Dedico esta tesis de licenciatura
especialmente:

A mis padres:
José Vicente Vargas López
María Rutilia Martínez Morales

A mis hermanos:
Cristina, Humberto, Liliana y
Nely.

A mi novio:
Francisco Vázquez

Elena
Julio 2014

Agradecimientos

Principalmente agradezco a Dios por darme la oportunidad de estar en las vísperas de mi graduación y más aún, por todo lo vivido.

También de una manera muy especial doy gracias a mi familia por el apoyo y amor que siempre me han brindado. Especialente a mis padres. A mi madre que es el ser más maravilloso de todo el mundo. Gracias por el apoyo moral, tu cariño y comprensión que desde niña me has brindado, por guiar mi camino y estar junto a mi en los momentos más difíciles. A mi padre porque desde pequeña ha sido para mi un gran hombre maravilloso al que siempre he admirado. Gracias por guiar mi vida con energía, esto ha hecho que sea lo que soy. Gracias porque siempre están conmigo en los buenos momentos de la vida y en los no tan buenos, porque gracias a su apoyo, esfuerzo y comprensión; me han inspirado confianza impulsándome a obtener uno de mis principales objetivos.

Quiero agradecer también a Paco que ha venido a iluminar mi camino de amor y esperanza, gracias por estar junto a mi, Dios me premió con tu presencia.

Agradezco a todos los profesores de la FCFM-BUAP que han contribuido en mi formación como matemática, en especial a mis asesores de tesis: María de Jesús López Toriz y Juan Angoa Amador, quienes me han compartido su ayuda y sobre todo su experiencia.

De una manera muy particular a un profesor que admiro y quiero mucho, Lázaro Avendaño Meza quien me apoyó y orientó mucho.

Un agradecimiento a mis sinodales el Dr. Agustín Contreras, el M.C. Manuel Ibarra y el M.C. Armando Martínez por dedicar parte de su tiempo en revisar y corregir esta tesis.

Finalmente, gracias a Esther, César, César Armando, Rober, David, Belén, Paco, Neptha, Rafa, Ulises, Manuel y todos mis amigos por su compañia, confianza, ayuda y apoyo.

Muchas gracias a todos.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructuras algebraico-topológicas en C(X,E)

Tesis
que para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas
presenta:

María Elena Vargas Martínez

Directores de tesis:
Dr. Juan Angoa Amador
Dra. María De Jesús López Toriz

Puebla, Puebla *julio 2014*

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructuras algebraico-topológicas en C(X,E)

Tesis
que para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas
presenta:

María Elena Vargas Martínez

Directores de tesis:
Dr. Juan Angoa Amador
Dra. María De Jesús López Toriz

Puebla, Puebla *julio 2014*

Estructuras algebraico-topológicas en $C(X, E)$

María Elena Vargas Martínez

4 de julio de 2014

Índice general

Introducción

En 1960 se publico el texto *Rings of Continuous Functions* escrito por Leonard Guillman y Meyer Jerison. Este libro es un compendio de resultados acerca de la relación entre un espacio topológico X y el anillo de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, $C(X)$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales con la topología usual.

Los métodos y técnicas para observar en $C(X)$ una estructura algebraico-topológica, se pueden generalizar. La intención de este trabajo es presentar de manera general (usando categorías, el concepto abstracto de estructura algebraica y estructura algebraico-topológica) al conjunto $C(X, E)$ como una estructura algebraico-topológica, donde X es un espacio topológico, E es una estructura algebraico-topológica y $C(X, E)$ es el conjunto de funciones continuas de X a E.

En el Capítulo 1, presentamos los conceptos topológicos básicos necesarios para nuestro trabajo, así como el conjunto de los nulos de un espacio topológico X, $Z(X)$, tan importante para entender a la estructura algebraico-topológica de $C(X)$.

En el Capítulo 2, además de estudiar a $C(X)$, en particular estudiamos a los espacios completamente regulares o espacios Tychonoff, ya que en estos espacios su topología está profundamente relacionada con su anillo de funciones continuas, y además cumplen una propiedad universal respecto a los espacios topológicos, ver Teorema 2.20. En el desarrollo de este capítulo seguimos el Capítulo 3 de Guillman y Jerison [5].

En el Capítulo 3, una vez que hemos presentado a $C(X)$ como ejemplo clásico de estructura algebraico-topológica, ahora desarrollamos los conceptos básicos de categorías para describir en el Capítulo 4 a $C(X, E)$ como estructura algebraico-topológica.

Cabe mencionar que en los capítulos 3 y 4, seguimos algunas partes del trabajo de Agustín Contreras [3]. También usamos el texto *Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats* [1], para desarrollar los conceptos básicos de categorías.

Al final, en el Capítulo 4, como resumen de todo el trabajo desarrollamos con detalle los conceptos de estructura algebraica, estructura algebraico-topológica, construimos estructuras algebraicas para ε^X, donde ε es una estructura algebraica y X un conjunto; y cuando ε es una estructura algebraico-topológica, construimos la estructura algebraico-topológica para ε^X.

Finalmente, estas construcciones definen funtores entre la categoría de conjuntos, **Con**, y la categoría de estructuras algebraicas del mismo tipo, $\mathcal{C}$, o bien entre **Con** y $\mathcal{C}_1$ (la categoría de estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo).

Lugar aparte ocupa el funtor F_p entre **Top** y **Top** (la categoría de espacios topólogicos), donde $F_p(X) = C_p(X, E)$, E es un conjunto subyacente de una estructura algebraica o algebraico-topológica y $C_p(X, E)$ es $C(X, E)$ con la topología de la convergencia puntual. Tal funtor nos proporciona herramientas importantes para analizar la estructura algebraica o algebraico-topológica de $C_p(X, E)$. Por último, en el Teorema 4.28, hacemos una aplicación de este funtor.

María Elena Vargas Martínez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Julio 2014

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian los conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Conceptos básicos y notaciones

Como es usual, $\mathbb{R}$ denotará al conjunto de los números reales y $\mathbb{R}_u$ denotará a $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Para un espacio topológico X, consideremos los siguientes conjuntos:

$\mathbb{R}^X = \{f : f \text{ es una función de } X \text{ a } \mathbb{R}\}$,
$C(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f : X \to \mathbb{R}_u \text{ es continua}\}$ y
$C^*(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f : X \to \mathbb{R}_u \text{ es continua y acotada}\}$.

La suma y el producto de funciones de $\mathbb{R}^X$ definidas por:
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para cada $x \in X$; dotan a este conjunto y a $C(X)$ de una estructura de anillo conmutativo con elemento unitario.

En efecto, es claro que $\mathbb{R}^X$ es un anillo conmutativo con elemento unitario. El elemento cero es la función constante $\mathbf{0}$, el elemento unitario es la función constante $\mathbf{1}$, el inverso aditivo de f es $-f$ y está dada por $(-f)(x) = -f(x)$.

Para $C(X)$ la suma y producto de funciones continuas son funciones continuas. Si f es un elemento de $C(X)$, entonces existe $-f$ que es una función continua, y la función constante $\mathbf{1}$ está en $C(X)$.

Sea X un espacio topológico y sean $f, g \in \mathbb{R}^X$. La relación $f \geq g$ significa que para todo $x \in X, f(x) \geq g(x)$. La función $f \vee g \in \mathbb{R}^X$ se define $f \vee g(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$, para cada $x \in X$. Notemos que para cualesquiera funciones continuas, f y g, y $x \in X$, la función k definida por $k = f \vee g$ satisface que $k \geq f$ y $k \geq g$, y k es una función continua; además para toda $h \in C(X)$ tal que $h \geq f$ y $h \geq g$, entonces $h \geq k$. Por tanto $f \vee g = sup\{f, g\}$, es decir, $k = sup\{f, g\}$. Por otro lado, la función $f \wedge g \in \mathbb{R}^X$ se define $f \wedge g(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$, para cada $x \in X$. De forma análoga $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$.

Si f es una función continua, entonces $|f|$ está definida como $f \vee -f$, es continua y satisface que

$$|f|(x) = |f(x)|, \text{ para cada } x \in X.$$

Definición 1.1. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Definimos:*

(1) *El interior de A, el cual denotaremos por $int(A)$, es la unión de la colección de subconjuntos de A que son abiertos en X. A los puntos que pertenecen a $int(A)$ les llamaremos puntos interiores de A.*

(2) *Un subconjunto V de X es una vecindad del punto x en el espacio X si podemos encontrar un conjunto abierto A que*

satisfaga $x \in A \subseteq V$*, que lo denotaremos por* V_x*. Luego, una vecindad de un conjunto* A *es un conjunto* U *tal que* $A \subseteq int(U)$*.*

(3) *Un punto* $x \in X$ *está en la clausura de* A *si cada vecindad de* x *contiene al menos un punto de* A *(puede ser* x *mismo). El conjunto* $cl(A) = \{x \in X : V_x \cap A \neq \emptyset$ *para cada,* V_x*, vecindad de* $x\}$ *es llamado la cerradura de* A*.*

Definición 1.2. *Sea* X *un espacio topológico,*

(1) X *es* T_0 *si para cada par de puntos distintos* x *y* y *de* X *existe un subconjunto abierto* U *tal que* U *contiene a uno de los puntos* x *o* y*, pero no al otro.*

(2) X *es* T_1*, si para cualesquiera puntos distintos* x *y* y *de* X*, existen subconjuntos abiertos,* U *y* V*, de* X *tales que* $x \in U \setminus V$ *y* $y \in V \setminus U$*.*

(3) X *es espacio Hausdorff o* T_2 *si satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos* x *y* y *de* X*, existen abiertos,* U *y* V*, de* X *tales que* $x \in U$*,* $y \in V$*, y* $U \cap V = \emptyset$*.*

Recordemos que si X y Y son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si y sólo si f es continua, biyectiva y abierta.

Definición 1.3. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función.* f *es encaje si y sólo si* $f : X \to f(X)$ *es un homeomorfismo.*

Lema 1.4. *Sean* E *y* F *subconjuntos de un espacio topológico* X*. Si* E *y* p *tienen vecindades ajenas, para cada* $p \in F$*, y* F *es compacto, entonces* E *y* F *tienen vecindades ajenas.*

Demostración. Para cada $p \in F$, sean U_p y V_p vecindades ajenas de p y E, respectivamente. Luego, se tiene que $\{int(U_p) : p \in F\}$ es una cubierta abierta del compacto F. Así existen puntos en F, $p_1, p_2, ..., p_n$, tales que $F \subset \cup_{i=1}^{n} int(U_{p_i})$. Consideremos $V = \cap_{i=1}^{n} V_{p_i}$ y $U = \cup_{i=1}^{n} int(U_{p_i})$. Tenemos que, $E \subset V$ y $F \subset U$.

Es claro que U es abierto y que V es una vecindad de E. Ahora, supongamos que U y V no son ajenos, es decir, supongamos que existe $z \in U \cap V$, luego $z \in int(U_{p_j})$, para algún $j \in \{1, ..., n\}$ y $z \in V_{p_i}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Así $z \in int(U_{p_j}) \cap V_{p_j} \subset U_{p_j} \cap V_{p_j}$, lo cual es una contradicción, puesto que U_{p_j} y V_{p_j} son ajenos.

Por lo tanto, tenemos que E y F tienen vecindades ajenas. □

Corolario 1.5. *En un espacio Hausdorff, un conjunto compacto y un punto en su complemento tienen vecindades ajenas. Por lo tanto, cada conjunto compacto en un espacio Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sean X un espacio Hausdorff, F un subconjunto compacto y $p \in X \setminus F$. Tomemos $E = \{p\}$, por el Lema 1.4, F y p tienen vecindades ajenas. □

Corolario 1.6. *Cualesquiera dos conjuntos compactos y ajenos en un espacio Hausdorff, tienen vecindades ajenas.*

Demostración. Sean X un espacio Hausdorff y K y F conjuntos compactos y ajenos de X. Para cada $p \in K$ y F compacto, por el Corolario 1.5, existen vecindades ajenas. Luego por Lema 1.4, K y F tienen vecindades ajenas. □

1.2. Conjuntos nulos

En la presente sección revisamos las nociones de conjuntos nulos así como los resultados relacionados con estos conceptos que vamos a utilizar en los siguientes capítulos.

Definición 1.7. *Sea X un espacio topológico y consideremos a $Z(X) = \{f^{\leftarrow}(0) : f \in C(X)\}$, a $Z(X)$ se le llama el conjunto de nulos de X, y al complemento de un conjunto nulo se le denomina como conjunto co-nulo de X. Para $f \in C(X)$ denotaremos $Z(f) = f^{\leftarrow}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Además el conjunto $Z(f)$ es cerrado en X, para cada $f \in C(X)$.*

Observemos que $Z(\mathbf{0}) = X$, $Z(\mathbf{1}) = \emptyset$. Dado un espacio topólogico X, las funciones constantes las denotaremos por $\mathbf{k}$, para cada $k \in \mathbb{R}$.

Notación 1.8. *Si X es un conjunto y τ es una topología sobre X, entonces $Z^*(X) = \{f^{\leftarrow}(0) : f \in C(X)$ y f es acotada$\}$.*

Ejemplo 1.9. *Notemos que para cada función f de valores reales sobre $\mathbb{N}$, como $\mathbb{N}$ es discreto, f es una función continua, así que $C(\mathbb{N})$ (respectivamente $C^*(\mathbb{N})$) es el anillo de todas las sucesiones de números reales (respectivamente, las sucesiones de números reales acotadas). La función identidad i sobre $\mathbb{N}$ definida por $i(n) = n$, pertenece a $C(\mathbb{N})$; sin embargo, i no pertenece a $C^*(\mathbb{N})$. Así, $C(\mathbb{N}) \neq C^*(\mathbb{N})$. Por otro lado el conjunto $Z(i)$ es vacío. Por supuesto existe i^{-1}; de hecho $i^{-1} = j$, donde j es la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es claro que $j \in C^*(\mathbb{N})$, es decir, es una función acotada. Luego $Z(j) = \emptyset$, pero $i = j^{-1} \notin C^*(\mathbb{N})$ y de aquí se obtiene un ejemplo de una función en $C^*(\mathbb{N})$ cuyo conjunto nulo es vacío.*

Lema 1.10. *Sea X un espacio topológico. Si $f, g \in C(X)$ entonces $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$.*

Demostración. El punto $x \in Z(f \cdot g)$, si y sólo si $(f \cdot g)(x) = 0$ si y sólo si $f(x) \cdot g(x) = 0$, si y sólo si $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$, si y sólo si $x \in f^{\leftarrow}(0)$ o $x \in g^{\leftarrow}(0)$, si y sólo si $x \in Z(f) \cup Z(g)$. $\square$

Lema 1.11. *Si X es conjunto y τ es una topología sobre X, entonces $Z(X_\tau) = \{f^{\leftarrow}((-\infty, r]) : r \in \mathbb{R}, f \in C(X)\} \cup \{f^{\leftarrow}([r, \infty)) : r \in \mathbb{R}, f \in C(X)\} = Z(X)$.*

Demostración. Para demostrar la primera contención, sea $Z(f) \in Z(X)$ es decir, $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : |f|(x) = 0\} = \{x \in X : |f|(x) \leq 0\} = \{|f|^{\leftarrow}((-\infty, 0]) : f \in C(X)\}$.

Para la otra contención, sean $f \in C(X_\tau)$ y $r \in \mathbb{R}$, notemos que $(f - \mathbf{r}) \vee \mathbf{0} \in C(X)$, por tanto $((f - \mathbf{r}) \vee \mathbf{0})^{\leftarrow}(0) \in Z(X)$. Afirmamos que $(f - \mathbf{r} \vee \mathbf{0})^{\leftarrow}(0) = f^{\leftarrow}((-\infty, r])$. En efecto, si $(f - \mathbf{r} \vee \mathbf{0})(z) = 0$, entonces $(f - \mathbf{r})(z) \leq 0$, luego, $f(z) - \mathbf{r}(z) \leq 0$, por tanto $f(z) \leq r$. Por otro lado, si $f(w) \leq r$ entonces $f(w) - r \leq 0$, así, $((f - \mathbf{r}) \vee \mathbf{0})(w) = 0$.

Análogamente $(f - \mathbf{r} \wedge \mathbf{0})^{\leftarrow}(0) = f^{\leftarrow}([r, \infty))$. $\square$

Capítulo 2

Algunas caracterizaciones de espacios Tychonoff

En este capítulo damos algunas caracterizaciones de espacios Tychonoff (completamente regulares), utilizando la herramienta topológica algebraica.

La clase de los espacios Tychonoff fue introducida poco tiempo después de que H. Tietze introdujera los espacios normales. En 1930 el matemático ruso Andrei Nikolaevich Tychonoff demostró en su artículo *Über die topologische Erweiterung von Rümen* [2] que todo espacio normal es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto de tipo $[0,1]^M$, para un adecuado conjunto M (los espacios $[0,1]^M$ son conocidos hoy en día como cubos de Tychonoff); y preguntó si la condición de normalidad en su resultado era una condición necesaria. En este artículo *Über die topologische Erweiterung von Rümen* [2], A. N. Tychonoff notó que esto no era así e introdujo los espacios Tychonoff, haciendo ver que dichos espacios topológicos, y unicamente ellos, tienen la propiedad de ser homeomorfos a subespacios de cubos de Tychonoff.

Definición 2.1. *Un espacio topológico X es Tychonoff (o completamente regular) si satisface las siguientes condiciones:*

(1) *X es un espacio T_1; y*

(2) *para cualquier cerrado F de X y cualquier punto $x \in X \backslash F$, existe una función continua, $f : X \to [0,1]$, tal que $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$.*

2.1. Primera caracterización de espacios Tychonoff

En esta parte demostraremos una primera caracterización de un espacio Tychonoff (Teorema 2.3), así como algunos resultados importantes.

Definición 2.2. *Si X es un espacio Hausdorff, $Z(X)$ es una base para los conjuntos cerrados, si y sólo si dado un cerrado en X, F, existe una familia $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset Z(X)$ tal que $F = \cap_{\alpha \in I} Z_\alpha$.*

Teorema 2.3. *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es completamente regular si y sólo si la familia $Z(X)$, es una base para los conjuntos cerrados.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea F un cerrado en X, si $F = X$ entonces $F = Z(0)$. Ahora, supongamos que $F \subsetneq X$. Como X es completamente regular, para cualquier cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(F) \subset \{0\}$, entonces $F \subset Z(f_x)$, es decir $F \subset \cap_{x \in X \backslash F} Z(f_x)$. Por otro lado, supongamos que $(\cap_{x \in X \backslash F} Z(f_x)) \backslash F \neq \emptyset$. Sea $y \in (\cap_{x \in X \backslash F} Z(f_x)) \backslash F$, se tiene que $y \in Z(f_x)$, para toda $x \in X \setminus F$, así, cuando $y \in Z(f_y)$, $f_y(y) = 0$ y cuando $y \notin F$, $f_y(y) = 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\cap_{x \in X \backslash F} Z(f_x) \subset F$.

($\Leftarrow$) Sean F un cerrado en X y un punto $x \notin F$. Por hipótesis existe una familia $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en $Z(X)$ tal que $F = \cap_{\alpha \in I} Z_\alpha$. Luego, existe $g \in C(X)$ tal que $Z_\alpha = Z(g)$, $F \subset Z(g)$ y $x \notin Z(g)$.

Notemos que $g(x) = r$, $r \neq 0$ así existe $r^{-1}\colon X \to \mathbb{R}$ que está definida por $r^{-1}(w) = \frac{1}{r}$. Se tiene que existe $f = gr^{-1} \in C(X)$. Si $m \in F$, entonces $f(m) = g(m) \cdot \frac{1}{r} = \frac{0}{r} = 0$, por otro lado $f(x) = \frac{g(x)}{r} = \frac{r}{r} = 1$.

Como X es Hausdorff, X es completamente regular. □

Definición 2.4. *Sean A y B conjuntos de un espacio topológico X, se dice que A y B son completamente separados si existe $f : X \to [0,1]$, continua tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in A$, y $f(x) = 1$, para cada $x \in B$.*

Teorema 2.5. *Dos conjuntos están completamente separados si y sólo si están contenidos en conjuntos nulos ajenos. Más aún, conjuntos completamente separados tienen vecindades nulas ajenas.*

Demostración. Para la necesidad, si A y B están completamente separados, entonces existe $f : X \to [0,1]$ continua, tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$, para todo $x \in B$. Así los conjuntos

$$F = \{x : f(x) \leq \tfrac{1}{3}\} \text{ y } E = \{x : f(x) \geq \tfrac{2}{3}\}$$

son vecindades ajenas de A y B, respectivamente. Por el Lema 1.11 se tiene que F y E son conjuntos nulos.

Para la suficiencia, sean A y B conjuntos de X tales que existen $Z(f), Z(g) \in Z(X)$ con $A \subset Z(f)$, $B \subset Z(g)$ y $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$. Entonces $|f| + |g|$ no es cero. Luego se puede definir

$$h(x) = \frac{|f(x)|}{|f(x)|+|g(x)|}, \text{ para cada } x \in X.$$

Notemos que $h : X \to [0,1]$ es continua, además h es igual a 0 sobre $Z(f)$ y es igual a 1 sobre $Z(g)$. □

Observación 2.6. *Si X es un espacio completamente regular, F un cerrado en X y $x \in X \setminus F$, entonces existe una función,*

$T : X \to [0,1]$ *continua, tal que* $T(F) \subseteq \{0\}$ *y* $T(x) = 1$. *Se tiene que existe* $f \in C(X)$ *tal que* $f(F) \subseteq \{0\}$ *y* $f(x) = 1$. *Sea* $h = |\boldsymbol{1} - (f \wedge \boldsymbol{1})|$, $f(F) \subseteq \{0\}$. *Si* $z \in F$ *entonces* $h(z) = |1-(f(z) \wedge 1)| = |1-0| = 1$. *Si* $x \notin F$ *entonces* $h(x) = |1-(f(x) \wedge 1)| = |1-1| = 0$. *Ahora sea* $T = \boldsymbol{1} - h$, *entonces* $T(z) = (1-h)(z) = 1 - h(z) = 1 - 1 = 0$ *y* $T(x) = (\boldsymbol{1} - h)(x) = 1 - h(x) = 1 - 0 = 1$. *Luego* $(|T| \wedge \boldsymbol{1})(z) = 0$ *y* $(|T| \wedge \boldsymbol{1})(x) = 1$, *así* $0 \leq |T| \wedge \boldsymbol{1} \leq 1$.

El siguiente teorema es una consecuencia de la Observación 2.6 y la Definición 2.4.

Teorema 2.7. *Sean* X *un espacio completamente regular,* $x \in X$ *y* F *un cerrado de* X *tal que* $x \notin F$, *entonces* $\{x\}$ *y* F *están completamente separados.*

Teorema 2.8. *Sean* X *un espacio completamente regular y* F *un cerrado de* X. *Entonces* F *es una intersección de vecindades nulas.*

Demostración. Consideremos un punto $x \in X \setminus F$, por el Teorema 2.7 y el Teorema 2.5, se tiene que existen $V_x, W_x \in Z(X)$ vecindades ajenas tales que $F \subseteq int(V_x)$ y $x \in int(W_x)$.

Afirmamos que $F = \cap_{x \in X \setminus F} V_x$. Notemos que $F \subset \cap_{x \in X \setminus F} V_x$. Supongamos que existe un punto $x_0 \in \cap_{x \in X \setminus F} V_x \setminus F$. Por el Teorema 2.5, existen $V_{x_0}, W_{x_0} \in Z(X)$ vecindades ajenas, tales que $F \subseteq int(V_{x_0})$ y $x_0 \in int(W_{x_0})$. Como $x_0 \in \cap_{x \in X \setminus F} V_x \setminus F$ y $x_0 \in V_{x_0}$ lo cual es una contradicción.

Así que $F = \cap_{x \in X \setminus F} V_x$. □

Teorema 2.9. *Sean* X *un espacio completamente regular y un punto* $x \in X$, *entonces para cada vecindad,* U, *de* x *existe una vecindad,* V, *nula de* x *tal que* $x \in V \subset U$.

Demostración. Se tiene que $x \in int(U)$, notemos que $(X \setminus int(U)) = F$ es cerrado en X y $x \notin F$. Por el Teorema 2.7 y el Teorema 2.5, existen vecindades nulas y ajenas, V y W, de x y F, respectivamente. Como $V \cap W = \emptyset$, entonces $V \subset X \setminus W \subset X \setminus F = int(U) \subset U$. Así $V \subseteq U$. □

2.2. Segunda caracterización de espacios Tychonoff

En esta sección, vamos a probar otra caracterización de espacios completamente regulares. Para esto, probaremos unos resultados importantes.

Primero, citamos la proposición siguiente que está demostrada en [2], página 30.

Proposición 2.10. *Si $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface:*

(1) $X = \cup\mathcal{B}$, y

(2) si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces, la colección $\tau_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X : \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ con } A = \cup\mathcal{A}\}$ es una topología en X que contiene a $\mathcal{B}$ como base.

Consideremos un conjunto X y una familia $C' \subseteq \mathbb{R}^X$.

Se define la colección τ_1 como la mínima topología para X tal que, para cada $f \in C'$, se tiene que $f : X_{\tau_1} \to \mathbb{R}_u$ es una función continua.

Notemos que las colecciones :

$C_1' = \{f^{-1}(O) : O$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $f \in C'\}$ es una subbase para τ_1.

$C_2^{'} = \{\cap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(O_i) : f_i \in C^{'}$ y $O_i \in \tau_u, i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ es una base para τ_1.

Así $\tau_1 = \{\cup\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq C_2^{'}\}$.

Notación 2.11. *Sean $x \in X$, $r > 0$ y $f \in C^{'}$ denotamos*

$$l_r(f, x) = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < r\} = f^{-1}((f(x) - r, f(x) + r)) \text{ y}$$
$$\mathcal{D}_1 = \{l_r(f, x) : f \in C^{'}, r > 0 \text{ y } x \in X\}.$$

Observación 2.12. *Notemos que $l_r(f, x) \in C_1^{'}$. Denotemos*

$$\mathcal{D}_2 = \{\cap\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{D}_1\}.$$

Así, se tiene que $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ y $\mathcal{D}_2 \subset C_2^{'}$.

Lema 2.13. *Sea $\tau^{'} = \{\cup\mathcal{L} : \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}_2\}$ entonces $\tau^{'} = \tau_1$.*

Demostración. Por definición de $\tau^{'}$ y por la Observación 2.12, $\tau^{'} \subseteq \tau_1$. Resta ver que $\tau_1 \subseteq \tau^{'}$. Para esto, probaremos primero que $\mathcal{D}_2$ es base para τ_1, es decir, demostraremos (1) y (2) de la Proposición 2.10.

Prueba de (1). Es claro que $\cup\mathcal{D}_2 \subseteq X$. Para la otra contención, sean $x \in X$ y $f \in C^{'}$, se tiene que $x \in l_1(f, x) = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < 1\}$. Como $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ entonces $x \in \cup\mathcal{D}_2$ para cada $x \in X$. Así, $\cup\mathcal{D}_2 = X$.

Prueba de (2). Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ subconjuntos finitos de $\mathcal{D}_1$ y $x \in (\cap\mathcal{F}_1) \cap (\cap\mathcal{F}_2)$. Pongamos $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, se tiene que $\mathcal{F}_3$ es un subconjunto finito en $\mathcal{D}_1$ y satisface que $x \in \cap\mathcal{F}_3 = (\cap\mathcal{F}_1) \cap (\cap\mathcal{F}_2)$. Por lo tanto, $\tau^{'}$ es una topología para X.

Por otro lado, sea $f \in C^{'}$, vamos a probar que $f : X_{\tau'} \to \mathbb{R}_u$ es una función continua. Para esto, sean $x \in X$, O un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \in O$. Por definición de la topología usual para $\mathbb{R}$, existe

$r > 0$ tal que $(f(x) - r, f(x) + r) \subseteq O$, tenemos que $l_r(f, x) \in \tau^{'}$ y $x \in l_r(f, x)$. Además, $f(l_r(f, x)) \subseteq (f(x) - r, f(x) + r) \subseteq O$. Por lo tanto, f es continua con $\tau^{'}$. Luego, $\tau^{'} \subseteq \tau_1$. $\square$

Teorema 2.14. *Si X es espacio topológico, entonces $Z^*(X) = Z(X)$.*

Demostración. Claramente $Z^*(X) \subseteq Z(X)$. Por otra parte, para cualquier $Z(g) \in Z(X)$, sabemos que $Z(g) = g^{-1}(0)$, así $Z(g) = Z(|g|) = Z(\frac{|g|}{|g|+1})$. Ahora notemos que $0 < \frac{|g|}{|g|+1} < 1$ y $|g| \in C(X)$, por lo tanto $Z(g) \in Z^*(X)$. $\square$

Teorema 2.15. *Sean X un conjunto, τ es una topología sobre X y τ_1 es la mínima topología para X que hace continua a cada elemento $f \in C(X_\tau)$. Entonces $Z(X_\tau)$ es una base de cerrados de τ_1.*

Demostración. Para probar esto se define $\gamma = \{O \subseteq X : X \setminus O = \cap\mathcal{F}, \mathcal{F} \subseteq Z(X_\tau)\}$. Vamos a probar que γ satisface:
(a) γ es una topología para X;
(b) $\gamma = \tau_1$.

Prueba de (a): Notemos que $X, \emptyset \in \gamma$ puesto que, sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que $Z(\boldsymbol{\alpha}) = \emptyset$, así $\emptyset = X \setminus X$, es decir, $X \in \gamma$. Luego, $X = Z(\mathbf{0}) = X \setminus \emptyset$, por lo tanto $\emptyset \in \gamma$. Ahora, sea $\{O_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \gamma$. Para cada $\alpha \in I$, $X \setminus O_\alpha = \cap_{\beta \in A_\alpha} Z(g_{\beta\alpha})$ con $g_{\beta\alpha} \in C(X_\tau)$, por la definición de γ. Así se tiene que, $X \setminus \cup_{\alpha \in I} O_\alpha = \cap_{\alpha \in I}(X \setminus O_\alpha) = \cap_{\alpha \in I}(\cap_{\beta \in A_\alpha} Z(g_{\beta\alpha}))$. Así, $\cup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \gamma$. Por otro lado, sean $O_1, O_2 \in \gamma$, entonces $X \setminus O_1 = (\cap_{\alpha \in I} Z(g_\alpha))$ y $X \setminus O_2 = (\cap_{\beta \in J} Z(f_\beta))$ donde $g_\alpha, f_\beta \in C(X_\tau)$. Aplicando leyes de D'Morgan se tiene que $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = (\cap_{\alpha \in I} Z(g_\alpha)) \cup (\cap_{\beta \in J} Z(f_\beta)) = \cap_{\alpha \in I, \beta \in J}(Z(g_\alpha) \cup Z(f_\beta)) =$

$\cap_{\alpha\in I,\beta\in J}Z(g_\alpha\cdot f_\beta)$, la última igualdad es por el Lema 1.10. Luego, $O_1\cap O_2\in\gamma$. Por tanto γ es una topología para X.

Prueba de (b): Por el Lema 1.11 se tiene que si $f\in C(X), r\in\mathbb{R}$ y $x\in X$, entonces $X\setminus l_r(f,x)=f^{\leftarrow}((-\infty,f(x)-r])\cup f^{\leftarrow}([f(x)+r,\infty))\subseteq Z(f)$. Sea $O\in\tau_1$, entonces por el Lema 2.13, se tiene que $O=\cup_{\alpha\in I}(\cap_{i=1}^{n_\alpha}F_{\alpha_i})$ para cada $\alpha\in I$, $i\in\{1,2,...,n_\alpha\}$ y $F_{\alpha_i}\in\mathcal{D}_1$. Por la Observación 2.12 se tiene que $l_{r_\alpha}(f_\alpha,x)\in\mathcal{D}_2$ para cada $\alpha\in I$. Más aún $F_{\alpha_i}=l_{r_{\alpha i}}(f_{\alpha i},x_{\alpha i})$ donde $i\in\{1,2,...,n_\alpha\}$ y $\alpha\in I$. Luego, $X\setminus O=X\setminus\cup_{\alpha\in I}(\cap_{i=1}^{n_\alpha}F_{\alpha_i})=\cap_{\alpha\in I}(X\setminus\cap_{i=1}^{n_\alpha}F_{\alpha_i})=\cap_{\alpha\in I}(\cup_{i=1}^{n_\alpha}(X\setminus l_{r_{\alpha i}}(f_{\alpha i},x_{\alpha i}))=\cap_{\alpha\in I}Z_\alpha$, donde $Z_\alpha=\cup_{i=1}^{n_\alpha}(X\setminus l_{r_{\alpha i}}(f_{\alpha i},x_{\alpha i}))$, es decir, $O\in\gamma$. Lo que implica que $\tau_1\subseteq\gamma$. Ahora demostraremos que $\gamma\subseteq\tau_1$. Para esto notemos que $\gamma=\{O\subseteq X: X\setminus O=\cap\mathcal{F},\mathcal{F}\subseteq Z(X_\tau)\}=\{\cup_{\alpha\in I}(X\setminus Z(g_\alpha)): g_\alpha\in C(X_\tau)\}$. Así, bastará probar que $X\setminus Z(g)\in\tau_1$ para cualquier $g\in C(X_\tau)$. Notemos que $X\setminus Z(g)=(X\setminus f^{\leftarrow}(-\infty,r])\cup(X\setminus f^{\leftarrow}[r,\infty))=(f^{\leftarrow}(r,\infty)\cup(f^{\leftarrow}(\infty,r))$ tal que $f\in C(X_\tau)$ y $r\in\mathbb{R}$. Así un elemento O de γ se puede expresar como unión de preimagenes de abiertos de funciones continuas de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, O está en τ_1. Así $\gamma=\tau_1$.

Para demostrar el teorema, sea F un cerrado en $X_{\tau_1=\gamma}$ entonces $X\setminus F\in\tau_1$, es decir, $X\setminus(X\setminus F)=F=\cap_{\alpha\in I}Z(g_\alpha)$, para cada $g_\alpha\in C(X_\tau)$. Luego se concluye que $Z(X_\tau)$ es una base de cerrados de τ_1. □

Teorema 2.16. *Sean X un conjunto, τ es una topología sobre X y τ_2 la mínima topología para X que hace continua a cada elemento $f\in C^*(X_\tau)$. Entonces $Z^*(X_\tau)$ es una base de cerrados de τ_2.*

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la demostración del Teorema 2.15, también se define $\gamma=\{O\subseteq$

$X : X \setminus O = \cap\mathcal{F}, \mathcal{F} \subseteq Z^*(X_\tau)\}$ y se puede probar que γ satisface:
(a) γ es una topología para X;
(b) $\gamma = \tau_2$.
De esto inferimos que $Z^*(X_\tau)$ es una base de cerrados de τ_2. □

Teorema 2.17. *Sean X_τ un espacio topológico Hausdorff. Entonces, X_τ es completamente regular si y sólo si la topología τ coincide con la topologías inducidas por $C(X)$ y $C^*(X)$,τ_1 y τ_2, respectivamente. Es decir, $\tau = \tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Observemos que por el Teorema 2.15 y el Teorema 2.16 tenemos que $\tau_1 = \tau_2 = \gamma$. Así basta demostrar que $\gamma = \tau$; para esto sea $O \in \gamma$ entonces $X \setminus O = \cap\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F} \in Z(X_\tau)$. Por el Teorema 2.3 tenemos que $Z(X_\tau)$ son cerrados en τ, así $X \setminus O$ es cerrado en τ, luego $O \in \tau$, es decir, $\gamma \subseteq \tau$. Por otra parte, sea $V \in \tau$, entonces $X \setminus V$ es cerrado en τ, por tanto $X \setminus V = \cap\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in Z(X_\tau)$. Por el Teorema 2.3, tal que $\mathcal{F} \in Z(X_\tau)$, luego $V \in \gamma$. Así se concluye que $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \gamma$.

Para la suficiencia tenemos que $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \gamma$, utilizamos el recíproco del Teorema 2.3, es decir, como γ es topología cuya base de cerrados es $Z(X_\tau)$, entonces X_τ es completamente regular. □

2.3. Resultados importantes de espacios Tychonoff

Teorema 2.18. *Si X es un espacio Hausdorff cuya topología está determinada por alguna subfamilia $C^{'}$ de $\mathbb{R}^X$, entonces X es completamente regular.*

Demostración. Claramente, cada función en la familia $C^{'}$ es continua, es decir, $C^{'} \subseteq C(X)$. Por tanto la topología débil inducida por $C^{'}$ está contenida en la topología débil inducida por $C(X)$.

Pero esta última topología siempre está contenida en la topología dada en el espacio X. Por lo tanto, las dos topologías coinciden. Se sigue del Teorema 2.17 que X es completamente regular. $\square$

Teorema 2.19. *Si $C^{'}$ es una subfamilia de $C(Y)$ que determina la topología de Y. Una función σ de un espacio S sobre Y es continua si y sólo si la función composición $g \circ \sigma$ está en $C(S)$, para cada $g \in C^{'}$.*

Demostración. Veamos la necesidad. Como $g : Y \to \mathbb{R}$ y $\sigma : S \to Y$ son funciones continuas, entonces se tiene que $g \circ \sigma$ es continua. Para la suficiencia, primero notemos que si O es un abierto en $\mathbb{R}$, entonces $g^{\leftarrow}(O)$ es un abierto en Y, para toda $g \in C^{'}$. Además, la familia $\{g^{\leftarrow}(O) : g \in C^{'}$ y O es un abierto en $\mathbb{R}\}$ es una subbase de Y. Como $\sigma^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(O)) = (g \circ \sigma)^{\leftarrow}(O)$ y, por hipótesis $(g \circ \sigma)^{\leftarrow}(O)$ es abierto en S. Por lo tanto, la fución σ es continua. $\square$

Teorema 2.20. *Para cualquier espacio topológico X, existe un espacio completamente regular Y y una función continua θ de X sobre Y, tal que la función $\psi : C(Y) \to C(X)$, dada por $\psi(g) = g \circ \theta$, es un isomorfismo de anillos.*

Demostración. Sean $x, x^{'} \in X$. Definimos la clase de equivalencia $x \equiv x^{'}$ si y sólo si $f(x) = f(x)^{'}$, para cada $f \in C(X)$. Notemos que ésta es una relación de equivalencia, puesto que los valores en $\mathbb{R}$ satisfacen las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva. Sea Y el conjunto de todas la clases de equivalencia. Definamos la función θ de X sobre Y, dada por $\theta(x) = [x]$.

Para cada $f \in C(X)$, le asociamos $g_f \in \mathbb{R}^Y$ definida por

$$g_f([x]) = f(x).$$

Notemos que $f = g_f \circ \theta$. Veamos que g_f es una función. Sean $[z_1], [z_2] \in Y$ si $[z_1] = [z_2]$ entonces $h([z_1]) = h([z_2])$ para cualquier

$h \in C(X)$, en particular $f(z_1) = f(z_2)$.

Sea $C' = \{g_f \in \mathbb{R}^Y : g_f \circ \theta \in C(X)\}$. Afirmamos que $C' = \{g \in \mathbb{R}^Y : g \circ \theta \in C(X)\}$. Observemos que en particular $C' \subseteq \{g \in \mathbb{R}^Y : g \circ \theta \in C(X)\}$, para la otra contención demostraremos que dada $g \in \mathbb{R}^Y$ tal que $g \circ \theta \in C(X)$, entonces existe $f \in C(X)$ tal que $g = g_f$, para esto, sea $f = g \circ \theta \in C(X)$, así $g_f([z]) = (g \circ \theta)(z) = g([z])$.

Ahora, dotaremos a Y con la topología débil inducida por la familia C'. Por definición, cada función en C' es continua en Y, es decir, $C' \subset C(Y)$. La continuidad de θ se sigue del Teorema 2.19.

Si $[x_1], [x_2] \in Y$ son tales que $[x_1] \neq [x_2]$ entonces, existe $f \in C(X)$ con $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como $f(x_1) = g_f \circ \theta(x_1) = g_f([x_1])$ y $f(x_2) = g_f \circ \theta(x_2) = g_f([x_2])$, con $g_f([x_1]) \neq g_f([x_2]) \in \mathbb{R}$, por lo tanto, existen $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) \in O_1, f(x_2) \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Luego, como g_f es función entonces $g_f^{\leftarrow}(O_1) \cap g_f^{\leftarrow}(O_2) = \emptyset$ y, además $g_f^{\leftarrow}(O_1), g_f^{\leftarrow}(O_1) \in \tau_{C'}$. Por lo tanto, Y es un espacio Hausdorff y por Teorema 2.18, Y es completamente regular.

Consideremos $h \in C(Y)$. Ya que θ es continua, $h \circ \theta$ es continua en X, es decir, $h \in C'$. Por lo tanto, $C' \supseteq C(Y)$. Así, $C' = C(Y)$.

Vamos a probar que ψ es un isomorfismo de anillos. Observemos que ψ es sobreyectiva puesto que $\psi(g_f) = f$. Por otra parte, si $\psi(g_1) = g_1 \circ \theta = g_2 \circ \theta = \psi(g_2)$ veamos que $g_1 = g_2$. Supongamos que $g_1([x]) \neq g_2([x])$, pero $g_1([x]) = g_1(\theta(x)) = (g_1 \circ \theta)(x) = \psi(g_1)$ y $g_2([x]) = g_2(\theta(x)) = (g_1 \circ \theta)(x) = \psi(g_2)$, luego $\psi(g_1) \neq \psi(g_2)$ lo cual es una contradicción. Así ψ es inyectiva. Luego ψ es biyectiva. Además satisface que $\psi(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2) \circ \theta(x) = (g_1 + g_2)([x]) = g_1([x]) + g_2([x]) = \psi(g_1) + \psi(g_2)$ y también $\psi(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2) \circ \theta(x) = (g_1 \cdot g_2)([x]) = g_1([x]) \cdot g_2([x]) = \psi(g_1)(x) \cdot \psi(g_2)(x) = (\psi(g_1) \cdot \psi(g_2))(x)$.

Por lo tanto, ψ es un isomorfismo de anillos. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Teorema 2.21. *Sean X un espacio topológico y R_0 un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Supongamos que U_r son conjuntos abiertos de X, para todo $r \in R_0$ tales que $\bigcup_{r\in R_0} U_r = X$, $\bigcap_{r\in R_0} U_r = \emptyset$, y $cl(U_r) \subset U_s$ donde $r < s$ entonces $f(x) = \text{ínf}\{r \in R_0 : x \in U_r\}$ para toda $x \in X$, define una función continua sobre X.*

Demostración. Primero veamos que f está bien definida. Dado $x \in X$ el conjunto $\{r \in R_0 : x \in U_r\} \neq \emptyset$ ya que por hipótesis, $\bigcup_{r\in R_0} U_r = X$. Vamos a probar que $\{r \in R_0 : x \in U_r\}$ está acotado inferiormente. Para esto supongamos lo contrario, es decir, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ existe $r^{'} \in \{r \in R_0 : x \in U_r\}$ tal que $r^{'} < s$. Veamos que si esto ocurre entonces $x \in \bigcap_{r\in R_0} U_r$. Sea $r \in R_0$, entonces existe $r^{'} \in \{r \in R_0 : x \in U_r\}$ tal que $r^{'} < r$. Como $cl(U_{r'}) \subseteq U_r$, entonces $x \in cl(U_{r'}) \subseteq U_r$, así $x \in U_r$, lo cual implica que $\bigcap_{r\in R_0} U_r \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\{r \in R_0 : x \in U_r\}$ está acotado inferiormente. Es decir, $\{r \in R_0 : x \in U_r\}$ tiene ínfimo. Luego, f está bien definida.

Afirmación. Si $r < f(x) < s$ entonces $x \in U_s \setminus cl(U_r)$, para cada $s, r \in R_0$. En efecto. Primero veamos que

$$\text{Si } f(x) < s \text{ entonces } x \in U_s. \tag{2.1}$$

Si $f(x) < s$, entonces, dado que $f(x)$ es un ínfimo, existe $r^{'} \in \{r \in R_0 : x \in U_r\}$ tal que $f(x) \leq r^{'} < s$. Luego, $x \in cl(U_{r'}) \subseteq U_s$. Así $x \in U_s$. Por lo tanto, (2.1) está probada.

Ahora demostraremos que

$$\text{Si } r < f(x) \text{ entonces } x \notin cl(U_r). \tag{2.2}$$

Supongamos que $r < f(x)$ y $x \in cl(U_r)$. Por densidad de R_0, existe $s_0 \in R_0$ tal que $r < s_0 < f(x)$. Como $x \in cl(U_r) \subseteq U_{s_0}$, así $x \in U_{s_0}$. Así que $f(x) \leq s_0$, lo cual contradice que $s_0 < f(x)$. Luego, (2.2) está probada.

Finalmente, de (2.1) y de (2.2) se obtiene la afirmación.

Vamos a probar que f es continua en X. Para esto, sea $a \in X$. Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) \in (c, d)$. Consideremos $r \in (c, f(a)) \cap R_0$ y $s \in (f(a), d) \cap R_0$. Notemos que $f(a) \in [r, s] \subseteq (c, d)$. Vamos a probar que:

(1) $a \in U_s \setminus cl(U_r)$.

(2) $f(U_s \setminus cl(U_r)) \subseteq [r, s] \subset (c, d)$.

La parte (1) se sigue de la Afirmación.

Ahora, para la parte (2), sea $x \in U_s \setminus cl(U_r)$ entonces $x \in U_s$, es decir, $f(x) \leq s$. Ahora, supongamos que $f(x) < r$ entonces $x \in U_r \subseteq cl(U_r)$, pero por hipótesis $x \notin cl(U_r)$. Por lo tanto, $r \leq f(x) \leq s$. Es decir, $f(U_s \setminus cl(U_r)) \subseteq [r, s] \subset (c, d)$.

Así, se concluye que f es continua en X. $\square$

Teorema 2.22. *(Lema de Uryshon). Sea X un espacio normal. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(G) \subset \{1\}$.*

Demostración. Sea $D = \{q_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ una enumeración del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tal que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$. Primero, construiremos una familia $\mathcal{U} = \{U_{q_n} : n = 0, 1, 2, ...\}$ de subconjuntos abiertos de X que tiene las siguientes dos propiedades:

(1)$F \subset U_0$ y $U_1 \subset X \setminus G$; y

(2) si $r < s$, con $r, s \in D$, entonces $cl(U_r) \subset U_s$.

Construcción de la familia $\mathcal{U}$. Primero, tomamos $U_r = \emptyset$ cuando $r < 0$, y $U_r = X$ cuando $r > 1$. Definamos $U_1 = X \setminus G$. Como

X es un espacio normal, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Definamos $U_0 = U$. Entonces, $U_0 \subset X \setminus V$; por lo cual, $cl(U_0) \subset X \setminus V \subset X \setminus G = U_1$. De esta forma hemos demostrado que los subconjuntos abiertos U_0 y U_1 satisfacen las condiciones (1) y (2).

Supongamos ahora que $n \geq 2$ y que hemos construido los subconjuntos abiertos $U_{q_0}, U_{q_1}, U_{q_2}, ..., U_{q_n}$, de tal forma que satisfacen las condiciones (1) y (2). Sea $r = \text{máx}\{q_k : k \leq n$ y $q_k < q_{n+1}\}$ y $s = \text{mín}\{q_l : l \leq n$ y $q_{n+1} < q_l\}$. Entonces $r, s \in \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ y son tales que $r < s$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $cl(U_r) \subset U_s$. Como X es un espacio normal, para los subconjuntos cerrados $cl(U_r)$ y $X \setminus U_s$, existen abiertos ajenos A y B tales que $cl(Ur) \subset A$ y $X \setminus U_s \subset B$. Definamos $U_{q_n+1} = A$. Entonces $cl(U_{q_{n+1}}) \subset X \setminus B \subset U_s$. Así $\{U_{q_0}, U_{q_1}, U_{q_2}, ..., U_{q_n}, U_{q_{n+1}}\}$ satisfacen las condiciones requeridas. Además, notemos que si $t \in \{q_0, ..., q_n\}$ y $t < q_{n+1}$, entonces $t < r$, es decir, $cl(U_t) \subseteq U_r \subseteq A \subseteq U_{q_{n+1}}$. Por otra parte, si $l \in \{q_0, ..., q_n\}$ y $q_{n+1} < l$, entonces $s < l$, luego, $cl(U_s) \subseteq U_l$, y como $U_{q_{n+1}} \subseteq U_s$, entonces $cl(U_{n+1}) \subseteq U_l$. Esto completa la construcción inductiva de la familia $\mathcal{U} = \{U_r : r \in D\}$ que satisface las condiciones (1) y (2).

Para terminar la demostración, definamos a f. Si $x \in X \setminus G$ entonces $f(x) = \text{ínf}\{r \in R_0 : x \in U_r\}$, si $x \in G$, entonces $f(x) = 1$. Luego, por el Teorema 2.21, la función f es continua. Además satisface que $f(F) \subseteq \{0\}$ y $f(G) \subseteq \{1\}$. $\square$

Teorema 2.23. *Si X es completamente regular y Y es un subespacio de X, entonces Y es completamente regular .*

Demostración. Sean F un cerrado en Y y $x \in Y \setminus F$. Digamos $F = T \cap Y$ con T cerrado en X. Como $x \notin T$ y X es completamente regular, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(T) \subset \{1\}$ y $f(x) = 0$. Tomemos $f \restriction_Y Y \to [0,1]$, así como $F \subset T$ entonces $f \restriction_Y (F) \subset \{1\}$. Luego, si $x \in Y \setminus F$ entonces $f \restriction_Y (x) = 0$, es decir, Y es completamente regular. $\square$

Teorema 2.24. *Todo subespacio de un espacio compacto X, es completamente regular.*

Demostración. Sean F_1, F_2 cerrados y ajenos en X. Como X es compacto, entonces X es Hausdorff. Luego, como F_1 y F_2 son compactos, por Corolario 1.6, se deduce que F_1 y F_2 tienen vecindades ajenas. Por lo tanto, X es un espacio normal. Por Lema de Uryshon, es completamente regular. Así, por Teorema 2.23, todo subespacio es completamente regular. $\square$

De hecho todo espacio completamente regular, es isomorfo a un subespacio de un espacio compacto.

Capítulo 3

Introducción a categorías y fuentes iniciales

En la presente sección revisaremos las nociones de categoría y funtor, así como algunos ejemplos de éstos.

3.1. Introducción a categorías

A continuación consideramos la definición de categoría, como sigue.

Definición 3.1. *Una categoría es un cuádruple* $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *que consiste en*

(1) *una clase* $\mathcal{O}$ *cuyos elementos se llaman* $\boldsymbol{A}$*-objetos,*

(2) *para cada par* (A, B) *de* $\boldsymbol{A}$*-objetos, un conjunto* $hom(A, B)$*, cuyos elementos son llamados* ***A*-morfismos de** A ***a*** B *(la afirmación "*$f \in hom(A, B)$*" se expresará mediante el uso de las flechas; por ejemplo, "*$f : A \to B$ *es un morfismo" o "*$A \xrightarrow{f} B$ *es un morfismo"),*

(3) *para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A*, un morfismo* $A \xrightarrow{Id_A} A$ *es denominada la* ***A*-identidad** *en* A*,*

(4) *una* **ley de composición***, que asocia a cada par de* $\boldsymbol{A}$*-morfismos* $A \xrightarrow{f} B$ *y* $B \xrightarrow{g} C$*, un* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *llamado la* **composición** *de* f *y* g*, sujeto a las siguientes condiciones:*

(a) *la composición es asociativa; es decir, para* $\boldsymbol{A}$*-morfismos* $A \xrightarrow{f} B$*,* $B \xrightarrow{g} C$ *y* $C \xrightarrow{h} D$ *la composición* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *sostiene que*

(b) $\boldsymbol{A}$*-identidades actúan como identidades con respecto a la composición; es decir, para los* $\boldsymbol{A}$*-morfismos* $A \xrightarrow{f} B$ *se tiene que* $id_B \circ f = f$ *y* $f \circ id_A = f$*,*

(c) *los conjuntos* $hom(A, B)$ *son ajenos por pares, es decir, si* A, B, C, D *son* $\boldsymbol{A}$*-objetos y* $(A, B) \neq (C, D)$*, entonces* $hom(A, B) \cap hom(C, D) = \emptyset$*.*

Notación 3.2. *Sea* $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *una categoría, se tiene que*

(1) *La clase de los* $\boldsymbol{A}$*-objetos se denotará por* $Ob(\boldsymbol{A})$*.*

(2) *La clase de todos los* $\boldsymbol{A}$*-morfismos se denotará por* $Mor(A)$*, notemos que* $Mor(A)$ *es la unión de todos los conjuntos* $hom(A, B)$ *con* $A, B \in Ob(\boldsymbol{A})$*.*

(3) *Si* $A \xrightarrow{f} B$ *es un* $\boldsymbol{A}$*-morfismo, llamamos a* A *el* **dominio** *de* f *(denotado por* $dom(f)$*) y llamamos a* B *el* **codominio** *de* f *(denotado por* $cod(f)$*). Obsérvese que la condición (4)(c) de la Definición 3.1 garantiza que cada* $\boldsymbol{A}$*-morfismo tiene un dominio y un codominio únicos.*

(4) *La composición, $\circ$, es una operación binaria parcial en la clase $Mor(\boldsymbol{A})$. Es decir, para un par (f, g) de morfismos, $f \circ g$ se define si y sólo si el dominio de f y el codominio de g coinciden.*

(5) *Los morfismos en una categoría, se denotaran por letras minúsculas, y con mayúsculas a los objetos. El morfismo $h = g \circ f$, será denotado por el triángulo siguiente*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3. (1) *La categoría **Con** cuyos objetos es la clase de todos los conjuntos; $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A a B, la id_A es la función identidad en A, y $\circ$ es la composición usual de funciones.*

(2) *En general, las categorías de conjuntos con estructuras y funciones que preservan estructuras entre ellos, $\circ$ siempre será la composición de funciones y la id_A siempre será la función identidad sobre A; por ejemplo:*
*(a) **Vec** con objetos todos los espacios vectoriales reales y morfismos todas las transformaciones lineales entre ellos.*
*(b) **Grp** con objetos todos los grupos y morfismos todos los homomorfismos entre ellos.*
*(c) **Top** con objetos todos los espacios topológicos y morfismos todas las funciones continuas entre ellos.*
*(d) **Rel** con objetos de todos los pares (X, ρ), donde X es un conjunto y ρ es una relación (binaria) en X. Los morfismos $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ son las funciones que preservan*

relaciones, es decir, si $x\rho x'$ *entonces* $f(x)\sigma f(x')$.

Definición 3.4. *Sea* $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom_{\boldsymbol{A}}, id, \circ)$ *una categoria. La categoría* ***dual*** *(u opuesta) de* $\boldsymbol{A}$ *es la categoría* $\boldsymbol{A}^{op} = (\mathcal{O}, hom_{\boldsymbol{A}^{op}}, id, \circ^{op})$, *donde* $hom_{\boldsymbol{A}^{op}}(A,B) = hom_{\boldsymbol{A}}(B,A)$ *y* $f \circ^{op} g = g \circ f$. *(Por lo tanto,* A *y* A^{op} *tienen los mismos objetos y, excepto por sus direcciones, los mismos morfismos).*

Definición 3.5. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías, entonces un funtor* F *covariante de* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *es una función que asigna a cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A *un* $\boldsymbol{B}$*-objeto,* $F(A)$, *y a cada* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} A'$ *un* $\boldsymbol{B}$*-morfismo* $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$ *de tal forma que*

(1) F *preserva composiciones; es decir,* $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$ *siempre que* $f \circ g$ *está definida, y*

(2) F *preserva morfismos identidad; es decir,* $F(id_A) = id_{F(A)}$ *para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A.

Si $F : \boldsymbol{A}^{op} \to \boldsymbol{B}$ *es funtor, decimos que* F *es un funtor contravariante de* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, cuya clase de objetos consisten de conjuntos con estructura y cuya clase de morfismos entre dichos conjuntos con estructura, dado $(X,\xi) \in Ob(\mathcal{C})$ para referirnos a X sin estructura suele decirce: el conjunto subyacete del objeto (X,ξ). Análogamente si $f : (X,\xi) \to (Y,\eta) \in Mor(\mathcal{C})$, la función $f : X \to Y$ la función subyacente del morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta) \in Mor(\mathcal{C})$.

Ejemplo 3.6. (1) *Para cada categoría* $\boldsymbol{A}$, *existe el funtor identidad* $id_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ *definido por* $id_{\boldsymbol{A}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$

(2) *Para cualquiera categoría* $\boldsymbol{A}$ *de los Ejemplos 3.3* (2) *y* (3)*; existe el funtor que olvida (o funtor subyacente)* $U : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Con}$*, donde en cada caso* $U(A)$ *es el conjunto subyacente de* A*, y* $U(f)$ *es la función subyacente del morfismo* f*.*

(3) *Para cualquier categoría* $\boldsymbol{A}$ *y cualquier* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A*, existe el funtor covariante* $hom(A,-) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Con}$*, definido como* $hom(A,-)(X) = hom(A,X)$*, si* $X \in Ob(\boldsymbol{A})$ *y para las funciones,* $hom(A,-)(B \xrightarrow{f} C) = hom(A,B) \xrightarrow{hom(A,f)} hom(A,C)$*, donde* $hom(A,f)(g) = f \circ g$*.*

(4) *Para cualquier categoría* $\boldsymbol{A}$ *y cualquier* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A*, existe el funtor contravariante* $hom(-,A) : \boldsymbol{A}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ *definido sobre cualquier* $\boldsymbol{A}^{op}$*-morfismo* $B \xrightarrow{f} C$ *por* $hom(-,A)(B \xrightarrow{f} C) = hom_{\boldsymbol{A}}(B,A) \xrightarrow{hom(f,A)} hom_{\boldsymbol{A}}(C,A)$ *con* $hom(f,A)(g) = g \circ f$*, donde la composición es la única en* $\boldsymbol{A}$*.*

Definición 3.7. *Sea* $\boldsymbol{C}$ *una categoría,*

(1) *Se dice que un* $\boldsymbol{C}$*-morfismo,* $A \xrightarrow{f} B$*, es* $\boldsymbol{C}$*-sección si tiene inverso izquierdo, es decir, si existe un* $\boldsymbol{C}$*-morfismo* $B \xrightarrow{g} A$ *tal que* $g \circ f = id_{\boldsymbol{A}}$*. Se llama* $\boldsymbol{C}$*-retracción si tiene inverso derecho, es decir, si existe un* $\boldsymbol{C}$*-morfismo* $B \xrightarrow{g} A$ *tal que* $f \circ g = id_{\boldsymbol{B}}$*.*

(2) *Si el* $\boldsymbol{C}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *tiene al mismo tiempo inverso izquierdo e inverso derecho, entonces* f *es un* $\boldsymbol{C}$*-isomorfismo.*

(3) *Un* $\boldsymbol{C}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *es* $\boldsymbol{C}$*-monomorfismo si es cancelable por la izquierda, es decir, si para cualesquiera dos* $\boldsymbol{C}$*-morfismos* h *y* k*, si* $f \circ h = f \circ k$*, implica que* $h = k$*. Por*

otro lado, f es $\boldsymbol{C}$-epimorfismo si es cancelable por la derecha, es decir, si $h \circ f = k \circ f$, implica que $h = k$.

Definición 3.8. *Una categoría concreta es una categoría, cuyos objetos son conjuntos con estructura (por ejemplo de anillo, de grupo, de espacio vectorial o de espacio topológico), cuyos morfismos son funciones entre conjuntos que respetan las correspondientes operaciones o relaciones que la hacen un morfismo de categoría.*

Lema 3.9. *Sea $f : A \to B$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) *f es una función inyectiva.*

(2) *Existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.*

(3) *Para cada $h, k : A_1 \to A$ funciones tales que $f \circ h = f \circ k$, entonces $h = k$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Primero vamos a probar el caso cuando f es suprayectiva, entonces f es biyectiva y así f tiene inversa, en particular tiene inversa izquierda. Ahora, el otro caso, supongamos que f no es suprayectiva, es decir, $f(A) \neq B$. Sea $x_0 \in A$, definimos $g : B \to A$ como $g(y) = x_0$ si $y \in B \setminus f(A)$; $g(y) = a$, si $y = f(a)$, para algún $a \in A$. Veamos que g es función. Si $y \in f(A)$, $g(y) = a_1$ y $g(y) = a_2$, entonces $f(a_1) = y = f(a_2)$; por hipótesis $a_1 = a_2$. Así, g es función. Además, notemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótesis, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Luego, si $f \circ h = f \circ k$ entonces $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$. Así, se tiene que $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Se sigue que $(id_A) \circ h = (id_A) \circ k$. Es decir, $h = k$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$, definamos las funciones $h : A_1 \to A$ y $k : A_1 \to A$ por $h(a) = x_1$ y $k(a) = x_2$, para cada $a \in A_1$. Notemos que $h \neq k$. Supongamos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $(f \circ h)(a) = f(x_1) = f(x_2) = (f \circ k)(a)$, para cada $a \in A_1$. Luego, por hipótesis, $h = k$, que es una contradicción. Por lo tanto $f(x_1) \neq f(x_2)$. Así, f es inyectiva. $\square$

Lema 3.10. *Sea $f : A \to B$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) *f es una función sobreyectiva.*

(2) *Existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.*

(3) *Para cada $h, k : A_1 \to A$ funciones tales que $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Notemos que $A = \cup_{y \in B} f^{\leftarrow}(y)$. Sean $y, y^{'} \in B$ tales que $y \neq y^{'}$, entonces $f^{\leftarrow}(y) \cap f^{\leftarrow}(y^{'}) = \emptyset$, porque f es función. Así $\{f^{\leftarrow}(y) : y \in B\}$ es una partición de X. Por el axioma de elección existe $C \subseteq A$ tal que $C \cap f^{\leftarrow}(y) = \{x_y\}$. Definamos $g : B \to C \subseteq A$ como $g(y) = x_y$, para cada $y \in B$. Observemos que x_y es el único elemento de $C \cap f^{\leftarrow}(y)$. Además $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótesis, existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Luego, si $h \circ f = k \circ f$ entonces $(h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g$. Así, se tiene que $h \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ g)$. Se sigue que $h \circ (id_B) = k \circ (id_B)$. Es decir, $h = k$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que f no es sobreyectiva, así existe $b_0 \in B$ tal que $f^{\leftarrow}(b_0) = \emptyset$. Sea $h : B \to \{0, 1\}$ dada por $h(b) = 0$, así $h \circ f(a) = 0$, para cada $a \in A$. Sea $k : B \to \{0, 1\}$ definida por $k(b) = 0$, si $b \neq b_0$ y $k(b_0) = 1$. Notemos que $k \circ f(a) =$

$k(f(a)) = 0$. Pero, $k \neq h$, es decir no se vale la cancelación, la cual es una contradicción. Por lo tanto f es sobreyectiva. $\square$

Observación 3.11. (1) *En la categoría* ***Con*** *son equivalentes los conceptos de función inyectiva, sección y monomorfismo. Así, también los conceptos de función sobreyectiva, retracción y epimorfismo.*

(2) *Todo morfismo en una categoría concreta que es función inyectiva sobre los conjuntos subyacentes, es un* $\boldsymbol{C}$*-monomorfismo y cuando es función sobreyectiva entonces, es un* $\boldsymbol{C}$*-epimorfismo.*

Proposición 3.12. *Si* $\boldsymbol{C}$ *es una categoría, entonces toda* $\boldsymbol{C}$*-sección es* $\boldsymbol{C}$*-monomorfismo y toda* $\boldsymbol{C}$*-retracción es* $\boldsymbol{C}$*-epimorfismo*

Demostración. Primero, sean $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ y $f \in hom(A, B)$ una $\mathbf{C}$-sección, así existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Luego, si $f \circ h = f \circ k$ entonces $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$. Así, se tiene que $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Se sigue que $(id_A) \circ h = (id_A) \circ k$, es decir, $h = k$. Así f es $\mathbf{C}$-monomorfismo. Por otra parte, sea f $\mathbf{C}$-retracción, así existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Luego, si $h \circ f = k \circ f$ entonces $(h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g$. Así, se tiene que $h \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ g)$. Se sigue que $h \circ (id_B) = k \circ (id_B)$. Es decir, $h = k$. Por lo tanto f es $\mathbf{C}$-epimorfismo. $\square$

Proposición 3.13. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías y* $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *es un funtor covariante, entonces* F *preserva secciones, es decir, si* f *es una* $\boldsymbol{A}$*-sección entonces* $F(f)$ *es una* $\boldsymbol{B}$*-sección.*

Demostración. Por hipótesis, existe $g : A \to B$ tal que $g \circ f = id_A$. Luego, $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)}$. $\square$

Proposición 3.14. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías y* $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *es un funtor covariante, entonces* F *preserva retracciones, es decir, si* f *es una* $\boldsymbol{A}$*-retracción entonces* $F(f)$ *es una* $\boldsymbol{B}$*-retracción.*

Demostración. Por hipótesis, existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Luego, $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(id_B) = id_{F(B)}$ □

Proposición 3.15. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías y* $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *es un funtor contravariante, entonces* F *manda* $\boldsymbol{A}$*-secciones en* $\boldsymbol{B}$*-retracciones.*

Demostración. Por hipótesis, existe $g : A \to B$ tal que $g \circ f = id_A$. Luego, $F(f) \circ F(g) = F(g \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)}$ □

Proposición 3.16. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías y* $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *es un funtor contravariante, entonces* F *manda* $\boldsymbol{A}$*-retracciones en* $\boldsymbol{B}$*-secciones.*

Demostración. Por hipótesis, existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Luego, $F(g) \circ F(f) = F(f \circ g) = F(id_B) = id_{F(B)}$. □

3.2. Introducción a fuentes iniciales

En esta sección presentamos las nociones de fuentes, Top-fuentes, fuentes iniciales y la amalgama de una familia de funciones, así como algunos resultados importantes de estas nociones.

Definición 3.17. (1) *Una* ***fuente*** *es una familia de funciones con dominio común.*

(2) *Una* ***Top-fuente*** *es una familia de funciones continuas entre espacios topológicos, con dominio común.*

(3) *Dadas una familia de espacios topológicos* $\varepsilon = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *y una fuente* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, *la topología inicial o topología débil de* X *respecto a la pareja* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ *es la que tiene por subbase a la familia* $S_{(\varepsilon,\mathcal{F})} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : U \in \tau_\alpha$ *y* $\alpha \in \mathcal{A}\}$.

Observación 3.18. *Si* τ *es la topología inicial de* X *respecto a la pareja* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ *definida como en la Definición 3.17(3), todas las funciones de la fuente* $\mathcal{F}$ *son continuas, es decir, la fuente* $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es Top-fuente.*

Definición 3.19. *Se dirá que una Top-fuente* $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente inicial si* τ *es la topología inicial de* X *respecto la pareja* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, *donde* $\mathcal{G} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *y* $\mathcal{F}$ *es la fuente* $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha, : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 3.20. *Si* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente, entonces son equivalentes:*

(*a*) $\mathcal{F}$ *es Top-fuente inicial.*

(*b*) *Siempre que* (Z, σ) *es un espacio topológico y* $g : Z \to X$ *es una función tales que* $\{f_\alpha \circ g : (Z, \sigma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente, entonces* $g : (Z, \sigma) \to (X, \tau)$ *es continua.*

(*c*) *Si* γ *es una topología de* X *tal que* $\{f_\alpha : (X, \gamma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es Top-fuente, entonces* $\tau \subseteq \gamma$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que (Z, σ) es un espacio topológico y $g : Z \to X$ es una función tal que, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha \circ g : (Z, \sigma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ es continua. Como $\mathcal{F}$ es Top-fuente inicial, τ tiene por subbase a la familia $S_{(\varepsilon,\mathcal{F})} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : U \in \tau_\alpha$ y $\alpha \in \mathcal{A}\}$. Así para probar que $g : (Z, \sigma) \to (X, \tau)$ es continua, basta darse cuenta de que si $U \in \tau_\alpha$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $g^{\leftarrow}(f_\alpha^{\leftarrow}(U)) = (f_\alpha \circ g)^{\leftarrow}(U)$ es abierto en (Z, σ) porque $f_\alpha \circ g$ es continua, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea γ una topología para X tal que $\mathcal{F}^{'} = \{f_\alpha : (X,\gamma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una Top-fuente. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, es continua la composición:

$$(X,\gamma) \xrightarrow{1_X} (X,\tau) \xrightarrow{f_\alpha} (Y_\alpha, \tau_\alpha).$$

Por (b), $1_X : (X,\gamma) \to (X,\tau)$ es continua, es decir, $\tau \subseteq \gamma$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea σ la topología inicial de X respecto a la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{F}^{'})$, donde $\mathcal{G} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y $\mathcal{F}^{'}$ es la fuente $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Vamos a probar que $\gamma = \tau$. Entonces la fuente $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X,\sigma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una Top-fuente inicial y, de las implicaciones $(a) \Rightarrow (b)$ y $(b) \Rightarrow (c)$, ya demostradas, obtenemos que $\sigma \subseteq \tau$ porque $\mathcal{F}$ es Top-fuente. Por otro lado, $\mathcal{H}$ es una Top-fuente y estamos suponiendo (c), $\tau \subseteq \sigma$. Así $\tau = \sigma$ y con ello, $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ es Top-fuente inicial. $\square$

Corolario 3.21. *Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X,\tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\alpha = \{g_{\alpha,\beta} : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to (Z_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta}) : \beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$ son Top-fuentes iniciales, entonces también lo es la "composición de las Top-fuentes", es decir, la Top-fuente $\mathcal{G} = \{g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha : (X,\tau) \to (Z_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta}) : \beta \in \mathcal{A}_\alpha$ y $\alpha \in \mathcal{A}\}$ es una Top-fuente inicial.*

Demostración. Sean Z un espacio topológico y $g : Z \to X$ una función, la cual satisface que $(g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha) \circ g : Z \to Z_{\alpha\beta}$ es continua, para cualquier $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{A}_\alpha$. Utilizando la Proposición 3.20 bastará demostrar que g es continua. Como $(g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha) \circ g = g_{\alpha,\beta} \circ (f_\alpha \circ g)$ y $\mathcal{F}_\alpha$ es una Top-fuente inicial. Por la Proposición 3.20, tenemos que $f_\alpha \circ g$ es continua. Como $\mathcal{F}$ es una Top-fuente inicial y utilizando nuevamente la Proposición 3.20, se tiene que g es continua. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es una Top-fuente inicial.

$\square$

Corolario 3.22. *Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X,\tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_\alpha = \{g_{\alpha,\beta} : (Y_\alpha, \tau_\alpha) \to (Z_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta}) : \beta \in \mathcal{A}_\alpha\}$ son*

Top-fuentes tales que la "composición" $\mathcal{G} = \{g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha : (X,\tau) \to (Z_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta}) : \beta \in \mathcal{A}_\alpha \text{ y } \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una Top-fuente inicial, entonces* $\mathcal{F}$ *es Top-fuente inicial.*

Demostración. Sean Z un espacio topológico y $g : Z \to X$ una función tal que $f_\alpha \circ g : Z \to Y_\alpha$ es continua, para cualquier $\alpha \in \mathcal{A}$. Utilizando la Proposición 3.20 bastará demostrar que g es continua. Pero, $g_{\alpha,\beta} \circ (f_\alpha \circ g) : Z \to Z_{\alpha,\beta}$ es continua para cualquier $\beta \in \mathcal{A}_\alpha$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, ya que $\mathcal{F}_\alpha$ es una Top-fuente. Luego como $g_{\alpha,\beta} \circ (f_\alpha \circ g) = (g_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha) \circ g$ y $\mathcal{G}$ es Top-fuente inicial, entonces por la Proposición 3.20, g es continua. $\square$

Corolario 3.23. *Si* $f : (X,\tau) \to (Y,\gamma)$ *es una función inyectiva, entonces* f *es encaje si y sólo si* $\mathcal{F} = \{f : (X,\tau) \to (Y,\gamma)\}$ *es una Top-fuente inicial.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea O un abierto en X. Como f es encaje, $f(O) = V \cap f(X)$, donde V es abierto en Y. Notemos que si $z \in O$, entonces $f(z) \in f(O) = V \cap f(X)$, así, $f(z) \in V$, por lo tanto $z \in f^{\leftarrow}(V)$, es decir, $O \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Por otro lado, si $w \in f^{\leftarrow}(V)$, entonces $f(w) \in V \cap f(X) = f(O)$. Así $f(w) = f(l)$, donde $l \in O$. Como f es inyectiva $w = l \in O$, así $w \in O$. Por lo tanto, $O = f^{\leftarrow}(V)$.

($\Leftarrow$) Sea O un abierto en X. Como $\mathcal{F}$ es una Top-fuente inicial, $O = f^{-1}(V)$, donde V es abierto en Y. Luego, $f(O) = V \cap f(X)$. Así f es encaje. $\square$

Definición 3.24. *Sean* I *un conjunto y* $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ *una familia de conjuntos.*

(1) *Si* $f : I \to \cup_{\alpha \in I} E_\alpha$ *tal que* $f(\alpha) \in E_\alpha$*, para cada* $\alpha \in I$*, diremos que* f *es una función selectora.*

(2) $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha = \{f : I \to \cup_{\alpha\in I} E_\alpha : f$ *es una función selectora*$\}$.

(3) *Si* E *es un conjunto, entonces* $E^I = \{f : I \to E : f$ *es función*$\}$.

(4) *Para cada* $\alpha_0 \in I$*, definimos* $\pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha\in I} E_\alpha \to E_{\alpha_0}$*, por* $\pi_{\alpha_0}(f) = f(\alpha_0)$*, para cada* $f \in \prod_{\alpha\in I} E_\alpha$*. A la función* π_{α_0} *se le llama la* α_0*-proyección.*

Observación 3.25. (1) *Notemos que de la Definición 3.24,* $\{\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} E_\alpha \to E_\alpha : \alpha \in I\}$ *es una fuente y, además si* $\alpha \in I$ *y* $x, y \in \prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ *entonces si* $x = y \Leftrightarrow x(\alpha) = y(\alpha)$*, para toda* $\alpha \in I \Leftrightarrow \pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(y)$*, para toda* $\alpha \in I$*.*

(2) *Si* $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ *es una familia de conjuntos con* $E_\alpha = E$*, para toda* $\alpha \in I$*, entonces* $E^I = \prod_{\alpha\in I} E_\alpha$*; ya que si* $f : I \to E$ *es una función, entonces* $f : I \to \cup_{\alpha\in I} E_\alpha$ *es selectora.*

Definición 3.26. *Si* I *es un conjunto,* $\mathcal{F} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ *es una familia de espacios topológicos y* $\varepsilon = \{\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ *una fuente, entonces la topología inicial de* $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ *respecto de* $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ *es la topología producto o topología Tychonoff.*

Observación 3.27. (1) *Notemos que si* τ *es la topología Tychonoff de* $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$*, entonces* $\{\pi_\alpha : (\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha, \tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ *es una Top-fuente inicial.*

(2) *Si* $g : (Z, \gamma) \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ *es una función tal que* $\{\pi_\alpha \circ g : (Z, \gamma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ *es una Top-fuente, entonces* $g : (Z, \gamma) \to (\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha, \tau)$ *es una función continua.*

Definición 3.28. *Sea* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ *una fuente, podemos definir* $\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ *como* $\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha(x)(\alpha_0) = f_{\alpha_0}(x)$*, para cada* $x \in X$ *y* $\alpha_0 \in I$*, que se le llama la amalgama* *de la familia $\mathcal{F}$. Notemos que $\pi_{\alpha_0}(\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha(x)) = f_{\alpha_0}(x)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta, para cada $\alpha_0 \in I$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha"] \arrow[dr, "f_{\alpha_0}"'] & \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \arrow[d, "\pi_{\alpha_0}"] \\ & Y_{\alpha_0} \end{tikzcd}$$

Observación 3.29. *Dada $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ una fuente, entonces $\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$ es la única función con la propiedad de la Definición 3.28, es decir, si $F : X \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ tal que el siguiente diagrama conmuta, para cada $\alpha \in I$,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f_{\alpha}"'] & \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha \arrow[d, "\pi_{\alpha}"] \\ & Y_{\alpha} \end{tikzcd}$$

entonces $F = \triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$. En efecto, si $x \in X$, para cada $\alpha \in I$, entonces $\pi_\alpha(\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha(x)) = f_\alpha(x) = \pi_\alpha(F(x))$. Luego, por la Observación 3.25, $F(x) = \triangle_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$, para cada $x \in X$. Por lo tanto, $F = \triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$.

Notación 3.30. *Es usual, denotar a $x \in \prod_{\alpha\in I} E_\alpha$, como $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$, en realidad $x_\alpha = x(\alpha)$ o dicho de otra manera $x_\alpha = \pi_\alpha(x)$.*

Lema 3.31. *Si (X, τ_1) y (Y_α, τ_α), $\alpha \in I$ son espacios topológicos, y $\{f_\alpha : (X, \tau_1) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ es una Top-fuente, entonces $\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha : (X, \tau_1) \to (\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha, \tau)$ es continua, donde τ es la topología Tychonoff.*

Demostración. Como $f_\alpha = \pi_\alpha \circ \triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$ es continua, para cada $\alpha \in I$ y por la Observación 3.27, $\{\pi_\alpha : (\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha, \tau) \to$

$(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ es una Top-fuente inicial, entonces $\triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$ es continua. $\square$

Teorema 3.32. ***(Propiedad universal del producto)*** *Si $\{f_\alpha : (Z,\gamma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una Top-fuente, entonces existe una única función continua $h : (Z,\gamma) \to (\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha, \tau)$ tal que, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $\pi_\alpha \circ h = f_\alpha$.*

Demostración. Bastará tomar $h = \triangle_{\alpha\in I} f_\alpha$. $\square$

Lema 3.33. *Si (X,τ) es un espacio topológico y K es subespacio de X con la topología de subespacio, γ, entonces $\{i : (K,\gamma) \hookrightarrow (X,\tau) : i$ es la función inclusión$\}$ es una Top-fuente inicial.*

Demostración. Sea Z un espacio topológico y $g : Z \to K$ es una función tal que $i \circ g : Z \to X$ es continua, utilizando la Proposición 3.20 bastará demostrar que g es continua. Sea U un abierto en K, luego existe un abierto O en X tal que $U = O \cap K$. Notemos que $g^{\leftarrow}(O \cap K) = g^{\leftarrow}(i^{\leftarrow}(O)$. Además, $g^{\leftarrow}(i^{\leftarrow}(O) = (i \circ g)^{\leftarrow}(O)$. Como $i \circ g$ es continua, $(i \circ g)^{\leftarrow}(O)$ es abierto en Z. Por lo tanto, $g^{\leftarrow}(U)$ es abierto en Z. Así, g es continua. $\square$

Definición 3.34. *Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (Z,\gamma) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una Top-fuente. Diremos que:*

(1) *$\mathcal{F}$ separa puntos de X si para cualesquiera dos elementos distintos, x y y, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

(2) *$\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X si para cualquier cerrado F en X y cualquier $x \in X \setminus F$, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(F)$.*

Proposición 3.35. *Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X,\tau) \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una Top-fuente y $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{\leftarrow}(U) : U$ es abierto en Y_α y $\alpha \in \mathcal{A}\}$. Se cumple lo siguiente:*

(1) *$\mathcal{F}$ separa puntos de X si y sólo si $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}}f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ es inyectiva.*

(2) *$\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X si y sólo si $\mathcal{S}$ es una base para la topología de X.*

(3) *Si $\mathcal{F}$ separa puntos de X y es una Top-fuente inicial, entonces $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}}f_\alpha$ es un encaje.*

(4) *Si $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, entonces $\mathcal{F}$ es una Top-fuente inicial.*

(5) *Si $\mathcal{F}$ separa puntos de X y separa puntos de cerrados de X, entonces $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}}f_\alpha$ es un encaje.*

(6) *Si X es T_0 y $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, entonces $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}}f_\alpha$ es encaje.*

Demostración. (1) Es suficiente tomar en cuenta que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $\pi_\alpha \circ \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}}f_\alpha = f_\alpha$, donde $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha \to Y_\alpha$ es la función proyección.

(2) Supongamos que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X. Sean O un abierto en X y $x \in O$. Existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus O)$. Si $U = f_\alpha^{\leftarrow}(Y_\alpha \setminus cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus O))$ entonces $x \in U$. Ahora, si $y \in U$, entonces $f_\alpha(y) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(X \setminus O)$, así $f_\alpha(y) \notin f_\alpha(X \setminus O)$, luego $y \notin X \setminus O$, donde $y \in O$. Por lo tanto, $U \subseteq O$. Así, $x \in U \subseteq O$ y $U \in \mathcal{S}$. Lo cual prueba que $\mathcal{S}$ es una base para la topología de X.

Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es una base para la topología de X. Sean F un cerrado en X y $x \in X \setminus F$, entonces existen $\alpha \in \mathcal{A}$ y un abierto U de Y_α tales que $x \in f_\alpha^{\leftarrow}(U) \subseteq X \setminus F$. Si $y \in F$ entonces $y \notin f_\alpha^{\leftarrow}(U)$, por lo tanto $f_\alpha(y) \notin U$, resulta que $U \cap f_\alpha(F) = \emptyset$. Como $f_\alpha(x) \in U$, $f_\alpha(x) \notin cl_{Y_\alpha} f_\alpha(F)$. Así vemos que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X.

(3) Como $\mathcal{F}$ es Top-fuente inicial y $\mathcal{F} = \{\pi_\alpha \circ \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es Top-fuente inicial, por el Corolario 3.22, $\{\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha\}$ es Top-fuente inicial. Por otra parte, ya que $\mathcal{F}$ separa puntos de X, por (1), $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$ es inyectiva. Afirmamos que si O es abierto en X, $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(O) = V \cap \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(X)$, donde V es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$. Para demostrar esta igualdad, primero observemos que τ es la topología inicial de X respecto de $\mathcal{F}$, entonces $O = (\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha)^{\leftarrow}(V)$, donde V es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$. Así, si $w \in \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(O)$, entonces $w \in \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(y)$, con $y \in O$, además si $y \in O$, entonces $y \in (\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha)^{\leftarrow}(V)$, así $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(y) \in V$ y luego $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(y) \in \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(X)$. Por lo tanto $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(O) \subseteq V \cap \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(X)$. Por otro lado, si $z \in V \cap \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(X)$, entonces $z \in \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(x_0)$, para algún $x_0 \in X$. Así, $x_0 \in (\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha)^{\leftarrow}(V)$, es decir, $x_0 \in O$. Por lo tanto $z \in \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(O)$. Luego, $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(O) = V \cap \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(X)$. Es decir, $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$ es encaje.

(4) Si $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, entonces por (2), $\mathcal{S}$ es base de la topología de X y en particular es subbase de dicha topología. Así que por la Definición 3.19, $\mathcal{F}$ es una Top-fuente inicial

(5) Si $\mathcal{F}$ separa puntos de X, $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$ es inyectiva y si además separa puntos de cerrados de X, entonces por (4), $\mathcal{F}$ es una Top-fuente inicial. Como $\mathcal{F}$ es "composición" $\{\pi_\alpha \circ \triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{F} : X \to Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, por el Corolario 3.22 resulta que la fuente $\{\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha\}$ es una Top-fuente inicial, es decir, X tiene la topología inicial respecto a $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$. Entonces $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$ es encaje.

(6) Si X es T_0 y $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X entonces $\mathcal{F}$ también separa puntos de X. En efecto, sean $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ como X es T_0 existe O abierto tal que $x_1 \in O$. Notemos que $x_1 \notin cl\{x_2\}$. Como $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de X, existe $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x_1) \notin cl(f_\alpha(cl\{x_2\}))$. Así como, $x_2 \in cl\{x_2\}$

entonces $f_\alpha(x_2) \in cl(f_\alpha(cl\{x_2\}))$. Por tanto $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$, es decir, $\mathcal{F}$ separa puntos de X. Por (5), $\triangle_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha$ es encaje. $\square$

Notación 3.36. (1) *Si X y E son conjuntos, con $F(X, E)$ o con E^X se denotará la fuente $\{f : X \to E : f$ es función$\}$.*

(2) *Si X y E son espacios topológicos, se denotará por $C(X, E)$ a la Top-fuente $\{f : X \to E : f$ es función continua$\}$.*

Capítulo 4

Estructuras en C(X,E)

4.1. Estructuras algebraicas y estructuras algebraico-topológicas

La idea de esta sección es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Dados cualquier espacio topológico X y cualquier estructura algebraico-topológica E, la función $\psi : C(X,E) \to C(\alpha_E(X),E)$ tal que para cada $f \in C(X,E)$, $\psi(f) = \alpha_E f$, y su inversa $\alpha_E^* : C(\alpha_E(X),E) \to C(X,E)$, que a cada $g \in C(\alpha_E(X),E)$ le asocia $\alpha_E^*(g) = g \circ \alpha_E$, son isomorfismos de estructuras algebraicas (del mismo tipo que E).*

Para esto es necesario demostrar algunos resultados preliminares y definir los conceptos necesarios.

Definición 4.2. (1) *Sea ν un número cardinal, entonces una operación ν-aria α en E, es una función $\alpha : E^\nu \to E$, donde E es un conjunto.*

(2) *Sea ν un número cardinal, entonces una relación ν-aria $\mathcal{R}$ en E, es un subconjunto $\mathcal{R} \subseteq E^\nu$.*

Ejemplo 4.3. *1. Si E es un grupo y $\alpha : E \to E$ una función definida como $\alpha(x) = x^{-1}$ para cada $x \in E$, es una operación en E donde $\nu = 1$.*

2. Si E es un espacio vectorial sobre un campo K, $\alpha_k : E \to E$ definida como $\alpha_k(x) = kx$ para cada $x \in E$ y $k \in K$, es una operación en E en la cual $\nu = 1$.

3. Si E es un espacio vectorial sobre un campo K, $\alpha_+ : E \times E \to E$ definida como $\alpha_+(x, y) = x + y$ para cada $x, y \in E$, es una operación en E en la cual $\nu = 2$.

4. Si $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definida como $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ si $a < b$ entonces $\mathcal{R}$ es una relación.

Definición 4.4. (1) *Una **estructura algebraica** es una terna $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, donde E es un conjunto, θ y β son números cardinales, para cada $k \in \theta$, α_k es una operación sobre E, y para cada $\xi \in \beta$, ρ_ξ es un relación sobre E.*

(2) *El **tipo de la estructura algebraica***

$\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, es una pareja $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, de sucesiones transfinitas, tal que para cada $k \in \theta$, α_k es una operación ν_k-aria y, para cada $\xi \in \beta$, ρ_ξ es una operación μ_ξ-aria.

(3) *Dadas dos estructuras algebraicas*

$\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ y

$\varepsilon' = (E', (\alpha_0', ..., \alpha_k', ...)_{k\in\theta}, (\rho_0', ..., \rho_\xi', ...)_{\xi\in\beta})$, ambas del mismo tipo $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, una función $\varphi : E \to E'$ es morfismo de estructuras algebraicas del tipo τ, si

(i) φ preserva operaciones, es decir, para cada $k \in \theta$ y para cada $(x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k} \in E^{\nu_k}$, $\varphi(\alpha_k((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha'_k(\varphi((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$.

(ii) φ preserva relaciones, para cada $\xi \in \beta$ y cada $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in E^{\mu_\xi}$, $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$ implica que $(\varphi(x_\delta))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho'_\xi$.

(4) *Si ε y ε' son estructuras algebraicas del mismo tipo como en (3) una función $\varphi : E \to E'$ es isomorfismo de estructuras algebraicas de tipo τ, si φ es biyectiva, y satisface*

(i) φ preserva operaciones, es decir, para cada $k \in \theta$ y para cada $(x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k} \in E^{\nu_k}$, $\varphi(\alpha_k((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha'_k(\varphi((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$.

(ii) Para cada $\xi \in \beta$ y cada $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in E^{\mu_\xi}$, $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$ si y sólo si $(\varphi(x_\delta))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho'_\xi$.

(5) *Sea $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ una estructura algebraica de tipo $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}\ (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$. Diremos que ε es* ***una estructura algebraico-topológica de tipo*** *τ, si E es un espacio topológico Hausdorff y para cada $k \in \theta$, $\alpha_k : E^{\nu_k} \to E$ es una función continua.*

Para entender (i) y (ii) de la Definición 4.4(3) mostramos estos ejemplos:

Ejemplo 4.5. (1) *Sea α_k una operación binaria, $\nu_k = 2$, (i) señala que si $(x_1, x_2) \in E^2$, entonces $\varphi(\alpha_k(x_1, x_2)) = \alpha'_k(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$.*

(2) *Sea ρ_ξ una relación binaria, $\mu_\xi = 2$, (ii) señala que si $(x_1, x_2) \in E^2$, $(x_1 x_2) \in \rho_\xi$, entonces $(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \in \rho'_\xi$.*

Teorema 4.6. *Si $\mathcal{C}$ es la clase de todas las estructuras algebraicas del tipo $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría.*

Demostración. Definimos a los $\mathcal{C}$-objetos como las estructuras algebraicas del tipo τ y los morfismos como los morfismos de estructuras algebraicas del mismo tipo. Ya que $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, bastará demostrar que la composición de morfismos de estructuras algebraicas del tipo τ, es morfismo de estructuras algebraicas. Sean $\varepsilon_1 = (E_1, (\alpha_0^1, ..., \alpha_k^1, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^1, ..., \rho_\xi^1, ...)_{\xi\in\beta})$, $\varepsilon_2 = (E_2, (\alpha_0^2, ..., \alpha_k^2, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^2, ..., \rho_\xi^2, ...)_{\xi\in\beta})$ y $\varepsilon_3 = (E_3, (\alpha_0^3, ..., \alpha_k^3, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^3, ..., \rho_\xi^3, ...)_{\xi\in\beta})$ estructuras algebraicas de tipo τ y $\varphi_1 : E_1 \to E_2$, $\varphi_2 : E_2 \to E_3$ morfismos de estructuras algebraicas del tipo τ. Notemos $\varphi_2 \circ \varphi_1 : E_1 \to E_3$ es una función. Además si $k \in \theta$ y $(x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k} \in E_1^{\nu_k}$, entonces $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(\alpha_k^1((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha_k^1((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))) = \varphi_2(\alpha_k^2((\varphi_1(x_\gamma))_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha_k^3((\varphi_2(\varphi_1(x_\gamma)))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k^3((((\varphi_2 \circ \varphi_1)(x_\gamma))_{\gamma\in\nu_k})$. Por lo tanto, $\alpha_k^3((\varphi_2(\varphi_1((x_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$ preserva operaciones. Ahora observemos que si $\xi \in \beta$ y $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in E^{\mu_\xi}$, entonces $(x_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^1$ si y sólo si $(\varphi_1(x_\delta))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^2$. Luego, $(\varphi_2(\varphi_1(x_\delta))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^3$. Así, $((\varphi_2 \circ \varphi_1)(x_\delta))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^3$. Es decir, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ preserva relaciones. $\square$

Observación 4.7. *Si $\mathcal{C}'$ es la clase de todas las estructuras algebraicas-topológicas del tipo τ, entonces $\mathcal{C}'$ es una categoría.*

Proposición 4.8. *Si $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ es una estructura algebraica de tipo $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ y X es un conjunto, entonces existe $\varepsilon_0 = (E^X, (\alpha_0', ..., \alpha_k', ...)_{k\in\theta}, (\rho_0', ..., \rho_\xi', ...)_{\xi\in\beta})$ estructura algebraica de tipo τ.*

Demostración. Para demostrar la existencia es suficiente definir las operaciones y relaciones de ε_0, y además ver que ε_0 es del mismo tipo que ε.
Si α_k' fuera una operación ν_k-aria de E^X, entonces $\alpha_k' : (E^X)^{\nu_k} \to E^X$ es una función. Notemos que $\alpha_k'((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}) : X \to E$, donde $f_\gamma : X \to E$ para cualquier $\gamma \in \nu_k$. Así, definimos a la función α_k'

como $\alpha_k^{'}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x) = \alpha_k((f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k}$, para cada $x \in X$, donde $(f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k} \in E^{\nu_k}$.

Ahora, definamos $\rho_\xi^{'} \subseteq (E^X)^{\mu_\xi}$ de la siguiente manera: sea $f_\delta \in E^X$, para cada $\delta \in \mu_x i$. Proponemos: $(f_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^{'}$ si y sólo si para cualquier $x \in X$, $(f_\delta(x))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$. Como se utilizan las mismos sucesiones transfinitas de τ, entonces $\varepsilon_0 = (E^X, (\alpha_0^{'}, ..., \alpha_k^{'}, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^{'}, ..., \rho_\xi^{'}, ...)_{\xi\in\beta})$ es de tipo τ. $\square$

Proposición 4.9. *Si* $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *es una estructura algebraico-topológica de tipo* $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *y* X *es un espacio topológico, entonces existe* $\varepsilon_1 = (C(X, E), (\alpha_0^{''}, ..., \alpha_k^{''}, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^{''}, ..., \rho_\xi^{''}, ...)_{\xi\in\beta})$ *estructura algebraica de tipo* τ.

Demostración. Para demostrar la existencia es suficiente definir las operaciones y relaciones de ε_1, y además ver que ε_1 es del mismo tipo que ε.
Si $\alpha_k^{''}$ fuera una operación ν_k-aria de $C(X, E)$, entonces $\alpha_k^{''} : (C(X, E))^{\nu_k} \to C(X, E)$ es una función. Sean $f_\gamma \in C(X, E)$ para cualquier $\gamma \in \nu_k$. Definimos a la función $\alpha_k^{''}$ como $\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x) = \alpha_k(f_\gamma(x)_{\gamma\in\nu_k}) \in E^{\nu_k}$, para cada $x \in X$, donde $\alpha_k : E^{\nu_k} \to E$ son funciones continuas. Vamos a demostrar que $\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}) \in C(X, E)$, donde $f_\gamma \in C(X, E)$, para cada $\gamma \in \nu_k$. Notemos que $\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x) = \alpha_k((f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k(\triangle_{\gamma\in\nu_k} f_\gamma(x)) = (\alpha_k \circ \triangle_{\gamma\in\nu_k} f_\gamma)(x)$. Como $\triangle_{\gamma\in\nu_k} f_\gamma$ es continua (ver Lema 3.31) y α_k son continuas, para cada $k \in \theta$, se tiene que $\alpha_k^{''}(((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}) \in C(X, E)$.

Definamos $\rho_\xi^{''} \subseteq (C(X, E))^{\mu_\xi}$ de la siguiente manera: sea $f_\delta \in C(X, E)$. Proponemos: $(f_\delta)_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi^{''}$ si y sólo si para cualquier $x \in X$, $(f_\delta(x))_{\delta\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$. Como se utilizan las mismas sucesiones transfinitas de τ, entonces $\varepsilon_1 = (C(X, E), (\alpha_0^{''}, ..., \alpha_k^{''}, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^{''}, ..., \rho_\xi^{''}, ...)_{\xi\in\beta})$ es de tipo τ. $\square$

Proposición 4.10. *Si X y E son espacios topológicos, $C(X,E) = \{f_\mu\}_{\mu\in M}$ y $\alpha_E = \triangle_{\mu\in M} f_\mu : X \to E^M$, entonces para toda $f \in C(X,E)$ existe una única $\alpha_E f \in C(\alpha_E(X), E)$ tal que $\alpha_E f \circ \alpha_E = f$.*

Demostración. Primero observemos que la función $\alpha_E f$ debe hacer conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_E = \triangle_{\mu\in M} f_\mu"] \arrow[dr, "f"'] & \alpha_E(X) \subseteq E^M \arrow[d, dashed, "\alpha_E f"] \\
& E
\end{tikzcd}$$

Definimos $\alpha_E f$ como $\pi_f \upharpoonright_{\alpha_E(X)}$. Notemos que $= \triangle_{\mu\in M} f_\mu(x) = (f_\mu(x))_{\mu\in M}$, para cada $x \in X$. Así que, $(x_\mu)_{\mu\in M} \in \alpha_E(X) \subseteq E^M$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\alpha_E(x) = (x_\mu)_{\mu\in M}$, si y sólo existe $x \in X$ tal que $f_\mu(x) = x_\mu$, para cada $\mu \in M$. Como $f = f_{\mu_0}$ para algún $\mu_0 \in M$, si $(x_\mu)_{\mu\in M} \in \alpha_E(X)$ entonces $\alpha_E f((x_\mu)_{\mu\in M}) = \pi_f((x_\mu)_{\mu\in M}) = x_{\mu_0} = f_{\mu_0}(x) = f(x)$, para algún $x \in X$. Ahora, demostremos la unicidad. Supongamos que existe G función tal que $G \circ \alpha_E = f$. Sea $\triangle_{\mu\in M} f_\mu(x) \in \alpha_E(X)$, entonces $G(f_\mu(x))_{\mu\in M} = (G \circ \alpha_E)(x) = f(x) = \alpha_E f((x_\mu)_{\mu\in M}) = \alpha_E f(f_\mu(x))_{\mu\in M}$. Por lo tanto $G = \alpha_E f$. $\square$

El siguente Colorolario es una consecuencia de la Proposición 4.10.

Corolario 4.11. *Sean X y E espacio topológicos, $f \in C(X,E)$ y $g \in C(\alpha_E(X), E)$. Si $g \circ \alpha_E = f$, entonces $g = \alpha_E f$.*

Proposición 4.12. *Si X y E son espacios topológicos, definimos la función $\psi : C(X,E) \to C(\alpha_E(X), E)$ por $\psi(f) = \alpha_E f$, para cada $f \in C(X,E)$. Entonces la función $\alpha_E^* : C(\alpha_E(X), E) \to C(X,E)$ definida por $\alpha_E^*(g) = g \circ \alpha_E$, es la inversa de ψ.*

Demostración. Es suficiente demostrar que:
(1) $\psi \circ \alpha_E^* = Id_{C(\alpha_E(X),E)}$ y
(2) $\alpha_E^* \circ \psi = Id_{C(X,E)}$.

Prueba de (1). Sea $g \in C(\alpha_E(X), E)$ entonces $(\psi \circ \alpha_E^*)(g) = \psi(\alpha_E^*(g)) = \psi(g \circ \alpha_E)$, por lo tanto, se demostrará que $\psi(g \circ \alpha_E) = g$.

Primero, observemos que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_E"] \arrow[dr, "g\circ\alpha_E"'] & \alpha_E(X) \subseteq E^M \arrow[d, dashed, "g"] \\
& E
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_E"] \arrow[dr, "g\circ\alpha_E"'] & \alpha_E(X) \subseteq E^M \arrow[d, dashed, "\alpha_E g\circ\alpha_E"] \\
& E
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\psi(g \circ \alpha_E) = \alpha_E g \circ \alpha_E$, entonces por los diagramas y por el Corolario 4.11 se satisface la igualdad $g = \alpha_E g \circ \alpha_E$.

Prueba de (2). Sea $f \in C(X, E)$ entonces $(\alpha_E^* \circ \psi)(f) = (\alpha_E^* \circ \alpha_E f) = \alpha_E^*(\alpha_E f) = \alpha_E f \circ \alpha_E = f$.

Por lo tanto, ψ es biyectiva. $\square$

Proposición 4.13. *Si* $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *es una estructura algebraico-topológica de tipo* $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *y* X *es un espacio topológico, entonces existe* $\varepsilon_2 = (C(\alpha_E(X), E), (\delta_1, ..., \delta_k, ...)_{k\in\theta}, (\lambda_1, ..., \lambda_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *estructura algebraica de tipo* τ.

Demostración. Notemos que $\alpha_E(X)$ es un espacio topológico y ε una estructura algebraico-topológica. Se definen las mismas operaciones y relaciones que se definieron en la Proposición 4.9 para obtener la conclusión. $\square$

Proposición 4.14. *Si* $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *es una estructura algebraico-topológica de tipo* $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$*,* X *es un espacio topológico,* $\varepsilon_1 = (C(X, E), (\alpha_0^{''}, ..., \alpha_k^{''}, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0^{''}, ..., \rho_\xi^{''}, ...)_{\xi\in\beta})$ *y* $\varepsilon_2 = (C(\alpha_E(X), E), (\delta_1, ..., \delta_k, ...)_{k\in\theta}, (\lambda_1, ..., \lambda_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *son estructuras algebraicas del mismo tipo* τ *y* $\psi : C(X, E) \to C(\alpha_E(X), E)$ *es la función definida como* $\psi(f) = \alpha_E f$*, para cada* $f \in C(X, E)$*. Entonces* ψ *preserva operaciones.*

Demostración. Lo que se demostrará es que para cada $k \in \theta$ y $(f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k} \in C(X, E)^{\nu_k}$, $\psi(\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) = \delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$. Observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_E"] \arrow[dr, "\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})"'] & \alpha_E(X) \arrow[d, "\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Si designamos por $g = \delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$ y por $f = \alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})$. Es suficiente demostrar que $g \circ \alpha_E = f$, puesto que por el Corolario 4.11, tenemos que $g = \alpha_E f$, es decir, si $\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) \circ \alpha_E = \alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})$ entonces $\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha_E\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}) = \psi(\alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))$, luego, la igualdad es cierta.

Ahora, veamos que $\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})) \circ \alpha_E = \alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})$. Sean $x \in X$ y $\alpha_E(x) = \bar{e}$, así $\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))(\alpha_E(x)) = \delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))(\bar{e})$, por la Proposición 4.13, $\delta_k(\psi((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}))(\bar{e}) = \alpha_k((\psi(f_\gamma)(\bar{e}))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k((\alpha_E f_\gamma(\bar{e}))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k(\alpha_E f_\gamma(\alpha_E(x))_{\gamma\in\nu_k})$, luego, por la Proposición 4.10, $\alpha_k(\alpha_E f_\gamma(\alpha_E(x))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k((f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k})$, es decir, por la Proposición 4.9, $\alpha_k((f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k}) = \alpha_k^{''}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x)$.

Así, se concluye la proposición. $\square$

Lema 4.15. *Sean* $\Omega = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *y* $\Omega' = (E_1, (\alpha_0', ..., \alpha_k', ...)_{k\in\theta}$ *estructuras algebraicas del tipo* $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, *y* $f : E \to E_1$ *función biyectiva que preserva operaciones. Entonces* $f^{-1} : E_1 \to E$ *preserva operaciones.*

Demostración. Es suficiente demostrar que para cualquier $k \in \theta$ y $(x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k} \in E_1^{\nu_k}$, $f^{-1}(\alpha_k'((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha_k(f^{-1}((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k}))$. Note que $f(f^{-1}(\alpha_k'((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k}))) = \alpha_k'((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k})$. Por otro lado, por hipótesis f preserva operaciones, es decir, $f(\alpha_k(f^{-1}((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k})))$ $= \alpha_k'(f(f^{-1}((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k}))) = \alpha_k'((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k})$. Luego, como f es inyectiva $f^{-1}(\alpha_k'((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k})) = \alpha_k(f^{-1}((x_\gamma')_{\gamma\in\nu_k}))$. $\square$

Para terminar de demostrar el Teorema 4.1, demostremos la siguiente proposición:

Proposición 4.16. *Si* $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *es una estructura algebraico-topológica de tipo* $\tau = ((\nu_0, ..., \nu_k, ...)_{k\in\theta}, (\mu_0, ..., \mu_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, X *es un espacio topológico,* $\varepsilon_1 = (C(X, E), (\alpha_0'', ..., \alpha_k'', ...)_{k\in\theta}, (\rho_0'', ..., \rho_\xi'', ...)_{\xi\in\beta})$ *y* $\varepsilon_2 = (C(\alpha_E(X), E), (\delta_1, ..., \delta_k, ...)_{k\in\theta}, (\lambda_1, ..., \lambda_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ *son estructuras algebraicas del mismo tipo* τ *y* $\psi : C(X, E) \to C(\alpha_E(X), E)$ *es la función definida como* $\psi(f) = \alpha_E f$, *para cada* $f \in C(X, E)$, *entonces para cada* $\xi \in \beta$ *y* $(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi} \in (C(X, E))^{\mu_\xi}$, $(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho_\xi''$ *si y sólo si* $(\psi(f_\gamma))_{\gamma\in\mu_\xi} \in \lambda_\xi$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si $(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho_\xi''$ entonces, por la Proposición 4.9, para cualquier $x \in X$, $(f_\gamma(x))_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$. Así, $(\alpha_E f_\gamma(y))_{\gamma\in\mu_\xi}$ $\in \rho_\xi$, cuando $y = \alpha_E(x)$. Es decir, $(\alpha_E f_\gamma(\alpha_E(x)))_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$. Luego, $(\psi(f_\gamma)(y))_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho_\xi$, para todo $y \in \alpha_E(X)$, por la Proposición 4.13, $(\psi(f_\gamma)(y))_{\gamma\in\mu_\xi} \in \lambda_\xi$.

($\Leftarrow$) Sea $y = \alpha_E(x) \in \alpha_E(X)$, para algún $x \in X$. Si $(\psi(f_\gamma))_{\gamma\in\mu_\xi}$ $\in \lambda_\xi$ entonces $(\psi(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi}(y)) \in \lambda_\xi$. Por definición, $(\psi(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi}(y))$ $= (\alpha_E f_\gamma(y))_{\gamma\in\mu_\xi}$, entonces $(\alpha_E f_\gamma(y))_{\gamma\in\mu_\xi} = (\alpha_E f_\gamma(\alpha_E(x)))_{\gamma\in\mu_\xi}$ $= (f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_\xi}$ por la Proposición 4.10. Luego, por la Proposición 4.9, $(f_\gamma)_{\gamma\in\mu_\xi} \in \rho''_\xi$. $\square$

Notación 4.17. *Si X es un conjunto y $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ es una estructura algebraica, entonces vamos a denotar a la estructura algebraica $(E^X, (\alpha'_0, ..., \alpha'_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho'_0, ..., \rho'_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$, definida en la Proposición 4.8, como ε^X.*

Proposición 4.18. *Si E es un conjunto y **Con** es la categoría de todos los conjuntos con morfismos las funciones entre ellos, entonces podemos obtener un funtor contravariante F_1 : **Con** $\to$ **Con**.*

Demostración. Primero asociamos a cada conjunto X, $F_1(X) = E^X$, y a cada función $f : X \to Y$, $F_1(f) = f^\sharp$ donde $f^\sharp : E^Y \to E^X$ es definida como $f^\sharp(g) = g \circ f$, para cada $g \in E^Y$.

Veamos que efectivamente F_1 es un funtor contravariante. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. Notemos que $F_1(g \circ f) = (g\circ f)^\sharp$, por definición. Además, para cada $h \in E^Y$, $F_1(g\circ f)(h) = (g \circ f)^\sharp(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^\sharp(h \circ g) = f^\sharp(g^\sharp(h)) = f^\sharp \circ g^\sharp(h) = F(f) \circ F(g)(h)$. Por otra parte, si $h \in E^X$ entonces $F(id_X)(h) = h \circ id_X = h$, es decir, $F(id_X) = id_{E^X}$. Así, F_1 es un funtor contravariante. $\square$

Observación 4.19. (1) *Sea $\mathcal{C}$ la categoría de las estructuras algebraicas de tipo τ, entonces F_2 : **Con** $\to \mathcal{C}$. Asociándole a cada conjunto X, ε^X, y a cada función $f : X \to Y$, la función $f^\sharp : E^Y \to E^X$ tal que, para cada $g \in E^Y$, definida como*

$f^{\sharp}(g) = g \circ f$. Entonces por la Proposición 4.18, F_2 es un funtor cotravariante.

(2) *Sean X un conjunto y E un espacio topológico, entonces E^X es un espacio topológico con la topología Tychonoff del producto; y para cada $x \in X$, representamos con $\pi_x : E^X \to E$ a la x-ésima proyección. Si f es una función cualquiera entonces la función $f^{\sharp} : E^Y \to E^X$ es tal que para cada $x \in X$ y $h \in E^Y$, $(\pi_x \circ f^{\sharp})(h) = \pi_x \circ (f^{\sharp}(h)) = \pi_x(h \circ f) = h \circ f(x) = h(f(x)) = \pi_{f(x)}(h)$, es decir $\pi_x \circ f^{\sharp} = \pi_{f(x)} : E^Y \to E$, que es una función continua y por la Observación 3.27, $\{\pi_x : E^X \to E : x \in X\}$ es una Top-fuente inicial, entonces $f^{\sharp}$ es continua. De modo que obtenemos un funtor contravariante $F_3 : \boldsymbol{Con} \to \boldsymbol{Top}$, como en (1).*

(3) *Sean $\varepsilon = (E, (\alpha_0, ..., \alpha_k, ...)_{k\in\theta}, (\rho_0, ..., \rho_\xi, ...)_{\xi\in\beta})$ una estructura algebraico-topológica y $\mathcal{C}_1$ la categoría de las estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que ε, entonces se puede definir el funtor contravariante $F_4 : \boldsymbol{Con} \to \mathcal{C}_1$. En efecto, si $X, Y \in Ob(\boldsymbol{Con})$ y $f : X \to Y$, entonces $F_4(f) : E^X \to E^Y$ definida por $F_4(f)(g) = g \circ f = f^{\sharp}(g)$ para cada $g \in E^Y$, que por (2) $f^{\sharp}$ es continua. Ahora, si $X \in Ob(\boldsymbol{Con})$ entonces $F_4(X) = \varepsilon^X$. Notemos que por la Proposición 4.8, ε^X es una estructura algebraica. Veamos que ε^X es una estrucutura algebraico-topológica. Para esto, probemos que $\alpha_k' : (E^X)^{\nu_k} \to E^X$ es una función continua. Por el Teorema 3.32, α_k' es continua si y sólo si $\pi_x \circ \alpha_k'$ es continua para cualquier $x \in X$. Ahora, notemos que para cada $\delta \in \theta$ y $x \in X$ $\pi_\delta : (E^X)^{\nu_k} \to E^X$ y $\pi_x : E^X \to E$ son funciones continuas. Más aún $\pi_x \circ \pi_\delta : (E^X)^{\nu_k} \to E$ es continua. Fijemos $x \in X$, así $\triangle_{\delta\in\nu_k}\pi_x \circ \pi_\delta : (E^X)^{\nu_k} \to E^{\nu_k}$ es continua. Es*

decir, bastará demostrar que $\pi_x \circ \alpha_k^{'} = \alpha_k \circ \triangle_{\delta\in\nu_k}\pi_x \circ \pi_\delta$. *En efecto, sea* $H \in (E^X)^{\nu_k}$*, así* $H : \nu_k \to E^X$*. Si* $H(\delta) = f_\delta$*, para cada* $\delta \in \nu_k$*, entonces* $(\triangle_{\delta\in\nu_k}\pi_x \circ \pi_\delta)(H) = (\pi_x \circ \pi_\delta(H))_{\delta\in\nu_k} = (\pi_x(H(\delta)))_{\delta\in\nu_k} = (f_\delta(x))_{\delta\in\nu_k}$*. Por lo tanto,* $\alpha_k(\triangle_{\delta\in\nu_k}\pi_x \circ \pi_\delta)(H) = \alpha_k((f_\delta(x)_{\delta\in\nu_k}) = \alpha_k^{'}((f_\delta)_{\delta\in\nu_k})(x) = \pi_x(\alpha_k^{'}((f_\delta)_{\delta\in\nu_k})) = \pi(\alpha_k^{'}(H))$*. Luego* $\alpha_k^{'}$ *es continua. Así,* ε^X *es una estructura algebraica-topológico.*

4.2. Estructura topológica de C(X,E)

En esta sección veremos a $C(X,E)$ como espacio topológico y como estructura algebraico-topológica.

Definición 4.20. *Si* X *y* E *son espacios topológicos cualesquiera,* $C_p(X,E)$ *será el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es* $C(X,E)$ *y cuya topología es la que hereda como subespacio del producto topológico* E^X*, con la topología Tychonoff. A dicha topología se le llama la topología de la convergencia puntual en* $C(X,E)$*. De ahí el subíndice* p*.*

Para caracterizar de otra forma la topología de la convergencia puntual en $C(X,E)$, definimos:

Definición 4.21. *Si* X *y* E *son espacios topológicos, entonces para toda* $x \in X$*, la función evaluación en* x *es la función* $\hat{x} : C_p(X,E) \to E$ *tal que* $\hat{x}(f) = f(x)$*, para toda* $f \in C(X,E)$*.*

Proposición 4.22. *Si* X *y* E *son espacios topológicos, entonces:*

(1) *Para cada* $x \in X$*,* $\hat{x}$ *es la restricción a* $C_p(X,E)$ *de la* x*-ésima proyección* $\pi_x : E^X \to E$ *y, por lo tanto* $\hat{x}$ *es continua.*

(2) *La topología de la convergencia puntual en* $C(X,E)$ *es la topología débil o inicial respecto a la fuente* $\{\hat{x} : C(X,E) \to E : x \in X\}$.

(3) *La familia de conjuntos de la forma* $\hat{x}_1^{\leftarrow}(U_1) \cap \cdots \cap \hat{x}_n^{\leftarrow}(U_n)$, *donde* $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n$ *son elementos de* X *y* $U_1, ..., U_n$ *son abiertos en* E, *forman una base para la topología de la convergencia puntual en* $C(X,E)$.

Demostración. (1) Notemos que $\hat{x} = \pi_x \mid_{C(X,E)}$, la cual es continua, dado que se está tomado el producto Tychonoff.

(2) Sabemos que $\mathcal{F}_0 = \{\pi_x : E^X \to E : x \in X\}$ es una Top-fuente inicial y por el Lema 3.33, $\{i : C(X,E) \hookrightarrow E^X : i$ es la función inclusión$\}$ es una Top-fuente inicial. Luego, por el Corolario 3.21, $\{\hat{x} = \pi_x \circ i : C_p(X,E) \to E : x \in X\}$ es una Top-fuente inicial.

(3) Es consecuencia de la parte (2). $\square$

Observación 4.23. (1) *Sea* E *un espacio topólogico. Vimos que por la Observación 4.19*(2), *si* $f : X \to Y$ *es una función, entonces* $f^\sharp : E^Y \to E^X$, *tal que* $f^\sharp(g) = g \circ f$, *para cada* $g \in E^Y$, $f^\sharp$ *es una función continua. Si* f *es continua, para toda* $g \in C_p(Y,E)$, *entonces* $f^\sharp = g \circ f \in C_p(Y,E)$.

Llamemos f^* *a la función* $f^\sharp \mid_{C_p(Y,E)}^{C_p(X,E)}$. *Como* $f^\sharp$ *es continua, entonces* f^* *también lo es. Así que obtenemos, como en 4.19*(2), *un funtor contravariante*

$$F_p : \textbf{\textit{Top}} \to \textbf{\textit{Top}}$$

que a cada espacio topológico X *le asocia el espacio topológico* $C_p(X,E)$ *y a cada función continua* $f : X \to Y$ *le asigna la función continua* $f^* : C_p(Y,E) \to C_p(X,E)$.

(2) *Sea E una estructura algebraico-topológica del tipo τ, se sabe por la Proposición 4.9, que dado cualquier espacio topólogico X, entonces $C_p(X,E)$ es una estructura algebraica del mismo tipo que E. Veamos que $C_p(X,E)$ es una estructura algebraico-topológica del tipo τ. Sea α_k una operación ν_k-aria sobre E. Por la Observación 4.19(2) la operación $\alpha_k^{'} : (E^X)^{\nu_k} \to E^X$, definida puntualmente sobre E^X, es una función continua. Por otra parte, si $(f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k} \in (E^X)^{\nu_k}$, entonces $\alpha_k^{'}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x) = \alpha_k((f_\gamma(x))_{\gamma\in\nu_k})$. Es decir, $\alpha_k^{'}((f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k})(x)$ $= (\alpha_k \circ \triangle_{\gamma\in\nu_k} f_\gamma)(x)$, como $f_\gamma \in C_p(X,E)$, para toda $\gamma \in \nu_k$, entonces $\triangle_{\gamma\in\nu_k}(f_\gamma)_{\gamma\in\nu_k}$ es continua y como por hipótesis también es continua α_k; se tiene que $\alpha_k^{'}((f\gamma)_{\gamma\in\nu_k}) \in C_p(X,E)$. Esto quiere decir que $\alpha_k^{'}$ restringida a $C_p(X,E)$ es una operación bien definida y es continua. Luego, $C_p(X,E)$ es una estructura algebraico-topológica. Si $\mathcal{C}$ es la categoría de las estructuras algebraico-topológicas del mismo tipo que E, el funtor contravariante F_p, definido en (1), puede ahora considerarse como un funtor de **Top** en $\mathcal{C}$.*

Definición 4.24. *Si Y es un espacio topológico y $Z \subseteq Y$, entonces Z es retracto de Y si y sólo si existe una función continua $h : Y \to Z$ tal que $h(z) = z$, para cada $z \in Z$. A la función h se le llama retracción.*

Teorema 4.25. *Si $X \xrightarrow{f} Y$ es un **Top**-morfismo, entonces f es **Top**-sección si y sólo si f es encaje y $f(X)$ es retracto de Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como f es **Top**-sección, existe $g \in hom_{\mathbf{Top}}(Y,X)$ tal que $g \circ f = id_X$. Observemos que si $x_1, x_2 \in X$ y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, es decir, $id_X(x_1) = id_X(x_2)$, así $x_1 = x_2$, se sigue que f es una función inyectiva. Ahora, sea O abierto en X, notemos que $g(f(O)) = O$

y además $g^{\leftarrow}(O)$ es abierto en Y, pues g es una función continua. Para demostrar que f es encaje, sólo resta demostrar que $f(O) = g^{\leftarrow}(O) \cap f(X)$. Sea $y \in g^{\leftarrow}(O) \cap f(X)$, así, $y = f(x)$ para algún $x \in X$, entonces $g(y) = g(f(x)) = x \in O$, se sigue que $y \in f(O)$. Por lo tanto, $g^{\leftarrow}(O) \cap f(X) \subseteq f(O)$. Por otro lado, si $y \in f(O) \subseteq f(X)$. Luego, si $y = f(x)$ con $x \in O$, entonces $g(y) = g(f(x)) = x \in O$, así, $y \in g^{\leftarrow}(O)$. Por lo tanto f es encaje. Ahora, veamos que $f(X)$ es retracto de Y. Si definimos $h : Y \to f(X)$ como $h(y) = f(g(y))$, para cada $y \in Y$. Notemos que h es una función continua, pues es composición de funciones continuas. Luego, $h(f(x)) = f \circ g(f(x))$, por hipótesis $f \circ g(f(x)) = f(x)$. Es decir, $f(X)$ es retracto de Y.

($\Leftarrow$) Sea $f : X \to f(X)$ encaje, así f es homeomorfismo, entonces existe $f^{-1} : f(X) \to X$ continua. Como $f(X)$ es retracto de Y, existe una función continua $h : Y \to f(X)$ tal que $h(f(x)) = f(x)$, para cada $x \in X$. Sea $g = f^{-1} \circ h : Y \to X$, entonces $(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ h)(f(x)) = f^{-1}(h(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$. Es decir, f es **Top**-sección. $\square$

Teorema 4.26. *Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un **Top**-morfismo, entonces f es **Top**-retracción si y sólo existe $Z \subseteq X$, $r : X \to Z$ retracción y $h : Z \to Y$ homeomorfismo, tal que $h \circ r = f$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Como f es **Top**-retracción, existe $g \in hom_{\mathbf{Top}}(Y, X)$ tal que $f \circ g = id_Y$. Veamos que f es sobreyectiva, si $y \in Y$, entonces $g(y) \in X$ y $f(g(y)) = y$. Por otro lado, si $g(y_1) = g(y_2)$, entonces $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$, así, $y_1 = y_2$, es decir g es inyectiva. Ahora, sean $Z = (g \circ f)(X) \subseteq X$ y y $r = g \circ f : X \to Z$. Veamos que r es retracción. Observemos que r es continua, puesto que es la composición de funciones continuas. Además, si $z \in Z$, entonces $z = (g \circ f)(x)$ para algún $x \in X$. Así, $r(z) = r((g \circ f)(x)) = g \circ f((g \circ f)(x)) = g(f(g(f(x)))) =$

$g \circ f(x) = z$. Por lo tanto, Z es retracto de X. Por otra parte, como $h = f\mid_{g\circ f(X)}: Z \to Y$ es restricción de funciones continuas entonces h es continua. Asimismo, si $z_1 = g \circ f(x_1)$, $z_2 = g \circ f(x_2)$ y $h(z_1) = h(z_2)$, entonces $h(z_1) = f(g \circ f(x_1)) = h(z_2) = f(g \circ f(x_2))$, luego, $f(x_1) = f(x_2)$, así $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, es decir, $z_1 = z_2$. Se sigue que h es inyectiva. Ahora, si $y \in Y$, como f es sobreyectiva, entonces existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$, luego, $y = f \circ g(y) = f \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$. Por lo tanto, h una función sobreyectiva. Luego, h es una función biyectiva. Veamos que h es una función abierta. Sea V abierto de Z. Demostremos que $h(V)$ es abierto en Y, es decir, que $f(O\cap(g\circ f)(X))$ es abierto en Y, donde O es abierto en X y $V = O\cap(g\circ f(X))$. Si $y \in f(O\cap (g \circ f)(X))$, entonces $y = f(x)$ con $x \in O$ y $x = g \circ f(x_1)$ para algún $x_1 \in X$. Así, $y = f(x) = f(g \circ f(x_1)) = (f \circ g)(f(x_1)) = f(x_1)$. Aplicando g, obtenemos que $g(y) = g(f(x_1)) = x \in O$. Así $y \in g^{\leftarrow}(O)$, que es abierto de Y por la continuidad de g. Así, es suficiente demostrar que $g^{\leftarrow}(O) \subseteq f(O \cap (g \circ f)(X))$. Sea $l \in g^{\leftarrow}(O)$, así $g(l) \in O$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = l$. Luego, $g(l) = g(f(x))$, es decir, $g(l) \in (g \circ f)(X)$. Así $g(l) \in O \cap (g \circ f)(X)$. Si aplicamos f, tenemos que $l = f(g(l)) \in f(O\cap(g\circ f)(X))$. Es decir, $g^{\leftarrow}(O) \subseteq f(O\cap(g\circ f)(X))$. Por lo tanto $f(O \cap (g \circ f)(X))$ es abierto en Y. De modo que h es homeomorfismo. Además, $h \circ r(x) = h(g \circ f)(x)) = f((g \circ f)(X)) = f(x)$. Es decir, se cumple que $h \circ r = f$.

($\Leftarrow$) Como h es homeomorfismo, entonces existe $h^{-1} : Y \to Z$ función continua. Se sabe que $i : Z \hookrightarrow X$ donde i es la función inclusión, es continua. Así, podemos definir a $g = i\circ h^{-1} : Y \to X$, la cual es continua. Veamos que $f \circ g(y) = f(i \circ h^{-1})(y) = y$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$ y $z = h^{-1}(y)$, así $h(z) = y$. Por lo tanto, se tiene que $f(i \circ h^{-1})(y) = f \circ i(h^{-1}(y)) = f \circ i(z) = f(z) =$

$h \circ r(z) = h(z) = y$. Es decir, f es **Top**-retracción. $\square$

Ejemplo 4.27. (1) *Todos los funtores definidos en la Observación 4.19 son funtores contravariantes, si* $F : \boldsymbol{Con} \to \mathcal{C}$ *es uno de ellos, donde* $\mathcal{C}$ *es una categoría;* E^X *es un objeto* $\mathcal{C}$*, para cada función* $f : X \to Y$*,* $F(f)$ *es el* $\mathcal{C}$*-morfismo* $f^\sharp : E^Y \to E^X$*, tal que* $f^\sharp(g) = g \circ f$*, para cada* $g \in E^Y$*. Por la Observación 3.11 y por la Proposición 3.16, si* f *es una función sobreyectiva, entonces* $f^\sharp$ *es* $\mathcal{C}$*-sección y con ello* $\mathcal{C}$*-monomorfismo. En particular,* $f^\sharp$ *es una función inyectiva, pero se puede decir más cuando* E *es un espacio topólogico, como en* (2) *y* (3) *de la Observación 4.19, ya que* $f^\sharp$ *al ser* ***Top****-sección, entonces por el Teorema 4.25,* $f^\sharp$ *es encaje y* $f^\sharp(E) = E^Y$ *es retracto de* E^X*.*

Ahora, si f *es inyectiva, entonces por la Proposición 3.15,* $f^\sharp$ *es* $\mathcal{C}$*-retracción, y en particular es sobreyectiva, en particular cuando* E *es un espacio topológico,* $f^\sharp$ *es* ***Top****-retracción, es decir, existen un subespacio* Z *de* E^Y*, una retracción* $r : E^Y \to Z$ *y un homeomorfismo* $h : Z \to E^X$*, tales que* $f^\sharp = h \circ r$*.*

(2) *Si* E *es un espacio topológico y* $F_p : \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Top}$ *es el funtor definido en la Observación 4.23*(1)*, para cada función continua y sobreyectiva* $f : X \to Y$*, la función continua* $f^* = F_p(f) : C_p(Y,E) \to C_p(X,E)$ *es la restricción de* $F_3(f) = f^\sharp$*, y esta función, como acabamos de decir, es encaje. Notemos que si* $i_1 : C_p(X,E) \to E^X$ *y* $i_2 : C_p(Y,E) \to E^Y$ *son funciones inclusión, se obtiene que* $i_1 \circ f^* = f^\sharp \circ i_2$*. Por el Corolario 3.23 se tiene que* $\{f^\sharp : E^Y \to E^X\}$ *es una Top-fuente inicial. Ahora, por el Lema 3.33,* $\{i_1 : C_p(X,E) \to E^X\}$ *y* $\{i_2 : C_p(Y,E) \to E^Y\}$ *son Top-fuentes iniciales. Se sigue*

del Corolario 3.21 que $\{f^\sharp \circ i_2 : C_p(X,Y) \to E^X\}$ *es una Top-fuente inicial; así que* $\{i_1 \circ f^* : C_p(X,Y) \to E^X\}$ *es una Top-fuente inicial. Finalmente, por el Corolario 3.22,* $\{f^* : C_p(Y,E) \to C_p(X,E)\}$ *es una Top-fuente inicial; equivalentemente, por el Corolario 3.23,* f^* *es un encaje.*

Teorema 4.28. *Si* E *es una estructura algebraico-topológica de tipo* τ *y* $\mathcal{C}$ *es la categoría de las estructuras algebraico-topológicas del tipo* τ*, entonces:*
(1) $F_p : \textbf{\textit{Top}} \to \mathcal{C}$ *y*
(2) *si* $f \in hom_{\textbf{\textit{Top}}}(X,Y)$ *es sobreyectiva, entonces* f^* *es* $\mathcal{C}$*-monomorfismo y* f^* *es encaje en* ***Top****.*

Demostración. (1) Como vimos en la Observación 4.23, $F_p(X) = Cp(X,E) \in \mathcal{C}$, para cada $X \in Ob(\textbf{Top})$. Así que $F_p : \textbf{Top} \to \mathcal{C}$.

(2) Dado que F_p es un funtor contravariante y $f \in hom_{\textbf{Top}}(X,Y)$ es una función sobreyectiva, entonces f es Top-epimorfismo, así que $F_p(f) = f^*$ es $\mathcal{C}$-monomorfismo y por el Ejemplo 4.27(2), f^* es un encaje. $\square$

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats*, edición electrónica, http//katmat.math.uni-bremen.de/acc.

[2] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Nivel Medio, Sociedad Matemática Mexicana, 37, 2012.

[3] A. Contreras Carreto, *Espacios de Funciones Continuas del tipo* $C_p(X, E)$, tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.

[4] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[5] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Graduate Texts in Mathematics, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1960.

Índice alfabético