BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Sobre Algunos Modelos de Hiperespacios de Continuos

Tesis que para obtener el Título de

Licenciada en Matemáticas

presenta

María del Rocío Macías Prado

Directores de Tesis

Dr. David Herrera Carrasco

Dr. Fernando Macías Romero

Puebla, Pue., 28 de agosto de 2013

Al amor de mi vida,

Miguel Ángel García Ariz

A mis padres,

María del Rocío Prado Lo

Fernando Macías Rom

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en todos esos momentos de felicidad.

Me gustaría aprovechar estas líneas para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo.

Agradezco a mi esposo quien lloró y rio en cada momento junto a mí y fue capaz de contenerme cuando todo iba mal, que ha sido el impulso durante toda mi carrera y el sostén principal para la culminación de la misma, que con su apoyo constante y amor incondicional ha sido amigo y compañero inseparable, fuente de sabiduría, calma y consejo en todo momento. Gracias por amarme como solo tú lo puedes hacer.

Agradezco a mis papás (Rocío y Fernando) por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional A-MOR perfectamente sostenido a través del tiempo quienes me han sembrado las virtudes que se necesitan para vivir con anhelo y felicidad. A mis hermanos Nanda, Nando y Ale que me acompañaron en esta aventura que significó la licenciatura.

Gracias papá, por ser un amigo y un maestro; por hacerme el honor de ser uno de mis directores de tesis que con tus conocimientos, tu experiencia, tu paciencia y tu motivación has logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito.

Gracias en especial al Dr. David Herrera Carrasco, director de esta tesis, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continua de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

Un distintivo reconocimiento merecen las sugerencias recibidas de la profesora María de Jesús López Toriz, con la que me encuentro en deuda por la dedicación en la revisión de mi trabajo. Así como mis otros sinodales Agustín Contreras Carreto y Raúl Escobedo Conde.

También me gustaría agradecer a los que fueron mis profesores durante toda mi carrera profesional, porque todos han aportado un granito de arena a mi formación.

Finalmente mi gratitud a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrados que gracias a sus programas yo conocí el tema que presento en mi trabajo de tesis.

Índice general

Índice general v

Introducción vii

1. Preliminares **1**

2. Hausdorff y Vietoris **9**
2.1. Métrica de Hausdorff 9
2.2. Topología de Vietoris 13

3. Modelos de $C(X)$ **19**
3.1. El hiperespacio de los subcontinuos del intervalo unitario 20
3.2. El hiperespacio de los subcontinuos de la circunferencia 22
3.3. El hiperespacio de los subcontinuos del triodo . . . 26
3.4. El hiperespacio de los subcontinuos de la paleta . . 29
3.5. No hay mas modelos localmente conexos para $C(X)$ en $\mathbb{R}^3$ 30
3.6. Otros continuos X para los cuales $C(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^3$ 34

4. Modelos de $F_n(X)$ **37**

4.1. El n-ésimo producto simétrico del intervalo unitario 37
4.2. El segundo producto simétrico de la circunferencia 39
4.3. El n-ésimo producto simétrico del triodo simple . . 42
4.4. El segundo producto smétrico del 4-odo simple . . 50
4.5. El segundo producto simétrico de la paleta 51
4.6. El segundo producto simétrico del continuo ocho . 52
4.7. Teorema de Caracterización 53
4.8. El segundo producto simétrico de la curva senoidal del topólogo 56

Bibliografía **59**

Índice alfabético **61**

Introducción

El material que se presenta en este trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.

Wacław Sierpiński fue un matemático polaco nacido en 1882 y murió a la edad de 87 años. Tuvo una gran influencia en su paisano Kazimierz Kuratowski quien también fue un topólogo que nació en 1896 y murió a la edad de 84 años. Bronisław Knaster fue un matemático polaco que nació en 1893 y murió a los 97 años de edad. Stefan Mazurkiewicz fue director de tesis doctoral de los antes mencionados Knaster y Kuratowski.

A principios del siglo pasado, principalmente en Polonia, Knaster, Kuratowski y Sierpiński se dedicaron a cultivar la Teoría de los Continuos y casi al mismo tiempo empezaron a estudiar también los hiperespacios de continuos.

Un *continuo* es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.

Los hiperespacios más comunes de un continuo X, para cada $n \in \mathbb{N}$, son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$
$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \text{ y}$$
$$C(X) = C_1(X).$$

A estos hiperespacios se les dota de una métrica llamada *métrica de Hausdorff* (vea la Definición 2.3). Felix Hausdorff fue un matemático alemán nacido en 1868 que murió a la edad de 74 años.

Los primeros trabajos relacionados con los hiperespacios de continuos que se hicieron a principios del siglo XX se deben a Leopold Vietoris y al mismísimo Hausdorff. La métrica de Hausdorff fue definida por Dimitrie Pompeiu en 1905 (vea las páginas 281 y 282 de [13]). Vietoris fue un matemático austriaco que nació en 1891, además de ser reconocido por su desempeño matemático es conocido por ser un supercentenario, ya que murió a la edad de 110 años con 309 días.

Jhon L. Kelley quien fue un matemático estadounidense nacido en 1916 que murió a la edad de 83 años, en 1940, en su tesis doctoral dirigida por Robert Lee Moore e intitulada *Un estudio de hiperespacios* hizo el primer estudio sistemático de los hiperespacios e implementó técnicas que siguen siendo utilizadas hasta hoy en día.

En nuestro país, durante las últimas dos décadas, se ha intensificado el número de investigadores de estas teorías.

Son sorprendentes los logros alcanzados durante más de un siglo en estas áreas de la topología y son pocos los trabajos dirigidos a estudiantes de licenciatura donde se exponen distintos temas de la teoría de continuos y sus hiperespacios.

En la teoría de los hiperespacios es de mucha ayuda tener ideas geométricas de cómo son éstos. Dado que son definidos como ciertas clases de subconjuntos de un espacio dado, esta tarea no es fácil.

Dado un continuo X, un modelo para un hiperespacio $K(X)$, es un espacio topológicamente equivalente, donde los elementos son puntos en lugar de subconjuntos. los modelos de hiperespacios son un tema muy interesante desde el punto de vista geométrico. Sin embargo, los modelos son una herramienta poderosa para sugerir propiedades y resultados de hiperespacios. Desafortunadamente, como se ve en este trabajo, hay pocos hiperespacios que pueden ser modelados.

Las referencias [4], [7] y [8] de Alejandro Illanes y Sam B. Nadler fueron de gran ayuda para la realización de este trabajo.

El propósito de esta tesis es describir con más detalle los modelos de hiperespacios que se encuentran en el artículo de Alejandro Illanes denominado "Models of hyperspaces" publicado en Topology Proceedings en 2013 [6]. Para esto, se desarrolla este trabajo de tesis en cuatro capítulos.

En el Capítulo 1 se muestran conceptos básicos indispensables para el estudio de los hiperespacios de continuos.

En el Capítulo 2 se revisan algunos resultados relacionados con la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris; la meta de este capítulo es probar que la topología inducida por la métrica de Hausforff es igual que la topología de Vietoris en 2^X.

En el Capítulo 3 se presentan modelos de C(X), para cuando X es alguno de los siguientes continuos: el intervalo cerrado $[0, 1]$, la circunferencia, el triodo simple, la paleta. Así como el estudio de continuos X para los cuales $C(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^3$.

En el Capítulo 4 se tratan los modelos de $F_n(X)$, para cuando X es el intervalo unitario, la circunferencia, el triodo simple, el 4-odo simple, el ocho y el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.

La relevancia de este trabajo reside en el hecho de que varias de las afirmaciones que comúnmente se dan por verdaderas en el

estudio de los hiperespacios, aquí se demuestran minuciosamente.

María del Rocío Macías Prado
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Capítulo 1

Preliminares

El siguiente concepto permite que se pueda plasmar la noción de conexidad.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par (U, V) de conjuntos abiertos en X, ajenos, no vacíos y tales que $X = U \cup V$.

Ejemplo 1.2. Sea $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$. Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son abiertos en Y (aunque no en $\mathbb{R}$), ajenos y no vacíos. De esta forma, el par $([-1, 0), (0, 1])$ constituye una separación de Y.

Ejemplo 1.3. Sea $X = [-1, 1]$. Los conjuntos $[-1, 0]$ y $(0, 1]$ son ajenos y no vacíos, pero no forman una separación de X porque $(0, 1]$ no es abierto en X.

Una vez que ya se conoce la noción de separación, se formaliza a partir de este concepto lo que es un espacio conexo.

Definición 1.4. Un espacio topológico X es **conexo** si no existe una separación de X. Un subconjunto A de X es conexo si es conexo con la topología relativa.

Ejemplo 1.5. Sea $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$. Se vio en el Ejemplo 1.2 que sí existe una separación de Y. Así, Y no es conexo.

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico, Y es una **componente conexa** de X si es un subconjunto conexo maximal.

Definición 1.7. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El subconjunto V de X es una **vecindad de** p si contiene un abierto U de X que contiene a p.

Definición 1.8. Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $p \in X$, si para cada vecindad V de p, existe una vecindad U de p tal que U es conexo, U es abierto en X y $U \subset V$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, X es **localmente conexo.**

Ejemplo 1.9. Sea $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ (el del Ejemplo 1.5). El espacio Y no es conexo y sí es localmente conexo.

Las noción de conexidad local está dada en términos de vecindades. Pero también se puede dar en términos de abiertos.

Teorema 1.10. *Un espacio topológico X es localmente conexo en $p \in X$ si y sólo si para todo conjunto U abierto en X con $p \in U$, existe un conjunto V abierto en X tal que V es conexo y $p \in V \subset U$.*

Demostración. Suponga que X es un espacio topológico localmente conexo en $p \in X$. Sea U abierto en X tal que $p \in U$. Note que U es una vecindad de p. Por hipótesis, existe una vecindad V de p tal que V es conexo, V es abierto en X y $V \subset U$.

Inversamente, sea V una vecindad de p. Existe un conjunto W abierto en X tal que $p \in W \subset V$. Por hipótesis existe un conjunto U abierto en X tal que U es conexo y $p \in U \subset W$. Note que U es una vecindad de p tal que U es conexo, U es abierto en X y $U \subset V$. Así, por la Definición 1.8, se tiene que X es localmente conexo en p. □

Definición 1.11. Sean X un espacio topológico con métrica d, $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$. La **bola** de radio ε y centro en p es $B_X(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p,q) < \varepsilon\}$. Cuando no haya lugar a dudas simplemente se escribirá $B(\varepsilon, p)$.

Ejemplo 1.12. Considere el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ y U es abierto en $\mathbb{R}^n$ con $p \in U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \in B(\varepsilon, p) \subset U$. Además, el conjunto $B(\varepsilon, p)$ es conexo y abierto en $\mathbb{R}^n$. Luego, $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo.

El siguiente resultado es una importante caracterización de los espacios localmente conexos.

Teorema 1.13. *[12, Teorema 25.3] Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si para todo conjunto U abierto en X, toda componente C de U es abierto en X.*

Teorema 1.14. *[10, Teorema 1, pág. 230] La unión finita de cerrados localmente conexos es localmente conexo.*

Ejemplo 1.15. Sea $X = J \cup S$ donde,

$$J = \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq y \leq 1\right\},$$

$$S = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\right\}.$$

Note que J es localmente conexo. Un intervalo abierto (a, b) en $\mathbb{R}$ es localmente conexo. Es posible probar que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, \infty)$ es localmente conexo; dichos conjuntos se llaman *rayos* en $\mathbb{R}$. Como S es homeomorfo al rayo $[1, \infty)$ de $\mathbb{R}$, resulta que S es localmente conexo.

Se mostrará que X no es localmente conexo en $(0, 0)$. Para esto, sean $U = X \cap B\left(\frac{1}{2}, (0, 0)\right)$ y V un abierto en X tales que $(0, 0) \in V \subset U$. Se probará que V no es conexo. Para esto tomemos primero $\delta > 0$ tal que $X \cap B(\delta, (0, 0)) \subset V$. Por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta\pi} < k$. Sea $\eta = \frac{1}{k\pi}$. Luego $\frac{1}{\eta} = k\pi$, por lo que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\eta}\right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0.$$

Como $\frac{1}{\delta\pi} < k$, tenemos que $\eta = \frac{1}{k\pi} < \delta$. Así,

$$\left(\eta, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right) = (\eta, 0) \in X \cap B(\delta, (0, 0)) \subset V \subset U.$$

De nuevo, por la propiedad arquimediana, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \eta$ y $(\alpha, 1) \in X$. Notemos que $(\alpha, 1) \notin B\left(\frac{1}{2}, (0, 0)\right)$ y, por tanto, $(\alpha, 1) \notin V$. Luego $V = X_1 \cup X_2$, donde

$$X_1 = \{(x, y) \in V : x < \alpha\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{(x, y) \in V : \alpha < x\}.$$

Note que $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \alpha\}$ y $Y_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x\}$ son abiertos en $\mathbb{R}^2$, además $X_1 = Y_1 \cap V$ y $X_2 = Y_2 \cap V$. Así, X_1 y X_2 son conjuntos abiertos en V, ajenos y no vacíos. Esto muestra que V no es conexo. Por tanto U es un abierto en X tal que $(0, 0) \in U$ y para cualquier abierto V en X, con $x \in V \subset U$, tenemos que V es disconexo. Luego, X no es localmente conexo.

Definición 1.16. Sea X continuo, el hiperespacio

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

Definición 1.17. Un **continuo** es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.

Definición 1.18. Sea X un continuo con una propiedad topológica $\mathcal{P}$. Se dice que la propiedad $\mathcal{P}$ es una **propiedad hereditaria** si cada subcontinuo de X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Ejemplo 1.19. Note que $[0,1] \times [0,1]$ es localmente conexo, X del Ejemplo 1.15 es un subconjunto de $[0,1] \times [0,1]$ y X no es localmente conexo. Luego, la propiedad de ser localmente conexo no es una propiedad hereditaria.

A continuacion daremos ejemplos de continuos.

Ejemplos 1.20. 1. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

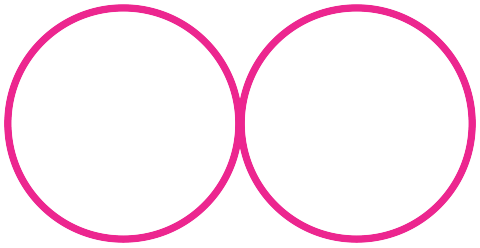
$[0,1]$ **arco**

2. La **circunferencia unitaria** es definida y denotada por $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Una **curva cerrada simple** es una copia topológica de la circunferencia unitaria S^1.

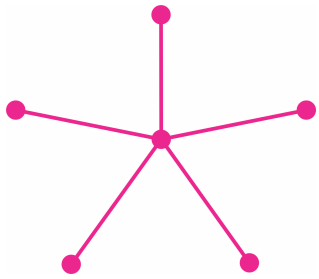
S^1 **curva cerrada simple**

3. El **continuo ocho**, es la unión de dos circunferencias unidas sólo por un punto (como el número ocho), es decir:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib, \text{tal que } (a-2)^2 + b^2 = 1\}.$$



4. Sea $n \in N$. Un **n-odo simple** es la unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, llamado el *vértice del n-odo,* de tal forma dicho vértice tiene que ser un extremo de cada uno de los n arcos. Los otros extremos de los arcos se llaman *extremos del n-odo,* en la siguente figura se representa un 5-odo simple.



5. Una **gráfica finita** se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos, digamos $A_1, A_2, ..., A_n$, tales que A_i intersecta a A_j, si $i \neq= j$, sólo en uno o en ambos puntos extremos, para $i, j = \{1, 2, .., n\}$.

6. Algunas gráficas finitas significativas son: el intervalo $[0, 1]$, la circunferencia unitaria S^1 y los n-odos simples.

7. Un continuo muy importante, no sólo en la teoría de continuos, sino en la topología general, es la curva senoidal del topólogo, que es S del Ejemplo 1.15.

Definición 1.21. Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$.

(a) La **nube** de radio ε y centro en A es $N(\varepsilon, A) = \{q \in X :$ existe $x \in A$ tal que $d(x, q) < \varepsilon\}$.

(b) El **diámetro** de X es $\text{diám}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$.

El siguiente resultado presenta propiedades básicas del concepto de nube que se usa para la demostración de teoremas posteriores.

Teorema 1.22. *Sean X un continuo, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$.*

(1) Si U es un abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$.

(2) Para cualquier $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

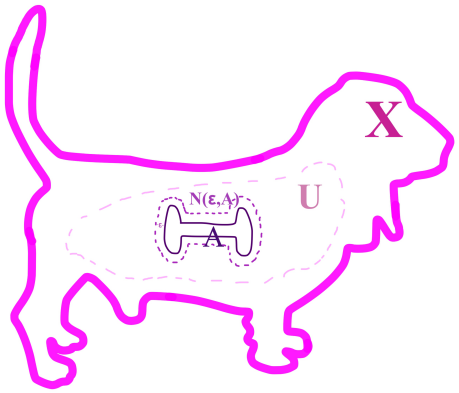
(3) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$.

(4) $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$. Así $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X.

Demostración. Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$.

(1) Sean $A \in 2^X$ y U un abierto en X tal que $A \subset U$. Note que A y $X - U$ son cerrados en X y así, compactos. Además como $A \cap (X - U) = \emptyset$, se tiene que $d(A, X - U) > 0$. Se propone que $\varepsilon = \frac{d(A, X-U)}{2}$. Si $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Así, $x \in B(\varepsilon, a)$. Suponga que $x \notin U$, así que

$x \in X - U$; luego, $d(A, X - U) \leq d(a, x)$. Así $d(A, X - U) < \varepsilon = \frac{d(A,X-U)}{2}$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$.



(2) Si $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$, luego $d(a, x) < \varepsilon$, es decir $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

(3) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta < \varepsilon$, luego, $x \in N(\delta, A)$. Así $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0, \ \delta < \varepsilon\}$. Por el inciso (2) de este teorema se tiene que la otra contención y por tanto se demuestra la igualdad.

(4) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$, así $x \in B(\varepsilon, a)$ y por lo tanto $x \in \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$.

Sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(\varepsilon, a)$, existe $a \in A$ tal que $x \in B(\varepsilon, a)$ así $d(x, a) < \varepsilon$, luego $x \in N(\varepsilon, A)$. □

Capítulo 2

Hausdorff y Vietoris

La idea de este capítulo es ver que dado un continuo X, los hiperespacios de X se pueden considerar ya sea con la topología de Vietoris o con la topología inducida por la métrica de Hausforff, indistintamente.

2.1. Métrica de Hausdorff

Teorema 2.1. *Si X es un continuo y $A, B \in 2^X$, entonces $E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)\}$ tiene ínfimo.*

Demostración. Por la definición de diámetro, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que $d(a,b) < \text{diám}(X) + 1$. Por lo tanto $A \subset N(\text{diám}(X)+1, B)$ y $B \subset N(\text{diám}(X)+1, A)$. Así, $\text{diám}(X)+1 \in E(A,B)$. Luego $E(A,B)$ no es vacío; y como 0 es una cota inferior de $E(A,B)$, existe ínf $E(A,B)$. □

Teorema 2.2. *Si X es un continuo y H es la función definida, para cada $A, B \in 2^X$, por $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B)$, entonces H es una métrica.*

Demostración. Se aclara que el Teorema 2.1 justifica que H es, en efecto, una función.

Para cada $A, B \in 2^X$, note que $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B) \geq 0$; y que $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B) = \text{ínf}\, E(B,A) = H(B,A)$.

Para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $A \subset N(\varepsilon, A)$, de modo que $E(A,A) = (0,\infty)$, luego $H(A,A) = \text{ínf}(A,A) = 0$. Por otro lado, suponga que $H(A,B) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, luego, $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B) = 0 < \varepsilon$, por lo que existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$, luego $A \subset N(\delta, B)$. Suponga que d es la métrica de X. Si $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $0 \leq d(a,b) < \delta < \varepsilon$; como esto se cumple para cualquier ε, se tiene que $d(a,b) = 0$, así $a = b$, de donde $a \in B$, luego $A \subset B$. De forma parecida se puede probar que $B \subset A$ y así $A = B$.

Sea $E(A,B) \uplus E(B,C) = \{\delta + \eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$.

Se va a probar que $\text{ínf}\, E(A,C) \leq \text{ínf}\, E(A,B) + \text{ínf}\, E(B,C)$, para esto, sea $\varepsilon > 0$. Note que existen $\alpha \in E(A,B)$ y $\beta \in E(B,C)$ tales que $\alpha < \text{ínf}\, E(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta < \text{ínf}\, E(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto $\alpha + \beta < \text{ínf}\, E(A,B) + \text{ínf}\, E(B,C) + \varepsilon$. Así, $\text{ínf}(E(A,B) \uplus E(B,C)) \leq \alpha + \beta < \text{ínf}\, E(A,B) + \text{ínf}\, E(B,C) + \varepsilon$. Por lo que

$$\text{ínf}(E(A,B) \uplus E(B,C)) \leq \text{ínf}\, E(A,B) + \text{ínf}\, E(B,C). \quad (2.1)$$

Se va a ver que $\text{ínf}\, E(A,C) \leq \text{ínf}(E(A,B) \uplus E(B,C))$, para esto sean $\delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)$. Para $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$ y existe $c \in C$ tal que $d(b,c) < \eta$. Así $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < \delta + \eta$. Por lo tanto, $A \subset N(\delta + \eta, C)$. En forma similar se puede probar que $C \subset N(\delta + \eta, A)$. De manera que $\delta + \eta \in E(A,C)$ y entonces $\text{ínf}\, E(A,C) \leq \delta + \eta$. Así, $\text{ínf}\, E(A,C)$ es cota inferior de $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$ y por tanto

$$H(A,C) = \text{ínf}\, E(A,C) \leq \text{ínf}(E(A,B) \uplus E(B,C)). \quad (2.2)$$

Usando la ecuación (2.2) y la ecuación (2.1), para cada $A, B, C \in$

2^X, se sigue que

$$H(A,C) \leq \text{ínf}(E(A,B) \uplus E(B,C)) \leq \text{ínf}\, E(A,B) + \text{ínf}\, E(B,C).$$

De aquí, $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$, es decir, la función H satisface la desigualdad del triángulo. Con todo esto, H es una métrica. □

Definición 2.3. Dado un continuo X, la función H del Teorema 2.2 es conocida como la **métrica de Hausdorff.**

Se prueba una propiedad esencial de la métrica de Hausdorff.

Teorema 2.4. *Sean X un continuo, A, $B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Primero, suponga que $H(A,B) < \varepsilon$. Existe $\delta' \in E(A,B)$ tal que $\delta' < \varepsilon$. Así, $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$. Por el Teorema 1.22 inciso (2), se tiene que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Inversamente, suponga que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Por el Teorema 1.22 inciso (3), se tiene que $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : \delta > 0, \delta < \varepsilon\}$. Dado que A es compacto y por el Teorema 1.22 inciso (4), existen números positivos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que $\delta_i < \varepsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así, $\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \varepsilon$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = \textit{máx}\{\alpha, \gamma\}$. Se tiene que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así, $\beta \in E(A,B)$. En consecuencia $H(A,B) \leq \beta < \varepsilon$. Por tanto, $H(A,B) < \varepsilon$. □

Notación 2.5. Dado un subconjunto A de un continuo X, sean:
$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$,
$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$, y
$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}$.

A las clases $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ les corresponden propiedades básicas como las siguientes.

Teorema 2.6. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X.*

(1) Si A es un abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.

(2) Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.

Demostración. (1) Sea $B \in \Gamma(A)$. Por el Teorema 1.22 inciso (1), existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, B) \subset A$. Se probará que $B_{2^X}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(\varepsilon, B)$, entonces $H(B, C) < \varepsilon$. Por el Teorema 2.4, se sigue que $C \subset N(\varepsilon, B)$. Luego $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$. Por lo tanto para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2^X}(\varepsilon, B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Se prueba a continuación que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sean $B \in \Lambda(A)$ y $x \in B \cap A$, como A es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(\varepsilon, x) \subset A$. A continuación se muestra que $B_{2^X}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(\varepsilon, B)$. Luego, $H(B, C) < \varepsilon$, por el Teorema 2.4, $B \subset N(\varepsilon, C)$, luego, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, así, $y \in B_X(\varepsilon, x) \subset A$. Luego, $y \in C \cap A$ así, $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Así, $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X.

(2) Primero note que las siguientes son equivalentes.

(a) $B \in \Gamma(A)$,

(b) $B \cap (X - A) = \emptyset$,

(c) $B \notin \Lambda(X - A)$,

(d) $B \in 2^X - \Lambda(X - A)$.

De estas condiciones se obtiene la igualdad $\Gamma(A) = 2^X - \Lambda(X - A)$. Como A es cerrado en X, se tiene que $X - A$ es abierto en X y por (1), se tiene que $\Lambda(X - A)$ es abierto en 2^X y así, $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.

Se ve a continuación que $\Lambda(A)$ es cerrado. Para esto se probará que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X - A)$. Sea $B \in 2^X$, luego $B \cap A = \emptyset$ o $B \cap A \neq \emptyset$. Si $B \cap A = \emptyset$, entonces $B \subset (X - A)$. Luego, $B \in \Gamma(X - A)$. Si $B \cap A \neq \emptyset$, entonces $B \in \Lambda(A)$. Así, $2^X \subset \Lambda(A) \cup \Gamma(X - A)$. La otra contención es trivial. Como $X - A$ es abierto en X, por (1) de este teorema, $\Gamma(X - A)$ es abierto en 2^X y como $\Lambda(A) = 2^X - \Gamma(X - A)$, se sigue que $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.

Finalmente se probará que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}^{2^X}$ y suponga que $B \notin \Phi(A)$, es decir $A \not\subset B$. Sea $a \in A - B$, luego, $d(B, a) > 0$, suponga $\varepsilon = d(B, a)$. Como $B \in \overline{\Phi(A)}^{2^X}$, $\Phi(A) \cap B_{2^X}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Sea $C \in (\Phi(A) \cap B_{2^X}(\varepsilon, B)$ así, $H(B, C) < \varepsilon$ luego, $C \subset N(\varepsilon, B)$. Como $C \in \Phi(A)$, $A \subset C$, y dado que $a \in A \subset C$, existe $b \in B$ tal que $d(b, a) < \varepsilon$. Pero como $d(B, a) < d(b, a)$ se sigue que $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es una contradicción, por lo que $B \in \Phi(A)$. Así, $\overline{\Phi(A)}^{2^X} \subset \Phi(A)$ y así $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. □

2.2. Topología de Vietoris

En esta sección verá algunas propiedades de un importantísimo conjunto llamado Vietórico y se finalizará mostrando que dado un continuo X, la topología inducida por la métrica de Hausdorff para 2^X es la misma que la topología de Vietoris.

Definición 2.7. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n$ sub-

conjuntos de X, no vacíos. El conjunto **vietórico** de $U_1, U_2, ..., U_n$ es el conjunto

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle =$$

$$\left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para } i \in \{1, 2, ..., n\}\right\}.$$

Teorema 2.8. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n$ subconjuntos de X, no vacíos. Se cumple lo siguiente.*

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \bigcap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Demostración. Note que,

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle &= \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^{n} U_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \\ &\cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \\ &= \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \bigcap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene lo pedido. □

Una propiedad básica de los conjuntos Vietóricos que ayudará a probar el Teorema 2.10 que es muy importante y que nos va a dar lugar a la topología de Vietoris, es la siguiente.

Teorema 2.9. *Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ subconjuntos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, entonces*

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle =$$

$$\langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Demostración. Sea $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$. Note que, por el Teorema 2.8,

$$A \in \Gamma(U) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\Big] \cap \Gamma(V) \cap \Big[\bigcap_{i=1}^{m} \Lambda(V_i)\Big].$$

Por definición de $\Gamma(U)$ y $\Gamma(V)$ se tiene que, $A \subset U \cap V$. Como

$$\begin{aligned}(U \cap V) \cup (V \cap U) &= \Big[U \cap \big(\bigcup_{i=1}^{m} V_i\big)\Big] \cup \Big[V \cap \big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\big)\Big] \\ &= \Big[\bigcup_{i=1}^{m} \big(U \cap V_i\big)\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{n} \big(V \cap U_i\big)\Big],\end{aligned}$$

$$A \subset \Big[\bigcup_{i=1}^{m} \big(U \cap V_i\big)\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{n} \big(V \cap U_i\big)\Big].$$

Por otro lado, como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subset V$, entonces para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$. Análogamente, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que $A \cap (U \cap V_i) \neq \emptyset$, de manera que:

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Por lo tanto

$$\langle V_1, \ldots, V_m\rangle \subset \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Para probar la otra contención, sea

$$A \in \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \ldots, U \cap V_m\rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned} A &\subset \Big[\bigcup_{i=1}^{m}(U\cap V_i)\Big]\cup\Big[\bigcup_{i=1}^{n}(V\cap U_i)\Big] \\ &= \Big[U\cap\big(\bigcup_{i=1}^{m}V_i\big)\Big]\cup\Big[V\cap\big(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\big)\Big] \\ &= (U\cap V)\cup(V\cap U) \\ &= U\cap V. \end{aligned}$$

Luego, $A\subset U$ y $A\subset V$ y entonces, $A\in\Gamma(U)$ y $A\in\Gamma(V)$.

Por otra parte, como $A\cap(U\cap V_i)=(A\cap U)\cap V_i=A\cap V_i\neq\emptyset$, para cada $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, se tiene que $A\in\bigcap_{i=1}^{m}\Lambda(V_i)$. De manera análoga se puede ver que $A\in\bigcap_{i=1}^{n}\Lambda(U_i)$. Por el Teorema 2.9, $A\in\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$. □

Teorema 2.10. *Si X es un continuo y $\mathfrak{B}=\{\langle U_1,U_2,...,U_n\rangle : U_1,U_2,...,U_n$ son abiertos en X y $n\in\mathbb{N}\}$, entonces $\mathfrak{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Demostración. Primero vea que $2^X=\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}B$. Para esto, note que $\langle X\rangle=\{A\in 2^X : A\subset X\}=2^X$. Así, $2^X\in\mathfrak{B}$. De manera que $2^X\subset\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}B$, como 2^X es el universo, se tiene que $2^X=\bigcup_{B\in\mathfrak{B}}B$.

Se probará la segunda condición para ver que $\mathfrak{B}$ es base. Sean $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathfrak{B}$ con $A\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$, donde $\mathcal{U}=\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle$ y $\mathcal{V}=\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$ por Teorema 2.9, existe $\mathcal{U}_3=\langle V\cap U_1,V\cap U_2,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,U\cap V_2,\ldots,U\cap V_m\rangle\in\mathfrak{B}$ tal que $A\in\mathcal{U}_3\subset\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$. Por lo tanto, $\mathfrak{B}$ es una base para una topología de 2^X. □

La topología generada por $\mathfrak{B}$, denotada por $\mathcal{T}_V$ es conocida como la **topología de Vietoris.**

Se concluye este capítulo con el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sea X un continuo. La Topología de Vietoris $\mathcal{T}_V$ y la topología inducida por la métrica de Hausdorff $\mathcal{T}_H$ en 2^X, son iguales.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_V$ y $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 2.10, existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos de X tales que $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Por el Teorema 2.6 inciso (1), $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \in \mathcal{T}_H$ y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Lambda(U_i) \in \mathcal{T}_H$. Así,

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right] \in \mathcal{T}_H.$$

Por el Teorema 2.8, se tiene que,

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Luego, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_H$. Por lo tanto $\mathcal{T}_V \subset \mathcal{T}_H$.

Ahora, sean $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}_H$ y $A \in \mathcal{U}_2$. Se probará que existe $\mathcal{U}_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $A \in \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2$.

Se sabe que una base para $\mathcal{T}_H$ está dada por

$$\mathcal{B}_H = \{B_{2^X}(\delta, C) : C \in 2^X \text{ y } \delta > 0\}.$$

Entonces existen $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \in B_{2^X}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{V}$.

Por otro lado, se tiene que la colección $\{B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b\right) : b \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Como F es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_i\right)$.

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $U_i = B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_i\right)$. Se propone,

$$\mathcal{U}_3 = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Es claro que $\mathcal{U}_3 \in \mathfrak{B}$.

Ahora, se mostrará que $\mathcal{U}_3 \subset B_{2^X}(\varepsilon, F)$. Sea $D \in \mathcal{U}_3$, luego,

$$D \in \Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right].$$

Así, $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Si $e \in D$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_j\right)$. Así, $d(e, b_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, y $b_j \in F$.

En resumen, para cada $e \in D$, existe $b_j \in F$ tal que $d(e, b_j) < \varepsilon$. Es decir,

$$D \subset N(\varepsilon, F). \tag{2.3}$$

Si $b \in F$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right)$. Así, $d(b, b_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $D \cap B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right) \neq \emptyset$. Se sigue que existe $z \in D \cap B_X\left(\frac{\varepsilon}{2}, b_k\right)$. Por la desigualdad del triángulo, se tiene que $d(b, z) \leq d(b, b_k) + d(b_k, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $d(b, z) < \varepsilon$. Así, para cada $b \in F$, existe $z \in D$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$F \subset N(\varepsilon, D). \tag{2.4}$$

Aplicando el Teorema 2.4 a (2.3) y (2.4), se tiene que $H(F, D) < \varepsilon$.

Así, $D \in B_{2^X}(\varepsilon, F)$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_3 \subset B_{2^X}(\varepsilon, F)$. Dado que

$$B_{2^X}(\varepsilon, F) \subset \mathcal{U}_2,$$

se obtiene $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2$.

Por lo tanto, para cada $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}_H$ tal que $A \in \mathcal{U}_2$, existe $\mathcal{U}_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $A \in \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2$. Esto demuestra que $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}_V$. Por tanto, $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_V$. □

Capítulo 3

Modelos de $C(X)$

Los modelos geométricos para los hiperespacios son imágenes que muestran cómo se ven éstos en ciertos espacios. En este capítulo se van a construir algunos modelos de ciertos hiperespacios de algunos continuos. Cuando las limitaciones físicas no nos permiten dibujar todo un hiperespacio, el modelo geométrico tiene suficiente información y nos da una imagen clara del mismo.

Si X es un continuo, los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica en particular. Los siguientes son los más importantes.

Definición 3.1. Si X es un continuo con métrica d y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$
$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\} \text{ y}$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A $C(X) = C_1(X)$ se suele llamar "el hiperespacio de los subcontinuos del continuo X", ya que como son elementos de 2^X se sigue que son cerrados en un compacto, entonces son compactos, pero como también son conexos se tiene que son continuos.

3.1. El hiperespacio de los subcontinuos del intervalo unitario

Se empezará con el intervalo unitario $[0,1]$. Como los subcontinuos del intervalo $[0,1]$ son sus intervalos cerrados y los singulares, se tiene que

$$C([0,1]) = \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Teorema 3.2. *Sea* $T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. *La función* $\varphi : C([0,1]) \to T$ *definida para cada* $[a,b] \in C([0,1])$, *por* $\varphi([a,b]) = (a,b)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $[a,b],[c,d] \in C[0,1]$ tales que $\varphi([a,b]) = \varphi([c,d])$, luego $(a,b) = (c,d)$ si y sólo si $[a,b] = [c,d]$. Es decir, φ es inyectiva.

Como para todo $(a,b) \in T$, existe $[a,b] \in C[0,1]$ tal que $\varphi([a,b]) = (a,b)$, se tiene que φ es suprayectiva.

Se va a probar que φ es continua, es decir, si $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C([0,1])$ que converge a $[a,b]$, entonces la sucesión $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ converge al punto (a,b).

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de $C([0,1])$ que converge a $[a,b]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N$, se tiene que $H([a_i,b_i],[a,b]) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Note que,

$$N\left(\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},[a,b]\right) = \left(a - \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b + \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \text{ y}$$
$$N\left(\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},[a_i,b_i]\right) = \left(a_i - \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

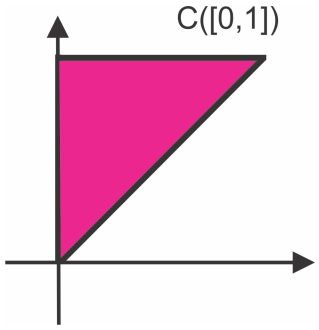
Por el Teorema 2.4, $[a,b] \subset \left[a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right]$ y $[a_i,b_i] \subset \left[a - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right]$.

Por lo tanto, $a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq a \leq b \leq b_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $a - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq a_i \leq b_i \leq b + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Luego, $a_i - a < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $b - b_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, por lo que $(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2 < \varepsilon^2$. Se sigue que $\sqrt{(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2} < \varepsilon^2$. Así, si $i > N$, entonces $d((a_i, b_i), (a, b)) < \varepsilon$. Por lo tanto $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a (a, b) en $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, note que el dominio de la función es un continuo y por lo tanto es compacto y el codominio es de Hausdorff, lo cual implica que la función es cerrada. Por lo tanto φ es un homeomorfismo. □

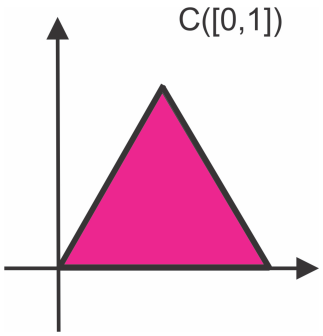
Note que T es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ acotado por el eje Y, la diagonal y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es igual a 1. Como se muestra en la siguiente figura.



Entonces en este momento ya se puede decir que un modelo para $C([0, 1])$ es el triángulo T. Vea cómo quedan representados algunos conjuntos particulares. Por ejemplo, el mismo intervalo $[0, 1]$ queda representado por el vértice $(0, 1)$ de T. El conjunto de los singulares, $F_1([0, 1])$, también pertenece a $C([0, 1])$ y cada uno de sus elementos se puede representar como $\{p\} = [p, p]$, por lo que el punto de T que lo representa es el punto (p, p). De modo que si se consideran todos los conjuntos de esta forma, obtiene

uno de los lados de T, precisamente lo que tiene T en la diagonal. Otros conjuntos interesantes son los de la forma $[0, b]$, donde b varía en $[0, 1]$. A un subcontinuo de éstos le corresponde el punto $(0, b)$. De manera que si considera a todos los subcontinuos de $[0, 1]$ que contienen al punto 0, éstos quedan representados como otro de los lados de T (los que tiene T en común con el eje Y).

Otra manera de hacer una representación, que en ciertas ocaciones suele ser más útil, para $C([0, 1])$, consiste en emplear la identificación $\psi : C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2$ dado por $\psi([a, b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Es decir, a cada intervalo le asigna su punto medio y su longitud. Con esta identificación, en lugar de obtener el triángulo T se obtiene el triángulo de la figura que sigue.



El hecho de que ψ sea un homeomorfismo se obtiene de manera similar que en el Teorema 3.2.

3.2. El hiperespacio de los subcontinuos de la circunferencia

En esta sección se construye un modelo para $C(S^1)$, donde S^1 es la circunferencia unitaria. Note que S^1, sólo tiene como subcontinuos a los conjuntos que constan de un sólo punto, los

subarcos y a S^1 mismo. Para cada subarco A de S^1 sea $m(A)$ el punto medio de A en S^1 y sea $\ell(A)$ la longitud de A.

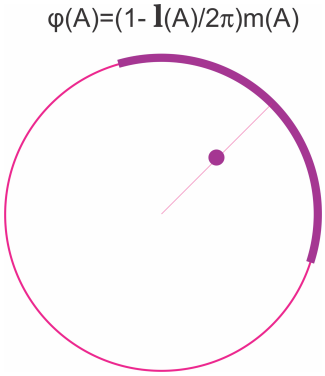
Notación 3.3. Se denotará el **disco unitario** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ mediante la letra $\mathbb{D}$.

Teorema 3.4. *Si* $\varphi : C(S^1) \to \mathbb{D}$ *está definida, para cada* $A \in C(S^1)$, *por*

$$\varphi(A) = \begin{cases} \left[1 - \frac{\ell(A)}{2\pi)}\right] m(A) & \text{si } A \neq S^1 \\ (0,0) & \text{si } A = S^1, \end{cases}$$

entonces φ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $A, B \in C(S^1)$ distintos. Si A o B es S^1 es claro que $\varphi(A) \neq \varphi(B)$.



Supongamos que ninguno de los dos es S^1; se tienen los siguientes casos.

(a) $m(A) \neq m(B)$ y $\ell(A) \neq \ell(B)$

(b) $m(A) \neq m(B)$ y $\ell(A) = \ell(B)$,

(c) $m(A) = m(B)$ y $\ell(A) \neq \ell(B)$.

Note que en los primeros dos casos, se tiene que como $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ están en la recta que pasa por el origen y por $m(A)$ y $m(B)$ respectivamente, dado que estos dos últimos son distintos $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ también lo son. En el inciso (c), se tiene que $1-\frac{\ell(A)}{2\pi} \neq 1-\frac{\ell(B)}{2\pi}$. Por lo que, $(1-\frac{\ell(A)}{2\pi})m(A) \neq (1-\frac{\ell(B)}{2\pi})m(B)$. Así, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Así, concluimos que φ es inyectiva.

Sea $(x,y) \in \mathbb{D}$. Existe $A \in C(S^1)$ perfectamente determinado por $\ell(A) = 2\pi - 2\pi\sqrt{x^2+y^2}$ y $m(A) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \left(\frac{2\pi - 2\pi + 2\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= (\sqrt{x^2+y^2})\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (x,y).\end{aligned}$$

Esto demuestra que φ es suprayectiva.

Se parametriza la circunferencia por $\alpha\colon [0,2\pi] \to S^1$ definida, para cada $s \in [0,2\pi]$, por $\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s)$. Si $B \neq S^1$, sean $P_B = \alpha({t_1}^B)$ y $Q_B = \alpha({t_2}^B)$, donde ${t_1}^B < {t_2}^B$ y B es el arco con extremos P_B y Q_B que se denota por $B = [P_B, Q_B]$. Note que la longitud de B,

$$\ell(B) = \int_{{t_1}^B}^{{t_2}^B} (\sqrt{(-\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2})\, dt = {t_2}^B - {t_1}^B \text{ y}$$
$$m(B) = \left(\cos\left(\tfrac{{t_2}^B - {t_1}^B}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\tfrac{{t_2}^B - {t_1}^B}{2}\right)\right).$$

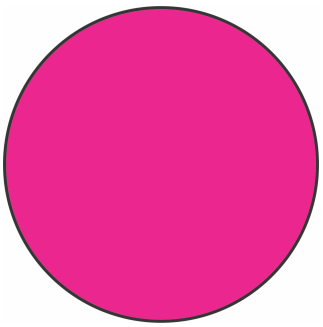
Sea $A \neq S^1$. Suponga que el punto $(1,0) \notin A$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión contenida en $C(S^1)$ tal que converge a A, por demostrar que $m(A_n)$ converge a $m(A)$. Se puede suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(1,0) \notin A_n$. Como la función longitud de arco, es continua, $\ell(A_n)$ converge a $\ell(A)$, es decir, ${t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}$ converge a ${t_2}^A -$

${t_1}^A$. Así, $m(A_n) = \left(\cos\left(\frac{{t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{{t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}}{2}\right)\right)$ converge a $\left(\cos\left(\frac{{t_2}^A - {t_1}^A}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{{t_2}^A - {t_1}^A}{2}\right)\right) = m(A)$.

Si $(0,1) \in A$, la prueba es similar. Con todo esto m es continua. Luego, φ es continua.

Note que el dominio y el codominio de la función φ son continuos. Por lo tanto, φ es un homeomorfismo. □

Así, un modelo para $C(S^1)$ es este disco.

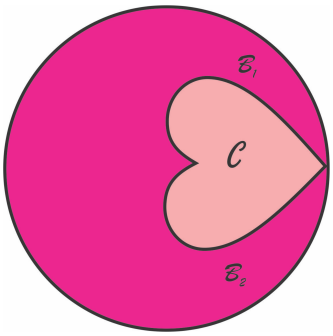


Tome un punto $p \in S^1$. Identifique la imagen bajo φ del conjunto $\mathcal{C} = \{A \in C(S^1) : p \in A\}$. Por la homogeniedad de S^1 suponga que $p = (0,1)$. Vea qué le corresponde al conjunto $\mathcal{B}_1$ que consta de los subarcos de S^1 que tienen a p como extremo izquierdo, es decir, p es el extremo del subarco que queda a la izquierda cuando uno se para sobre el arco y vemos en la dirección del origen. Se denotará por $\mathcal{B}_2$ al conjunto que consta de los subarcos de S^1 que tienen a p como extremo derecho.

Note que, para cada $A \in \mathcal{B}_1$, el punto medio de A está en la mitad de arriba de S^1. Los elementos de $\mathcal{B}_1$ van desde los muy pequeños, que son casi iguales al conjunto $\{p\}$ (para estos, su punto medio está también muy cercano a p y como su longitud es casi cero, ellos quedan representados en el disco muy cerca de p), hasta los muy grandes que son casi iguales a S^1, cuyo punto

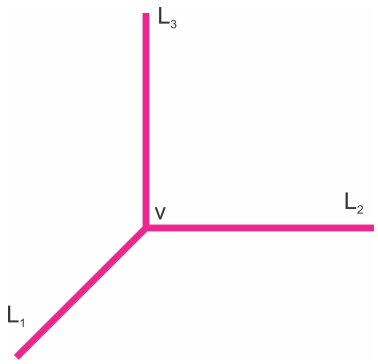
medio está muy cercano al punto $(-1, 0)$ de S, y como su longitud es casi igual a 2π, estarán representados por puntos muy cercanos al origen.

Note que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen una representación como en la figura siguiente. Como cada subarco de $\mathcal{C}$ que contiene a p está entre dos subarcos del mismo tamaño que $\mathcal{C}$, uno que tiene a p como extremo izquierdo y uno que lo tiene como extremo derecho, puede concluirse que el conjunto $\mathcal{C}$ queda representado como la región limitada por $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Note que $\mathcal{C}$ tiene la forma de un corazón.



3.3. El hiperespacio de los subcontinuos del triodo

Definición 3.5. El triodo simple T es el continuo formado por la unión de tres arcos L_1, L_2 y L_3, que coinciden exactamente en un punto común v, llamado vértice de T.



El hiperespacio $C(T)$ es la unión de $C(L_1)$, $C(L_2)$, $C(L_3)$ y $C_v(T)$ $= \{A \in C(T) : v \in A\}$. Por el modelo de la Sección 3.1, cada conjunto de $C(L_i)$ puede ser representado como un triángulo convexo.

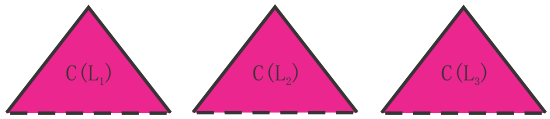
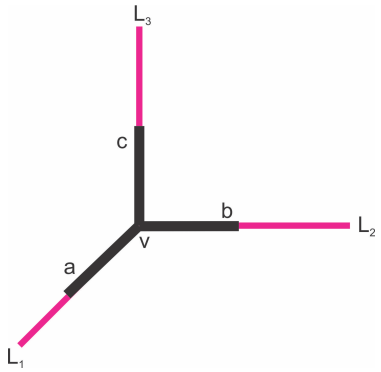


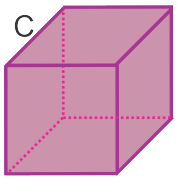
Figura 3.1: Para $i = \{1, 2, 3\}$, se tiene que $C(L_i)$ es homemorfo a un triángulo.

Note que el lado punteado de los triángulos indica que sobre este lado se encuentran los subcontinuos de L_1, L_2 y L_3 que contienen al vértice v.

Dado un elemento A de $C_v(T)$, A está determinado de manera única por la longitud de las intersecciones de A con los lados de T. Así que ellos pueden ser representados por un vector con tres coordenadas (a, b, c).

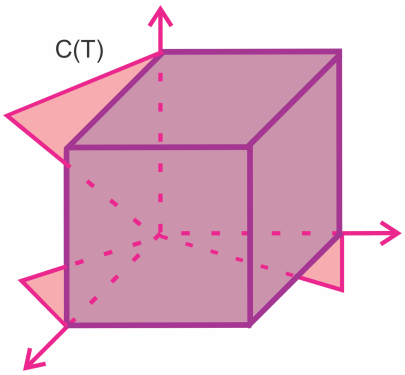


Variando las tres longitudes a, b, y c, se obtiene un cubo convexo C en $\mathbb{R}^3$.



Observemos que cada una de las aristas punteadas de C indican cada uno de los tipos de subcontinuos de L_1, L_2, L_3 que contienen a v, por lo que vamos a identificar estas aristas con la de los triángulos marcadas en la Figura 3.1.

Así, $C(T)$ es un cubo convexo en $\mathbb{R}^3$ con tres triángulos convexos adjuntos, como en la siguiente figura.

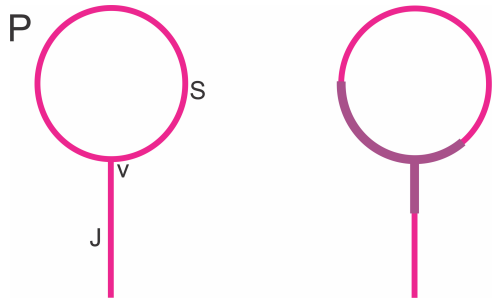


3.4. El hiperespacio de los subcontinuos de la paleta

Definición 3.6. La **paleta** P es el continuo formado por la unión de una curva cerrada simple S y un arco J que se intersecan en un punto v, que es un punto final de J.

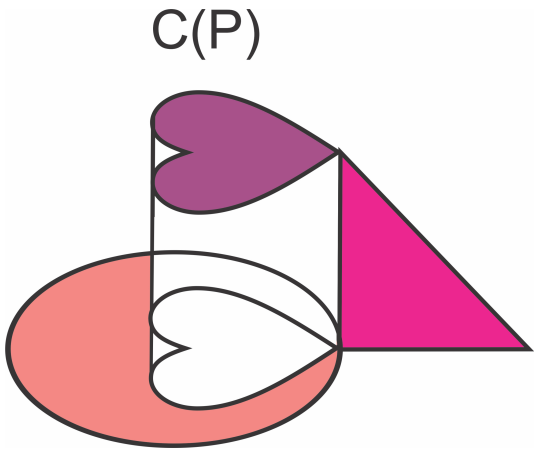
El hiperespacio $C(P)$ es la unión de $C(S), C(J)$ y $C_v(P) = \{A \in C(P) : v \in A\}$. El conjunto $C(J)$ puede ser representado como un triángulo convexo $\mathcal{T}$ y C(S) puede ser representado como un disco $\mathcal{D}$.

Sólo faltará determinar un modelo para $C_v(P)$, así como ver la forma en que se pegarán los modelos de los tres tipos de subcontinuos.



Note que, los elementos A de $C_v(P)$ están determinados de manera única por $A \cap S$ y por la longitud de $A \cap J$, por lo que al darle una asignación a cada elemento de $C_v(P)$ podemos usar a A como la pareja ordenada $((A \cap S), (A \cap J))$, notemos que $(A \cap S) \in \mathcal{C}$ (donde $\mathcal{C}$ es el corazón que está contenido en el disco $\mathcal{D}$) y $(A \cap J) \in L$ (donde L corresponde a una de las aristas del triángulo $\mathcal{T}$, quien representa los subcontinuos de S y J que contienen a v). Por lo tanto $C_v(P)$ puede ser representado por $C \times L$. Vamos a pegar $\mathcal{D}$ por $\mathcal{C}$ en una de las tapas de $C \times L$. Como $(C \times L) \cap \mathcal{T} = L$ vamos

a pegar $\mathcal{T}$ por J y como $J \cap \mathcal{C} = \{p\}$. Finalmente, un modelo para $C(P)$ es el espacio representado en la siguiente figura.



3.5. No hay mas modelos localmente conexos para $C(X)$ en $\mathbb{R}^3$ que los anteriores

Como se menciona en el capítulo anterior. Una gráfica finita es un continuo que se puede ver como unión finita de arcos cuyas intersecciones por pares son finitas. Un n-odo simple es una gráfica finita G que es la unión de n-arcos que emanan de un sólo punto v. Al punto v se le llama vértice de G.

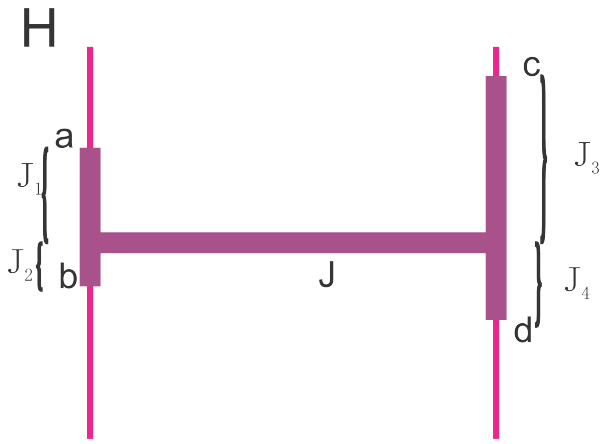
Se tiene un resultado muy importante para los n-odos que nos ayudará a estudiar la posibilidad de encajar los hiperespacios.

Teorema 3.7. *[14, Teorema 4.1.6] Si X es un continuo que contiene un n-odo entonces $C(X)$ contiene una n-celda.*

Por el teorema anterior tenemos que dado un continuo X no podemos construir un modelo de $C(X)$ en $\mathbb{R}^3$ si X contiene un n-odo con $n \geq 4$

Ahora considere el continuo $\mathcal{H}$ que tiene la forma de la letra H. Sea J el arco transversal de la siguiente figura. Se les llama J_1

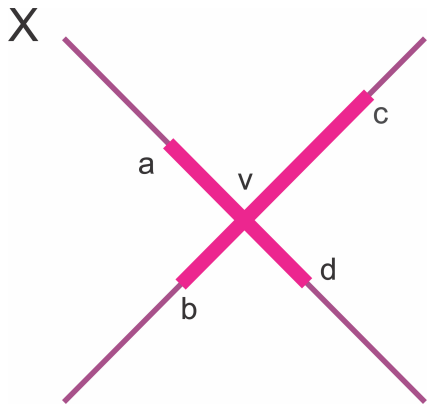
y J_2 a los arcos que se le añaden por un lado y J_3 y J_4 a los arcos que se le añaden por el otro extremo.



Considere la familia de los subcontinuos de X que está formada por todos aquellos subcontinuos que contienen al arco central J. Estos subcontinuos estarán determinados por sus intersecciones con los arcos J_1, J_2, J_3 y J_4. Es decir, si A es uno de tales subcontinuos, entonces A queda determinado por las cuatro intersecciones $A \cap J_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ o por los cuatro números a_1, a_2, a_3 y a_4 que representan a las longitudes de $A \cap J_1$, $A \cap J_2$, $A \cap J_3$ y $A \cap J_4$. Si toma cada J_i como un segmento de longitud igual a 1, entonces cada uno de los términos a_i puede variar entre 0 y 1. De modo que al subcontinuo A le puede asociar la cuarteta (a_1, a_2, a_3, a_4) en $\mathbb{R}^4$. Cuando se consideran todos los subcontinuos de este tipo (los que contienen a J), se tiene que la familia de todos ellos se puede representar como una 4-celda y entonces esta familia no tendrá un modelo en $\mathbb{R}^3$ y mucho menos $C(X)$ tendrá un modelo que se puede meter en $\mathbb{R}^3$ (Teorema 3.7).

Si X contiene un 4-odo simple con vértice v, similarmente como se hizo con el triodo simple, se puede ver que $C_v(X) = \{A \in C(X) : v \in A\}$ es una 4-celda, pues ellos dependen de cuatro lon-

gitudes independientes a_1, a_2, a_3 y a_4. Así, $C(X)$ es no encajable en $\mathbb{R}^3$.



Esto muestra que si se quiere construir modelos en $\mathbb{R}^3$ para un hiperespacio del tipo $C(X)$, debe cuidar que X no contenga 4-odos simples.

Richard Duda hizo un estudio a fondo de $C(X)$ cuando X es una gráfica finita. El proveyó mucha información específica que puede ser usada en la construcción de modelos geométricos para $C(X)$ y construyó varios modelos. Obtuvo resultados generales, dos de ellos particularmente relevantes: un continuo X es una gráfica finita si y sólo si $C(X)$ es un poliedro, y si P es un poliedro y $\dim(P) \geq 3$, entonces P es homeomorfo a $C(X)$ para a lo mas una gráfica finita X. Mas tarde, Kelley probó que si X es un continuo de Peano, entonces $\dim[C(X)] < \infty$ si y sólo si X es una gráfica finita. Además, Kelley encontró una fórmula para calcular la dimensión de $C(X)$, cuando X es una gráfica finita.

Definición 3.8. Sea β un número cardinal, decimos que un punto p en un espacio X es de **orden menor o igual que** β y escribimos $\text{ord}(p, X) \leq \beta$, si para cada abierto U de X tal que $p \in U$ existe un abierto V de X tal que $p \in V$ y $|Fr_X(V)| \leq \beta$. Decimos que p es de orden β en X y escribimos $\text{ord}(p, X) = \beta$, si $\text{ord}(p, X) \leq \beta$

y no ocurre que $\text{ord}(p, X) \leq \alpha$ para ningún cardinal $\alpha < \beta$. A los puntos de orden 1 les llamamos **puntos terminales** .

Sea X un continuo localmente conexo tal que $C(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^3$. Entonces $C(X)$ es de dimensión finita. Así, si se quiere encajar un modelo del hiperespacio de una gráfica finita X, se debe tener cuidado de dos cosas: que en X no lleguen cuatro de sus aristas a un sólo punto y que X no tenga dos puntos de orden 3, pues si hay dos puntos de ramificación, entonces uniéndolos se tiene un subespacio en forma de H. Esto da lugar a un teorema que caracteriza, a los continuos localmente conexos cuyo hiperespacios de subcontinuos puede ser encajado en $\mathbb{R}^3$, el cual se menciona a continuación.

Teorema 3.9. *[14, Teorema 4.1.9] Sea X un continuo localmente conexo. Entonces $C(X)$ puede ser encajado en $\mathbb{R}^3$ si y sólo si X es homeomorfo a alguno de los siguientes espacios: un arco, un triodo simple, una circunferencia o una paleta.*

Demostración. Por las secciones anteriores, el hiperespacio de los subcontinuos de los siguientes espacios: un arco, un triodo simple, una circunferencia o una paleta; pueden ser encajados en $\mathbb{R}^3$. Ahora, se demostrará la otra implicación. Dado que C(X) puede ser encajado en R3, se tiene por el Teorema 3.7 que no contiene un 4-odo simple, por lo que para todo punto $p \in X$ se tiene que $\text{ord}(p, X) =\leq 3$.

Se verá que X contiene a lo más un punto p tal que $\text{ord}(p, X) = 3$. Supongamos que existen $p, q \in X$ con $p \neq q$ tales que $\text{ord}(p, X) = 3 = ord(q, X)$, entonces existen vecindades ajenas U_p y U_q de p y q respectivamente tales que $T_p \subset U_p$ y $T_q \subset U_q$ donde T_p y T_q son triodos simples. Como X es un continuo localmente conexo, X es arco conexo, por lo que podemos encontrar un arco que una

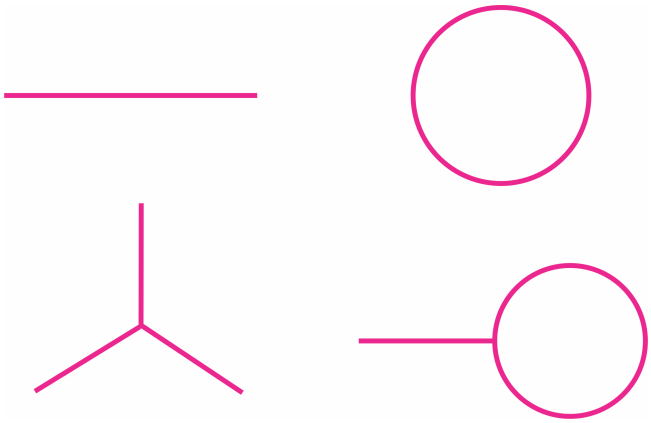
a T_p y T_q luego es posible construir un espacio homeomorfo a la letra H por lo que $C(X)$ contiene una 4 - celda, lo cual sería una contradicción. Por tanto concluimos que X es una gráfica finita. Analicemos las siguientes posibilidades.

a. Si el $\text{ord}(p, X) = 3$ para todo $q \in X - p$, se tiene que $\text{ord}(q, X) = 2$, luego X es un triodo o una paleta.

b. Si para todo $p \in X$, se tiene que $\text{ord}(p, X) = 2$, de [11, Proposici´on 9.5], se tiene que X es una circunferencia o un arco.

Por lo tanto se tiene lo pedido.

□



Continuos localmente conexos tales que $C(X)$ son encajables en $\mathbb{R}^3$

3.6. Otros continuos X para los cuales $C(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^3$

Definición 3.10. Sea X un espacio topológico. El **cono sobre** X denotado por $\text{cono}(X)$, es el cociente $\frac{X \times [0,1]}{\sim}$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $X \times [0, 1]$ dada por $(y_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$ si y sólo si $(y_1, t_1) = (y_2, t_2)$ o $t_1 = t_2 = 1$. Al punto $X \times \{1\}$

de este espacio cociente le llamamos el **vértice de** cono(X) y lo denotamos por v_X.

Definición 3.11. Un continuo X es **descomponible** cuando éste puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es **indescomponible** si no es descomponible.

El intervalo y la circunferencia son ejemplos de continuos descomponibles. Mientras que el Continuo de Knaster y el Solenoide diádico son ejemplos de continuos indescomponibles.

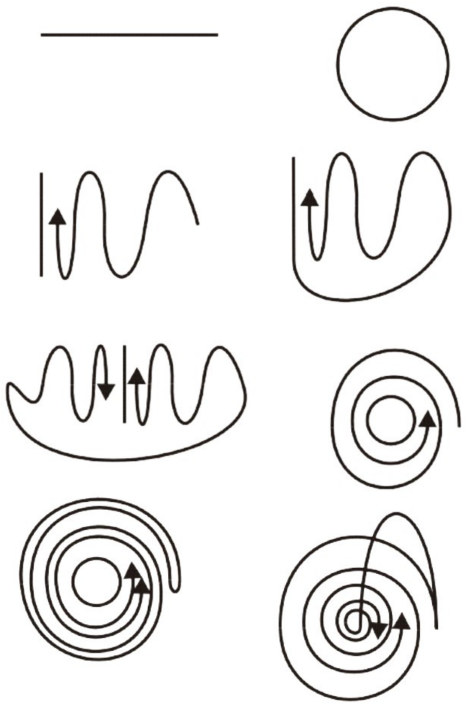
El siguiente teorema caracteriza a los continuos hereditariamente descomponibles cuyo hiperespacio de subontinuos es homeomorfo a su cono (cf. Definición 1.18).

Teorema 3.12. *[9, Teorema 1.1] Si X es un continuo hereditariamente descomponible, entonces $C(X)$ es homeomorfo al* cono(X) *si y sólo si X es homeomorfo a uno de los siguientes ocho continuos:*

1. Intervalo cerrado $[0, 1]$,
2. La circunferencia S^1,
3. La curva senoidal del topólogo Z,
4. El círculo de Varsovia, el cual resulta de Z identificando los puntos $(0, -1)$ y $(1, \text{sen}(1))$,
5. $Z \cup \{(x, \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 0\}$, con los puntos $(1, \text{sen}(1))$ y $(-1, \text{sen}(-1))$ identificados,
6. $S_1 = S^1 \cup \{[1 + \frac{1}{t}]e^{it} : t \geq 1\}$,
7. $S_1 \cup \{[1 - \frac{1}{t}]e^{it} : t \geq 1\}$ con los puntos $2e^i$ y $(0, 0)$ identificados,

8. $S_1 \cup \{[1 + \frac{1}{t}]e^{it} : t \leq -1\}$, con los puntos $2e^i$ y $(0, 0)$ identificados.

Estos continuos se muestran en la siguiente figura.



Ya que casi todos ellos pueden ser encajados en $\mathbb{R}^2$, su hiperespacio $C(X)$ puede ser encajado en $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 4

Modelos de $F_n(X)$

Sea X un continuo. Recuerde que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A $F_n(X)$ le llamaremos el n-ésimo producto simétrico del continuo X.

4.1. El n-ésimo producto simétrico del intervalo unitario

Como antes, en el tema de los modelos, el continuo más simple es el intervalo cerrado $[0, 1]$. Veamos cuál es el modelo para $F_n([0, 1])$.

Teorema 4.1. *Sea* $T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. *La función* $\varphi : F_2([0, 1]) \to T$ *definida, para cada* $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$, *por* $\varphi(\{a, b\}) = (\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $\{a, b\}, \{c, d\} \in F_2([0, 1])$.
Suponga que $\varphi(\{a, b\}) = \varphi(\{c, d\})$ luego, $(\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$ $= (\text{mín}\{c, d\}, \text{máx}\{c, d\})$. Así, $\text{mín}\{a, b\} = \text{mín}\{c, d\}$ y $\text{máx}\{a, b\}$ $= \text{máx}\{c, d\}$. Por lo tanto $\{a, b\} = \{c, d\}$ luego, φ es inyectiva.

Sea $(a,b) \in T$, note que $a \leq b$ luego, existe $\{a,b\} \in F_2([0,1])$ tal que $\varphi(\{a,b\}) = (a,b)$. Por lo tanto φ es suprayectiva.

Se va a probar que φ es continua, es decir, si $\{\{a_i,b_i\}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $F_2([0,1])$ que converge a $\{a,b\}$, entonces la sucesión $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ converge al punto (a,b).

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{\{a_i,b_i\}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de $F_2([0,1])$ que converge a $\{a,b\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N$ se tiene que $H(\{a_i,b_i\},\{a,b\}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Note que,

$$N\left(\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\{a,b\}\right) = \left(a-\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},a+\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(b-\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},b+\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \text{ y}$$
$$N\left(\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\{a_i,b_i\}\right) = \left(a_i-\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},a_i+\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(b_i-\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},b_i+\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).$$

Así, $\{a,b\} \subset \left(a_i-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},a_i+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(b_i-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},b_i+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ y $\{a_i,b_i\} \subset \left(a-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},a+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(b-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},b+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$.

Por lo tanto, $a_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < a < b < b_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $a - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < a_i < b_i < b + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Luego, $a_i - a < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $b - b_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Entonces $(a_i-a)^2 + (b_i - b)^2 < \varepsilon^2$. Se sigue que $\sqrt{(a_i-a)^2+(b_i-b)^2} < \varepsilon^2$. Así, si $i > N$, entonces $d((a_i,b_i),(a,b)) < \varepsilon$. Por lo tanto $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a (a,b) en $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, note que el dominio de la función es un continuo y por lo tanto es compacto y el codominio es de Hausdorff, lo cual implica que la función es cerrada. Por lo tanto φ es un homeomorfismo. □

Note que T es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ acotado por el eje Y, la diagonal y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es igual a 1. Como se muestra en la siguiente figura.

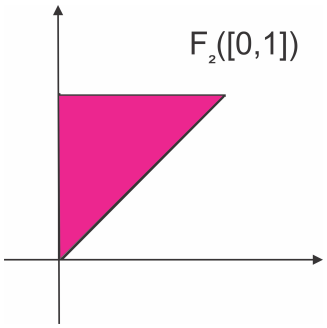


Figura 4.1: C(P).

Con el fin de construir un modelo para $F_3([0,1])$ vamos a considerar otra vez la función $\varphi : F_3([0,1]) \to \mathbb{R}^2$ definida para cada $A \in F_3([0,1])$ dada por $\varphi(A) = (\text{mín}\, A, \text{máx}\, A)$. Entonces φ es una función continua cuya imagen es el triángulo T en la figura anterior. Dado $(a,b) \in T$, la fibra $\varphi^{-1}((a,b))$ es el conjunto $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\}$. En el caso que $a < b$, se tiene que el conjunto $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\}$ es una curva cerrada simple, ya que c corre sobre el intervalo $[a,b]$ y $\{a,a,b\} = \{a,b,b\}$. En el caso de que $a = b$, el conjunto $\{\{a,b,c\} : a \leq c \leq b\} = \{\{a\}\}$. Así para el modelo $F_3([0,1])$ necesitamos poner un círculo en cada punto $(a,b) \in T$ si $a < b$. Esto se puede hacer tomando un cuerpo en revolución que puede ser obtenido rotando T alrededor de su diagonal. Vea Figura 4.2. Por lo tanto $F_3([0,1])$ es una 3-celda.

4.2. El segundo producto simétrico de la circunferencia

El producto simétrico $F_2(S^1)$ es la banda de Möbius. Se puede ver esto usando el siguiente argumento. Sea $\mathcal{NA} = \{\{p,q\} \in F_2(S^1) : p \neq -q\}$. Sean $A : \mathcal{NA} \to C(S^1)$, $m : \mathcal{NA} \to S^1$,

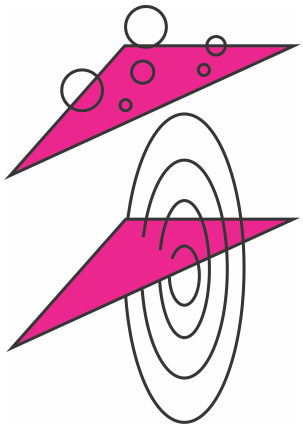


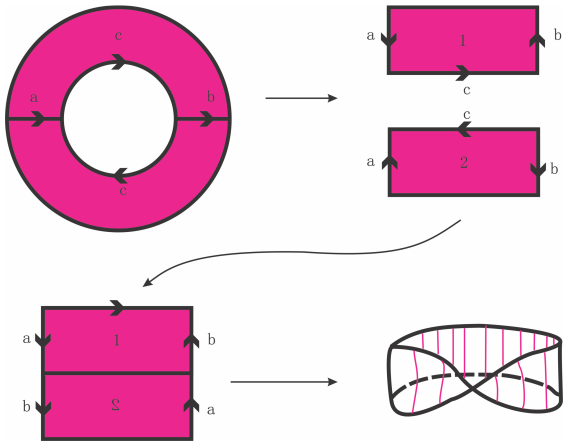
Figura 4.2: Rotar a T alrededor de su diagonal.

$L : \mathcal{NA} \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathcal{NA} \to \mathbb{R}^2$ dadas por,

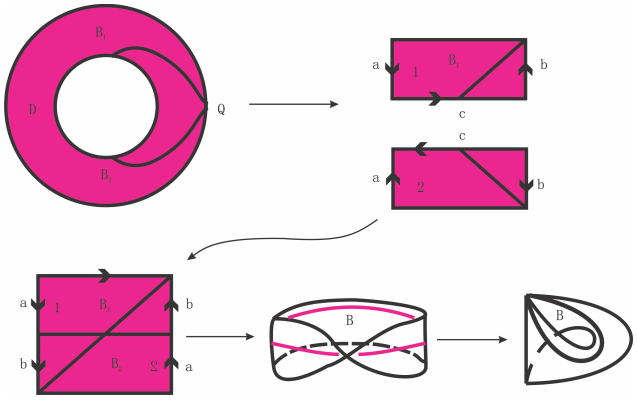
$$A(\{p,q\}) = \text{arco más chico que une a } p \text{ y } q \text{ en } S^1,$$
$$m(\{p,q\}) = \text{punto medio de } A(\{p,q\}),$$
$$L(\{p,q\}) = \text{la longitud de } A(\{p,q\}), \text{ y}$$
$$\varphi(\{p,q\}) = \left(1 - \left(\tfrac{1}{2\pi} L\left(\{p,q\}\right)\right)\right) m\left(\{p,q\}\right).$$

Note que φ es un homeomorfismo (la demostración es similar al Teorema 3.4) entre $\mathcal{NA}$ y el anillo $R = \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < |z| \leq 1\}$. Si queremos extender φ al conjunto $\mathcal{A} = \{\{z, -z\} \in F_2(S^1) : z \in S^1\}$, por la continuidad y dependiendo de como nos aproximemos a $\{z, -z\}$ mediante los elementos $\{p, q\} \in \mathcal{NA}$, se deberá definir $\varphi(\{z, -z\})$ con dos valores, $\varphi(\{z, -z\}) = \pm w$, donde $2w$ es el punto obtenido de rotar z por $\frac{\pi}{2}$. Para resolver esta ambigüedad, necesitamos identificar los puntos w y $-w$. Note que los puntos w son los puntos del círculo $B = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = \frac{1}{2}\}$. El espacio cociente obtenido de $R_0 = R \cup B$ por la identificación es la banda de Möebius M. En la siguente figura se muestra cómo se obtiene la banda. Se empieza con el anillo y se corta por las dos flechas a y b. Entonces hacemos las identificaciones mostradas en la siguiente

figura para obtener la banda M.



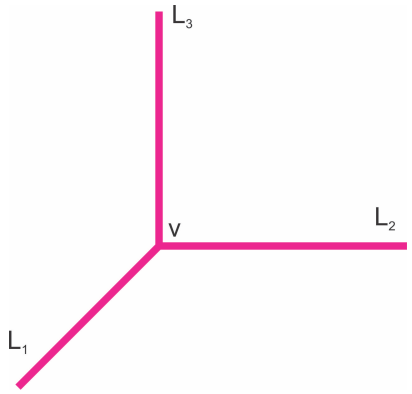
A continuación se muestra cómo se representa en M el conjunto $D_p = \{\{p, z\} : z \in S^1\}$. De acuerdo con la definición de φ, la imagen de este conjunto consiste de dos arcos B_1 y B_2 del anillo R_0. Si se muestran las transformaciones que hemos hecho para obtener la banda de Möbius M, se puede ver que D_p es homeomorfo a la curva cerrada simple B que toca la frontera de M en un punto exactamente. Esta curva cerrada simple se representa al final de la siguente figura. Es importante señalar que en esta representación de la banda de Möbius la curva B se puede dibujar totalmente sin lineas punteadas.



Como se ha visto, algunos modelos de hiperespacios son fáciles de construir. Hay otros ejemplos mas complicados para los cuales una aproximación específica es necesaria. Como una muestra de qué tan difícil puede ser la construcción de un modelo, está un error que cometió Karol Borsuk. Él publicó un artículo [1] diciendo que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a $S^1 \times S^2$, donde S^n es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$. Tres años después, Raoul Bott [2] corrigió este hecho probando que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3.

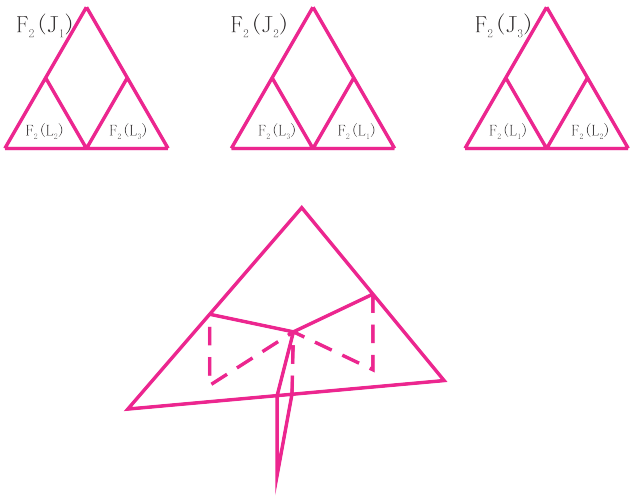
4.3. El n-ésimo producto simétrico del triodo simple

Considere un triodo simple X dibujado en la siguiente figura.



Sea $J_1 = L_1 \cup L_2$, $J_2 = L_2 \cup L_3$ y $J_3 = L_3 \cup L_1$. Note que $F_2(X) = F_2(L_1) \cup F_2(L_2) \cup F_3(L_3)$. Como cada J_i es un arco, sabemos que $F_2(J_i)$ puede ser visto como un triángulo convexo. Entonces, para obtener el modelo para $F_2(X)$ necesitamos tomar los tres triángulos $F_2(J_1)$, $F_2(J_2)$ y $F_2(J_3)$ e identificar los puntos que representan elementos de $F_2(X)$ que aparecen en mas de un triángulo. Por ejemplo, $F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(L_3)$ es el subtriángulo en ambos triángulos $F_2(J_1)$ y $F_2(J_2)$. En la siguiente figura

se muestran los triángulos $F_2(J_1)$, $F_2(J_2)$ y $F_2(J_3)$ con las partes que necesitan para ser identificados. El espacio resultante es el triángulo convexo con tres lados.



Recientemente Enrique Castañeda encontró un modelo para $F_3(X)$ [14]. A continuación se presenta la construcción que hizo. Para esto, veamos e siguiente teorema.

Teorema 4.2. *[14, Teorema 7.1.1] Sea T_n un n-odo simple entonces $F_m(T_n)$ es homeomorfo al cono sobre un continuo Z, para $m, n \in \mathbb{N}$.*

En la demostración de este teorema en [14] se obtiene que $Z = \{a \in F_m(T_m) : A \cap \{v_1, v_2, ..., v_n\} \neq \emptyset\}$.

Por el teorema anterior, para obtener un modelo geométrico del tercer producto simétrico del triodo T, basta con mostrar un modelo geométrico del continuo Z. Del Teorema 4.2.

$$Z = \{a \in F_m(T) : A \cap \{v_1, v_2, v_3\} \neq \emptyset\},$$

es decir, los elementos de Z son de la forma $\{a, b, v_i\}$ con $a, b \in T$ e $i = \{1, 2, 3\}$.

Así se considerarán tres copias de $F_2(T)$, una por cada uno de los puntos extremos v_i, ya que hay un homeomorfismo natural entre el conjunto $R_i = \{\{a, b, v_i\} \in F_3(T) : a, b \in T\}$ y $F_2(T)$ para cada $i = \{1, 2, 3\}$.

De acuerdo con la Figura 4.3 se da la siguiente notacíon.

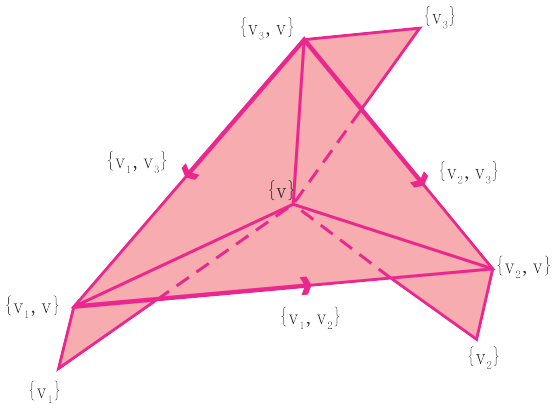


Figura 4.3: $F_2(T)$.

Notación 4.3.

- $1a = \overline{\{v_1, v_3\}\{v_3, v\}}$,
- $2a = \overline{\{v_3, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $3a = \overline{\{v_3, v\}\{v_3\}}$,
- $1b = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_3\}}$,
- $2b = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_2\}}$,
- $3b = \overline{\{v_1, v\}\{v_1\}}$,
- $1c = \overline{\{v_1, v\}\{v\}}$,
- $2c = \overline{\{v_2, v\}\{v\}}$,
- $3c = \overline{\{v_3, v\}\{v\}}$,
- $1d = \overline{\{v_2, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $2d = \overline{\{v_2, v\}\{v_1, v_2\}}$,
- $3d = \overline{\{v_2, v\}\{v_2\}}$.

En la Figura 4.4 se muestra una descomposición de R_1 en la que se ha cortado, y señalado los lugares por donde cortamos, de

acuerdo con la notación anterior.

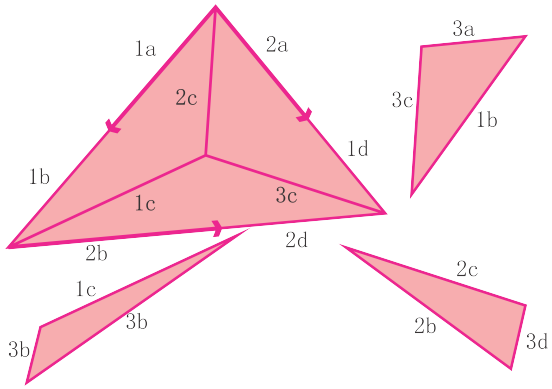


Figura 4.4: $\{a, b, v_1\}$, con $a, b \in T$.

Ahora se va a separar el triángulo que tiene por lados $2a$, $3c$, $2c$, $1d$ y a identificar los lados $3b$, $3b$ del triángulo que tiene lados $1c$, $3b$, $3b$ como se muestra en la Figura 4.5.

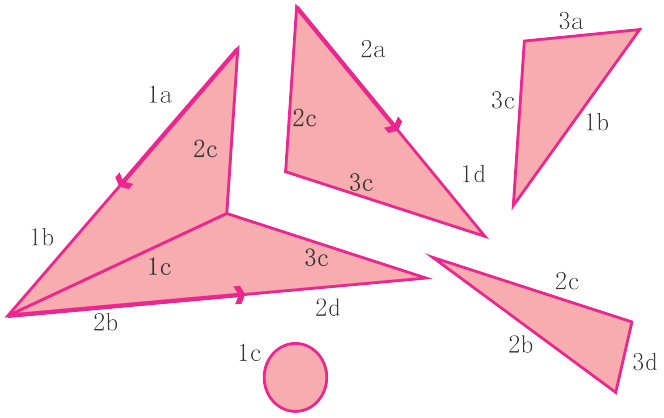


Figura 4.5: El truco.

Posteriormente se va a identificar los lados $2b$ del triángulo $2b$, $2c$, $3d$, y de la figura $1a$, $1b$, $2b$, $2d$, $2c$, $3c$ y $1b$ del triángulo $1b$, $3a$, $3c$, y de la figura $1a$, $1b$, $2b$, $2d$, $2c$, $3c$, esto se puede observar en la Figura 4.6

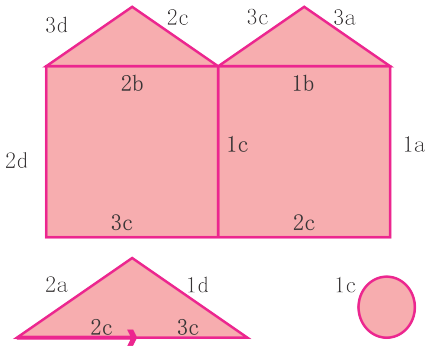


Figura 4.6: Haciendo las primeras identificaciones.

Finalmente del triángulo que se desprendió se va a identificar los lados $2c$ con la figura $2c$, $3c$, $3a$, $1a$, $3c$, $2c$, $2d$, $3d$ y es lado $3c$ como se puede ver en la Figura 4.7.

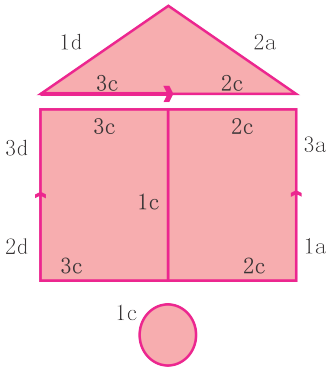


Figura 4.7: El último paso para R_1.

Se va a hacer ahora la siguiente notación para los elementos de R_2.

Notación 4.4.

- $1b = \overline{\{v_1, v_3\}\{v_3, v\}}$,
- $2b = \overline{\{v_3, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $3b = \overline{\{v_3, v\}\{v_3\}}$,

- $1d = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_3\}}$,
- $2d = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_2\}}$,
- $3d = \overline{\{v_1, v\}\{v_1\}}$,
- $1h = \overline{\{v_1, v\}\{v\}}$,
- $2h = \overline{\{v_3, v\}\{v\}}$,
- $3h = \overline{\{v_2, v\}\{v\}}$,
- $1g = \overline{\{v_2, v\}\{v_1, v_2\}}$,
- $2g = \overline{\{v_2, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $3g = \overline{\{v_2, v\}\{v_2\}}$.

En la Figura 4.8, se muestra para los elementos de Z de la forma $\{a, b, v_2\}$ el mismo procedimiento que se hizo para R_1.

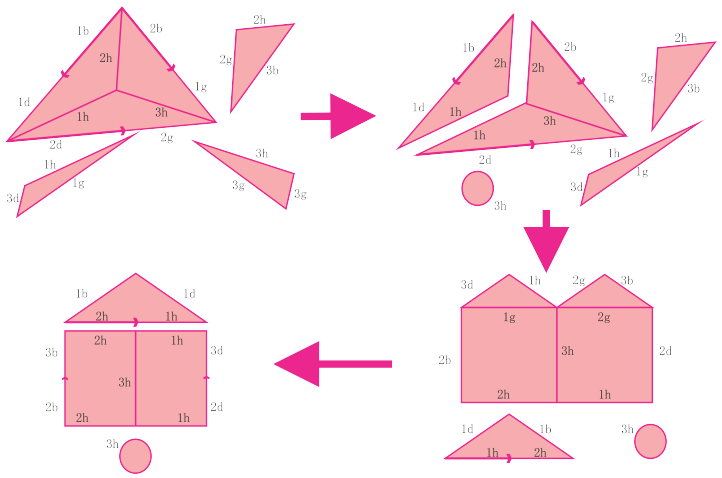


Figura 4.8: Representación geométrica para los elementos de la forma $\{a, b, v_2\}$.

Se da ahora la notación para los elementos de R_3.

Notación 4.5.

- $1e = \overline{\{v_3, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $2e = \overline{\{v_1, v_3\}\{v_3, v\}}$,
- $3e = \overline{\{v_3, v\}\{v_3\}}$,
- $1a = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_3\}}$,
- $2a = \overline{\{v_1, v\}\{v_1, v_2\}}$,

- $3a = \overline{\{v_1, v\}\{v_1\}}$,
- $1f = \overline{\{v_1, v\}\{v\}}$,
- $2f = \overline{\{v_3, v\}\{v\}}$,
- $3f = \overline{\{v_2, v\}\{v\}}$,
- $1b = \overline{\{v_2, v\}\{v_1, v_2\}}$,
- $2b = \overline{\{v_2, v\}\{v_2, v_3\}}$,
- $3b = \overline{\{v_2, v\}\{v_2\}}$.

Nuevamente procedemos con los elementos de R_3 como en el caso de los elementos de R_1. Vea la Figura 4.9.

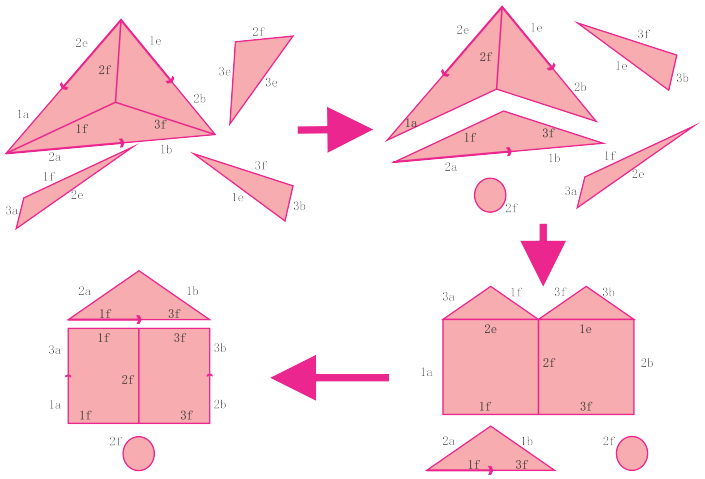


Figura 4.9: Representación geométrica para los elementos de la forma $\{a, b, v_3\}$.

Se van a considerar a continuación las últimas figuras obtenidas al final de cada uno de los casos anteriores y a identificar los lados de los vértices de estas figuras, como se muestra a continuación en la Figura 4.10.

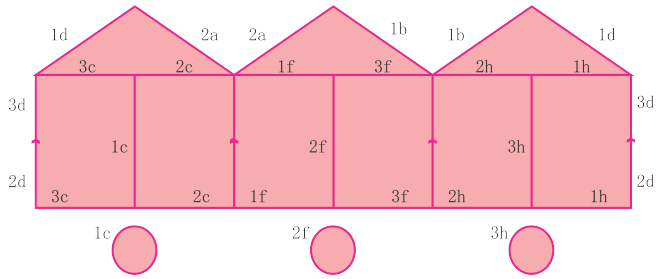


Figura 4.10: Uniendo las últimas figuras de los pasos anteriores.

A continuación, se hacen las identificaciones correspondientes a los lados de los triángulos de la Figura 4.10. Estas identificaciones se pueden observar en la Figura 4.11.

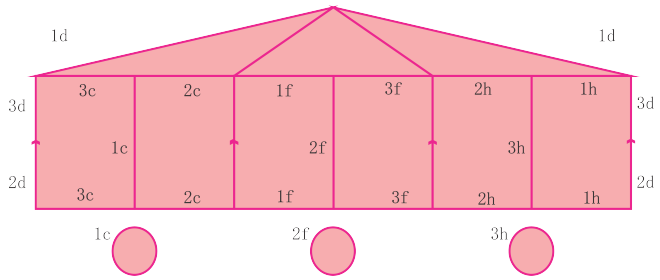


Figura 4.11: Identificando los lados de los triángulos.

Finalmente haciendo las identificaciones restantes, tenemos que Z es un toro junto con cuatro discos como se ve en la Figura 4.12

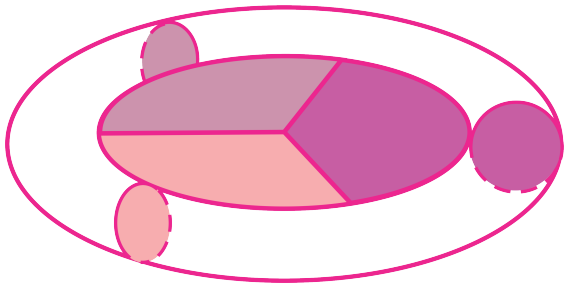
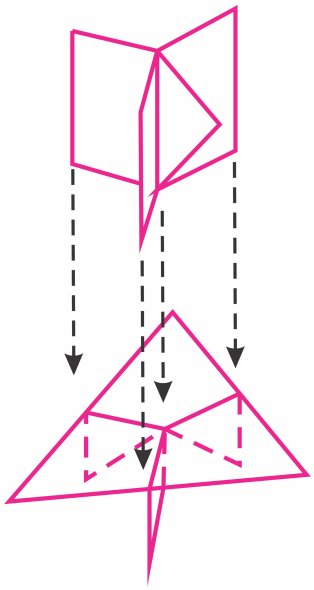


Figura 4.12: Modelo de $F_3(T)$

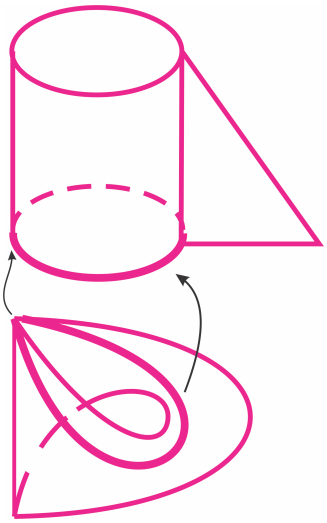
4.4. El segundo producto smétrico del 4-odo simple

Sea X un 4-odo simple con vértice v, como en la siguiente figura, donde L es uno de los lados. Sea T el triodo simple obtenido de quitar el lado L de X. Por la sección anterior, $F_2(T)$ es un triángulo convexo con tres alas. Note que $F_2(X) = F_2(T) \cup F_2(L) \cup \langle T, L\rangle$, donde $\langle T, L\rangle = \{\{p, q\} \in F_2(X) : p \in T \text{ y } q \in L\}$. Observe que $\langle T, L\rangle$ es homeomorfo a $T \times L$, donde $\langle T, L\rangle \cap F_2(T) = \{\{v, p\} \in F_2(X) : p \in T\}$ es un triodo simple localizado en un triángulo convexo y $\langle T, L\rangle \cap F_2(L) = \{\{v, q\} \in F_2(X) : q \in L\}$ corresponde al arco medio en $T \times L$. Entonces, para obtener un modelo para $F_2(X)$, se tienen que unir las tres piezas, se le puede llamar el triángulo con alas, $T \times L$ y un triángulo convexo. El modelo final se ilustra en la siguiente figura, donde el espacio $(T \times L) \cup F_2(J)$ está unido al triángulo con alas por el triodo simple en el triángulo.



4.5. El segundo producto simétrico de la paleta

Recuerde que la paleta P es la unión de una curva cerrada simple S un arco J unidos por un punto v que es un punto final de J. Como un ejemplo previo, $F_2(P) = F_2(S) \cup F_2(J) \cup \langle S, J \rangle$, donde $\langle S, J \rangle = \{\{p, q\} \in F_2(P) : p \in S \text{ y } q \in J\}$. Note que $\langle S, J \rangle$ es homeomorfo a $S \times J$, luego $\langle S, J \rangle \cap F_2(S) = \{\{v, q\} \in F_2(P) : q \in S\}$ es una curva cerrada simple en $F_2(P)$ como la que construimos en el ejemplo de la banda de Möbius, y $\langle S, J \rangle \cap F_2(J) = \{\{v, p\} \in F_2(P) : p \in J\}$ es un arco en el cilindro $S \times J$. Por lo tanto, el modelo para $F_2(P)$ se puede obtener como se ilustra en la siguiente figura. Donde las flechas indican como la curva cerrada simple en la banda se une a la base del cilindro. Note que, como se puede ver la curva en la banda, el resto de la banda se puede aplastar de tal forma que esta unión puede ser vista en $\mathbb{R}^3$.



4.6. El segundo producto simétrico del continuo ocho

Sea Y el continuo 8, esto es, Y es la unión de dos curvas cerradas simples S_1 y S_2 cuya intersección es el conjunto de un sólo punto $\{v\}$. Note que $F_2(Y) = F_2(S_1) \cup F_2(S_2) \cup \langle S_1, S_2\rangle$, donde $\langle S_1, S_2\rangle = \{\{p, q\} \in F_2(Y) : p \in S_1 \text{ y } q \in S_2$. Dado un punto $p \in S_1$, el conjunto de puntos $R_p = \{\{p, q\} : q \in S_2$ es una curva cerrada simple. Así $\bigcup\{R_p : p \in S_1\}$ es una unión a pares de curvas cerradas simples. Como p corre sobre la curva cerrada simple S_1, se puede ver que $\langle S_1, S_2\rangle$ es homeomorfo al producto $S^1 \times S^1$. Por lo tanto, $\langle S_1, S_2\rangle$ es un toro. Note que $R_v = \{\{v, q\} : q \in S_2\}$ es un ecuador del toro $\langle S_1, S_2\rangle$ y el conjunto $R = \{\{p, v\} : p \in S_1\}$ es un meridiano del toro. Como $F_2(S_1) \cap \langle S_1, S_2\rangle = R$, $F_2(S_2) \cap \langle S_1, S_2\rangle = R_v$ y $F_2(S_1) \cap F_2(S_2) = \{\{v\}\}$ así se tiene que $F_2(Y)$ es la unión de un toro con dos bandas de Möbius unidas por R y R_v. La representación del modelo para $F_2(Y)$ se muestra en la siguiente figura.

Note que cada uno de los conjuntos R y R_v se puede ver en la banda de Möbius, el modelo final para $F_2(Y)$ se puede construir en R^3 (para ver esto, se puede imaginar lo siguiente: para juntar $F_2(S_1)$ al toro por el conjunto R se puede considerar la curva R_v en un plano vertical P en frente de nosotros en el espacio R^3; entonces podemos poner el resto de $F_2(S_1)$ detrás de P de tal forma que $F_2(S_1)$ esté en una de las mitades en las que P divide a R^3 y que $F_2(S_1) \cap P = R$: Entonces se puede hacer un movimiento rígido para poner $F_2(S_1)$ en la parte superior del toro. La banda de Möbius $F_2(S_2)$ se debe juntar al toro dentro del tubo.)

Se ha mostrado que $F_2(Y)$ puede ser encajado en R^3:

4.7. Teorema de Caracterización

Unos resultados preliminares antes de mensionar el teorema que caracteriza a los continuos localmente conexos, para los cuales