Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES DE PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Marisol Lucas Carmona

DIRECTORA DE TESIS

Dra. Olga Leticia Fuchs Gómez

CODIRECTORA DE TESIS

MC. Ma. Guadalupe Raggi Cárdenas

Diciembre 2012

ÍNDICE

Agradecimientos

Me gustaría terminar esta tesis agradeciendo a la gente que de una u otra forma contribuyeron al éxito de este trabajo. Sin embargo, es difícil recordar a cada persona que ha ayudado, alentado o contribuido a continuar con mis estudios.

En primer lugar me gustaría agradecer a Dios por darme la fuerza para poder concluir con mis estudios, por no quedarme en el intento, por darme salud para estar a donde estoy ahora.

A mis padres, por darme su apoyo en todos los sentidos, por no perder la confianza en mí, por estar en todo momento a mi lado, dándome sus consejos, por su ayuda en momento difíciles, por su gran amor, gracias a ellos fue posible este trabajo.

A mi abuelo, porque siempre me dio palabras de amor, de aliento, porque me daba a entender lo orgulloso que esta de mí, dándome con eso ganas de seguir adelante.

A la Dra. Olga Leticia Fuchs Gómez que ha sido la directora de tesis. Su consejo sabio, las críticas perspicaces y ánimo paciente ayudaron a la redacción de la tesis de innumerables maneras.

También me gustaría agradecer a la MC. Ma. Guadalupe Raggi Cárdenas, cuyo firme apoyo a este proyecto fue muy necesario y apreciado.

En general a todos los profesores que me impartieron clases al igual que a todos los que me ayudaron con la elaboración de esta tesis.

A mis amigas, Socorro, Nantzy e Irene, porque siempre estuvimos juntas a lo largo de la carrera, apoyándonos en cada paso, y no sólo en los estudios. También a otra gran amiga, Ivett, que con su ejemplo de vida me enseño que nada es imposible.

Gracias a la vida por haberlos conocido a todos ustedes y por permitirme ser parte de su vida.

Introducción y Antecedentes

Durante los últimos años, en México se ha intentado crear un nuevo marco educativo de calidad centrado en el aprendizaje y en el desarrollo de competencias debido, entre otros factores, a la globalización y al neoliberalismo económico, que inducen a una feroz competitividad laboral y al desarrollo de habilidades de pensamiento para poder subsistir. Una de las tareas básicas de la escuela primaria es enseñar a leer y escribir, pero aunque hoy en día esta enseñanza es obligatoria, las oportunidades de concluirla no se encuentran al alcance de todos. El analfabetismo en nuestro país alcanza niveles alarmantes. Entre sus causas se encuentran los fracasos escolares y la deserción, que se encuentra ligada a las condiciones socioeconómicas de los núcleos de población con bajos ingresos económicos; estos fenómenos se presentan en todos los niveles escolares desde el básico hasta el superior. Según el informe de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) publicado en Diciembre de 2007 sobre los resultados de la evaluación del Programa Internacional para el Seguimiento de los Conocimientos de los Alumnos (PISA), y que proporciona indicadores internacionalmente comparables que ofrecen una visión de los factores que influyen en el desarrollo de habilidades de lectura en la casa, en la escuela, y cómo interactúan estos factores entre sí respecto al aprovechamiento escolar en las áreas de ciencia, lectura y matemáticas, México se ubica en el último lugar de los 30 países que integran la OCDE.

Dicha evaluación fue aplicada en 2006 en 57 países a alumnos de 15 años. En México, la prueba fue realizada por 30 mil estudiantes: 77 por ciento estudiantes del primer año de Bachillerato y el 33 por ciento restante de tercer grado de secundaria. De acuerdo a los resultados, en el desempeño de ciencias nuestro país obtuvo 410 puntos, más abajo que Turquía (424) y Grecia (473), y de naciones que no pertenecen a la OCDE como Chile (438) y Uruguay (428). Los países que quedaron en primer lugar, en el área de ciencias son: Finlandia con 563 puntos, después se ubica Hong Kong (542), Canadá (534), Taiwán (532), Estonia y Japón (531 cada uno). Sin embargo, tres países latinoamericanos que no pertenecen a la OCDE, Argentina (391), Brasil (390) y Colombia (388) obtuvieron puntajes menores. Estos resultados nos permiten observar que la diferencia en el nivel de conocimiento en ciencias entre los estudiantes mexicanos y los finlandeses es equivalente a cuatro años de formación. México está por debajo del nivel 2 de PISA de una escala de seis, respecto al aprovechamiento escolar en ciencia y tecnología, este representa el mínimo necesario para la vida en la sociedad actual. De acuerdo al diagnóstico realizado por la OCDE ningún alumno mexicano se ubica en el nivel 6 de aprovechamiento. Este nivel implica que los alumnos pueden identificar consistentemente, explicar y aplicar el conocimiento científico a situaciones de su vida. Los resultados de PISA nos indican que alrededor del 50 por ciento de alumnos se encuentran por debajo del nivel 2, lo que implica que muchos jóvenes no están siendo preparados para una vida fructífera en la sociedad actual.

En el área de Matemáticas, el informe PISA asegura que los estudiantes mexicanos han mejorado su desempeño, mientras que en 2003 obtuvo 385 puntos, en 2006 alcanzó una puntuación de 406. Sin embargo, se encuentra por debajo de la media de la OCDE. Taiwán encabeza la lista con 549 puntos, lo sigue Finlandia con 548, Hong Kong y Corea del Sur con 547. Los países latinoamericanos obtuvieron en Matemáticas los siguientes resultados: Chile (411 puntos), Uruguay (427), Argentina (381) y Colombia y Brasil (370).

En relación a la Lectura, los estudiantes mexicanos mejoraron su aprovechamiento respecto al estudio del 2003 obteniendo 410 puntos.

Al analizar los resultados anteriores, podemos ver que México adquirió avances modestos entre la puntuación obtenida en 2003 y en 2006 con respecto a otros países. En el caso de ciencias el puntaje pasó de 405 a 410, en lectura de 400 a 410 y el mayor incremento lo tuvo en matemáticas donde pasó de 385 a 406 puntos.

En resumen, los resultados de PISA muestran que en el área de ciencias, 51 por ciento de los alumnos se situó en los niveles cero y uno, mientras que sólo 0.3 por ciento llegó al nivel cinco, y nadie de ellos al seis, que son los de mejor desempeño. Respecto a la lectura, 47 por ciento de los alumnos mexicanos estuvieron en los niveles más bajos y apenas 6 por ciento se colocó entre los niveles cuatro y cinco, contra 29 por ciento del promedio de la OCDE en las mejores escalas; en matemáticas, 56 por ciento se quedó entre el cero y el uno, sólo 0.8 por ciento en el cinco y 0.1 por ciento en el seis.

Los resultados de PISA muestran que la educación no puede tener grandes cambios en corto plazo y que países como México no avanzan al mismo ritmo en el ámbito educativo que las naciones avanzadas. El reto para la Secretaría de Educación Pública es llegar a los 435 puntos en 2012, ya que las autoridades educativas esperan que esto garantice una posición más sólida de México para sus jóvenes en la sociedad del conocimiento y puedan afrontar los retos del México de hoy y el futuro en un mundo globalizado y complejo.

Las autoridades educativas del país como parte del Programa Nacional de Educación como en el correspondiente al período 2001 – 2006 propusieron líneas de acción que incluían reorganizar la estructura del Sistema Educativo Nacional, así como establecer mecanismos para la revisión y renovación de los procesos de descentralización; así como subprogramas sectoriales que incluyen a todos los niveles educativos: Educación Básica, Media Superior, Superior y Educación para la vida y el trabajo, entre cuyos objetivos se encuentran: la ampliación de la cobertura con equidad, educación de buena calidad e integración, coordinación y gestión del sistema de educación. [9]

A nivel estatal, Puebla presenta severos rezagos en educación básica. Los índices de aprovechamiento se encuentran por debajo de la media nacional en aspectos que afectan incluso el desarrollo de los alumnos en los niveles educativos superiores, como son los casos del porcentaje de ocupados sin educación básica, la cobertura de educación secundaria, el nivel de lectura de docentes, el porcentaje de niños con padres analfabetas y los promedios obtenidos por los alumnos en asignaturas como español, matemáticas y geografía dentro de las pruebas nacionales. Esto aparece en el último informe del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) titulado Panorama educativo de México 2007: Indicadores del sistema educativo nacional.

El estado de Puebla tiene una de las tasas de cobertura más bajas en educación secundaria (75.5% contra 80% del promedio nacional). Además, una de las más bajas tasas de matriculación con avance regular en los alumnos a partir de los 14 años, 73.9%, contra el nacional de 77.3%; a mayor edad, mayor índices de deserción y reprobación, lo que genera rezagos en educación básica, mismos que se agudizan en los niveles medio superior y superior.

Los problemas anteriormente mencionados no son los únicos factores que afectan al ámbito educativo. Es bien sabido que la modernización de la educación, implica transformaciones económicas, sociales y culturales provocadas por la globalización de los mercados y las tendencias del neoliberalismo económico internacional. Este contexto condiciona las reformas orientadas a modernizar la educación, incluyendo las reformas de los sistemas de formación y actualización de docentes y los cambios en el ejercicio de la profesión.

Esto nos da una visión más amplia del panorama educativo actual, en el cual podemos encontrar las áreas de oportunidad en las que es necesario trabajar desde nuestro entorno para mejorar la calidad educativa y que permita que los alumnos puedan alcanzar un aprendizaje significativo.

"*En particular referente al estudio de la matemática, es frecuente que el estudiante a nivel medio y medio superior lo rechace por considerarla difícil, fuera de sus necesidades y debido principalmente a una enseñanza totalmente descontextualizada".*

Buscando que los alumnos hagan explícitos sus conocimientos al aplicarlos en la solución de problemas y que desarrollen su razonamiento, el presente trabajo propone la implementación de una estrategia de enseñanza, aplicada al cálculo diferencial, que genere en el alumno no solo un simple cambio conceptual, sino también metodológico y actitudinal y que ayude a desarrollar su cognición.

Ausubel dice que "los problemas generados en la enseñanza tradicional no se deben tanto a su enfoque expositivo como al manejo inadecuado de los procesos de aprendizaje. Afirma que la estrategia didáctica utilizada deberá acercar progresivamente sus ideas a los conceptos científicos".

Para la realización de este trabajo es importante considerar el concepto de cognición como "el conjunto de procesos mentales que tiene lugar entre la recepción de estímulos y la respuesta a estos", teniendo en cuenta que estos son procesos estructurales inconscientes y derivan de experiencias del pasado, facilitando la interpretación de estímulos.

Siguiendo con estas ideas:

Se desarrolla el marco teórico explicando que es el Aprendizaje Basado en Problemas o ABP, como es conocido, el constructivismo aplicando el ABP, las ciencias cognitivas, y la metacognición. Además se analizan las habilidades desarrolladas en los estudiantes al utilizar ABP.

Objetivo General

Desarrollo de estrategias para el aprendizaje del cálculo diferencial.

Hipótesis De Trabajo

Cuando el estudiante aprende matemáticas con estrategias didácticas adecuadas y en situaciones conocidas y significativas para él, aumenta su eficiencia en el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

Preguntas De Investigación:

¿EL estudiante del nivel medio superior puede desarrollar más fácilmente su aprendizaje utilizando estrategias orientadas a los procesos internos de aprendizaje tomando en cuenta entornos por él conocidos?

¿EL estudiante del nivel medio superior tendrá un mayor interés por el aprendizaje del cálculo diferencial si se toma en cuenta el desarrollo gradual de sus habilidades de pensamiento desde el básico o intuitivo hasta el formal?

Descripción de cada Capítulo

En los capítulos se presentarán estrategias para el aprendizaje del cálculo diferencial.

Capítulos 1 y 2. Se dan a conocer conceptos que son básicos de éste, conceptos que para la mayoría de los alumnos resultan algo difíciles de comprender, como lo son el concepto de función, límite, dominio e imagen. Con esto lo que se busca es que los alumnos tengan una buena base para su aprendizaje, se intenta llevar de la mano al estudiante, mediante cuestionamientos, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos, todo con una secuencia, y de una manera entretenida, para que de esta forma no se pierda el interés por seguir aprendiendo.

Capítulo 3. Entramos al tema de diferenciación, en este capítulo lo que se hace es abordar un problema y resolverlo paso a paso de tal manera que el alumno se dé cuanta como es que se llega al resultado esperado, así no solo se le dan las fórmulas para resolverlo, sino la explicación del cómo se llegan a ellas.

Capítulo 4: Se generalizan estas fórmulas, para facilitar un poco el trabajo del estudiante, dado que ya se explicó cómo se llegó a ellas.

Capítulo 5: Se dan a conocer las aplicaciones que tiene la diferenciación, de esta forma los estudiantes pueden ver que lo aprendido si tiene una utilidad, ya que en la mayoría de los casos, los alumnos pierden el interés al no ver la utilidad de lo que se les está enseñando.

Marco teórico

Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

¿Qué es el aprendizaje basado en problemas?

La educación tradicional que generalmente ha prevalecido desde la enseñanza básica hasta la de postgrado, continua formado generaciones de estudiantes que se desarrollan en un ambiente de estudio en donde encuentran poca o ninguna motivación y en muchas ocasiones, hasta indisposición básicamente por su forma de aprender, no tanto por lo que tienen que aprender, ya que se les obliga a memorizar gran cantidad de información que en la mayoría de los casos nunca aplican a situaciones reales y, por lo tanto, lo aprendido por el joven tiene poca relevancia y consecuentemente lo olvida con rapidez.

Como consecuencia de este tipo de educación, centrada en la memoria y en el contenido del programa de estudios, el alumno es un sujeto pasivo en el grupo que sólo recibe la información por medio de lecturas, exposición del profesor y en algunos casos de alguno de sus compañeros. Esta situación también conduce a que el alumno participe poco en clase ya que, generalmente está supeditado a que el profesor le dé la palabra y además de manera limitada. [2]

La escuela no está favoreciendo el desarrollo del pensamiento sino más bien el aprendizaje de mecanismos y de respuestas sin sentido. Sin embargo “aprender a pensar” ha sido uno de los argumentos más repetidos a lo largo de la historia para justificar la necesidad de aprender matemáticas, aunque no el único. Porque pensar es una de las actividades centrales de la persona, aunque el ser humano además de pensar también sea capaz de sentir, de creer, de amar, de jugar, de contemplar, de actuar. Y aunque pensar no sea patrimonio exclusivo de ninguna ciencia, la matemática es una materia idónea para ejercitarse en el arte de pensar y para tratar de mejorarlo.

El método basado en la resolución de problemas estimula a los alumnos a abordar situaciones nuevas, a responder a cuestiones para las que no conocen una respuesta mecánica, a elaborar estrategias de pensamiento, a plantearse preguntas, a aplicar sus conocimientos y destrezas a otras situaciones.

Un problema no es simplemente una tarea matemática, sino una herramienta para pensar matemáticamente, un medio para crear un ambiente de aprendizaje que forme sujetos autónomos, críticos y propositivos, capaces de preguntarse por los hechos, las interpretaciones y las explicaciones, de tener su propio criterio estando a su vez abiertos a los de otras personas.

Esto exige crear en la clase una atmosfera que propicie la confianza de cada alumno y alumna en sus propias capacidades de aprendizaje, lo que no quiere decir que no se sientan a veces frustrados, descorazonados o fracasados, sino que a pesar de ello mantienen una fe arraigada en su capacidad de resolver problemas; un ambiente donde se disfrute con los retos, con los problemas y se valoren los procesos y no sólo las respuestas; donde los alumnos sepan discernir lo que es o no importante, confíen en su propio criterio y no teman estar equivocados o cambiar de visión; donde sean capaces de examinar más de un punto de vista para abordar un problema, formulen preguntas pertinentes, sean cuidadosos al hacer generalizaciones, revisen sus propias creencias y no les de miedo decir: “no lo sé”.

Ahora bien, este ambiente de aprendizaje precisa de unas determinadas actitudes y creencias del profesorado que se genera estimulando la curiosidad intelectual, alentando el trabajo en grupo entre los estudiantes, proporcionando la argumentación, partiendo de las preguntas y respuestas de los alumnos, interesando a los alumnos en las actividades y procesos generadores de conocimiento como definir, preguntar, observar, clasificar, particularizar, generalizar, conjeturar, demostrar y aplicar.

En la resolución de un verdadero problema intervienen el saber, el saber hacer y el saber cómo hacer donde se incluye la regulación cognitiva y emocional; en este último sentido se podría hablar de saber sentir. Estas formas de saber no están desligadas de las actitudes y creencias del sujeto y de la cultura escolar. [8]

Considerando lo anterior, es que surge el modelo metodológico del *ABP* el cual le permite al estudiante buscar los aprendizajes que considera necesarios para resolver los problemas que se le plantean, los cuales a su vez generan aprendizajes integrales que provienen de diversas áreas del conocimiento. El método conlleva en su proceso el desarrollo en el alumno de diversas habilidades, actitudes y valores que contribuyen a mejorar su desempeño como individuo y como estudiante.

El *ABP* se puede utilizar como una metodología general a lo largo del plan de estudios o puede implementarse como una estrategia de trabajo en una asignatura específica o como una técnica didáctica aplicada para la revisión de ciertos objetivos de aprendizaje de un curso.

Aprender bajo presión es algo que naturalmente sucede a lo largo de nuestra vida. Los problemas, lejos de ser dificultades a vencer, nos dejan enseñanzas que se traducen en aprendizajes verdaderos también llamados aprendizajes significativos. Así, aprender a través de la solución de problemas aunque es algo espontáneo, no fue sino hasta finales de la década de los años 60, cuando se llevó a cabo su introducción como modelo educativo en la Escuela de Medicina de MacMaster en Canadá.

Poco después de MacMaster, las escuelas de medicina de Limburg en Maastricht Holanda, de Nuevo México en Estados Unidos y de New Castle en Australia, desarrollaron programas de estudio a través del ABP los cuales han logrado gran prestigio a nivel internacional. Poco después, la renombrada escuela de medicina de la Universidad de Harvard también se unió a esta corriente.

Hoy en día los planes de estudio de un gran número de escuelas de medicina en los Estados Unidos, Canadá, Australia, Holanda y en otras partes del mundo están estructurados de acuerdo con el modelo de aprendizaje del ABP. La utilización de esta estrategia educativa no se limita a las escuelas de medicina; hoy en día es utilizada en un gran número de carreras profesionales como enfermería, farmacia, veterinaria, agricultura, computación, ingeniería, química, salud pública, arquitectura, comercio, leyes, ciencias políticas, trabajo social, educación y muchas otras. También se ha iniciado su utilización en la educación media superior y a través de Internet, y desde su implantación hasta la fecha, es sin lugar a dudas la estrategia educativa más estudiada científicamente.

Es importante mencionar la razón por la que el modelo de Aprendizaje Basado en Problemas (Problems Based Learnning, PBL) ha mostrado amplio desarrollo en la medicina, a cual debe su origen. Existen varias explicaciones pero una de ellas es que, debido a que la profesión médica es uno de los campos profesionales con una tradición en la innovación educativa, además de que también es un área en donde la explosión de conocimientos ha alcanzado proporciones inesperadas.

Aunque la explosión de conocimientos ha tenido su mayor manifestación en la segunda mitad del siglo pasado, este fenómeno se inició desde finales del siglo XIX. En este contexto, al inicio del siglo XX se decidió revisar a fondo la enseñanza de la medicina en los Estados Unidos. El famoso informe Flexner publicado en 1910, dividió la enseñanza de la medicina en dos grandes bloques, ciencias básicas primero y disciplinas aplicadas segundo, es decir, primero el estudio de los procesos biológicos normales (hombre sano) y después las alteraciones de estos procesos (el hombre enfermo).

El informe Flexner no solo impactó a la enseñanza de la medicina en todo el mundo, también lo hizo con otras carreras científicas como la ingeniería y la química que siguieron este mismo modelo.

Como resultado de los impresionantes avances de las ciencias básicas como la fisiología, bioquímica, farmacología, microbiología, biología molecular, biología celular y genética entre otras, esta organización curricular que considera materias básicas y clínicas, se fortalecieron a mitad del siglo XX y ha logrado persistir hasta nuestros días. Sin embargo, durante las tres últimas décadas este esquema ha sido fuertemente cuestionado, y en muchas instituciones ha sido modificado radicalmente.

La razón de estos cuestionamientos es que, después de varias décadas de utilizar el enfoque flexneriano, la experiencia internacional ha mostrado que el estudio aislado de cualquier disciplina tiene como problema inherente, la descontextualización y fragmentación de los conocimientos que trae como consecuencia la des estimulación de los estudiantes, ya que no les resulta evidente la utilidad de esos conocimientos para resolver problemas en situaciones concretas de la vida real. De ahí la baja motivación de los alumnos por estudiar que en general se presenta en todos los niveles educativos y que redunda en su bajo aprovechamiento escolar. Por esta razón los alumnos sólo memorizan los contenidos que necesitan para contestar un examen que sólo evalúa la memoria, y que en pocos momentos pasan a formar parte del cúmulo de conocimientos colocados en el olvido. Este es en cierta forma uno de los marcos de referencia que dieron origen al nacimiento del *ABP*.

Es curioso pero esta puede ser la explicación de que mucho del modelo educativo que en general priva en el país en este momento, tenga ese origen puesto que en la mayoría de las materias experimentales que se imparten, primero se dan los principios de la disciplina y después las aplicaciones con los consiguientes resultados de aprendizaje aislados y descontextualizados. Es ocasión de preguntarnos, qué tanto hemos avanzado en relación a la visión flexneriana de 1910.

En términos generales, el aspecto central del aprendizaje basado en problemas ABP, consiste en colocar a los estudiantes frente a un reto, que es un problema escenificado no conocido por el estudiante, que sirve de punto de partida para adquirir, aplicar y desarrollar nuevos conocimientos a través de una estrategia inquisitiva de tipo socrático. En el ABP se parte de lo desconocido para llegar a lo conocido. La paradoja de que lo desconocido sea el punto de partida para adquirir nuevos conocimientos, puede resultar difícil de aceptar para algunos docentes, sin embargo, si reflexionamos encontramos que así es como se logra el avance en la ciencia.

Pero el ABP tiene sus principios y sus bases para su aplicación, no es una técnica educativa ni una dinámica de grupos, es una metodología que requiere ser bien entendida para poder ser puesta en práctica pero sobre todo, quien intente manejarla como modelo de instrucción deberá estar convencido de sus bondades y creer en ella, no hay peor mentira que la incongruencia entre lo que se dice y lo que se hace.

El planteamiento original de los creadores del ABP de lograr el aprendizaje de alto nivel, tiene originalidad puesto que esta metodología no nació como resultado de una teoría psicológica o de una corriente del aprendizaje, sino como una propuesta educativa de carácter empírico para resolver problemas sustantivos de la educación profesional tales como la falta de motivación, el aprendizaje superficial y la desvinculación entre la enseñanza y la vida real.

Uno de los planteamientos originales de H. Barrows y Col. (1981) al desarrollar el ABP, fue tratar de evitar la confrontación entre la forma de aprender durante los estudios y la forma de trabajar a lo largo de la vida profesional. La apreciación general de los estudiantes es que, el verdadero aprendizaje ocurre cuando se enfrentan a los problemas en el ambiente real de trabajo después de terminar la carrera. Para tratar de subsanar esta situación, H. Barrows realizó observaciones sistemáticas de cómo procede el médico cuando atiende a un paciente; la aplicación de este proceso mental a la forma de enseñar se denominó ABP. Esta característica del origen del ABP le ha permitido tener una base teórica.

El desarrollo exitoso del ABP como estructura curricular y como método de aprendizaje en diversas universidades de prestigio internacional, despertó el interés de los investigadores y expertos en la enseñanza por desarrollar investigaciones y ensayos sobre esta metodología. A continuación se muestran algunos de los principios cognitivos que apoyan la aplicación del ABP.

El constructivismo relacionado con el aprendizaje basado en problemas.

Múltiples autores han encontrado grandes coincidencias entre el ABP y el constructivismo. El constructivismo es una teoría basada en los resultados de las investigaciones de Piaget. Esta teoría difiere de la visión tradicional de que el conocimiento existe independientemente del individuo, de que la mente no contiene nada y que es como un pizarrón en el que se pueden escribir los nuevos conocimientos.

Las aportaciones de Piaget son fundamentales para entender cómo aprenden las personas. Piaget señala que hay estructuras mentales que determinan cómo se perciben los nuevos datos e información. Si los nuevos datos son congruentes con la estructura existente, entonces la nueva información se incorporará a la estructura mental. Por otro lado si los datos son extremadamente diferentes a la estructura mental existente, es posible que no tenga sentido incorporarlos a la estructura mental; así, pueden suceder dos situaciones, en primer lugar que la nueva información sea rechazada y en segundo, que sea asimilada o transformada de modo que pueda ser incorporada a la estructura mental.

Una persona común probablemente rechazará un concepto que requiera de una elevada abstracción; si es forzada a hacer algo con la información, la memorizará aunque no comprenda su contenido y pronto la olvidará; esto es equivalente a memorizar un texto en un idioma extranjero. Un ejemplo de transformación es la respuesta de una persona a un semáforo de color rosa. Todos sabemos que la señal para el alto es roja, pero el color rosa probablemente será registrado como rojo, para que se ajuste (se asimile) a nuestra estructura mental.

Los niños construyen activamente su conocimiento, por lo que el constructivismo sostiene que los niños inventan sus ideas. Así, por un lado o no absorben simplemente las ideas formuladas verbalmente por el maestro, o bien por otro lado las internalizan mediante la memorización.

Los niños asimilan la nueva información de acuerdo con sus nociones simples preexistentes y modifican su comprensión a la luz de la nueva información. En este proceso sus ideas se hacen más complejas y consistentes. En el constructivismo se enfatiza el estudio cuidadoso de los procesos mentales mediante los cuales los niños crean y desarrollan sus ideas.

Hay dos principios claves del enfoque de Piaget:

1. El aprendizaje debe concebirse como un proceso activo.

La experimentación directa, el cometer errores y buscar soluciones diferentes son vitales para la “asimilación y la acomodación” de la información. En este contexto, cuando se ofrece información como ayuda para resolver un problema, funciona como un instrumento que orientar el trabajo y tiene un sentido práctico e importante, a diferencia de lo que podría ocurrir cuando un estudiante siente la necesidad de resolver algo y al no encontrar razones lógicas y prácticas para él, se siente obligado a memorizar información que puede considerar irrelevante: así la participación del profesor como orientador es más importante que como solucionador.

2. El aprendizaje debe ser integral, auténtico y real.

Piaget señala que el significado de los conocimientos se construye cuando los niños interactúan con actividades que tienen sentido con el mundo que les rodea. Así, en las instituciones "piagetianas" se presta menos énfasis al desarrollo de habilidades aisladas como la puntuación de una frase; los niños aprenden esas habilidades, pero involucrados en actividades "con sentido" como por ejemplo al redactar un periódico escolar.

En suma, en la teoría de Piaget se enfatizan las actividades integrales en lugar del ejercicio de habilidades aisladas y se implementan actividades auténticas que son interesantes para los estudiantes, así como actividades reales que culminan en algo más que la calificación de un examen.

De acuerdo con estos planteamientos, el constructivismo se caracteriza porque se centra en el estudiante más que en el instructor y en el programa de estudio; es el estudiante el aprendiz que interactúa con los objetos y eventos, y de esa manera adquiere una comprensión de las características de esos objetos y eventos. El estudiante por lo tanto construye sus propias conceptualizaciones y soluciones a los problemas. En esta teoría se acepta y estimula la autonomía e iniciativa de los aprendices.

Actualmente la enseñanza de tipo constructivista se nutre de las investigaciones acerca del funcionamiento del cerebro humano.

Así, en términos generales los aspectos fundamentales del constructivismo estrechamente relacionados con el *ABP* son:

- Énfasis en el aprendizaje más que en la enseñanza.
- Fomento de la autonomía e iniciativa del aprendiz.
- Aceptación de los estudiantes con voluntad y propósitos propios.
- Conceptualización del aprendizaje como un proceso.
- Estimulación y reforzamiento de la curiosidad natural de los estudiantes.
- Reconocimiento del papel fundamental de las experiencias previas.
- Énfasis en la evaluación del desempeño y la comprensión.
- Planteamientos basados en las ciencias cognitivas.

- Respeto al estilo de aprender de los estudiantes.
- Fomento del intercambio de ideas entre estudiantes y profesor.
- Fomento del intercambio de ideas entre estudiante-estudiante.
- Apoyo y orientación para el aprendizaje colaborativo.
- Involucramiento de los estudiantes en situaciones de la vida real.
- Énfasis del contexto en el que ocurre el aprendizaje.
- Oportunidad para que los estudiantes construyan los nuevos conocimientos a partir de experiencias auténticas.
- Respeto y aceptación de las creencias y actitudes de los estudiantes.

Las creencias actúan como un sistema regulador de su estructura de conocimiento e influyen en la forma que aprenden y utilizan la matemática. También son indicadores de aspectos que no son directamente observables, como su visión de la matemática o sus experiencias anteriores con esta ciencia.

Las ciencias cognitivas.

Las ciencias cognitivas pueden entenderse como el estudio interdisciplinario sobre la adquisición y utilización de los conocimientos que incluye los campos de la inteligencia artificial, computación, psicología, lingüística, filosofía, antropología, neurociencias y la educación. Es un campo tan amplio, que se puede considerar como un movimiento polifacético y plural con enfoques diversos. De manera resumida, también puede definirse como el estudio de la inteligencia y de los sistemas inteligentes. Como resultado de la colaboración interdisciplinaria de estos campos, se han logrado avances importantes en el conocimiento de la cognición humana.

Las ciencias cognitivas han avanzado a partir de tres desarrollos: en primer lugar por la invención de las computadoras y de los intentos por desarrollar programas, que hagan lo que hacen los humanos; en segundo término el desarrollo de la psicología del procesamiento de la información, cuyo objetivo es investigar los procesos internos involucrados en la percepción, lenguaje, memoria y pensamiento; y finalmente el desarrollo de la teoría de la gramática generativa en la lingüística. Las ciencias cognitivas constituyen la síntesis de los conocimientos que explican la cognición humana y el modelaje computacional de esos procesos. Así, el enfoque cognitivo en la enseñanza está adquiriendo cada vez más importancia.

Los principios cognitivos aplicables al *ABP*

Desde un punto de vista práctico una de las habilidades humanas más importantes que debe desarrollar es la toma de decisiones (juicio y elección). Desde la perspectiva individual y desde el contexto interdisciplinario, la habilidad para la toma de decisiones afecta la calidad de vida y las posibilidades de éxito. No es por lo tanto casual que este tema sea motivo de numerosos estudios y análisis.

El estudio de las actitudes, creatividad y solución de problemas está íntimamente relacionado con este tema. Los factores emocionales tienen también una participación importante; la ansiedad y el estrés habitualmente tienen influencia negativa. Finalmente cabe señalar que las teorías del aprendizaje del adulto también hacen aportaciones importantes sobre este tema al destacar la influencia de las experiencias previas y las estrategias personales del aprendizaje.

La toma de decisiones es un aspecto crucial en la formación de los estudiantes y se supone que se basa en los conocimientos, pero no se puede limitar sólo a ellos. A pesar de su importancia trascendental para la educación, es uno de los aspectos intangibles y difícilmente evaluables en la educación.

En el *ABP* la toma de decisiones se genera a partir del propio problema y al igual que en la vida real, el problema no admite una sola solución correcta, sino diversas alternativas con más o menos ventajas y desventajas.

La exigencia sobre el alumno de obtener soluciones únicas a los problemas planteados es una incongruencia con la vida real. Por ejemplo, si se fórmula una pregunta simple como ¿qué hora es? en el sentido estricto, es prácticamente imposible dar respuesta. Primero, porque los relojes ordinarios miden con relativa imprecisión el tiempo. Aun si se quiere evitar este problema y se reformula la pregunta como ¿qué hora es en tu reloj? La respuesta correcta también es relativa, porque cuando se responde la pregunta el tiempo ya es diferente de cuando se formuló; en fin es una cuestión de tipo relativista. Estas preguntas no se refieren a situaciones triviales, sino al enfoque que se tiene ante el mundo. *Por esta razón en el ABP, los exámenes con respuestas de "falso-verdadero" no se consideran adecuados.*

En el contexto del *ABP*, cada problema brinda a los estudiantes la oportunidad para la toma de decisiones ya que no hay una sola respuesta correcta. Ante la pregunta que acompaña al problema, se formulan hipótesis inicialmente de carácter provisional con base en los conocimientos previamente adquiridos y, posteriormente redefiniendo mejor la hipótesis con los nuevos conocimientos. Es crucial para el logro de los objetivos del

ABP, que esta toma de decisiones se haga con base en los conocimientos mediante el razonamiento crítico que es conveniente que se haga en un ambiente colaborativo.

La motivación es otro de los conceptos centrales en la mayoría de las teorías del aprendizaje y está íntimamente ligado a los estados de excitación, atención, ansiedad y retroalimentación-reforzamiento.

Una persona debe estar suficientemente motivada para prestar atención mientras aprende. Sin embargo, también es cierto que la ansiedad puede reducir la capacidad de aprendizaje. Recibir un premio como estímulo o una retroalimentación por realizar alguna acción, generalmente incrementa la posibilidad de repetir esa acción. Algunos autores señalan que las teorías conductistas tienden a enfatizar las motivaciones extrínsecas (premios), mientras que las teorías cognitivas se enfocan a las motivaciones intrínsecas (metas).

En la teoría cognitiva, la motivación sirve para desarrollar actitudes y acciones en busca del logro de metas. Un campo de investigación bien desarrollado y muy relevante para el aprendizaje, es el que se refiere a la motivación para el logro. La motivación para el logro es una función de los deseos del individuo por el éxito, la expectación por el éxito y los incentivos recibidos. Los estudios muestran que en general los individuos prefieren tareas de dificultad intermedia. En contraste, los estudiantes con una alta necesidad de logro, obtienen mejores calificaciones en los cursos que consideran muy relevantes para su futuro. También se considera que casi todos los individuos tenemos una necesidad de auto-actualización lo cual motiva el aprendizaje.

Uno de los principales méritos del *ABP*, contra el cual prácticamente no hay argumentos en contra en la literatura, se refiere al interés y motivación que despierta entre los estudiantes, en contraste con aquellos otros métodos que tienen como resultado estudiantes desinteresados y pasivos y que es frecuente encontrar en el sistema tradicional.

Para fines prácticos podemos señalar que la motivación está constituida por las “fuerzas, que nos mueven a hacer algo”. Esas fuerzas pueden ser exteriores al individuo o bien interiores y pueden ser biológicas o mentales.

Cuando un estudiante decide estudiar una carrera profesional está motivado por diferentes fuerzas. Considera que si tiene éxito profesional tendrá satisfechas sus necesidades fundamentales e implícitamente puede llegar a asumir, aunque no esté tan seguro de ello, que el tipo de carrera elegida le permitirá lograr también la autorrealización.

La motivación que promueve el *ABP* es de esta naturaleza, es de carácter intrínseco, generada por el propio individuo, que en su intento por comprender y resolver el problema recibe una gratificación interior. Cuando se arriba a este nivel, el individuo tendrá la capacidad de trazar sus propias metas de aprendizaje y de auto actualización, que se puede transformar en una actitud a lo largo de toda su vida.

En el desarrollo de las actividades diarias nuestros conocimientos previos son transferidos continuamente para el desarrollo de nuevas habilidades y conocimientos, por lo cual resulta evidente la importancia de este tema para la educación.

La transferencia del aprendizaje consiste en la aplicación de habilidades y conocimientos aprendidos en un contexto y aplicados en otro. En concreto también se puede entender cómo, la realización de una tarea que es el resultado de un comportamiento previamente adquirido en otra tarea. Esto se refiere a cualquier tipo de habilidad o conocimiento (tales como, memoria, capacidad sensomotora, solución de problemas, razonamiento, entre otras). Un ejemplo de transferencia pueden ser los conocimientos y habilidades aprendidos en un entrenamiento en ventas y aplicados en el trabajo con un cliente. Así, resulta que cuando el contexto del aprendizaje es diferente del contexto de la aplicación, los objetivos de la enseñanza o la capitación no se cumplen, a menos que se procure que la transferencia se oriente hacia situaciones reales.

Para que la transferencia del aprendizaje sea exitosa, se requiere que el contenido de la capacitación sea relevante para la tarea futura, que el estudiante aprenda y que esté motivado. Por esta razón es importante que los planeadores de la educación, determinen si las habilidades y conocimientos que serán aprendidos serán objeto de transferencia cercana o remota.

La transferencia cercana consiste en que las habilidades y conocimientos adquiridos con anterioridad se aplican siempre de la misma manera cuando vuelven a utilizarse. La capacitación para la transferencia cercana, generalmente se refiere a conocimientos de carácter procedimental es decir, a las etapas de una tarea que se aplican en un mismo orden. Una persona que sabe cómo manejar un automóvil puede ser entrenada para manejar un autobús es decir, transfiere sus conocimientos de cómo manejar un automóvil a un autobús. La ventaja de este tipo de entrenamiento es que la transferencia puede constituir un éxito relativo; la desventaja es que la amplitud de este tipo de transferencia es limitada.

La transferencia lejana o inespecífica se refiere a la aplicación de habilidades y conocimientos adquiridos en un contexto determinado que se aplica a situaciones cambiantes. Una de las ventajas de este tipo de transferencia es que, una vez que se adquieren las habilidades y destrezas, el estudiante o aprendiz es capaz de adaptarlas a diferentes circunstancias.

La transferencia puede ser positiva o negativa; la positiva puede ser proactiva y retroactiva. La proactiva es cuando efectivamente el conocimiento previo “facilita” una nueva tarea que implica realizarla con rapidez y poco esfuerzo, y es retroactiva cuando en la práctica una nueva tarea mejora el desempeño o ayuda a desarrollar una habilidad previamente aprendida.

Pero la transferencia puede ser negativa cuando dificulta la aplicación del aprendizaje previo en la realización de otra tarea que, puede implicar la obtención de nuevos aprendizajes. Esta situación debe ser considerada porque en la educación descontextualizada, cuando el estudiante intenta aplicar lo previamente aprendido, encuentra que tales conocimientos no se aplican o no le ayudan a resolver el nuevo problema.

Cuando el aprendizaje no puede ser transferido a una situación diferente, sucede que, en virtud de que éste fue adquirido en un contexto que no corresponde a dicha situación, tiene escasa utilidad si es que la tiene y sólo produce frustración. Si un estudiante de aviación nunca es entrenado y capacitado en un aeroplano por su instructor de vuelo, difícilmente podrá transferir su aprendizaje teórico a un vuelo real. Si se compara con criterio la situación del instructor de vuelo con la de un profesor, de niveles de educación medio, medio superior o superior, ésta representa un claro ejemplo de los grandes problemas de los planes de estudio.

Los estudiantes de bachillerato después de estudiar química varios años, encuentran dificultades enormes para transferir esos conocimientos a su vida real y por tanto, para interpretar su entorno; lo mismo ocurre en todas las carreras. Un estudiante de derecho aprende las leyes, y para transferir esos conocimientos a la defensa de un caso, tiene que litigar lo cual difícilmente le es enseñado. Así, aunque los estudiantes no lo manifiestan abiertamente, gran parte de su desencanto con sus estudios es la dificultad para aplicarlos a una realidad que a diario le propone retos; por tanto, conscientes de esta situación quienes aplican el ABP están de acuerdo en la importancia de utilizar problemas de la vida real, para que de esa manera los estudiantes estén en mejores condiciones de transferirlos a situaciones y problemas similares.

Metacognición: aprender a aprender

La naturaleza abstracta del término "metacognición" hace que parezca un concepto lejano, de difícil comprensión y aplicación práctica. Sin embargo, diariamente hacemos actividades de carácter metacognitivo. La metacognición nos ayuda a llegar a ser aprendices exitosos y se ha asociado a la forma como funciona la mente humana.

La metacognición se refiere a un razonamiento de alto nivel que implica un control activo sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje. Acciones como la planeación de cómo abordar una determinada tarea de aprendizaje, el automonitoreo de la comprensión, la autoevaluación y la evaluación del avance en la realización de una tarea, son acciones de carácter cognitivo.

Aunque la metacognición puede definirse simplemente como "la acción de pensar sobre el propio pensamiento" y aunque el concepto como tal ha existido desde que el hombre es capaz de reflexionar sobre su razonamiento, se ha dado un gran debate desde la perspectiva cognitiva sobre lo que realmente significa este concepto.

Según Flavell (1979) a quien se le asocia con la creación de este concepto, la metacognición se refiere al conocimiento o a la autorregulación (experiencias) del conocimiento. El conocimiento metacognitivo es el conocimiento adquirido acerca de los propios pensamientos mentales. De esa manera, uno llega a descubrir bajo qué condiciones uno aprende y qué y cómo aprende (en la biblioteca, en un lugar tranquilo, a qué horas del día, discutiendo el tema con un compañero, etcétera).

La autorregulación corresponde a estrategias metacognitivas o procesos secuenciales que uno mismo utiliza para controlar las actividades cognitivas y garantizar el logro de los objetivos de aprendizaje. Estos procesos contribuyen a que uno mismo regule y supervise el aprendizaje mediante la planeación, monitoreo y evaluación de las actividades cognitivas. Por ejemplo, cuando uno lee un texto, uno mismo se pregunta sobre los conceptos allí expresados pues el objetivo es entender los conceptos, así formular preguntas a uno mismo es una estrategia metacognitiva habitual que debe fomentarse en el alumno para que se estimule su creatividad e interés por estudiar e investigar.

Habilidades que promueve en el estudiante el aprendizaje basado en problemas.

Considerando que el *ABP* por sus características y por las habilidades que pretende desarrollar en el alumno se concibe como un modelo de tipo constructivista, es importante que se lleve a cabo en un ambiente de tipo colaborativo para que los alumnos obtengan mayor provecho de su actividad cognitiva. El trabajo colaborativo genera un ambiente que promueve y permite el logro de los aprendizajes propios de la disciplina además, de que fomenta el desarrollo de habilidades, actitudes y valores que impulsa el reto por la solución del problema.

La integración de los aprendizajes, actitudes y valores mencionados se darán en mayor o menor intensidad con base principalmente en la capacidad del profesor-orientador-facilitador y en cierta medida por la disposición del estudiante a participar con esta metodología de trabajo.

El *ABP* es una metodología de aprendizaje que promueve entre otras, las siguientes habilidades:

- Comunicar los resultados de una investigación en forma oral, gráfica y por escrito.
- Razonar crítica y creativamente.
- Tomar decisiones razonadas en situaciones originales.
- Identificar, encontrar y analizar la información requerida para una tarea particular.
- Comunicar ideas y conceptos a otras personas.
- Colaborar productivamente en el trabajo de equipo.
- Lograr la autoconfianza necesaria para usar sus habilidades de comunicación y de pensamiento en un grupo de personas.

El Aprendizaje Basado en Problemas es una forma de trabajo en ambiente colaborativo mediante la cual se practica la resolución de problemas, presentados éstos a través de escenarios que posibilitan la experiencia de aprendizaje significativo y social, así como la práctica y desarrollo de habilidades, actitudes y valores en el alumno. Es importante señalar que el objetivo del *ABP* no se centra en resolver el problema, sino que éste se utiliza como pretexto para identificar los objetivos de aprendizaje que realizará el alumno de manera preferentemente grupal, es decir, el problema sirve como detonador para motivar a los alumnos a cubrir los objetivos de aprendizaje del curso.

Durante este proceso de trabajo grupal, los alumnos mejoran su rendimiento y desempeño académico, van integrando una metodología propia para la adquisición de conocimientos, desarrollan habilidades de pensamiento crítico, análisis, síntesis, auto evaluación y autorregulación, así como también adquieren la responsabilidad y confianza suficiente para desempeñarse en el trabajo de equipo.

Algunas habilidades, valores y actitudes que la aplicación del *ABP* promueve en el alumno son:

- Escuchar y comunicarse de manera eficiente.
- Argumentar y debatir ideas con fundamentos sólidos.
- Participar en procesos de toma de decisiones.
- Identificar, analizar y solucionar problemas.
- Capacidad para identificar las necesidades propias de aprendizaje.
- Sentido de pertenencia a un grupo o equipo. Autoestima, autoconfianza y autonomía.
- Comprender que los fenómenos estudiados forman parte del entorno de los alumnos (la disciplina, aspectos socio-económicos, políticos, ideológicos y culturales).
- Actitud positiva hacia el aprendizaje y al logro de contenidos curriculares.
- Cuestionamiento de la propia escala de valores (responsabilidad, honestidad, compromiso, etcétera).
- Cultura orientada al trabajo en equipo.

Con respecto al profesor, éste no sólo adquiere el rol de facilitador y conductor del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que desarrolla su creatividad a través de la elaboración de buenos escenarios para los estudiantes y materiales de apoyo para la docencia entre otras opciones.

En el salón de clases, el profesor debe:

- Actuar como facilitador.

- Servir de modelo. Comportarse de la misma forma que desea lo hagan los alumnos.
- Pensar en voz alta con los estudiantes.

El profesor debe evitar:

- Dar opiniones
- Compartir información, pues esto envía el mensaje de que existe una respuesta correcta y el estudiante deja de sentir que el problema es suyo.
- Abusar de las intervenciones en los equipos. Debe ser medido.

Por todo lo anterior, se considera que esta forma de trabajo representa una alternativa eficiente y congruente con la idea de un desarrollo integral del estudiante en los ámbitos social, cultural y científico, un desarrollo potenciador de capacidades y fortalecedor de valores, que puede ser aplicada como estrategia didáctica por los profesores de cualquier disciplina y nivel, con el fin de lograr la mejora personal y académica del alumno [2].

A partir de lo ya mencionado partiremos para hacer un plan, con el cual los alumnos se puedan basar en el aprendizaje del cálculo diferencial. Se les darán algunos conceptos explicados de la mejor forma posible, con ejemplos y ejercicios complementarios, para que de esta manera el propio alumno pueda ir aprendiendo, y no sólo memorizando como ocurre normalmente, especialmente para un examen, sino que lo entienda, de esta manera ya no será necesario aprenderse todo de memoria. Como el estudiante *entendió* lo que está estudiando, el aplicarlo ya no será tan difícil, también se busca con esto que el alumno cree cierto interés en la materia, que no le tenga miedo, que no la vea como algo complicado, que esto último es lo que siempre se dice en general de las matemáticas.

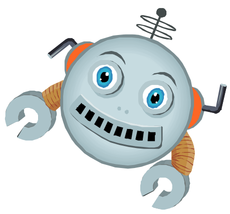
1. FUNCIÓN

Para empezar hay que saber a qué nos referimos cuando se menciona la palabra función.

Pues bien, una función es una correspondencia entre dos conjuntos, en el que el valor de uno está determinado por el valor del otro. A continuación se tratara de encontrar significado a este concepto, de tal manera que más fácil recordarlo entendiéndolo y no memorizarlo.

Ejemplo 1.

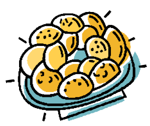
- Una vez un fabricante de galletas construyo un robot para hacerlas. El robot podía hacer galletas sin parar y como nunca se cansaba en un determinado tiempo hacia siempre el mismo número de galletas:



El robot hacia 100 galletas en 1 hora

200 galletas en 2 horas

Ahora para entender mejor esto responde lo siguiente



¿Cuántas galletas haría el robot en 3 horas?

¿Cuántas galletas haría el robot en 10 horas?

¿Cuántas galletas haría el robot en 30 minutos?

¿Existe una relación entre el tiempo de elaboración y el número de galletas hechas por el robot? ¿Cuál?

¿Podrías hacer una gráfica de esta relación?

Como nos pudimos dar cuenta, entre más tiempo pasa, el robot más galletas hace, es decir, que el número de galletas está determinado por la cantidad de tiempo. Una función, entonces, es una relación, no es un número. En este caso el número de galletas está relacionado con el tiempo.

Expresaremos esto en una fórmula con lo que ya sabemos.

$$Número\ de\ galletas = 100 \times \underbrace{tiempo\ t}_{\text{3, 5,10,… horas, el tiempo que desees calcular.}}.$$

Aunque hay otra manera de escribir esta fórmula de una manera más corta y elegante:

$$g(t) = 100 \cdot t$$

El signo igual define la relación.

$$g(t)\ significa\ que\ el\ número\ de\ galletas\ es\ una\ función\ del\ tiempo.$$

$$100 \times t\!:\ multiplica\ el\ tiempo\ por\ el\ número\ de\ galletas\ que\ hizo\ en\ 1\ hora.$$

Usualmente nos encontraremos en algunos libros con que una función la denotan como $f(t)$, sin embargo, para corregir este error usual, debemos aclarar que $f(t)$ se refiere a la imagen de la función f en un punto t.

Pero esto no tiene que ser motivo de confusión, ya que podemos usar f ó g de la misma manera, es solo que, para el ejemplo 1, g la usamos para galletas (primera letra de la palabra galleta), es decir, f solo es la primera letra de función. De la misma manera notamos que t es la que nos indica tiempo. Otro cambio que notamos es $\cdot$ en vez de $\times$, pero ambas formas son correctas, ya que ambas indican multiplicación.

Entendamos mejor esto.

Supongamos que $f(\ )$ es una máquina de transformación y podemos poner lo queramos en ésta, como en el ejemplo del robot de galletas, el número de galletas que hace depende de la cantidad de tiempo que tenga. De esta forma, lo que el robot pone en la máquina $f(\ )$ es el tiempo t y escribimos esto así $f(t)$, del mismo modo si la función depende de a escribiremos $f(a)$, si depende de x ó y escribiremos $f(x)$ ó $f(y)$.

A lo que nosotros metemos en esa máquina, es decir nuestra función $f(\ )$, se le llama variable, existen dos tipos de ellas, que son las variables dependientes y las variables independientes.

Variable es que puede cambiar libremente su valor. Generalmente, una variable independiente es la entrada de una función y normalmente se denota por el símbolo x, en tanto que, frecuentemente y se reserva para la variable dependiente.

Por ejemplo, en $y = f(x) = x^2$, x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Se permite que la variable x cambie libremente, en tanto que el valor de y tiene que cambiar conforme cambia x.

Otro ejemplo de función es: El desgaste que tienen las llantas de un auto, pues bien, esto dependerá de la distancia que recorra ese auto, esto es $f(distancia)$ o lo que es lo mismo $f(d)$.

Ejercicios propuestos:

- Un ciclista se ha inscrito a un maratón, el recorrido total de este es de 350 Km. El ciclista desea saber cuánto tiempo aproximadamente le lleva en recorrer esta distancia, así que durante su práctica se dio cuenta de que en 60 minutos recorrió 50 Km, en los siguientes 60 minutos recorrió otros 50 Km, es decir en 120 minutos recorre 100 Km. Con estos datos ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 350 Km del recorrido?

Encontrar la relación entre tiempo y la distancia por cada kilómetro recorrido.

Escribir la función que corresponda.

- Un molino de viento transforma el aire en agua, esto es gracias a que aprovecha la humedad atmosférica. Este molino produce 80 litros en un día con un mástil de 10 metros, suponiendo que a 20 metros de altura se generan 160 litros de agua ¿Cuántos litros de agua se generan a una altura de 45 metros?

Escribir la relación encontrada entre los litros de agua que se generan y la altura en cada 10 metros.

¿Qué función nos ayuda a saber el número de litros que se generan?

De manera un poco más formal daremos la definición de función, esperando que con lo anterior el concepto ya haya sido comprendido, de esta manera no se generaran confusiones.

Función: se puede considerar como función a una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y. Donde el número y es único para cada valor especifico de x.

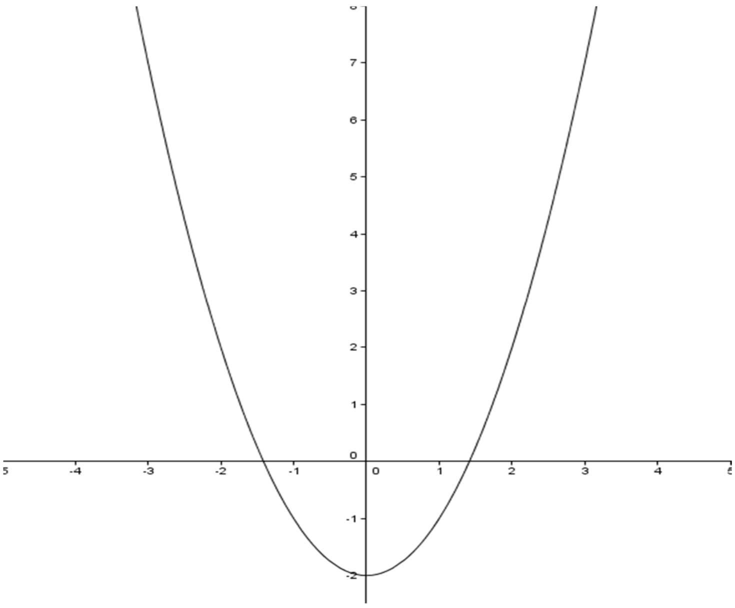
Aclararemos algunos conceptos relacionados con funciones, para esto entenderemos que es el dominio, imagen y rango de una función. De nuestra definición anterior ejemplifiquemos nuestro conjunto X y nuestro conjunto Y.

Sea $Y = x^2 - 2$, esta expresión es una función y podemos escribirla de la siguiente manera: $f(x) = x^2 - 2$. Veamos cómo se comporta nuestra función con nuestra siguiente tabla.

X	$f(x)$
-2	2
-1	-1
0	-2
1	1
2	2

Nuestra primera columna es el dominio, mientras que la segunda columna es la **imagen** de la función f.

El conjunto formado por las imágenes, es el **rango** de la función. Son los valores que toma la función "Y" (variable dependiente), por eso se denomina "$f(x)$", su valor depende del valor que le demos a "X". Gráficamente lo miramos en el eje vertical (ordenadas).



El **dominio** de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a "X" (variable independiente) forman el conjunto éste. Gráficamente lo miramos en el eje horizontal (abscisas).

Gráfica 1.1

Ejemplos:

- Sea $f(x) = \sqrt{x}$

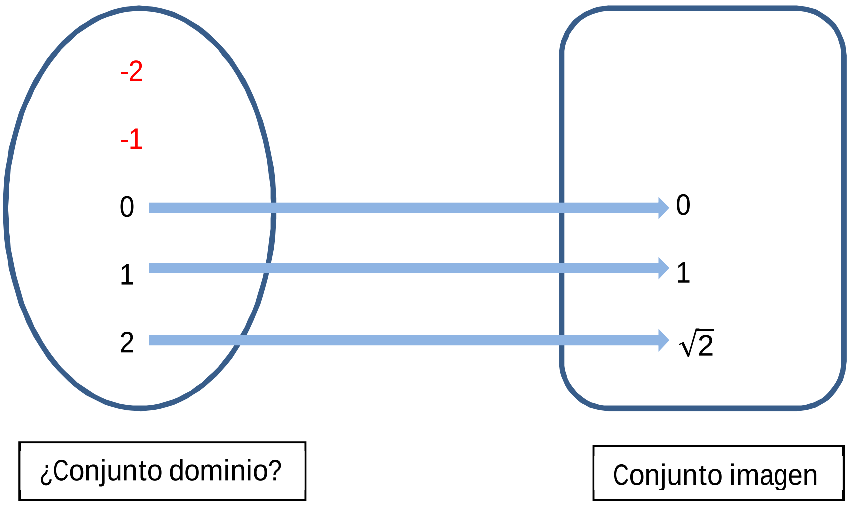


Figura 2.1

Notamos que los valores de -2 y -1 no tienen valores asignados en el conjunto imagen esto es porque al aplicar la función $f(x) = \sqrt{x}$ a -2 y -1 , las raíces de estos números no existen, es por eso que dichos valores **no** pertenecen al dominio de la función. Por tanto el conjunto dominio sería: el conjunto de todos los números reales no negativos $[0,\infty)$.

- Para la función $f(x) = 5x + 6x + 2$ el dominio serian todos los números reales, en esta función todo número real tiene imagen.
- $g(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ aquí el dominio son todos los valores reales menos los valores que anulan el denominador (no puede existir un numero cuyo denominador sea cero), 1 no está dentro del dominio de la función $g(x)$.

2. LÍMITE

Recordemos que anteriormente se mencionó que para realizar problemas para estudiantes, o para dar a conocer un concepto a éstos, es necesario que dichos problemas tengan ciertas propiedades y considerar varios factores, como por ejemplo cuáles son los conocimientos previos, en particular para el concepto de limite, cuáles son las creencias tienen los alumnos.

Cuando en la vida cotidiana se menciona la palabra límite es inevitable pensar en restricciones ya sean sociales, legales, físicas, entre otras. Por ejemplo el límite de velocidad que se establecen en ciertas carreteras o caminos. También se podría pensar en un límite territorial.

Límite en el cálculo diferencial se refiere a la cercanía entre un valor y un punto, es decir, es el lugar hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito. Por ejemplo: si una función f tiene un límite L en un punto t, quiere decir que el valor de f puede ser todo lo cercano a L que se desee, con puntos suficientemente cercanos a t, pero distintos

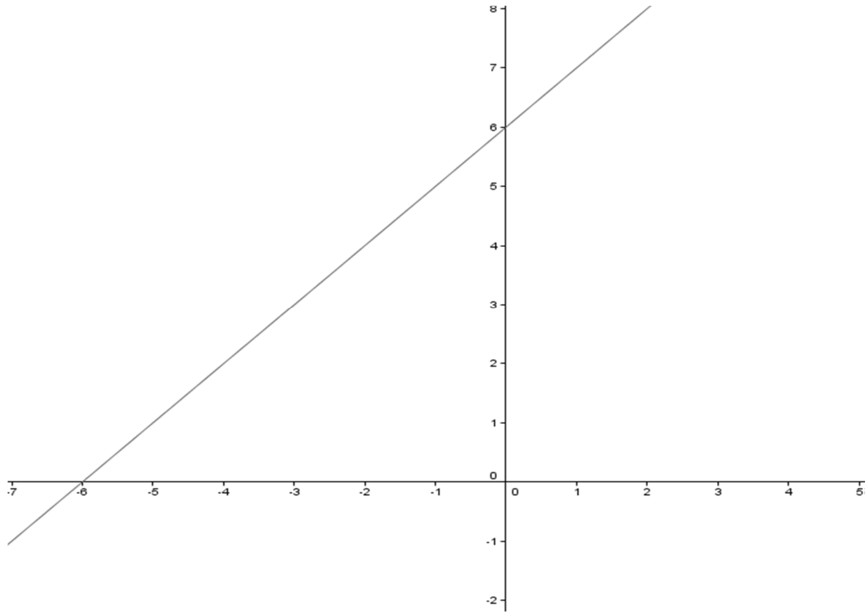
Ejemplo 2.1:

Veamos el comportamiento de la función f, dada la regla de correspondencia igual a: $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$, en la cercanía $x = 1$.

x	$f(x)$
0.90	6.90
0.95	6.95
0.99	6.99
$\vdots$	$\vdots$
1.01	7.01
1.05	7.05
1.10	7.10

Tabla 2.1

En la tabla 2.1 las flechas están indicando que nos acercamos al valor de 1 en ambas direcciones, y observamos que los valores de $y = f(x)$ se acercan al valor de 7. Por el momento sin tanta formalidad diremos que la función tiene su límite en 7 cuando $x \to 1$ (x se acerca a 1).



Gráfica 2.1

Esto se escribe de la siguiente manera $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x-6}{x-1} = 7$ y se lee, el *límite* de $\frac{x^2+5x-6}{x-1}$ cuando x se acerca o tiende a 1.

Llegaremos ahora al mismo resultado pero de una manera diferente.

Primero veamos si nuestra función puede factorizarce.

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x + 6.$$

Ya que nuestra función está factorizada veamos qué pasa cuando x se acerca a 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 6 = 7.$$

Vemos que efectivamente la función $\frac{x^2+5x-6}{x-1}$ tiene por límite 7 cuando $x \to 1$.

Para entender el concepto de límite matemático o familiarizarnos un poco más realizaremos los siguientes ejercicios.

Ejercicios propuestos:

Ejercicio 2.1: Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$

a) ¿Cuál es el valor de la función si $x = -2$?
b) ¿Cuál es el valor de la función si $x = 3$?
c) Construye la gráfica de la función
d) ¿Cuál es el dominio de la función?

Observemos a continuación cómo se comporta la función f cuando se aproxima a un número.

e) ¿A qué valor se acerca $f(x)$, cuando x se aproxima a 3 por la derecha?
Sugerencia: Completa la tabla siguiente y observa los valores.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
3.1	
3.01	
3.001	
3.0001	

f) ¿A qué valor se acerca $f(x)$, cuando x se aproxima a 3 por la izquierda?

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
2.9	
2.99	
2.999	
2.9999	

g) ¿Cómo se comparan los valores de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 por la derecha y por la izquierda?

Ejemplo 2.2

A Mariela, la dueña de un balneario le preocupa que en pleno fin de semana sus piscinas estén muy sucias ya que la noche anterior hizo bastante aire ocasionando que polvo y basura las ensuciara, Mariela quiere saber en qué tiempo quedarán limpias, para esto Jorge, el encargado de limpiarlas le dice que eso dependerá del tiempo que tarde en vaciarse cada una de las piscinas y se sabe (ya que él hace sus cálculos matemáticamente) que el volumen de vaciado de esas piscinas en específico, responde a la siguiente ecuación: $v = \frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}$ donde v es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en minutos. Mariela quiere las cosas demasiado rápidas (algo que casi nunca sucede) y pregunta ¿Cuál será el volumen del agua restante cuando el tiempo se aproxime a 7 minutos? De nuevo Jorge usa la matemática para contestarle a Mariela y le dice:

Calcularemos lo siguiente: $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})},$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})},$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{(7+7)(2+\sqrt{7-3})} = \frac{-1}{(14)(2+\sqrt{4})},$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{-1}{(14)(2+2)} = \frac{-1}{(14)(4)} \qquad \therefore \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{-1}{56}$$

Conclusión: Cuando el tiempo se aproxima a 7 minutos el volumen del agua se aproximara a $\frac{-1}{56}\, m^3$, que es un valor ya negativo, lo que nos quiere decir que en menos de 7 minutos quedará vacía la piscina. Por tanto la dueña del balneario tendrá lo que esperaba, que la piscina no tardará mucho en vaciarse.

Ejercicio 2.2:

Ha Pablo le han comentado que en el lugar donde nació y que por cierto, le gusta mucho, están vendiendo unos terrenos rectangulares a un excelente precio, lo que le dio mucha alegría y está considerando comprar uno. Lo único malo, y raro además, es que la persona que le dio los datos de estos terrenos sólo sabía que el área estaba expresada de la siguiente manera:

$$A = \frac{a - 16}{\sqrt{a} - 4}$$

Donde a es el ancho del terreno expresado en metros, el cual también se sabe se aproxima a los 16 metros.

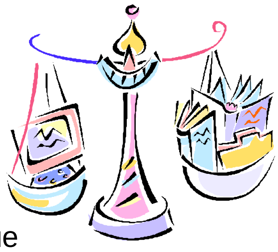
Pablo que era muy bueno en cálculo de límites pensó:

Si el área depende del ancho, y lo que me interesa saber es que tan pequeño es el terreno para ver si me conviene compararlo entonces hare que al ancho del terreno sea se acerque a 16 para tener en cuenta cual podría ser área del terreno con esta característica. Realiza, al igual que pablo los cálculos para ver a qué valor se aproxima el área del terreno cuando su ancho se aproxime a 16 metros.

Ejercicio 2.3:

En los últimos años a Melissa le han gustado mucho las motocicletas, pero como es mujer, muchas personas no lo ven de buena manera porque piensan que por esta razón no tiene habilidad para controlarla. En estos días se ha enterado que habrá una competencia de motocicletas donde ha decidido participar para demostrar que no solo por ser mujer no puede correr motocicletas. Después de unos días de práctica ella sabe que el recorrido en Km. que hace con la moto es de $d = \frac{t-1}{\sqrt{t}-1}$ donde t es el tiempo en horas. Si ella practica cerca de una hora, entonces, ¿A qué valor se aproxima la distancia recorrida?

Ejercicio 2.4:



En una clase de matemáticas Eustolio, el profesor de física quiere enseñarles a sus alumnos el concepto de trabajo. Para esto decidió que ellos vieran como funciona y o en que se puede utilizar este concepto y llevó una balanza a su clase. Uno de los alumnos dijo que eso de pesar objetos en una balanza no le causaba ningún reto y no entendía cuál era el objetivo de esa actividad. El profesor Eustolio entonces le contestó:

-como a ti lo que te importa es solo hacer cálculos y no aprender a fondo lo que vamos a ver más adelante, resuelve lo siguiente en base a lo que en hemos visto:

El trabajo que realiza la balanza está dado por $w = \frac{f^2-1}{f-1}$, donde f es la fuerza que se ejerce sobre la balanza expresado en newton (N) ¿A qué valor se aproxima el trabajo de la balanza cuando la fuerza ejercida sobre ella se aproxima a 1N? Y ahora explícame como podrías usar esta información y en qué situación lo puedes aplicar.

En el capítulo siguiente se entenderá cual es la utilidad que tiene el cálculo de límites en el cálculo diferencial.

3. DIFERENCIACIÓN

Sabemos que si un objeto se mueve sobre una superficie es porque alguien lo ha empujado, porque se le está aplicando una fuerza externa para hacer esto, pero si este objeto cae desde una cierta altura, la fuerza que actúa sobre él, es la fuerza de gravedad.

De manera similar, aplicamos una fuerza cuando pedaleamos una bicicleta. Si es en una superficie plana, entre más duro pedaleemos, más rápido irá la bicicleta, supongamos que al alcanzar una cierta velocidad dejamos de pedalear, lo que pasará es que la bicicleta seguirá su curso, lo que quiere decir que nos dejamos llevar por el impulso.

Ahora bien, si a la bicicleta le agregamos peso, y hacemos lo mismo, la bicicleta de igual forma seguirá moviéndose, la diferencia en este caso es que tenemos que aplicar más fuerza para movernos. De esto podemos sacar algunas conclusiones:

- Se requiere de fuerza para mover una bicicleta inmóvil, pero cuando la bicicleta alcanza una cierta velocidad ya no es necesario aplicar más fuerza para que continúe su movimiento.
- Entre más pesada sea la carga de una bicicleta inmóvil, más fuerza se requiere para ponerla en movimiento, pero una vez que ha alcanzado una cierta velocidad, no requiere de fuerza para seguir moviéndose, sin importar lo pesada que está sea.

Esto se puede expresar con la relación dada entre masa y aceleración: $F = ma$, que es la ecuación del movimiento. Donde F indica la fuerza, m la masa, a la aceleración *(Segunda ley del movimiento de Newton).*

Para entender lo que es la aceleración, sigamos con el ejemplo de la bicicleta, cuando empezamos a moverla, poco a poco vamos a una velocidad más rápida, a este cambio de la velocidad de la bicicleta en el tiempo es la aceleración, que se expresa como a en la fórmula. La masa la tomaremos como igual al peso, aunque en términos de físicos estos dos términos son distintos, sólo para evitar confusión.

En esta fórmula, si tomáramos a la aceleración igual a 0, entonces $F = m \cdot 0$ lo que nos da $F = 0$, lo que quiere decir que si **la velocidad no cambia**, no se requiere fuerza, si la aceleración es muy grande, más fuerza se requiere, lo mismo si la carga es muy pesada.

Con esto ya podemos expresar lo que sabemos acerca del movimiento de un objeto. Pero como en todo existe un pequeño problema, si contamos con una báscula podríamos pesar nuestro objeto, sin embargo, ¿qué haríamos para medir la aceleración, cuando lo único que sabemos es que es cero cuando el objeto está inmóvil? Pues bien este problema nos lleva al concepto de diferenciación, que nos va ayudar a resolver nuestro problema.

Para entender este concepto necesitamos de más herramientas, una de esas herramientas, por así decirlo, es la **velocidad promedio**, o sea, vamos a conocer esta velocidad antes de pasar a otra cosa.

En un campo de futbol, se ha empezado una discusión por parte de dos jugadores de diferentes equipos, el primer jugador dice que él puede lanzar el balón a una gran velocidad, mientras que el jugador dos, dice que él podría superar esta velocidad, para solucionar este conflicto se decide que en ese mismo momento ambos jugadores demuestren lo que pueden hacer para saber si alguno es mejor que el otro.

Al terminar este reto, los resultados fueron los siguientes.

Jugador 1: el balón recorre 200 metros en 50 segundos

Jugador 2: el balón recorre 280 metros en 40 segundos

Pues bien, después de esto ¿podríamos saber que jugador lanza el balón a mayor velocidad?

Para ello hagamos lo siguiente

Jugador 1: el balón recorre $\frac{200\ metros}{50\ seg} = \frac{200\ m}{50\ s} = 4\frac{m}{s}$ es decir, recorre 4 metros en 1 seg.

Jugador 2: el balón recorre $\frac{280\ metros}{40\ seg} = \frac{280\ m}{40\ s} = 7\frac{m}{s}$ es decir, recorre 7 metros en 1 seg.

Así el jugador numero 2 lanza el balón a una mayor velocidad.

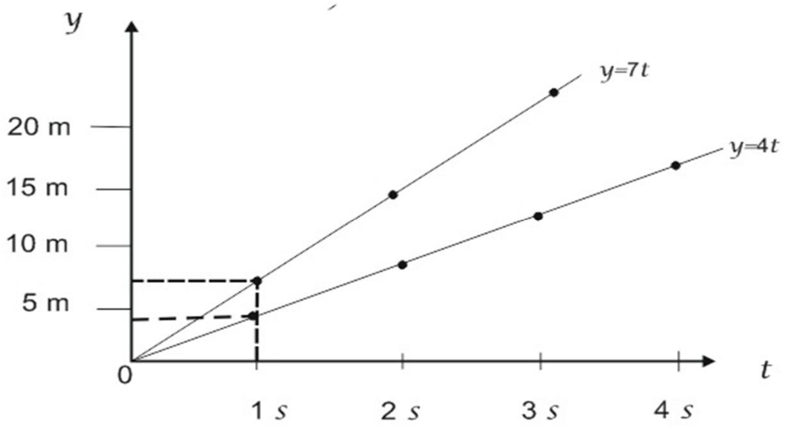
Para hacer este cálculo lo único que utilizamos fue la fórmula siguiente:

$$\frac{distancia\ recorrida\ (m)}{tiempo\ transcurrido\ (s)}.$$

Tiempo	Distancia-Jugador 1	Distancia-Jugador 2
1 s	4 m	7 m
2 s	8 m	14 m
3 s	12 m	21 m
4 s	16 m	28 m

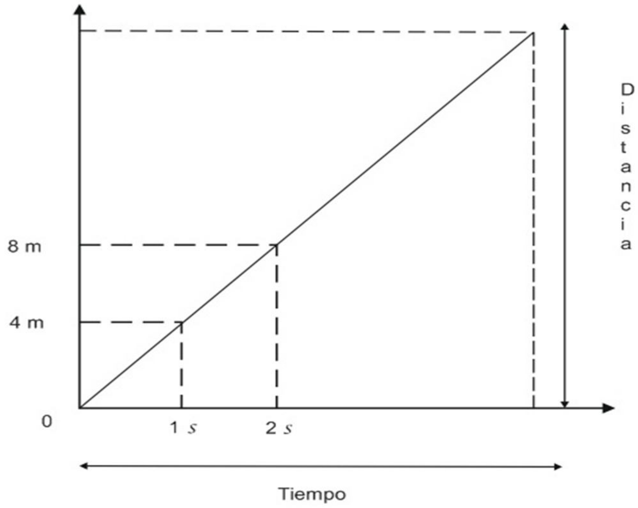
Tabla 3.1

Gráfica 3.1



En la gráfica 3.1 podemos ver claramente como fueron avanzando los dos balones, pero a lo que hay que poner atención realmente es como en cada segundo podemos saber a qué distancia se encontraba cada balón, por esto es, que en el caso del jugador 2 tenemos la fórmula $y = 7t$, verifiquemos, en el segundo 2 el balón estaba a 14 metros de distancia, que es igual a $7 \times 2 = 14\, metros$. Así para saber a qué distancia se encontraba cada uno, lo único que tenemos que hacer es sustituir el segundo que queramos en el tiempo t.

Gráfica 3.2



Otra cosa interesante es que entre más inclinada es la pendiente de la gráfica, mayor es la velocidad que representa. La cual podemos calcular de manera sencilla, la inclinación de la gráfica será lo que avance en la *vertical* mientras avanza un valor de 1 en la *horizontal*. Así que podemos usar la razón $elevación\ vertical/avance\ horizontal$ que sería como lo que acabamos de ver $\frac{\boldsymbol{distancia}}{\boldsymbol{tiempo}}$ Gráfica 3.2.

Veamos un ejemplo sencillo.

Un automóvil que viaja a una velocidad constante, alcanza la marca de los 320 Km pasadas 4 horas. ¿Cuál es la velocidad del automóvil en kilómetros por hora?
Recordemos que la velocidad está determinada por $\frac{distancia}{tiempo}$ así que la velocidad del automóvil es $\frac{320\ Km}{4\ horas}$ = 80 $Km/hora$.

Por tanto no debemos olvidarnos de esta fórmula

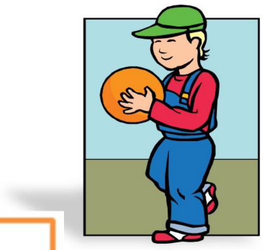
$$VELOCIDAD = \frac{DISTANCIA}{TIEMPO}$$

Cuando hablamos de la cantidad de metros que recorre un objeto en un segundo, estamos describiendo su rapidez o, mejor dicho, su velocidad.

Hasta ahora esto se ve sencillo, pero que pasa cuando hablamos de la velocidad de un objeto cualquiera, pero cuando esté cae. ¿Podremos encontrar esta velocidad de la misma manera?

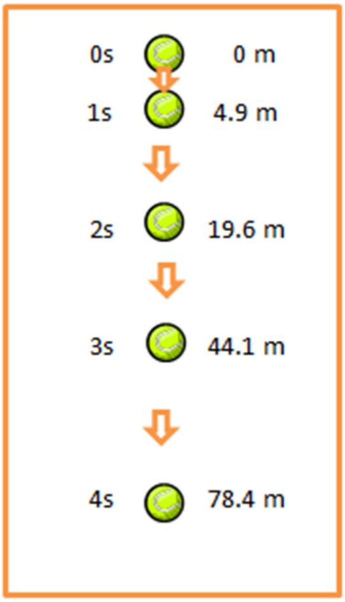
Ejemplo.

Figura 3.1



Observemos la figura 3.1, como podemos ver se muestran las diferentes posiciones en que se encuentra una pelota al caer, con los tiempos correspondientes.

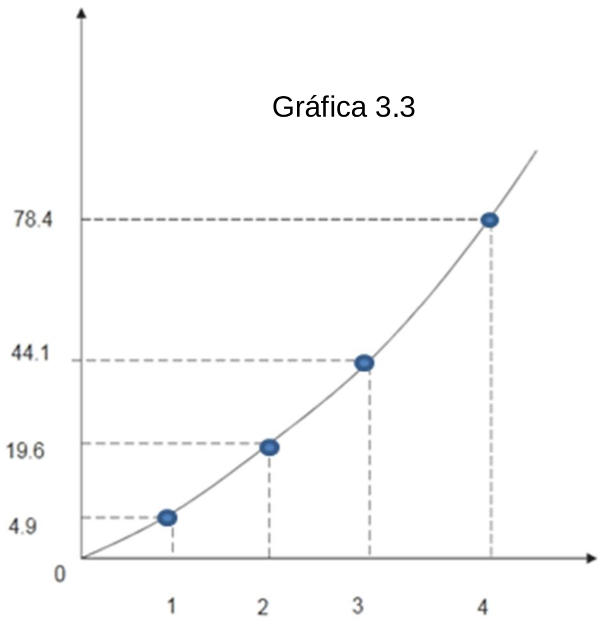
Con lo que aprendimos hasta ahora ¿Podríamos calcular dicha velocidad haciendo lo mismo que en el ejemplo anterior?



$$Velocidad = \frac{78.4\, m}{4\, s} = 19.6 m/s$$

Pero esta velocidad sólo es para cuando la pelota ha caído durante 4 segundos, pero rectifiquemos esta respuesta para cuando la pelota ha caído apenas 2 segundos.

$$velocidad = \frac{19.6\, m}{2\, s} = 9.8\, m/s$$



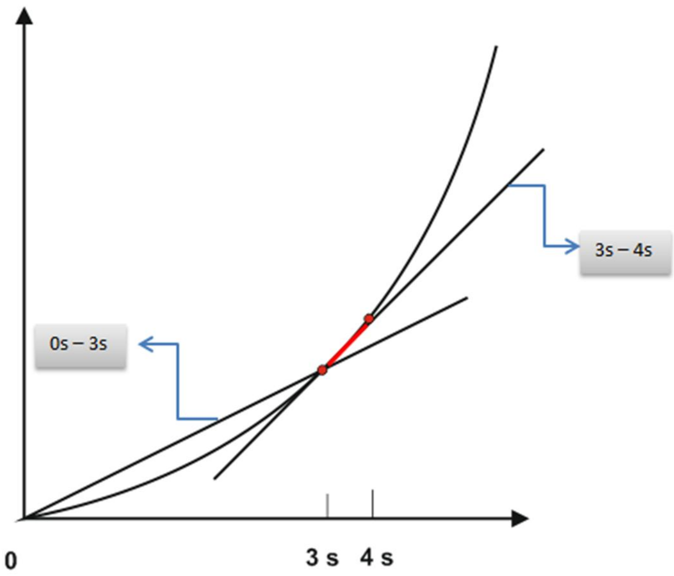
Gráfica 3.3

La velocidad no es la misma para el objeto, veamos la gráfica 3.3 de la pelota.

La gráfica es diferente a la de la pelota rodando, esto se debe a que la velocidad va en aumento mientras está cayendo, es decir, cuando la pelota está en una superficie plana, al rodar se desplaza a la misma velocidad todo el tiempo, velocidad promedio, por eso la gráfica que obtenemos es una línea recta. Entonces con esto tenemos otro problema ¿Cómo vamos a calcular la velocidad de la pelota mientras cae, si su velocidad aumenta en cada segundo que pasa?

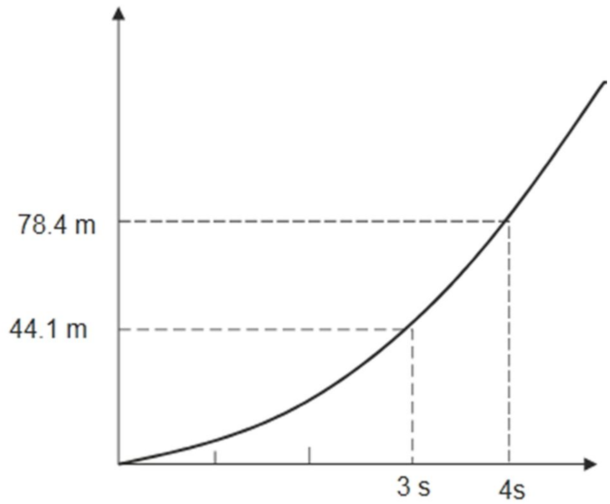
Primero haremos lo siguiente: encontraremos la velocidad de la pelota que cae, exactamente a los 3 segundos, para hacer esto calculemos la pendiente de la gráfica entre los 3 y los 4 segundos, esto será más preciso que la velocidad de 0 a 3 segundos (gráfica 3.4).

Gráfica 3.4



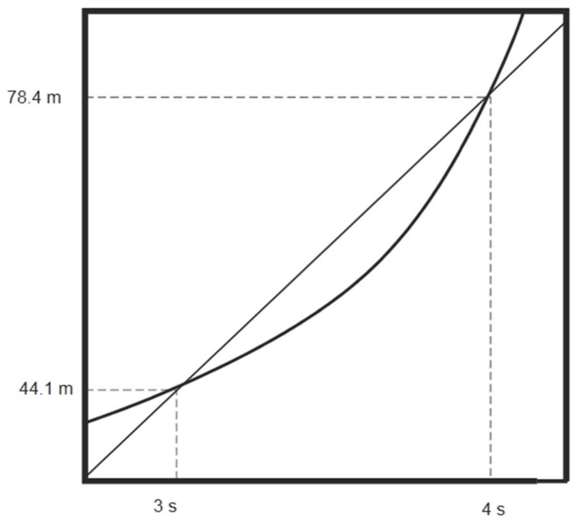
La distancia que hay entre 3 y 4 segundos es de 44.1 a 78.4 (Figura 3.1), recordando la fórmula utilizada hasta el momento tendríamos que:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{78.4\,m - 44.1\,m}{4\,s - 3\,s} = \frac{34.3\,m}{1\,s} = 34.3\,m/s$$



Gráfica 3.5

Esta es la velocidad aproximada, entre los 3 y 4 segundos, pero la velocidad no cambia mucho en un solo segundo a primera impresión, sin embargo si nos fijamos más detenidamente (con una lente de aumento) en la gráfica 3.6 podemos observar lo siguiente:



Aquí se puede ver el cambio de velocidad entre los 3 y los 4 segundos

Gráfica 3.6

Si intentamos calcular la velocidad entre los segundos 3 y 3.1, y comparar con la velocidad entre 3.9 y 4 segundos, nos daremos cuenta de que son muy diferentes. Se estarán preguntando como es que vamos a saber la velocidad en el segundo 3.1 si las únicas velocidades que conocemos son para 1, 2, 3 y 4 segundos.

Pues bien, existe una relación desarrollada por Isaac Newton, que describe el movimiento de un cuerpo que cae en la superficie de la Tierra, que es $y = 4.9\, t^2$, como se muestra en la gráfica. No nos preocuparemos por el momento de donde salió, simplemente la usaremos.

Para $t = 3.1$ tenemos que $y = 4.9 \times (3.1)^2 = 4.9 \times 9.61 = 47.089$m.

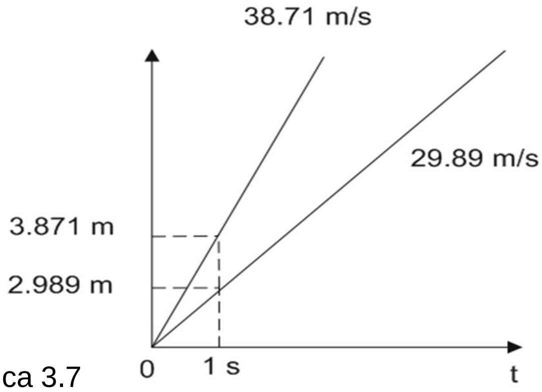
Para $t = 3.9$ tenemos que $y = 4.9 \times (3.9)^2 = 4.9 \times 15.21 = 74.529$m

Ahora ya podemos calcular la velocidad entre los segundos 3 y 3.1

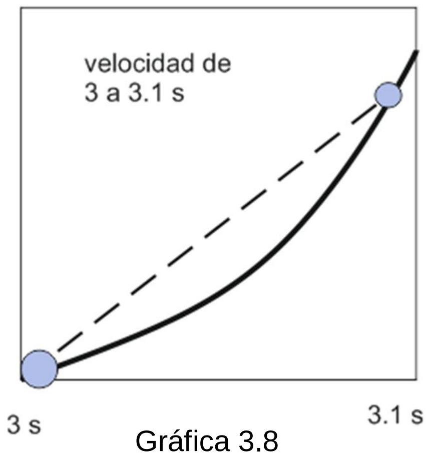
$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{47.089 - 44.1}{3.1 - 3} = \frac{2.989}{0.1} = 29.89\, m/s$$

Y la velocidad entre los 3.9 y 4 segundos

$velocidad = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{78.4-74.529}{4-3.9} = \frac{3.871}{0.1} = 38.71\frac{m}{s}$.



Gráfica 3.7

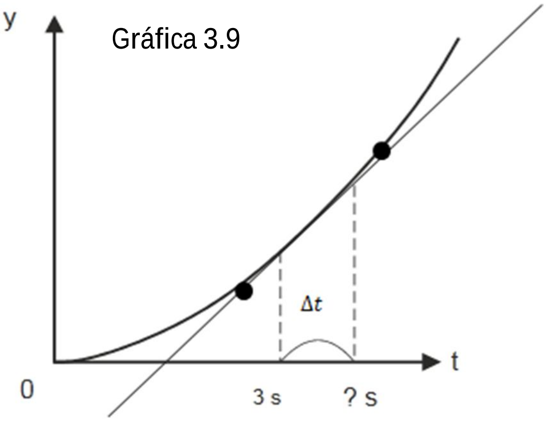


Gráfica 3.8

Vemos que la velocidad cambió mucho en un solo segundo, pero podemos pensar que la velocidad no cambia significantemente entre 3 y 3.1 segundos, veamos que no es así.

Pareciera que no vamos a encontrar la velocidad exacta a los 3 segundos, ya que al incrementarse el tiempo en 0.1 segundos la velocidad sigue cambiando, como sólo tenemos la fórmula de $\frac{distancia}{tiempo}$ y con esto sólo podemos conocer la velocidad cuando un objeto se ha movido en un lapso determinado, es decir, la velocidad promedio la cual corresponde a la distancia que se recorre en un tiempo determinado, no como es nuestro caso, en el que la velocidad cambia tanto, tomando en cuenta que se consideran tiempos muy pequeños, como lo es 0.1 segundos.

De nuevo Newton logró solucionar este problema, y lo pudo hacer, encontrando la velocidad instantánea, que para nuestro problema en cuestión sería exactamente a los 3 segundos. Esta velocidad debe establecerse en términos de $\frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$ y es preciso dividir la distancia recorrida durante un tiempo finito, entre ese tiempo.

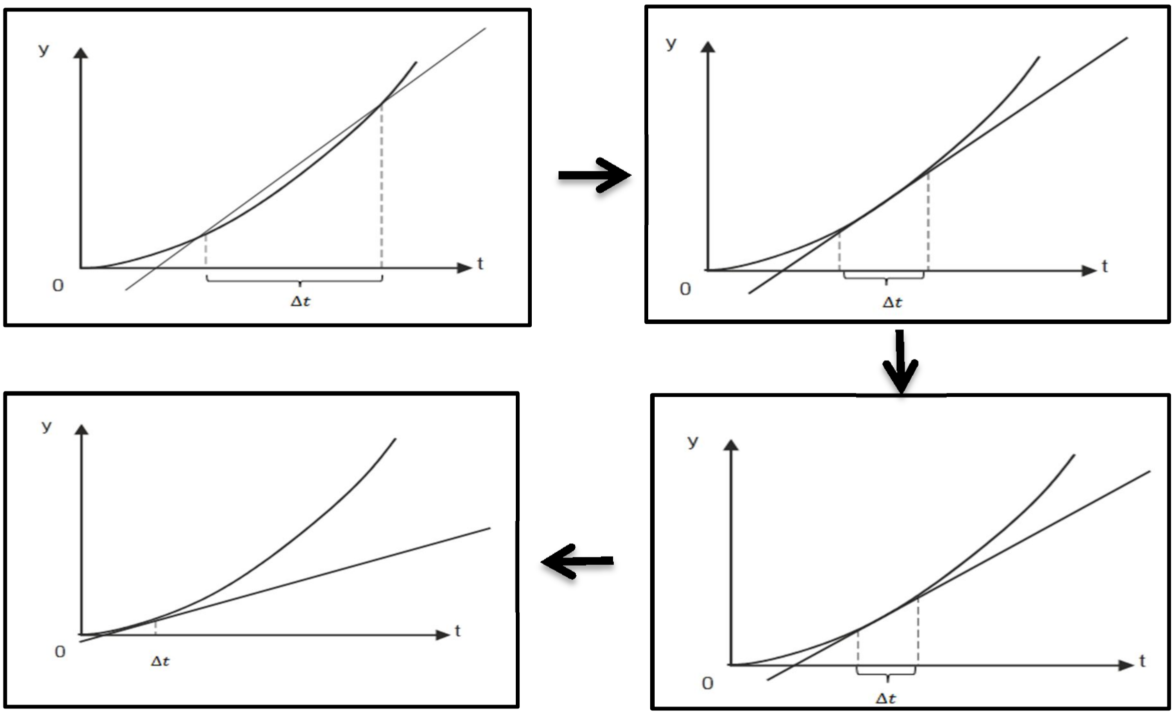


Gráfica 3.9

El término Δt (delta t) significa cambio o incremento en el tiempo, del mismo modo, la distancia que cambia o se incrementa durante t, se llama Δy

Para obtener un valor muy cercano a la velocidad en el instante correspondiente a 3 segundos, necesitamos hacer que el lapso entre 3 segundos y algún otro tiempo sea lo más breve posible. Se dice entonces que ese lapso dura $\Delta t\ s$.

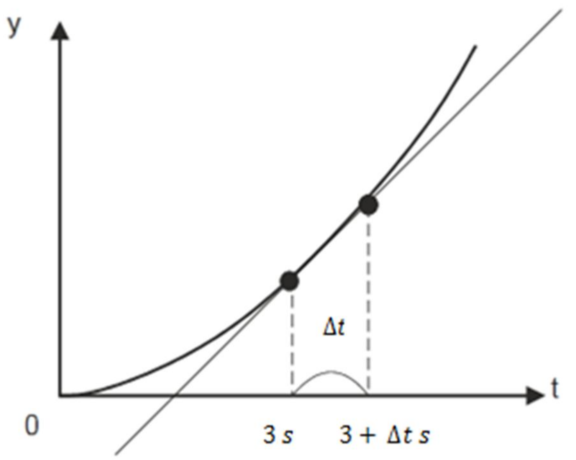
En otros términos, se precisa que Δt sea lo más pequeño posible, mientras más pequeño sea Δt, más preciso será el valor de la pendiente de la tangente.



Gráfica 3.10

Aclarado este punto entonces cuanto más pequeño hagamos el incremento Δt, más cerca estaremos de la velocidad instantánea, eso quiere decir que Δt tiene que acercarse al "cero", ya que no podría ser cero porque al dividir distancia entre un tiempo 0, sería incorrecto ya que esto es imposible. Así que lo único que podemos hacer es que el incremento Δt se "acerque infinitamente a 0".

Escrito de otra manera $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ donde lim es el $limite$. Con esto hacemos referencia a que Δt se acerque a 0, no solo con 0.1 s ó 0.0000000000001, o incluso 0.000000…0001 con un millón de ceros entre el decimal y el 1, pero siempre será un valor diferente de 0.



Para entender un poco mejor todo esto, regresemos a nuestro problema anterior, calcular la velocidad exactamente a los 3 segundos.

Gráfica 3.11

Primero encontraremos la velocidad en el intervalo entre los 3 y los 3 + Δt (gráfica 3.11), para esto no olvidemos nuestra fórmula y = 4.9t^2 esto implica que para 3 + Δt tenemos que y = 4.9 × (3 + $\Delta t)^2$ y podemos restar la distancia de la pelota en los primeros 3 segundos que es

y = 4.9 × 3^2 = 44.1 $metros$, ahora sí, calculemos la velocidad.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9 \times (3 + \Delta t)^2 - 44.1}{\Delta t} = \frac{4.9 \times (3 + \Delta t) \times (3 + \Delta t) - 44.1}{\Delta t} =$$

$$\frac{4.9 \times (9 + 3\Delta t + 3\Delta t + (\Delta t)^2) - 44.1}{\Delta t} = \frac{4.9 \times (9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2) - 44.1}{\Delta t} =$$

$$\frac{44.1 + 29.4\Delta t + 4.9(\Delta t)^2 - 44.1}{\Delta t} = \frac{29.4\Delta t + 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{29.4\Delta t}{\Delta t} + \frac{4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 29.4 + 4.9\Delta t$$

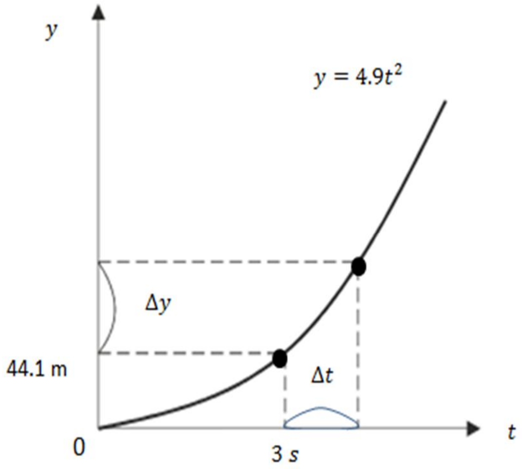
Esta es la velocidad promedio entre 3 y 3 + Δt segundos.

Para encontrar la velocidad precisa a los 3 segundos, tenemos que hacer que el incremento del tiempo Δt, se aproxime infinitamente a 0, es decir:

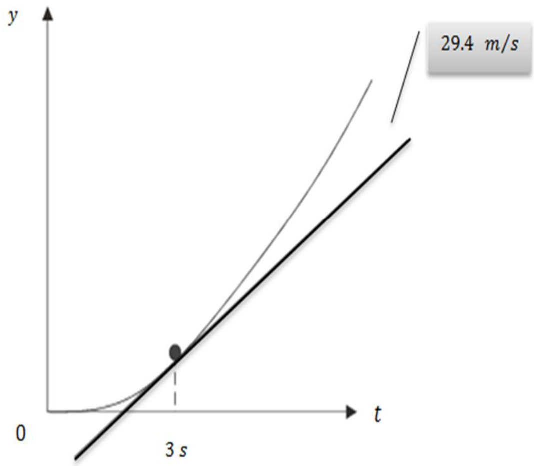
$$\lim_{\Delta t \to 0}(29.4 + 4.9\Delta t) = 29.4$$

La explicación es ésta, recordemos que Δt es infinitamente cercano a cero, y dado que Δt es prácticamente 0, como está multiplicando a 4.9, esa multiplicación también es infinitamente cercana a 0, por lo que también es prácticamente 0.

Gráfica 3.12



Gráfica 3.13



La pendiente de la recta en la gráfica se llama “pendiente de la recta tangente”.

Por lo tanto, ya encontramos la velocidad a los 3 segundos, pero la velocidad sigue cambiando mientras cae la pelota. Pues bien, para cualquier tiempo t, sólo cambiemos el 3 de los 3 segundos, por t, es decir, calcularemos la velocidad instantánea a los t segundos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9 \times (t + \Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t} = \frac{4.9 \times (t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t^2)) - 4.9t^2}{\Delta t} =$$

$$\frac{4.9t^2 + 9.8t\Delta t + 4.9(\Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t} = \frac{9.8t\Delta t + 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9.8t + 4.9\Delta t.$$

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0}(9.8t + 4.9\Delta t) = 9.8t.$$

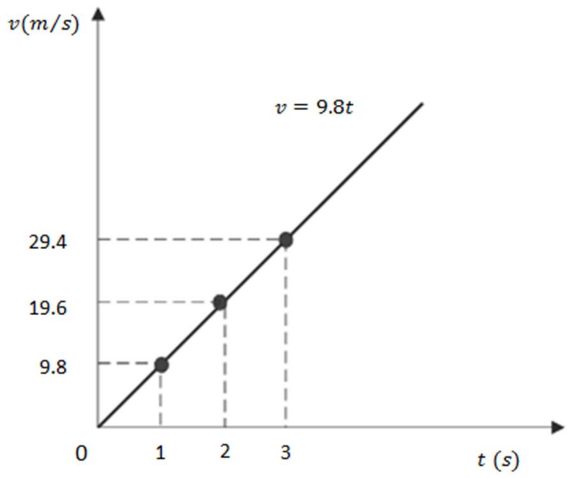
$\therefore$ La velocidad instantánea a los t segundos de tiempo transcurridos es de $9.8t\ m/s$.

Hagamos una prueba para el caso que ya tenemos hecho, 3 segundos.

$velocidad\ instantanea$ = 9.8$t\frac{m}{s}$ = 9.8 × 3$\frac{m}{s}$ = 29.4 m/s .

Que es el mismo resultado que habíamos obtenido, así que podremos saber la velocidad instantánea en el tiempo que queramos.

La gráfica para v = 9.8t, es la de la pelota que cae, mientras que la de y = 4.9t^2 era una gráfica de posición (la distancia recorrida).

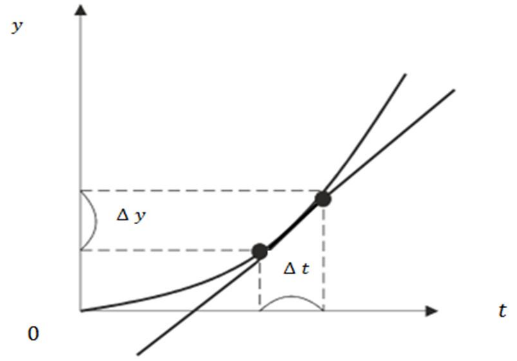


Gráfica 3.14

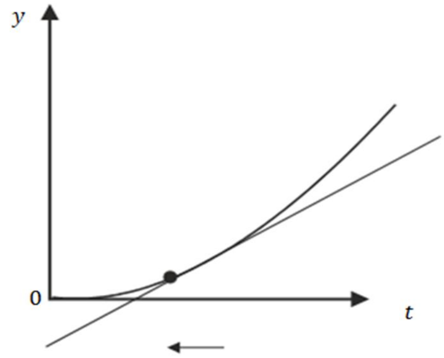
Tenemos las herramientas que nos hacían falta para comprender el concepto de la diferenciación, que no es otra cosa más que:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}$$

Donde $\frac{dy}{dt}$ es la notación para $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$, que sólo es una forma más fácil de escribirlo. Para leerlo es de esta manera: delta y en delta t. Hablando más formalmente para la diferenciación, a $\frac{dy}{dt}$ se le conoce como la derivada de y con respecto de t. O gráficamente:

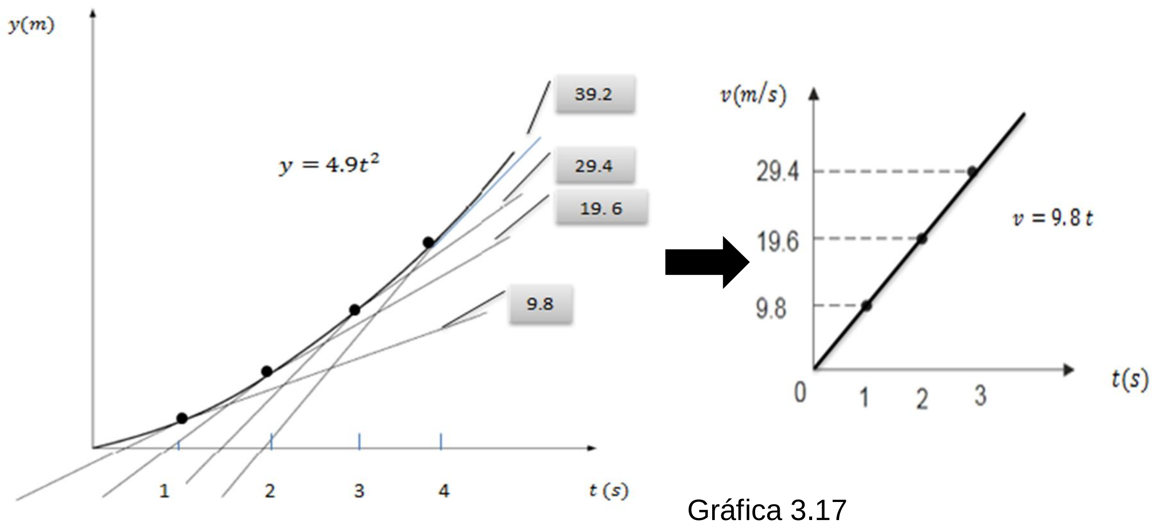


Gráfica 3.15



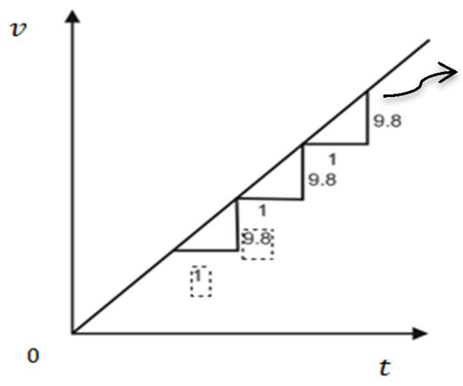
Gráfica 3.16

Utilizamos la diferenciación para encontrar la razón de cambio $\frac{distancia}{tiempo}$ en cualquier instante. Si diferenciamos sobre la gráfica de y = 4.9t^2 podemos obtener la gráfica v = 9.8t. Es decir, si utilizamos la diferenciación para encontrar la pendiente de y en cada tiempo sobre la curva de la izquierda, y localizamos todos estos valores en una nueva gráfica, obtendremos la gráfica 3.17.



Gráfica 3.17

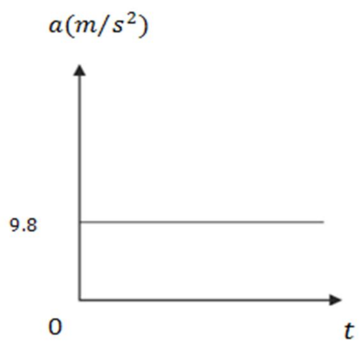
Entonces, si diferenciamos en una gráfica cuántos metros por segundo ha caído la pelota, podemos conocer la velocidad en cada instante, en metros por segundo, para cualquier tiempo.



Gráfica 3.18

Ahora diferenciamos sobre la gráfica (gráfica 3.17) v = 9.8t, procediendo de manera similar al ejemplo anterior (esta gráfica es una línea recta).

En cualquier punto de esta gráfica la velocidad aumenta en 9.8 por cada segundo trascurrido (gráfica 3.18); la pendiente siempre es 9.8. Si dibujamos esta gráfica resulta algo así:



Que es la gráfica de la aceleración de la pelota que cae: a=9.8 (gráfica 3.19).

Gráfica 3.19

Para finalizar con este tema del porque la diferenciación, recordemos que buscamos la aceleración. Pues bien, ya vimos que la velocidad es una razón de cambio, esto es, que tanto cambia la distancia en un segundo, entonces la aceleración es que tanto cambia la velocidad en un segundo.

Entonces la velocidad de la pelota continúa cambiando. La gráfica nos indica que la velocidad aumenta en 9.8 m/s cada segundo. Esto quiere decir que la aceleración es de 9.8 m/s^2.

Cuando queremos encontrar la aceleración de un objeto en movimiento, todo lo que necesitamos es una regla y un reloj, por así decirlo. Medimos cuántos metros ha recorrido un objeto durante cualquier lapso, dibujamos esto en una gráfica y calculamos una fórmula para la gráfica. El resto es muy sencillo, sólo se tiene que diferenciar dos veces, y obtendremos la respuesta.

Ahora que sabemos el valor de la aceleración de la pelota que cae, regresamos a la ecuación $F = ma$. Queríamos encontrar la fuerza de gravedad de la Tierra sobre la pelota.

$$\boldsymbol{F} \quad = \quad \boldsymbol{m} \quad \cdot \quad \boldsymbol{a}$$

Fuerza de la Tierra al atraer la pelota	Masa de la pelota	Aceleración de la pelota al caer

Recordemos nuestros datos.

La aceleración de la pelota es: $a = 9.8\ m/s^2$ y supongamos que el peso de dicha pelota es de 2 Kg. Ahora podemos calcular la atracción gravitacional de la Tierra sobre la pelota.

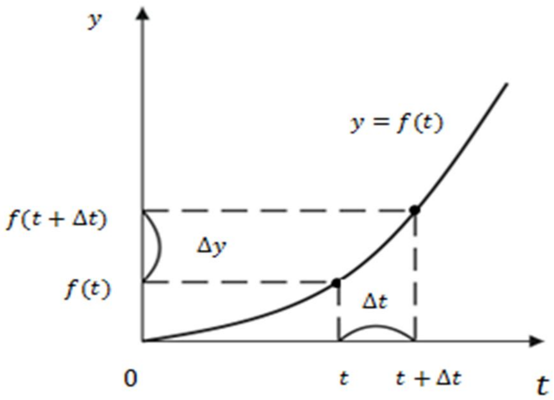
$F = m \cdot a = 2Kg \times 9.8\,m/s^2 = 19.6.$

Por tanto la fuerza de la Tierra al atraer una pelota de 2 Kg es 19.6 $\boldsymbol{N}$.
N significa Newtons que es una medida de fuerza y se obtiene de la multiplicación de $Kg \times m/s^2$.
De este tema se puede seguir hablando, pero para evitar confusiones con respecto a nuestro tema central, que es el cálculo diferencial, ya no se tocará más a fondo.

Vayamos a lo que realmente nos interesa, como diferenciamos. Pues bien, debemos poner mucha atención en la siguiente.

Para encontrar la velocidad de un objeto (cuya velocidad está cambiando con el tiempo) en un instante específico t, calcula la velocidad sobre el intervalo que va, de los t segundos, a Δt segundos después de tal instante.

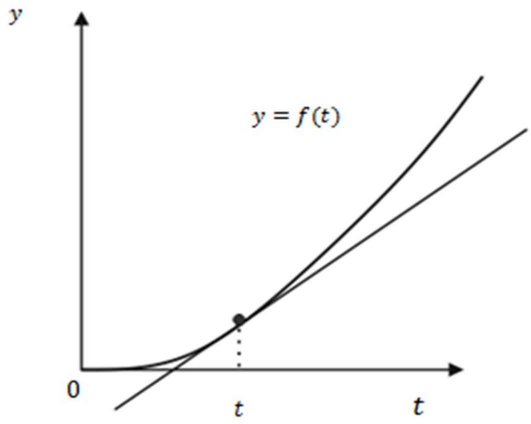
$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$



Gráfica 3.20

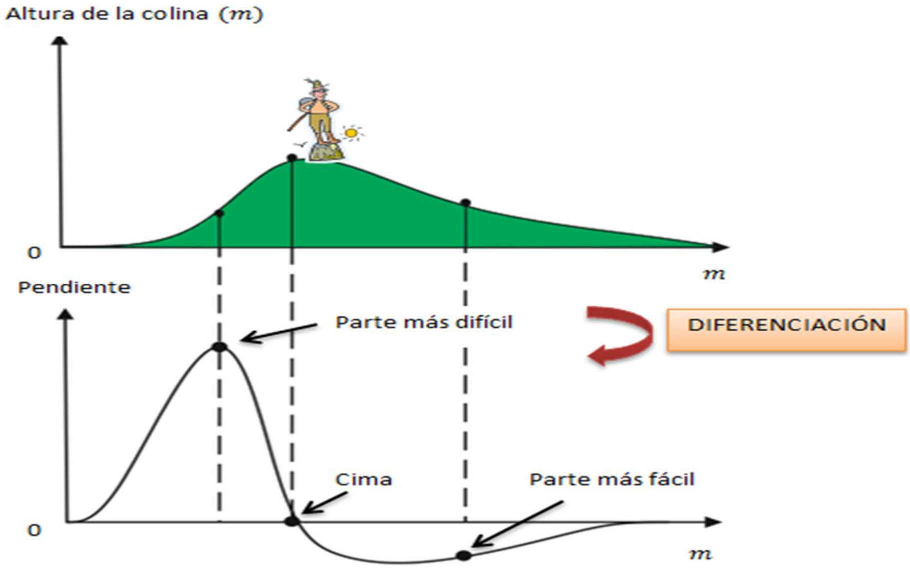
Luego hacemos que Δt se aproxime a 0 lo más que se pueda.

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

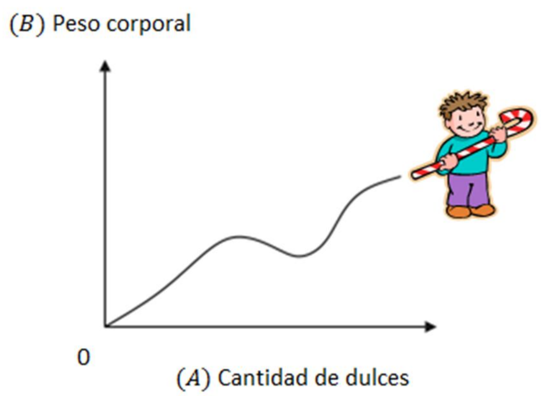


Gráfica 3.21

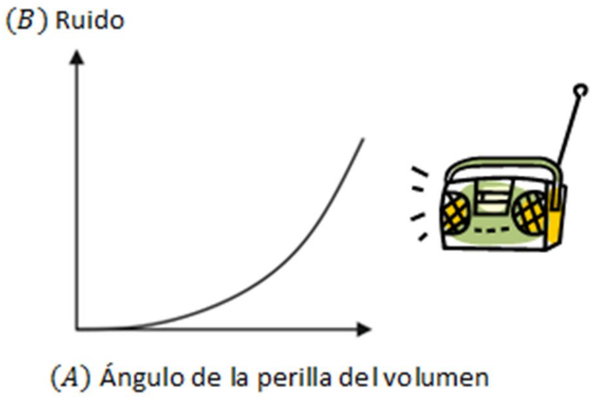
Con lo visto hasta ahora, quizá llegamos a pensar, que la derivada sólo nos sirve para calcular la velocidad y la aceleración, pero no es así. Por ejemplo podemos imaginarnos que estamos escalando una colina, utilizamos la diferenciación para conocer qué punto de la colina es el más empinado, observemos las gráficas.



La diferenciación puede indicarte qué tan gordo te pondrás mientras más dulces comas…



O qué tan fuerte será el ruido del estéreo entre más subas el volumen.



En estos problemas como nos podemos dar cuenta, al igual que en nuestro caso anterior, en donde encontrábamos cómo calcular la velocidad, ésta dependía de la distancia y el tiempo. Aquí se puede apreciar que nos piden cosas diferentes, como que tanto puede cambiar el peso de una persona dependiendo de cuantos dulces come, o que tan fuerte será el ruido dependiendo de cuanto volumen se le suba a la radio. En estos tres casos, hay una similitud, que la respuesta que buscamos siempre depende de algo más, es por eso, que en el caso de la velocidad, cuando utilizábamos la derivada ésta se resolvía con respecto de t, es decir, dependía del tiempo. En resumen, la diferenciación nos ayuda a saber cómo un cambio en (A) afecta a (B). Así que en nuestros ejemplos, lo único que necesitamos son los datos exactos para la solución, y algún método como veremos en el capítulo cinco.

4. UN ATAJO PARA LA DIFERENCIACIÓN

En esta sección veremos una manera más conveniente para llevar a cabo la diferenciación, y sobre todo de una manera más sencilla, para poder aplicarla con

Recordemos que si diferenciamos $f(t) = 4.9t^2$, el resultado será: $\frac{df(t)}{dt} = 9.8t$.

Ahora observemos con atención los valores que tenemos para $f(t)$ y $\frac{df(t)}{dt}$.

Si multiplicamos 4.9 por el exponente de t, que es 2, el resultado es 9.8. Lo cual no es ninguna coincidencia, veamos porque con el siguiente ejemplo.

Con $f(t) = 3t^2$.

Obtendremos que $\frac{df(t)}{dt} = 2 \times 3t = 6t$.

Este resultado lo obtenemos usando el método de diferenciación que aprendimos antes.

$$f(t + \Delta t) - f(t) = 3(t + \Delta y)^2 - 3t^2 = 3(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 3t^2 = 6t\Delta t + 3\Delta t^2$$

Después dividimos entre Δt y encontramos la razón de cambio durante Δt:

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta(t)} = \frac{6t \cdot \Delta \boldsymbol{t} + 3\Delta \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = 6t + 3\Delta t.$$

Por último, hacemos que Δt se acerque a 0:

$$\lim_{\Delta t \to 0} 6t + \lim_{\Delta t \to 0} 3\Delta t = 6t + 0 = 6t.$$

Por lo tanto el resultado es de $6t$.

Esto sugiere que cuando derivamos $f(t) = at^n$, el resultado será:

$$\frac{df(t)}{dt} = ant^{n-1}.$$

Probemos que si el resultado de la diferenciación de $f(t) = at^n$ es siempre:

$$\frac{df(t)}{dt} = ant^{n-1}.$$

Utilizaremos el método de diferenciación que ya se no es familiar.

$$f(t + \Delta t) - f(t) = a(t + \Delta t)^n - at^n.$$

Pero ahora tenemos que resolver para $(t + \Delta t)^n$. Para resolverlo recordemos que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Que también podemos escribir esto como:

$$(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Dicho de otra forma, $(a + b)$ multiplicado tres veces por si mismo da como resultado la suma de:

- Un término que es el cubo de a: (a^3)
- Otro término que es cubo de b: $(b)^3$
- Otro más que es el triple producto del cuadrado de a por b: $(3a^2b)$
- Por último, el triple producto de a por el cuadrado de b: $(3ab^2)$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Si intentamos lo mismo con $a(t + \Delta t)^n$, obtenemos

$$a[(t + \Delta t)(t + \Delta t)(t + \Delta t) \cdots (t + \Delta t)].$$

Aquí $(t + \Delta t)$ se multiplica n veces por sí mismo.

Vamos a deducir la fórmula que nos permitirá elevar a cualquier potencia de exponente natural n, un binomio.

Para esto, Utilizaremos el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

Si observamos los coeficientes de los ejemplos anteriores $(a + b)^2, (a + b)^3, (a + b)^4$, incluyendo también $(a + b)^1$ encontraremos una relación.

	Coeficientes
$(a+b)^1$	1 - 1
$(a+b)^2$	1 – 2 - 1
$(a+b)^3$	1 – 3 – 3 – 1
$(a+b)^4$	1 – 4 – 6 – 4 - 1

Podemos observar que cada fila empieza y termina por 1, que los números que aparecen forman una fila simétrica, o sea el primero es igual al último, el segundo igual al penúltimo, etc., y cada número es la suma de los dos que tiene encima, que es lo que se conoce como el triángulo de Pascal.

Cada uno de esos números corresponde al valor de un número combinatorio así:

$$\binom{1}{0} \ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4}$$

La fórmula para calcular un número combinatorio es la siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{Para } 0 \leq k \leq n$$

No hay que olvidar que cada uno de estos números es el coeficiente binomial.

Por ejemplo, calculemos $\binom{4}{2}$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{[(2)(1)][(2)(1)]} = \frac{12}{2} = 6.$$

Vemos que es correspondiente con el coeficiente del tercer término de $(a+b)^4$.

Para calcular las potencias de un binomio elevado a la potencia n, utilizaremos el Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Observando las potencias de $(a+b)$, vemos que las potencias de a empiezan elevadas a n, va disminuyendo uno a uno hasta llegar a cero. A los exponentes de b les ocurre lo contrario.

Con esto ya podemos hacer el cálculo para resolver $(t+\Delta t)^n$.

$(t+\Delta t)^n = \binom{n}{0} t^n (\Delta t)^0 + \binom{n}{1} t^{n-1} (\Delta t)^1 + \binom{n}{2} t^{n-2} (\Delta t^{)2} + \binom{n}{3} t^{n-3} (\Delta t^{)3} + \cdots +$
$\binom{n}{n-1} t^{n-(n-1)} (\Delta t)^{n-1} + \binom{n}{n} t^0 (\Delta t^{)n}.$

Por tanto

$a(t+\Delta t)^n =$
$a\left[t^n + nt^{n-1}(\Delta t)^1 + \binom{n}{2} t^{n-2}(\Delta t)^2 + \binom{n}{3} t^{n-3} (\Delta t)^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-(n-1)} (\Delta t)^{n-1} + (\Delta t)^n\right].$

Ahora, regresando a $f(t+\Delta t) - f(t)$ y sustituyendo la nueva expresión, obtenemos:

$$f(t+\Delta t) - f(t) = a(t+\Delta t)^n - at^n.$$

$$= a\left[t^n + nt^{n-1}(\Delta t)^1 + \binom{n}{2} t^{n-2}(\Delta t)^2 + \binom{n}{3} t^{n-3}(\Delta t)^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-(n-1)} \Delta t^{n-1} + (\Delta t)^n\right] - at^n.$$

$$= a\left[t^n + nt^{n-1}(\Delta t)^1 + \binom{n}{2} t^{n-2}(\Delta t)^2 + \binom{n}{3} t^{n-3}(\Delta t)^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-(n-1)} (\Delta t)^{n-1} + (\Delta t)^n - t^n\right].$$

Aquí se cancela el término t^n. Así que

$f(t+\Delta t) - f(t) =$
$a\left[nt^{n-1}(\Delta t)^1 + \binom{n}{2} t^{n-2}(\Delta t)^2 + \binom{n}{3} t^{n-3}(\Delta t)^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} t^{n-(n-1)} (\Delta t)^{n-1} + (\Delta t)^n\right].$

Luego dividimos entre Δt

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{a\left[nt^{n-1}(\Delta t)^1+\binom{n}{2}t^{n-2}(\Delta t)^2+\binom{n}{3}t^{n-3}(\Delta t)^3+\cdots+\binom{n}{n-1}t^{n-(n-1)}(\Delta t)^{n-1}+(\Delta t)^n\right]}{\Delta t}.$$

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=a\left[nt^{n-1}+\binom{n}{2}t^{n-2}\Delta t+\binom{n}{3}t^{n-3}(\Delta t)^2+\cdots+(\Delta t)^{n-1}\right].$$

Continuando con nuestro método de diferenciación, aplicamos el limite cuando $\Delta t \to 0$, de este modo los términos que contengan a Δt se vuelven 0.

$$\therefore \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=a\cdot nt^{n-1}.$$

En otras palabras, si diferenciamos $f(t)=at^n$, el resultado es, con certeza:

$\frac{df(t)}{dt}=a\cdot nt^{n-1}.$

DIFERENCIACIÓN

$$at^n \longrightarrow \boxed{n\cdot at^{n-1}}$$

Multiplica todo por el exponente "n" y réstale 1 al exponente n

Por ejemplo:

$ft)=t^3$ La derivada es: $\frac{df(t)}{dt}=3\cdot t^{3-1}=3t^2.$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3$ La derivada es: $\frac{df(x)}{dx}=3\cdot\frac{1}{3}x^{3-1}=x^2.$

5. APLICACIONES

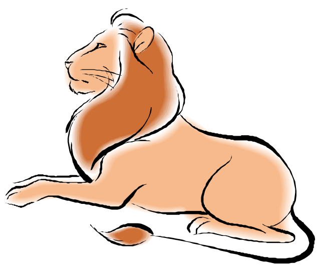
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una de las aplicaciones del cálculo diferencial, son los problemas en los que se nos pide la mejor forma de hacer algo, es decir, la forma óptima.

En esta parte resolveremos problemas de máximos y mínimos, cuya solución geométricamente se traduce en localizar el punto más alto o más bajo de la gráfica del problema. Si dibujáramos una recta tangente en este tipo de puntos, ésta es horizontal (su pendiente es cero), lo cual nos lleva a establecer que $\frac{df}{dx} = 0$ es la condición que nos permitirá resolver los problemas propuestos.

A continuación se muestran algunos de estos ejemplos:

Ejemplo 5.1



En un zoológico de México se han tenido algunos problemas, ya que se había llevado a éste, un león recién nacido, pero con el paso del tiempo el león creció, provocando que la jaula donde lo habían dejado, fuera muy pequeña para él y el problema se incrementó, cuando se supo que le llegaría una compañera nueva, una leona. Los encargados del zoológico decidieron hacer una jaula nueva, de forma rectangular, donde sólo se cercarán tres lados, ya que se utilizará la barda posterior del zoológico para el cuarto lado. Si el material del que se dispone es de 30 metros de largo, ¿Qué dimensiones deberá tener la jaula para que esta tenga la mayor área posible?

Daremos solución a este ejemplo siguiendo las siguientes estrategias:

1) Daremos lectura al enunciado, encontraremos que lo que sea plantea es encontrar las dimensiones de una jaula rectangular que tenga la mayor área posible.

2) A continuación se muestra el dibujo del problema.

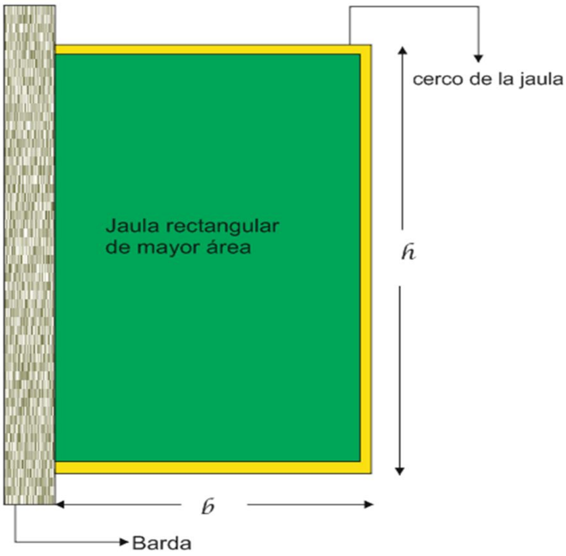


Figura 5.1

3) Como vimos en los problemas anteriores, hacer una gráfica del problema resulta útil para establecer una aproximación de la solución, por lo que elaboraremos una tabla con posibles dimensiones de los lados, para este propósito

Tabla 5.1

Base (b)	Altura (h)	Largo del cerco (l)	Área cercada (A)
1 m	28 m	30 m	28 m^2
3 m	24 m	30 m	72 m^2
5 m	20 m	30 m	100 m^2
7 m	16 m	30 m	112 m^2
9 m	12 m	30 m	108 m^2
11 m	8 m	30 m	88 m^2
13 m	4 m	30 m	52 m^2
15 m	0 m	30 m	0 m^2

Para la realización de estos cálculos se hizo lo siguiente:

Llamemos l al largo del cerco; entonces tenemos que:

$$l = 30\,m$$

$$l = 2b + h;$$

Despejando h $$h = 30 - 2b$$

Además, llamando A al área de la jaula, que es rectangular:

$A = b \times h$

Calculemos

Tomando $b = 1\,m$: como $h = 30 - 2b$ entonces

$h = 30 - 2(1) = 28\,m$ Y

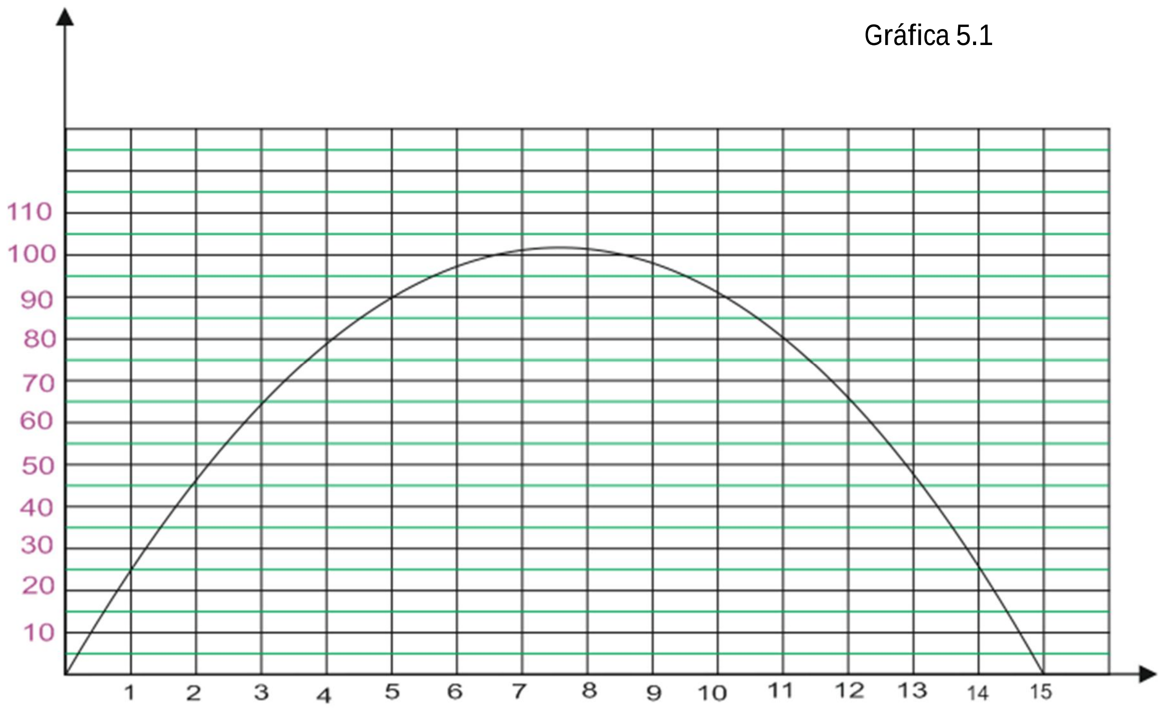
$A = 1(28) = 28\,m^2$

Tomando $b = 3\,m$: $h = 30 - 2(3) = 24\,m$ y

$A = 1(24) = 72\,m^2$

4) Representaremos en el plano cartesiano el área de la jaula en el eje vertical y la base en el eje horizontal.
5) Localizaremos en el plano cartesiano todas las parejas de valores $[b, A(b)]$ que se encuentren en la tabla.
6) Localizados los puntos, los unimos con una línea curva sin despegar el lápiz del papel.
7) La gráfica resultante es la gráfica de la función área del problema.

Gráfica 5.1



8) A continuación localicemos el punto de la gráfica que representa la jaula de mayor área. Para esto tenemos que localizar el punto más alto de la curva. A simple vista podríamos decir que el punto está en (7.5,112.5).

9) Con esta información ya podemos establecer la solución del problema.

10) SOLUCIÓN:

- Base de 7.5 m.
- La altura se determina: $h = 30 - 2(7.5) = 15\ m$.

Podríamos pensar que con este tipo de métodos podríamos resolver problemas como los que mencionamos antes, y entonces, ¿para qué necesitamos el cálculo deferencial? Bien, a continuación veamos cómo se utiliza la diferenciación para resolver este mismo problema.

La función con la que trabajaremos es la fórmula del área $A = b \times h$, donde A es el área de la jaula del león.

Tomando en consideración los datos anteriores tenemos que:

$$l = 30\ m$$
$$l = 2b + h;\ \text{Despejando } h$$
$$h = 30 - 2b$$

En este caso el área es una función, una función que depende de la base, la cual denotaremos como $A(b)$, entonces:

$A(b) = b \times h$ Y dado que ya tenemos el valor de la altura h, sutituimos.

$A(b) = b \times (30 - 2b)$ $\therefore A(b) = 30b - 2b^2$

Hasta este momento con lo único que contamos es con una función. Para encontrar las dimensiones que deberá tener la jaula para que esta tenga la mayor área posible, es decir encontraremos el máximo de nuestra función $A(b)$, utilizaremos el método de la primera derivada, es aquí donde utilizaremos nuestros conocimientos de diferenciación.

El método consiste en lo siguiente:

Paso 1: Obtener la derivada de la función.

Paso 2: Una vez hallada la derivada de la función, el resultado que obtengamos lo igualamos a cero, se calculan las raíces reales de la ecuación que resulta, es decir, los valores de la variable con los que la ecuación sea cero. Estas raíces se les conocen como valores críticos.

Paso tres: Considerar los puntos críticos uno a uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente + y después–, la función tiene un valor máximo para el valor crítico de la variable; en el caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

Paso 1: $\frac{dA(b)}{db} = \frac{d[30b-2b^2]}{db} = 30 - 4b$

Paso 2: $\frac{dA(b)}{db} = 30 - 4b = 0$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

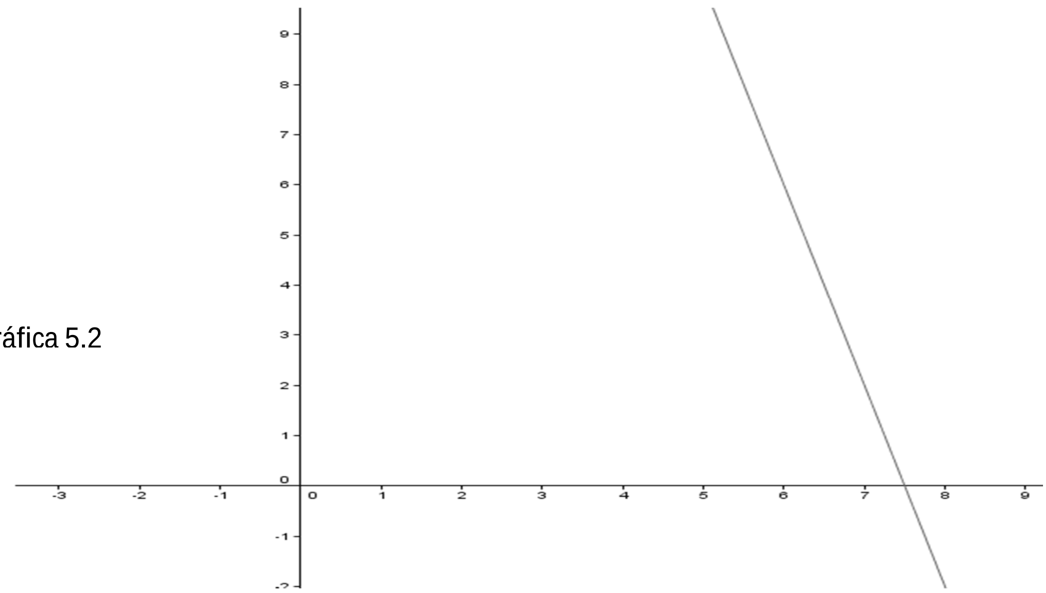
$30 - 4b = 0$ Hacemos una factorización y nos queda que

$2(15 - 2b) = 0$, sabemos que todo número multiplicado por 0 nos da como resultado 0, entonces de la ecuación tenemos que $(15 - 2b)$ deberá ser 0, así:

$(15 - 2b) = 0 \Rightarrow 15 = 2b \Rightarrow b = 7.5$

Éste es nuestro valor crítico.

Gráfica 5.2



Paso 3:

En este paso consideraremos los puntos, 7 y 8, para ver cómo se comporta el signo de la nuestra derivada.

Evaluemos para el valor de 7.

$$\frac{dA(7)}{db} = -4b + 30 = -4(7) + 30 = -28 + 30 = 2$$

Ahora para el valor de 8.

$$\frac{dA(8)}{db} = -4b + 30 = -4(8) + 30 = -32 + 30 = -2$$

Podemos ver que el signo cambio + a - por lo tanto tiene un máximo en el punto 7.5.

Evaluemos en nuestra función original.

$A(b) = (b)(30 - 2x)$

$A(7.5) = (7.5)[30 - 2(7.5)] = (7.5)(30 - 15) = 7.5(15) = 112.5$

$\therefore$ El resultado concuerda con el que antes ya habíamos encontrado, se alcanza un máximo en $\left(7.5, A(b)\right) = (7.5, A(7.5)) = (7.5{,}112.5)$

Y como nos pudimos dar cuenta, con ayuda de la diferenciación podemos encontrar de una manera más rápida la solución a este ejercicio, de igual forma, es un método que nos brinda mayor seguridad en cuanto a nuestra solución, es decir, nos da mayor precisión en nuestro resultado.

Ejemplo 5.2

¿Cuáles son las medidas de una lata de forma cilíndrica que minimice costos de manufactura?

Bien, para este tipo de problemas lo que necesitamos saber es que tanto producto se requiere envasar, por ejemplo:
Un fabricante de productos lácteos, se asoció con un fabricante de chocolate, para vender leche con chocolate, en diferentes presentaciones, una de ellas en una lata, la capacidad de ésta es de un litro, es decir, 1000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener la lata, de manera que requiera la mínima cantidad de metal para su manufactura?

Solución:

Siguiendo un método similar al anterior.

Lo que queremos calcular son las dimensiones que debe de tener la lata, dado que la lata corresponde a un cilindro, entonces lo que se desea es encontrar son las medidas para las cuales el área de la superficie se mínima.

Hagamos un dibujo

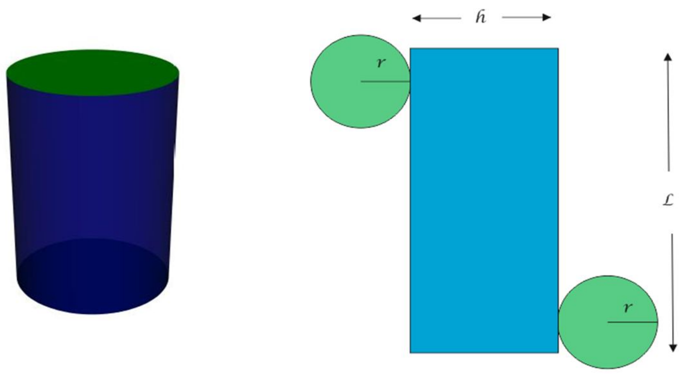


Figura 5.2

Utilizaremos las letras r y h para representar el radio y la altura respectivamente, el volumen V será expresado como:

$$V = \pi r^2 h$$

Que es la fórmula del volumen de un cilindro.

Como ya sabemos que nuestra lata debe contener 1000 cm^3de chocolate, podemos sustituir en nuestro volumen.

$$1000\ cm^3 = \pi r^2 h$$

Ahora despejemos$h$, de tal manera que la altura quede en términos de la relación anterior.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Para poder usar la mínima cantidad de material posible, debemos buscar el radio de la lata de chocolate cuya superficie de contorno sea mínima. Supongamos que láminas uniformes en grosor y calidad de material.

La superficie de un cilindro circular recto está conformada por el área de la base, circular en este caso: $A = \pi r^2$, pero como el cilindro tiene dos bases (tapa y fondo de la lata), se multiplica por 2. Además, el área lateral está formada por un rectángulo de altura “h” y del largo del perímetro del circulo $L = 2\pi r$, por lo que el área lateral es $2\pi rh$. Hagamos esto más fácil.

$\acute{A}rea\ de\ la\ superficie = \acute{a}rea\ de\ la\ tapa + \acute{a}rea\ del\ fondo + \acute{a}rea\ lateral$, es decir,

$\acute{A}rea\ de\ la\ superficie = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$, simplificando tenemos:

$\acute{A}rea\ de\ la\ superficie = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Ahora sustituimos el valor de h.

$\acute{A}rea\ de\ la\ superficie = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\left(\frac{1000}{r}\right) = 2\pi r^2 + \left(\frac{2000}{r}\right)$.

Hay que considerar que r es una variable sujeta a ciertas restricciones físicas, no puede ser cero ni negativa, pero a pesar de ello todavía nuestro problema tiene un número ilimitado de posibles soluciones.

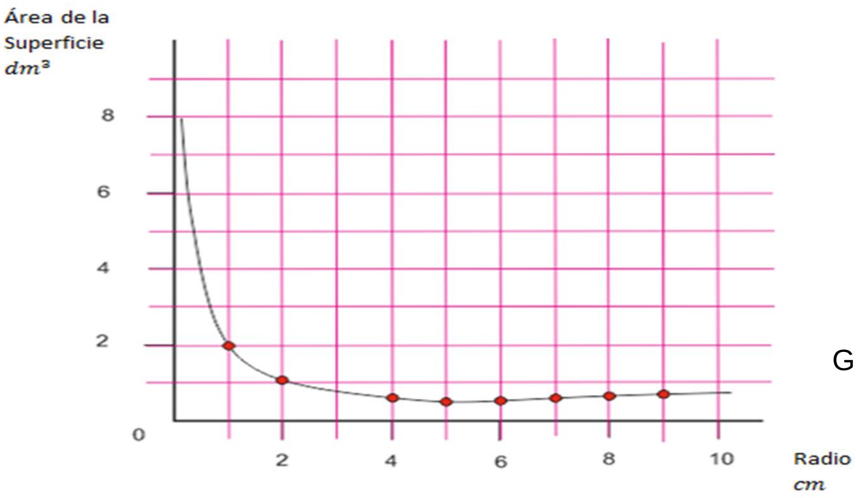
Hagamos una gráfica para aproximarnos a la solución, con la siguiente tabla de valores.

Radio (cm)	Área de la superficie (cm^3)	Área de la superficie (dm^3)
2	1025,132741	1,025132741
3	723,2153344	0,723215334
4	600,5309649	0,600530965
5	557,0796327	0,557079633
6	559,5280044	0,559528004
7	593,5903658	0,593590366
8	652,1238597	0,65212386
9	731,1602321	0,731160232

Tabla 5.2

Nota: Para esta tabla utilizamos la siguiente equivalencia para calcular el área de la superficie en decímetros cúbicos dm^3.

$$1\ dm^3 = 1000cm^3 \qquad \therefore\ 1dm^3 = 1\ litro$$



Gráfica 5.3

Observemos que aunque la tabla y la gráfica no contienen probablemente la solución del problema, al menos nos ayuda para hacer una aproximación a la curva, que obtenemos representando la función obtenida. Podríamos dar una solución aproximada, en este caso está un poco confusa, al contrario del ejercicio anterior, donde el punto máximo estaba más claro en nuestra gráfica. Sólo podemos notar que el punto más bajo esta entre $5cm$ de radio y $6cm$.

Entonces para encontrar un resultado con mayor precisión ocupemos el método de la primera derivada.

La función de nuestro problema está dada por la fórmula que obtuvimos para el área de superficie, y como el valor que buscamos es el radio, la función queda de la siguiente manera.

$$A(r) = 2\pi r^2 + \left(\frac{2000}{r}\right).$$

Siguiendo el procedimiento tenemos:

$$\frac{d[A(r)]}{dr} = \frac{d\left(2\pi r^2 + \left(\frac{2000}{r}\right)\right)}{dr} = 4\pi r + \left(-\frac{2000}{r^2}\right) = 4\pi r - \left(\frac{2000}{r^2}\right).$$

Nota: al derivar $\frac{2000}{r}$ con respecto de r lo que hicimos fue lo siguiente.

$\frac{2000}{r} = 2000(r^{-1})$. Así que $\frac{d\left(\frac{2000}{r}\right)}{dr} = \frac{d2000(r^{-1})}{dr} = -1(2000)(r^{-2}) = -\frac{2000}{r^2}$.

Ya que la fórmula vista en el capítulo 4 es válida también para exponentes negativos.

Ahora igualamos a 0 la derivada: $\frac{dA(r)}{dr} = 0$.

Es decir,

$4\pi r - \left(\frac{2000}{r^2}\right) = 0$ Resolvamos la ecuación

$4\pi r - \left(\frac{2000}{r^2}\right) = 0$ factorizamos 4: $4\left(\pi r - \left(\frac{500}{r^2}\right)\right) = 0$

Todo número multiplicado por 0 da como resultado 0, y como $4 \neq 0$, entonces:

$\pi r - \left(\frac{500}{r^2}\right) = 0$ Luego

$$\pi r = \left(\frac{500}{r^2}\right) \Rightarrow \pi r^3 = 500 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.4192607013\, cm.$$

Este es nuestro valor crítico. Evaluemos ahora en la deriva valores cercanos a él, en este caso 5 y 6.

$$\frac{dA(5)}{dr} = 4\pi(5) - \left(\frac{2000}{5^2}\right) = -17.1681469282\ cm$$

$$\frac{dA(6)}{dr} = 4\pi(6) - \left(\frac{2000}{6^2}\right) = 19.8426681305\ cm$$

Como nos podemos dar cuenta nuestra derivada cambia de signo de – a +, así que de acuerdo al criterio de la primera derivada, la función de nuestro problema tiene un mínimo en $r \approx 5.4192607013$.

$\therefore$ La función del problema de la lata para chocolate tiene un mínimo en $\left(5.419, A(5.419)\right)$, evaluando en nuestra función nos queda: $(5.419, 553.581)$.

Observemos que lo que necesitamos encontrar para resolver el problema es el punto más bajo. La primera coordenada de este punto más bajo, es la elección exacta del radio r que da como resultado una lata para para envasar 1 litro chocolate con área mínima, mientras que la segunda coordenada proporciona el valor numérico del área de la superficie.

Ejercicios para complementar:

5.1 Gabriel ha recibido una herencia que su abuelo le dejó, pero toda la familia piensa que él es incapaz de cuidar y mucho menos incrementar el dinero que se le dio. Gabriel decidió poner un negocio propio, para esto ha decidido comprar un terreno y poner un autolavado. El terreno que compró mide 50 por 100 m , y él quiere bardear una superficie rectangular que tenga 550 m^2 dejando sin barda un lado para que funcione como entrada. ¿Qué dimensiones deberá tener el terreno para que la barda tenga una longitud mínima? De esta manera los gastos de la construcción no sean tantos.

Estrategia para la solución:

1) Realizar un croquis con la información del problema.
2) Escribir lo que se te pida encontrar para tener una idea más clara para ti de lo que se te pide.
3) ¿Cuántos rectángulos de 550 $metros\ cuadrados$ como los del croquis se pueden obtener?
4) Enlista algunas de esas opciones en la siguiente tabla, si consideras necesario aumenta el número de renglones.

NOTA: En las celdas del último renglón de la tabla escribe las fórmulas que utilizaste para calcular la altura, largo del cerco y área.

Base ($metros$) b	Altura ($metros$) h	Largo de la barda ($metros$)	Área cercada (m^2)
b			

5) Escribe la fórmula que usaste para calcular la altura.

6) Anota la fórmula con la que calculaste la longitud de la barda.

7) Con los valores de la tabla realiza una gráfica en el plano cartesiano, representando en el eje X la base del terreno por bardear y en el eje Y la longitud bardeada. Señala con color las columnas de la tabla que utilizaste para hacer la gráfica.

8) En la gráfica, ¿Qué representa cada punto?

9) ¿En qué punto de la gráfica se encuentra la solución de este problema? Señala este punto con color rojo.

10) Utilizando la gráfica, calcula las coordenadas de ese punto; con ellas elabora tu propuesta de solución al problema. Redáctala de manera clara y concisa.

11) ¿Cómo quedaría trazada una tangente a la curva en ese punto? Dibuja con color azul. Corroborar utilizando el método de diferenciación visto anteriormente.

5.2 Un fabricante desea hacer cajas sin tapa para envasar su producto. Para esto, hará uso de piezas rectangulares de cartón de 50 por 30 centímetros, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas, y doblando. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que será cortado en cada esquina, si se quiere obtener una caja que encierre el mayor volumen posible.

Estrategia para la solución.

1) Escribe lo que vas a buscar en este problema.
2) Encuentra la fórmula para calcular el volumen de una caja como la planteada en el problema.
3) Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado que se va a cortar, escribe las dimensiones de la caja; es decir, el largo, ancho y altura, expresada en términos de x.
4) Argumenta por qué la fórmula para calcular el volumen de la caja expresado en términos de x es $V(x) = (50 - 2x)(30 - 2x)x$. Esta fórmula se conoce como *modelo matemático del problema o función del problema*.

5) En el plano cartesiano realiza la gráfica de la relación anterior, representando en el eje X la longitud x y en el eje Y el volumen de la caja.
6) Localiza ahora el punto en la gráfica donde se encuentra representada “la caja de mayor volumen” y propón una solución para el problema.
7) Traza una recta tangente a la curva en el punto anterior.

Corroborar utilizando el método de diferenciación visto anteriormente.

5.3 La lata sin tapa.

Angélica es una persona que de entre todas sus amigas se ha destacado por ser muy original con sus regalos, y se acerca el cumpleaños de una de ellas, para este día quiere hacer una caja de papel corrugado de forma cilíndrica para meter en ésta unas flores que también hizo, lo malo es que Angélica ahora no tiene mucho dinero y quisiera saber cuáles tendrían que ser las dimensiones para que la caja resultante sea lo más económica posible, es decir, que el área que ocupe de papel sea mínima, sabiendo que el volumen de cada caja cilíndrica es un decímetro cubico.

Estrategia para la solución:

1) Escribe lo que se te pide encontrar en este problema.
2) Encuentra la fórmula para calcular el volumen de la lata y la fórmula para calcular la cantidad de material empleado para construirla.
3) Argumenta porque la fórmula para calcular el área de la lata en términos del radio de la base, que llamaremos r, es : $A(r) = \Pi r^2 + \frac{2}{r}$.
4) Elabora una gráfica de este problema en el plano cartesiano. Discute con tu equipo los elementos de lata que representaras en el eje horizontal y en el eje vertical.
5) Localiza el punto de la gráfica donde se encuentra representada “la lata de menor cantidad de material empleado en su construcción”, escribe las coordenadas de este punto, señálalo con color diferente del de la gráfica y taza una recta tangente a la curva en ese punto.
6) Ya con toda la información recabada, elabora una respuesta de la solución para este problema.

Corroborar utilizando el método de diferenciación visto anteriormente.

5.4 El gallinero de María:

María era una señora que le encantaba tener gallinas en su casa, pero esto le había estado ocasionando problemas en su vecindario, las vecinas decían que las gallinas de María estaban destrozando sus plantas. Ella no quería ser la típica vecina molesta, entonces decidió construir un gallinero en la parte posterior de su casa, sus ahorros sólo le alcanzaban para comprar 50 metros de tela de alambre para cercarlo.

Si el terreno para el gallinero es de 20 por 40 metros, ¿Qué dimensiones deberá tener dicho gallinero de forma rectangular de manera que utilice todo el material que compró, para que éste abarque la mayor área posible y así encerrar la mayor cantidad de gallinas?

Estrategia para la solución:

1) Realiza un dibujo en el que representes el gallinero, con la información que se te proporciono en el problema. Representa la base del gallinero en posición paralela al lado del terreno que mide 20 metros.
2) Escribe lo que se te pide encontrar.
3) Anota la fórmula para calcular el área del gallinero.
4) Como te pudiste dar cuenta, esta fórmula, que expresa el área del gallinero, está en términos de la base y la altura. Ahora expresa la relación para calcular el área del gallinero sólo en términos de la base; es decir, ***la función del problema.***
5) Identifica la variable independiente. ¿en qué intervalo están los valores de la variable independiente (dominio de la función)?

Una vez expresada la función buscada en el problema, se pueden obtener varias aproximaciones a la solución de manera aritmética, por medio de las gráficas, etc. En esta parte se trabajará la forma gráfica, pero la solución de este tipo de problemas sólo se puede obtener utilizando el cálculo diferencial.

6) Para la solución gráfica del problema, traza una gráfica en un papel cuadriculado y localiza el punto de la curva que representa la solución del problema. En este punto, traza una recta tangente a la curva; con las coordenadas que ya obtuviste, escribe tu propuesta de solución al problema.

Las coordenadas del punto más alto se obtuvieron de forma gráfica, pero también se pueden obtener usando las herramientas del cálculo diferencial. Considerando lo anterior, con dicha herramienta matemática, localiza coordenadas del punto más alto.

Corroborar utilizando el método de diferenciación visto anteriormente.

5.5 En mi calle existen dos hermosas casas las cuales están juntas y las dos han quedado con un enorme patio, ambos patios tienen una base de 60 metros y una altura de 30 metros. Uno de los vecinos, Pepe tiene un perro el cual ha estado molestando a pablo, el otro vecino en cuestión. Él le ha pedido a Pepe que encierre a su perro, pero éste no ha hecho caso alguno, por lo que Pablo ha decidido bardear su patio. Pepe al ver esto y aprovechando que ya tiene un lado bardeado ha mandado hacer su corral para el perro, haciendo uso de ese lado.

Si Pepe dispone de 43 metros lineales para cercarlo. ¿Qué dimensiones debe tener el corral para abarcar la mayor área posible?

Sugerencia: Si x representa la longitud del lado del corral que quedará en la barda de Pablo, encuentra la fórmula en términos de x que represente el área del corral ¿Qué valores le puedes dar a x?

Corroborar utilizando el método de diferenciación visto anteriormente.

Ya vimos algunas estrategias para resolver este tipo de problemas. Ahora si puedes encontrar las respuestas a los planteados en el capítulo tres.

Con estos ejercicios ya tenemos una idea cuando hablamos de máximos y mínimos de una función, y también con el uso de la derivada, o más generalmente con el cálculo diferencial.

Hicimos uso de la aritmética, álgebra y geometría y concluimos que:
Para resolver el problema es necesario localizar el punto más alto o más bajo de la gráfica que obtuvimos, es decir, aquellos puntos en los que, si se dibuja una recta tangente a la curva, esta tiene una posición horizontal (su pendiente es cero).

Entonces resulta necesaria una herramienta más efectiva para la resolución de los problemas de optimización, debido, entre otras cosas, al trabajo aritmético y geométrico tan laborioso que se requería en ese momento para "aproximarse" al resultado.

Conclusiones

Aprender a aprender en la escuela, o también aprender a pensar, es uno de los retos más comunes de la enseñanza actual. En este sentido, las estrategias de aprendizaje, entendidas como las operaciones del pensamiento con las que trabaja el alumno en el proceso de desarrollo del currículo, son herramientas de inestimable valor.

Una metodología para enseñar a pensar en el aula debe caracterizarse principalmente por potenciar un aprendizaje activo —ya que es la propia experiencia la que proporciona el conocimiento— y la utilización de estrategias o habilidades del pensamiento y de los conocimientos previos. La aplicación de estos principios a la realidad de la vida en el aula mejorará la forma de trabajar las diversas áreas curriculares.

Para contribuir significativamente a la maduración intelectual de los estudiantes de matemáticas debemos proveer múltiples oportunidades que signifiquen genuinas situaciones de pensamiento para hacerlos capaces de reflexionar por si mismos. En otras palabras, para generar un pensamiento matemático es necesario estimular su desarrollo. El explorar diferentes caminos en la resolución de un problema, le abre al estudiante un nuevo panorama que influye en su capacidad de análisis y le permite observar desde diferentes puntos de vista una misma situación, construyendo así una estructura intelectual cada vez más fortalecida. De hecho, los conceptos matemáticos deberán ser construidos por los estudiantes partiendo de una variedad de experiencias gracias a las cuales se irá acumulando un capital matemático sobre la base se procesos de pensamiento constructivo.

En esta tesis se desarrollaron estrategias basadas en ABP contemplando el lenguaje propio de un estudiante que desconoce la formalidad del lenguaje matemático en un principio. Se le presentan problemas adecuados a su entorno y a su comprensión. En estos problemas se cuida que el estudiante desarrolle sus conjeturas, su análisis, generalice y sintetice sin necesidad de formalizar demasiado en esta etapa. No se definen los conceptos sino que éstos surgen del análisis del problema, sin necesidad de formalizarlos con una estructura muy rígida que para una introducción al cálculo no es necesaria.

Al proponer problemas que pudieran ser divertidos hasta cierto punto, se busca motivar al estudiante y fomentar su interés en el aprendizaje de la matemática y observar su utilidad en la vida cotidiana.

Implicaciones para la enseñanza

Todo conocimiento conceptual y procedimental se debe construir a partir de y en contextos problemáticos significativos para el estudiante. Esta contextualización es importante porque los profesores en general se quejan de que los alumnos dominan mal los requisitos matemáticos necesarios para la resolución de los problemas.

El contexto problemático es percibido más fácilmente por el estudiante si la situación le es familiar, pudiendo entonces tomar decisiones sobre situaciones conocidas por él.

Para alcanzar contextos abstractos y amplios, posibles solo en lenguaje formal, es necesario primero, que el estudiante desarrolle cierta madurez en los conceptos y en el lenguaje, que se va alcanzando poco a poco al tiempo en que se van desarrollando sus habilidades de pensamiento.

Los problemas deben tener características diferentes de acuerdo con la fase de crecimiento de conceptos en la que los alumnos se encuentren. Deben ser progresivos en complejidad, desde el pensamiento intuitivo hacia el formal.

Los diferentes tipos de problemas deben estar encadenados entre sí, precedidos de una problematización y deben conducir a problemas que exijan construcción de modelos.

Los conceptos tienen un complejo proceso de crecimiento desde la identificación hasta la formulación. Dicho crecimiento se da en 6 dimensiones: tiempo, identificación, madurez, operacionalización, desarrollo y formalización. El crecimiento de los conceptos es un proceso interno y la enseñanza debe tomar en cuenta estas fases de crecimiento en los estudiantes.

No todos los profesores aceptan cambiar su práctica docente, sin embargo hay que comenzar por modificar el modo de pensar y hacer del profesor para lograr cambios en la percepción de los estudiantes sobre la matemática y su estudio. Para ello será necesario adecuar este tipo de estrategias orientadas a los procesos internos de aprendizaje de acuerdo a entornos conocidos por los alumnos y al desarrollo gradual de sus habilidades de pensamiento desde el básico o intuitivo hasta el formal.

Bibliografía

[1]Pérez Echeverrí, M., & Pozo, J. I. 1994. *Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender.* Madrid : Santillana, 1994.

[2]Romero Álvarez, Juan Guillermo, Gómez Pérez, Juan y Hernández Morales, Alicia. 2008. Aprendizaje Basado en Problemas. México : UNAM, 2008.

[3]Transnational College of Lex. 2009. *Aventuras con Fourier.* México : UNAM, 2009.

[4]Frank Ayres, Jr. 1989. *Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid : McGraw-Hill, 1989.

[5]Granville, William Anthony. 2009. *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.* México, D.F. : Limusa, 2009.

[6]J. Purcell, Edwin , Varberg, Dale y E. Rigdon, Steven. *Cálculo.* México : PEARSON Educación.

[7]Leithold, Louis. 1998. *El Cálculo.* Edo. México : Oxford University Press, 1998.

[8]Villa Corts, Antoni y Callejo de la Vega, María Luz. 2005. *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid España : NARCEA, S.A. DE EDICIONES , 2005.

[9]OECD. (2006). OECD Programme for International Student Assessment (PISA). [En línea] http://www.oecd.org/dataoecd/44/17/42645389.pdf.

[10]Intituto Nacional para la Evaluación de la Educación. 2008. PISA EN EL AULA: CIENCIAS. México DF : Textos de Dibulgación, 2008, pág. Mexico.

[11]Intituto Nacional para la Evaluación de la Educación. 2008. *PISA EN EL AULA:Matemáticas.* México DF : Textos de Divulgación, 2008.

[12]Riviere, Ángel. 1990. *Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva.* Madrid : Alianza, 1990.