

BENÉMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

RECONSTRUCCIÓN DE INFORMACIÓN  
USANDO MÉTODOS DE  
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

tesis presentada por

MARIO EBERTH ALONSO LÓPEZ

Directores:

DR. W.FERMÍN GUERRERO SANCHEZ

DR. VLADIMIR V. ALEXANDROV

como requisito para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

Junio 2013

FCFM

---

# Resumen

Este trabajo de tesis está basado en las aplicaciones de los métodos de integración numérica de Newton-Cotes y el método basado en interpolación por Splines cúbicos naturales en la deflectometría óptica, la cual se basa en la medida de las pendientes de la superficie a caracterizar, de modo que el desarrollo de métodos numéricos de integración es muy útil para la obtención de la topografía de las superficies a partir de sus pendientes.

Para la aplicación de estos métodos se supone que la función derivada  $f'(x)$  obtenida midiendo las pendientes de la superficie se muestrea en una serie de puntos, la aplicación de estos métodos de integración unidimensional nos permite reconstruir el perfil de la superficie, estos métodos se pueden generalizar para determinar la superficie del objeto reflejado.

En este trabajo se presentan datos sintéticos a partir de una función analítica que corresponde a la derivada de la función que al ser muestreada en una serie de puntos  $x_n$  que se suponen equidistantes  $x_n = x_0 + nh$  donde  $x_0$  es el primer punto donde se evalúa la derivada  $n = 0, \dots, N - 1$  siendo  $N$  el número total de puntos donde la derivada es evaluada y  $h$  es la distancia entre los puntos de muestreo, se obtiene un conjunto de datos de la forma  $(x_i, f'(x_i))$  en la práctica este conjunto de datos se obtienen usando diferentes tipos de sensores, uno de los más usados para esta técnica es el sensor de Shack- Hartmann el cual se describe en la introducción de esta tesis. A partir de esta información real o sintética se estudian diferentes métodos de integración para obtener algoritmos computacionales que permiten obtener la función de interpolación  $f(x)$  en los puntos de muestra con la máxima precisión posible.

Una vez obtenidos los algoritmos correspondientes a los métodos de integración se procede a realizar un análisis para ver cuál de ellos genera el menor error y así tener un criterio para decir cuál es el mejor método de acuerdo con la frecuencia en la que se está muestreando. Este tipo de problemas son muy comunes en la física aplicada, en particular en el procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, etc. Esta tesis muestra que cada método de integración emplea una interpolación diferente. De esta forma se inicia la búsqueda de la interpolación más precisa. Los métodos de integración que se muestran en esta tesis se basan en una interpolación de la derivada de la función; ésta se ajusta a un polinomio de cierto grado que posteriormente se integra. Es importante hacer notar que todos los métodos de integración presentados en esta tesis se pueden considerar como filtros recursivos. El valor de la función en un cierto punto se obtiene a partir del valor de la función en un punto anterior más una cierta interpolación de los valores de la derivada en los puntos cercanos. Así pues, la operación de interpolar la derivada es importante para obtener una integración precisa.

---

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resumen</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1. El Sensor de Shack-Hartmann . . . . .   | 7         |
| 1.2. Funcionamiento detallado del shws . . . . .   | 9         |
| 1.3. Deflectometría Óptica . . . . .   | 10        |
| 1.4. Aplicación de la Deflectometria y el sensor Shack-Hartmann en la<br>Oftálmica . . . . . | 12        |
| 1.5. Organización de la Tesis . . . . .  | 13        |
| <b>2. Conceptos Teóricos</b>   | <b>15</b> |
| 2.1. Espacio Señal . . . . .   | 15        |
| 2.2. Aproximación, Interpolación y modelado . . . . .  | 20        |
| 2.3. Polinomios como interpoladores y aproximadores . . . . .                                | 21        |
| 2.4. Aproximación . . . . .  | 23        |
| 2.5. Aproximación de mínimo error cuadrático . . . . .                                       | 25        |
| 2.6. El Teorema de Muestreo . . . . .  | 28        |
| 2.7. Modelado . . . . .  | 34        |
| 2.7.1. Tecnicas polinómicas de modelado: consideraciones<br>generales . . . . .              | 35        |
| <b>3. Métodos de integración unidimensional</b>  | <b>38</b> |
| 3.1. Métodos basados en las fórmulas cerradas de Newton-Cotes . . . . .                      | 39        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Splines</b>   | <b>44</b> |
| 4.1. Interpolación con spline cúbico de Hermite . . . . .                 | 48        |
| 4.2. Spline cúbico . . . . .  | 54        |
| 4.3. Condiciones de frontera para el spline cúbico . . . . .              | 58        |
| 4.3.1. Spline cúbico completo . . . . .                                   | 58        |
| 4.3.2. Spline cúbico natural . . . . .                                    | 59        |
| 4.4. Método de Integración basado en la interpolación por splines cúbicas | 62        |
| <b>5. Evaluación de los sistemas propuestos</b>                           | <b>69</b> |
| 5.1. Resultados obtenidos de la etapa de comparación . . . . .            | 69        |
| <b>Conclusiones</b>   | <b>78</b> |
| <b>A. Anexo A</b>   | <b>79</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>88</b> |

---

# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis se centra en una de las aplicaciones de la integración numérica (métodos de Newton Cotes y Spline cúbicos naturales) aplicada a la deflectometría óptica; la cual es una técnica simple basada en la reflexión que sufre la luz al interactuar sobre una superficie cuya topografía se desea obtener. Consiste en muestrear la superficie a caracterizar mediante un haz láser y medir la desviación que sufre la luz reflejada por la misma. Para ello, es necesario realizar un muestreo en diferentes puntos de control ópticamente. La deflectometría presenta una alta resolución en la medida de las pendientes de la superficie a caracterizar.

En la figura 1.1 se muestra el principio del funcionamiento de la deflectometría óptica [1,2]. En esta figura se dibuja la topografía de la superficie descrita por  $f(x)$  (se ha simplificado el razonamiento considerando una función unidimensional que corresponde al perfil de la superficie a muestrear). Se hace incidir un láser (representado en rojo) que se refleja (línea azul) formando un ángulo  $2\alpha$  con el haz incidente. Si se hace un muestreo en la dirección  $x$ , se obtiene una medida de  $\alpha(x)$  en algunos puntos a partir de la cual puede obtenerse la derivada  $f'(x)$  mediante la tangente de dichos ángulos según:

$$\tan\alpha(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial(x)} = f'(x)$$

La técnica perfil métrica juega un papel muy importante en la aplicación de los diferentes métodos de integración presentados en esta tesis que servirán para obtener

la topografía  $f(x)$  que corresponde al perfil de la superficie a reconocer.

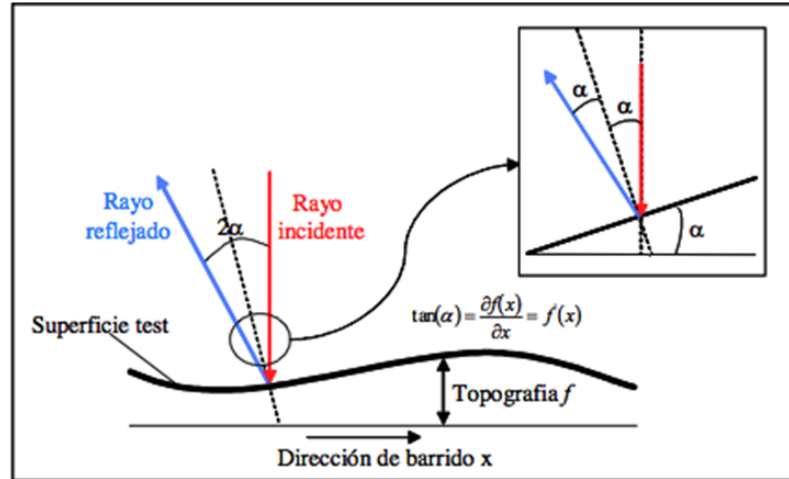


Figura 1.1: La topografía de la superficie descrita por  $f(x)$

En este trabajo de tesis los datos son hipotéticos, el perfil a reconstruir se construye de forma sintética con una expresión algebraica, un sensor para ser aplicado en la deflectometría puede ser el sensor de Shack-Hartmann que se describe aquí.

## 1.1. El Sensor de Shack-Hartmann

El sensor Shack-Hartmann es una evolución de la pantalla de Hartmann. Johannes Hartmann (1865-1936), astrofísico alemán, desarrolló una técnica para la prueba de lentes la cual emplea una mascarilla opaca con agujeros colocada frente al elemento óptico bajo prueba. Cada uno de estos agujeros actúa como una abertura y la luz, al cruzarlos, converge produciendo en el plano focal de la mascarilla un arreglo de spots de referencia que son grabados en una placa fotográfica. Mediante una calibración apropiada, la posición de los puntos indica la inclinación del frente de onda en cada uno de los agujeros, describiendo así la calidad de la lente[3,4].

Años después, el sensor de frente de onda Shack-Hartmann surgió debido a un problema que tenía la fuerza aérea de los Estados Unidos en la Guerra Fría. El proyecto consistía en mejorar la calidad de las imágenes de la Tierra tomadas desde los satélites, las cuales sufrían de desenfocamiento debido a la distorsión de la luz incidente introducida por la turbulencia atmosférica. Este problema fue planteado al Centro Ópticas de la Universidad de Arizona.

Adem Mienel, astrónomo y director de este centro en el aquél tiempo, tuvo la idea de mejorar las imágenes de los satélites mediante la utilización de la prueba de Hartmann. Él sugirió que usando la prueba de Hartmann podrían determinarse las aberraciones atmosféricas al momento que la imagen del satélite fuera capturada.

En 1970, Ronald Shack participó en el estudio y modificó el arreglo de Hartmann, colocando pequeñas lenticillas en cada uno de los agujeros de la mascarilla. Con esto logró incrementar la eficiencia en la recolección de luz, ya que redujo los efectos de disturbios ópticos y la difracción en la sub-aberturas. Shack notó que la pantalla en sí no era necesaria si el diámetro de las lenticillas era expandido hasta que sus bordes se unieran; de esta forma toda la luz incidente en la pantalla encontraría el camino hacia un punto focal. Esta nueva configuración fue denominada como el sensor de frente de onda Shack-Hartmann. Un diagrama de operación de este tipo de instrumento se muestra en la figura 1.2. El siguiente paso para la aplicación de la técnica era entonces obtener un arreglo de lentes adecuado.

Los arreglos de lentes no eran nuevos y ya estaban disponibles comercialmente. Sin embargo, las dimensiones y la distancia focal de estos no eran los adecuados para el proyecto. Ben Platt diseñó un arreglo de lentes donde la técnica de fabricación consistía en dos placas de vidrio, con una serie de surcos cilindros cóncavos, colocadas una encima de la otra y rotadas 90 grados, para ser usadas como molde.

En 1990 se hizo una modificación en el arreglo del sensor, utilizando un detector electro óptico, es decir un detector CCD, en lugar de la película fotográfica para la medición del patrón de Hartmann(Hausser, 1988; Pearson, 1990). Esto permitió una



rápida adquisición de los datos, y el análisis del patrón de spots (del inglés, manchas), con la ayuda de una computadora.

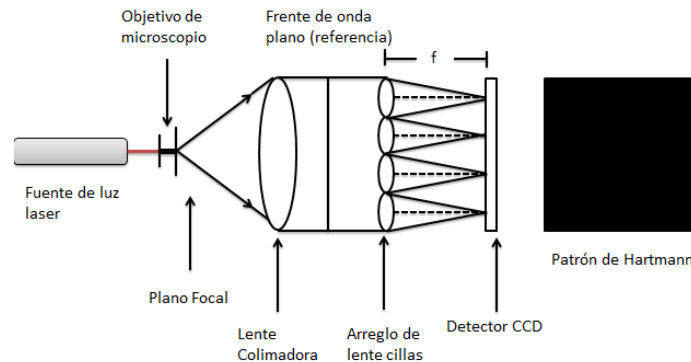


Figura 1.2: Diagrama del arreglo experimental del sensor Shack-Hartmann

## 1.2. Funcionamiento detallado del shws

Básicamente, a este sensor lo conforman un arreglo de lenticillas (mejor conocidas como lenslets en inglés) y un detector CCD (por las siglas en inglés de Charge-Coupled Device). El valor promedio del diámetro de cada lenticilla es del orden de 0.5 mm y cuya distancia focal es a su vez del orden de 45 mm (Shmutz, 1987). El principio de operación de este sensor es el siguiente: el frente de onda que incide en la pupila de entrada del sistema óptico es llevado hasta alcanzar un tamaño igual al del arreglo de lentes. Cada una de las lenslets enfoca la luz a su distancia focal generando todo el arreglo de lenslets un patrón de spots. Si el frente de onda incidente es completamente plano y perpendicular al eje óptico, el patrón de spots que se forma en el CCD es el llamado patrón de spots de referencia y serán almacenados por el programa de control. Si el frente de onda incidente ha sido deformado por las aberraciones introducidas por el sistema óptico bajo prueba, o bien por las fluctuaciones que induce la turbulencia atmosférica, el punto focal de cada una de las lenslets se

desplazará proporcionalmente conforme a la inclinación del frente de onda local. Este fenómeno se muestra en la figura 1.3. El patrón que forman los spots desplazados es grabado por el detector CCD. La diferencia que existe entre el spots de referencia y los spots desplazados se obtiene a través de un algoritmo que calcula los centroides correspondientes. Esta diferencia representa una estimación de la inclinación promedio del frente de onda local sobre el área de cada lentecilla. En otras palabras, el resultado de la medición es una estimación del gradiente del frente de onda incidente.

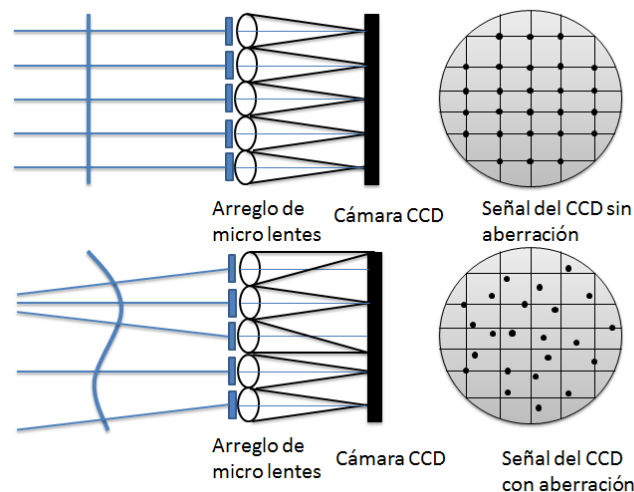


Figura 1.3: Patrón de Hartmann sin y con aberración respectivamente. El primero de ellos actúa como patrón de referencia

### 1.3. Deflectometría Óptica

La deflectometría óptica es la técnica en la que se centra esta tesis; se trata de una técnica basada en la medida de las pendientes de la superficie a caracterizar; de modo que el desarrollo de métodos numéricos de integración realizado en esta tesis es muy útil en esta técnica. Se basa exclusivamente en las leyes de reflexión y refracción de la luz y consiste en la observación y análisis de la imagen reflejada por una superficie pulida[5,6 ]. El principio fundamental se muestra en la figura 1.4 donde se representa en rojo, el haz que incide sobre la superficie que se desea caracterizar y el

rayo reflejado (representado en azul) que se capta mediante una cámara CCD o un detector de posición. A partir de las medidas se obtiene la desviación  $2\alpha$  que sufre el haz de luz cuando interacciona con la superficie, teniendo información de la pendiente de la superficie mediante la función tangente. Si se desea obtener información en diferentes zonas de la superficie es necesario que haya muchos puntos de muestreo. Para ello es importante el tamaño de haz láser que incide sobre la superficie; si se emplea un láser de diámetro grande, se hace un promedio de la intensidad de la luz de todos los puntos que caen dentro del diámetro; por tanto, el uso de un láser de diámetro grande es indicado para medir la topografía general de la superficie, por ejemplo, de grandes superficies. También se puede utilizar un haz de diámetro más pequeño de modo que se obtendrá mucha más información de la topografía, es decir, es apropiado para caracterizar la nanotopografía de la superficie; aunque si se toma un haz láser demasiado pequeño pueden presentarse fenómenos difractivos que introducirán errores en las medidas.

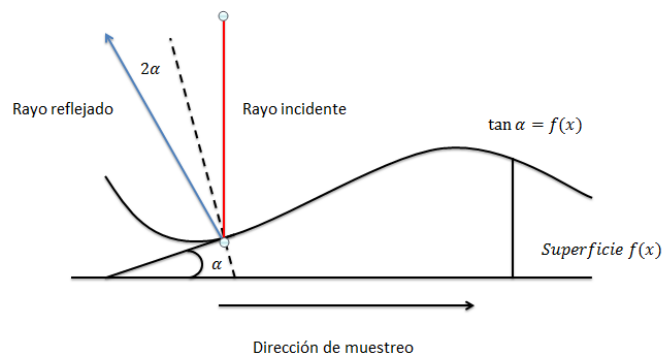


Figura 1.4: Principio fundamental de la deflectometría óptica

Por otro lado, la deflectometría presenta una alta resolución en la medida de las pendientes de la superficie a caracterizar. Para ello ha sido fundamental el desarrollo de detectores de posición que permiten medir los desplazamientos en la incidencia sobre el detector, que se relacionan con la variación angular que sufre la luz al incidir

sobre la superficie cuya tangente equivale a la pendiente de la muestra a determinar. Y por tanto la integración numérica es necesaria para la obtención de la topografía final de la superficie. En este trabajo se presentan cómo reconstruir una función unidimensional cuando únicamente se conoce su primera en una serie discreta de puntos de medición. Se presentan brevemente los métodos basados en las fórmulas cerradas de Newton-Cotes y proponen la interpolación de los datos por splines cúbicas para su posterior integración analítica. Mediante resultados numéricos demuestran que el método basado en las splines cúbicas es mejor que los de Newton-Cotes[8,9].

## 1.4. Aplicación de la Deflectometría y el sensor Shack-Hartmann en la Oftálmica

A mediados de la década de 1980, Shack visitó a Josef Bille en la Universidad de Heidelberg. La técnica se aplicó por primera vez en la medición topográfica de la córnea y más tarde en la medición de las aberraciones del ojo. Este trabajo inicial de Bille y sus estudiantes han permitido tratamientos modernos de los defectos de refracción y la visualización mejorada de la estructura de la retina. La llegada del láser ha permitido esculpir de forma precisa la córnea. Mediante la remodelación de la curvatura de la córnea, la miopía, la hipermetropía y el astigmatismo pueden corregirse. Millones de personas han sido tratados con esta tecnología para reducir drásticamente el desenfoque y el astigmatismo. La corrección de las aberraciones de manera individual es el punto final natural de esta tecnología y a la técnica de Shack-Hartmann que han desempeñado un papel fundamental y han permitido la cirugía refractiva personalizada. Al igual que con la astronomía, otras técnicas de medición del frente de onda están en práctica, pero una vez más el sensor Shack-Hartmann es la tecnología más extendida y bien conocida para la realización de las correcciones personalizadas. Al tratar las aberraciones en el ojo, la agudeza visual normal mejora a menudo e incluso los malos resultados son casi siempre un logro de visión normal 20/20.

Mientras que el sensor de Shack-Hartmann está unido a la cirugía refractiva con láser y ha permitido mejorar la visión del ojo, el sensor de frente de onda conectado

a un espejo y la óptica adaptativa de la cámara de fondo han conseguido mejorar la observación realizada del propio ojo. Armados con esta tecnología, los oftalmólogos y científicos de la visión han sido capaces de proporcionar una mejor comprensión de la estructura subyacente de la retina. Las investigaciones de la Universidad de Rochester han sido en gran parte las responsables de las demostraciones técnicas y la realización de algunas de las investigaciones más avanzadas en la captación de las imágenes retinianas. Ellos fueron el primer grupo en poder resolver los fotorreceptores de manera individual y en vivo. Las aberraciones del ojo son lo suficientemente grandes para evitar la proyección de imágenes de los conos sin la corrección de la adaptación. Mientras que los sistemas comerciales Shack-Hartmann están disponibles para la cirugía de refracción. La aplicación de la técnica Shack-Hartmann y la óptica adaptativa para las aplicaciones oftálmicas solo están empezando a madurar. Las versiones comerciales de cámaras de fondo con óptica adaptativa están basadas en láseres de barrido, entre otros. Una vez que hemos visto un pequeño desarrollo histórico de este sensor, podemos dejar la historia de un lado y centrar el trabajo en el aspecto oftalmológico, partiendo desde cero, de manera que llegaremos al sensor Shack-Hartmann, pero esta vez no por el camino histórico, sino por el clínico.

## 1.5. Organización de la Tesis

La presente Tesis se organiza de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta un repaso de las distintas técnicas de interpolación, aproximación y modelado existentes en la literatura, prestando especial atención a las polinómicas y, más concretamente, a las basadas en splines. Así mismo se presenta la terminología y notación a utilizar en el resto de la Tesis.
- El Capítulo 3 comienza con la integración numérica en una dimensión. Así, se supone que la función derivada se evalúa en una serie de puntos. A partir de esta información, el primer objetivo es encontrar la función en todos los puntos. Para ello, se estudian los métodos basados en las fórmulas de Newton-Cotes, como por ejemplo, la regla del Trapecio, la de Simpson o la de 3/8 de Simpson.

Los anteriores son métodos que se basan en una interpolación de la información de la función derivada. Cada método emplea una interpolación diferente. Así, se inicia la búsqueda de la interpolación más precisa posible con el objetivo final de encontrar el método de integración más preciso.

- En el Capítulo 4 se desarrolla la interpolación por splines cúbicas a partir de la interpolación de Hermite, con la que la derivada evaluada en cada pareja de puntos adyacentes se ajusta a un polinomio de tercer grado. Mediante este método la derivada se ajusta a una suma de polinomios de tercer grado que se integra analíticamente obteniendo la función deseada. En determinadas aplicaciones se precisan métodos de interpolación que trabajen con datos prescritos de la función y de sus derivadas en una serie de puntos, con el objeto de aumentar la aproximación en las proximidades de dichos puntos. Dentro de esta clase de métodos está la interpolación de Hermite del cual en la primera parte nos centramos en la construcción explícita del polinomio de interpolación de Hermite, de donde partiremos para la construcción del spline cúbico. Otro aspecto importante que se presenta en el Capítulo 4 son las condiciones de frontera para el spline cúbico, en este trabajo se utilizó el Spline cúbico completo y spline cúbico natural.
- En el Capítulo 5, al implementar todos estos métodos numéricos, se evalúan los sistemas propuestos en los capítulos anteriores desde el punto de vista de reconocimiento de cada uno de los modelos. También la comparación de los diferentes métodos de integración resulta más fácil analizando la función generada analíticamente y la función obtenida tras la integración numérica asociada a cada método. Se presentan una serie de simulaciones que demuestran la veracidad de los resultados teóricos previamente obtenidos.
- Finalmente, en el Capítulo 6 se muestran las conclusiones de esta tesis.

---

# Capítulo 2

## Conceptos Teóricos

### 2.1. Espacio Señal

En esta sección se presentan los conceptos relativos al espacio de señal, definiendo los espacios vectoriales, los espacios métricos, los espacios vectoriales normados y los espacios normados con producto interno, lo que permitirá introducir el concepto de proyección. Resulta necesario, además, presentar algunos conceptos básicos sobre espacios vectoriales.

**Definición 1.1 (Espacio Lineal)** *Un espacio lineal o espacio vectorial lineal,  $X$ , es un conjunto de elementos (vectores),  $x, y, \dots$ , para los que se definen las operaciones de suma y producto escalar: dados dos elementos,  $x, y \in X$ , existe el elemento suma como  $x + y \in X$ ; y dado un elemento  $x \in X$  y un escalar  $\alpha$ , existe un único producto escalar  $\alpha x \in X$ . Ambas operaciones cumplen las siguientes propiedades:*

- $x + y = y + x$ ;
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- existe un único elemento  $0 \in X$  tal que  $x + 0 = x$  para todo  $x \in X$ ;
- para cada  $x \in X$  existe un único inverso,  $-x$ , tal que  $x + (-x) = 0$ ;
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $x \in X$ ;

- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$
- $1(x) = x$

Un ejemplo, denotado por  $L_2$ , es el espacio de funciones o señales cuadráticamente integrables en el intervalo  $[a, b]$ , es decir, el conjunto de señales que cumplen  $\int_a^b f^2(t)dt < \infty$ .

**Definición 1.2 (Independencia Lineal)** *Dado un subconjunto  $T$  de un espacio lineal  $X$ , se dice que  $T$  es linealmente independiente si para cada subconjunto finito no vacío de  $T$  (por ejemplo  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) el único conjunto de escalares que satisfacen la ecuación*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m = 0$$

*es la solución trivial  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ .*

En base al concepto de independencia lineal, es posible determinar la dimensión de un espacio.

**Definición 1.3 (Dimensión)** *Un espacio vectorial lineal  $X$  posee dimensión  $n$  si es posible encontrar como máximo  $n$  vectores linealmente independientes.*

Cuando se trabaja con señales (o funciones) pertenecientes a un espacio, resulta de interés disponer de una medida de "distancia" entre ellas que sea práctica desde el punto de vista matemático y significativa desde el punto de vista físico. Surge así el concepto de métrica y la definición de espacios métricos.

**Definición 1.4 (Espacio Métrico)** *Un espacio métrico es un espacio lineal con una métrica asociada  $d$ , y se denota  $(X, d(\cdot))$ . La métrica es una función utilizada para evaluar la distancia entre dos elementos pertenecientes al espacio  $X$  y que debe*



cumplir las siguientes propiedades para todo  $x, y \in X$ :

- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, y) \geq 0$ ;
- $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ ;
- para todo  $x, y, z \in X$ ,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

En el ámbito del procesado de señal, es habitual representar las secuencias discretas como vectores (de dimensión finita). Es más, es posible extender dicho planteamiento y considerar las señales continuas como vectores de dimensión infinita. En relación con los espacios vectoriales, es común hablar sobre la longitud y la dirección de vectores. Así, el concepto matemático asociado a la longitud de un vector es la norma, lo que nos conduce a considerar los espacios lineales normados; mientras que el ángulo entre dos vectores se asocia con el producto interno, que conducirá a los espacios dotados de producto interno.

**Definición 1.5 (Espacio Lineal Normado)** *Un espacio lineal,  $X$ , se dice que es un espacio lineal normado si para cada elemento  $x$  del espacio está definido un número real, designado por  $\|x\|$  y denominado norma de  $x$ . Dicho espacio Lineal normado se denota por  $(X, \| \cdot \|)$ , y su norma debe poseer las siguientes propiedades:*

- $\|x\| \geq 0$  (positividad);
- $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$  (concreción);
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  para todo escalar  $\alpha$  (homogeneidad);
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (desigualdad triangular).

Es fácil observar la similitud entre norma y métrica; de hecho, una puede definirse en función de la otra. Por ejemplo, si  $\|x\|$  es una norma, entonces  $d(x, y) = \|x - y\|$  es una métrica. De forma alternativa, si  $d$  es una métrica de un espacio lineal, entonces

es posible definir una norma como  $\|x\| = d(x, 0)$ , es decir, es la distancia del vector  $x$  al origen del espacio vectorial.

En espacios vectoriales  $n$ -dimensionales se emplean habitualmente las siguientes normas:

- Norma  $l_1$  :  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .
- Norma  $l_p$  :  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ .
- Norma  $l_\infty$  :  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ .

El equivalente de las normas anteriores en el caso de funciones definidas en el intervalo  $[a, b]$  son:

- Norma  $L_1$  :  $\|x(t)\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt$ .
- Norma  $L_p$  :  $\|x(t)\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ .
- Norma  $L_\infty$  :  $\|x(t)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ .

**Definición 1.6 (Espacio dotado de Producto Interno)** *Un espacio vectorial lineal,  $X$ , se dice que es un espacio dotado de producto interno si para cada dos elementos,  $x$  e  $y$ , se define un número real, designado por  $\langle x, y \rangle$  y denominado producto interno, con las siguientes propiedades:*

- $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$  (linealidad);
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (simetría);
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  para todo escalar  $\alpha$  (homogeneidad);
- $\langle x, x \rangle > 0$  si  $x \neq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si  $x = 0$  (positividad).

Algunos ejemplos de productos internos son:

- Producto interno euclídeo en espacio  $n$ -dimensional:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Producto interno de funciones definidas en  $[a, b]$ :

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

Una cuestión de interés es el hecho de que el operador convolución es un producto interno, pues

$$y(t_0) = (x(t) * h(t))|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau = \langle x(t), h(t_0 - t) \rangle,$$

es decir, la operación de filtrado (y la obtención del valor de la salida en un instante de tiempo fijado) es equivalente a evaluar un producto interno.

**Definición 1.7 (Espacio Completo)** *Un espacio  $X$  se dice que es completo si cada serie de Cauchy converge en  $X$ .*

En concreto, si  $X$  es un espacio lineal normado completo y para cualquier  $\epsilon > 0$  es posible encontrar un  $N > 0$  tal que

$$\|x_m - x_n\| \leq \epsilon, \text{ con } m, n \geq N,$$

entonces existe un elemento  $x \in X$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0.$$

**Definición 1.8 (Espacio de Banach)** *Un espacio lineal normado completo se denomina espacio de Banach.*

**Definición 1.9 (Espacio de Hilbert)** *Un espacio lineal normado completo con un producto interno se denomina espacio de Hilbert.*

Algunos ejemplos de espacio de Hilbert son:

- El conjunto de todas las secuencias de energía finita  $\sum_i |x_i|^2 < \infty$ , con las operaciones habituales de suma y producto escalar y con el producto interno definido por  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ , constituye un espacio de Hilbert, y se denota como  $l_2$ .
- El conjunto de todas las funciones definidas en el intervalo  $[a, b]$ , cuadráticamente integrables, con el producto interno definido por  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$  y la norma  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx$ , constituye un espacio de Hilbert, y se denota como  $L_2[a, b]$ .

## 2.2. Aproximación, Interpolación y modelado

El tratamiento del muestreo desde el punto de vista de interpolación y/o aproximación funcional consiste en encontrar una función  $P(x)$  de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_K \Phi_K(x)$$

que se parezca lo más posible a una función  $f(x)$  dada explícitamente, cuyo valor, y posiblemente el de sus derivadas, es conocido en todo punto del intervalo  $[a, b]$ . El parecido entre la función objetivo  $f(x)$  y la solución  $P(x)$  se evalúa en función de cierta métrica, que determinará la técnica de aproximación a utilizar.

Por otro lado, la interpolación consiste en encontrar, partiendo de un conjunto de  $N$  pares de valores  $(x_i, y_i)$ , una función  $P(x)$  de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_K \Phi_K(x)$$

que cumpla

$$P(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

En la interpolación, el comportamiento de la solución entre los puntos de inter-

polación depende de la función base. Con el término modelado nos referiremos al proceso que en la literatura también se denomina aproximación discreta o aproximación de datos. Partiendo de un conjunto de  $N$  pares de valores  $(x_i, y_i)$ , se busca una función  $P(x)$  de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(x)$$

que aproxime a los datos, es decir,

$$P(x_i) = y_i + \epsilon_i, i = 1, 2, \dots, N;$$

Siendo el error de modelado,  $\epsilon_i$ , mínimo (en función de una métrica determinada).

Desde un punto de vista conceptual, la única diferencia entre la aproximación y el modelado, tal y como se define aquí, es que en el modelado se desconoce el valor de la función fuera de los puntos dato de que se dispone, los cuales, además, suelen poseer cierto nivel de ruido. En cuanto a la aproximación y la interpolación, es posible establecer un único marco teórico basado en espacios de Hilbert que englobe ambos conceptos, como se verá posteriormente.

## 2.3. Polinomios como interpoladores y aproximadores

A lo largo de este capítulo se trabajará con el espacio (lineal) de los polinomios de orden  $n$  con coeficientes reales definido como

$$P_n = \{p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i; c_0, \dots, c_n, x \in R\}$$

Es bien conocido que una línea puede hacerse pasar por dos puntos, una parábola por tres puntos, un polinomio cúbico por cuatro, y así sucesivamente. Este hecho se expresa más formalmente en un antiguo teorema:

**Teorema 3.1 (Interpolación Polinómica)** *Si se consideran  $n + 1$  puntos dis-*

tintos  $x_0, \dots, x_n$  y  $n + 1$  valores  $y_0, \dots, y_n$  existe un único polinomio de grado  $n$ ,  $p_n \in P_n$ , para el cual

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

lo cual sugiere la utilización de funciones polinómicas con interpoladoras, pues siempre será posible encontrar el polinomio de grado  $n$  que pasa por  $n + 1$  puntos.

Por otro lado, el teorema de aproximación de Weierstrass establece que siempre es posible realizar una aproximación polinómica de una función continua tan exacta como se desee sin más que aumentar el grado del polinomio interpolador tanto como sea necesario. De forma más rigurosa:

**Teorema 3.2 (Aproximación de Weierstrass)** Sea una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , es decir,  $f(x) \in C[a, b]$ . Dado un  $\varepsilon > 0$  es posible encontrar un polinomio  $p_n(x)$  (de grado suficientemente alto) para el cual

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

Sin embargo, este teorema debe ser considerado con cautela pues, por un lado, el grado del polinomio es generalmente muy alto (incluso para obtener un nivel de precisión relativamente bajo) y, por otro lado, no especifica el método para encontrar el polinomio óptimo.

La extraordinaria difusión de los polinomios también se debe, en gran medida, a la posibilidad que brindan para evaluar el valor en un punto de una función analítica arbitraria en base a su desarrollo en serie de Taylor, el cual, como es bien conocido, se basa en funciones polinómicas.

**Teorema 3.3 (Taylor)** Dada una función continua y con derivadas continuas hasta orden  $n + 1$  en el intervalo  $[a, b]$ , es decir,  $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ , y un punto  $x_0 \in [a, b]$  entonces para todo  $a \leq x \leq b$ ,

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Otra característica interesante de los polinomios es que su derivación, su integración y el escalado o desplazamiento de la variable independiente proporcionan como resultado polinomios. Más concretamente, si  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios, entonces también lo son  $p(x + \alpha)$ ,  $p(\alpha x)$ ,  $dp(x)/dx$ ,  $\int p(x)dx$  y  $p(q(x))$ .

Si añadimos la facilidad con la que las funciones polinómicas pueden ser evaluadas (simplemente mediante operaciones aritméticas que se realizan de forma directa en computadoras digitales) y manipuladas (por ejemplo, derivación o integración), es razonable considerar dichas funciones como candidatas para ser utilizadas en interpolación, aproximación o modelado. A modo de ejemplo en el ámbito del tratamiento de señal los polinomios se han empleado en aplicaciones de clasificación, apoyándose en el teorema de Cover[11], para realizar un mapeo no lineal del espacio de entrada a un nuevo espacio de mayor dimensión con el fin de poder llevar a cabo la clasificación de forma más simple. Mientras que los filtros lineales son de utilidad en gran número de aplicaciones y resultan simples tanto desde el punto de vista conceptual como de la implementación, existen ciertas situaciones prácticas que precisan del procesado no lineal de las señales que intervienen.

En las secciones que siguen se llevará a cabo un repaso de las distintas técnicas de aproximación, interpolación y modelado, con especial énfasis en aquellas que emplean polinomios.

## 2.4. Aproximación

Dada una función conocida, el problema de aproximación consiste en encontrar una función más simple que la original que permita determinar (posiblemente con cierto error) valores de la función dada. La simplicidad de la solución se puede referir a la facilidad para ser evaluada, para ser integrada o derivada o cualquier otra carac-

terística que pueda resultar interesante. La aproximación tiene, fundamentalmente, un interés teórico, pues, como se ha comentado, es preciso conocer explícitamente la función a aproximar. Un ejemplo de aplicación es la integración o derivación numérica o la evaluación de funciones en máquinas calculadoras. Piénsese, por ejemplo, en el cálculo del valor de la función  $\cos(x)$  en un punto  $x_0$ : si se encuentra una función polinómica que aproxime, con un error determinado, la función en el entorno de  $x_0$ , podremos obtener su valor realizando únicamente multiplicaciones y sumas.

A pesar de estas limitaciones, la aproximación tiene un interés adicional, pues si una familia de funciones (polinómicas, racionales, serie de Fourier, etc.) proporciona una aproximación adecuada, entonces, muy probablemente, será una familia de funciones que proporcione buena asistencia a la hora de interpolar o modelar datos.

De una manera formal, se entiende por aproximación, también denominada aproximación funcional en la literatura matemática, al proceso por el cual dada una función  $f(x)$  de forma explícita, se busca una función  $P(x)$ , perteneciente a la clase de funciones  $\Phi_k(x)$ , que se *parezca* lo más posible a  $f(x)$ , es decir:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(x) \approx f(x). \quad (2.2)$$

Nos referiremos únicamente a aproximaciones de tipo lineal, similares a la expresión (2.2), en las que la aproximación,  $P(x)$ , es una combinación lineal de las funciones aproximadoras,  $\Phi_k(x)$ . El análisis de aproximaciones basadas en combinaciones no lineales de las funciones base es de una complejidad muy superior a la del caso lineal, y su estudio se aparta del objetivo de esta tesis. El parecido entre la función objetivo,  $f(x)$  y la solución  $P(x)$ , se evalúa en función de cierta métrica, que determinará el tipo de aproximación.

Además, de una elección apropiada de las funciones base  $\Phi_k(x)$ , el punto crucial a la hora de resolver un problema de aproximación es el criterio a usar para obtener las constantes  $a_k$  en la función (2.2). En base a dicho criterio es posible realizar una clasificación del tipo de aproximación. Los dos tipos más importantes son la



aproximación de mínimo error cuadrático y la aproximación uniforme.

## 2.5. Aproximación de mínimo error cuadrático

En la aproximación de mínimo error cuadrático el objetivo es minimizar la integral del cuadrado de la diferencia entre  $f(x)$  y su aproximación en un intervalo  $[a, b]$ , es decir, buscar el mínimo de la expresión del error

$$\varepsilon = \int_a^b (f(x) - P(x))^2 dx. \quad (2.3)$$

Este proceso de aproximación funcional equivale a la búsqueda de la función perteneciente al espacio de señal definido por  $\Phi_k(x)$  más próxima (en norma  $L_2$ ) a la función a aproximar  $f(x)$ , es decir, minimizar la ecuación (2.3), equivale a minimizar la norma  $L_2$ . Definido así el error, para obtener los  $n + 1$  coeficientes  $a_k$  de (2.2) se deberá resolver el sistema compuesto por las  $n + 1$  ecuaciones normales

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

En ocasiones es interesante minimizar el error de forma ponderada, utilizando para ello una función de peso, cuyo cometido será asignar distintos grados de importancia al error de aproximación en las distintas zonas del intervalo.

**Definición 1.10 (Función de peso)** *Una función integrable,  $w(x)$ , es una función de peso en un intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0$  para todo  $x$  en  $I$  y además  $w(x)$  no es idénticamente nula en ningún subintervalo de  $I$ .*

Así, incluyendo en (2.3) la función de ponderación  $w(x)$  se obtiene una expresión más general del error cuadrático:

$$\varepsilon = \int_a^b w(x)(f(x) - P(x))^2 dx.$$

En este punto es conveniente introducir el concepto de ortogonalidad de funciones, propiedad interesante ya que permite calcular la aproximación de menor error cuadrático aplicando

$$a_k = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b w(x)f(x)\Phi_k(x)dx,$$

sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones normales (2.4).

**Definición 1.11 (Ortogonalidad)** *Dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son ortogonales en el intervalo  $[a, b]$ , con respecto a la función de peso  $w(x)$ , si su producto escalar es nulo, es decir, si*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

**Definición 1.12 (Conjunto Ortogonal de Funciones)** *Se dice que el conjunto de funciones  $\Phi_0, \dots, \Phi_n$  es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo  $[a, b]$  con respecto a la función de peso  $w(x)$  si*

$$\int_a^b w(x)\Phi_j(x)\Phi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ \alpha_k > 0, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

*Si, además,  $\alpha_k = 1$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , entonces se dice que el conjunto de funciones es ortonormal.*

Algunos ejemplos de conjuntos ortogonales de funciones son:

**Polinomios de Legendre**, denotados por  $P_n(x)$ , son ortogonales en  $[-1, 1]$  con respecto a la función de peso  $w(x) = 1$ , siendo su valor

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_{k+1}(x) &= \frac{(2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)}{k+1} \end{aligned}$$

**Polinomios de Tchebycheff**, son ortonormales en  $[-1, 1]$  con respecto a la función  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Se denotan por  $T_n(x)$  y se obtienen mediante la recursión

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

o bien, de forma explícita, según la expresión

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Además de utilizarse como funciones base aproximadoras, estos polinomios se emplean para determinar la localización óptima de los puntos de interpolación (coincidiendo con las raíces de los polinomios de Tchebycheff) con el fin de obtener una solución cercana a la aproximación minimax.

**Polinomios de Hermite**,  $H_n(x)$ , son ortonormales en  $(-\infty, \infty)$  con respecto a la  $w(x) = \exp^{-x^2}$ ,

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_{k+1}(x) &= 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

**Polinomios Trigonométricos**, son ortonormales en  $[-\pi, \pi]$  con respecto a la función  $w(x) = 1$ . Se denotan por  $\Phi_n(x)$  y siguen la expresión

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= 1, \\ \Phi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \Phi_{n+k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Dada una función  $f(x)$  continua en  $[-\pi, \pi]$ , la aproximación de menor error cuadrático usando los polinomios trigonométricos es  $S_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \Phi_k(x)$ . En el límite, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $S_n(x)$  es el desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$ , de trascendental importancia en el ámbito del procesado de señal.

**Funciones Sinc**, el conjunto de funciones sinc  $(x - k)$  es ortonormal en  $(-\infty, \infty)$  con respecto a  $w(x) = 1$ , siendo

$$\text{sinc}(x - k) = \frac{\sin(\pi(x - k))}{\pi(x - k)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Éste es el conjunto de funciones base definidas en el Teorema de Muestreo.

## 2.6. El Teorema de Muestreo

En 1949, C. E. Shannon publicó el artículo "*Communication in presence of noise*", sentando las bases de la teoría de la información. Con el fin de formular su teoría, era necesario un mecanismo que permitiera convertir una señal continua analógica en una secuencia de números, lo que lo condujo a establecer el clásico teorema de muestreo, basándose, en gran medida, en el trabajo previo de H. Nyquist [5,6,7]:

La conversión de la señal Análoga en Digital (Conversión A/D) se realiza, entre otras razones, porque las señales digitales presentan grandes ventajas a la hora de ser transmitidas y/o procesadas: mayor inmunidad al ruido, mayor facilidad de procesamiento y facilidad de multiplexaje.

En las aplicaciones tecnológicas las muestras se toman a intervalos de tiempo iguales, proceso denominado Muestreo periódico de la señal, lo que facilita procesos como el de la reconstrucción de la señal.

**Teorema 3.5 (Teorema de Muestreo)** *Una función  $f(x)$  que no contenga frecuencias iguales o superiores a  $w_{\text{máx}}$  (rad/s) queda completamente determinada dado su valor en una serie de puntos equiespaciados  $T = \pi/w_{\text{máx}}(s)$ .*

Si una señal continua,  $S(t)$ , tiene una banda de frecuencia tal que  $F_{\text{máx}}$  sea la mayor frecuencia comprendida dentro de dicha banda, dicha señal podrá reconstruirse sin distorsión a partir de muestras de la señal tomadas a una frecuencia  $fs$  siendo  $fs > 2 F_{\text{máx}}$ . En la Figura 2.1 se muestra un esquema simplificado del proceso de muestreo.

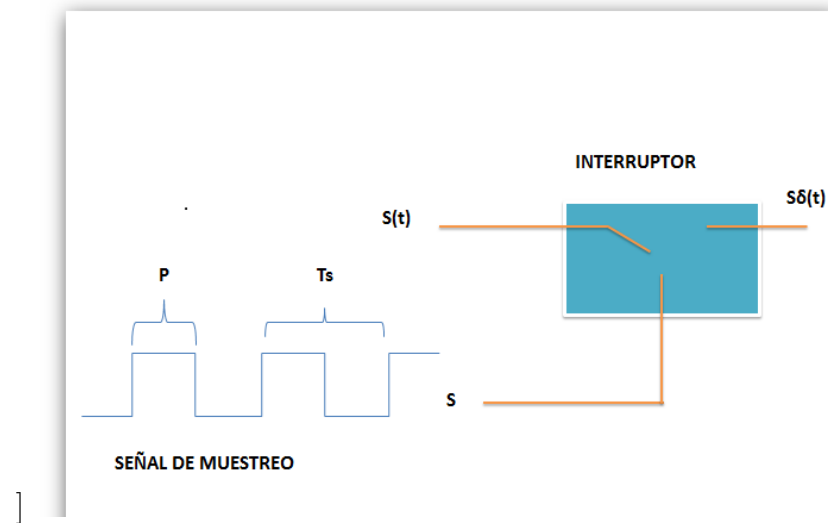


Figura 2.1: Esquema simplificado del proceso de muestreo

Cabe anotar que en las aplicaciones el interruptor no es del tipo mecánico, puesto que por lo general la frecuencia  $f_s$  es bastante alta; por lo que suelen emplearse transistores de efecto campo como interruptores, para cumplir los requerimientos que se le exigen al sistema; dentro de los que se encuentran:

- Elevada resistencia de aislamiento cuando los interruptores (transistores) están desconectados.
- Baja resistencia si los interruptores están conectados o cerrados.
- Elevada velocidad de conmutación entre los dos estados de los interruptores.

Es apropiado Observar la figura 2.1 y recordar las formas de las tres señales principales:

$S(t)$ : Señal a muestrear

$\delta$ : Señal de muestreo

$S_\delta$ : Señal muestreada

Así mismo en la Figura 2.2 se define:

**Ts:** Período de la señal de muestreo

**P:** Tiempo de duración del pulso

Vale la pena recordar que desde el punto de vista de la cuantificación de la señal muestreada, lo ideal es que el tiempo que dura el interruptor activo (P), fuese prácticamente cero, ya que de otro modo, la señal muestreada puede variar enormemente en dicho tiempo y hacer poco exacta su cuantificación.

### Aplicación del Teorema del muestreo

Como es sabido, el Teorema del muestreo se aplica a través del muestreo periódico de una señal analógica, por ejemplo, cuando se graba una señal de audio al computador utilizando una tarjeta de sonido, el conversor A/D del PC estará digitalizando la señal a una cierta frecuencia tal como 11, 22, ó 44 kHz, denominada frecuencia de muestreo. Considerando que un ser humano puede percibir sonidos entre 20 Hz y 20 kHz, es fácil apreciar que, aplicando el Teorema del muestreo, es decir, muestreando al doble de la frecuencia máxima que un hombre o mujer puede escuchar, queda contemplado todo su rango de frecuencia audible, es decir, que si:

$$f_s = 2 \times 20 \text{ kHz}$$

$$f_s = 40 \text{ kHz}$$

Es claro que muestreando a 40.000 Hz no habrá pérdida de información.

Adicionalmente, es evidente que si la frecuencia de muestreo es muy baja, es decir, las mediciones son demasiado espaciadas, se perderán detalles de la señal original; lo anterior se puede apreciar mediante una simple demostración gráfica a través de la Figura 2.2 subdividida en A-B-C-D; en donde se han representado cuatro señales distintas (en línea azul) muestreadas periódicamente a igual frecuencia (los círculos rojos denotan las muestras). En A y B las señales aparecen correctamente representadas por las muestras, en C la velocidad de muestreo parece insuficiente, y en D las

muestras representan una señal como la de B, es decir, la señal de D es un alias de la señal de B, a este efecto se le denomina en inglés aliasing.

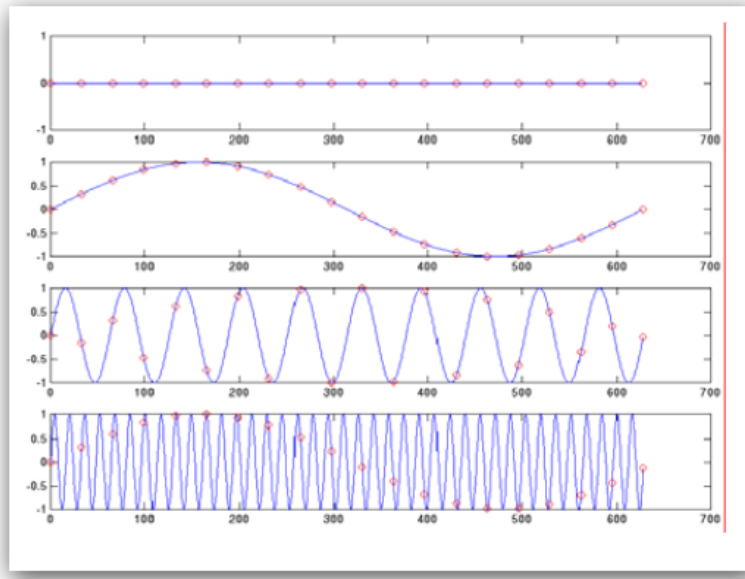


Figura 2.2: Señal análoga y su señal muestreada

### Aliasing

El aliasing es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se les muestrea digitalmente. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de la señal digital. El aliasing es un fenómeno propio de la conversión A/D, en el cual la frecuencia de la señal reconstruida es menor que el de la señal original, lo cual ocurre cuando la frecuencia de muestreo es demasiado baja; estos efectos pueden reducirse utilizando filtros.

### CRITERIO DE NYQUIST SHANNON

El criterio de Nyquist-Shannon, también denominado Teorema del Muestreo Pasabanda, establece que la frecuencia mínima de muestreo necesaria para evitar el aliasing debe ser.

$$F_s > 2BW$$

con:

**fs:** frecuencia de muestreo

**BW:** ancho de banda de la señal a muestrear

$$BW = F_{\text{máx}} - F_{\text{mín}}$$

Para señales con  $F_{\text{mín}} = 0$ , la expresión queda:

$$f_s > 2F_{\text{máx}}$$

Que coincide con la aplicación del Teorema general del muestreo.

El criterio de Nyquist Shannon redefine el Teorema del muestreo aplicándolo a un Ancho de Banda de interés específico, lo que soluciona ciertas dificultades que pueden presentarse al intentar muestrear señales a frecuencias elevadas.

Es posible muestrear a una frecuencia menor que la que impondría Nyquist siempre que se garantice que las repeticiones espectrales no se superponen con el espectro, siempre que BW (ancho de banda de la señal) sea menor que  $F_{\text{mín}}$ .

Por ejemplo, si se quiere muestrear una señal de la que se sabe se encuentra compuesta por frecuencias entre 12 MHz y 13 Mhz, la aplicación del Teorema general del muestreo plantearía que la señal debe muestrearse como mínimo a:

$$f_s = 2 F_{\text{máx}}$$

$$f_s = 2 (13 \text{ MHz})$$



$f_s = 26 \text{ MHz}$

Frecuencia que es demasiado alta para un muestreo típico.

Por el contrario, al aplicar el criterio de Nyquist Shannon, sería suficiente con:

$f_s = 2 \text{ BW}$

$f_s = 2 (F_{\text{máx}} - F_{\text{mín}})$

$f_s = 2 (13 \text{ MHz} - 12 \text{ MHz})$

$f_s = 2 \text{ MHz}$

Frecuencia de muestreo que puede ser más sencilla de implementar y donde se verifica que:

$$\begin{aligned} F_{\text{mín}} &> BW \\ 12 \text{ MHz} &> 1 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Otros criterios de muestreo mínimo para señales pasabanda, se utilizan, teniendo en cuenta la cantidad de réplicas espectrales que se puedan colocar entre las densidades espectrales originales, para el ejemplo presentado, se podría muestrear a una frecuencia de entre dos y cuatro veces el ancho de banda.

Como complemento al Teorema de Muestreo, la fórmula de reconstrucción (interpolación)

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) \text{sinc}(x/T - k), \quad (2.6)$$

permite obtener la función original,  $f(x)$ , a partir de sus muestras equiespaciadas,  $f(kT)$ . Dicha reconstrucción será exacta si y sólo si la señal original está limitada en banda, es decir, si su frecuencia máxima es  $w_{\text{máx}} \leq \pi/T$ , siendo este límite conocido como la *frecuencia de Nyquist*.

## 2.7. Modelado

El problema del modelado, también conocido como ajuste de curva (*curve fitting*), puede ser plantado de la siguiente forma: dado un conjunto de valores  $y_i, i = 1, \dots, N$ , de la variable dependiente  $y$ , correspondientes a los valores  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N$ , de la variable, o vector, independiente  $\mathbf{x}$ , determinar una función  $\hat{f}(\mathbf{x}) \equiv f(x; \Theta)$  de forma conocida y con un vector de  $n$  parámetros,  $\Theta$ , que se ajuste a los  $y_i$  de tal forma que  $\hat{f}(\mathbf{x}_i) \approx y_i$ . Esta última condición debe ser especificada en función de una cierta métrica. Existen diversos motivos que justifican acometer un problema de modelado, entre los que se encuentran los siguientes:

**Estimación de parámetros:** la forma de la función modeladora  $f(x)$  puede estar determinada por la aplicación o el proceso a modelar, en cuyo caso, los parámetros  $\Theta_k, k = 1, \dots, n$  posiblemente tendrán un significado físico. El objetivo consistirá en estimar dichos parámetros de forma tan precisa como sea posible a partir de los datos disponibles.

**Suavizado de datos:** si el conjunto de datos de partida  $y_i$  fuera suficientemente preciso, podría bastar con determinar una función interpolatoria  $f(x)$  de tal forma que  $f(x_i) = y_i$  para  $i = 1, \dots, N$ . Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones los valores  $y_i$  están corrompidos por errores de medida, en cuyo caso sería deseable que el proceso de modelado suavice dichos errores.

**Representación funcional:** la representación de un conjunto discreto de pares de datos  $(x_i, y_i)$  mediante una función  $f(x)$  tiene ciertas ventajas, entre las que se encuentran el hecho de que se puede obtener de forma inmediata el valor en cualquier punto  $x$  dentro del rango o determinar el valor de la derivada, llevar a cabo la integral, etc.

**Compresión de datos:** si los resultados deben ser almacenados o transmitidos, resulta útil que el número de parámetros  $\Theta_k$  sea significativamente menor que el número de datos (modelado parsimonioso).

### 2.7.1. Técnicas polinómicas de modelado: consideraciones generales

Existe en la literatura gran cantidad y diversidad de técnicas de modelado, siendo ejemplos recientes las redes neuronales (Neural Networks)[11] y las máquinas de vectores soporte (Support Vector Machines)[12]. Sin embargo, esta sección, y el resto de la Tesis, se centrará en las técnicas de modelado polinómicas. Para realizar una clasificación de las distintas metodologías es útil establecer una representación del modelo en forma de combinación lineal de funciones base, pues resulta aplicable a todas las técnicas a considerar. De esta manera, el modelo se puede expresar como:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^M a_j B_j(x, p_j),$$

donde:

1.  $x$  es el vector de variable de entrada.
2.  $a_j$  son los coeficientes de la expansión que deberán ser determinados a partir de los datos.
3.  $B_j(x, p_j)$  son las funciones base.
4.  $p_j$  son los parámetros de cada función base.
5.  $M$  es el número de funciones base del modelo.

Los métodos basados en esta representación son conocidos como métodos diccionario, pues el conjunto de funciones base (diccionario) utilizado es lo que diferencia a los distintos métodos. Es posible realizar una clasificación de los mismos de la siguiente manera:

1. **Métodos no adaptativos** utilizan funciones base preestablecidas (y con sus parámetros  $p_j$  prefijados), de forma que únicamente los coeficientes  $a_j$  se ajustan a los datos utilizando, habitualmente, el criterio de mínimos cuadrados, resultando un problema lineal.

- Métodos paramétricos globales, como por ejemplo la regresión polinómica. Este tipo de modelado tiene una flexibilidad muy limitada y proporciona modelos precisos únicamente cuando la función subyacente al proceso a modelar es similar a la preestablecida. Por contra, a su favor juega su sencillez, la necesidad de pocos datos para la obtención de los parámetros, la facilidad de interpretación y la rapidez de computación.
- Métodos paramétricos locales, como la regresión lineal a tramos (PWL) o los splines. Estos métodos extienden los principios del modelado paramétrico global mediante su aplicación local a regiones o tramos del espacio de entrada y la imposición de ciertas condiciones de continuidad y/o suavidad. La aplicabilidad de este tipo de modelado se limita a problemas de baja dimensión en el espacio de entrada (típicamente una o dos variables de entrada) pues el número de coeficientes o parámetros del modelo crece exponencialmente con la dimensión, lo cual, además de resultar problemático, requiere de un número exponencialmente creciente de datos para su evaluación de forma robusta. Es el conocido problema de la maldición de la dimensionalidad (the curse of dimensionality). Los splines se utilizan frecuentemente en problemas de modelado y ajuste de curvas (spline curve fitting). El método más simple basado en splines considera prefijados los puntos de ruptura o nodos, lo que lo convierte en un problema lineal respecto de los coeficientes de las funciones base spline, que se resuelve de manera simple. Se trata, por tanto, de un método de modelado paramétrico local no adaptativo. Sus prestaciones (relativas a la precisión del ajuste) depende enormemente del número de nodos considerados y de sus posiciones (que se deben fijar de antemano).

2. **Métodos adaptativos**, en los cuales, además de los coeficientes  $a_j$ , también se ajustan a los datos las funciones base y/o sus parámetros  $p_j$ . Se trata, por tanto, de un problema no lineal, de considerable dificultad y en el que la estrategia de optimización a utilizar adquiere gran importancia. Así mismo, y de forma similar a los métodos no adaptativos, la elección de un conjunto de funciones base adecuado adquiere gran importancia. Estos métodos adaptativos también pueden clasificarse en:

- Globales, que utilizan funciones base definidas en todo el dominio de  $x$ . Entre ellos se encuentran las redes neuronales (como el perceptrón multicapa) y la regresión por búsqueda de proyección (PPR: *Projection Pursuit Regression*) así como otros más próximos al ámbito de la estadística como los modelos aditivos o el producto tensorial de splines (MARS: *Multivariate Adaptive Regression Splines*).
- Locales, que hacen uso de funciones base locales (en el dominio del espacio de entrada) como en el caso de las redes neuronales que utilizan funciones base radiales o la regresión por vecino más cercano (NNR: *Nearest Neighbors Regression*), el método adaptativo regularizado, el CART, etc. Si se utilizan modelos spline en los que la posición de los nodos puede adaptarse para ajustarse a los datos, entonces se plantea un problema no lineal que se engloba dentro del grupo de métodos locales adaptativos. La obtención de una posición óptima en el modelado spline no es una tarea trivial. Numerosos autores [8,14,9,12] se han planteado el problema no lineal en el que la posición de los nodos debe ser optimizada, resultando algoritmos de gran coste computacional y con una elevada sensibilidad ante mínimos locales.

---

## Capítulo 3

# Métodos de integración unidimensional

En este capítulo se muestran los diferentes métodos de integración unidimensional. Para todos ellos se supone que la función derivada  $f(x)$  se muestrea en una serie de  $N$  puntos. A partir de esta información, se estudian diferentes métodos de integración para obtener la función  $f(x)$  en los puntos muestreados con la máxima precisión posible. En el primer apartado se presentan los métodos de integración más conocidos, los basados en las reglas cerradas de Newton-Cotes, como por ejemplo, la regla del Trapecio, de Simpson o la de 3/8 de Simpson. En todos ellos se realiza una interpolación que ajusta la derivada a un polinomio de cierto grado en función del método escogido. En el segundo apartado se estudia la interpolación de la derivada a integrar mediante splines cúbicas; consiste en ajustar la señal evaluada en un par de puntos adyacentes mediante un polinomio de tercer grado; imponiendo condiciones de continuidad en la función y en sus derivadas primera y segunda. Mediante la integración analítica de estos polinomios se obtiene la señal deseada. Con el propósito de utilizar la interpolación más precisa posible. En el siguiente apartado se comparan los diferentes métodos presentando los resultados obtenidos para una señal generada analíticamente evaluada en una serie de puntos equidistantes[12,13,14,15].

### 3.1. Métodos basados en las fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Sean  $f(x)$  la función a determinar y  $f'(x)$  su derivada muestreada en una serie de puntos  $x_n$  que vamos a suponer equidistantes por simplicidad:  $x_n = x_0 + nh$  donde  $x_0$  es el primer punto donde se evalúa la derivada,  $n = 0, \dots, N-1$  siendo  $N$  el número total de puntos donde la derivada es evaluada y  $h$  es la distancia entre los puntos de muestreo. Para simplificar la notación escribiremos  $f'_n = f'(x_n)$  y  $f_n = f(x_n)$  para la función derivada y la función a determinar respectivamente. Los diferentes métodos de integración permiten obtener los valores de  $f(x)$  en los mismos puntos  $x_n$  en los que se evalúa su función derivada  $f'(x)$ . A continuación se analizan las tres primeras fórmulas cerradas de Newton-Cotes:

- Regla del Trapecio
- Regla de Simpson
- Regla de Simpson 3/8

y se muestra que estos métodos se pueden usar como filtros recursivos y que realizan una determinada interpolación de los datos originales. Para los tres métodos se ha supuesto que el valor de la función a determinar en el primer punto  $x_0$  es nulo, es decir,  $f_0 = f(x_0) = 0$ , es decir, el valor de la constante de integración se ha tomado de tal manera que se cumple  $f_0 = 0$ .

#### ***Regla del Trapecio***

En la figura 1.1 se ha representado la función derivada  $f'(x)$  muestreada en una serie de puntos  $x_n$ . Tan sólo se indica la derivada en dos puntos de la serie ( $x_0$  y  $x_1$ ); calculando el área sombreada de la figura se obtiene el valor de la función integrada  $f(x)$  en  $x_1$ . Esta regla une los valores de la función derivada mediante una interpolación de primer grado. De esta manera, la función  $f(x)$  se obtiene mediante un polinomio de grado 1.

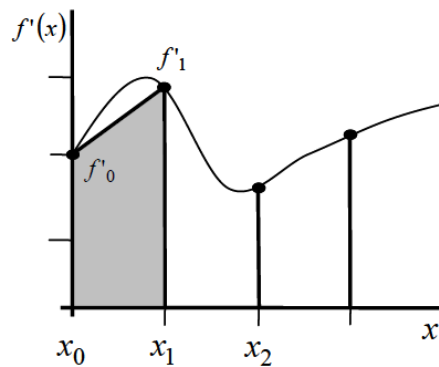


Figura 3.1: La regla del Trapecio interpola la derivada en dos puntos  $[x_0, x_1]$  mediante un polinomio de grado 1. El área sombreada es el valor de la integral entre  $x_0$  y  $x_1$ .

La regla del Trapecio viene dada por:

$$f(x_1) - f(x_0) = f_1 - f_0 = \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx \approx \frac{h}{2}(f'_0 + f'_1) \quad (3.1)$$

donde se calcula la función  $f(x)$  en  $x_1$  siendo  $f'$  la función derivada y  $h$  la distancia entre dos puntos adyacentes donde se ha evaluado la derivada.

La expresión (1.1) es válida para determinar  $f_1$  y se emplea de manera recursiva para determinar  $f$  en toda la serie de puntos  $[x_n]$ . En la figura 1.2 se representa la derivada  $f'$  muestreada en  $N$  puntos. Aplicando la regla del Trapecio de manera recursiva se determina el área de las zonas sombreadas indicadas en la figura 1.2. De esta manera, se obtiene el valor de  $f$  en todos los puntos  $x_n$  con  $n = 0, \dots, N - 1$ .

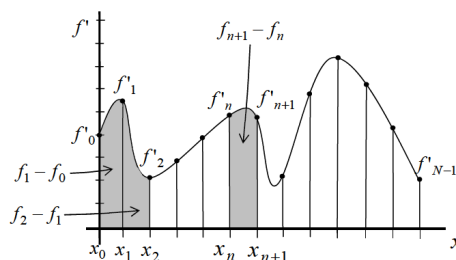


Figura 3.2: Función derivada muestreada en  $N$  puntos. Aplicando la regla del Trapecio de manera recursiva se determina la función  $f$  en cada punto.



A partir de la expresión (2.1), la regla del Trapecio recursiva se escribe:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_n &= f_{n-1} + \frac{h}{2}(f'_n + f'_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $n = 1, \dots, N - 1$  y  $h$  es el paso de integración que suponemos constante.

### Regla de Simpson

En la figura 1.3 se representa la función derivada  $f'(x)$ . Se indica la derivada muestreada en los tres primeros puntos ( $x_0, x_1$  y  $x_2$ ) ya que este método determina el valor de la función interpolando la derivada en tres puntos a un polinomio de segundo grado. De esta manera, la función  $f(x)$  se calcula a partir del área sombreada de la figura 2.3.

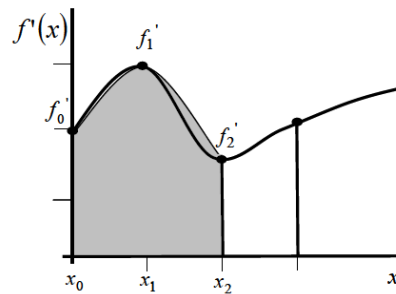


Figura 3.3: La regla de Simpson interpola la derivada en tres puntos  $[x_0, x_1, x_2]$  mediante un polinomio de grado 2. El área sombreada es la integral entre los puntos  $x_0$  y  $x_2$ .

Se calcula la función  $f(x)$  en  $x_2$  mediante la regla de Simpson a partir del valor de la función en  $x_0$  y de los valores de la derivada en los tres puntos  $x_0, x_1$  y  $x_2$ , como se indica en la siguiente expresión:

$$f(x_2) - f(x_0) = f_2 - f_0 = \int_{x_0}^{x_2} f'(x)dx \approx \frac{h}{3}(f'_0 + 4f'_1 + f'_2). \quad (3.3)$$

Al igual que la regla del Trapecio, el método de Simpson se emplea de manera recursiva para determinar  $f$  en todos los puntos  $x_n$ . Mediante la expresión (1.3) se determina la función en todos los puntos excepto en los dos primeros; en  $x_0$  se ha

supuesto que  $f$  es nula ( $f_0 = 0$ ) y para determinar  $f$  en  $x_1$  se emplea la regla del Trapecio. Así pues, la regla de Simpson recursiva se escribe mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= f_0 + \frac{h}{2}(f'_0 + f'_1) \\ f_n &= f_{n-2} + \frac{h}{3}(f'_{n-2} + 4f'_{n-1} + f'_n) \quad n = 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

### Regla de 3/8 de Simpson

En la figura 1.4 se representa  $f'(x)$  muestreada en los cuatro primeros puntos ya que este método ajusta la derivada mediante un polinomio de grado 3, es decir, se emplea una interpolación de tercer orden. Así, la función  $f$  en el punto  $x_3$  se determina mediante el área sombreada indicada en la figura 1.4.

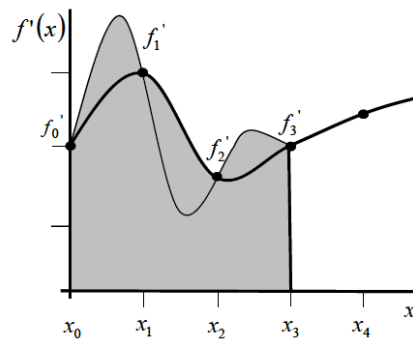


Figura 3.4: La regla de 3/8 de Simpson interpola la derivada en 4 puntos  $[x_0, x_1, x_2, x_3]$  mediante un polinomio de grado 3. El área sombreada es la integral entre los puntos  $x_0$  y  $x_3$ .

Siguiendo el mecanismo de los anteriores métodos, la regla de 3/8 de Simpson determina  $f$  en  $x_3$  mediante los valores de la derivada en los puntos  $x_0, x_1, x_2$ , y  $x_3$  y del valor de la función en  $x_0$  tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$f(x_3) - f(x_0) = f_3 - f_0 = \int_{x_0}^{x_3} f'(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f'_0 + 3f'_1 + 3f'_2 + f'_3). \quad (3.5)$$

Este método también se emplea recursivamente para determinar  $f$  en todos los puntos  $x_n$ . Al igual que en el método de Simpson, hay puntos para los que  $f$  no se determina aplicando directamente la regla de 3/8 de Simpson. A partir de la expresión (1.5) se observa que la función en los tres primeros puntos ( $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$ ) no se obtiene directamente con la regla de 3/8 de Simpson. Así se emplean los anteriores métodos presentados: los dos primeros puntos se unen mediante un polinomio de primer grado (regla del Trapecio) para obtener  $f_1$ . Seguidamente se unen los tres primeros puntos mediante un polinomio de segundo grado (regla de Simpson) obteniendo  $f_2$ . Así, la regla de 3/8 de Simpson recursiva se escribe mediante la expresión:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= f_0 + \frac{h}{2}(f'_0 + f'_1) \\ f_2 &= f_1 + \frac{h}{3}(f'_0 + 4f'_1 + f'_2) \\ f_n &= f_{n-3} + \frac{3h}{8}(f'_{n-3} + 3f'_{n-2} + 3f'_{n-1} + f'_n) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tal y como se ha presentado, los anteriores métodos de integración se basan en una interpolación de la función derivada; ésta se ajusta a un polinomio de cierto grado que posteriormente se integra. Es importante hacer notar que todos los métodos de integración explicados se pueden considerar como filtros recursivos. El valor de la función en un cierto punto se obtiene a partir del valor de la función en un punto anterior más una cierta interpolación de los valores de la derivada en los puntos cercanos. Así pues, la operación de interpolar la derivada es importante para obtener una integración precisa.

---

# Capítulo 4

## Splines

En general, para  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , la interpolación polinomial por tramos consiste en hallar una función de grado menor o igual a  $k$  que pase por cada dos puntos consecutivos. Bajo esta idea un spline es el conjunto de polinomios definidos en cada intervalo.

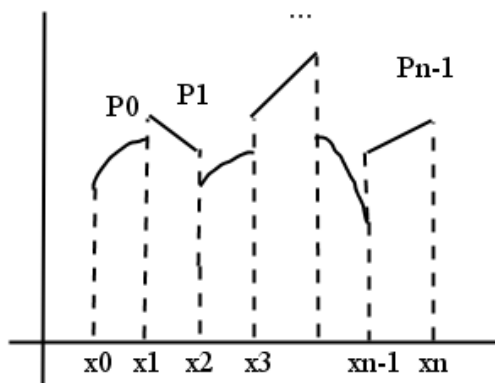


Figura 4.1: Gráfico de un Spline

Estamos interesados en un cierto tipo de spline, aquellos polinomios que se “peguen adecuadamente”, es decir, que tengan continuidad y continuidad diferenciable.

Trabajaremos sobre  $n + 1$  puntos:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , estos definen una

partición  $\mathcal{P}$  en la cual se encontrará el spline, formando subintervalos  $[x_i, x_{i+1})$  desde  $i = 0, \dots, n$ , sobre cada uno de ellos definimos un polinomio  $P_i$  de grado menor o igual a  $k$ .

Los spline más utilizados tienen las siguientes características :

1.  $f$  es continua en  $[x_i, x_{i+1})$
2.  $f$  tiene derivada continua en  $[x_i, x_{i+1}]$ .
3.  $f$  tiene segunda derivada continua en  $[x_i, x_{i+1}]$ .

esto último representa que los polinomios se peguen suavemente entre uno y otro.

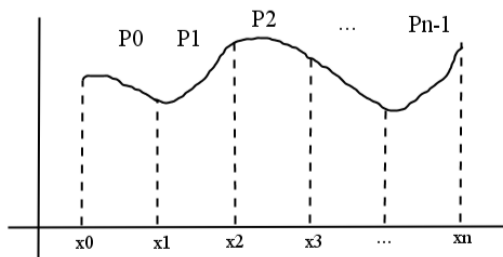


Figura 4.2: Gráfico de un Spline Cúbico

Definimos el conjunto  $F(\mathcal{P}, k)$  de funciones polinomiales por trozos sobre la partición  $\mathcal{P}$  y de grado menor o igual a  $k$  como:

$$F(\mathcal{P}, k) = \{f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ y el grado de } P_i \leq k\} = P_i(x), i = 1, \dots, n$$

esta familia es un espacio vectorial, es fácil ver que su dimensión es:

$$\dim(F(\mathcal{P}, k)) = n * (k + 1)$$

donde  $n$  es el número de intervalos y  $k + 1$  es el número de coeficientes de cada polinomio. Bajo esta condición  $F(\mathcal{P}, k)$  engloba a todos los spline posibles.

Ahora la subfamilia de  $F$ , con la característica de que sea continua, la escribimos:

$$F(\mathcal{P}, k, C^0) = \{f(x) \in F(\mathcal{P}, k) \mid f(x) \in C[a, b]\}$$

esto implica que:

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

por eso, la dimensión de este espacio es:

$$\dim(F(\mathcal{P}, k, C^0)) = n(k + 1) - (n - 1) = kn + 1$$

ya que al elegir la continuidad se pierde un grado de libertad.

Ahora, si pedimos que  $F$  sea continuamente diferenciable, el espacio del spline  $F$  se escribe

$$F(\mathcal{P}, k, C') = \{f(x) \in F(\mathcal{P}, k, C^0) \mid f(x) \in C'[a, b]\}$$

esto implica que:

$$P'_i(x_i) = P'_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

Es fácil ver, que la dimensión de este espacio es:

$$\dim(F(\mathcal{P}, k, C')) = n(k + 1) - 2(n - 1) = kn - n + 2$$

ya que al elegir derivada continua se pierde un grado más de libertad.

Nuevamente, si pedimos que  $F$  tenga segunda derivada continua, es decir

$$P''_i(x_i) = P''_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

El espacio donde habita el spline se escribe

$$F(\mathcal{P}, k, C^2) = \{f(x) \in F(\mathcal{P}, k, C') \mid f(x) \in C^2[a, b]\}$$

Es fácil ver que la dimensión de este espacio es:

$$\dim(F(\mathcal{P}, k, C^2)) = n(k + 1) - 3(n - 1) = kn - 2n + 3$$

ya que al elegir segunda derivada continua, nuevamente se pierde un grado más de libertad.

Ahora bien, si a  $F$  le imponemos que tenga tercera derivada continua en los nodos, es decir

$$P'''_i(x_i) = P'''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

el espacio donde habita este spline se escribe

$$F(\mathcal{P}, k, C^3) = \{f(x) \in f(\mathcal{P}, k, C^2) \mid f(x) \in C^3[a, b]\}$$

y es fácil ver que

$$\dim(F(\mathcal{P}, k, C^3)) = n(k + 1) - 4(n - 1) = kn - 3n + 4$$

Análogamente a los casos anteriores se pierde un grado más de libertad.

A continuación mostraremos la siguiente tabla, en ella se indica la dimensión de la

función spline con distintos grados y de sus subfamilias de funciones continuas y continuas diferenciables:

| Grado de $f$ | $\dim(F(\mathcal{P}, k))$ | $\dim(F(\mathcal{P}, k, C^0))$ | $\dim(F(\mathcal{P}, k, C^1))$ | $\dim(F(\mathcal{P}, k, C^2))$ | $\dim(F(\mathcal{P}, k, C^3))$ |
|--------------|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $k = 0$      | $n$                       | 1                              |                                |                                |                                |
| $k = 1$      | $2n$                      | $n + 1$                        | 2                              |                                |                                |
| $k = 2$      | $3n$                      | $2n + 1$                       | $n + 2$                        | 3                              |                                |
| $k = 3$      | $4n$                      | $3n + 1$                       | $2n + 2$                       | $n + 3$                        | 4                              |

Cuadro 4.1: Grados de libertad para polinomios de grado  $\leq 3$ .

De acuerdo a la tabla 4.1, si consideramos el spline de grado  $k = 3$ , tendremos  $4n$  grados de libertad para determinarlo; sin embargo, al exigirle mayor suavidad, en sus derivadas el número de grado de libertad es cada vez menor:

- (a)  $3n + 1$  si pedimos que sea continua.
- (b)  $2n + 2$  si pedimos primera derivada continua es decir si se le pide suavidad.
- (c)  $n + 3$  si pedimos segunda derivada continua (aún más suavidad).
- (d) 4 si pedimos tercera derivada continua (extrema suavidad).

Este último caso no sirve de mucho para resolver el problema que nos interesa porque perdemos flexibilidad para definir la familia, ya que solo tendríamos 4 grados de libertad, es decir el spline se reduce a un polinomio cúbico.

## 4.1. Interpolación con spline cúbico de Hermite

El problema es simple, queremos una función  $f$  que interpole los puntos y que en los puntos tenga cierta derivada:

|    |       |       |       |       |     |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|-------|
| x  | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| g  | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | ... | $g_n$ |
| g' | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | ... | $s_n$ |

Se tiene  $n + 1$  datos que son el resultado de evaluar los puntos  $x_i$  en la función  $g$  y  $n + 1$  datos de la evaluación en  $g'$ , y con ellos queremos un spline cúbico.



La dimensión (grados de libertad) de la función  $f$  con  $k = 3$  es  $\dim(f(\mathcal{P}, k)) = 4n$ , pero recordamos que una de las condiciones del problema es que  $f$  coincida con  $g$ , es decir que  $f$  sea continua de aquí la  $\dim(f(\mathcal{P}, k, C^0)) = 3n + 1$ , ya que al cumplir esta condición perdemos un grado de libertad, así mismo como se pide que  $f$  coincida con  $g'$  se pierde nuevamente otro grado de libertad, entonces la  $\dim(f(\mathcal{P}, k, C^1)) = 2n + 2$ , lo cual nos lleva a concluir que como se tienen  $2(n + 1)$  datos del problema y la  $\dim(f(\mathcal{P}, k, C^1)) = 2n + 2$ , entonces el problema tiene solución única.

En la interpolación cúbica de Hermite se cuenta con cada punto y su valor en la función, al igual que su derivada, veremos que es fácil calcular el polinomio  $P_i(x)$ , que forma el spline interpolante. Por conveniencia, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$y(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

y comprobamos, si  $x = x_i$ , tenemos:

$$y(x_i) = \frac{x_i - x_i}{x_{i+1} - x_i} = 0$$

si  $x = x_{i+1}$ , tenemos:

$$y(x_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_i} = 1$$

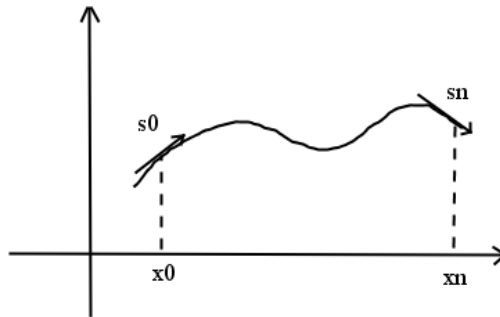


Figura 4.3: Gráfico de un Spline Cúbico

La idea es hacer calculos sobre el intervalo  $[0,1]$  y posteriormente generalizar al intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

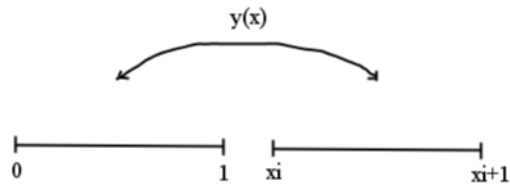


Figura 4.4: Spline

El problema que se plantea ahora es, cómo determinar un polinomio cúbico  $P(y)$  tal que  $P(0) = P_0, P(1) = P_1, P'(0) = P'_0$  y  $P'(1) = P'_1$ .

El polinomio  $P(y)$  se puede escribir de la forma

$$P(y) = P_0q_1(y) + P_1q_2(y) + P'_0q_3(y) + P'_1q_4(y) \quad (4.1)$$

donde se proponen  $q_1, q_2, q_3$  y  $q_4$  polinomios cúbicos:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 1, q'_1(0) = 0, q_1(1) = 0, q'_1(1) = 0 \\ q_2(0) &= 0, q'_2(0) = 0, q_2(1) = 1, q'_2(1) = 0 \\ q_3(0) &= 0, q'_3(0) = 1, q_3(1) = 0, q'_3(1) = 0 \\ q_4(0) &= 0, q'_4(0) = 0, q_4(1) = 0, q'_4(1) = 1 \end{aligned}$$

sea

$$\begin{aligned} q_1(y) &= ay^3 + by^2 + cy + d \\ q'_1(y) &= 3ay^2 + 2by + c \end{aligned}$$

evaluando con  $y = 0$  y  $y = 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}q_1(0) &= d = 1 \\q_1(1) &= a + b + c + d = 0 \\q_1'(0) &= c = 0 \\q_1'(1) &= 3a + 2b + c = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema obtenemos que  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$  y  $d = 1$ , entonces  $q_1(y)$  es de la forma:

$$q_1(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1 = (1 + 2y)(y^2 - 2y + 1) = (1 + 2y)(y - 1)^2.$$

Ahora,  $q_2(y)$  se puede escribir

$$\begin{aligned}q_2(y) &= ay^3 + by^2 + cy + d \\q_2'(y) &= 3ay^2 + 2by + c\end{aligned}$$

evaluando con  $y = 0$  y  $y = 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}q_2(0) &= d = 0 \\q_2(1) &= a + b + c + d = 0 \\q_2'(0) &= c = 1 \\q_2'(1) &= 3a + 2b + c = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema obtenemos que  $a = 1$ ,  $b = -2$  y  $c = 1$ , entonces  $q_2(y)$  es de la forma:

$$q_2(y) = y^3 - 2y^2 + y = (y - 1)^2 y$$

Ahora,  $q_3(y)$  se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned}q_3(y) &= ay^3 + by^2 + cy + d \\q'_3(y) &= 3ay^2 + 2by + c\end{aligned}$$

evaluando con  $y = 0$  y  $y = 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}q_3(0) &= d = 0 \\q_3(1) &= a + b + c + d = 1 \\q'_3(0) &= c = 0 \\q'_3(1) &= 3a + 2b + c = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema obtenemos que  $a = -2, b = 3$ , entonces  $q_3(y)$  es de la forma:

$$q_3(y) = -2y^3 + 3y^2 = 3y^2 - 2y^3 = y^2(3 - 2y)$$

Por último  $q_4(y)$

$$\begin{aligned}q_4(y) &= ay^3 + by^2 + cy + d \\q'_4(y) &= 3ay^2 + 2by + c\end{aligned}$$

evaluando con  $y = 0$  y  $y = 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}q_4(0) &= d = 0 \\q_4(1) &= a + b + c + d = 0 \\q'_4(0) &= c = 0 \\q'_4(1) &= 3a + 2b + c = 1\end{aligned}$$

resolviendo el sistema obtenemos que  $a = 1, b = -1$ , entonces  $q_4(y)$  es de la forma:

$$q_4(y) = y^3 - y^2 = y^2(y - 1)$$

Así  $P(y)$  queda de la forma:

$$P(y) = P_0(1 + 2y)(y - 1)^2 + P_1y^2(3 - 2y) + P'_0y(y - 1)^2 + P'_1y^2(y - 1) \quad (4.2)$$

hemos encontrado el polinomio cúbico  $P(y)$  para el intervalo  $[0,1]$ . Ahora bien tengamos en cuenta que las condiciones de interpolación cúbica de Hermite a trozos son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= g_i \\ P'_i(x_i) &= s_i \\ P_i(x_{i+1}) &= g_{i+1} \\ P'_i(x_{i+1}) &= s_{i+1} \end{aligned}$$

El problema de interpolación cúbica de Hermite nos pide construir una función  $f$  tal que es un conjunto de polinomios cúbicos  $P_i$ , cada uno definido en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ . Lo que se trata ahora es obtener la expresión de  $P_i(x)$  a partir de lo que se obtuvo de  $P(y)$ .

Notemos que si  $P_i(x_i) = P(y_i(x_i))$  entonces:

$$P'_i(x) = \frac{d}{dx}P(y(x)) = P'(y)y' = P'(y)\frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$

entonces

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= P(y_i(x_i)) = P(0) = g_i \\ P'_i(x_i) &= P'(0)\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = s_i, \quad \text{entonces} \quad P'(0) = s_i(x_{i+1} - x_i) \\ P_i(x_{i+1}) &= P(y_i(x_{i+1})) = P(1) = g_{i+1} \\ P'_i(x_{i+1}) &= P'(1)\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = s_{i+1}, \quad \text{entonces} \quad P'(1) = s_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

obtenemos

$$P_i(x) = g_iq_1(y) + g_{i+1}q_2(y) + s_i(x_{i+1} - x_i)q_3(y) + s_{i+1}(x_{i+1} - x_i)q_4(y) \quad (4.3)$$

sustituyendo los  $q_i(y)$  y los "y" por "x" en (4.3) se tiene:

$$P_i(x) = g_i(y-1)^2(1+2y) + g_{i+1}(y^2(3-2y)) + s_i(x_{i+1}-x_i)(y-1)^2y + s_{i+1}(x_{i+1}-x_i)y^2(y-1) \tag{4.4}$$

$$P_i(x) = g_i \frac{(x-x_{i+1})^2(2(x-x_i) + (x_{i+1}-x_i))}{(x_{i+1}-x_i)^3} + g_{i+1} \frac{(x-x_i)^2(3(x_{i+1}-x_i) + 2(x_i-x))}{(x_{i+1}-x_i)^3} + \tag{4.5}$$

$$s_i \frac{(x-x_{i+1})^2(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2} - s_{i+1} \frac{(x_i-x)^2(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$

Por tanto la expresión de  $P_i(x)$  anterior es la solución de la interpolación cúbica de Hermite a trozos.

En todo el proceso anterior, para construir el interpolante cúbico de Hermite, se conocen los valores de  $g'$  en los puntos de interpolación. Pero qué pasaría si no se conocieran dichos valores, entonces las tangentes  $s_i$  se pueden elegir de manera que el interpolante  $f$  tenga hasta segunda derivada continua. Si esto pasa se dice que  $f$  es un spline cúbico de interpolación.

## 4.2. Spline cúbico

Un spline cúbico es una función formada por polinomios cúbicos, los cuales se unen con la mayor suavidad posible[17]. Dados los puntos:

|     |       |       |       |       |         |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|---------|-------|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $g$ | $g_0$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $\dots$ | $g_n$ |

solo se tiene los valores de  $g$  para los puntos  $x_i$ . Con los anteriores datos se quiere construir una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= P_{i+1}(x_i) \\ P'_i(x_i) &= P'_{i+1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \\ P''_i(x_i) &= P''_{i+1}(x_i) \end{aligned}$$

Notemos que en la tabla de valores tenemos  $n+1$  datos, que son el resultado de evaluar los  $x_i$  en la función  $g$ . La dimensión (grados de libertad) de  $f$  con respecto a su grado de  $k$  y al número de subintervalos (la partición  $\mathcal{P}$ ) es  $\dim(f(P, k)) = 4n$ ,

si en una de las condiciones se pide que  $f$  sea continua entonces  $\dim(f(P, k, C^0)) = 3n + 1$ , de la misma manera se pide que  $f$  sea continuamente diferenciable de aquí la  $\dim(f(P, k, C^1)) = 2n + 2$  y por último se pide que  $f$  tenga doble derivada continua, tendremos entonces  $\dim(f(P, k, C_2)) = n + 3$ . Cuando se pide que sea continua, continua diferenciable y con doble derivada continua, se pierde un grado de libertad a medida que se vayan cumpliendo cada una de las condiciones anteriores. Notemos que se tienen  $n+1$  datos del problema contra  $\dim(f(P, k, C_2)) = n + 3$ , haciendo la diferencia de estos nos percatamos que faltan dos condiciones  $((n + 3) - (n + 1) = 2)$  para poder dar solución a este problema.

Recordemos que cuando obtuvimos el interpolante cúbico de Hermite llegamos a una expresión de la forma:

$$P_i(x) = g_i \frac{(x - x_{i+1})^2(2(x - x_i) + (x_{i+1} - x_i))}{(x_{i+1} - x_i)^3} + g_{i+1} \frac{(x - x_i)^2(3(x_{i+1} - x_i) + 2(x_i - x))}{(x_{i+1} - x_i)^3} + s_i \frac{(x - x_{i+1})^2(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} - s_{i+1} \frac{(x_i - x)^2(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \quad (4.6)$$

en donde se conocen los valores de  $x_i$  evaluados en  $g$  y  $g'$ , pero en el problema del spline cúbico de interpolación solo sabemos el valor de  $g$  para lo  $x_i$  y las tangentes son incógnitas, se propone trabajar con  $P_i(x)$  (interpolador cúbico de Hermite), solo que ahora se considerarán a los  $s_i$  como valores no conocidos.

Derivamos dos veces al interpolante cúbico y obtenemos:

$$P_i''(x) = 6 \frac{g_{i+1} - g_i}{(x_{i+1} - x_i)^3} (x_{i+1} + x_i - 2x) - 2 \frac{s_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} (2x_{i+1} + x_i - 3x) - 2 \frac{s_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} (2x_i + x_{i+1} - 3x) \quad (4.7)$$

Como  $f$  es una función formada por un conjunto de polinomios cúbicos, los únicos puntos posibles en los que  $f''$  puede ser discontinua es en los  $x_i$  donde se unen los

polinomios cúbicos. Entoces la continuidad de  $f''$  es equivalente a pedir que:

$$f''(x_i^-) = f''(x_i^+)$$

donde

$$f''(x_i^+) = P_i''(x)$$

y

$$f''(x_i^-) = P_{i-1}''(x)$$

aquí es donde utilizamos la segunda derivada del interpolante cúbico de Hermite, evaluamos el  $x_i$  por la izquierda y por la derecha, obteniendo:

$$\begin{aligned} f''(x_i^+) &= P_i''(x_i) = 6 \frac{(g_{i+1} - g_i)(x_{i+1} - x_i)}{h_i^3} - 2s_i \frac{(2x_{i+1} - 2x_i)}{h_i^2} - 2s_{i+1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{h_i^2} \\ &= 6 \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i^2} - 4 \frac{s_i}{h_i} - 2 \frac{s_{i+1}}{h_i}, \end{aligned}$$

donde  $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$\begin{aligned} f''(x_i^-) &= P_{i-1}''(x_i) = 6 \frac{(g_i - g_{i-1})(x_i + x_{i-1} - 2x_i)}{h_{i-1}^3} \\ &\quad - 2s_{i-1} \frac{(2x_i + x_{i-1} - 3x_i)}{h_{i-1}^2} - 2s_i \frac{(2x_{i-1} + x_i - 3x_i)}{h_{i-1}^2}, \end{aligned}$$

donde  $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$

$$\begin{aligned} &= 6 \frac{(g_i - g_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{h_{i-1}^3} - 2s_{i-1} \frac{(x_{i-1} - x_i)}{h_{i-1}^2} - 2s_i \frac{(2x_{i-1} - 2x_i)}{h_{i-1}^2} \\ &= -6 \frac{(g_i - g_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{h_{i-1}^3} + 2s_{i-1} \frac{(x_i - x_{i-1})}{h_{i-1}^2} + 4s_i \frac{(x_i - x_{i-1})}{h_{i-1}^2} \\ &= -6 \frac{(g_i - g_{i-1})(h_{i-1})}{h_{i-1}^3} + 2s_{i-1} \frac{(h_{i-1})}{h_{i-1}^2} + 4s_i \frac{(h_{i-1})}{h_{i-1}^2} \\ &\quad - 6 \frac{(g_i - g_{i-1})}{h_{i-1}^2} + 2 \frac{s_{i-1}}{h_{i-1}} + 4 \frac{s_i}{h_{i-1}}, \end{aligned}$$



así obtenemos

$$f''(x_i^+) = P_i''(x_i) = 6\frac{g_{i+1} - g_i}{h_i^2} - 4\frac{s_i}{h_i} - 2\frac{s_{i+1}}{h_i}$$

$$f''(x_i^-) = P_{i-1}''(x_i) = -6\frac{(g_i - g_{i-1})}{h_{i-1}^2} + 2\frac{s_{i-1}}{h_{i-1}} + 4\frac{s_i}{h_{i-1}}$$

hacemos  $f''(x_i^-) = f''(x_i^+)$ , como se dijo anteriormente esto garantiza que  $f''$  sea continua y al mismo tiempo se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{6(g_{i+1} - g_i)}{h_i^2} - \frac{4s_i}{h_i} - \frac{2s_{i+1}}{h_i} &= -\frac{6(g_i - g_{i-1})}{h_{i-1}^2} + \frac{4s_i}{h_{i-1}} + \frac{2s_{i+1}}{h_{i-1}} \\ &= -\frac{4s_i}{h_i} - \frac{2s_{i+1}}{h_i} - \frac{4s_i}{h_{i-1}} - \frac{2s_{i-1}}{h_{i-1}} \\ &= -\frac{6(g_i - g_{i-1})}{h_{i-1}^2} - \frac{6(g_{i+1} - g_i)}{h_i^2} \end{aligned}$$

Dividimos a la igualación anteriormente entre  $-2$ , y obtenemos

$$\frac{2s_i}{h_i} + \frac{s_{i+1}}{h_i} + \frac{2s_i}{h_{i-1}} + \frac{s_{i-1}}{h_{i-1}} = \frac{3(g_i - g_{i-1})}{h_{i-1}^2} + \frac{3(g_{i+1} - g_i)}{h_i^2}$$

Finalmente dividiendo la expresión por  $(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)$  obtenemos

$$\begin{aligned} 2s_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i} s_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i} s_{i-1} &= \\ = 3\frac{(x_{i+1} - x_i)(g_i - g_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)} + \frac{(x_i - x_{i-1})(g_{i+1} - g_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)} \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que los  $s_i$  deben satisfacer las ecuaciones:

$$a_i s_{i-1} + d_i s_i + (1 - a_i) s_{i+1} = b_i, \quad \text{para } i = 2, \dots, n - 1 \quad (4.8)$$

de donde

$$d_i = 2$$

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)}$$

$$b_i = 3 \frac{(x_{i+1} - x_i)(g_i - g_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)} + \frac{(x_i - x_{i-1})(g_{i+1} - g_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)}$$

$$1 - a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i}$$

Suponiendo que  $s_1$  y  $s_n$  son dadas, obtenemos un sistema de  $n-1$  ecuaciones lineales para calcular  $n-1$  incógnitas  $s_2, \dots, s_{n-1}$ , es decir.

$$\begin{aligned} a_2 s_1 + d_2 s_2 + (1 - a_2) s_3 &= b_2 \\ a_3 s_2 + d_3 s_3 + (1 - a_3) s_4 &= b_3 \\ a_4 s_3 + d_4 s_4 + (1 - a_4) s_5 &= b_4 \\ &\vdots \\ a_{n-1} s_{n-2} + d_{n-1} s_{n-1} + (1 - a_{n-1}) s_n &= b_{n-1} \end{aligned}$$

La matriz de este sistema es tridiagonal y diagonalmente dominante ya que  $d_i=2$  y  $0 \leq a_i < 1$ , por tanto tiene una solución única. Los valores de  $s_1$  y  $s_n$  dependen de las condiciones de frontera que se elijan. Para el spline cúbico se hará mención de dos tipos de condiciones de frontera que dependiendo de cual se ocupe tendremos un spline cúbico completo o spline cúbico natural[17]. A continuación se explicarán algunas de ellas.

## 4.3. Condiciones de frontera para el spline cúbico

### 4.3.1. Spline cúbico completo

Por nuestra parte, si conocemos el valor de  $g'$  en  $x_1$  y  $x_n$  podemos utilizar estos valores como condiciones de frontera del spline cúbico, así tendremos el spline cúbico completo.

$$s_1 = g'(x_1)$$

y

$$s_n = g'(x_n)$$

En este caso el spline cúbico no solo interpola a la función  $g$  en los puntos  $x_0, \dots, x_n$  si no que además interpola a  $g'$  en  $x_0$  y  $x_n$  entonces  $s_0, \dots, s_n$  se calcula como solución del sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & & \\ \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & a_{n-1} & d_{n-1} & 1 - a_{n-1} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde

$$s_1 = g'(x_1) = b_1$$

$$s_n = g'(x_n) = b_n$$

Mas adelante mostramos un ejemplo en el cual se aplica spline cúbico completo a la función  $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$

### 4.3.2. Spline cúbico natural

Este tipo de spline consiste en exigir que la segunda derivada del spline en los extremos sea cero

$$f''(x_1) = f''(x_n) = 0 \tag{4.9}$$

donde  $f''(x_1)$  y  $f''(x_n)$  quedan de la siguiente forma:

$$f''(x_0) = \frac{6(g_1 - g_0)}{(x_1 - x_0)} - \frac{4s_0}{(x_1 - x_0)} - \frac{2s_1}{(x_1 - x_0)} = 0$$

$$6(g_1 - g_0) = 4s_0 + 2s_1$$

$$6(g_1 - g_0) = 2(2s_0 + s_1)$$

$$3(g_1 - g_0) = 2s_0 + s_1$$

y

$$\begin{aligned}
 f''(x_n) &= \frac{6(g_n - g_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})} - \frac{4s_n}{(x_n - x_{n-1})} - \frac{2s_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})} = 0 \\
 6(g_n - g_{n-1}) &= 4s_n + 2s_{n-1} \\
 6(g_n - g_{n-1}) &= 2(2s_n + s_{n-1}) \\
 3(g_n - g_{n-1}) &= 2s_n + s_{n-1}
 \end{aligned}$$

sumando las condiciones anteriores al sistema de ecuaciones lineales del spline cúbico de interpolación, obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & & \\ \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & a_{n-1} & d_{n-1} & 1 - a_{n-1} & \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 3(g_2 - g_1) \\
 b_n &= 3(g_n - g_{n-1})
 \end{aligned}$$

Un aspecto que nosotros no hemos tratado aquí es el error que se comete cuando interpolamos valores de una función  $\mathbf{g}$  mediante un spline cúbico  $\mathbf{f}$ . Este error depende también de las condiciones de frontera que hayamos escogido para construir  $\mathbf{f}$ .

En las siguientes figuras se ilustran ejemplos en donde se aplica spline cúbico natural.

A las funciones,

$$g(x) = x_+^0 = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

|       |        |       |       |        |
|-------|--------|-------|-------|--------|
| x     | -2     | -1    | 0     | 2      |
| g(x)  | 0      | 0     | 1     | 1      |
| g'(x) | -0,304 | 0,609 | 0,869 | -0,435 |

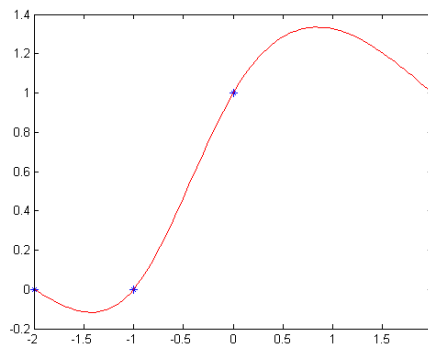


Figura 4.5: Spline Cúbico natural que interpola la función  $g(x) = x_+^0$

$$g(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

|       |        |       |       |        |        |
|-------|--------|-------|-------|--------|--------|
| x     | -3     | -1    | 0     | 1      | 3      |
| g(x)  | ,1     | ,5    | 1     | ,5     | ,1     |
| g'(x) | -0,000 | 0,600 | 0,000 | -0,600 | -0,000 |

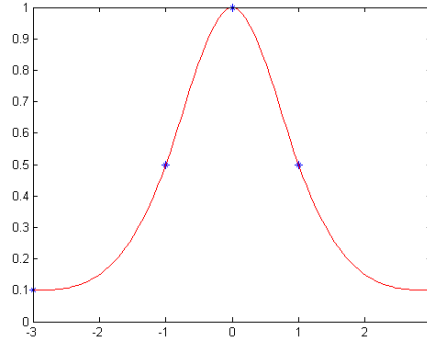


Figura 4.6: Spline Cúbico natural que interpola la función  $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$

## 4.4. Método de Integración basado en la interpolación por splines cúbicas

El método de integración que se presenta en esta sección se basa en la interpolación por spline cúbicos obtenida en la sección 4.2, ec.(4.6) para un conjunto de datos de la forma  $(x_i, g_i)$ , para el caso que se esta analizando se tienen  $N+1$  puntos de la forma  $(x_n, f'(x_n))$  donde  $n = 0, \dots, N$ , entonces se usara la ec.(4.6) la cual tiene la siguiente forma:

$$P_i(x) = f'_i \frac{(x - x_{i+1})^2(2(x - x_i) + (x_{i+1} - x_i))}{(x_{i+1} - x_i)^3} + f'_{i+1} \frac{(x - x_i)^2(3(x_{i+1} - x_i) + 2(x - x))}{(x_{i+1} - x_i)^3} + s'_i \frac{(x - x_{i+1})^2(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} - s'_{i+1} \frac{(x_i - x)^2(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \quad (4.11)$$

donde los  $s'_i$  se calculan usando la relación de recurrencia  $a_i s'_{i-1} + d_i s'_i(1 - a_i) s'_{i+1}$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

donde:

$$d_i = 2$$

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)}$$

$$b_i = 3 \frac{(x_{i+1} - x_i)(f'_i - f'_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)} + \frac{(x_i - x_{i-1})(f'_{i+1} - f'_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i)}$$

Si se supone que los  $s'_1$  y  $s'_n$  son dados, se obtiene un sistema de  $n-1$  ecuaciones lineales para calcular las  $n-1$  incógnitas, tal como se sigue de la ecuación 4.1. La matriz de este sistema es tridiagonal y diagonalmente dominante, ya que  $d_i = 2$  y  $0 \leq a_i < 1$ , por tanto tiene una solución única. Los valores de  $s'_1$  y  $s'_n$  depende de las condiciones de frontera que se elijan, para el caso del spline cúbico natural las ecuaciones lineales del spline cúbico se escribe en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & & \\ \cdot & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & a_{n-1} & d_{n-1} & 1 - a_{n-1} & \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s'_{n-1} \\ s'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Sean  $(x_n, f'(x_n))$   $n = 0, \dots, N$  los  $N+1$  Nodos y los valores de la derivada. Entre los puntos  $x_n$  y  $x_{n+1}$  se ajusta un polinomio de grado 3, cuyos coeficientes vienen dados por  $s_{n,0}, s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}$ . Cada uno de los polinomios es sólo válido en el intervalo en el que se ha definido. El conjunto de los  $N$  polinomios se escribe como:

$$S(x) = \begin{cases} S_1 = s_{1,0} + s_{1,1}(x - x_1) + s_{1,2}(x - x_1)^2 + s_{1,3}(x - x_1)^3 & \text{con } x \in I_1 = \{x_0, x_1\} \\ S_2 = s_{2,0} + s_{2,1}(x - x_2) + s_{2,2}(x - x_2)^2 + s_{2,3}(x - x_2)^3 & \text{con } x \in I_2 = \{x_1, x_2\} \\ S_3 = s_{3,0} + s_{3,1}(x - x_3) + s_{3,2}(x - x_3)^2 + s_{3,3}(x - x_3)^3 & \text{con } x \in I_3 = \{x_2, x_3\} \\ S_4 = s_{4,0} + s_{4,1}(x - x_4) + s_{4,2}(x - x_4)^2 + s_{4,3}(x - x_4)^3 & \text{con } x \in I_4 = \{x_3, x_4\} \\ \vdots & \vdots \\ S_n = s_{n,0} + s_{n,1}(x - x_n) + s_{n,2}(x - x_n)^2 + s_{n,3}(x - x_n)^3 & \text{con } x \in I_n = \{x_{n-1}, x_n\} \end{cases}$$

donde  $x \in [x_{n-1}, x_n]$  y  $n = 0, \dots, N - 2$

Para calcular los coeficientes  $s_{n,m}$  se imponen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
S(x_n) &= f'(x_n) && \text{para } n = 0, \dots, N-1 \\
S_n(x_{n+1}) &= S_{n+1}(x_{n+1}) && \text{para } n = 0, \dots, N-3 \\
S'_n(x_{n+1}) &= S'_{n+1}(x_{n+1}) && \text{para } n = 0, \dots, N-3 \\
S''_n(x_{n+1}) &= S''_{n+1}(x_{n+1}) && \text{para } n = 0, \dots, N-3
\end{aligned}$$

La expresión anterior indica que los splines cúbicos deben de pasar por los puntos  $x_n$ . El resto de las expresiones anteriores hacen referencia a la continuidad de los polinomios cúbicos, de sus primeras y segundas derivadas. De esta manera se pretende que el conjunto de polinomios cúbicos  $S(x)$  sea una función lo más suave posible. De las ecuaciones presentadas se obtiene un sistema de  $N+3(N-2) = 4N-6$  ecuaciones en las que aparecen  $4N-4$  incógnitas correspondientes a los coeficientes  $s_{n,m}$ .

Una forma más conveniente de expresar el spline cúbico  $\mathbf{f}(x)$ , es escribir cada polinomio  $P_i(x)$  que define a  $\mathbf{f}(x)$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  a través de la serie de Taylor alrededor de  $x_i$ . Tomando los primeros terminos en la serie de Taylor se tiene:

$$P_i(x) = s_{n,0} + s_{n,1}(x - x_i) + s_{n,2} \frac{(x - x_i)^2}{2!} + s_{n,3} \frac{(x - x_i)^3}{3!}$$

Se prueba que los coeficientes de  $P_i(x)$  se obtienen a partir de la ec.(4.6) la cual se obtuvo a partir de la interpolación con Spline Cúbico de Hermite.

Primero probaremos que

$$P_i(x_i) = f'_i := s_{n,0}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_i) &= f'_i \frac{(x_i - x_{i+1})^2(2(x_i - x_i) + (x_{i+1} - x_i))}{(x_{i+1} - x_i)^3} + f'_{i+1} \frac{(x_i - x_i)^2(3(x_{i+1} - x_i) + 2(x_i - x))}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\
&\quad + s'_i \frac{(x_i - x_{i+1})^2(x_i - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} + s'_{i+1} \frac{(x_i - x_i)^2(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}
\end{aligned}$$



$$P_i(x_i) = f'_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{(x_{i+1} - x_i)^3}$$

$$P_i(x_i) = f'_i$$

Ahora se probara que

$$P'_i(x_i) = s'_i := s_{n,1}$$

derivamos la ec.(4.1) y evaluamos en  $x_i$  se obtiene:

$$\begin{aligned} P'_i(x_i) &= -f'_i \frac{6(x_i - x_i)(x_i - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^3} + f'_{i+1} \frac{6(x_i - x_i)(x_i - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ &+ s'_i \frac{(x_{i+1} + 2x_i - 3x_i)(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} + s'_{i+1} \frac{(-2)(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_i) - (x_i - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_i(x_i) &= f'_i \frac{6(x_{i+1} - x_i)(0)}{(x_{i+1} - x_i)^3} + f'_{i+1} \frac{6(x_{i+1} - x_i)(0)}{(x_{i+1} - x_i)^3} \\ &+ s'_i \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} + s'_{i+1} \frac{(-2)(x_{i+1} - x_i)(0) - (0)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$P'_i(x_i) = s'_i$$

y ahora por la propiedad de continuidad de la segunda derivada y de la misma forma derivando 2 veces la ec.(4.1)

$$P''_i(x) = 6 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)(x_{i+1} + x_i - 2x)}{(x_{i+1} - x_i)^3} - 2s'_i \frac{(2x_{i+1} + x_i - 3x)}{(x_{i+1} - x_i)^2} - 2s'_{i+1} \frac{(2x_i + x_{i+1} - 3x)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Evaluando  $x = x_i$

$$P''_i(x_i) = 6 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)(x_{i+1} + x_i - 2x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3} - 2s'_i \frac{(2x_{i+1} + x_i - 3x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} - 2s'_{i+1} \frac{(2x_i + x_{i+1} - 3x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$P_i''(x_i) = 6 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3} - 4s'_i \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} - 2s'_{i+1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$P_i''(x_i) = -\frac{2}{x_{i+1} - x_i} \left( -\frac{3(f'_{i+1} - f'_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + 2s'_i + s'_{i+1} \right)$$

$$P_i''(x_i) = -\frac{2}{x_{i+1} - x_i} (2s'_i + s'_{i+1} - 3f'[x_i, x_{i+1}] := s_{n,2})$$

Por último derivando 3 veces las ec.(4.1) se obtiene

$$P_i'''(x) = -12 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3} + 6 \frac{s'_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} + 6 \frac{s'_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

$$P_i'''(x) = -12 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3} + 6 \frac{(s'_i + s'_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

Evaluando en  $x = x_i$

$$P_i'''(x_i) = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)^2} ((s'_i + s'_{i+1}) - 2 \frac{(f'_{i+1} - f'_i)}{(x_{i+1} - x_i)})$$

$$P_i'''(x) = P_i'''(x_i) = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)^2} (s'_i + s'_{i+1} - 2f'[x_i, x_{i+1}]) := s_{n,3}$$

Ahora el Spline Cúbico del conjunto de datos:

|      |        |        |        |        |         |        |
|------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| $x$  | $x_0$  | $x_1$  | $x_2$  | $x_3$  | $\dots$ | $x_n$  |
| $f'$ | $f'_0$ | $f'_1$ | $f'_2$ | $f'_3$ | $\dots$ | $f'_n$ |

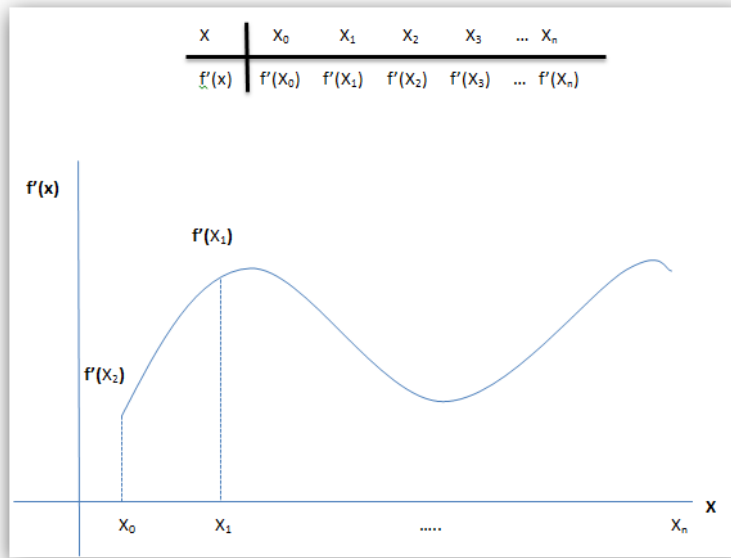


Figura 4.7: Gráfico de los Datos

Así, el método de Spline Cúbico recursiva se escribe mediante la expresión:

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= 0 \\
 f(x_1) &= \int_{x_0}^{x_1} S'_1(x) dx = s_{1,0}(x_1 - x_0) + s_{1,1} \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} + s_{1,2} \frac{(x_1 - x_0)^3}{3} + s_{1,3} \frac{(x_1 - x_0)^4}{4} \\
 f(x_2) &= f(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} S'_2(x) dx = s_{2,0}(x_2 - x_1) + s_{2,1} \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + s_{2,2} \frac{(x_2 - x_1)^3}{3} + \\
 &\quad + s_{2,3} \frac{(x_2 - x_1)^4}{4} \\
 &\vdots = \vdots \\
 f(x_n) &= f(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} S'_n(x) dx = s_{n,0}(x_n - x_{n-1}) + s_{n,1} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} + s_{n,2} \frac{(x_n - x_{n-1})^3}{3} + \\
 &\quad + s_{n,3} \frac{(x_n - x_{n-1})^4}{4}
 \end{aligned}$$

Resumiendo, al igual que los métodos de Newton-Cotes, el método basado en las splines cúbicas presenta dos importantes características:

- 
- Puede considerarse como un método recursivo, es decir, la función a obtener se evalúa a partir de la función en puntos anteriores y de la derivada conocida en todo su dominio como se indican en (4.7) mediante los coeficientes  $s_{n,m}$ .
  - Emplea una interpolación de la derivada a integrar.

---

# Capítulo 5

## Evaluación de los sistemas propuestos

### Introducción

En este capítulo se evalúan los métodos propuestos mencionados en los capítulos anteriores desde el punto de vista de reconocimiento de cada uno de los modelos. Una parte de los elementos que forman la base de datos se muestra en el anexo A.

### 5.1. Resultados obtenidos de la etapa de comparación

Una vez estudiados los diferentes métodos de integración, realizaremos una primera comparación mostrando los resultados obtenidos al aplicarlos sobre una derivada generada analíticamente y sin ruido adicional. Para dicha comparación de los diferentes métodos se ha calculado el error producido mediante la diferencia entre  $f(x)$  generada analíticamente y la función obtenida tras la integración numérica.

La función  $f(x)$  generada analíticamente consiste en una función lineal sumada a una función periódica, en el intervalo ( $x \in [0, 1]$  o  $x \in [0.5, 1]$ ), más dos gaussianas

centradas en las coordenadas  $x = 0.65$  y  $x = 0.85$ . Además, en el primer intervalo se suman 20 gaussianas de signo y centro determinados:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin[1,8\pi(x - 0,5)] & \text{si } 0 < x < 0,5 \\ x + \sin[1,6\pi] & \text{si } 0,5 < x < 1 \end{cases} - 0,17 \exp\left[-\frac{(x - 0,65)^2}{10^{-4}}\right] + \quad (5.1)$$

$$+ 0,17 \exp\left[-\frac{(x - 0,85)^2}{10^{-4}}\right] + \sum_{j=0}^{20} \text{sign}_j \exp\left[-\frac{(x - x_j)^2}{10^{-4}}\right]$$

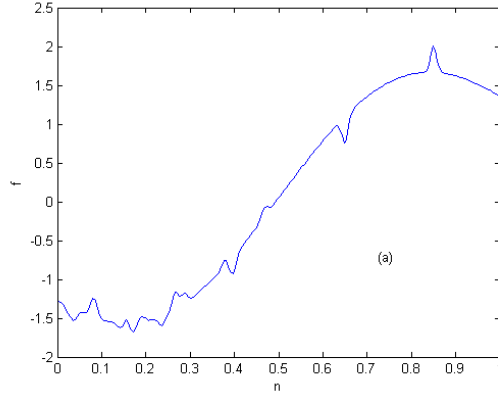


Figura 5.1: (a) Función  $f$

y la derivada viene dada por la expresión:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 1,8\cos[1,8\pi(x - 0,5)] & \text{si } 0 < x < 0,5 \\ 1 + 1,6\cos[1,6\pi] & \text{si } 0,5 < x < 1 \end{cases} - \frac{0,34(x - 0,65)}{10^{-4}} \exp\left[-\frac{(x - 0,65)^2}{10^{-4}}\right] + \quad (5.2)$$

$$+ \frac{0,34(x - 0,85)}{10^{-4}} \exp\left[-\frac{(x - 0,85)^2}{10^{-4}}\right] - 2 \sum_{j=0}^{20} \text{sign}_j \frac{(x - x_j)}{10^{-4}} \exp\left[-\frac{(x - x_j)^2}{10^{-4}}\right]$$

donde  $x$  se define en el intervalo  $[0, 1]$ . El signo y el centro de las 20 gaussianas se han calculado inicialmente mediante:

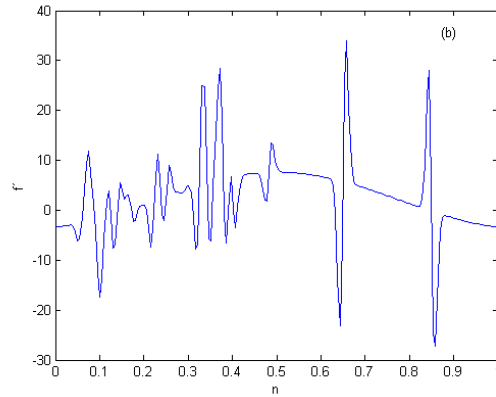


Figura 5.2: (b) su derivada  $f$  generadas analíticamente y evaluadas en  $N = 200$  puntos.

$$sign_j = 0,3\left[\left(\frac{\text{número aleatorio entre } 0 \text{ y } N+1}{N}\right) - 0,5\right] \quad (5.3)$$

$$x_j = 0,5\left(\frac{\text{número aleatorio entre } 0 \text{ y } N+1}{N}\right)$$

En las figuras 5.3,5.5,5.7 y 5.9 se representa la diferencia entre la función original y la función integrada en cada uno de los ( $N = 200$ ).

Para comparar los métodos presentados se calcula el error cuadrático medio (rms) entre la función generada analíticamente  $f^0$  y la obtenida mediante integración  $f^i$ :

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f_i^0 - (f_i^i + cte))^2}, \quad (5.4)$$

donde  $cte$  es la constante de integración. En los métodos de integración se calcula la función primitiva salvo una constante de integración  $cte$  que es indeterminada; se busca aquella que minimiza el error (5.4). Así, se calcula la derivada del error respecto al término  $cte$  y anulándola se obtiene:

$$\frac{\partial rms}{\partial cte} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f_i^0 - (f_i^i + cte)) \quad (5.5)$$

A partir de la expresión (5.5) se aísla el término  $cte$ :

$$cte = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f_i^0 - f_i^i), \quad (5.6)$$

obteniendo la constante de integración que minimiza el error producido en la operación.

En las figuras 5.3 se representa la diferencia entre la función original aplicando la regla del trapecio y la función integrada en cada uno de los puntos ( $N = 200$ ). También se representa el error cuadrático medio.

De las figuras 5.3 se observa que en el primer intervalo de la función en la que se suman las veinte gaussianas la diferencia entre la función original y la integrada es mucho más importante que en el segundo intervalo. Aunque en este último se nota la presencia de las dos gaussianas centradas en  $n = 130$  y  $n = 170$  (se aprecia mejor en la figura 5.3 y 5.9 correspondientes a la regla del Trapecio y a la interpolación por splines cúbicas). Debido a las 20 gaussianas del primer intervalo, se puede pensar como un intervalo en que la derivada presenta una frecuencia alta.



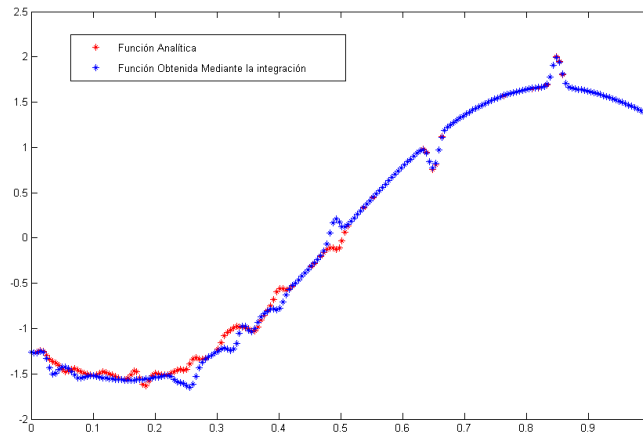


Figura 5.3: Comparación entre la función generada analíticamente y la obtenida mediante integración con la regla del trapecio

Así, el error obtenido en dicho intervalo es mayor tal y como se observa en las figuras 5.3 y 5.9 La regla del Trapecio y el método basado en las splines cúbicas ofrecen una diferencia menor entre la función integrada y la original en el segundo intervalo, intervalo en que se considera que la función es de baja frecuencia; aunque cabe destacar la diferencia obtenida justo en la zona donde se generan las dos gaussianas demostrando nuevamente que tales métodos no son los más precisos para funciones de alta frecuencia. Sin embargo, métodos como la regla de Simpson y de  $3/8$  de Simpson ofrecen una elevada diferencia entre la función integrada y la original debido a la propagación del error del primer intervalo y a la presencia de las dos gaussianas. De esta manera, los métodos de Newton-Cotes no son muy precisos a la hora de determinar una función de alta frecuencia.

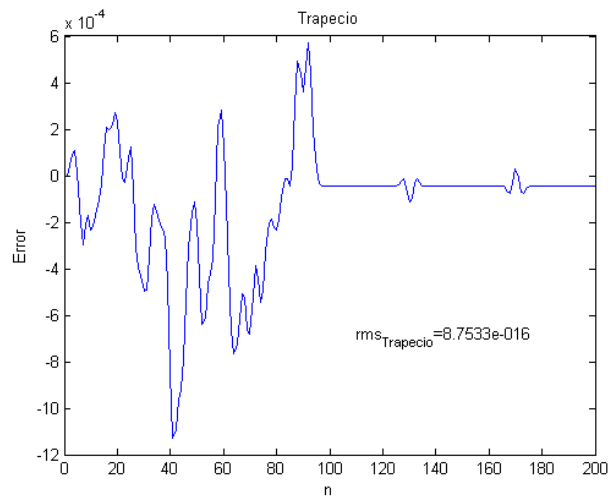


Figura 5.4: Error obtenido mediante el Método de la regla del trapecio

Los resultados de la comparación de los métodos trabajados se indican en las figuras 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 indican que el método más preciso de los presentados es el basado en el que utiliza la interpolación por splines cúbicas, este resultado concuerda con la teoría presentada anteriormente ya que el método se basa en la interpolación más precisa posible. El segundo método más preciso es el de la Regla del Trapecio que ofrece resultados similares entre él y splines en bajas frecuencias, finalmente, los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 de Simpson ofrecen resultados similares entre sí (error del orden de  $10^{-3}$ ).

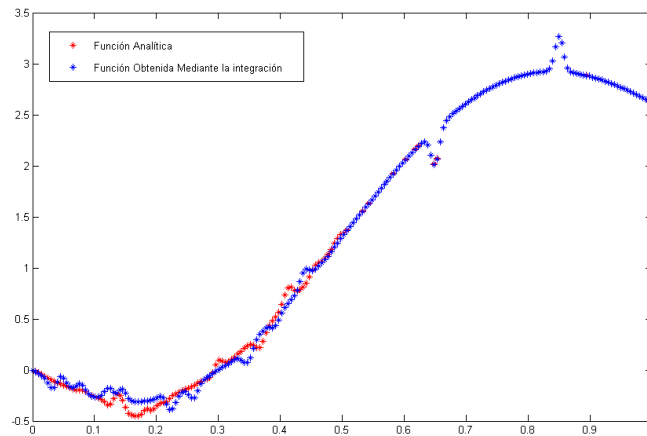


Figura 5.5: Comparación entre la función generada analíticamente y la obtenida mediante integración con el Método de Simpson 1/3

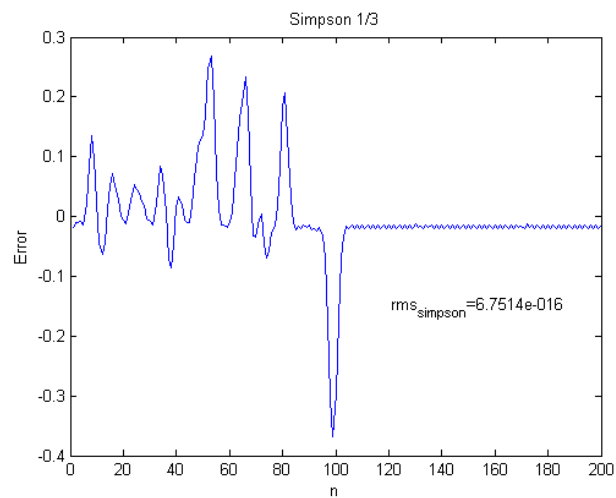


Figura 5.6: Error obtenido mediante el Método de Simpson 1/3

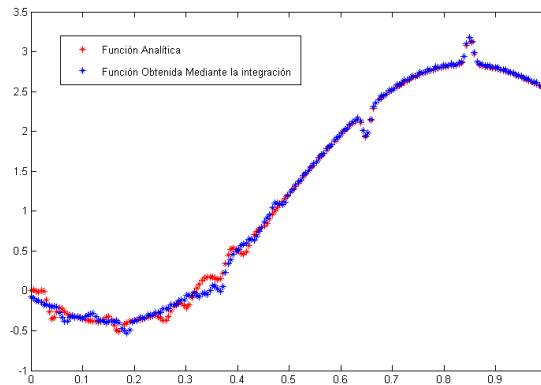


Figura 5.7: Comparación entre la función generada analíticamente y la obtenida mediante integración con el Método de Simpson 3/8

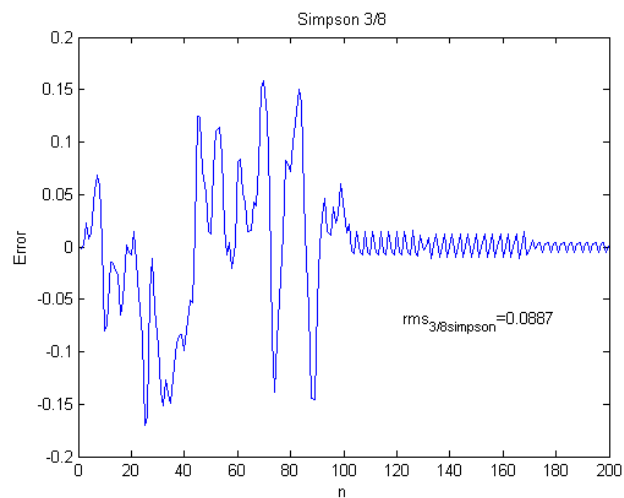


Figura 5.8: Error obtenido mediante el Método de Simpson 3/8

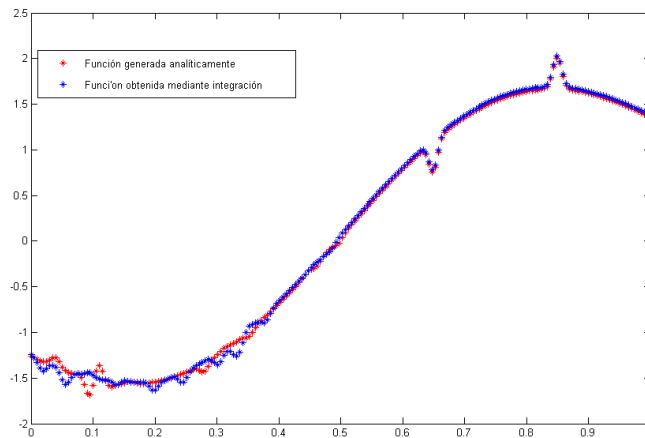


Figura 5.9: Comparación entre la función generada analíticamente y la obtenida mediante integración con Spline Cúbico

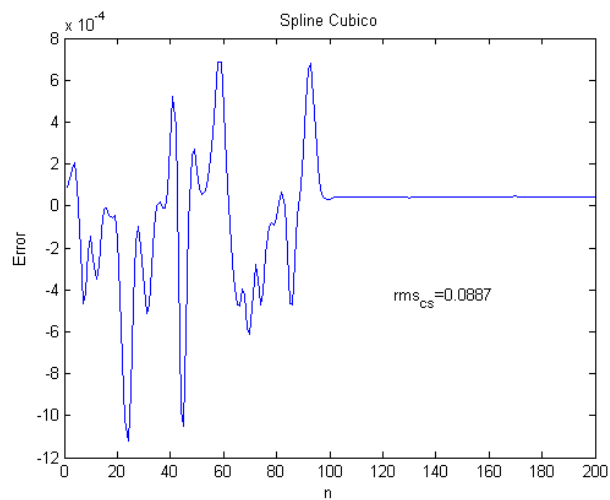


Figura 5.10: Error obtenido mediante la interpolación por Spline Cúbico

---

# Conclusiones

Durante la realización de esta tesis se propusieron varios métodos para la reconstrucción de señales, los métodos extraen puntos o características relevantes de manera similar.

Los resultados presentados en el capítulo 5 indican que el método más preciso de los presentados es el basado en Spline Cúbicos. Este resultado concuerda con la teoría presentada anteriormente ya que el método se basa en la interpolación más precisa posible. El segundo método más preciso es el que utiliza la interpolación por la regla del Trapecio que pertenece a los métodos de Newton-Cotes, estos dos ofrecen una diferencia menor entre la función integrada y la original en el segundo intervalo, aunque cabe destacar la diferencia obtenida justo en la zona donde se generan las dos gaussianas demostrando nuevamente que de tales métodos la regla del Trapecio no es el más preciso para funciones de alta frecuencia a diferencia de Spline Cúbico que se mantiene firme en ambos casos. Sin embargo, métodos como la regla de Simpson y de  $3/8$  de Simpson ofrecen una elevada diferencia entre la función integrada y la original debido a la propagación del error del primer intervalo y a la presencia de las dos gaussianas. De esta manera, los métodos de Newton-Cotes no son muy precisos a la hora de determinar una función de alta frecuencia, esto se afirma debido a que en la simulación las 20 gaussianas del primer intervalo, se puede ver como un intervalo en que la derivada obtenida mediante el proceso de muestreo presenta una frecuencia alta.

---

# Apéndice A

## Anexo A

En esta sección se muestran los programas realizados en Matlab utilizados en esta tesis.

### Funcion Simpson 3/8

```
clear all
clc
% Extracción y acondicionamiento de datos.
% Se pide el nombre del archivo binario a procesar:
NombreBin=input('Inserte el Nombre del Archivo Binario: ','s');
% Es el canal predeterminado para el motion node.
nchannel = $[9,10]$.
% Importa los datos del archivo binario
data = import_binary(NombreBin, 'float32', nchannel); % Nombre
                                                    % del archivo
                                                    % binario

h=1/60 % Periodo de muestreo(inverso de la frecuencia de muestreo)
t=0:h:h*(length(data(:,8))-1); %Tiempo
w=data(:,8); % Función original
tetha=zeros(1, length(w)); % Inicialización de la integral
                                % para ocupar memoria.
                                % ocupar memoria.

% Se piden la condición inicial:
```

```

CondIn= input('Condición_Inicial=', 's');
% Integración Simpson 3/8
% Aquí se integra el conjunto de datos almacenados en 'w'

tetha(1)=str2double(CondIn); % Condicion inicial
tetha(2)=tetha(1)+(w(1)+w(2))*h/2;
tetha(3)=tetha(2)+(w(1)+4*w(2)+w(3))*h/3;
for i=4:1:length(w);
tetha(i)=tetha(i-3)+h*(w(i-3)+3*w(i-2)+3*w(i-1)+(w(i)))*3/8;
end

% Derivada
% Para comprobar la veracidad del programa se añade un método de
% derivación para comparar los datos originales de w con los datos que
% devuelve la derivada de la integral numérica que se almacenarán en
% la variable 'wr'.

for i=1:1:length(w);
if i==1
wr(i)=0;
else
wr(i)=(tetha(i)-tetha(i-1))*60;
end
end

% Gráficas
% En estas gráficas se muestran los datos originales, los de
% integración y la derivada numérica de la integración numérica
% la cual debe ser casi igual que los datos originales para
% comprobar su efectividad.

% DATOS RESULTADO DE LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

figure(1)
p1=plot(t, tetha);
title('Ángulo (grados) vs Tiempo (segundos)')
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
set(p1, 'Color', 'red', 'LineWidth', 2)

```



```

%DATOS ORIGINALES

figure(2)
p2=plot(t,w);
title('ORIGINAL: Velocidad (grados/segundos) vs Tiempo (segundos)')
xlabel('t')
ylabel('f'(t)')
set(p2,'Color','red','LineWidth',2)

%DATOS DE LA DERIVADA DE LA INTEGRACIÓN, QUE DEBEN SER IGUALES
%A LOS ORIGINALES

figure(3)
p3=plot(t,wr);
title('APROXIMACIÓN: Velocidad (grados/segundos) vs Tiempo (segundos)')
xlabel('t')
ylabel('f'(t)')
set(p3,'Color','red','LineWidth',2)

Spline Cubico Natural

% Spline cúbico natural
clear all
x=input(' Dame el valor de los valores de x ');
y=input(' Dame el valor de los valores de y ');
j=input(' Dame el número de puntos por los cuales va a pasar el spline ');
n=length(x);
for i=1:n
d(i)=2;
end
for i=2:n-1
h2(i-1)=x(i)-x(i-1);
end

for i=1:n-1
h1(i)=x(i+1)-x(i);
end
g=zeros(1,length(x));

```

```

    a (n-1)=1;
    for i=2:n-1
    a (i-1)=h1 (i)/(h2 (i-1)+h1 (i));
    end
    g=zeros (1,length (x));
    f (1)=1;
    for i=2:n-1
    f (i)=1-a (i-1);
    end
    g=zeros (1,length (x));
    b (1)=3*((y (2)-y (1))/(x (2)-x (1)));
    b (n)=3*((y (n)-y (n-1))/(x (n)-x (n-1)));
    for i=2:n-1
    b (i)=3*((h1 (i)/h2 (i-1))*((y (i)-y (i-1))/(h2 (i-1)+h1 (i)))+
        (h2 (i-1)/h1 (i))*((y (i+1)-y (i))/(h2 (i-1)+h1 (i))));
    end
    % se obtiene el vector L y U
    n = length (d);
    l = zeros (n,1);
    u = zeros (n,1);
    u (1) = d (1);
    for i=2:n
        l (i) = a (i-1)/u (i-1);
        u (i) = d (i) - l (i)*f (i-1);
    end
    % se obtienen los x (i) para el sistema Lx=b
    n = length (b);
    k = zeros (n,1);
    k (1) = b (1);
    for i=2:n
        k (i) = b (i) - l (i)*k (i-1);
    end
    % solución del sistema de las forma Ax=b por el método LU
    % m son las derivadas que hemos calculado.
    n = length (k);
    m = zeros (n,1);
    m (n) = k (n)/u (n);

```

```

for i=n-1:-1:1
    m (i) = (k (i) - f (i)*m (i+1))/u (i);
end
s=m;
% reconstruir la función teórica con la ayuda de la función experimental
c=linspace (min (x),max (x),j);
dimc=length (c);
for k=1:dimc
    z=c (k);
    i = Locate (x,z);
    p (k)=y (i)+s (i).*(z-x (i))-(2/h1 (i)).*
    (2.*s (i)+s (i+1)-3.*((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))
    .*((z-x (i)).^2/2)+(6/h1 (i)).*(s (i)+s (i+1)-2.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i)))).*((z-x (i)).^3/6);
    % calcula cada uno de los polinomios de la función spline

cubico (i)=((6/h1 (i)).^2).*(s (i)+s (i+1)-2.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))/6;
cuadratico (i)=-(((6/h1 (i)).^2).*(s (i)+s (i+1)-2.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))).*
    (x (i)/2))+(((2/h1 (i)).*(2.*s (i)+s (i+1)-3.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i)))))/2));
lineal (i)=(((6/h1 (i)).^2).*(s (i)+s (i+1)-2.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))).*
    ((x (i).^2)/2))+(((2/h1 (i)).*
    (2.*s (i)+s (i+1)-3.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))).*x (i))+s (i);
independiente (i)=y (i)-(s (i).*x (i))-(((2/h1 (i)).*
    (2.*s (i)+s (i+1)-3.*((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))).*
    ((x (i).^2)/2))-(((6/h1 (i)).^2).*(s (i)+s (i+1)-2.*
    ((y (i+1)-y (i))/(x (i+1)-x (i))))).*((x (i).^3)/6));
end
s %son las derivadas encontradas al resolver el sistema de ecuaciones
cubico % vector que contiene los coeficientes de los términos cúbicos
    % del conjunto de polinomios del spline
cuadratico % vector que contiene los coeficientes de los términos
    % cuadráticos del conjunto de polinomios del spline
lineal % vector que contiene los coeficientes de los términos lineales
    % del conjunto de polinomios del spline

```

```

independiente % vector que contiene los terminos independientes del
                % conjunto de polinomios del spline
plot(x,y, '*',c,p, 'r') % se Gráfica la función teórica (y) y experimental(p)

Método de integración: Trapecio.

clear all
a=input('dame el valor del extremo izquierdo del intervalo: ');
b=input('dame el valor del extremo derecho del intervalo: ');
n=input('dame el numero de subintervalos: ');

h=(b-a)/n;
x=(a:h:b);
y=f1(x);
y1=y(1)*ones(1,length(y));
y=y-y1;
dy=df1(x);
g=zeros(1,length(x));
g(1)=y(1); %condición inicial

for i=2:length(x)
    g(i)=g(i-1)+h/2*(dy(i-1)+dy(i));
end

cte=sum((y-g))/(n+1); %rms es el error cudratico medio
rms=sqrt((sum(y-(g+cte))^2)/(n+1)); % se utiliza criterio de
                                % mínimos cuadrados
m=cte+g; % a la función experimental se le ha agregado la cte obtenida
error=(y-m); % error relativo entre [0,1]
% error_rel=(y-g)./y;
cte
rms

plot(x,y, '*r',x,m, '*b')
figure

nx=1:1:200;
plot(nx, error)

```

Método de integración: Simpson 1/3

```

clear all
a=input('dame el valor del extremo izquierdo del intervalo ');
b=input('dame el valor del extremo derecho del intervalo ');
n=input('dame el numero de subintervalos ');

h=(b-a)/n;

x1=(a:h:a+h);
dy=df1(x1);
% dy1=2.*x1;
% dy1=-sin(x1);
g0=0; %condición inicial
g1=g0+h/2*(sum(dy)); %condición inicial

x=(a:h:b);
y=f1(x);
dy=df1(x);
% y=2+x.^2;
% dy=2.*x;
% y=cos(x);
% dy=-sin(x);
% g=zeros(1,length(x));
y1=y(1)*ones(1,length(y));
y=y-y1;
g(1)=y(1) %condición inicial
g(2)=g1;
for i=3:length(x)

g(i)=g(i-2)+h/3*(dy(i-2)+4.*dy(i-1)+dy(i));
end
cte=sum((y-g))/(n+1);

rms=sqrt((sum(y-(g+cte))^2)/(n+1));
m=cte+g; % a la función experimental se le ha agregado la cte obtenida

error=(y-m);
error

```

```

y
g
rms
plot(x,y,'*r',x,m,'*b')
figure
nx=1:1:200;
plot(nx',error)

```

Método de integración: simpson 3/8

```

clear all
a=input('dame el valor del extremo izquierdo del intervalo ');
b=input('dame el valor del extremo derecho del intervalo ');
n=input('dame el numero de subintervalos ');

h=(b-a)/n;
x1=(a:h:a+h);
% dy1=3.*x1.^2;
% dy1=2.*x1+5.*x1.^4;
dy1=df1(x1);
g0=0; %condición inicial
g1=g0+h/2*(sum(dy1));

x=(a:h:b);
% y=x.^3;
% dy=3.*x.^2;
% y=cos(x);
% dy=-sin(x);
% y=2+x.^2;
% dy=2.*x;
% y=2+x.^2+x.^5;
% dy=2.*x+5.*x.^4;
y=f1(x);
dy=df1(x);

%g=zeros(1,length(x));
y1=y(1)*ones(1,length(y));
y=y-y1;

```

```
g(1)=y(1); % condición inicial
g(2)=g1; % condición inicial
for i=5:length(x)
    g(i-2)=g(i-3)+h/3*(dy(i-4)+4.*dy(i-3)+dy(i-2));

    for i=4:length(x)
        z(i-3)=((3*h)/8).*(dy(i-3)+3.*dy(i-2)+3.*dy(i-1)+dy(i));
        g(i)=g(i-3)+z(i-3);
    end

end

cte=sum((y-g))/(n+1);

rms=sqrt((sum(y-(g+cte))^2)/(n+1));

m=cte+g; % a la función experimental se le ha agregado la cte obtenida

error=(y-m);
error
rms

plot(x,y,'*r',x,m,'*b')
figure
nx=1:1:200;
plot(nx',error)
```

---

# Bibliografía

- [1] Ochoa-Tabares, Juan Carlos; Hernández-Quíntela, Everardo; Ruiz-Quintero, Narly Del Carmen; Naranjo-Tackman, Ramón. Precisión de un sistema de aberrometría Hartmann-Shack, en la evaluación de las aberraciones oculares, Published in Revista Mexicana de Oftalmología.2012; 86 :25-32 - vol.86 núm 01.
- [2] Liang J, Williams DR, Miller DT. Supernormal vision and high-resolution retinal imaging through adaptive optics. J Opt Soc Am (A) 1997;14:2884-92.
- [3] E. Moreno-Barriuso and R. Navarro (2000). "Laser ray tracing versus Hartmann-Shack sensor for measuring optical aberrations in the human eye". JOSA A
- [4] Cudney Bueno, R. S. (2011) Modified Shack-Hartmann sensor made with electrically controlled ferroelectric zone plates. Optics Express. 19(18): 17396-17401 p. doi:10.1364/OE.19.017396 (PA: 101956)
- [5] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," Trans. AIEE, volumen 47, páginas 617-644, abril de 1928.
- [6] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," Proc. Institute of Radio Engineers, volumen 37, no.1, páginas 10-21, enero de 1949.
- [7] FRIES, Bruce y FRIES, Marty. Audio digital práctico. Ed. Anaya Multimedia. 2005. ISBN 84-415-1892-0
- [8] C. de Boor. A practical guide to splines. Springer-Verlag, New York, 1978.



- 
- [9] P. Dierckx, *Curve and surface fitting with splines*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [10] S. Haykin. *Neural Networks, a comprehensive foundation*. IEEE Press, New York, 1994.
- [11] V.N. Vapnik. *The Nature of statistical learning theory*. Statistics for Engineering and Information Science. Springer Verlag, New York, 2000.
- [12] J.H. Friedman. "Multivariate adaptive regression splines," *The annal of Statistics*, tomo 19, n°1, páginas 1-141, 1991
- [13] WATKINSON, John. *Introducción al audio digital*. 2003. ISBN 84-932844-9-1.
- [14] D.L.B. Jupp. "Approximation to data by splines with free knots," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, tomo 15, páginas 328-343, 1978.
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulae, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972. (See Section 25.4.)
- [16] George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. (See Section 5.1.)
- [17] Press, WH; Teukolsky, SA; Vetterling, WT; Flannery, BP (2007), "Section 4.1. Classical Formulas for Equally Spaced Abscissas", *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), New York: Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8
- [18] Josef Stoer and Roland Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1980. (See Section 3.1.)
- [19] K.F.C Yiu, S. Wang, K.L. Teo y A.C. Tsoi. "Nonlinear system modeling via Knot-optimizing B-spline Networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, tomo 12, n°5, páginas 1013-1022, septiembre 2001.

- 
- [20] Pablo Barrera, Victoria Hernández, Claudia Durán, El ABC de los splines, Nivel Elemental, Matemáticas aplicadas, Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana, 1996.
- [21] A. Aubanell, A. Benseny, A. Delshams (1993). Útiles básicos de Cálculo Numérico. Labor/Publicaciones de la UAB.
- [22] Joaquín M. Ortega Aramburu (2002). Introducció a l'Ànlisi Matemàtica (2a edició, catalán). Publicacions de la UAB.
- [23] Burden, R.L., Faires, J.D., Análisis Numérico, Grupo Editorial Iberoamericano, 1985.
- [24] [DAV] Davis Ph.J. Interpolation and Aproximation. Dover, 1975.
- [25] [GAU] Gautschi W. On the Vandermonde and Confluent Vandermonde Matrices. Num.Math. 4 (1962) 117-123.
- [26] [MTH] Heath M.T. SCIENTIFIC COMPUTING: An Introductory Survey. Second Edition. Prentice Hall, Inc., 1989.
- [27] [KMN] Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. McGraw-Hill, 2002.
- [28] [RVL] Rivlin Th.J. An Introduction to the Aproximation of Functions. Dover, 1981.
- [29] [SyB] Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Analysis. Springer-verlag, New York, Inc., 1993.