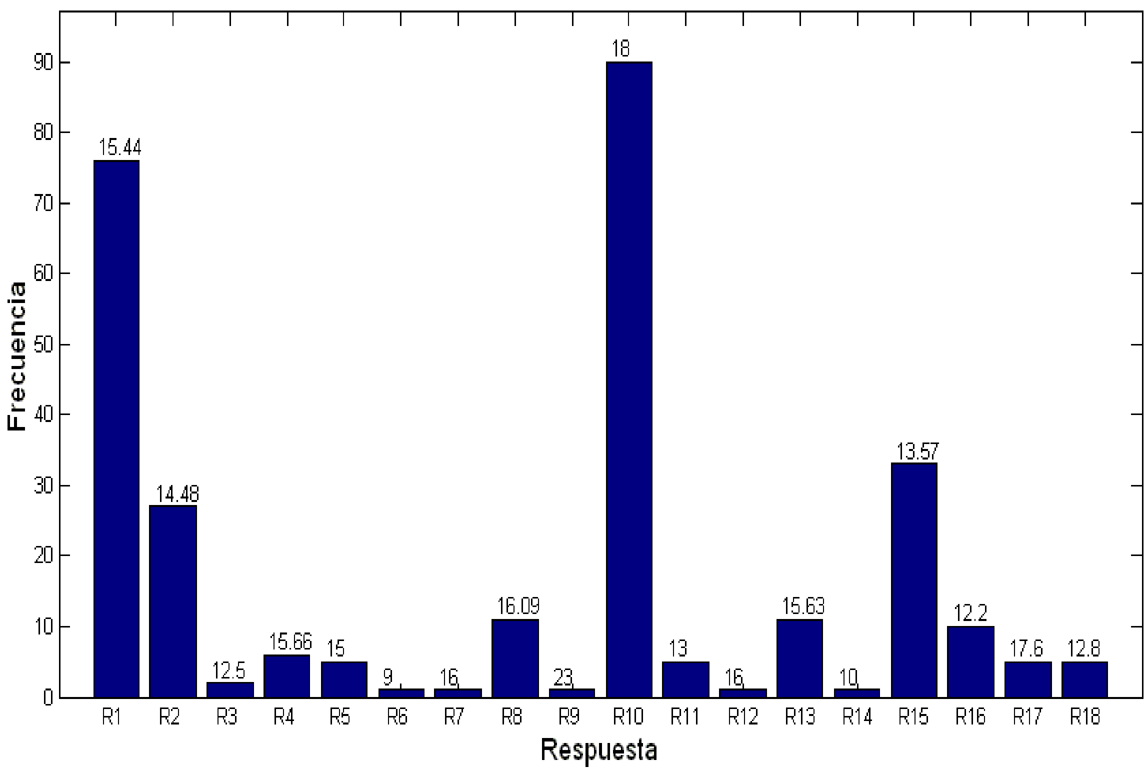
Respuesta	(Días, noches)	Respuesta	(Días, noches)
R1	(10,10)	R10	(8,7)
R2	(10,9)	R11	(8,8)
R3	(5,4)	R12	(9,10)
R4	(5,5)	R13	(9,8)
R5	(6,5)	R14	(9,9)
R6	(6,6)	R15	La diferencia es mayor a un día o noche
R7	(6,7)	R16	(1 a 4, 1 a 5)
R8	(7,6)	R17	No contestó la prueba
R9	(7,7)	R18	No contestó la sección de respuesta

Las respuestas obtenidas en el acertijo matemático y el promedio que se obtuvo en el Concurso Estatal de talentos en Física 2017 se puede observar su frecuencia mediante la gráfica siguiente (Figura 55).

Los promedios más altos son los siguientes:

- R10: 8 días y 7 noches. Promedio: 18
- R8: 7 días y 6 noches. Promedio: 16.09
- R13: 9 días y 8 noches. Promedio: 15.63
- R1: 10 días ya 10 noches. Promedio: 15.44
- R2: 10 días y 9 noches. Promedio: 14.48
- R15: Diferencia mayor a un día y una noche. Promedio: 13.57

Figura 55. Gráfica de clasificación de respuestas y su frecuencia.



La respuesta con mayor número de participantes fue R10 y es el mejor promedio de todas las respuestas, además representa el 31 % de la población total. La respuesta R1: 10 días y 10 noches, representa el 26 % de la población total.

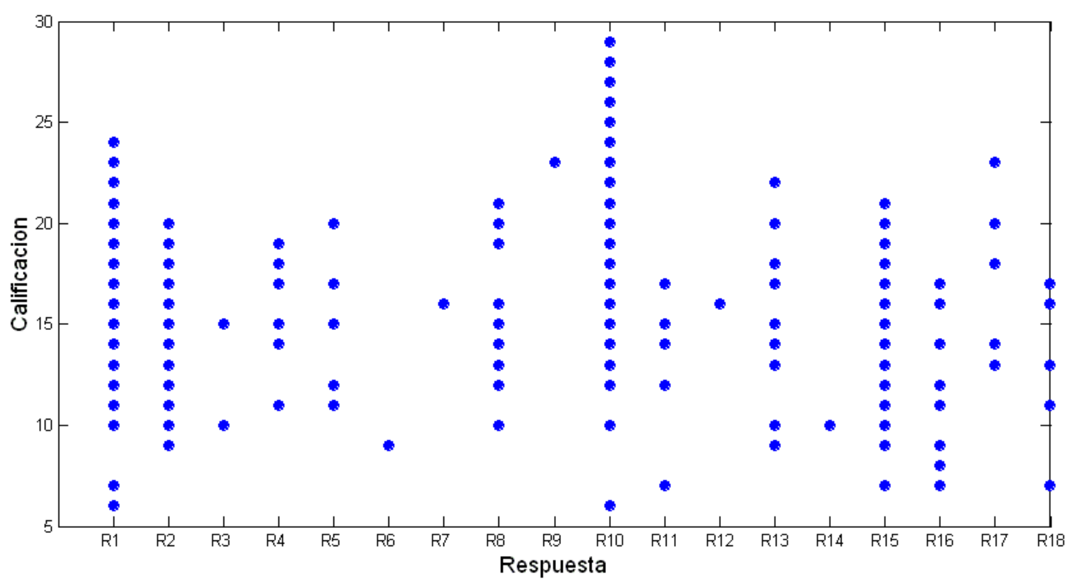
Los estudiantes que dieron las “respuestas rápidas” (10 días y 10 noches o 10 días y 9 noches) tienen menores promedios (15.44 y 14.48).

El menor promedio de puntaje (13.57) lo tienen los estudiantes que dieron las respuestas en que los números de días y noches difieren un número mayor que uno. Eso no sorprende porque estos estudiantes no notan que su respuesta no tiene sentido en el mundo real. Esta falta del pensamiento crítico (que ejerce el sistema 2) fácilmente tiene efectos negativos en los problemas de física.

El sistema 1 "pensamiento rápido", asocia la cantidad que se puede subir durante un día, esto es 3 metros menos 2 metros, nos da 1 metro por día. Así el sistema 1 se tiene la idea que el recorrido del caracol es independiente por día con lo cual para subir los 10 metros del poste, el caracol tardará 10 días y 10 noches. En cambio, el sistema 2 "pensamiento lento", no asocia que los días sean disjuntos y lo ve como una sucesión que depende del elemento anterior, con esto el uso de un diagrama como apoyo visual, el pensamiento lento llegará a la respuesta 8 días y 7 noches.

La siguiente gráfica (Figura 56), representa la distribución del puntaje obtenido en el Concurso Estatal de Talentos en Física versus las respuestas obtenidas en el acertijo matemático. Note que los puntajes más altos son los de la respuesta 8 días y 7 noches (R10).

Figura 56. Calificaciones obtenidas por respuesta.



Además en la tabla 8, se puede apreciar que la respuesta 8 días y 7 noches donde el diagrama corresponde al recorrido de la misma, tiene un promedio de 18.28, que es el promedio más alto en las comparaciones de diagramas y puntajes, superior al puntaje obtenido por los 90 participantes.

Para sacar la relación entre el puntaje obtenido en el Concurso Estatal de Talentos en Física y el acertijo matemático se requirió de una rúbrica para asignarle un valor numérico al acertijo matemático, se evaluaron todas las pruebas y se calculó una calificación para cada prueba. (Ver Anexo 3: Rúbrica).

Se obtuvo el índice de correlación entre las calificaciones del examen y el puntaje de la rúbrica (Tabla 11), esto se hizo en cada grupo de respuestas para apreciar mejor la dependencia que se tiene con los criterios de la rúbrica. El grupo de participantes que obtuvo la respuesta 8 días y 7 noches (R10) es el que obtuvo los mejores puntajes, en conjunto su promedio es de 18 puntos y sus calificaciones oscilan entre 6 y 29 puntos; observamos que las calificaciones de este grupo contestó de manera correcta mantiene una correlación del 71% con los puntajes obtenidos con la rúbrica, es decir los alumnos que sacaron las menores calificaciones dentro de este grupo no dieron muchos detalles que justificaran la prueba, y viceversa, los alumnos de este grupo que obtuvieron las mejores calificaciones dieron bases sólidas que respaldaban sus respuestas, usaron más los diagramas de rectas numéricas horizontales y verticales, sucesiones numéricas, gráficas poligonales, gráficas de barras, cálculos numéricos.

Tabla11. Las respuestas obtenidas

Respuesta	Calificación Promedio	Puntaje promedio de la rúbrica	Índice de Correlación	Frecuencia
R1	15.44	0.29	0.5783	76
R2	14.48	1.26	0.1351	27
R8	16.09	0.19	0.2095	11
R10	18.00	0.93	0.7146	90
R13	15.63	3.90	0.1876	11
R15	13.57	3.94	0.0058	33

Finalmente si tomamos como referencia que la puntuación mínima y máxima fue de 6 y 29 puntos en el Examen de talentos y estudiamos el comportamiento de las respuestas en los intervalos de puntajes (6-13) y (22-29) podemos ver la relación entre las respuestas obtenidas en el acertijo matemático como sigue (Tabla 12 y 13).

Tabla12. Las respuestas obtenidas en el intervalo 6 a 13 del Examen del Concurso

Intervalo	Respuesta del acertijo	# de personas	Promedio	Puntajes	Puntaje	
					Mín.	Máx.
(6 a 13) Total: 89 personas	10 días y 10 noches	25	11.32	6,7,10,11,12,13	6	13
	Diferencia mayor a un día o una noche	17	11	7,9,10,11,12,13	7	13

	8 días y 7 noches	12	11.75	6,10,12,13	6	13
	10 días y 9 noches	11	11.27	9,10,11,12,13	9	13
	1-4 días y 1-5 noches	6	9.66	7,8,9,11,12	7	12
	9 días y 8 noches	3	10.66	9,10,13	9	13
	7 días y 6 noches	3	11.66	10,12,13	10	13
	No contesto la sección de respuesta	3	10.33	7,11,13	7	13
	6 días y 5 noches	2	11.5	11,12	11	12
	8 días y 8 noches	2	9.5	7,12	7	12
	5 días y 4 noches	1	10	10	10	10
	5 días y 10 noches	1	11	11	11	11
	9 días y 9 noches	1	10	10	10	10
	No contesto la prueba	1	13	13	13	13

Tabla13. Las respuestas obtenidas en el intervalo22 a 29 del Examen del Concurso

Intervalo	**Respuesta del acertijo**	**# de personas**	**Promedio**	**Puntajes**	**Puntaje**	
					Mín.	Máx.
(22 a 29) Total: 30 personas	8 días y 7 noches	24	23.91	22,23,24,25,26,29	22	29
	10 días y 10 noches	3	23	22, 23, 24	22	24
	7 días y 7 noches	1	23	23	23	23
	9 días y 8 noches	1	22	22	22	22
	No contesto la prueba	1	23	23	23	23

De tal manera, se puede concluir que el acertijo matemático de caracol usado en este estudio podría ser un buen predictor general de los desempeños de los estudiantes en las pruebas de física. En otras palabras, si dos grupos de estudiantes tienen el mismo conocimiento previo sobre los conceptos y las leyes de física, el grupo que da respuesta correcta al acertijo de caracol (8 días y 7 noches) tendrá mejor puntaje en los problemas de física que el grupo que da respuesta rápidas (10 días y 10 noches o 10 días y 9 noches).

Bibliografía

Arnold, V. I. (2004). *Problems for children from 5 to 15*. Retrieved from http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Arnold_en.pdf

Booth, R. &. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior , 18* (2), 169-190.

Cenobio, C. C., Slisko, J. A., Hernández, R. L. A., Corona, C. A. (2017). A few considerations of climbing-snail problem: Fibonacci's error, problem's popularity and Mexican students' performances. *Inovacije u nastavi-časopis za savremenu nastavu , 30* (1), 25-42.

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matemática. *La mtematica e la sua didattica , 3*, 328-370.

Danesi, M. (2002). The puzzle Instinct: The meaning of puzzles in human life. *Bloomington: Indiana University Press* .

Deschauer, S. (2013). Das zweite Rechenbuch von Adam Ries: eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters. . *Springer-Verlag* , 107.

Diezmann, C. (2005). Assessing primary students' knowlegde of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. (A. D. In. Clarkson, Ed.) *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* , 289-296.

Diezmann, C. M. (1997). The effect of instruction on students' generation of diagrams. In Biddulph. (K. (. F. & Carr, Ed.) *Proceedings 20th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia: People in mathematics education.* , 140-146.

Diezmann. C., &. E. (2001). Promoting the use of diagrams as tolds for thinking. *The roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook* , 1-23.

Dufour-Janvier, B. B. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. (C. Janvier, Ed.) *Problems of representationin the teaching and learning of mathematics* , 10-120.

Elia, I. G. (2007). The effects of different models of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning ans Instruction , 17*, 658-672.

English, L. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematics Behavior , 15*, 81-112.

Frankish, K. (2010). Dual-process and dual-system theories of reasoning. *Philosophy Compass , 5* (10), 914-926.

Garatsis, A. &. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *Proceedings of the 28 th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2* , 447-454.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving-a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education , 23*, 242-273.

Holtnov, J. (25 de Noviembre de 2011). *The New York Times*. Obtenido de Two Brains Running: http://www.nytimes.com/2011/11/27/books/review/thinking-fast-and-slow-by-daniel-kahneman-book-review.html

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow.* Macmillan.

Meyer III, E. F. (2014). *Guide to teaching puzzle-based learning.* Springer.

Novick, L. &. (2001). To matrix, network, or hierarchy that is the question. *Cognitive Psychology , 42*, 158-216.

Pantziara, M. G. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics* , 72-139.

Peano, G. (1925). Giochi di aritmetica e problemi interessanti: Operazioni curiose-indovinelli aritmetici-abaco-operazioni aritmetiche semplificate-problemi sul calendario anni, mesi, giorni della settimana, età della luna, pasqua-problemi pratici. . *GB Paravia & C..* , 3-4.

Polya, G. &. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research , 3* (11), 1187-1197.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* , 334-368.

Stanovich, K. (2011). *Rationality and the reflective mind.* Oxford: Oxford University Press.

Tiberghien, A. C. (2014). The evolution of classroom physics knowledge in relation to certainty and uncertainty. *Journal of Research in Science Teaching , 51*, 930 - 961.

Uesaka, Y. M. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use the diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction , 17*, 322-335.

van Essen, G. &. (1990). Using self-generated drawings to solve artithmetic word problems. *Journal of Educational Research., 83*(6), 301-312.

Zhang, J. &. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive Science , 8*, 87-122.

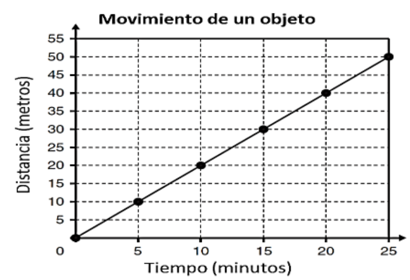
ANEXO 1. Examen del Concurso Estatal de Talentos en Física

Concurso Estatal de Talentos en Física del Estado de Puebla

Examen Estatal de Talentos en Física 2017

Instrucciones: No escribas en este cuaderno. Se te dará una hoja para tus operaciones. Lee cuidadosamente las preguntas e indica el inciso que corresponda en la hoja de respuestas.

1. La gráfica siguiente muestra el movimiento de un objeto en varios instantes. ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto?
   a) 0.5 m/min
   b) 2 m/min
   c) 25.0 m/min
   d) 50.0 m/min
   e) 60.0 m/min



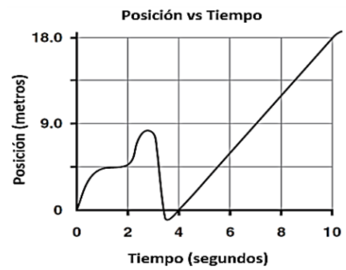
2. Un resorte con escala en Newton (dinamómetro) es jalado con diferentes fuerzas y se registraron los datos obtenidos en la tabla. Al jalar el resorte se estira 3.5 cm, ¿Cuál debe ser la lectura del dinamómetro?
   a) 12 N
   b) 13 N
   c) 14 N
   d) 15 N
   e) 16 N

TABLA DE DATOS	
Distancia estirada	Lectura del dinamómetro
1.0 cm	4 N
1.5 cm	6 N
2.0 cm	8 N
2.5 cm	10 N

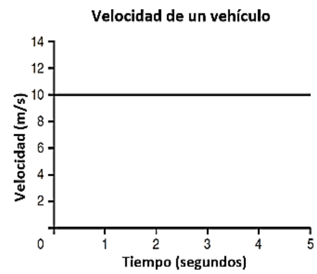
3. ¿Cuánto tiempo se requiere para que un ciclista recorra una distancia de 100 m con una velocidad promedio de 2m/s?
   a) 0.02 s
   b) 50 s
   c) 100 s
   d) 200 s
   e) 400 s

4. ¿Cuál de los siguientes incisos representa la velocidad de un objeto en movimiento?
   a) 40
   b) 40 m norte
   c) 40 m/s
   d) 40 m/s norte
   e) 40 s

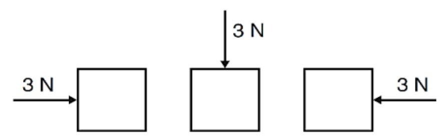
5. La siguiente gráfica muestra la posición de un objeto que cambia respecto al tiempo. ¿Cuál es la velocidad del objeto durante el intervalo de tiempo de 4 a 10 segundos?
   a) 2 m/s
   b) 3 m/s
   c) 8 m/s
   d) 16 m/s
   e) 14 m/s



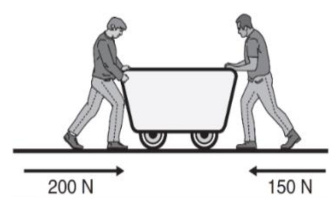
6. La gráfica siguiente muestra la velocidad de un vehículo entre 0 y 5 s. ¿Qué tan lejos viajó el vehículo durante los primeros 2 segundos?
   a) 0.2 m
   b) 5 m
   c) 10 m
   d) 20 m
   e) 15m



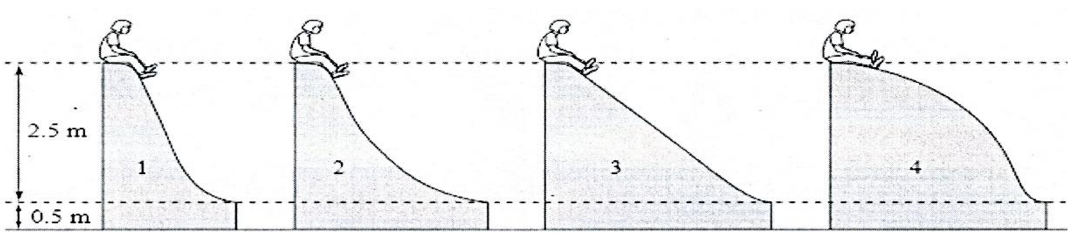
7. Una fuerza se ejerce sobre cada objeto. ¿Qué se puede concluir acerca de estas fuerzas?
   a) Es la misma fuerza porque apuntan hacia el objeto.
   b) Es la misma fuerza porque tienen la misma magnitud.
   c) Es diferente porque tienen distintas magnitudes.
   d) Es diferente porque tienen distintas direcciones.
   e) Ninguna de las anteriores.



8. Dos jóvenes empujan un carrito, como se muestra en la figura. La fuerza resultante es:
   a) 50 N
   b) 150 N
   c) 200 N
   d) 350 N
   e) 40 N

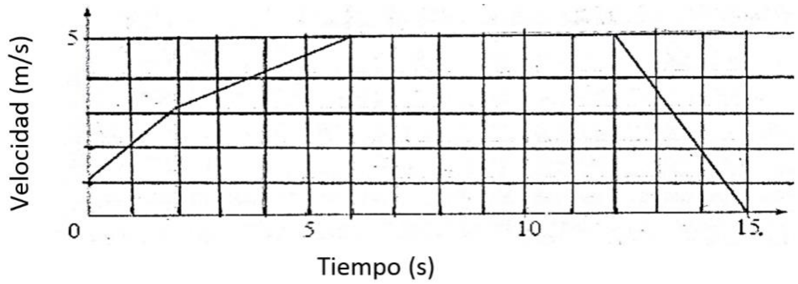


9. Una niña desea seleccionar uno de los perfiles de las resbaladillas ilustrados abajo para obtener la mayor rapidez posible cuando llegue a la parte inferior, ¿Cuál le aconsejarías?



   a) Perfil 1
   b) Perfil 2
   c) Perfil 3
   d) Perfil 4
   e) No importa, su rapidez debería de ser la misma para cada opción.

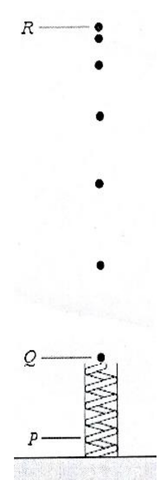
Con ayuda de la siguiente figura contesta las preguntas 10,11 y 12.



10. ¿Cuál era la aceleración media del objeto entre t = 0s y t = 6.0s?
    a) 3.0 m/s^2
    b) 1.5 m/s^2
    c) 0.83 m/s^2
    d) 0.67 m/s^2
    e) Ninguna de las anteriores

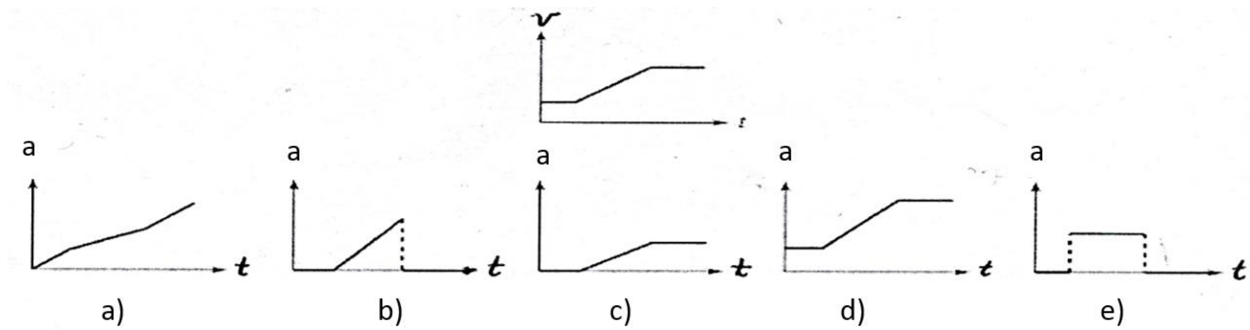
11. ¿Qué tan lejos viajó el objeto entre t = 0 s y t = 6.0 s?
    a) 20.0 m
    b) 8.0 m
    c) 6.0 m
    d) 1.5 m
    e) Ninguna de las anteriores

12. ¿Cuál es la rapidez promedio del objeto para los primeros 6.0s?
    a) 3.3 m/s
    b) 3.0 m/s
    c) 1.8 m/s
    d) 1.3 m/s
    e) Ninguna de las anteriores

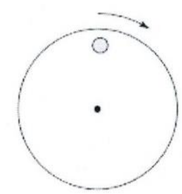


13. La figura de la derecha representa una fotografía estroboscópica de una pequeña bola lanzada directamente hacia arriba por un resorte. El resorte con la bola en la parte superior fue comprimido inicialmente hasta el punto marcado con P y liberado. La bola se lanza con el resorte en el punto marcado con Q, y alcanzó su punto más alto en el punto marcado con R. Suponiendo que la resistencia del aire fuera despreciable.
    a) La aceleración de la bola era mayor justo antes de alcanzar el punto Q (estando aun en contacto con el resorte).
    b) La aceleración de la bola estaba decreciendo en su camino del punto Q al punto R.
    c) La aceleración de la bola era cero en el punto R.
    d) Todas las respuestas anteriores son correctas.
    e) La aceleración de la bola era la misma para todos los puntos en su trayectoria desde Q hasta R.

14. La velocidad de un objeto como función de tiempo se muestra en la siguiente gráfica. ¿Cuál de las gráficas 1-5 representan mejor la relación de aceleración contra el tiempo para este objeto?



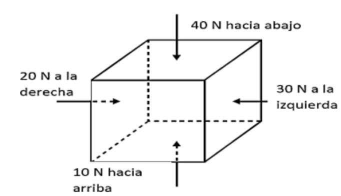
15. Un pequeño cilindro de metal reposa robre una mesa giratoria circular, el cilindro tiene una masa de 0.10 kg y que el coeficiente de fricción estática entre la superficie y el cilindro es 0.12. Si el cilindro está a 0.20 m del centro de la mesa giratoria, ¿con qué rapidez máxima **v** puede moverse el cilindro a lo largo de su trayectoria circular sin resbalar?



   a) 0 <**v** ≤ 0.5 m/s
   b) 0.5 <**v** ≤ 1.0 m/s
   c) 1.0 <**v** ≤ 1.5 m/s
   d) 1.5 <**v** ≤ 2.0 m/s
   e) 2.0 <**v** ≤ 2.5 m/s

16. Una pelota cae desde lo alto de un edificio. A medida que cae la fuerza de resistencia del aire hacia arriba va creciendo hasta que se iguala a la fuerza de gravedad. Cuando esto sucede la pelota
   a) Será aplastada por ambas fuerzas
   b) Cae a una rapidez constante
   c) Continúa acelerándose
   d) Se detendrá lentamente
   e) Ninguna de las anteriores

17. Cuatro fuerzas se ejercen en la caja, como lo muestra la figura. La caja incrementa su velocidad hacia



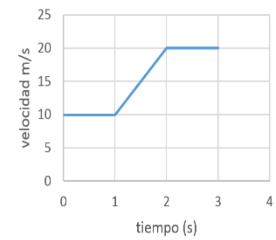
   a) Hacia abajo y hacia la izquierda.
   b) Hacia abajo y hacia la derecha.
   c) Hacia arriba y a la izquierda.
   d) Hacia arriba y a la derecha.
   e) Ninguno de los anteriores.

18. Cuando un cuerpo cae su velocidad
   a) Aumenta aproximadamente en 10 m/s cada segundo
   b) Disminuye aproximadamente en 10 m/s cada segundo
   c) Aumenta al principio hasta llegar a 9.8 m/s
   d) Se mantiene igual
   e) Crece primero y luego decrece.

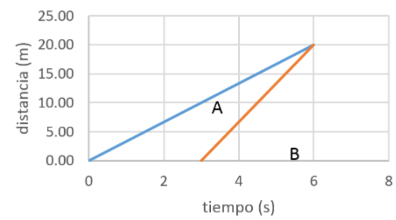
19. Juan viaja en bicicleta con una velocidad de 10 km/h y Pedro viaja en su bicicleta a 12 km/h. Si salen al mismo tiempo del mismo lugar, ¿En qué momento Pedro lleva una ventaja de 500 m?
   a) t= 2 horas
   b) t= 1 horas

c) t= 1/2 hora
d) t= 15 minutos
e) t= 7.5 minutos

20. La gráfica representa un movimiento en el que
    a) v = 0
    b) La aceleración de 2 a 3 segundos es mayor que la de 0 a 1 segundos.
    c) De 0 a 1 segundos y de 2 a 3 segundos la a = 0
    d) De 1 a 2 segundos la aceleración es negativa
    e) Todas las anteriores son ciertas



21. Las rectas representas las gráficas de distancia contra tiempo de los cuerpos A y B, y nos permiten afirmar que:
    a) A recorre una distancia mayor que B.
    b) El movimiento de B es acelerado.
    c) A y B se mueven igual.
    d) La velocidad de B es el doble que la de A
    e) La velocidad de A es el doble que la de B



22. En una cocina situada en la Ciudad de Puebla, sobre la estufa está en una olla llena de agua. El agua ha empezado a hervir rápidamente. La temperatura más probable del agua es alrededor de
    a) 93 °C
    b) 98 °C
    c) 110 °C
    d) 120 °C
    e) Ninguna de las respuestas anteriores puede ser correcta.

23. Luis toma dos tazas de agua a 40 °C y las mezcla con una taza de agua de 10 °C. ¿Cuál es la temperatura más probable de la mezcla?
    a) 20 °C
    b) 25 °C
    c) 30 °C
    d) 50 °C
    e) 90 °C

24. Cuatro estudiantes estuvieron discutiendo que hicieron de chamacos. Se escuchó la siguiente conversación: Ana: “Yo usé cobertores para envolver mis muñecas pero nunca pude entender por qué ellas no se calentaban”. ¿Con quién estás de acuerdo?
    a) Nicolás explica: “Es por que tus cobertores probablemente eran aislantes pobres”
    b) León replico: “Es por que tus cobertores probablemente eran conductores pobres”
    c) Juan también replica: “Es por que las muñecas eran de material que no mantienen bien el calor”
    d) Carlos dijo: “Es porque las muñecas eran de material que toma un largo tiempo en calentarse”
    e) Jesús dijo: “Todos están equivocados”
25. ¿Cuál es la densidad de un cubo de hierro de 64 g que desplaza 8 mililitros de agua?
    a) 512 g/ml
    b) 32 g/ml
    c) 8 g/ml
    d) 4 g/ml
    e) 6 g/ml

26. La siguiente tabla muestra propiedades de cuatro distintos materiales. Uno de los materiales es corcho, un tipo de madera que flota en el agua. Dado que la densidad del agua es de 1 g/ml, ¿cuál de los ejemplos de la tabla es el que más se acerca a la densidad del corcho?
   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5

PROPIEDADES FÍSICAS		
Número de muestra	Masa	Volumen
1	89 g	10 ml
2	26 g	10 ml
3	24 g	100 ml
4	160 g	100 ml

27. Las densidades de cuatro diferentes maderas se muestran en la tabla de la derecha. ¿Qué madera se hunde cuando la colocamos en un líquido de densidad 1.14 g/cm^3?
   a) Madera de África
   b) Madera de balsa
   c) Cedro
   d) Palo de hierro
   e) Ninguna de las anteriores

DENSIDADES DE MADERA	
Tipo de madera	Densidad (g/m^3)
Madera de África	0.98
Madera balsa	0.14
Cedro	0.55
Palo de hierro	1.23

28. La principal característica de los gases es que...
   a) sus moléculas están muy próximas.
   b) Su temperatura es alta.
   c) presionan más las paredes del recipiente
   d) sus moléculas están más separadas.
   e) Ninguna de las anteriores.

29. Si al recipiente donde hay un cubo flotando le agregamos sal, el cubo:
   a) se hunde más
   b) flota mas
   c) queda en el mismo lugar
   d) ninguna de las anteriores

30. Un cuerpo descansa sobre una balanza dentro de un cilindro al que se le ha extraído el aire. Al permitir que entre el aire, el peso registrado en la balanza:
   a) Aumenta
   b) Disminuye
   c) Queda igual
   d) Oscila alrededor del mismo peso
   e) No se sabe

31. Un cuerpo de cierta sustancia tiene una densidad de 1.2 g/cm^3. Al colocarlo en un tanque de agua, la fuerza de empuje sobre este cuerpo es
   a) Mayor que el peso
   b) Menor que el peso
   c) Igual al peso
   d) No está relacionada con el peso
   e) No se puede saber

32. El vapor en un recipiente cerrado aumenta su temperatura de 80°C a 90°C, si su presión inicial era 1.1 atmosferas, ¿cuál será la nueva presión?
   a) (353K/363K) x (1.1 atmosferas)
   b) (363K/353K) x (1.1 atmosferas)
   c) (90ºC/80ºC) x (1.1 atmosferas)
   d) (80ºC /90ºC)x (1.1 atmosferas)
   e) No se sabe

33. Si dos gases tienen igual volumen, igual presión e igual temperatura, entonces
   a) Pesan lo mismo
   b) Tienen la misma densidad
   c) No se comparan
   d) Tienen el mimo número de moléculas
   e) Tienen el mismo número de electrones

34. Un gas se expande isotérmicamente hasta duplicar su volumen, por lo que
   a) Se duplica la presión
   b) Se duplica la temperatura
   c) Queda igual la presión
   d) La presión se reduce a la mitad
   e) Cambia la viscocidad

35. Frente al polo norte de un imán recto se coloca una partícula con carga eléctrica positiva por lo que
   a) Se atraen
   b) Se repelen
   c) El imán no interacciona con la carga eléctrica.
   d) No se sabe
   e) La fuerza eléctrica equilibra a la fuerza magnética.

36. Dos cuerpos cargados eléctricamente se repelen con una fuerza F cuando están a una distancia D. Cuando están a una distancia D/3 la fuerza es
   a) $\frac{F}{3}$
   b) $\frac{F}{9}$
   c) 3F
   d) 9F
   e) Ninguna de las anteriores.

37. Dos cuerpos con cargas iguales de $1x10^{-6}$ C están separados 10 cm. ¿La fuerza entre ellos es?
   a) 90 N
   b) 0.9 N
   c) 10^{-6} N
   d) $9x10^{-3}$ N
   e) Ninguna de las anteriores

38. Si un cuerpo cargado negativamente se acerca una esfera metálica neutra. Se observará que la esfera metálica:

a) Es atraída
b) Es repelida
c) No interacciona
d) Oscila
e) Ninguna de las anteriores

39. En un circuito, dos resistencias eléctricas conectadas en paralelo se pueden substituir por una resistencia equivalente r_e tal que
a) $r_e = \frac{r_1}{r_2}$
b) $r_e = r_1 + r_2$
c) $r_e = r_1 - r_2$
d) $\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
e) $r_e = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

40. En un circuito, dos resistencias eléctricas conectadas en serie se pueden substituir por una resistencia equivalente r_e tal que
a) $r_e = \frac{r_1}{r_2}$
b) $r_e = r_1 + r_2$
c) $r_e = r_1 - r_2$
d) $\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
e) $r_e = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

41. Un rayo de luz incide sobre una superficie brillante. El ángulo de incidencia con relación al ángulo de reflexión es:
a) Mayor
b) Menor
c) Igual
d) No se puede saber
e) Ninguna de las anteriores

42. Cuando la luz incide sobre un objeto, la luz puede ser:
a) Absorbida
b) Reflejada
c) Transmitida
d) Una combinación de las anteriores
e) Ninguna de las anteriores

43. El cambio de dirección que experimenta un haz de luz al pasar del aire a un vidrio se llama:
a) Absorción
b) Reflexión
c) Refracción
d) Transmisión
e) Ninguna de las anteriores

44. Cuando un rayo de luz incide sobre la superficie de un vidrio, quedan en el mismo plano:
   a) Los rayos incidentes y reflejados únicamente.
   b) Los rayos reflejados y refractados únicamente.
   c) Los rayos incidentes y refractados únicamente.
   d) Los rayos incidentes, reflejados y refractados.

45. Se dice que un objeto es transparente si:
   a) Refleja toda la luz incidente
   b) Refracta toda la luz incidente
   c) Transmite toda la luz incidente
   d) Absorbe toda la luz incidente
   e) Refleja, refracta y absorbe la luz incidente

ANEXO 2. Acertijo matemático

Nombre: ____ Edad: ____años y _____meses

Un caracol que sube y baja

Sin revelar sus razones, un caracol decide trepar un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche resbala 2 metros, ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?

Mi respuesta es: ____ días y ____ noches.

1. **En el espacio abajo, describe detalladamente cómo has pensado y razonado para llegar a tu respuesta.**

2. **Si para representar mejor tu respuesta a otras personas es necesario usar algún apoyo visual (dibujo, gráfica, esquema,…), incluye tal visual en el espacio abajo.**

3. **¿Por qué crees que tu respuesta es correcta? Describe tus razones en el espacio abajo.**

La prime razón es

La segunda razón es

La tercera razón es

ANEXO 3. Rúbrica para determinar la puntuación del acertijo matemático

Indicador	Si lo tiene (1 punto)	No lo tiene (0 Puntos)
Respuesta 8 días y 7 noches.	Tiene escrita en la sección de respuesta: 8 días y 7 noches.	No tiene la respuesta 8 días y 7 noches.
Comprensión del problema.	Tiene una secuencia el recorrido uniendo días y noches.	El recorrido de los días es disjunto.
Diagrama	Representa el recorrido de 8 días y 7 noches.	No representa el recorrido del caracol de 8 días y 7 noches.
Incluye detalles	Incluye al menos dos razones que dan seguimiento a su razonamiento de 8 días y 7 noches.	Incluye una razón o ninguna que dé seguimiento a la respuesta correcta.
Puntuación final (suma).		