BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TESIS

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS APLICADO A UN CURSO DE MATEMÁTICAS DE 2DO. DE TELESECUNDARIA

PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARÍA EUGENIA MARTÍNEZ MERINO

DIRECTORAS DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUEBLA SEPTIEMBRE, 2014

A Dios por darme el regalo de la vida.

A mis padres por la motivación y el esfuerzo que me brindaron para superarme.

A mis hijos Diana y David por ser mi inspiración y fortaleza.

A mis familiares que siempre estuvieron para brindarme su apoyo.

A mis maestros y en especial a la Dra. María Araceli Juárez Ramírez y a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por compartirme sus conocimientos y experiencias así como darme la oportunidad de disfrutar de su amistad.

A todos y a cada uno de ellos les dedico esta tesis.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una de las materias en las que los alumnos presentan un rendimiento escolar bajo es matemáticas, a la mayoría de los alumnos se les hace un tanto difícil su aprendizaje. ¿Qué podríamos hacer para mejorar esta situación?

Con base en la reforma educativa y su enfoque formativo, la enseñanza de las matemáticas deja de ser un proceso de transmisión de conocimientos, convirtiéndose en un proceso social y comunicativo. Durante este proceso, los docentes somos los responsables de propiciar en los alumnos actitudes favorables para la vida como son: ser crítico, analítico, colaborativo, etc. También debemos ser un guía para los alumnos, razón por la cual tenemos que examinar nuestra práctica docente y tomar las decisiones correspondientes dependiendo del contexto de la clase. Si tenemos como objetivo mejorar la enseñanza de las matemáticas, debemos promover aprendizajes significativos y diseñar las estrategias cognoscitivas y metacognitivas adecuadas que permitan lograr en los alumnos desarrollar la capacidad de resolver problemas matemáticos.

La mayoría de las veces se ponen ejercicios en el grupo, donde el alumno repite algoritmos acabados de ver y sin ningún contexto, motivo por el cual, los estudiantes no pueden resolver problemas en matemáticas, mostrando desinterés o apatía ya que no perciben la funcionalidad, también influyen el poco tiempo que se le da a la actividad, la evaluación que se aplica reduciéndose a un examen escrito, y los aspectos afectivos y emotivos que se ignoran, como desconfianza en sí mismo y la falta de estímulo externo. Ante esta situación cabe preguntarse ¿Cómo lograr que el profesor genere climas de aprendizaje que desarrollen en el alumno el gusto por las matemáticas?, como señala Callejo (1994). Para responder esta pregunta tendríamos que encontrar la actividad eficaz para que el alumno logre hacer matemáticas aprendiendo y disfrutándolas.

Algunos investigadores han reflexionado sobre el proceso que se sigue al resolver problemas en matemáticas como Polya y Schoenfeld, otros pensadores como Lester y Glaeser proponen la resolución de problemas como una metodología de enseñanza, Callejo retoma estas ideas para sugerir cómo se podría enseñar a resolver problemas siendo éste, un mecanismo para dar respuesta a la pregunta anterior. Intervienen muchos factores en las capacidades de los alumnos para resolver problemas de matemáticas, pero si queremos lograr el objetivo debemos encontrar un camino que nos conduzca a superar las dificultades.

En esta tesis se presenta una alternativa de trabajo en la que se proporcionan elementos y estrategias basadas en la resolución de problemas que ayudan al docente a propiciar aprendizajes significativos. Para mejorar el desempeño escolar propongo el aprendizaje basado en la resolución de problemas (ABP) combinado con la aplicación de sugerencias de investigadores como Polya, Schoenfeld y Callejo entre otros, las cuales serán la base de las reflexiones que se harán en el presente trabajo.

En este trabajo, cuando se hable de “los alumnos” se dará por hecho que se está involucrando tanto a alumnos como a alumnas sin distinción de género, pero que por comodidad se mencionará el término alumnos.

JUSTIFICACIÓN

Se ha venido observando en el rendimiento escolar de los alumnos ciertos problemas comunes en matemáticas como son, principalmente, el poco interés de aprender y muchas dificultades en el proceso de razonamiento. En ocasiones ya se tiene una predisposición negativa hacia su aprendizaje porque se tienen ideas muy arraigadas como:
Las matemáticas no me gustan porque son muy difíciles, me hacen pensar.
Las matemáticas me aburren.
La matemática es la ciencia que quita la paciencia y las ganas de estudiar.

Por ideas como éstas, los docentes tenemos la necesidad de reflexionar sobre nuestra labor diaria y de buscar nuevos caminos que nos conduzcan a favorecer el aprendizaje de las matemáticas en nuestras aulas. Los docentes necesitamos generar climas de aprendizaje significativos dentro de nuestro salón de clase.

Durante el ciclo escolar 2012-2013 se trabajó con un grupo de segundo grado de telesecundaria de 35 alumnos, al realizar el examen de diagnóstico se observó que los resultados obtenidos en matemáticas estaban muy por debajo en comparación con otros ciclos escolares.

Los temas abordados en el examen de diagnóstico fueron los siguientes:

1. Sucesiones, términos de la sucesión.
2. Valor posicional de los números.
3. Valor absoluto.
4. Expresiones de lenguaje común a lenguaje algebraico.
5. Solución de ecuaciones lineales.
6. Fracciones y operaciones básicas.
7. Mediatriz, bisectriz, perpendicularidad.
8. Polígonos regulares, ángulo central de polígonos.
9. Números decimales y operaciones básicas.
10. Áreas y perímetros de cuerpos geométricos.
11. Probabilidad frecuencial.
12. Tanto por ciento.
13. Números positivos, negativos y su localización.
14. Distancias entre dos enteros.
15. Área y perímetro del círculo y circunferencia.
16. Variación proporcional.
17. Operaciones básicas de números con signo.

Es importante conocer el nivel de conocimientos previos de los alumnos a inicio de curso, con base en un examen diagnóstico se planean las estrategias didácticas y las adecuaciones pertinentes que contribuyan a potenciar el aprendizaje de los estudiantes, de esta forma se centra la atención en los educandos y en sus procesos de aprendizaje. Si se conocen cuales son las barreras y los bloqueos se puede buscar el camino adecuado que nos conduzca al aprendizaje significativo. La evaluación diagnóstica consistió de 30 reactivos en un tiempo aproximado de dos horas, se dio tiempo extra para que todos los alumnos tuvieran la oportunidad de responderlo completo, (el examen se presenta en el Apéndice A). Con base en los resultados de este examen surge la necesidad de buscar las estrategias didácticas que nos permitan lograr aprendizajes significativos en el alumno, y como consecuencia, lograr en los jóvenes desarrollar la capacidad de resolver problemas matemáticos, a continuación se presentan los resultados obtenidos de dicha evaluación.

Lista de calificaciones de Evaluación Diagnóstica 2º D
Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas
Ciclo esc. 2012-2013.

Asignatura	**Matemáticas**
Alumno 1	**3.3**
Alumno 2	**2.6**
Alumno 3	**3.9**
Alumno 4	**2.3**
Alumno 5	**2.9**
Alumno 6	**3.9**
Alumno 7	**3.6**
Alumno 8	**1.3**
Alumno 9	**3.3**
Alumno 10	**6.2**
Alumno 11	**1.3**
Alumno 12	**2.6**
Alumno 13	**4.6**
Alumno 14	**5.6**
Alumno 15	**4.2**
Alumno 16	**3.9**
Alumno 17	**3.9**
Alumno 18	**4.2**
Alumno 19	**2.9**
Alumno 20	**5.6**
Alumno 21	**4.6**
Alumno 22	**3.3**
Alumno 23	**6.8**
Alumno 24	**4.5**
Alumno 25	**4.8**
Alumno 26	**6.2**
Alumno 27	**3.3**
Alumno 28	**6.6**
Alumno 29	**4.6**
Alumno 30	**4.6**
Alumno 31	**1.9**
Alumno 32	**2.9**
Alumno 33	**2.3**
Alumno 34	**3.6**
Alumno 35	**0.6**

Figura 1.1

En el listado se observan las calificaciones de cada alumno, los resultados del examen diagnóstico arrojan un rendimiento bajo en matemáticas, sólo cuatro alumnos logran acreditar con calificaciones entre seis y siete, el resto del grupo no acreditó la evaluación.

Gráfica de promedio grupal de Evaluación Diagnóstica 2º D
Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas.
Ciclo escolar 2012-2013

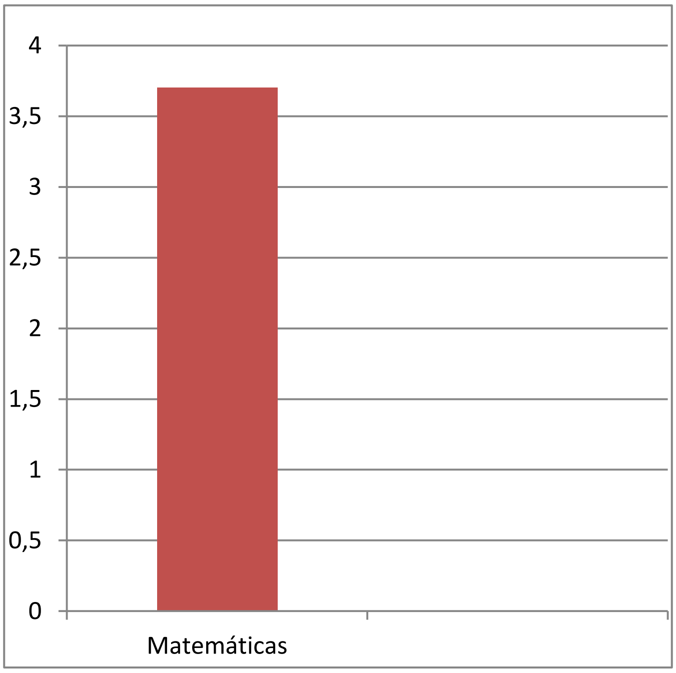


Figura 1.2
La gráfica de interpretación de resultados arroja un promedio grupal de 3.7 en la asignatura de matemáticas lo cual refleja un rezago educativo no deseable para ingresar a segundo de secundaria.

A continuación se presentan los resultados del examen de diagnóstico de la materia de matemáticas en términos de porcentajes de respuestas correctas, esto nos permitirá mostrar con mayor claridad el nivel académico del grupo.

	Intervalos de respuestas correctas	Frecuencia	Fracción	Porcentaje	Calificación alcanzada
	1 - 5	3	3/35	8.57%	(0.33 - 1.6)
	6 - 10	12	12/35	34.28%	(1.9 – 3.3)
	11 - 15	14	14/35	40%	(3.6 – 4.9)
	16 - 20	6	6/35	17.14%	(5.3 – 6.6)
	21 - 25	0	0	0%	(6.9 – 8.3)
	26 - 30	0	0	0%	(8.6 – 10)
totales	Respuestas 30	Alumnos 35	35/35	99.99%	

Gráfica de porcentajes de respuestas correctas.
Evaluación diagnóstica de matemáticas
Ciclo escolar 2012-2013

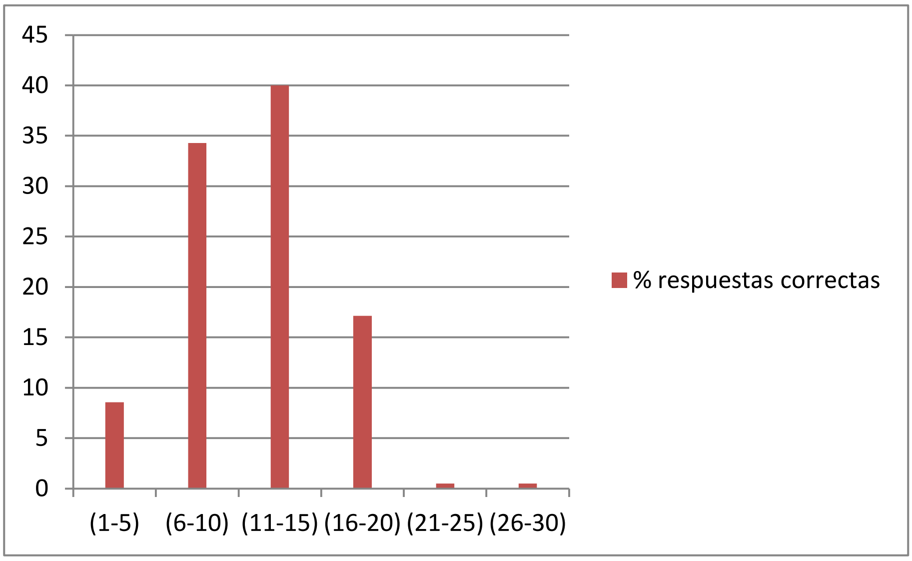


Figura 1.3
El eje horizontal corresponde a los intervalos del número de respuestas correctas y el eje vertical corresponde al porcentaje de alumnos que contestaron correctamente el número de preguntas en el intervalo. La tabla y la gráfica muestran que más del 80% de los alumnos contestaron correctamente de 1 a 15 preguntas lo cual es alarmante porque ya cursaron primero de secundaria y reflejan un nivel académico de primaria.

Si el alumno no reflejó en el examen diagnóstico los conocimientos que debe poseer de primero de secundaria, entonces sí debe contener los conocimientos de primaria. Con base en los contenidos de primaria se puede observar que 1º,3º y 5º son los grado en los que se ven conocimientos nuevos en matemáticas, en sexto grado se repasan los contenidos de toda la primaria (ver contenidos en los libros de texto SEP); esperando que los estudiantes tuvieran los conocimientos del último grado en el que aprendieron conocimientos nuevos se les propusieron problemas de quinto de primaria para resolverlos en clase, se encontró que había confusiones en la base de conocimientos, en otros casos no utilizaban correctamente los algoritmos y en otros más no tenían los conocimientos previos. Con estos resultados era necesario elaborar un plan de trabajo tomando en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, las estrategias de aprendizaje a aplicar, las preferencias de aprendizaje de los alumnos y el contexto en el que se encuentra el grupo.

Resumen

Esta tesis presenta una alternativa de trabajo en la que se proporcionan elementos y estrategias en la resolución de problemas que ayudan al docente a propiciar aprendizajes significativos. Para mejorar el desempeño escolar propongo el aprendizaje basado en la resolución de problemas (ABP) combinado con la aplicación de sugerencias didácticas para optimar la enseñanza de resolución de problemas. Se emplearon algunas sugerencias de investigadores como Polya, Schoenfeld y Callejo. También se consideró a Adams (1986) quien hace referencia a las barreras que impiden la resolución de problemas. Apoyándose en su trabajo se indagó cuales son los orígenes de los bloqueos y planos a los que pertenecen para eliminarlos, ya que afectan el logro de los estándares curriculares. Se buscaron los tiempos fuera de la jornada laboral para trabajar las sugerencias de estos investigadores, la resolución de problemas bien seleccionados permitió el repaso de conceptos, la adquisición de estrategias, el paso de la particularidad a la generalidad, etcétera. También se resolvieron problemas de los exámenes ENLACE con la finalidad de analizar, discutir y reflexionar su resolución en clase.
Se emplearon estrategias didácticas aprendidas en el curso taller "Desarrollo de competencias matemáticas basado en la resolución de problemas", impartido en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. En este curso se compartieron sugerencias didácticas como: favorecer y promover el trabajo en equipo, exposición y discusión de resultados frente a grupo, propiciar el análisis y la reflexión en la resolución (introspección y retrospección), propiciar ambientes de aprendizaje, elaborar preguntas guiadoras que faciliten la búsqueda de patrones y relaciones, reconocer los bloqueos para intervenir con mayor eficacia en el mejoramiento del aprendizaje, fomentar la retroalimentación en estrategias de enseñanza, todas ellas con el objetivo de que los estudiantes estén en condiciones de mejorar el manejo de conceptos, desarrollar sus estrategias en la resolución, y apoyar al docente a fortalecer su labor diaria. También se buscó el apoyo de los padres para el cumplimiento de las actividades fuera de clase y determinar los tiempos extras para realizar el trabajo. Considerando las teorías de los investigadores se aplicaron estrategias para controlar y/o eliminar aquellos sentimientos y emociones que afectan en forma negativa el proceso de enseñanza aprendizaje, como sugiere Mc. Leod (1992).
La formalidad al utilizar las sugerencias didácticas de los diferentes autores otorga un carácter sistemático y directivo permitiendo la introspección y retrospección de la labor docente y del propio aprendizaje del alumno. Con base en las estrategias aplicadas se lograron eliminar barreras de aprendizaje permitiendo mejorar el rendimiento escolar, esto se reflejó en la evaluación final del grupo ya que se mejoraron las calificaciones del bloque V en comparación con las del examen de diagnóstico. También se observa en los comentarios que hicieron los alumnos acerca del curso, de los cuales se presentan algunos ejemplos al final del capítulo 3.

La tesis está diseñada en tres partes. En el capítulo 1 se presenta el marco teórico el cual le da sustento al presente trabajo, se muestran elementos, sugerencias y estrategias que serán la base de las reflexiones para el aprendizaje basado en la resolución de problemas. En el capítulo 2 se describen algunos problemas y actividades en los que se hace referencia a cómo y dónde se aplicaron las sugerencias. En el capítulo 3 se presentan evidencias de las actividades realizadas con los alumnos y de los logros alcanzados. Al final del trabajo se presentan apéndices, en los que se encuentra un resumen en orden cronológico con las aportaciones didácticas de los autores que se mencionan en la tesis con la intención de aportar material de consulta rápida al lector; También se presenta para consulta rápida una lista de actitudes, habilidades y valores que pueden contribuir a mejorar el quehacer matemático y que se espera se desarrollen durante los procesos de resolución de problemas, estas habilidades, actitudes y valores son citadas por los autores.

CAPÍTULO 1

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para desarrollar el plan estratégico empezaremos por aclarar ciertos términos que cotidianamente pueden ser sinónimos pero que en la didáctica es necesario aclarar. En matemáticas ¿Es lo mismo resolver un problema que resolver un ejercicio?
Para la mayoría de los alumnos es lo mismo, pero para los docentes en servicio ¿también es lo mismo? hay que aclarar estos conceptos citando algunos autores ya que de ello dependen las estrategias que se apliquen en el aula y los logros a alcanzar.

1.1 PROBLEMA O EJERCICIO

El concepto de problema es muy utilizado en el ámbito de la educación matemática, con este concepto se pueden designar cuestiones de diferente naturaleza a las que deben responder los alumnos, en el problema se plantean actividades con distintas finalidades, al resolverlo el alumno aplica diferentes conocimientos, habilidades y capacidades propias de las matemáticas.
El proceso de resolver problemas también se ha analizado desde otros enfoques como:

a) Psicológico: donde se analiza el sujeto que resuelve y los procesos mentales implicados en la resolución.
b) Curricular: Analiza el papel que juegan los problemas en la enseñanza de las matemáticas.
c) Matemático: Analizan qué es un problema.
d) Didáctico: Analiza cómo se enseña a resolver problemas.

En el contexto escolar se entiende a los problemas como una situación sencilla a diferencia de los problemas que se dan en el trabajo de grandes matemáticos e investigaciones profesionales, en este sentido Polya (1981) propone una clasificación de los problemas con base en los <u>conocimientos</u>, en las <u>experiencias previas y en el contexto</u>, los clasifica en cuatro tipos de problemas:

1) Problemas donde la regla que hay que aplicar salta a la vista porque acaba de ser estudiada o presentada en clase.
2) Problemas donde hay que elegir la regla a aplicar y que se trabajó recientemente.
3) Problemas en que hay que elegir una combinación de reglas previamente estudiadas.
4) Problemas en que hay que investigar, la resolución exige una combinación original de reglas y el uso de razonamientos asertivos.

Strasbourg (1973) dice que a veces se identifica al término problema con las actividades en las que el alumno debe buscar, hacer frente a situaciones nuevas y establecer relaciones, el tiempo de resolución no puede preverse, sin embargo es muy importante la inversión de energía y de afectividad.
También se aclarará el concepto de problema rutinario (ejercicio) y problema no rutinario (problema) con base en diferentes aspectos:

Comportamiento que debe seguir el alumno para llegar a la solución.

- Ejercicio: basta aplicar mecánicamente conocimientos ya adquiridos.
- Problemas: es necesario que el alumno se familiarice con la situación, busque, relacione, elabore una estrategia que le conduzca a la resolución.

Objetivo que persigue el profesor.

- Ejercicio: el profesor propone la actividad para que el alumno aplique conocimientos de forma rutinaria.
- Problema: el profesor propone investigación.

El tiempo a emplear.

- Ejercicio: el tiempo es previsible en la resolución.
- Problema: el tiempo es difícil de estimar en la resolución, puede durar un rato o meses.

Dimensión afectiva.

- Ejercicio: No suele suscitar emociones importantes.
- Problema: Supone una carga afectiva importante.

Gaulin (1982) afirma que la diferencia entre un verdadero problema y un ejercicio es una cuestión relativa, lo que puede ser para una persona un problema no rutinario para otra puede ser un simple ejercicio, todo depende de los conocimientos previos y experiencias anteriores de los alumnos

De Bono (1972) señala que a veces puede suceder que la situación es un problema por el punto de vista con el que se ve, si el enfoque es diferente pueda ser que el camino a seguir en la resolución sea evidente y el problema deje de existir. Callejo (1994) señala en su libro *Un club matemático*, que para los autores anteriores el concepto de "problema" es algo relativo porque atiende aspectos subjetivos y de contexto.

En lo sucesivo el término problema se referirá a una situación matemática en la que al resolverla se aplicarán diferentes conocimientos, habilidades y capacidades propias de las matemáticas, se adoptará el término problema como lo definieron los diferentes autores porque de esta manera se reflexiona en el proceso de aprendizaje. Cabe preguntarse ahora ¿Cómo resolver un problema?, ¿Habrá etapas o fases para resolver un problema?, ¿Habrá algún método para hacerlo de manera eficaz?

Para dar una respuesta a las preguntas se revisarán los trabajos de algunos autores ya que necesitamos conocer que características consideran que tienen los problemas en matemáticas, eso nos daría una idea de cómo deberíamos abordarlos.

1.2 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ALGUNOS MATEMÁTICOS.

Varios son los investigadores que han abordado el tema de resolución de problemas en matemáticas, algunos con similitudes y otros desde diferentes enfoques, a continuación se citan algunos de ellos.

1.2.1 ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA POR WALLAS (1926).

Wallas (1926) en su libro *El arte del pensamiento* presentó uno de los primeros modelos en el proceso creativo concibiéndolo bajo la óptica de considerar la **creatividad como la resolución del problema y la necesidad de una formación intelectual para resolver problemas,** fue de los primeros en realizar el quiebre con los estudios de creatividad que suponían el origen divino o místico de la misma, operacionalizó y sistematizó el proceso creativo en 4 etapas, su enfoque es psicológico pero se puede aplicar a cualquier rama de las ciencias por lo que Callejo (1994) en su libro *Un club matemático para la diversidad* retoma las sugerencias para la resolución de problemas matemáticos, las etapas son las siguientes:

1) Información o preparación.
2) Incubación.
3) Inspiración.
4) Resolución.

<u>Información o preparación</u>: En esta etapa se busca comprender de manera global la situación del problema para buscar posibles estrategias de resolución (es mejor contar con varias opciones para resolver), dentro de estas estrategias se pueden manejar casos particulares, casos límite, análogos, etc. Algunas técnicas pueden ayudar como reformular el problema, hacer diferentes representaciones gráficas de la situación, descomponer o recomponer la situación, cambiar la función de los elementos; En esta etapa también pueden servir de guía las estrategias heurísticas de Polya (1972) *Cómo plantear y resolver problemas* (3ª. reimpresión), las cuales son a su juicio "naturales, simples, triviales y surgen del sentido común", estas estrategias Callejo (1994) las resume de la siguiente manera:

Estrategias heurísticas de Polya (p. 27).

1. El problema, ¿es semejante a otro que ya conoces?, ¿cómo se resuelven estos?, ¿alguna idea te podría servir?
2. Imagina un problema más fácil para empezar y resuélvelo. Luego intenta aplicar el método de resolución al problema propuesto.
3. Intenta con casos particulares, ¿te dan una pista sobre la posible solución?
4. Haz un dibujo o una representación gráfica de la situación.
5. ¿Puedes elegir una buena notación para pasar del lenguaje común al matemático? de tal forma que puedas manejar mejor las relaciones expresadas en el problema.
6. Supón el problema resuelto, ¿cómo se relaciona la situación de partida con la situación final?
7. ¿El problema presenta alguna simetría o regularidad?
8. ¿El caso general es más sencillo que este particular?

<u>Incubación</u>: (Callejo, 1994) Wallas (1926) afirma en esta etapa que el inconsciente y el semiconsciente continúan trabajando con el problema incubando las ideas que se activaron en

la etapa anterior. Esta fase permite a la mente inconsciente trabajar sin restricciones en la información recibida, la creatividad está asociada vitalmente a la incubación. Saber incubar la información por el cerebro es un arte que dominan los creadores en todos los campos, las ideas de Wallas (1926) influyeron en los espléndidos modelos educativos británicos que aún hoy en día siguen dando frutos.

Inspiración: Esta etapa es el momento de recompensa porque conduce a la elaboración de una estrategia de resolución, esta estrategia consta de 4 procesos simultáneos:

1. La formalización de la situación en un contexto matemático. (puede ser o no la misma en que se planteó el problema, es decir, si el problema se planteó de manera algebraica se puede resolver de manera geométrica) uno de los bloqueos en la resolución es que si se presenta el problema de manera algebraica queremos resolverlo forzosamente de manera algebraica.
2. El empleo de un modo de razonamiento. (Inducción, deducción, analogías, reducción al absurdo, progresivo, regresivo, por casos, etc.)
3. La representación gráfica de la situación o la elección de la notación adecuada para manejar de forma operativa los datos y las relaciones del problema.
4. La aplicación de una o de varias heurísticas.

Polya (1966) en el libro *Matemáticas y razonamiento plausible* compara a esta fase con el quehacer de una ciencia experimental, es decir, afirma que ante una situación nuestra primera respuesta es una intuición, esta se perfecciona mediante analogías y observación, el resultado del trabajo matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por intuición.

Verificación: El proceso de verificación de la solución se hace por medio de razonamientos demostrativos, en esta etapa se confirma o no la inspiración (la estrategia de resolución) por lo que la parte afectiva del resolutor está muy involucrada.

1.2.2 PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR POLYA (1972).

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

La primera etapa es de familiarización con el problema y su objetivo es provocar la inspiración mediante la concepción de un plan, una vez desarrollado será o no confirmado al examinar la solución obtenida, las cuatro fases no siguen necesariamente este orden.
Polya (1972) tuvo la inquietud de que si se podía de manera general formular procedimientos de resolución para elegir el más apropiado, a lo que él mismo encontró que no hay una regla precisa pero que si hay indicaciones que pueden ser útiles, éstas indicaciones las obtuvo de su experiencia, a las que llamó, **principios generales** basados en procesos psicológicos:

1. Principio de economía y principio de ausencia de fronteras, el principio establece por un lado que no hay que ir más allá del problema planteado sin necesidad, por otro lado afirma que no se pueden delimitar los conocimientos que habrá que emplear.

2. Principio de perseverancia y de variedad, el principio dice que no se debe abandonar una estrategia antes de que nos aporte algo útil, sin embargo si es necesario explorar varios caminos de resolución, es mejor tener varias opciones que una.
3. Principios de preferencia, nos dice que son las materias relacionadas con el problema, los conocimientos disponibles y los problemas auxiliares.

1.3 EL ESPÍRITU MATEMÁTICO

1.3.1 POINCARÉ (1932) Y EL ESPÍRITU MATEMÁTICO

En sus investigaciones Poincaré (1932) describe dos formas de espíritu matemático, el lógico y el intuitivo de forma siguiente:

1. Lógico a los que por naturaleza ocupan más la lógica, les llaman analistas, avanzan paso a paso sin dejar nada al azar.

2. Intuitivo a los que por naturaleza ocupan más la intuición, les llaman geómetras.

También afirma que la materia o área de conocimiento no impone el método lógico o intuitivo en el resolutor.

1.3.2 HADAMARD (1975) Y EL ESPÍRITU MATEMÁTICO

No está totalmente de acuerdo con Poincaré (1932) pues afirma que la lógica interviene después de una intuición, también señala que el trabajo de familiarización, incubación e iluminación en la resolución de un problema tiene analogías con muchos investigadores en matemáticas, pero que sus representaciones concretas no son siempre las mismas, algunas representaciones pueden dar al pensamiento un curso más lógico, y otras un curso más intuitivo porque dependen de su naturaleza y de la forma en que influyen en el trabajo mental, estas representaciones son utilizadas por el espíritu para fijar combinaciones de ideas, y de ellas hacer una síntesis. Para Hadamard (1975) en los espíritus lógicos la zona donde las ideas se combinan es bastante superficial, el pensamiento está bastante dirigido y las representaciones auxiliares son más bien palabras; en los espíritus intuitivos la zona en que las ideas se combinan es profunda, la dispersión de ideas grande y las representaciones auxiliares son imágenes. El método de la resolución del problema no se impone uno sobre el otro sino que por naturaleza ya tienen un estilo propio llamándoles analistas a los lógicos y geómetras a los intuitivos, es la naturaleza de su espíritu el que los hace lógicos o intuitivos.

1.3.3 KRUTETSKII (1976) Y LOS ESPÍRITUS MATEMÁTICOS

Krutetskii (1976) afirmó haber distinguido tres tipos de espíritu matemático en los alumnos que son:

1. El analítico
2. El geométrico
3. El armónico que es la combinación de ambos.

<u>Analítico</u>: Determinó que en este espíritu predomina la componente lógico-verbal sobre la visual-pictórica, el resolutor trabaja con esquemas abstractos incluso en problemas donde sugieren conceptos de tipo visual.
<u>Geométrico</u>: En este espíritu predomina la componente visual-pictórica sobre la lógica verbal, aquí se interpreta y expresa visualmente relaciones matemáticas abstractas, se utilizan representaciones gráficas para resolver.
<u>Armónico</u>: Krutetskii (1976) afirma que hay una combinación de ambos componentes aunque puede primar una sobre la otra.

1.3.4 HALMOS (1991) Y LA AFECTIVIDAD

En sus investigaciones Halmos (1991) firma que la afectividad juega un papel muy importante en el proceso de resolución de problemas, puede ser que estos sentimientos impulsen la búsqueda de la solución o que bloquen el proceso, durante la familiarización se puede experimentar tensión la cual puede provocar interés o ansiedad; en la inspiración se tienen sentimientos positivos según el éxito de dicho plan y en la verificación se puede tener placer o frustración según se tenga o no el éxito alcanzado.

Callejo (1994) comenta sobre las investigaciones realizadas por los autores antes señalados lo siguiente:
“Teniendo como referencia las teorías de los autores podemos concluir que existen muchos aspectos del conocimiento y de la conducta que intervienen en la resolución de problemas matemáticos como: delimitar el campo de conocimiento a explorar, seleccionar los conocimientos a aplicar, seleccionar la estrategia de trabajo, seleccionar el estilo a usar en la resolución, adoptar actitudes durante el proceso, descubrir qué tipo de espíritu se tiene y los sentimientos que se provocan en las diferentes etapas de resolución,”.

1.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

A continuación se analizará la resolución de problemas desde el punto de vista didáctico pero enfocado en tres planos, también se abordarán algunos bloqueos relacionados con estos tres planos.

1) El cognitivo.
2) El afectivo
3) El contexto cultural

Plano cognitivo: En la resolución de un problema el resolutor accede a los conocimientos que posee y los relaciona de algún modo con la situación planteada para que de cierta manera lo utilice; Aquí se tienen dos tipos de conocimientos los cuales son "base de conocimientos" que son los conocimientos que están en la memoria del sujeto listos para ser utilizados, y los "metaconocimientos" que son los conocimientos acerca de los conocimientos de que disponemos.

Flawell, (1976) introdujo el término de metaconocimientos, sobre este Garofalo y Lester (1985) consideraron dos aspectos relacionados entre sí.

A. Los conocimientos y creencias acerca de los fenómenos cognitivos.
B. La regulación y el control de los actos cognitivos.

Los conocimientos y creencias acerca de los fenómenos cognitivos: Este aspecto se refiere a lo que una persona conoce de sus propias habilidades y recursos cognitivos en relación a la ejecución de tareas, también se distinguen tres categorías según la metacognición se relacione con el sujeto que son los conocimiento que una persona tiene sobre sus conocimientos, capacidades y limitaciones (por ejemplo el sujeto puede creer que resuelve mejor los problemas que puede representar de manera gráfica), en la categoría de la tarea son los conocimientos que el sujeto tiene sobre la ejecución de una tarea (por ejemplo el sujeto conoce el grado de dificultad que presenta el problema), y en la categoría de estrategia son los conocimientos de estrategias cognitivas empleadas para abordar y realizar tareas (es decir cuándo deben usarse y cómo deben aplicarse las estrategias).

La regulación y el control de los actos cognitivos: Este aspecto se refiere a las decisiones que se toman para comprender y resolver el problema, esto implica seleccionar contenidos, planificar las acciones, seleccionar estrategias apropiadas, tomar decisiones para mejorar el plan, evaluar la validez del plan, revisar o abandonar estrategias inadecuadas.

La metacognición también fue abordada por Schoenfeld (1987) en ella distinguió tres aspectos que son:

1. Los conocimientos acerca de los propios procesos del pensamiento.
2. El control o autorregulación.
3. Creencias e intuiciones del punto de vista matemático sobre uno mismo, sobre el contexto, sobre el tema, sobre las matemáticas, que determinan la conducta de un individuo.

Schoenfeld (1987) establece diferencias de conducta entre un principiante y un experto al momento de resolver problemas, estas diferencias se sitúan en un plano metacognitivo, es decir, la diferencia está en la manera en que usan sus conocimientos, en la forma de dirigir sus esfuerzos y en la toma de decisiones durante el proceso de resolución.

Varios autores opinan que si se pueden mejorar las destrezas metacognitivas, ya sea aumentando el grado de autoconocimiento, de explicitar los procesos o de tomar conciencia del proceso; para mejorar la metacognición Schoenfeld (1987) señaló algunas estrategias didácticas que son las siguientes:

1. Revisar, analizar y valorar el proceso de resolución de un problema en relación al comportamiento de los expertos (es decir el resolutor debe saber explicar que está haciendo, porqué lo está haciendo, de qué manera puede ayudar en la resolución del problema y después comparar su comportamiento con el del experto).
2. El profesor resuelve un problema delante de los alumnos, durante el proceso el profesor busca explicitar sus procesos mentales, sus decisiones, sus bloqueos, se presenta como un modelo de conducta metacognitiva.
3. El profesor resuelve un problema con toda la clase, durante la resolución el profesor hace el papel de moderador y regulador del proceso, invita a la discusión.

4. Los alumnos resuelven problemas en equipo, el profesor debe intervenir sin dar pistas, sin sugerir soluciones, haciendo preguntas sobre lo que piensan realizar con el fin de tomar conciencia de lo que están haciendo; si se hace explícito lo implícito sobre control y evaluación del pensamiento se puede reflexionar sobre dichos mecanismos, evaluarlos, cambiarlos, flexibilizarlos y adaptarlos.

Para Schoenfeld (1987) la metareflexión hace emerger los fenómenos de la mente que se producen en el inconsciente y en el semiconsciente para pasarlo de un plano implícito a uno explícito, este hábito permite conocer las capacidades y límites de nuestra mente, Schoenfeld (1987) también señala que las técnicas para tomar conciencia de los procesos del pensamiento son la autoreflexión o introspección que se da en el curso del proceso y la reflexión o retrospección que se da al concluir el proceso, los registros de estos procesos los llamó protocolos que son informes escritos durante o al final de la resolución, los protocolos permiten apreciar la forma de abordar el problema, la forma de atacarlo, los cambios de rumbo, la revisión sobre el proceso, comparar el proceso con el modo de proceder de los expertos, siendo esta forma la mejor técnica de que se dispone para acceder a los procesos del pensamiento.

Plano afectivo: La afectividad en la resolución de problemas es muy importante como lo señalan algunos investigadores, Callejo (1994) comenta que George Polya no lo ha hecho de manera explícita en sus obras de resolución de problemas, pero si lo considera de forma implícita y los psicólogos sólo lo han hecho en el plano cognitivo; Mc Leod y Adams (1989) elaboraron modelos de enseñanza tomando en cuenta el plano afectivo en el proceso de resolución.

Mc Leod, (1992) en sus investigaciones considera tres aspectos de la afectividad en la resolución de problemas las cuales se relacionan entre sí y con la cognición, como ya se trataron las emociones en el plano afectivo sólo se hablará de las otras dos, los tres aspectos de la afectividad según Mc Leod (1992) son:

- Las emociones.
- Las creencias.
- Las actitudes.

Las creencias: Mc Leod dice que hay quienes consideran a las matemáticas como una disciplina abstracta, de razón, de formalismo, de objetividad, de justificación, de racionalidad, de lo general, lo teórico, de trabajo mental, este enfoque pone a las matemáticas como una ciencia hecha que se presenta de forma lógico-deductiva y no como una ciencia por hacer. Desde otro punto de vista Ernest (1991) considera a las matemáticas como una ciencia que se identifica con lo concreto, la emotividad, lo informal, lo subjetivo, el descubrimiento, lo utilitario, la intuición, lo particular, la experimentación, de esta forma las matemáticas se presentan por medio de un proceso experimental-inductivo. Estas ideas junto con la forma de cómo aprendemos matemáticas nos van formando creencias sobre esta ciencia que condicionan la manera de afrontar la resolución de problemas, para Mc Leod, (1992) estas creencias se pueden clasificar en:

1. Creencias sobre las matemáticas.
2. Creencias sobre uno mismo.
3. Creencias sobre la enseñanza de las matemáticas.
4. Creencias sobre el contexto escolar.

Al respecto Callejo (1992) comenta que en la resolución de problemas si el alumno sólo resuelve ejercicios, sus ideas sobre la actividad matemática no le ayudarán a resolver verdaderos problemas, entre estas ideas que no ayudan destacan las siguientes:

- La actividad matemática se resuelve en pocos minutos si se conocen los conceptos y destrezas presentadas por el profesor; si el alumno se queda "en blanco" durante un tiempo tiene la impresión de perder el tiempo.
- Para la resolución del problema se busca una estrategia y se profundiza en esa dirección, si no se tiene éxito se abandona el trabajo.
- La solución de un problema se acaba cuando se encuentra la solución.
- El resultado es más importante que el proceso, si no se encuentra la solución entonces se ha fracasado.

Estas creencias dan lugar a comportamientos que no ayudan a los estudiantes a intentar resolver problemas con éxito, por las siguientes razones:

- Si los alumnos piensan que el problema se resuelve en pocos minutos y no se encuentra la solución entonces se sentirán desanimados y lo abandonarán, recordemos que Polya (1958) nos habla del principio de perseverancia y Strasbourg (1973) nos habla del tiempo no previsto para la resolución del problema.
- Si el alumno cree que la solución de un problema sólo requiere aplicación directa y automática de saberes y habilidades, invertirá más tiempo en hacer que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hace y sobre para que le sirve lo que hace; el conocimiento adquirido no se guardará en la memoria de manera general.

- Si los alumnos no son capaces de revisar el camino seguido y consideran que un problema es una cuestión cerrada (es decir si encontré la solución se acabó el problema) no le sacarán al proceso todo el provecho posible, por ejemplo, pueden generalizar resultados, buscar problemas análogos o buscar patrones de comportamiento en los problemas.

Las actitudes: Serrano (1989) menciona que una actitud es una predisposición positiva o negativa que determina las intenciones de una persona e influye en su comportamiento. Las actitudes tienen:

Una componente cognitiva que se manifiesta en la creencia que acompaña a dicha actitud.

Una componente afectiva que se manifiesta en sentimientos de aceptación o rechazo.

Una componente intencional, esta presenta una tendencia a un cierto tipo de comportamiento.

La definición de Serrano (1989) es válida para cualquier actividad; si se trata de matemáticas se distinguen dos categorías:

1. Actitud hacia las matemáticas.
2. Actitudes matemáticas.

Las actitudes hacia las matemáticas se refieren a la valoración y el aprecio que le damos a esta disciplina, al interés por la materia y por su aprendizaje, se manifiesta más la componente afectiva que la cognitiva por ejemplo se puede reflejar el interés, la satisfacción, la curiosidad, la valoración, etc.

Las actitudes matemáticas comprenden el manejo de las capacidades cognitivas generales resaltando el componente cognitivo, se refiere al modo de utilizar capacidades como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, tener una actitud positiva hacia la matemática y hacia el entrenamiento de tareas matemáticas complejas es fundamental para iniciar a los alumnos en la resolución de problemas, también es bueno formularse pregunta, permanecer abierto a cualquier idea que pueda surgir pero al mismo tiempo mantener un espíritu crítico ante posibles soluciones y considerar el carácter objetivo del razonamiento demostrativo en matemáticas. Para que estos comportamientos sean considerados como actitudes se debe tomar en cuenta el plano afectivo que debe caracterizarlos, es decir, debemos distinguir entre lo que el sujeto es capaz de hacer (capacidad) y lo que prefiere hacer (actitud).

Contexto-cultural: El proceso de enseñanza de las matemáticas no se puede estudiar desligado del medio cultural, social e institucional en que se tiene lugar; La educación matemática formal se da en una institución educativa y se rige por leyes que son diferentes a las de un contexto habitual; Al resolver problemas se busca que el alumno desarrolle actitudes como predisposición mental y hábitos intelectuales deseables para ejercitar las matemáticas, están ligados tres aspectos al contexto y son:

1. Etnomatemáticas. Son las matemáticas presentes en cualquier cultura humana.
2. Pragmática del cuestionamiento escolar.
3. Inculturación matemática. Son valores y actitudes matemáticas compartidas por la comunidad matemática como perseverancia, espíritu reflexivo, trabajo colaborativo, etc.

Pragmática del cuestionamiento escolar: Adda (1985) ha señalado que no se puede hacer un estudio didáctico de las respuestas de los alumnos sin tener en cuenta el contexto desde donde se pregunta, también nos explica que hay una diferencia entre las cuestiones habituales y las cuestiones matemáticas escolares, algunas de estas diferencias son:

1. Cuestionamiento habitual: La pregunta no es absurda y si lo parece se cree que se entendió mal.
2. Cuestionamiento escolar: La pregunta puede ser absurda, no es fácil de contestar.

1. Cuestionamiento habitual: Quien interroga suele ignorar la respuesta y la pregunta puede no tener respuesta.
2. Cuestionamiento escolar: Aunque la pregunta sea difícil seguramente tiene respuesta y el que interroga la conoce.
1. Cuestionamiento habitual: Quien pregunta busca información.
2. Cuestionamiento escolar: De la respuesta depende una evaluación.

1. Cuestionamiento escolar: La pregunta se refiere a nivel escolar, a un programa, donde la mayoría de las veces los datos que se preguntan se deben utilizar todos y son suficientes para encontrar la solución del problema que con frecuencia es única.

Recordemos que en sus trabajos Polya (1981) hace una distinción entre problemas si en el contexto hay o no aplicación de conocimientos previamente enseñados. Adda (1976) también afirma que cuando el esquema habitual de enseñanza del profesor es comenzar explicando conceptos o procedimientos, ilustrarlos con algunos ejemplos, luego propone problemas de ejercitación y también plantea actividades de recapitulación, con este tipo de actitudes los alumnos se ahorran el esfuerzo de tener que elegir los conocimientos que tienen que aplicar, esto genera fenómenos parásitos, algunos ejemplos de estos esquemas de enseñanza son:

1. Asociar automáticamente un cierto tipo de cuestiones aparentemente análogas con un algoritmo.
2. Asociar un problema con el contexto en que se propone, tratando de aplicar lo último que se ha aprendido.
3. Suponer una gradación de dificultad cuando se ponen varias cuestiones sucesivas o un problema con varios apartados.

1.4.1 SCHOENFELD Y LA INCULTURACIÓN MATEMÁTICA

Schoenfeld (1992) designó el término de inculturación a las formas propias de proceder del matemático, también afirma que el alumno debe ser inducido en ciertos hábitos y actitudes matemáticas como la perseverancia en el trabajo, el interés, la motivación, la flexibilidad, el espíritu reflexivo y crítico, la apertura en la forma de percibir los problemas, la valoración positiva de las matemáticas, su papel en la formación intelectual, como herramienta en la resolución de problemas, el espíritu de búsqueda, de investigación, de cuestionamiento, etc.

1.4.2 BLOQUEOS

Durante el proceso de resolución de problemas también surgen bloqueos u obstáculos que impiden encontrar el camino hacia la solución. Adams (1986) nos dice que estos bloqueos también tienen su origen en el plano cognitivo, afectivo y de contexto, a continuación se mencionan:

Bloqueos de origen cognitivo: De acuerdo a la teoría de Adams (1986) estos se clasifican en tres tipos:

1. Perceptivos.
2. Uso de un lenguaje inadecuado.
3. Rigidez mental.

Bloqueos perceptivos. Estos bloqueos impiden percibir de forma clara el problema y se pueden presentar de varias formas como por ejemplo:

- Clasificando el problema dentro de un cierto tipo determinado que se resuelve de cierta forma.
- A la investigación realizada para resolver el problema se le agregan más condiciones de las que plantea el enunciado.
- Se experimenta dificultad para visualizar la resolución de un problema desde diferentes enfoques y así poder contar con diversas maneras de resolución.
- Incapacidad para percibir cosas que habitualmente se ignoran como figuras superpuestas etc.

El uso de un lenguaje inadecuado. Este bloqueo impide formalizar la situación planteada en un enunciado de la forma más operativa posible.
Rigidez mental. Ésta impide la flexibilidad de pensamiento necesaria para cambiar de estrategia o para modificarla si es necesario durante el proceso de resolución.

Bloqueo de origen afectivo. Adams (1986) opina que estos bloqueos se pueden manifestar como:

- Temor a situaciones de riesgo.
- Desconfianza en las propias capacidades de resolución.
- Dificultad para soportar incertidumbre, esta se presenta en el proceso de resolución.
- Excesivo juicio crítico.
- Incapacidad para incubar ideas donde el semiconsciente y el inconsciente trabajan con los conocimientos que se activaron en la etapa de familiarización.
- Falta de interés o entusiasmo excesivo por el problema.
- Ansiedad por terminar pronto o conocer la solución.

Bloqueos de origen contexto-cultural. Están presentes en ideas como:

- La fantasía y la reflexión son una pérdida de tiempo.
- Los juegos son cosa de niños.
- Resolver problemas es cosa seria y el sentido del humor esta fuera de lugar la razón, la lógica, las cifras, la utilidad y lo práctico son "buenos"; los sentimientos, la intuición, los juicios cualitativos, el placer "son malos" o por:
- Buscar la respuesta del problema.
- Distracciones.
- Falta de estímulo externo.

Callejo (1994) comenta que con base en las observaciones de los investigadores mencionados y, desde el punto de vista de la didáctica, para resolver un problema es necesario: relacionar la "base de conocimientos" con los "metaconocimientos", afrontar la resolución con las actitudes matemáticas adecuadas, hacer de forma explícita la descripción de los conocimientos implícitos para conocer nuestros límites y capacidades, ya que a lo largo del proceso de resolución se encuentran involucrados bloqueos y emociones. El contexto en que se proponen habitualmente los problemas en las escuelas genera en los estudiantes convicciones que no son las más adecuadas para resolver problemas matemáticos porque se da poco tiempo, se pretende que sólo sepa aplicar el algoritmo y se le da mayor importancia a encontrar el resultado dejando a un lado la posibilidad de encontrar analogías, generalizar situaciones o encontrar patrones, es decir, negamos la posibilidad de hacerlo crítico y reflexivo.

1.5 ¿SE PUEDE ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS?

El punto de vista de la investigación didáctica muestra que proponer a los estudiantes problemas variados, ayudarles a abordar la resolución de problemas de forma adecuada y mostrarles un repertorio de estrategias heurísticas, son condiciones necesarias pero no suficientes para mejorar la habilidad de resolver problemas.
¿Se puede enseñar el arte de descubrir, de elaborar una estrategia original de resolución de un problema? En otras palabras ¿Se puede enseñar la heurística?, hemos visto sugerencias de cómo se pueden mejorar las capacidades y las actitudes matemáticas, esto nos sirve de base para poder afirmar que si se puede aprender a resolver problemas matemáticos.
A continuación se describe una metodología expuesta por Callejo (1994) que trata de desarrollar en los alumnos las predisposiciones mentales y los hábitos intelectuales deseables para resolver problemas y que está centrada en:

1. El desarrollo de los procesos de pensamiento matemático.
2. La reflexión sobre dichos procesos.
3. La comunicación de ideas.

¿SE PUEDE ENSEÑAR LA HEURÍSTICA?

A continuación se mencionan 4 aspectos implicados en favorecer este aprendizaje para tratar de responder esta pregunta.
1. La enseñanza de estrategias heurísticas.

2. El modo de trabajo de los alumnos.
3. La manera de valorar el trabajo de resolución.
4. Las ideas de los alumnos sobre la actividad matemática.

1.5.1 ENSEÑANZA IMPLÍCITA DE HEURÍSTICAS VERSUS ENSEÑANZA EXPLÍCITA DE HEURÍSTICAS

Las investigaciones sobre la enseñanza explícita de heurística han mostrado que puede mejorar la habilidad para resolver problemas, pero también han mostrado que si un estudiante conoce varias estrategias heurísticas le posibilita la resolución del problema, sin embargo, hasta el momento no hay evidencias de que se pueda desarrollar la capacidad de resolver problemas enseñando sólo heurística.
Schoenfeld (1979) afirma que: Encontrar una heurística apropiada no es condición suficiente para resolver bien un problema pero si es condición necesaria, también afirma que si la heurística se enseña en el contexto de una estrategia directiva (es decir reflexionar sobre lo que se está haciendo y de cómo puede ayudar en la resolución del problema) las dificultades para aplicar las estrategia se pueden superar. El modelo basado en la enseñanza explicita de estrategias heurísticas en la resolución de problemas tiene algunos puntos débiles como:

- No toma en cuenta los procesos de tipo metacognitivo presentes en la resolución de problemas (elección, adaptación, aplicación de la estrategia).
- No considera que un problema se puede resolver de distintos modos utilizando diversas estrategias o varias estrategias a la vez, o resolver con una combinación de varias estrategias.
- Enseñar a los alumnos a ejercitarse en una estrategia específica les ahorra el trabajo de elegir estrategias apropiadas para la resolución de diferentes problemas

Varios autores como Polya, Schoenfeld, Freudenthal, Glaeser entre otros se han planteado la pregunta de si se puede enseñar la heurística (arte de elaborar estrategias de resolución de problemas) a lo que contestaremos desde el punto de vista de cada uno.

Freudenthal (1983) denominó “tácticas” a los consejos de Polya diferenciándolas de las estrategias que tienen un comportamiento general en la búsqueda de la solución, Freudenthal (1983) considera que las tácticas se pueden enseñar pero las estrategias difícilmente, su idea acerca de enseñar las estrategias es “una vez resuelto el problema inmediatamente tomar conciencia de la estrategia que se utilizó para que se guarde en la memoria de forma general”, es decir, la estrategia particular después de la reflexión se guarda en la memoria de manera general siendo flexible al momento de volverla a usar; este es el sentido que le da Freudenthal al aprendizaje de la heurística.

Glaeser (1980) afirma que se debe preparar a los estudiantes para que resuelvan problemas variados, esta preparación se vuelve eficaz cuando resuelve más a menudo y más rápido los problemas (investiga, examina, analiza, critica la estrategia, etc.) la preparación del alumno consiste en reflexionar sobre el camino seguido, esto le permite comprender las heurísticas empleadas, la reflexión también muestra una idea de las dificultades y bloqueos durante el proceso.

Al respecto Callejo (1994) nos comenta sobre su club matemático en el que, su forma de trabajo fue proponer a los alumnos problemas variados con la intención de que ellos mismos, al momento de la metareflexión y la reflexión, describan las estrategias heurísticas pasando de lo implícito a lo explícito, lo que permite generalizar la estrategia al guardarla en la memoria, al explicitarlas conoce cómo surgieron las ideas, cuáles fueron las dificultades y los bloqueos encontrados en el proceso.

1.5.2 COMUNICACIÓN DE LOS PROCESOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO VERSUS TRABAJO INDIVIDUAL CON LÁPIZ Y PAPEL.

En algunas ocasiones se manejan ideas como "las matemáticas no se discuten, se aceptan"; "las matemáticas no se hablan, se escriben"; estas ideas reflejan una actitud individualizada de lápiz y papel haciendo a un lado la posibilidad del trabajo en equipo, la reflexión y el análisis de grupo, también hace a un lado el fomento de las actitudes matemáticas. Es importante la comunicación del pensamiento matemático para aprender a resolver problemas por las siguientes razones.

1. Porque una de las condiciones básicas para que se produzcan aprendizajes en procesos complejos como la resolución de problemas es propiciar climas de libertad y confianza para que los alumnos expresen sus ideas.
2. Porque conocer mejor el funcionamiento de la mente de otras personas nos permite mejorar la habilidad para resolver problemas porque se pueden descubrir nuevas formas de aproximarse, percibir o de atacar el problema; nos permite constatar que los otros también tienen bloqueos, vacilaciones, fallos y esto debilita el miedo a preguntar, expresarse o equivocarse.
3. Porque tratar de convencer al otro de que una conjetura es cierta es una forma de experimentar la demostración en el dominio matemático.

Para favorecer la comunicación de los alumnos en la resolución de problemas es necesario ir introduciendo un lenguaje básico, para que puedan manejar conceptos como "conjetura", "demostración", "contraejemplo", para que empleen las denominaciones de algunas estrategias heurísticas como "suponer el problema resuelto", "buscar pautas y regularidades", "resolver un problema más sencillo" o de diversos tipos de razonamiento en matemáticas como deductivo, inductivo, por casos, por analogía, regresivo, por inducción, por reducción al absurdo, etc.

Al respecto Callejo (1994) afirma que es necesario que el alumno obtenga un vocabulario progresivo que le permita expresarse de forma clara, precisa y correcta sobre los procesos del pensamiento matemático; también se debe favorecer el trabajo en equipo para propiciar y fomentar las actitudes matemáticas necesarias, se debe fomentar la puesta en común y la discusión de ideas como medios de explicitar heurísticas, bloqueos, intuiciones y formas de percibir problemas.

1.5.3 PROCESOS VERSUS PRODUCTOS.

En las escuelas la actividad matemática se plantea en términos de "productos" porque el alumno debe encontrar la solución correcta aplicando el algoritmo deseado, pero como señala Wallas (1926) la resolución del problema es un proceso complejo que requiere un trabajo serio de familiarización, de búsqueda y de elección de estrategias, las cuales no necesariamente conducen a la solución, es decir, el alumno puede comprender el problema, concebir la estrategia válida y no obtener el resultado, para valorar este proceso es necesario tener una traza del mismo, emplear más tiempo y atención, así como enfocarse menos a la evaluación de un resultado.

1.6 Propuesta metodológica para trabajar la resolución de problemas por Callejo (1994).

Tomando en cuenta las propuestas de los diferentes investigadores señalados, Callejo (1994) propone un modelo para la enseñanza de problemas matemáticos, su modelo también se basa en las experiencias que tuvo en su club matemático, su propuesta es la siguiente:

1. Proponer problemas con diferente grado de dificultad en los que los conocimientos a aplicar sean sencillos y que se presten a la particularización y a la generalización.
2. Los alumnos registran el proceso de resolución con la mayor cantidad de datos posibles mediante un protocolo escrito.
3. Los alumnos reflexionan sobre el proceso seguido.
4. Se hacen puestas en común y discusiones en grupo para hacer explicitas las heurísticas (ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc.)

Elaboración de protocolo de resolución de problemas

La hoja de resolución se divide en dos columnas, la parte izquierda es borrador de procedimientos y la parte derecha es para explicar las ideas importantes que consideran en la resolución, lo que intentaban hacer y su parecer sobre todo el problema, en la resolución de problemas en grupo, un estudiante hace de secretario registrando el proceso, este protocolo permite la retrospección más fácil e introduce un elemento de control en el proceso.

Reflexión sobre el proceso seguido

Para facilitarlo se sugiere que:

- Los alumnos elaboren protocolos escritos.
- Los alumnos expongan al grupo su proceso y su concepción del mismo.
- Los estudiantes pongan en común los procesos de resolución, analizando las ideas que condujeron a la resolución y analizando los bloqueos que impedían llegar al final.

De esta forma los alumnos se habitúan a la reflexión, al trabajo en equipo y a adoptar actitudes matemáticas.

Trabajo en grupo

En el trabajo en grupo el moderador ayuda a seguir la metodología de trabajo, el secretario toma notas, esto permite la discusión al final de la sesión sobre el proceso seguido, las funciones del moderador son:
Decidir el momento de cambiar de fase en la resolución como por ejemplo exposición de ideas, selección de la estrategia, verificación de la solución.
Impedir la valoración de ideas antes de seguir una estrategia de solución.
Moderar las intervenciones (evitar que hablen varios al mismo tiempo, que se interrumpa a alguien, que se monopolice la palabra).
Proponer el problema al inicio de la sesión y recordarlo en caso de que la atención se desvíe.

Comunicación de ideas

Cuando se trabaja en equipo o en grupo la comunicación de ideas resulta complicada porque requiere de una discusión y de una puesta en común; esta comunicación se puede facilitar de la siguiente manera:
Promover la participación de todos los alumnos, animando a los más pasivos y evitando que se monopolice la palabra.
Impedir que se juzguen las ideas expuestas, si no se está de acuerdo sólo se permite pedir explicaciones.
Evitar que se desechen ideas porque no haya resultados útiles, se trata de profundizar en ellas.
Propiciar el análisis de bloqueos que se presentan en el transcurso de la resolución.
Pidiendo que se generalicen los datos del problema o el resultado obtenido.
El moderador no debe imponer criterios, no debe cortar ni juzgar ideas, debe orientar y desbloquear.

Dificultades para la aplicación de esta propuesta

A lo largo del trabajo se han ido mencionando algunas dificultades o bloqueos que se pueden presentar durante el proceso de resolución desde el punto de vista de algunos investigadores, Callejo (1994) en su propuesta metodológica para trabajar la resolución de problemas también menciona algunas dificultades a las que se enfrentó, las cuales las agrupó en tres apartados:

- Naturaleza de las actividades propuestas.
- Modo de trabajo del alumno.
- Modo de intervención del profesor o profesora.

Naturaleza de las actividades propuestas: Si los alumnos no están habituados a resolver problemas sus ideas sobre la actividad matemática no son las más adecuadas para resolver problemas más complejos, por lo tanto es necesario que sufra un proceso de aculturación (Schoenfeld, 1987) para que vaya asimilando nuevas ideas sobre la actividad matemática.
Modo de trabajo del alumno: Para que esta propuesta de trabajo funcione el alumno debe estar habituado a expresar sus procesos de pensamiento, trabajar en equipo, debatir ideas, para esto hay que crear climas de libertad y confianza para la comunicación, aplazar juicios sobre las ideas que se exponen hasta familiarizarse con las mismas, el moderador debe diversificar los tiempos de comunicación.

Modo de intervención del profesor: El modelo que adopta el profesor conlleva un estilo propio en su actividad como guía del alumno, éste estilo interviene en tres niveles:

- Matemático.
- Didáctico.
- Personal

Nivel matemático: El profesor deberá percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones de los estudiantes al problema, si estas no son buenas debe ayudar al estudiante para que lo sean.

Nivel didáctico: El profesor deberá decidir cuándo intervenir, que sugerencias dar, como desbloquear la situación, cómo conducirla.

Nivel personal: El profesor no podrá planificar siempre de antemano todas las situaciones didácticas que se puedan plantear (por ejemplo las respuestas que se les puedan ocurrir a los alumnos), para resolver esta situación el profesor deberá ir forjando experiencia a fin de incrementar la confianza y seguridad de sus propios recursos personales.

Callejo (1994), después de cuatro años de trabajo, comparte la misma idea de Freudenthal (1983), al decir que se puede aprender a resolver problemas favoreciendo este aprendizaje, pero difícilmente enseñar a resolver problemas, porque la manera en que se aborda la resolución de un problema es algo personal, por lo tanto, sólo se puede ayudar al alumno a descubrir su estilo, sus capacidades y sus limitaciones. Al enseñar las heurísticas no se trata de transmitir a los estudiantes métodos, reglas o trucos, sino de propiciar y fomentar actitudes matemáticas partiendo de su propia experiencia, en su experiencia debe combinar la práctica con una metodología de trabajo, con el análisis, la discusión y la crítica de los procesos de resolución.

En el ambiente escolar hay alumnos que no siempre están motivados por las matemáticas y el rol de los contenidos juega un papel importante en el curso, por lo que la aplicación de esta propuesta es difícil pero posible, sólo hay que aplicar métodos más activos y más inquisitivos en los cuales los alumnos se planteen sus propias preguntas, sus propios problemas, comuniquen sus ideas, discutan y trabajen con actitudes deseables propias de las matemáticas.

CAPÍTULO 2

ORGANIZACIÓN DEL CURSO

En el mes de febrero de 2013 inició el curso taller BUAP-SEP para profesores en servicio, en este curso se compartieron diversas estrategias como la reflexión, el análisis, el trabajo colaborativo, la metareflexión, la comunicación y exposición de ideas entre otras. Con el propósito de mejorar el rendimiento escolar, se encomendó a los docentes que aplicaran en sus aulas las estrategias adquiridas de resolución de problemas matemáticos, y posteriormente, se reflexionó sobre las distintas formas de su aplicación en el salón de clase así como la trascendencia del trabajo realizado en el aula. Este curso-taller es el que inspiró una nueva forma de trabajar con mis alumnos.

Para desarrollar en el estudiante las predisposiciones mentales y las actitudes matemáticas deseables en el grupo del 2º D se fomentó el trabajo colaborativo y la comunicación de ideas, se trabajó en equipos de 5 integrante, los cuales se intercambiaron para cada actividad, se realizó la introspección y retrospección en el proceso de resolución de problemas mediante la elaboración de preguntas guiadoras, las cuales al inicio fueron elaboradas por el docente. Éstas tenían la intención de propiciar el análisis y la reflexión como lo proponen Callejo (1994), Schoenfeld (1985), Mason, Burton, Stacey (1988). Para que el alumno tuviera un modelo de aprendizaje se formuló y adaptó un formato de trabajo que fue sugerido en el curso-taller de matemáticas de la BUAP el cual se organizó de la siguiente manera:

a) Resolución del problema: Escribir todas las exploraciones que contribuyeron o no a la resolución del problema incluyendo cualquier gráfico.
b) Conceptos y procedimientos: Señalar los conocimientos disponibles en la memoria del estudiante que contribuyeron a la solución del problema.
c) Dificultades y errores: Señalar todos los bloqueos a los que se enfrentaron los alumnos, principalmente la base de conocimientos que no recordó al momento de la resolución.
d) Estrategias: Exposiciones frente a grupo para conocer otros enfoques en la resolución de un mismo problema y reflexionar sobre la manera de abordar los problemas, fomentar el respeto para que el alumno se sienta en confianza y se mantenga la motivación, propiciar climas de libertad para reducir temores, conforme avanzó el curso las preguntas guiadoras serían sustituidas por preguntas formuladas por los propios alumnos.

El formato propuesto (ver figura 2.10) es el siguiente:

a) Resolución del problema.
   ¿Qué datos tengo?
   ¿Qué me pide?
   ¿Con qué lo puedo relacionar?
   ¿Qué información puedo ocupar?
   Elabora dibujos o gráficos que te ayuden en la resolución del problema.
   Resuelve el problema
b) Conceptos y procedimientos.
   ¿Qué conocimientos tengo en la memoria que me pueden ayudar con la resolución del problema?
   Enlista los conocimientos y/o procedimientos que utilizaste para la resolución.
c) Dificultades.

¿Qué dificultades surgieron?, por ejemplo: lo que no recordaron, falta de interés en algún integrante del equipo, distracciones, etc.).
¿Cómo puedo resolver las dificultades?

d) Exposiciones frente a grupo (descripción explícita del uso implícito).

Conforme avanzó el curso el formato debía ser sustituido por un formato elaborado por el propio alumno, esto le permitió reflexionar y vislumbrar posibles estrategias de solución. Al seleccionar los problemas propuestos en clase aunado con las preguntas guiadoras y el trabajo en equipo se lograron fomentar algunas actitudes matemáticas como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental y el espíritu crítico; cuando realizaron dibujos o gráficos se fomentaron la creatividad, la imaginación, habilidades en el manejo de instrumentos de medición y el sentido espacial, la exposición de trabajos en clase permitió a los alumnos abrir sus mentes a otras posibilidades de solución, la exposición grupal les dio la posibilidad de reflexionar sobre sus posibles bloqueos adquiriendo más seguridad y confianza en sus próximos trabajos, el docente sólo debe guiar a los alumnos formulándoles preguntas, no dar respuestas ni opiniones sobre el tema. La metodología de trabajo a lo largo del ciclo escolar fue la combinación de (ABP) y el empleo de investigaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas (Callejo, 1994) obteniendo una metodología eficaz pues hubo avances significativos al lograr una retroalimentación solidaria, un cambio notorio en el empleo de argumentos fundamentados y una buena disposición al quehacer matemático.

FORMACIÓN DE EQUIPOS
Formar equipos de 4 o 5 integrantes.
Todos los integrantes del equipo tienen diferente rendimiento escolar.
El alumno con mayor rendimiento escolar debe involucrar al de menor rendimiento.
Todos los integrantes del equipo deben exponer al grupo su trabajo.
El equipo debe formular y/o contestar las preguntas guiadoras para la resolución del problema.

Para lograr el propósito de consolidar la ruta apropiada de mejora y elevar el rendimiento escolar de los alumnos es necesario conocer las metas deseables a alcanzar, por lo que se tomaron en cuenta los Programas de estudio 2011 de Educación secundaria en matemáticas de México, los cuales se basan en el logro de los aprendizajes esperados, estándares curriculares establecidos y en el desarrollo de competencias que le permitan alcanzar el perfil de egreso de segundo de secundaria, estos descriptores de logro serán los referentes para conocer los avances alcanzados en los estudiantes, por lo que a continuación se mencionan.

Estándares curriculares de matemáticas en educación básica.
Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos, se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
2. Forma, espacio y medida.
3. Manejo de la información.
4. Actitudes hacia el estudio de las matemáticas.

Su progresión debe entenderse como:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.

- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo.

Competencias matemáticas en educación básica.
- Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones.
- Comunicar información matemática. Comprenden la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno.
- Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
- Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora (desarrolle la capacidad de elegir adecuadamente las operaciones al resolver un problema, empleo de procedimientos abreviados o atajos, evaluar la pertinencia de los resultados.)

Aprendizajes esperados de matemáticas para segundo de secundaria.

Bloque I
- Resuelve problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.
- Resuelve problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo.
- Resuelve problemas que impliquen el cálculo de porcentajes o cualquier término de la relación: porcentaje = cantidad base por tasa. Inclusive de problemas que requieren de procedimientos recursivos.
- Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples.

Bloque II
- Resuelve problemas aditivos con monomios y polinomios.
- Resuelve problemas en los que sea necesario calcular cualquiera de las variables de las fórmulas para obtener el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Establece relaciones de variación entre dichos términos.

Bloque III
- Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con expresiones algebraicas.
- Justifica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o polígono y utiliza esta propiedad en la resolución de problemas.
- Resuelve problemas que implican usar la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad.
- Lee y comunica información mediante histogramas y gráficas poligonales.

Bloque IV
- Representa sucesiones de números enteros a partir de una regla dada y viceversa.

- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos o negativos.
- Identifica, interpreta y expresa relaciones de proporcionalidad directa o inversa, algebraicamente o mediante tablas y gráficas.
- Resuelve problemas que implican calcular, interpretar y explicar las propiedades de la media y la mediana.

Bloque V

- Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Construye figuras simétricas respecto de un eje e identifica las propiedades de la figura original que se conservan.
- Resuelve problemas que implican determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales.
- Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.

Lo anterior es cita textual y para más detalles se puede consultar en línea en el portal de SEP, como Programas de estudio 2011 guía para el maestro educación básica secundaria matemáticas.

OTROS MATERIALES DE APOYO

Se retomaron los diferentes métodos y estrategias de los autores mencionados como un recurso y no como una receta fácil con pasos a seguir con el objetivo de mejorar el nivel académico de los estudiantes.
Aunado a estas teorías también se auxilió el trabajo de aula con sugerencias de los libros *Series: Herramientas para la evaluación en educación básica* (DGDC, 2012) donde se manifiesta que la evaluación en el contexto del enfoque formativo permite valorar el proceso del aprendizaje concediendo el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, lo cual no se contrapone a lo desarrollado en el capítulo 1. En esta serie de libros se señalan algunas técnicas e instrumentos de evaluación que se aplicaron en el transcurso del ciclo escolar como las siguientes: guía de observación, preguntas sobre el procedimiento, cuadernos de los alumnos, rubricas, pruebas escritas, preguntas guiadoras para retroalimentación, evaluación oral, carpeta del alumno entre otras. Estas ideas presentan muchas analogías con las sugerencias y estrategias didácticas de los autores que se han mencionado como son: el descubrimiento guiado, regulación y control de los actos cognitivos, importancia del producto como del proceso de resolución

Con base en el tema *Motivación, adaptación a la vida, estrés y superación* contenido en el tomo 3 del libro *Psicología educativa* (Klausmeier, H. y Goodwin, W., 1997) y teniendo presente que el alumno está sujeto a experimentar estrés, ansiedad o angustia en el proceso de resolución de problemas, se utilizaron algunas formas de ayuda para superar el estrés como las siguientes:

- Escuchar con respeto de sus limitaciones ya que le brinda sostén y adaptación.
- Ayudarle a pensar en forma positivamente productiva para enfocarse en lo que puede hacer y no en preocuparse por lo que siente.

- Ayudarle a aceptar que puede tener control sobre las consecuencias, lo que hizo ya no lo puede cambiar pero si puede cambiar el presente.
- Ayudarle a relajarse para disminuir la ansiedad y concentrarse en la tarea.

Se aplicaron dos test para que el alumno tuviera una referencia de sí mismo, la reflexionara y con base en sus creencias tomara decisiones en beneficio propio, los test fueron: Test de inteligencia, Test como te ven los demás. Esto gustó mucho al grupo porque entre ellos se cuestionaban y se lograron momentos de reflexión en sus actitudes.
Con base en los resultados obtenidos en el examen diagnóstico se acordó con los alumnos manejar una libreta que tendría por objetivo el desarrollo de habilidades matemáticas, en ella se registrarían los avances de cada alumno durante un ciclo escolar. Al ir resolviendo los problemas matemáticos en clase se fueron aplicando las diferentes heurísticas de los autores señalados.

Figura 2.1
Portada de libreta dedicada a la resolución de problemas de matemáticas rotulada "Habilidades", se elaboró con hojas recicladas y se dio libertad al alumno para elaborar la portada

Los resultados del examen de diagnóstico (capítulo 1 figura 1.3) indicaron que había confusiones en conceptos y procedimientos por lo que la primera estrategia fue aclarar conocimientos de los alumnos que tenían de forma confusa. Para este fin, en el mes de Septiembre se inició el trabajo con el libro del Grupo Macmillan. (2009). *Habilidades 5° primaria*. ed. Castillo y con el libro de Glez. C. Ma. De Lourdes. *Conocimientos y habilidades 6° primaria.* Ed. Seemargs.
Con el fin de mantener motivados a los alumnos, propiciar el interés y desarrollar su espíritu matemático en la resolución de problemas, como lo sugiere Krutetskii (1976), se trabajó con algunos problemas sencillos que captaran la atención del estudiante y propiciaran el análisis de los mismos, ya que el alumno estaba acostumbrado a dar respuestas rápidas sin reflexionar la naturaleza de los problemas. También se usaron problemas con lenguaje matemático, cálculo mental con números enteros y operaciones básicas. Algunos de los problemas con los que se trabajó son las siguientes:

1.-Si en una casa viven 11 hermanos y cada uno tiene una hermana ¿Cuántos son en total?
Respuesta: 12 hermanos.

2.- Sentados en una banca del parque están un niño y un adulto. El pequeño es hijo del adulto, pero el adulto no es papá del niño ¿Cómo es posible eso?
Respuesta: Porque el adulto es la mamá del niño.

3.- Miguel Ángel tiene 5 montones de canicas, Mauricio tiene tres, Sergio cuatro y Juan Carlos 6 montones. ¿Cuántos montones habrá si las juntan todas?
Respuesta: Un montón.

4.- ¿Qué hora es cuando faltan 90 minutos para la una de la tarde?
Respuesta: 11:30 a.m.

5.- Menciona 3 números que si los multiplicas o los sumas entre ellos mismos siempre te da la misma cantidad
Respuesta: 1, 2, 3.

Con este tipo de problemas se fomentó la curiosidad en el alumno y la investigación para poder enfrentarse a situaciones nuevas y establecer relaciones, se buscó motivar la curiosidad del estudiante y estimularlo para que persevere en la resolución del problema como propone Strasbourg (1973). Recordemos que la perseverancia es una de las actitudes matemáticas que también señala Callejo (1994), así mismo Halmos (1991) también menciona que el docente debe propiciar que el alumno experimente sentimientos gratificantes en la resolución del problema para que sean el motor que impulse la búsqueda de soluciones.

ACTIVIDADES: HABILIDADES DEL PENSAMIENTO.
Libro *Habilidades 5º grado de primaria*.
Se formaron equipos de 5 integrantes para la resolución.
Primera actividad.
Tema: seriación
Observa las siguientes series y coloca los números que correspondan al orden establecido.
Respuesta: 9234, 83106, 747954.

Segunda actividad.
Tema: Aritmética.
Coloca los signos de +,-, x, donde convenga para que se den los resultados que se muestran.
(Todas las respuestas de la alumna son correctas)

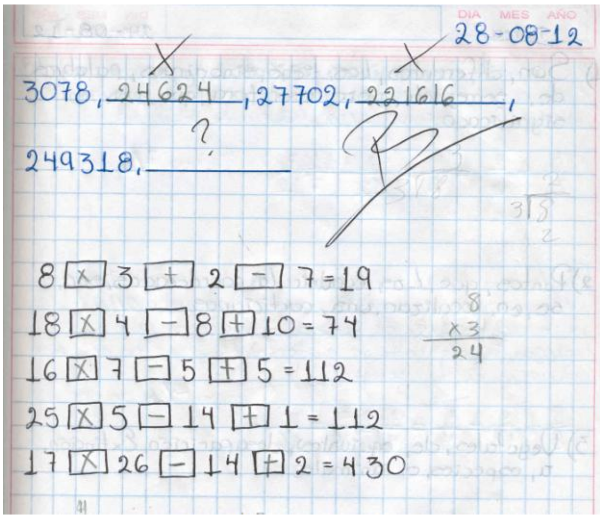


Figura 2.2
En la figura se observa que el alumno presenta dificultad para descubrir patrones ya que los tres valores por descubrir son incorrectos, al preguntar cuál fue la posible dificultad al momento de resolver el problema la mayoría de los alumnos respondió que eran números muy grandes, sin embargo al colocar los signos en los recuadros se observa que en todos los hizo de manera correcta.
En este tipo de problemas se aplicó de estrategia las heurísticas de Polya (1972) para la resolución de los problemas porque surgen del sentido común y no se necesita explicitarlas. Los problemas son semejantes a otros ya conocidos en la primaria por lo que las ideas de solución surgieron con mayor facilidad, con apoyo de la calculadora se experimentaron casos

particulares para buscar patrones y encontrar las soluciones. Se dio libertad a los alumnos para que fueran descubriendo su propio estilo matemático y así sus emociones fueran más gratificantes (Halmos, 1991). Al trabajar en equipo se buscó fomentar el trabajo colaborativo, la puesta en común y la discusión de ideas como una forma de explicitar heurísticas tal como lo menciona Callejo (1994).

Al concluir el primer bloque también se observó que la mayoría de los alumnos no mantenían un razonamiento lógico o inductivo-deductivo en el proceso de resolución, esta carencia también se reflejó en el lenguaje cotidiano, como por ejemplo, al momento de dialogar si niego una negación es una afirmación sin embargo algunos alumnos lo consideraron una negación. Otra dificultad fue determinar si algo es verdadero o falso, en matemáticas debería tener un valor universal o científico pero hubo alumnos que dudaron mucho para determinar su valor, no distinguía una frase de una proposición, la mayoría de los alumnos tenía dificultad para expresar sus ideas; Con base en lo anterior se tomó la decisión de abordar lo más elemental de lógica apoyándose en la pregunta ¿En qué me puede ayudar estudiar lógica?, se estudiaron temas como proposiciones, negación de una proposición, proposiciones simples y compuestas, proposiciones abiertas conjunción, disyunción e implicación en lenguaje común y en expresiones matemáticas, al mismo tiempo se fue introduciendo un lenguaje matemático más formal.

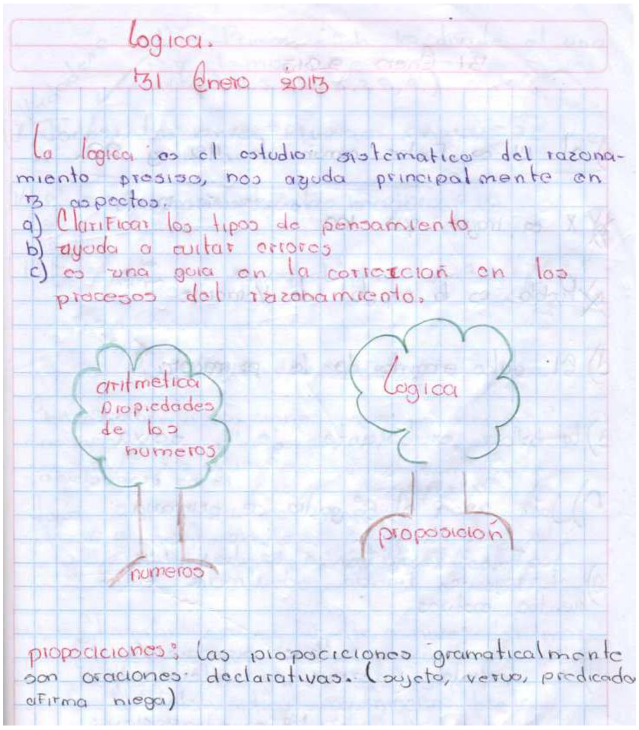


Figura 2.3

Al iniciar el tema de lógica se da a conocer al alumno cuáles son las razones del por qué se hará una breve introducción al tema, siendo este objetivo concientizar al alumno en su aprendizaje y poder contar con otras herramientas en su base de conocimientos, recordemos que Schoenfeld nos menciona que el alumno debe pasar por un proceso de aculturación para poder resolver problemas complejos, recordemos que también es mejor contar con varias que con una estrategia de solución

Se concientizó al alumno que a través de la lógica como una herramienta se podía obtener un razonamiento sistemático el cual les ayudaría a:

- Clarificar los tipos de razonamiento.
- Evitar errores.
- Corregir los procesos de razonamiento.

Apoyados en la lógica como una herramienta para tomar conciencia de los procesos del pensamiento se realizaron actividades que permitieron al alumno examinar, comparar, tomar decisiones, elegir estrategias y desarrollar un espíritu reflexivo como lo sugiere Schoenfeld (1987).

Se inició la tutoría personalizada en Noviembre de 7:30 a 8:00 de lunes a viernes y con todo el grupo se empezaron a abordar problemas del examen ENLACE 2010, continuando con 2011 y 2012. Con esto se pretendió que el alumno se familiarizara con problemas mejor estructurados, que analizara y reflexionara sobre la situación del problema contestado preguntas generadoras, y que tratara de dar respuestas justificadas, algunos de los problemas que se resolvieron se muestran a continuación.

Problema 51, ENLACE 2010

Tienes un número X, divídelo entre -4 y en seguida súmale 4; obtienes cero. ¿De qué número se trata?

A) X = -16
B) X = 16
C) X = -4
D) X = 4

Respuesta correcta (B)

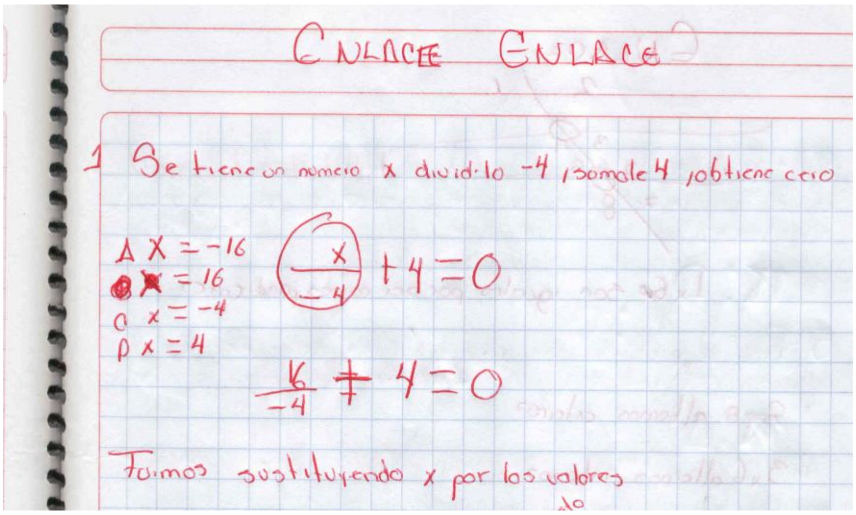


Figura 2.5

Se observa cómo el alumno convierte la representación del problema de un lenguaje común a un lenguaje algebraico permitiéndole tener una generalización en la representación, también utiliza la resolución por casos al sustituir los valores y encontrar la solución. Una de las sugerencias de Polya, Callejo y Schoenfeld es que durante el proceso se pueden experimentar casos particulares que den lugar a pistas sobre la posible solución.

En este problema se orientó al alumno de acuerdo a las estrategias de Polya (1972), recordemos que su aplicación no sigue un orden estricto por lo que las estrategias que se aplicaron fueron las siguientes:

- El problema ¿es semejante a otros que ya conoces? , ¿cómo se resuelven estos?
- Experimenta con casos particulares.
- Haz un dibujo o una representación gráfica de la situación.

- ¿Puedes elegir una buena notación para pasar del lenguaje natural al matemático y expresar así el enunciado de forma que puedas manejar mejor las relaciones expresadas en el problema?
- Supón el problema resuelto, ¿cómo se relaciona la situación de partida con la situación final?
- ¿El caso general es más sencillo que este particular?

Por medio de preguntas y sin dar respuestas se fue orientando al alumno hacia la solución del problema, algunos ya manifestaban inclinación por el álgebra y otros por la geometría tal y como lo menciona Hadamard (1975), Poincaré (1932) y Krutetskii (1976) se notaron más los avances al lograr encontrar una representación simbólica del problemas para generalizarla, algunos experimentaron con casos particulares y otros sustituyeron los valores dados para encontrar la respuesta correcta.

Problema 139, ENLACE 2012

Cuatro pastelerías utilizan los mismos ingredientes, pero en diferentes proporciones para hornear un mismo tipo de pastel como se describe a continuación:

1. “La bonita” utiliza 8 huevos por cada 5 de harina.
2. “La francesa” utiliza 12 huevos por cada 8 tazas de harina.
3. “El hornazo” utiliza 6 huevos por cada 5 de harina.
4. “La delicia” utiliza 10 huevos por cada 6 tazas de harina.

¿Cuál es la pastelería que utiliza mayor proporción de huevos en sus pasteles?

A) La bonita.
B) La delicia.
c) El hornazo.
D) La francesa.
Respuesta correcta (B)

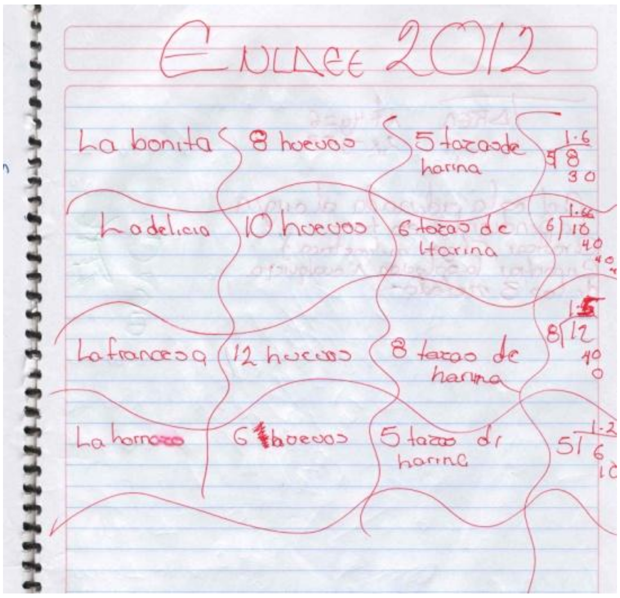
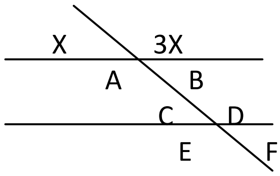


Figura 2.6

La tabla de datos refleja la creatividad del alumno para organizar los datos quedando de la siguiente manera: nombre de la pastelería, número de huevos que ocupa por pastel, tazas de harina por pastel, operaciones y razonamiento para obtener la solución, de esta manera se observa que el alumno se está habituando a la actividad matemática.

Todos los equipos elaboraron una tabla de datos, lo cual permitió reflejar el avance en ciertas actitudes matemáticas como la forma de planificar el trabajo para visualizar y organizar mejor la información, algunos equipos hicieron el siguiente planteamiento: si se sabe cuánto de huevo tiene por cada taza de harina entonces sabría quien le pone más huevo al pastel, por lo que tendría que repartir el número de huevos entre el número de tazas, por consecuencia, el equipo hizo una razón y dividió. Se ha observado que las puestas en común y la discusión de ideas han reflejado cambios positivos en el análisis de información tal y como lo sugiere Callejo (1994).

Problema: ¿Cuánto mide cada ángulo de la figura?



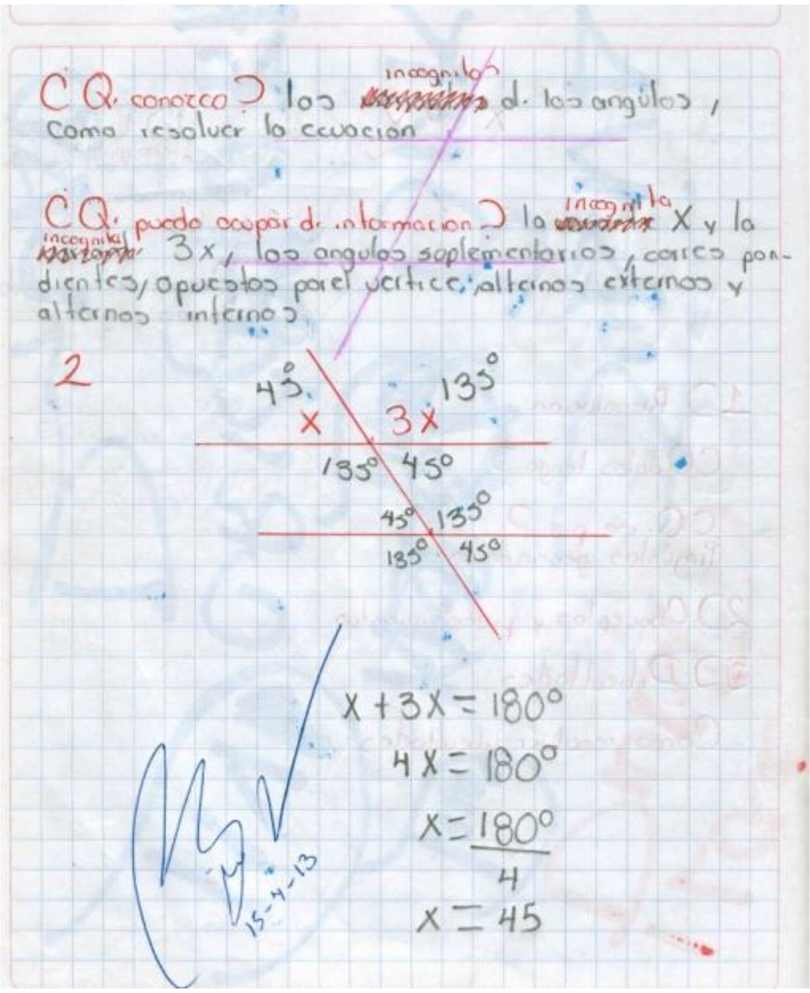


Figura 2.7

En la figura se observa mayor control para comprender la naturaleza del problema y resolverlo porque: seleccionó contenidos de su base de conocimientos para aplicarlos, planificó acciones al utilizar una representación gráfica, una algebraica y preguntas guiadoras, tomó decisiones para mejorar el plan (se percató de que tenía una incognita y no una variable), y evaluó la validez de dicho plan al comprobar sus resultados de forma geométrica.

En la resolución de este problema hacemos referencia a las investigaciones de Garofalo, Lester (1985) sobre los conocimientos y las creencias de los fenómenos cognitivos así como de la regulación y el control. Como parte del trabajo individual el alumno elaboró y respondió sus propias preguntas guiadoras, se observa que ya comprende la diferencia entre los conceptos incógnita y variable, los conocimientos metacognitivos incluidos en la categoría del sujeto muestran de qué forma cree que resuelve mejor los problemas, los incluidos en la categoría de estrategia muestran cómo usa y aplica sus conocimientos.

Se introdujo gradualmente la resolucion de problemas utilizando preguntas guiadoras que les permitieron analizar y reflexionar durante y después del proceso de resolución como lo sugieren Schoenfeld (1985) , Callejo (1994).

Se tomaron otras acciones como dialogar con padres de familia para que supervisaran los trabajos extraescolares de sus hijos, se tuvo una respuesta positiva porque estuvieron más al pendiente del proceso de aprendizaje de sus hijos. Se aplicaron diferentes formas de aprendizaje para que los alumnos desarrollaran más sus habilidades y conocimientos, se llevó la carpeta del alumno con el objetivo de realizar una mejor evaluación.

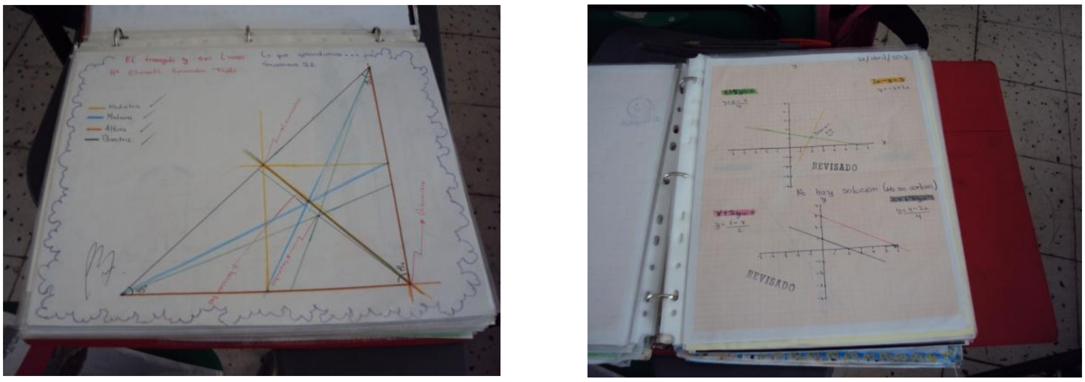


Figura 2.8

En la carpeta del alumno se incluyen algunos de los trabajos más representativos para observar con mayor detalle la evolución del aprendizaje, en la figura de la izquierda se abordó el tema líneas en el triángulo y en la figura de la derecha el tema representación gráfica de sistemas de ecuaciones.

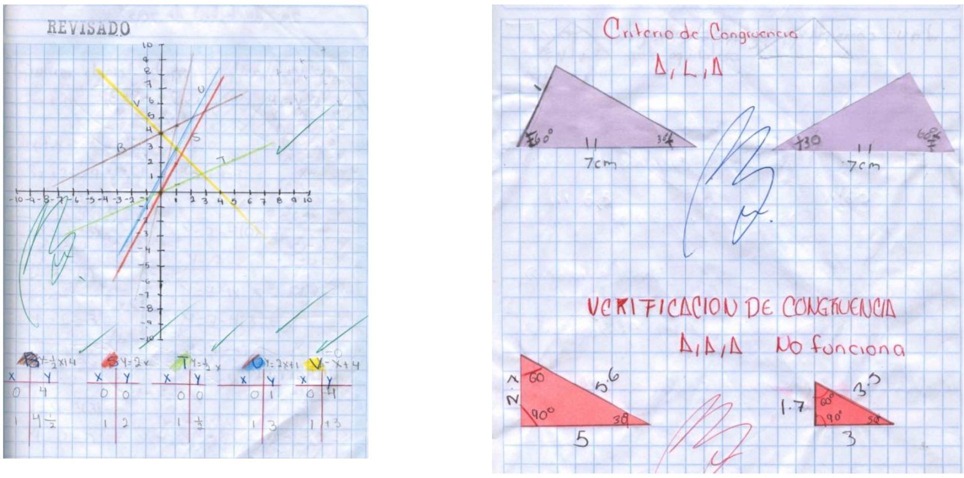
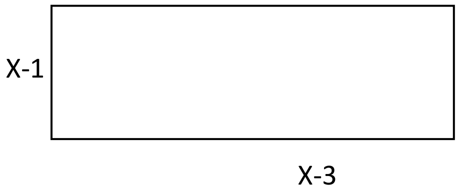


Figura 2.9

Se utilizaron como sugerencia didáctica manipular materiales, como ejemplo colores y recortes con el fin de estimular el aprendizaje tomando en cuenta las diferentes preferencias del alumno (lógico, intuitivo, armónico).

PROBLEMA: ¿Cuál es el área de la siguiente figura?



El problema se resuelve de manera individual, se responden algunas preguntas guiadoras sugeridas en el curso taller y que fueron aplicadas a la resolución de problemas en clase, la búsqueda de la solución se organiza en tres momentos que son:

1. Resolución

¿Qué datos tengo?
¿Qué me pide?
¿Con qué lo puedo relacionar?
¿Qué información puedo ocupar?

2. Conceptos y procedimientos.

Realiza operaciones y elabora una lista de los conceptos que utilizó en la resolución del problema.

3. Dificultades.

¿Qué dificultades surgieron?
¿Cómo se pueden resolver?

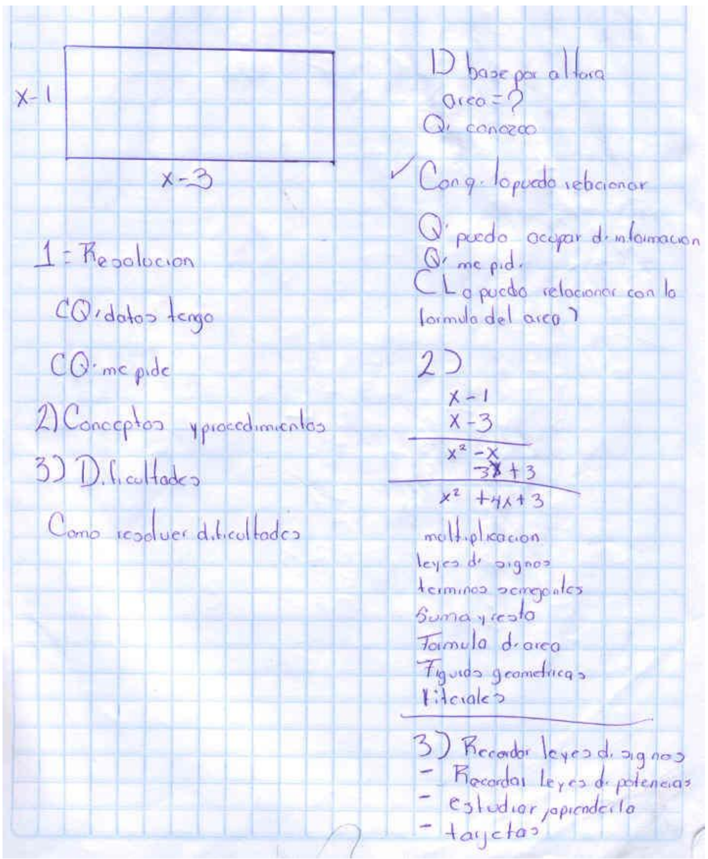


Figura 2.10

En este problema se sugiere al alumno una forma de regular y controlar las estrategias en la búsqueda de la solución, es decir, se sugiere cuándo debe usarse y cómo debe aplicarse la estrategia. Se aplica el formato que se diseñó apoyándose en el curso taller de la BUAP, se observa mayor control y análisis en el proceso de resolución (formato propuesto en pág. 24).

En esta actividad se observa que el alumno puede explicitar con mayor eficiencia la forma en que resuelve los problemas permitiéndole tomar conciencia de su proceso de pensamiento y mejorando sus actitudes matemáticas, recordemos que el objetivo principal del curso taller de matemáticas es fortalecer los conocimientos, habilidades y actitudes que intervienen en la resolución de problemas matemáticos, con esta forma de trabajo se pretende que el alumno se vaya habituando al proceso de autorreflexión para que posteriormente formule y responda sus propias preguntas guiadoras.
Se aplicaron en el aula diversos problemas del libro del curso taller de matemáticas, también se aplicó, como proyecto, la investigación didáctica en el aula 6 obteniéndose los siguientes resultados.

CUERPOS GEOMÉTRICOS
ACTIVIDAD LÚDICA

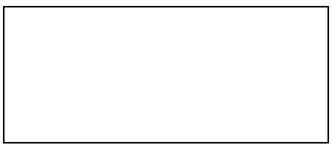
Fecha de aplicación: 20-04-2013
(Ver figuras 3.1)
MATERIALES:
½ Kg. de popotes gruesos y transparentes.
100 clips.
Tijeras.
1 bolsa de ligas de 2 ó 3 cm.
2 ganchos para tejer.

Forma de trabajo:
El día anterior se forman equipos de 4 integrantes, deberán organizarse para adquirir los materiales de la actividad a realizar.
Se muestra a los alumnos la técnica para construir cuerpos geométricos con los popotes.

ACTIVIDAD 1

- Construye cuerpos geométricos con los materiales como: triángulo, cuadrado, polígono regular.
- Encuentra áreas de las figuras geométricas suponiendo que se desconocen sus medidas y asignándole expresiones algebraicas a sus lados.

Ejemplo:



X-10

X+2

¿Cuál es el área del rectángulo?
Libro vol. 1 matemáticas de Tse. 2°, secuencia 12, sesión 1.

ACTIVIDAD 2

- Elabora pirámides y prismas para identificar caras laterales, aristas, vértices, bases y caras totales de sus figuras construyendo una tabla, estos temas se abordan en el libro vol. 1 de matemáticas de segundo de telesecundaria en la secuencia 13, sesión 4, página 183.

Ejemplo:

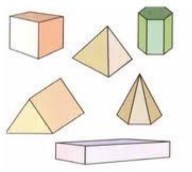


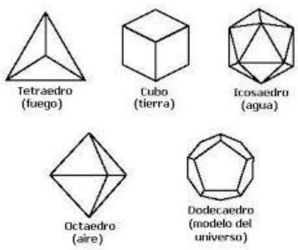
figura	base	aristas	Caras totales	vértices	Caras laterales
tetraedro	triángulo	6	4	4	3

Figura 2.11

Con base en la construcción de cuerpos geométricos se elabora una tabla de datos para organizar la información obtenida. Al manejar materiales el alumno comprende mejor la relación entre la acción que se realiza sobre los objetos y las operaciones realizadas sobre los datos obtenidos (Schoenfeld, 1986).

ACTIVIDAD 3

- Construye poliedros (tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro) y reafirma los conceptos de vista superior, vista frontal y vista lateral con las figuras. Libro matemáticas de tse. 2º, vol. 1, sesión 5, página 186.



- Recuerda que la relación existente entre el volumen de una pirámide y el volumen de un prisma de la misma base y altura es (Volumen de la pirámide) = 1/3 (Volumen del prisma), elabora la siguiente tabla.

No. de lados del polígono regular.	Volumen del prisma del polígono.	Volumen de la pirámide del polígono.
3		
4		
5		

PROBLEMA 10 del libro Curso taller de matemáticas, pág. 66.
Fecha de aplicación: 27-04-2013.

La siguiente gráfica representa las calificaciones obtenidas por 39 alumnos en el primer bimestre del ciclo escolar.
¿Cuál es la media, la mediana y la moda de las calificaciones de los 39 alumnos?

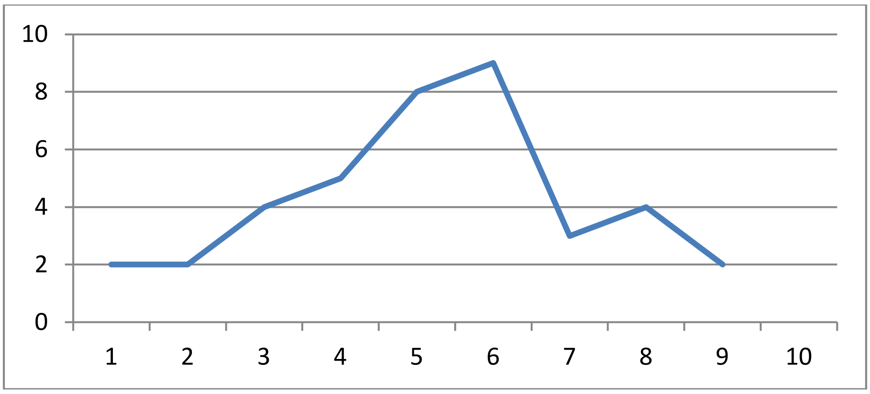


Figura 2.12
El eje horizontal corresponde a las calificaciones obtenidas y el eje vertical corresponde a la cantidad de alumnos.

En la resolución del problema primeramente se debía analizar la gráfica para identificar las características que representan los ejes. Pocos alumno no los identificaron correctamente porque argumentaban que no tenían 39 alumnos, después de comentarlo y algunos apoyándose en otros equipos lograron identificar dónde estaba el dato de los 39 alumnos, todo el grupo recordó cómo encontrar la media y la moda pero no recordaban cómo obtener la mediana, revisaron apuntes para recordar cómo se obtiene pero no observaron que antes había que ordenar los datos en forma ascendente o descendente, al darse cuenta que variaban mucho los resultados de los equipos revisaron con mayor detenimientos sus apuntes y entonces observaron que había que ordenar los datos, también observaron que hay que tomar en cuenta si la lista de datos es par o impar.
Este problema se resolvió en equipos y sin apoyo del profesor, eran temas ya aprendidos y apoyados en las investigaciones de Schoenfeld (1992) ya contaban con los recursos (base de conocimientos y procedimientos en la memoria del resolutor), al no intervenir el profesor se dio libertad de tener puestas en común y escoger sus propias estrategias heurísticas, cuando encontraron diferentes resultados hicieron una retrospección del proceso, evaluaron sus procedimientos agregándole control al proceso lo cual les otorgó un uso eficiente de los recursos disponibles. Confirmando la teoría de Adda (1976) al alumno no se le debe ahorrar el esfuerzo de tener que elegir los conocimientos que tiene que aplicar, de lo contrario, se generarían fenómenos parásitos. Una estrategia para generar datos en este tipo de problemas de tal forma que se comprenda la naturaleza del problema y el contexto donde se desarrolla es la actividad lúdica “Generar datos estadísticos” (Ver las figuras 3.5 – 3.7).

SOLUCIÓN: media=5.1, moda=6, mediana=5.

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN EL AULA 6
LAS ALBERCAS DE ANITA.

Analicen y discutan el siguiente texto.
La siguiente situación fue captada del Grupo de Trabajo de Álgebra de la NCTM (1985). Esta situación ofrece exploraciones algebraicas que pueden ir desde preescolar hasta el segundo grado de secundaria. En este problema el pensamiento algebraico y el razonamiento pueden ser extendidos por grados.
Anita está diseñando albercas cuadradas. Cada alberca tiene un centro cuadrado que es el área del agua. Anita usa azulejos azules para representar el agua. Alrededor de cada alberca hay un borde de azulejos blancos. A continuación aparecen dibujos de las tres albercas más pequeñas que ella puede diseñar. .

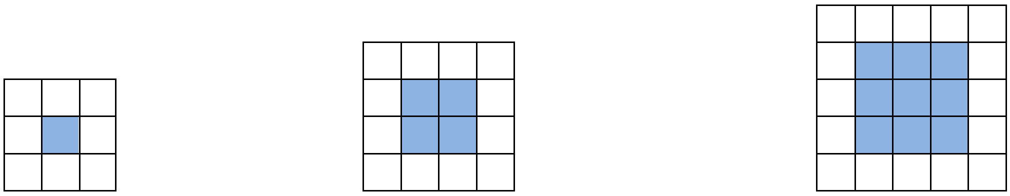
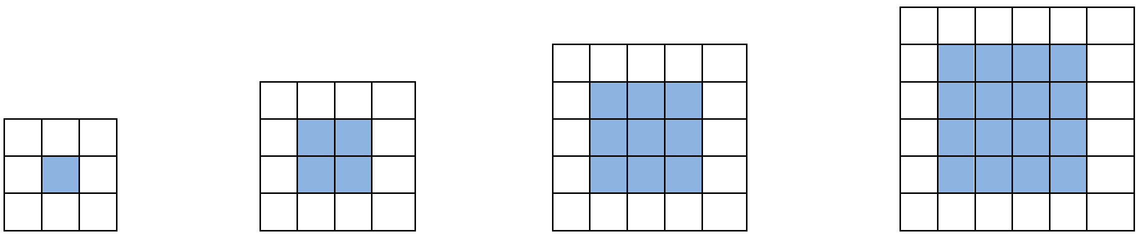


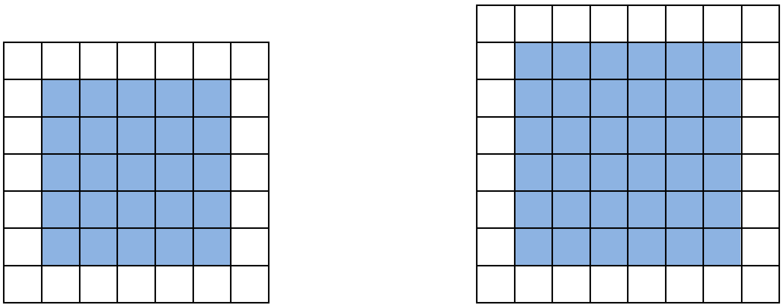
Figura 2.13
Construcción de las primeras tres albercas de Anita.

Indicaciones:
1. Haga una tabla que muestre el número de azulejos azules y el número de azulejos blancos para las primeras seis albercas.
2. ¿Cuáles son las variables en el problema?, ¿cómo están relacionadas?, ¿cómo pueden describir esta relación en palabras?
3. Hagan una gráfica que muestren el número de azulejos azules de cada alberca. Haga una gráfica que muestre el número de azulejos blancos de cada alberca.
4. Cuando el número de albercas se incrementa, ¿cómo cambia el número de azulejos blancos?, ¿y el de azulejos azules?
5. Usen la gráfica para encontrar el número de azulejos azules y blancos de la alberca 7.
6. Exponga en el grupo los resultados obtenidos.

SOLUCIÓN
1. Empezaremos utilizando una de las estrategias de Polya la cual sugiere hace un dibujo o una representación gráfica de la situación, las primeras seis albercas quedan de la siguiente manera.



Alberca 1 Alberca 2 Alberca 3 Alberca 4



Alberca 5 Alberca 6

Figura 2.14
Primeras seis albercas en la construcción de Anita.

Con las figuras diseñadas se construye la tabla de datos apoyados en la observación de las albercas, la capacidad de observación es importante porque contribuye a favorecer las actitudes matemáticas como la apertura mental, la forma de planificar el trabajo, la selección de conocimiento a aplicar, la elección de estrategias; Callejo (1994) señala que estos son algunos aspectos del conocimiento y de la conducta relacionados con la resolución de problemas.

Schoenfeld (1986) y Resnick (1987) recomiendan que se dedique mucho tiempo a las acciones sobre los objetos y a la discusión oral porque esto ayuda a ver la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel, es decir la manipulación de objetos y la discusión oral ayuda a comprender la relación entre el diseño de las albercas y su operatividad con símbolos algebraicos, la tabla es la siguiente.

No. alberca	No. Azulejos azules	No. Azulejos blancos
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
6	36	28
7		

2. ¿Cuáles son las variables en el problema?

Para responder a la pregunta recurrimos a la base de conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto, en este caso, el concepto de variable se entiende como letras que representan números que varían.
Respondiendo a la pregunta las variables son el número de alberca, el número de azulejos azules y el número de azulejos blancos.

Schoenfeld (1988) afirma que para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de variable, adquirir este concepto supone la conjunción de dos procesos que son generalización y simbolización, el concepto de variable incluye múltiples significados y corresponden con las distintas formas de enfrentar la generalización.

¿Cómo están relacionadas?
Se observa que en el centro de la figura se forman cuadrados con azulejos azules y a su alrededor hay azulejos blancos, dependiendo del número de alberca es el número de azulejos azules y de azulejos blancos, conforme aumentan las albercas el número de azulejos azules crece más rápido que el de azulejos blancos.

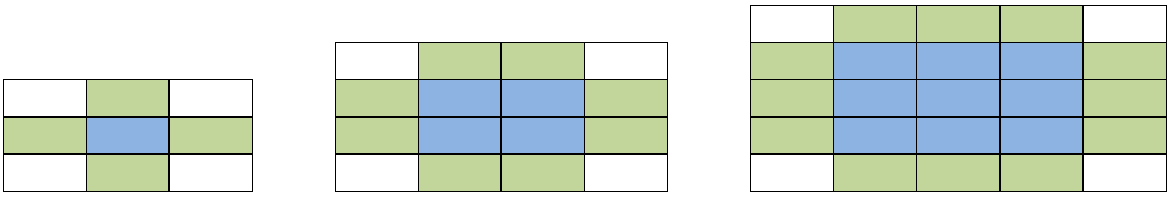
¿Cómo pueden describir esta relación en palabras?
Recurrimos a las estrategias de Polya (1972) al asociarlo con otros problemas semejantes ya conocidos y buscar la simetría o regularidad del problema, el número de azulejos blancos se encontrará de dos formas.

a) La alberca uno tiene un cuadro azul, el número de azulejos blancos se obtienen pensándolo como una sucesiones de números en la cual se observa una constante de proporcionalidad de cuatro, esta constante multiplica a **n** que es cualquier lugar del número de alberca, después se le suma o resta un valor de tal forma que resulte el primer número de la sucesión.

   8 12 16 20 24 28 Sucesión de azulejos blancos.
   4 es la diferencia entre cada número de la sucesión.

   4n es la constante de proporcionalidad multiplicada por el número de alberca.
   Para la alberca 1 quedaría 4(1)=4 por lo que hay que sumar **4** para obtener el primer término de la sucesión quedando la expresión **4n+4**.

b) La alberca dos tiene cuatro azulejos azules que es el resultado de elevar el número de alberca al cuadrado n^2, el número de azulejos blancos se obtiene al multiplicar el número de cuadros azules de la base por los cuatro lados del cuadrado azul **4n**, más los cuatro cuadrados de las esquinas del cuadrado blanco como se muestra en la siguiente figura.



1(4)+4= 8 2(4)+4=12 3(4)+4=16

Figura 2.15
Se muestra gráficamente una de las formas en que se puede obtener la regla general para la sucesión de azulejos blancos.

3. Gráfica de azulejos azules y blancos en las albercas con relación al número de alberca.

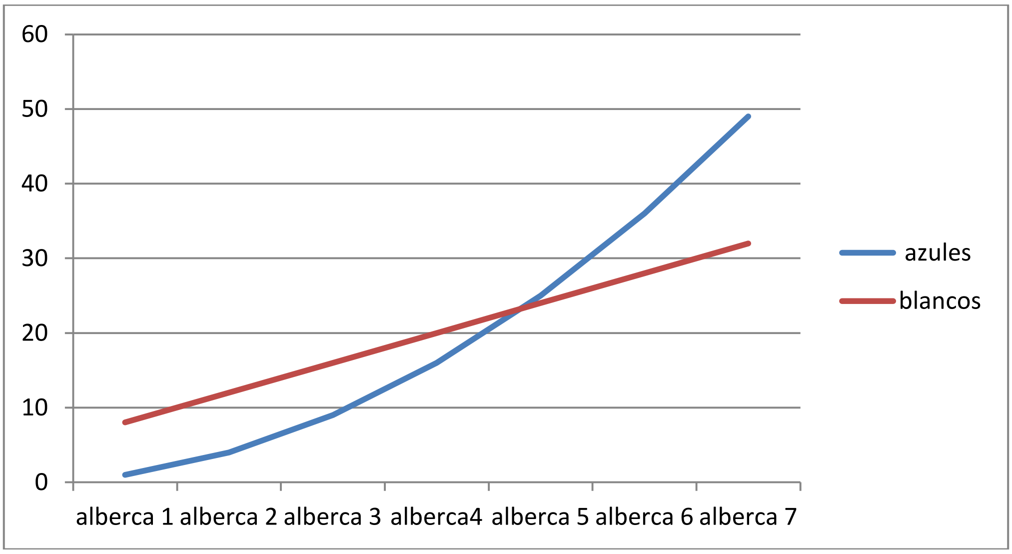


Figura 2.16
El eje vertical corresponde al número de azulejos y el eje horizontal corresponde al número de albercas.

4. ¿Cómo cambia el número de azulejos blancos?

En la tabla de datos se observa que hay una constante de proporcionalidad por lo que en la gráfica se obtiene una línea recta, es decir los datos cambian de manera proporcional.

¿Y el de azulejos azules?

En la tabla de datos se tienen los cuadrados del número de la alberca y en la gráfica se observa cómo crece rápidamente el número de cuadros azules conforme crece el número de albercas. Schoenfeld (1987) nos sugiere que para mejorar las destrezas metacognitivas los alumnos deben resolver problemas en grupo, y contestar preguntas sobre lo que se está haciendo con el objeto de tomar conciencia del proceso de aprendizaje.

5. Con base en la gráfica se puede deducir que en la alberca 7 habrá 49 azulejos azules y 32 azulejos blancos.

6. Los equipos exponen al grupo sus resultados, se propone como reto que los equipos expresen las reglas para obtener los azulejos en forma algebraica; Callejo (1994) nos propone que los alumnos describan sus estrategias heurísticas con el objeto de hacer notar que hay distintas maneras de resolver un problema, que al hacer explícito lo implícito mejora el hábito de la metareflexión y que al solucionar los bloqueos el estudiante adquiere confianza y seguridad para resolver problemas matemáticos (Ver figuras 3.7 - 3.13).

PROYECTO: EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE

<table>
<tr><td colspan="2">PLANTEL: Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas.</td><td colspan="2">PROFRA. María Eugenia Martínez Merino.</td></tr>
<tr><td>CLAVE: 21ETV0316F</td><td>ZONA: 42 Acatzingo</td><td>REGION: 08</td><td>MUNICIPIO: 115 Quecholac, Pue.</td></tr>
<tr><td>ASIGNATURA: Matemáticas</td><td>AÑO: 2013</td><td>GRUPO: 2° D</td><td>CICLO ESCOLAR: 2012-2013</td></tr>
<tr><td colspan="4">INTRODUCCIÓN:
Con el acuerdo “Pacto por México” la educación básica pretende generar la reflexión de todos los actores educativos en torno a los principios teóricos y metodológicos desde el enfoque formativo.
Las pruebas estandarizadas en México arrojan resultados que nos ayudan a tomar decisiones para la mejora de la calidad en la educación básica, ante esta situación es necesario revalorar las estrategias de enseñanza, la forma de evaluar y la retroalimentación para potencializar el aprendizaje de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="4">DIAGNOSTICO Y JUSTIFICACION:
Con base en la reforma educativa y el enfoque formativo de la educación que se ha puesto en marcha al inicio de este sexenio, los docentes nos encontramos con nuevos retos como son, el logro de los estándares curriculares y el desarrollo de competencias, por lo anterior, el docente debe analizar y mejorar su labor con el propósito de elevar la calidad educativa ya que esta se verá reflejada en la calidad de vida de los mexicanos. La RIEB tiene como finalidad ofrecer orientaciones pedagógicas y didácticas que guíen la labor docente en el aula, este curso taller en combinación con la BUAP ofrecen un apoyo para el docente en el fortalecimiento de habilidades, actitudes y el desarrollo de competencias matemáticas basado en la resolución de problemas, poniendo en práctica lo adquirido, se pretende que los estudiantes pueden mejorar el perfil de egreso como lo marca el PLAN DE ESTUDIOS 2011.
Este proyecto se basará en la INVESTIGACION DIDACTICA EN EL AULA 6 del curso taller, pág. 119.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">COMPETENCIAS MATEMATICAS: Comunicar información matemática.
1. Los alumnos expresan e interpretan información matemática contenida en una situación.
2. Emplean diferentes formas de representar la información cuantitativa y cualitativa relacionada con la situación.
3. Deduce información e infiere propiedades y características de la situación mediante visualización de patrones geométricos.
4. Establece relaciones de distintos objetos con claridad expresados en un mismo problema.
5. Rectifica dichas relaciones mediante una evaluación numérica con valores específicos.</td></tr>
<tr><td>CONTENIDO:
Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones de números.</td><td>EJE TEMATICO:
Sentido numérico y pensamiento algebraico.</td><td>TEMA:
Significado y uso de literales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">APRENDIZAJES ESPERADOS:
Obtiene la regla verbal que genera una sucesión de números y obtiene cualquier término de la sucesión.</td><td>FECHA DE APLICACIÓN: 19-03- 2013.</td></tr>
<tr><td colspan="3">PRODUCCION:
Contesta preguntas guiadoras.
Identifica variables del problema.
Construye dibujos que visualicen el problema.
Elabora y analiza tabla de datos.
Realiza gráficas.
Identifica la relación existente entre variables.
Interpreta gráficas
Como reto encuentra la expresión algebraica de la relación existente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEDIACION:
El día anterior el docente pide a los alumnos formar equipos y se solicitan materiales que se puedan utilizar en la resolución del problema.
Se proporciona el ejercicio a los alumnos a inicio de clase (Las albercas de Anita)
Se pide dibujen las albercas de Anita y con base en ellas contesten algunas preguntas guiadoras.
Los alumnos deben elaborar una tabla de datos y posteriormente graficarlos.
Se solicita a los alumnos analicen la tabla de datos y las gráficas para determinar si existe alguna relación o patrón entre ellos.
Se solicita a cada equipo realice una exposición explicando cómo resolvieron el problema dando argumentos, que conceptos y procedimientos utilizaron y si pudieron representar la relación que encontraron con el propósito de que el alumno desarrolle las competencias señaladas.</td></tr>
</table>

RECURSOS DE APOYO:	AMBIENTE DE APRENDIZAJE:	INSTRUMENTO DE EVALUACION Y CRITERIOS DE EVALUACION:
Cartulinas, colores, recortes, tijeras, lápiz adhesivo, papel bond, plumones, juego de geometría, hojas blancas, libro de tse. Segundo de secundaria vol. II.	La actividad se realiza en el salón del 2° D de la Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas del municipio de Quecholac, Pue.	Trabajo en equipo 10% Representación de albercas 15% Tabla de valores 15% Preguntas guiadoras 20% Graficas 15% Relación o patrón de datos de manera verbal 25% Expresión algebraica de la relación (como reto)

RETROALIMENTACION:

Esta se hará con base en la evaluación formativa por lo que daremos respuestas a las preguntas:

¿Cuál es el error principal o más común?

- ✓ Representación de los intervalos en los ejes coordenados.
- ✓ Localizar puntos.
- ✓ Encontrar la relación de manera verbal entre el número de albercas y el número de azulejos azules.

  Errores secundarios:
- ✓ Realizar correctamente operaciones básicas.
- ✓ Manejar correctamente las tablas de multiplicar.

¿Cuál es la razón probable de que el alumno cometiera este error?

- ✓ En la mayoría de los problemas los intervalos de los ejes ya están dados y el alumno no los elabora.
- ✓ Al localizar puntos en espacios blancos no lo hace correctamente.
- ✓ El alumno no ha trabajado con ecs. cuadráticas por lo que no le es fácil distinguir la relación.

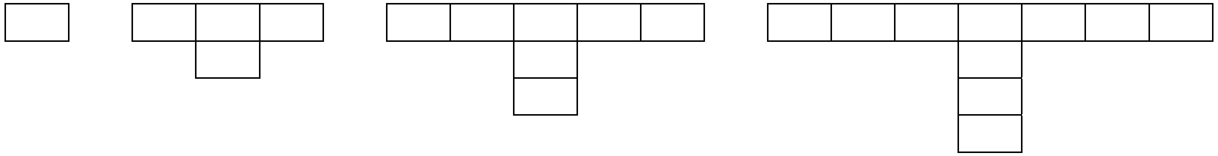
¿Cómo puedo guiar al alumno para que evite el error en un futuro?

- ✓ Hacer preguntas dirigidas al alumno durante el trabajo grupal.
- ✓ Con el apoyo de la calculadora encontrar relaciones entre números.
- ✓ Propiciar en el aula confianza, respeto, crítica constructiva y opiniones fundamentadas.
- ✓ Guiar al alumno para que comparta su trabajo en el aula (como realizaron el trabajo con argumentos sólidos del porqué lo hicieron así, que conceptos y procedimientos utilizaron) enseñándoles a que se retroalimenten unos a otros sin que este proceso interrumpa la enseñanza.

COMENTARIO DEL PROFESOR: El docente tiene en sus manos material humano que transforma por lo que debemos buscar mejorar profesionalmente. Este curso me ha proporcionado nuevas herramientas para fortalecer los conocimientos, habilidades y actitudes en los alumnos, algunas de estas herramientas son las preguntas generadoras, la retroalimentación entre alumnos, el enriquecimiento del trabajo en equipo mediante la exposición. Esto ha propiciado en algunos alumnos proponerse retos rebasando las metas deseadas y conduciéndose a un nivel reflexivo (existe competitividad entre equipos, buscan y encuentran más de una solución, aportan conocimiento adicional al solicitado). A otros estudiantes el curso les apoyo para reafirmar lo ya aprendido y a otro más a corregir errores de aprendizaje; El curso me ha proporcionado nuevas estrategias al compartir experiencias entre docentes. He observado mayor colaboración en trabajo de equipo me siento muy bien con este curso porque me ha ayudado a innovar mi trabajo.
COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES: Berlín B. “Bueno yo pienso que el curso fue interesante porque me ayudo a seguir preparándome, porque bueno las cosas ya se me habían olvidado, también fue bonito porque trabajamos en equipo y todos daban su punto de vista. También me gusto porque teníamos que pasar a exponer y el grupo nos hacía criticas, nos daban su punto de vista y eso nos ayudó más para no ponernos nerviosos” Michel M. “Pues a mí se me hace interesante los ejercicios porque tengo nuevos conocimientos, y se me hace muy bien que trabajemos en equipo porque además de aprender juntos convivo con ellos, además que compartimos conocimientos diferentes. También me gusta pasar al frente a exponer porque poco a poco se me va a quitar la pena que me da cuando paso al frente” Anahí B. “ Pues para mí me pareció muy bien porque así recordamos algunas cosas, pero luego siento que nos hacen pensar mucho y luego ya no me acuerdo, y no sé qué hacer, pero si me pareció que está bien estudiar lo que podamos para aprender y saber más” Yareli “A mí se me hizo un poco complicado en algunos ejercicios, algunos no los pude resolver y otros si, entonces este curso de matemáticas me gusto poco porque si esta difícil porque había trabajos complicados pero interesantes” Elizabeth H. “(… antes no me gustaba mucho trabajar en equipo y ahora sí, bueno compartir conocimientos con mis compañeros y lo mejor de todo es que aprendo con los ejercicios y ya no se me dificulta)”

RUMBO A LA PRUEBA ENLACE

La siguiente secuencia de figuras se construye utilizando regletas :



- ✓ Elabore una tabla que muestre el número de regletas para los primeros 5 dibujos.
- ✓ ¿Cuáles son las variables?
- ✓ ¿Cómo están relacionadas?
- ✓ Haga una gráfica que muestre el orden de la figura y el número de regletas.
- ✓ ¿Cuántas regletas serán necesarias para las siguientes tres figuras de la secuencia?
- ✓ ¿Cuántas se necesitan para construir la figura número 10 de la secuencia?
- ✓ ¿Puede expresar esa relación en una expresión algebraica?

Nombre y firma del docente: PROFRA. MARÍA EUGENIA MARTÍNEZ MERINO.

Nombre y firma del instructor (Vo. Bo.) DOCTORA MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ.

Nombre y firma del auxiliar (Vo. Bo.) JOSUÉ VAZQUEZ RODRIGUEZ

CAPÍTULO 3

EVIDENCIAS

En este capítulo se presentan evidencias de algunas de las actividades que se realizaron en el grupo y cómo las ejecutaron, también se presenta cómo se aplicaron algunas estrategias didácticas sugeridas en el curso taller de matemáticas y estrategias de las investigaciones didácticas de los autores mencionados en el capítulo 1.

Al inicio del ciclo escolar se encontraron algunas deficiencias, como falta de trabajo colaborativo ya que, cuando se reunían en equipos, algunos no sabían qué hacer, otros trabajaban en la resolución del problema y otros platicaban fuera del tema de trabajo. Sin embargo, conforme transcurrió el tiempo se fueron habituando a la forma de trabajo del taller, a crear sus propias formas de trabajo, a valorar las matemáticas y mejorar las actitudes matemáticas.

Conforme avanzó el curso se observó que los alumnos gustaban más de las actividades lúdicas, del trabajo en equipo, de las exposiciones frente al grupo; fueron más tolerantes al respetar las intervenciones de sus compañeros, se mostraron más críticos y reflexivos.

CUERPOS GEOMÉTRICOS
ACTIVIDAD LÚDICA

Temas: aristas, vértices y caras de cuerpos geométricos.
Calculo de áreas de cuerpos geométricos con expresiones algebraicas.
Vista frontal, superior y vista lateral de cuerpos geométricos.

- La actividad se trabaja en equipos para favorecer la comunicación de ideas.
- Los alumnos armaron sus cuerpos geométricos como se mencionó en el capítulo 2, hubo retroalimentación en conceptos y procedimientos, se dio libertad a la creatividad para que explotaran al máximo su potencial y pudieran descubrir la naturaleza de sus representaciones o la forma en que influyen en el trabajo mental, es decir, los alumnos a través esta metodología descubrieron por sí mismos si su espíritu matemático es analítico, geométrico o armónico.
- Se formaron diversos cuerpos geométricos en los que se localizaron y contaron caras, aristas, vértices; se calculan áreas con expresiones algebraicas y se reafirman conceptos de cara frontal, cara superior y frontal derecha.

COMENTARIO:

Esta técnica de construcción de cuerpos geométricos fue de agrado para los jóvenes ya que repasaron conceptos de una manera divertida y mostraron mucho interés en la construcción de estos. La técnica se compartió con el personal docente de la institución utilizándose para repasar algunos contenidos ya vistos de cada grado. En primer año se repasó el tema “Construcción de polígonos regulares” bloque II, secuencia 13, sesión 1 y 3 del libro de matemáticas 1 de telesecundaria.

El método de construcción de cuerpos geométricos es una excelente estrategia didáctica porque el alumno tiene la oportunidad de manipular los materiales, le encuentra sentido y da sustento a la información que pueda obtener, es económica, aporta estabilidad a los cuerpos geométricos y para desarrollar la creatividad de los jóvenes es flexible. Se observó mucha competitividad en la construcción de cuerpos geométricos de tal forma que los alumnos crearon sus propios diseños de cuerpos geométricos, se aclararon dudas y en otros casos se reafirmaron conocimientos.

Fernando Alonso, Carmen Barbero (2007) afirman que para ayudar a ver la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel es necesario manipular materiales. Schoenfeld (1986), Resnick (1987) recomiendan que se dedique mucho tiempo a la acción sobre los objetos y a la discusión oral, pues afirman que, a pesar de que parece que el proceso que se sigue es bastante fácil, estas conexiones no se hacen de forma automática.

Figuras 3.1
Proceso de construcción de la actividad lúdica "Cuerpos geométricos" del capítulo 2 (pág. 35) utilizando la técnica sugerida con popotes para la construcción, algunos alumnos se propusieron retos para construir otros cuerpos geométricos a los sugeridos, la actividad impactó en la escuela de tal forma que se aplicó en otros grupos adaptándola a las necesidades del tema y del grupo.

PROBLEMA 10 DEL CURSO TALLER

Tema: Tendencia central.

COMENTARIO:
De forma individual el problema es resuelto por la mayoría de los alumnos, algunos no tienen claros los conceptos y consultan sus libros y apuntes, muy pocos alumnos abordan el problema mediante una tabla de datos, en su gran mayoría hacen una lista para registrar todos los datos, son muy pocos los alumnos que resolvieron de manera incorrecta el problema.
Al realizar la retroalimentación con los alumnos que no resolvieron correctamente el problema se encontraron los siguientes obstáculos:

- No recordaron ordenar los datos.
- Hay confusión en los conceptos de mediana cuando la lista de términos es par o impar.
- Si conocen pero no tienen presente la información al momento de requerirla (conceptos, procedimientos, etc.).
- Para eliminar estas barreras se elaboraron problemas sencillos de mediana con lista de términos par e impar de tal forma que los datos fueron obtenidos de su propio contexto como por ejemplo el número de calzado o el número de hermanos de algunos compañeros del salón, esto les permite comprender mejor la relación que hay entre el objeto y cómo mueve la información.
- Se investigaron los conceptos de media, moda y mediana en libro y libreta.
- Se analizaron los procedimientos utilizados en la solución del problema para autocorregir errores permitiéndoles crear conciencia de su proceso mental.

GENERAR DATOS ESTADÍSTICOS
ACTIVIDAD LÚDICA

Tema: encontrar probabilidades de eventos, moda, media y mediana.

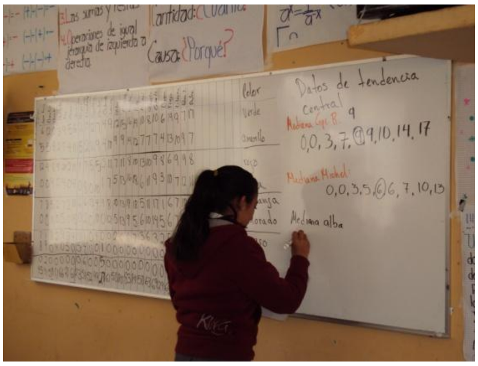
Con una bolsa de lunetas chica se realiza lo siguiente:

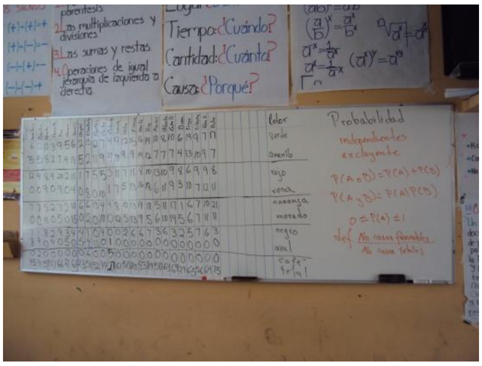
- Se separan las lunetas por colores.
- Se nombra un secretario de grupo que será el responsable de capturar la información en el pizarrón y tenerla disponible para todo el grupo, también redacta las ideas que consideraban importantes en la resolución, con esta forma de trabajo se introdujo un elemento de control en el proceso de resolución de problemas.
- Se elabora una tabla de datos que contenga nombre del alumno, color de luneta, número de lunetas por color y total de lunetas por alumno, de esta manera el estudiante comprende la relación entre los objetos y la manera en que operamos los símbolos que representan.
- Suponiendo que los dulces estuvieran dentro de su bolsa se pide a un alumno, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una luneta, esta sea verde?, puede ser de su propia bolsa o de la bolsa de otro compañero, de igual manera se pueden obtener $P(AyB)$, $P(AoB)$ suponiendo que los dulces son devueltos o no a la bolsa.
- Se pide al alumno calcular la media, moda y mediana de sus lunetas o de algún compañero.

Esta actividad permitió aclarar confusiones en los conceptos de media, moda y mediana, favoreció la comunicación de ideas y la discusión oral al animar a participar a los más pasivos, propició el análisis de los bloqueos que se presentaron en el transcurso de la actividad, como es un material que llama la atención el estudiante se mostró interesado en la actividad y favoreció la puesta en común.

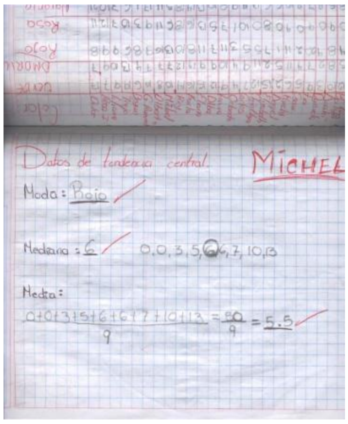
Figuras 3.2
Alumnos cuentan lunetas de una bolsa, separan por colores y calculan probabilidades, esta es una buena opción para mostrar al alumno que se pueden generar datos de problemas cotidianos y que los números también pueden representar objetos y/o características.

El trabajo del secretario, y del moderador junto con la participación del grupo en conjunto favorecen el trabajo colaborativo y el interés en la resolución de problemas, la forma de planificar el trabajo contribuye a la flexibilidad de pensamiento también a ser crítico y reflexivo a la actividad matemática, así lo sugiere Callejo (1994), la aplicación de estas sugerencia didáctica favoreciendo en los alumnos actitudes matemáticas como confianza en sí mismo y en sus propias capacidades.





Figuras 3.3
El secretario de grupo recopila información en la actividad lúdica “Generar datos estadísticos” presentándola a la vista para todo el grupo, también debe recordar las ideas centrales cuando haya silencio prolongado durante la resolución del problema.



Figuras 3.4
Elaboración de tabla de datos en libretas conteniendo nombre del alumno, color de luneta y cantidad de lunetas por color, se realizan cálculos de tendencia central con datos estadísticos de algunos alumnos.

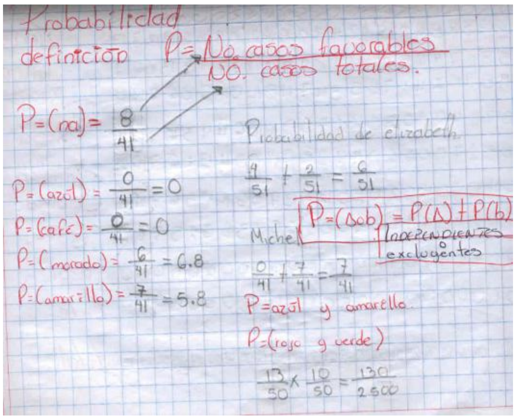


Figura 3.5
Los alumnos calculan probabilidades con la tabla de datos que se generó con la bolsa de lunetas.

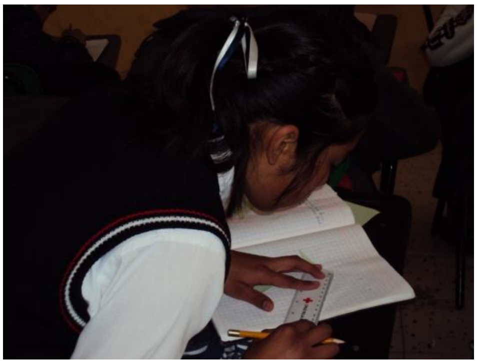
DESPLEGADOS DE CONSULTA RÁPIDA.

Se elaboraron desplegados de consulta rápida los cuales tienen por finalidad dar a conocer información que salte a la vista, cuando son requeridos se tienen a la mano para ser aplicados, visualizar constantemente estos desplegados facilitan el aprendizaje de su contenido porque permanecen presentes por más tiempo en el proceso de aprendizaje y el alumno se familiariza con el contenido.

Figuras 3.6
Elaboración de desplegados de consulta rápida en el aula con los temas ángulos en el triángulo, leyes de los signos y la relación del área entre un prisma y una pirámide de la misma base.

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN EL AULA 6
LAS ALBERCAS DE ANITA

A continuación se presenta el seguimiento que tuvieron algunos equipos en la actividad.
Los equipos iniciaron el trabajo en sus libretas, diseñaron las albercas y para obtener una puesta en común discutieron ideas, se organizaron y seleccionaron sus estrategias para resolver el problema, contestaron las preguntas guiadoras. Se observó mayor participación y trabajo colaborativo, algunos equipos se repartieron el trabajo de acuerdo a sus gustos y habilidades.
Ningún equipo comparte información hasta el momento de su exposición.





Figuras 3.7

Los equipos discuten ideas para la resolución del problema, hacen sus puestas en común y se reparten comisiones, se propició la responsabilidad compartida entre los integrantes del equipo ya que todos los integrantes deben exponer, en las imágenes se aprecia la iniciática del uso de instrumentos de medición, la organización de la información en el uso y manejo de tablas, la comparación entre la gráfica de azulejos blancos y la gráfica de azulejos azules.

Una vez concluido el trabajo de análisis y resolución en sus libretas se preparan para la exposición frente a grupo, cada equipo escogió sus materiales y el diseño, se observó mucha iniciativa por colaborar en el trabajo. La secuencia de fotografías muestra el avance de cada equipo hasta el momento de la exposición.

EQUIPO A

Figuras 3.8

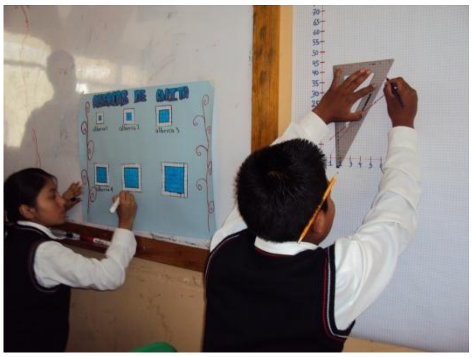
Equipo de trabajo en el proceso de elaboración de materiales para la exposición, se manifiesta trabajo colaborativo y comunicación entre los integrantes.

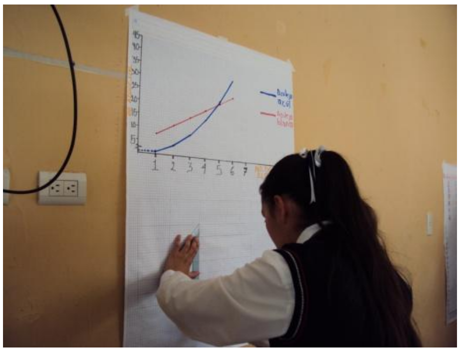
EQUIPO B

Figuras 3.9

El equipo pone en marcha la preparación de materiales para la exposición, se observa que hay más aceptación al repartir el trabajo por preferencias, este equipo fue el único que encontró la regla general para determinar el número de azulejos azules según el número de alberca, el resto del grupo están de acuerdo con sus justificaciones, las emociones fueron determinantes porque impulsaron la búsqueda de la solución provocando sentimientos positivos por el éxito de dicho plan (Halmos, 1991 y Callejo, 1994).

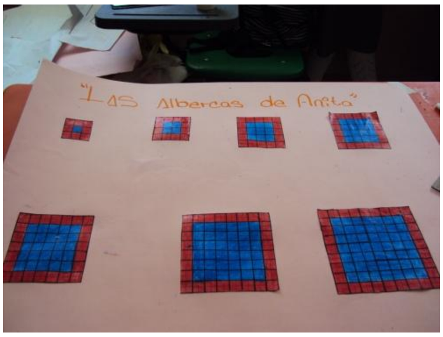
USO Y MANEJO DE INSRUMENTOS DE MEDICIÓN



Figuras 3.10

En las imágenes se muestra cómo algunos alumnos reflejan mayor iniciativa y dominio en el uso y manejo del juego geométrico, también se observa que al realizar sus materiales para exponer tienen mejor distribución de espacios y se interesan más por la calidad de su trabajo, al manipular materiales el alumno comprendió la relación entre los objetos y los símbolos que representan, manifestaron actitudes como motivación, responsabilidad y concentrarse en la tarea sin vigilancia.

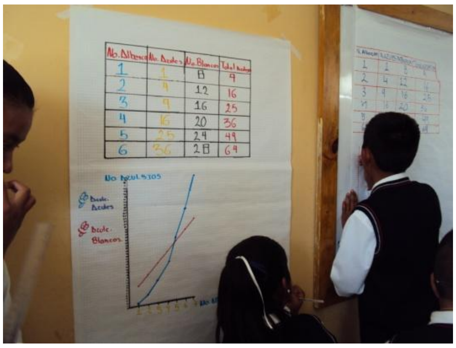
 

Figuras 311

Se puso de manifiesto la creatividad de los estudiantes en la elaboración de las albercas, el equipo buscó captar la atención del grupo con el manejo de los colores.

Equipo C



Figuras 3.12
En la secuencias de trabajo del equipo, se observa el reparto de comisiones y el trabajo colaborativo, hubo competitividad en los equipos por la calidad y la presentación de las exposiciones, las exposiciones ofrecieron diferentes enfoques de comprender y resolver el problema (Hadamard 1975, Poincaré 1932 y Krutetskii 1976).

Equipo D

Figuras 3.13
Durante las exposiciones los equipos comparten sus resultados al grupo, también comparten sus experiencias y bloqueos al momento de la resolución.

Todos los integrantes del equipo expusieron su trabajo, comentaron sobre cómo crear las albercas, cómo crear la tabla de datos para organizar la información, analizaron los datos y todos los equipos descubrieron que el número de azulejos blancos incrementa por una constante de proporcionalidad que es **4**, esto se ve reflejado en la gráfica que es una línea recta, viéndolo como una sucesión de números encontraron la expresión algebraica de ésta, es decir, encontraron el caso general que hace más sencillo este caso particular, la expresión general es **4n+4**. Los alumnos se dieron cuenta que había mucha semejanza entre lo que hicieron ellos y lo que hicieron otros equipos por lo que mostraron actitudes positivas.

Todos los equipos, a excepción de uno, no pudieron encontrar el patrón para el número de azulejos azules, lo veían como una sucesión de números pero lineal, tal vez no lo pudieron encontrar porque en segundo grado aún no se estudian ecuaciones cuadráticas y no están familiarizados con ello.

Solo el equipo B identificó que el número de azulejos azules se podían representar como el número de la alberca elevado al cuadrado, se apoyaron en calculadora para buscar patrones y encontraron la expresión algebraica para la alberca **n**, la cual es $\boldsymbol{n^2}$ **,** el equipo pensó que para conocer el total de azulejos por cada alberca era necesario sumar el número de azulejos azules y blancos, por lo que sumó las expresiones algebraicas de cada una y obtuvo que para la alberca **n** se necesitan $\boldsymbol{n^2+4n+4}$ azulejos. Al explicar sus ideas, el resto de grupo comprendió mejor el funcionamiento de la mente de sus compañeros porque descubrieron nuevas formas de resolver el problema, las diferentes exposiciones les permitieron a los alumnos constatar que otros también tienen bloqueos debilitando el miedo al fracaso, el exponer y tratar de convencer a otros de que una conjetura es verdadera es una forma de experimentar la necesidad de demostración en matemáticas (Callejo, 1994), lo cual es una actitud matemática favorable a desarrollar.

COMENTARIOS DE ALUMNOS SOBRE EL CURSO

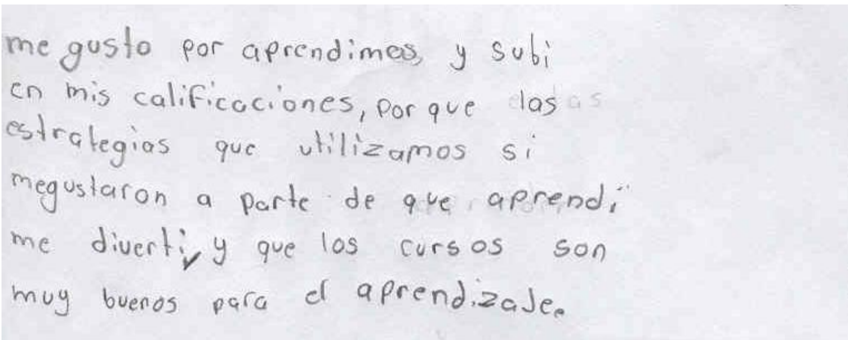

me gusto por aprendimos, y subi
en mis calificaciones, por que las
estrategias que utilizamos si
megustaron a parte de que aprendi
me diverti y que los cursos son
muy buenos para el aprendizaje.

Figura 3.14 *Es importante observar que el alumno reflexiona sobre el avance de sus aprendizajes, y que además de aprender se divirtió.*

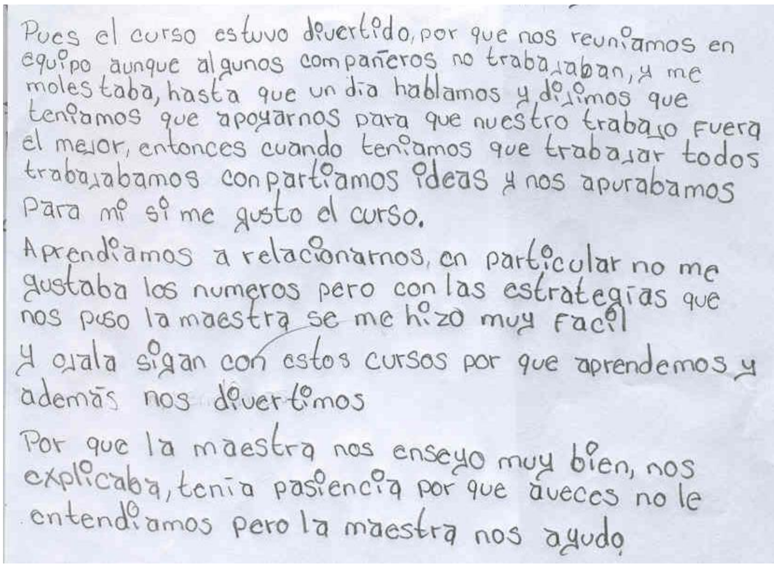

Pues el curso estuvo divertido, por que nos reuniamos en equipo aunque algunos compañeros no trabajaban, y me molestaba, hasta que un dia hablamos y dijimos que teniamos que apoyarnos para que nuestro trabajo fuera el mejor, entonces cuando teniamos que trabajar todos trabajabamos compartiamos ideas y nos apurabamos Para mi si me gusto el curso.
Aprendiamos a relacionarnos, en particular no me gustaba los numeros pero con las estrategias que nos puso la maestra se me hizo muy facil
y ojala sigan con estos cursos por que aprendemos y además nos divertimos
Por que la maestra nos enseyo muy bien, nos explicaba, tenia pasiencia por que avecces no le entendiamos pero la maestra nos ayudo

Figura 3.15

La comunicación en el equipo, el trabajo colaborativo y la retrospección se manifiestan en este comentario pues identifican sus bloqueos y buscan desestabilizarlos, la relación entre los integrantes del equipo mejoró, la alumna muestra un cambio favorable en su actitud hacia las matemáticas al afirmar que aprendió divirtiéndose y se le facilitó. Los resultados de la aplicación de las sugerencias didácticas por los autores mencionados revelan en el comentario un fortalecimiento en los conocimientos, habilidades y actitudes que tienen que ver con la resolución de problemas matemáticos.

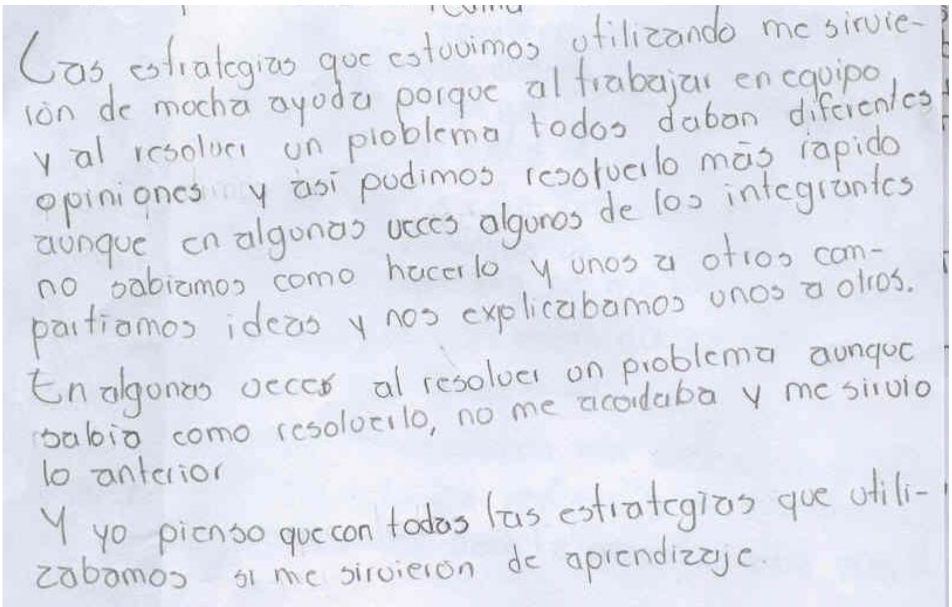

Las estrategias que estuvimos utilizando me sirvieron de mucha ayuda porque al trabajar en equipo y al resolver un problema todos daban diferentes opiniones y asi pudimos resolverlo más rapido aunque en algunas veces algunos de los integrantes no sabiamos como hacerlo y unos a otros compartiamos ideas y nos explicabamos unos a otros.
En algunas veces al resolver un problema aunque sabia como resolverlo, no me acordaba y me sirvio lo anterior
Y yo pienso que con todas las estrategias que utilizabamos si me sirvieron de aprendizaje.

Figura 3.16

La alumna hace notar el trabajo colaborativo que se dio en su equipo, se compartieron ideas y hubo retroalimentación entre los integrantes del equipo; con base en lo anterior se puede afirmar que si se logró un cambio favorable en las actitudes matemáticas.

Pa amí sí me parecio como trabajamos, era divertido, me gustaba cuando nos juntabamos por equipo y nos daban un tema y lo pasabamos a exponer a nuestros compañeros. En Matematicas por ejemplo hubo un problema que se trataba de las albercas de Ana iva aumentando y a como aumentaba el contorno aumentaba lo del centro, estaba facil pero no sabio como explicarlo y con ayuda de la maestra Ma. Eugenia lo logré.

Figura 3.17 *El comentario refleja que tuvieron aceptación las estrategias de trabajo pues la alumna mostró interés por trabajar en equipo y compartir sus experiencias al exponer frente al grupo, también se aprecia que la alumna presentó dificultades para pasar del uso implícito a la descripción explícita pero que finalmente logró superarlas.*

Sobre el curso 2 D.

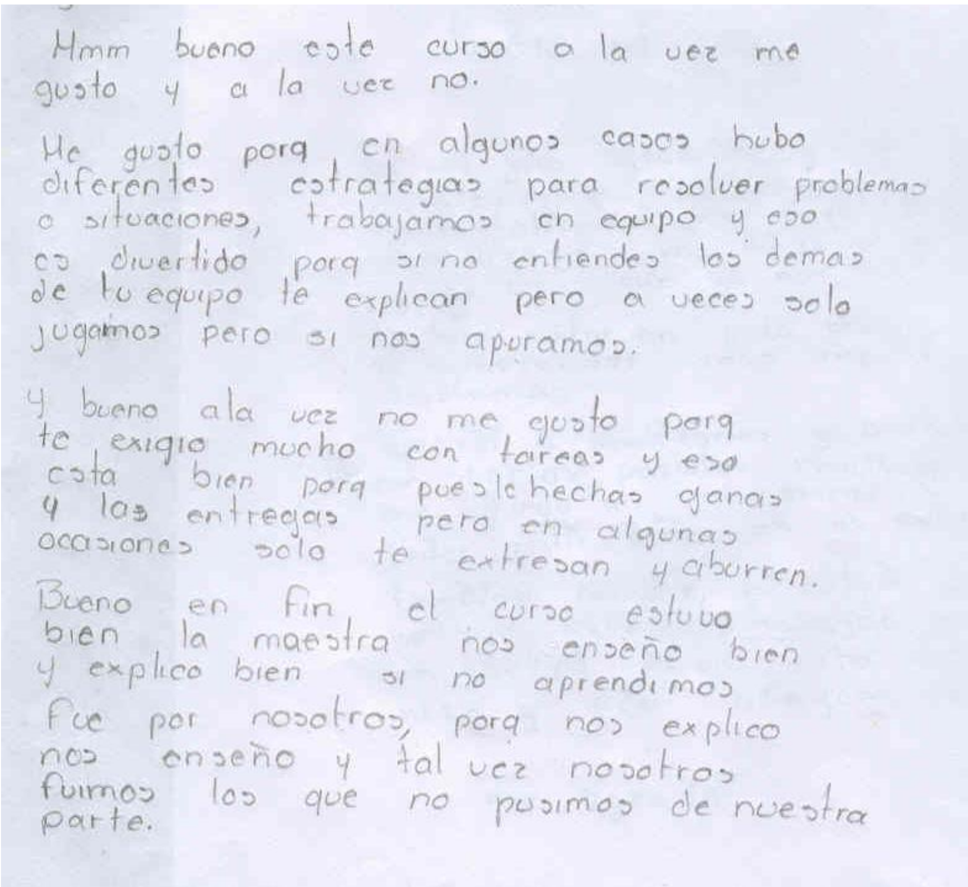
Se me hizo agradable ya que las estrategias que utilizamos no se me complicaron, me facilito el aprendizaje, me hizo recordar algunas cosas que ya no sabia - me hizo estar un poco mas activa y comprender mas rapido los problemas.

aprendi a analizarlos y a relacionarlos con varios posibles resultados; me ayudo a memorizar y a poder salir bien en el examen.

tambien cambio mi estado ya que no me agrada trabajar mucho en equipo pero esta vez lo hize y sin ninguna escusa.

"me agrado"

Figura 3.18 *La alumna hace notar un cambio en su actitud ya que antes no le gustaba trabajar en equipo y ha notado que ya puede hacerlo sin ningún problema, las estrategias que utilizó le facilitaron su aprendizaje comprendió que debe analizar los problemas y mejoró sus calificaciones.*



Hmm bueno este curso a la vez me gusto y a la vez no.

Me gusto porq en algunos casos hubo diferentes estrategias para resolver problemas o situaciones, trabajamos en equipo y eso es divertido porq si no entiendes los demas de tu equipo te explican pero a veces solo jugamos pero si nos apuramos.

Y bueno ala vez no me gusto porq te exigio mucho con tareas y eso esta bien porq pues lo hechas ganas y las entregas pero en algunas ocasiones solo te extresan y aburren.

Bueno en fin el curso estuvo bien la maestra nos enseño bien y explico bien si no aprendimos fue por nosotros, porq nos explico nos enseño y tal vez nosotros fuimos los que no pusimos de nuestra parte.

Figura 3.19 *La alumna reconoce la retroalimentación como una forma de aprender, también expresa algunos sentimientos manifestados durante la resolución como la frustración y el aburrimiento,*

Después de un año de trabajo se requiere saber hasta dónde se alcanzó el estándar curricular apoyado en las investigaciones didácticas de los autores citados, por lo que a continuación se presentan las calificaciones del grupo del bloque V.

Lista de calificaciones de bloque V, 2º D
Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas
Ciclo esc. 2012-2013.

Asignatura	**Matemáticas**
Alumno 1	**8**
Alumno 2	**7**
Alumno 3	**10**
Alumno 4	**6**
Alumno 5	**6**
Alumno 6	**9**
Alumno 7	**BAJA**
Alumno 8	**8**
Alumno 9	**7**
Alumno 10	**8**
Alumno 11	**7**
Alumno 12	**7**
Alumno 13	**8**
Alumno 14	**10**
Alumno 15	**8**
Alumno 16	**6**
Alumno 17	**7**
Alumno 18	**7**
Alumno 19	**7**
Alumno 20	**10**
Alumno 21	**6**
Alumno 22	**9**
Alumno 23	**10**
Alumno 24	**8**
Alumno 25	**8**
Alumno 26	**BAJA**
Alumno 27	**7**
Alumno 28	**10**
Alumno 29	**9**
Alumno 30	**6**
Alumno 31	**10**
Alumno 32	**7**
Alumno 33	**9**
Alumno 34	**10**
Alumno 35	**6**

Figura 3.20
Resultados de la evaluación bloque V de matemáticas del segundo grado grupo "D".

Gráfica de promedio grupal de evaluación bloque V, 2º D
Esc. Tse. Ignacio Romero Vargas.
Ciclo escolar 2012-2013

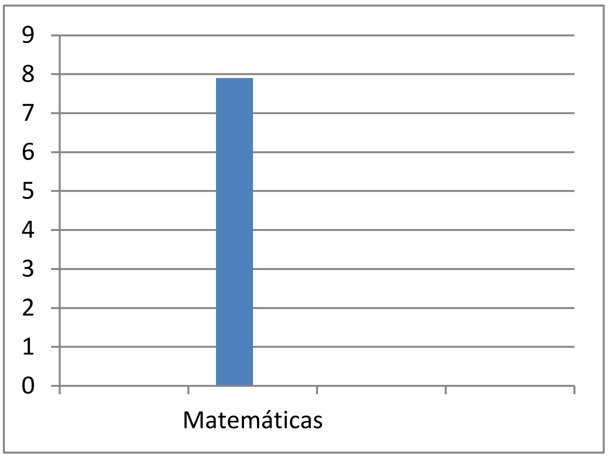
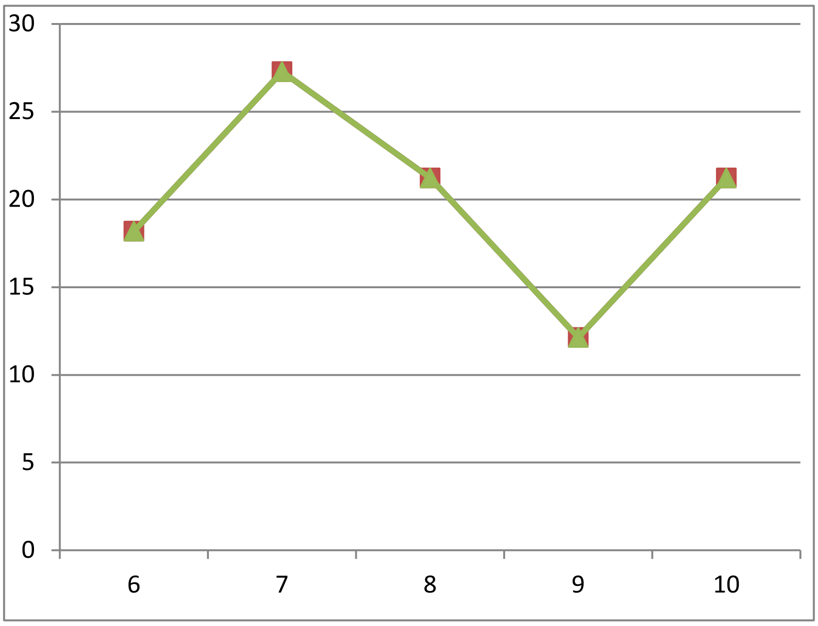


Figura 3.21
La gráfica muestra un promedio general del grupo de 7.9 en el área de matemáticas del bloque V. Comparando con el promedio general de la evaluación diagnóstica que fue de 3.7 se observa un incremento en las calificaciones del grupo (ver figura 1.1-1.3).

Si comparamos los resultados de las calificaciones del bloque V con las calificaciones del examen de diagnóstico se puede observar que hubo una mejora notable, la actitud de generar un cambio positivo tanto en docente como en alumnos fue significativa.
La siguiente tabla representa los resultados de la evaluación del bloque V en términos de porcentajes de respuestas correctas, mostrando el nivel académico alcanzado en el grupo, la estadística inicial fue de 35 alumnos y se tuvieron dos bajas durante el ciclo escolar.

Calificación alcanzada del alumno	frecuencia	fracción	Porcentaje de número de alumnos
6	6	6/33	18.18%
7	9	9/33	27.27%
8	7	7/33	21.21%
9	4	4/33	12.12%
10	7	7/33	21.21%
TOTAL	33	33/33	99.99%

Porcentaje de
No. De alumnos



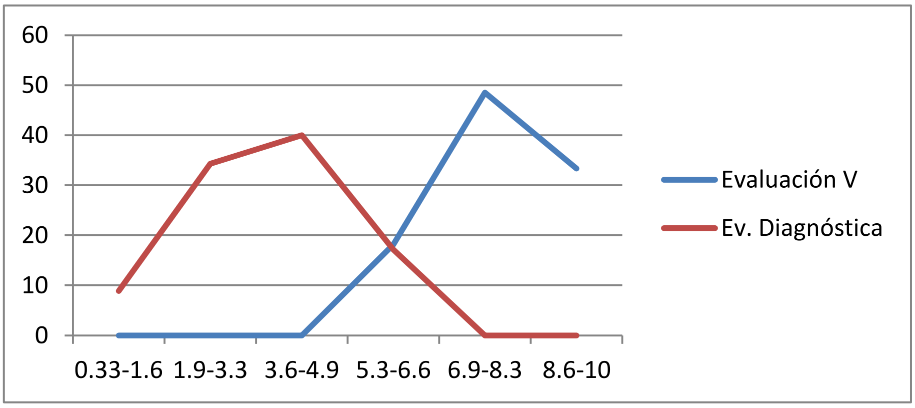
Calificación

Figura 3.22
Gráfica de evaluaciones obtenidas en término de porcentajes de alumnos, obsérvese que los porcentajes más altos están en las calificaciones de 7, 8 y 10.

Para comprender mejor los resultados obtenidos al inicio y al final del curso escolar en el cual se aplicaron las diferentes estrategias de los investigadores citados, se presenta la siguiente gráfica comparativa.

GRÁFICA COMPARATIVA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y EVALUACIÓN BLOQUE V

Porcentaje de alumnos



Intervalos de calificaciones obtenidas.

Figura 3.23
Gráfica comparativa de evaluación diagnóstica y evaluación bloque V.

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICA COMPARATIVA.

- Contextos: La evaluación diagnóstica se aplica a los alumnos al tercer día después de iniciado el ciclo escolar, son alumnos que ya han estado en la institución y conocen como funciona el sistema educativo de la escuela, no se da ningún repaso de los conocimientos adquiridos en primero de secundaria, se consideran 30 reactivos de opción múltiple en el examen, la evaluación escrita es lo único que se considera para obtener una calificación cuantitativa. En la evaluación V se consideran 20 reactivos de opción múltiple para el examen escrito, aunado a esto se considera entrega de tareas y trabajos, participación en clase y evaluación cualitativa.
- En la evaluación diagnóstica el número de alumnos tiende a la alza en las calificaciones de 0.33 a 4.9, en la evaluación V el número de alumnos tiende a la alza en las calificaciones de 6 a 8.
- Es importante hacer notar que no hay alumnos con calificación reprobatoria en la evaluación V, en la evaluación diagnóstica el 82.85% de los alumnos tiene una calificación cuantitativa reprobatoria.
- Se puede observar que la implementación de las estrategias sugeridas por los autores señalados refleja un incremento en la mejora del aprendizaje de los alumnos.
- Comparando las dos gráficas se aprecia que después de un ciclo escolar de trabajo los alumnos lograron alcanzar el paso de nivel primaria a nivel secundaria.
- Existen actitudes favorables hacia el estudio de las matemáticas que sólo son observados durante el proceso de aprendizaje pero que también se reflejan en la evaluación final como son el trabajo colaborativo, la autoreflexión y retrospección del conocimiento, evaluación de sus propios procesos para tomar decisiones, la persistencia hacia el trabajo matemático, saber escuchar y exponer ideas entre otras. Al propiciar y fortalecer estas actitudes se logró un cambio favorable en el alumno, su idea de estudiar matemáticas cambió, ya no era sólo para el estudio de los “genios”, mostró interés y disfrutó del quehacer matemático.

CONCLUSIÓN

La educación matemática suele desarrollar
el rigor lógico, el sentido práctico, el razonamiento
y las facultades de abstracción.
Callejo

Varios investigadores y desde diferentes enfoques han propuesto la resolución de problemas como una actividad por medio de la cual se puede llegar al conocimiento y aprender matemáticas, aunque esta actividad para algunos resulta frustrante. El propósito de la solución de problemas como forma de trabajo diario en el aula no se debe restringir a la aplicación de algoritmos o de cálculos aritméticos, ni a la aplicación de "recetas estereotipadas" en las que los procesos y los conocimientos adquiridos se limitan, el propósito de la resolución de problemas en el aula, como señala Schoenfeld (1991), apunta a enseñar a pensar matemáticamente, es decir, modelar (incluye las capacidades de estructurar el campo o situación que va a modelarse, traducir la realidad a una estructura matemática, interpretar los modelos matemáticos en términos reales, trabajar con un modelo matemático. Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados. Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados, dirigir y controlar el proceso de modelización), pensar, abstraer, y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones, colocando en primer plano los procesos característicos de la actividad matemática (de alto nivel cognitivo), por encima de las rutinas algorítmicas (de bajo nivel cognitivo). Se aplicó la estrategia de aprendizaje basado en problemas (ABP) para mejorar el desempeño de los alumnos y para la resolución de problemas matemáticos se aplicaron las estrategias de Polya, Schoenfeld, Callejo, entre otros. Este tránsito hacia un alto nivel cognitivo permite regular los procesos de aplicación en la resolución de problemas, es decir, usando estrategias directivas aunadas a una selección pertinente de problemas nos permite llegar a pensar matemáticamente y adquirir conocimientos cada vez más formales (Schoenfeld, 1979).

Bajo estas características la resolución de problemas conduce a los alumnos hacia la construcción de conocimientos más significativos, los estudiantes presentan mayor interés en los conocimientos matemáticos cuando la información se presenta en un contexto familiar o cotidiano.

En la resolución de problemas intervienen diversos aspectos del conocimiento, de la conducta y de contexto socio-cultural que determinan la actitud hacia las matemáticas y también las actitudes matemáticas; es esencial guiar al alumno para que descubra a través del trabajo su espíritu matemático y desarrolle sus habilidades y estrategias; si en la resolución de problemas logramos que el estudiante aplique como hábito las técnicas de introspección y retrospección, lograríamos formar en él actitudes positivas hacia la matemática como ser reflexivo, crítico, tener flexibilidad de pensamiento, apertura mental, objetividad, etc. sería capaz de analizar con detalle su problema y trabajar de manera autónoma. En la resolución de problemas es primordial que el alumno desarrolle habilidades y estrategias que le permitan fortalecer su proceso de aprendizaje logrando mejorarlo, esto se vería reflejado en su vida productiva y en la sociedad.

Para propiciar aprendizajes significativos también es importante generar cambios en la enseñanza, el profesor debe dejar a un lado la enseñanza de sólo algoritmos y aritmética que limitan las capacidades y la mente de los estudiantes, debe proponer problemas más profundos a los que se les pueda seguir sacando posibles escenarios de solución, es importante propiciar ambientes de aprendizaje para que el alumno se encuentre motivado y participe de manera consiente en su aprendizaje, retomando a Schoenfeld (1987) y Polya

(1972) el docente debe ser un guía y modelo en la resolución de problemas, ayudando a que el estudiante tome conciencia del proceso poniendo especial atención a los procesos de control y evaluación, tan importante es el resultado del problemas como el proceso para llegar a él. Los docentes deben propiciar en el alumno el paso de los mecanismos de uso implícito a los de descripción explícita propiciando la reflexión y la metareflexión, el hábito de la metareflexión nos ayuda a revelar las capacidades y límites de nuestra mente, estas técnicas nos permiten detectar nuestros progresos hacia el objetivo de crear hábitos eficientes.

La actividad de resolver problemas en la escuela es parte integral de la formación del alumno tal y como lo marca el plan de estudios 2011 de la SEP; a través de la resolución de problemas se desarrollan formas de pensar, se utilizan técnicas y recursos que hacen más eficiente el trabajo autónomo y colaborativo.

Con la aplicación de estas sugerencias de trabajo los alumnos lograron modificar ciertas actitudes de estudio hacia las matemáticas como son:

Mejorar el concepto de sí mismo como usuario de las matemáticas, gustar del proceso de aculturación.

Aplicar el razonamiento matemático en su vida diaria, comprender que hay diversas formas de resolver los problemas.

Desarrollar el hábito del pensamiento racional.

Mejorar la comunicación de ideas sobre procedimientos y resultados al resolver problemas.

A continuación se proponen sugerencias en base a la experiencia de la aplicación de aprendizaje basado en problemas (ABP) al grupo de 2º de telesecundaria, combinado con estrategias didácticas de los autores mencionados con el objetivo de mejorar la enseñanza aprendizaje.

SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE

- Conocer las creencias sobre la resolución de problemas de los alumnos para detectar los posibles bloqueos y diseñar estrategias de solución.
- Es necesario modificar el proceso de aprendizaje del estudiante (hacia un alto nivel cognitivo) con base en: la naturaleza de las actividades propuestas, modo de trabajo de los alumnos y modo de intervención del profesor, ya que es necesario que el estudiante sufra un proceso de aculturación gradual.
- El docente debe fomentar climas de libertad y confianza, de esta forma se propicia la comunicación de los procesos del pensamiento, trabajo en grupo, debate de ideas, desarrollo de habilidades, estrategias y hábitos de estudio, las puestas en común y el desarrollo de actitudes favorables.
- Alumnos y maestros deben realizar trabajos de introspección, retrospección, metareflexión, regulación y control en la resolución de problemas mejorando así las herramientas adquiridas (argumentación, razonamiento formal, etc.). Recordemos las sugerencias de Schoenfeld (1987) y Callejo (1994).
- El docente debe seleccionar y plantear problemas que ofrezcan varias formas de solución con un alto nivel cognitivo para que los estudiantes puedan tomar conciencia de su proceso de aprendizaje y logren aprendizajes significativos.
- Los docentes debemos desarrollar conceptos matemáticos e ideas a partir de las nociones de los alumnos, llevándolos gradualmente por un proceso de aculturación hacia la aplicación del razonamiento matemático en la solución de problemas personales, sociales y naturales.

- El docente debe propiciar actividades gratificantes que motiven a los estudiantes al quehacer matemático.
- Manejar las diferentes pautas para la resolución de problemas: a) familiarización con el problema; b) Utilizar y ampliar los recursos; c) buscar, seleccionar y aplicar heurísticas (estrategias cognitivas); d) mantener control sobre las estrategias metacognitivas.
- Realizar trabajo en equipo para propiciar la comunicación de ideas, las puestas en común, el trabajo colaborativo, la reflexión y la exposición de ideas.
- Aprovechar de la mejor manera los errores cometidos por el alumno, a través de la presentación de contraejemplos se tiene una forma distinta de aprender.
- Pedir a sus estudiantes argumentar de manera clara sus respuestas respetando su proceso, pues argumentar no se aprende en poco tiempo.
- Ayudar al estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades y limitaciones, ayudarlo a crear y utilizar su repertorio de estrategias de pensamiento y razonamiento para lograr objetivos de aprendizaje complejos, es decir, sea capaz de resolver problemas de manera autónoma.
- Desarrollar y fomentar actitudes favorables hacia las matemáticas y hacia las actitudes matemáticas apoyadas en las estrategias de investigadores como Polya, Schoenfeld y Callejo entre otros.
- Es importante cuidar el papel que juega la afectividad en la resolución de problemas ya que puede ser el motor que impulse o reprima la búsqueda de la solución (Halmos, 1991).

Referencias bibliográficas:

Callejo, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Editorial Narcea.

DGDC y DGFCMS de la SEP (2011). Programas de estudio 2011 guía para el maestro. Educación básica secundaria, Matemáticas. México: Autor.

Dirección general de desarrollo curricular de la SEP (2012). *Serie: Herramientas para la educación en educación básica*. México: Autor.

Ediciones Castillo (2009). *Conocimientos y habilidades 6º de primaria*. México: Editorial Mcmillan.

González, Ma. De Lourdes. *Habilidades 5º grado de primaria*. México: Editorial Seemargs.

Grupo Azarquiel (2007). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Juárez, J. Antonio; Macías, J. Carlos; Hernández Lidia A.; Guzmán, M. Esperanza; Torrijos, M. Teresa y Zeleny, Pablo R. (2012). *Desarrollo de competencias matemáticas basado en la resolución de problemas*. Nivel secundaria. Programa de actualización en matemáticas para la educación básica. Ciclo escolar 2012-2013. SEP, SNTE, BUAP. México.

Klausmeier, Herbert y Goodwin, William (1997). *Enciclopedia de psicología educativa. Aprendizaje, habilidades humanas y* conducta. México: Oxford University Press-Harla S.A. de C.V.

Polya, G. (1972). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1981*). Mathematical Discovery*. Nueva York: Editorial Combinada.

Barrantes, H. (2006). *Resolución de problemas. El Trabajo de Allan Schoenfeld*. Recuperado de http://www.google.com.mx/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CC4QFjAB&url=http%3A%2F%2Frevistas.ucr.ac.cr%2Findex.php%2Fcifem%2Farticle%2Fdownload%2F6971%2F6657&ei=0n67UqOMGImD2gXsxoHIDA&usg=AFQjCNF2habL2HEFO7UewoeqBMgfDOOkjw&bvm=bv.58187178,d.b2I

Caballero, A., Blanco, L. (2007). *Las actitudes y emociones ante las matemáticas estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*. Recuperado de http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/anacaba.pdf

Callejo y Vila, (2003). *Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas*. *Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria*. Recuperado de: http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/mcallejo+vila.pdf

Chavarría, J., Alfaro C. (2002). *Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld*. Recuperado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/Resoluciondeproblemas.pdf

De Bono E. *El pensamiento creativo*. *El poder del pensamiento lateral para la creación de nuevas ideas*. Ed. Paidós México. Recuperado de: http://www.utntyh.com/alumnos/wp-content/uploads/2013/04/El-Pensamiento-Creativo_De-Bono.pdf

De Faria, C. (2008). *Creencias y matemáticas*. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6900/6586

Gómez, C., Valero, P. *Calculadoras gráficas y precálculo: El impacto en las creencias del profesor. Recuperado de* http://ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/ued/libros/libroaportes/creencias.pdf

NCTM. (2000).*Principios y estándares para la educación matemática*. Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20_Spanish_e-Final.pdf

Santos, T. *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Recuperado de* http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

UPM. (2008). *Aprendizaje basado en problemas. Guías rápidas sobre nuevas metodologías. Madrid. Recuperado de* http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_basado_en_problemas.pdf

Varela, M. P. *La resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias. Aspectos didácticos y cognitivos.* Recuperado de http://biblioteca.**ucm.es**/tesis/19911996/S/5/S5006501.pdf

APÉNDICE A: EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1. Observa la secuencia y elige la opción que contenga la serie de números que la complete.
   5, 10, 15, 25, 40, _____, ______, ______,

   a) 55, 75, 95
   b) 45, 50, 55
   c) 65, 105, 170
   d) 60, 80, 90

2. La regla para esta sucesión está en el inciso.

   a) A cada número se le aumentan cinco unidades.
   b) El número anterior es quince unidades menor que el posterior.
   c) La sucesión es de diez en diez.
   d) El tercer número es la suma de los dos anteriores.

   Contesta las preguntas 3, 4 y 5. En la siguiente cifra 576948231.

3. El número que ocupa las centenas de millas es:

   a) 9
   b) 4
   c) 6
   d) 5

4. El valor posicional del número cuatro es:

   a) 4
   b) 400
   c) 40000
   d) 4000

5. El valor absoluto del número seis es:

   a) Seiscientos mil
   b) Sesenta mil
   c) Seis mil
   d) Seis millones

6. María y Antonio donaron a la Cruz Roja $36.00, Antonio aportó la tercera parte de lo que dio María. Si usamos "X" la ecuación para plantear el enunciado anterior se encuentra en la opción:

a) $x + \frac{x}{3} = 36$
b) $x\frac{x}{3} + x\frac{x}{3} = 36$
c) $3x + 3x = 36$
d) $\frac{x}{x} + \frac{x}{3} = 36$

7. La cantidad aportada por María es:

a) 9 pesos
b) 72 pesos
c) 36 pesos
d) 27 pesos

8. En una fiesta se compraron dos pasteles y se consumieron las $\frac{3}{4}$ partes de estos, en total ¿cuánto pastel se consumió?

a) $\frac{3}{4}$ de pastel
b) $1\frac{1}{2}$ de pastel
c) $\frac{1}{2}$ de pastel
d) $\frac{6}{8}$ de pastel

9. A la línea perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento se le llama:

a) Mediatriz
b) Bisectriz
c) Perpendicular
d) Diagonal

10. Para construir un polígono regular, Pedro trazó una circunferencia y dentro trazó ángulos centrales de 45^0,¿qué polígono regular va a trazar?

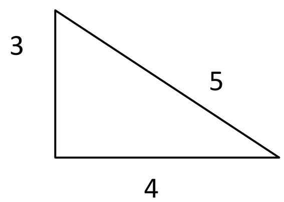
a) Triángulo equilátero
b) Pentágono regular
c) Heptágono regular
d) Octágono regular

11. En una fábrica de pinturas se quieren repartir por igual 150 litros en recipientes de 0.250 litros. Si cada recipiente se llena a su capacidad ¿cuántos recipientes se necesitan?

a) 300
b) 600
c) 200
d) 400

12. Tomando en cuenta las medidas de la siguiente figura, el valor del perímetro y el valor del área son:

a) P = 12; A = 6
b) P = 14; A = 6
c) P = 24; A = 12
d) P = 7; A = 12



13. Si Colima tiene una extensión territorial de 545500 hectáreas, ¿cuál es su superficie en kilómetros cuadrados?

    a) 5.455 Km^2
    b) 54.55 Km^2
    c) 545.5 Km^2
    d) 5455 Km^2

14. Si al lanzar al aire una moneda 12 veces, esta cae con el águila en cuatro ocasiones, la probabilidad frecuencial de obtener águila es:

    a) $\frac{12}{4}$
    b) $\frac{4}{12}$
    c) $\frac{4}{24}$
    d) $\frac{1}{10}$

15. Un experimento _____________ es aquel en el que no puede predecirse con certeza el resultado.

    a) Frecuencial
    b) Probabilístico
    c) Aleatorio
    d) Clásico

16. Si la probabilidad de que un foco nuevo salga defectuoso es del 2 %, ¿qué probabilidad hay que el próximo foco que se elija esté en buenas condiciones?

    a) 80 %
    b) 90 %
    c) 98 %
    d) 100 %

17. Si tienes que adivinar el último dígito de un número ¿cuál es la probabilidad de que aciertes?

    a) $\frac{1}{10}$
    b) $\frac{1}{5}$
    c) $\frac{1}{4}$
    d) $\frac{1}{20}$

18. Si contamos con las siguientes cifras: +6.5, -2.0, -7.2, -4.7, +8.0; la opción que las presenta ordenadas de menor a mayor es:

    a) +6.5, -2.0, -7.2, -4.7, +8.0
    b) +8.0, +6.5, -2.0, -4.7, -7.2
    c) -7.2, -4.7, -2.0, +6.5, +8.0
    d) -2.0, -7.2, -4.7, +8.0, +6.5

19. En los números enteros que distancia existe en la siguiente pareja de números con signo (+32 a -9)
    a) 41
    b) +23
    c) -41
    d) -23

20. En los números enteros que distancia existen en la siguiente pareja de números con signo (+29.4 a +6.0)

    a) 41
    b) +23.4
    c) -41
    d) -23.4

21. En un triciclo el diámetro de las ruedas traseras mide la tercera parte del diámetro de la rueda delantera. ¿Cuántas vueltas dan las ruedas traseras si la delantera da 30 vueltas?

    a) 3 vueltas
    b) 10 vueltas
    c) 30 vueltas
    d) 90 vueltas

22. Cuál será la medida del largo de una etiqueta de forma rectangular para ponerla alrededor de una botella, si sabemos que el diámetro es de 6 cm.

    a) 6 cm.
    b) 12 cm.
    c) 18.84 cm.
    d) 24 cm.

23. Un automóvil recorre 60 Km con 4 litros de gasolina. Si llamamos “X” a la cantidad de litros de gasolina que consume el automóvil y llamamos “Y” a la cantidad de kilómetros que recorre con esa gasolina, señala cual de las siguientes expresiones algebraicas permite saber la distancia recorrida por el automóvil a partir de los litros de gasolina consumida.

    a) Y = 60X
    b) X = 15Y
    c) Y = 15X
    d) X = 60Y

En la siguiente tabla de variación proporcional se presenta el tamaño real de una célula y su tamaño al verlas utilizando un microscopio óptico. Completa la tabla y encuentra la expresión algebraica que permite saber el tamaño final de la célula.

	Tamaño real (micras)	Tamaño final (micras)
Bacteria 1	3	360
Espermatozoide	8	960
Cloroplasto	11	24. ( )
Glóbulo rojo	12	25. ( )

26. La expresión algebraica que se usa en el inciso anterior es:

    a) Y = 120X
    b) Y = 2X
    c) Y = 3X
    d) Y = 12X

27. La expresión algebraica Y = 4X está asociada a una situación de proporcionalidad. Si X vale 5 ¿cuánto vale Y?

    a) Y = 0
    b) Y = 20
    c) Y = 32
    d) Para X = $\frac{1}{4}$

    Los resultados de las siguientes operaciones son:

28. (+10) + (-17) =

    a) +7
    b) -7
    c) +10
    d) -1

29. (-23) + (-9) =

    a) +20
    b) 26
    c) -32
    d) -23

30. (-4.25) – (-1.03) =

    a) 5.8
    b) -3.71
    c) -3.32
    d) -3.22

APÉNDICE B

APORTACIONES DE DIFERENTES INVESTIGADORES ACERCA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Wallas G. (1926) distingue cuatro etapas en la resolución de un problema: familiarización o información, incubación, inspiración, verificación.

Poincaré H. (1932) describe dos tipos de espíritu matemático, el lógico y el intuitivo. La diferencia está en la naturaleza de las representaciones o en la forma en que influyen en el trabajo mental.

Polya (1945) su trabajo llegó a ser un referente importante en la educación matemática en Alemania y que posteriormente se retoma junto con el trabajo de Félix Klein orientando la educación matemática durante la década de los 60s.

Polya (1958) afirma que en la resolución de problemas aunque no hay reglas precisas, hay indicaciones que son a menudo útiles.

Polya (1966) afirma que el resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero esa prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.

Polya (1972) describe su proceso de resolución de problemas en cuatro pasos: 1) comprender el problema, 2) concebir un plan, 3) ejecutar el plan, 4) examinar la solución obtenida.

Bono E. (1972) puede suceder que una situación sea un problema porque se contempla de determinada manera, vista de otra forma el camino a seguir puede ser tan evidente que el problema deje de existir.

Bono E. (1972) dice que en la resolución de problemas la búsqueda de estrategias requiere a veces explorar casos particulares, casos límite o casos análogos. Algunas técnicas pueden ayudar como: reformular el problema, cambiarlo de contexto matemático; intentar diferentes representaciones gráficas de la situación, colorear las representaciones o concebirlas de forma dinámica, descomponer o recomponer la situación; cambiar la función de los elementos que intervienen en la misma.

Polya G. (1972) describe sus estrategias heurísticas que son a su juicio naturales, simples, triviales y surgen del sentido común.

Strasbourg (1973) hace notar que el tiempo que se dedica a la resolución de un problema no puede preverse de antemano y que la inversión de energía y de afectividad es importante en esta tarea.

Hadamard J. (1975) ha señalado que el trabajo preliminar de familiarización con el problema, la incubación y la iluminación parecen tener lugar de forma análoga en muchos investigadores. Por el contrario, las representaciones concretas están lejos de ser las mismas para todos. Así mismo señala que todo trabajo mental y en particular el trabajo de descubrimiento implica la cooperación del inconsciente ya sea superficial o un poco más o menos profundo, en este inconsciente se produce tras un trabajo preliminar consciente el desencadenamiento de ideas.

Krutetskii V. A. (1976) distinguió tres tipos de espíritu matemático en los alumnos: analítico, geométrico y una combinación de ambos, el armónico.

Flawell (1976) acuñó el término metaconocimientos.

Adda J. (1976) menciona que cuando los alumnos se ahorran en cierto modo el esfuerzo de tener que elegir los conocimientos que tienen que aplicar a la situación propuesta genera fenómenos parásitos.

Schoenfeld (1979) afirma que encontrar una heurística apropiada no es condición suficiente para resolver bien un problema, pero es condición necesaria.

Schoenfeld (1979) señala que además de seleccionar una heurística adecuada se debe usar una estrategia directiva, es decir, es necesario regular el proceso de aplicación de dicha heurística, no se trata sólo de hacer, sino de reflexionar sobre lo que se está haciendo y de cómo ello puede ayudar en la resolución de un problema.

Polya (1981) propone una clasificación a los problemas en relación a los conocimientos, a las experiencias previas de los alumnos y a la situación en que estos se proponen. Distinguió cuatro tipos de problemas: problemas en que la regla que hay que aplicar salta a la vista, problemas en que hay que elegir la regla que se debe aplicar, problemas en que hay que elegir una combinación de reglas, problemas en que hay que investigar.

Polya (1981) señala que el buen investigador se parece a un buen general: sabe que un buen ataque bien preparado puede fracasar y prevé una línea de retirada. Un buen plan debe elaborarse de manera bastante flexible y bastante adaptable para responder a las dificultades imprevisibles que se encontrarán.

Gaulin C. (1982) manifiesta que la diferencia entre un ejercicio y un "verdadero problema" es relativa todo depende de los conocimientos y experiencias anteriores del alumno.

Garofalo J. y Lester F (1985) dentro de los metaconocimientos consideraron dos aspectos relacionados entre sí, 1) los conocimientos y creencias acerca de los fenómenos cognitivos, 2) al regulación y el control de los actos cognitivos.

Schoenfeld (1985) realizó importantes investigaciones ya que inicialmente documentó aspectos relacionados con el empleo de estrategias heurísticas, la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la relevancia de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos.

Schoenfeld (1985) establece que en la resolución de problemas aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, dominar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas "tácitas del juego".

Schoenfeld (1985) afirma que con relación a las prácticas de instrucción, existen tres actividades de aprendizaje que son relevantes en el desarrollo de la instrucción: (i) Un problema con soluciones múltiples donde el profesor presenta un problema e invita o provee oportunidades a sus estudiantes para que resuelvan el problema de maneras distintas; (ii) un problema con múltiples cambios donde el profesor motiva a sus estudiantes a resolver variaciones de un problema después de que el problema original ha sido resuelto. La variación del problema puede también ocurrir en el proceso de resolver el problema; (iii) múltiples problemas con una solución donde los profesores orientan o guían a sus estudiantes a usar un método de solución para resolver un conjunto de problemas. El conjunto de problemas puede poseer diferentes características superficiales, pero comparten la misma estructura profunda.

Adda J. (1985) señala que no se puede hacer un estudio didáctico de las respuestas de los alumno a las cuestiones de matemáticas sin tener en cuenta la institución desde donde se pregunta a los alumnos, mostró algunas de las diferencias entre los presupuestos de la comunicación habitual y los presupuestos de las cuestiones matemáticas escolares.

Schoenfeld (1985) afirma que las estrategias descritas por G. Polya son etiquetas que designan familias de estrategias semejantes y a diferencia de los algoritmos, no son prescriptivas sino descriptivas.

Kilpatrick (1985) el término problema se delimita atendiendo a diferentes puntos de vista, el psicológico (el papel que juegan los problemas en la enseñanza de las matemáticas), el matemático (qué es un problema), y el didáctico (cómo se enseña a resolver problemas).

Schoenfeld (1985) llegó a la conclusión de que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores como los recursos, el control (estrategias metacognitivas) y el sistema de creencias.

Adams J. L. (1986) clasificó los bloqueos de la siguiente manera. Bloqueos de origen cognitivo: a) perceptivos; b) uso de un lenguaje inadecuado; c) rigidez mental. Bloqueos de origen afectivo y de origen cultural.

Schoenfeld (1986) y **Resnick, (1987)** recomiendan que se dedique mucho tiempo a las acciones sobre los objetos y a la discusión oral porque esto ayuda a ver la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel, es decir la manipulación de objetos y la discusión oral ayuda a comprender la relación entre el movimiento de los objeto y su operatividad con símbolos algebraicos.

Suydam (1987) sus investigaciones muestran que cuando los estudiantes conocen diversas estrategias heurísticas tienen más recursos para abordar la resolución de un problema, de modo que si no han elegido una estrategia de forma acertada, conocen otros modos de afrontar la tarea.

Schoenfeld (1987) distingue tres aspectos de las metacognición, 1) los conocimientos acerca de los propios procesos de pensamiento, 2) el control o autorregulación, 3) las creencias e intuiciones sobre uno mismo, sobre el tema, sobre las matemáticas, que determinan la conducta del individuo.

Schoenfeld (1987) señala algunas estrategias didácticas para mejorar el proceso de regulación; a) revisar, analizar y valorar el proceso de resolución de un problema en relación al comportamiento de los expertos; b) el profesor resuelve un problema delante de los alumnos presentándose como modelo de conducta metacognitiva; c) el profesor resuelve un problema con toda la clase haciendo de moderador y regulador del proceso e invitando a la discusión; d) los alumnos resuelven problemas en pequeños grupos y el profesor interviene ocasionalmente sin dar pistas formulando preguntas con el objeto de tomar conciencia del proceso.

Schoenfeld (1988) afirma que para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra es fundamental el concepto de variable, adquirir este concepto supone la conjunción de dos procesos que son generalización y simbolización, el concepto de variable incluye múltiples significados y corresponden con las distintas formas de enfrentar la generalización.

Mc Leod (1989) considera que el dominio afectivo en educación matemática engloba creencias, actitudes y emociones.

Ernest (1989) las creencias tienen un impacto bastante significativo en la enseñanza de las matemáticas y argumenta que los conocimientos matemáticos son importantes pero que las diferencias más significativas que se producen en las actuaciones del profesor están marcadas por las creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje. Además señala tres componentes de las creencias del profesor de matemáticas:
• Perspectiva o concepción de la naturaleza de la matemática.
• Modelo sobre la naturaleza de la enseñanza de la matemática.
• Modelo del proceso de aprendizaje en matemática.

Pimm D. (1990) “decir las cosas en voz alta tiene una fuerza especial y, con frecuencia, las ideas sólo pueden examinarse de forma adecuada cuando se exteriorizan en cierta medida”.

Halmos P. (1991) señala que el estilo, matemático en la resolución de problemas está relacionado con las emociones.

Guzmán (1991) menciona que si pretendemos mejorar nuestros procesos de pensamiento en el tratamiento de problemas de forma eficaz es absolutamente necesario disponer de técnicas que nos permitan examinarlos a fondo, compararlos con los modelos que nos fijamos como deseables, para así poder señalar nuestras líneas de acción y detectar nuestros progresos hacia el objetivo de crear en nosotros hábitos eficientes.

Ernest (1991) dice que las transformaciones en las creencias y en la práctica docente permiten que el profesor se vaya acomodando a las tendencias actuales de la sociedad y de la educación matemática, y así ofrezca un tipo de enseñanza que sitúe el saber matemático dentro del proceso de democratización de la sociedad, a través de la capacitación para resolver problemas que contribuyen a la justicia social.

Schoenfeld (1991, 1992) señala que quien apunta la conveniencia no tanto de hablar de enseñar a resolver problemas como de enseñar a pensar matemáticamente, es decir moldear, simbolizar, abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones. En este marco, los problemas jugarían el papel esencial de punto de partida de las discusiones matemáticas, colocando en primer plano los procesos característicos de la actividad matemática (de alto nivel cognitivo), por encima de las rutinas algorítmicas (de bajo nivel cognitivo).

Mc Leod (1992) y **Gómez-Chacón, (2000)** dice acerca de las emociones que podemos definir éstas como la respuesta afectiva caracterizada por la activación de Sistema Nervioso Autónomo (SNA) ante la interrupción y discrepancias entre las expectativas, pensamientos, del sujeto y lo que éste experimenta, las acciones; serían el resultado del aprendizaje, de la influencia social y de la interpretación.

Schoenfeld (1992) plantea la necesidad de explicitar el significado en el uso del término "resolución de problemas" en los programas de investigación o propuestas del currículum.

Schoenfeld (1992) "El término [resolución de problemas] ha servido como un paraguas bajo el cual se realizan radicalmente diferentes tipos de investigación. [Una exigencia] mínima debe ser un requerimiento *de facto* (ahora es la excepción más que la regla) que cada estudio o discusión de la resolución de problemas se acompañe de una definición operacional del término y ejemplos de lo que significa para el autor….Gran confusión emerge cuando el mismo término se refiere a una multitud de algunas veces contradictorios de comportamientos típicamente no especificados".

Schoenfeld (1992) "…Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemática] también como los modos apropiados de pensamiento matemático- las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique".

Schoenfeld (1992) reconoce que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones. Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea…El proceso de "hacer" matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (NRC, 1989, p. 31) (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

Schoenfeld (1992) reporta que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no había sido exitoso, explica que una razón para esta falta de éxito podría ser que las heurísticas de Polya representaban nombres de una categoría larga o extensa de procesos que incluían otras sub-estrategias que los estudiantes no reconocían o accedían en sus intentos de resolución de problemas. Schoenfeld propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso. En particular sugiere (a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y (c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

Schoenfeld (1992) presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas: (a) el conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema; (b) estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. (c) las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?) y (d) las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

Mc Leod (1992) considera tres aspectos de la afectividad en la resolución de problemas; las emociones, las actitudes y las creencias.

Mc Leod (1992) las ideas sobre las matemáticas junto con la experiencia que proporciona la enseñanza formal de esta disciplina van forjando un conjunto de creencias sobre la materia que condicionan la manera de afrontar la resolución de problemas, estas creencias se pueden clasificar según su objeto como: creencias sobre las matemáticas, sobre unos mismo, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto escolar.

Schoenfeld (1992) acuñó el término "inculturación" para designar las formas propias de proceder del matemático.

Schoenfeld (1994) aprender a pensar matemáticamente significa: (a) desarrollar un punto de vista matemático que valore el proceso de matematización y abstracción, así mismo, tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras (desarrollo del sentido matemático) .

Callejo (1994) afirma que en un "problema matemático" el método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto, por tanto debe investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos; es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo y al contexto en que se plantea la cuestión.

Callejo (1994) hay múltiples aspectos del conocimiento y de la conducta relacionados con la resolución de problemas: toma de decisiones de la selección de conocimientos a aplicar, de la forma de planificar el trabajo, de la elección de una estrategia, abandonar o continuar el trabajo emprendido, estilos matemáticos, actitudes como la perseverancia, la flexibilidad el espíritu reflexivo, las emociones y sentimientos.

Callejo (1994) para resolver un problema es necesario conocer el campo específico al que se refiere el problema, saber regular y controlar dichos conocimientos y afrontarlo con las actitudes matemáticas adecuadas. Las emociones están presentes a lo largo del proceso de resolución y de bloqueos cognitivos, afectivos y socioculturales.

Puig (1998) reinterpreta y extiende algunas de las dimensiones del modelo de Schoenfeld en la presentación del componente de competencia de un modelo teórico local. El modelo de competencia no se define como "las creencias que los resolutores tienen" sino como una creencia particular que forma parte de la conducta competente del estilo heurístico de resolución de problemas ("la tarea de resolución de problemas se realiza con fines epistémicos") y con el gestor, que en el modelo de competencia es lo que llamo el "gestor instruido"

Schoenfeld (2007) sugiere que las dimensiones pueden explicar el éxito o fracaso de los estudiantes, pero no explican cómo y por qué los estudiantes exhiben esos comportamientos al resolver problemas.

Alonso, F. y Barbero, C. (2007) afirman que para ayudar a ver la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel es necesario manipular materiales.

APÉNDICE: C

VALORES Y ACTITUDES MATEMÁTICAS

La presente lista no conlleva un orden, son algunos valores y actitudes que se requieren para un modelo deseable de conducta en el quehacer matemático.

Reflexivo	Perseverancia
Autoreflexión	Colaborativo
Habituado a resolver problemas.	Respeto
Participativo	Flexibilidad de pensamiento.
Confianza en las propias capacidades.	Apertura mental.
Habituado a puestas en común.	Objetividad
Explicitar heurísticas.	Perspicacia
Tolerancia	Buena autoestima.
Amabilidad	honradez
Solidaridad	Democracia
Motivación	Espíritu de búsqueda e investigación
Espíritu abierto.	Analítico
Crítico	Se concentra en la tarea sin vigilancia.
Cumple normas	Trabajo colaborativo.
Se sabe comunicar.	Responsable
Puntualidad	Cortesía
Interés	Espíritu de cuestionamiento.
Habituado a debatir ideas.	Observador
Actitud positiva hacia las matemáticas.	Valorar las matemáticas como herramienta.
.	Actitud positiva hacia el entrenamiento de tareas matemáticas complejas.