Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a las funciones de Whitney

Tesis presentada

como requisito para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

por

María Castro Sánchez

con la dirección de

Fernando Macías Romero

Puebla, Pue., 9 de agosto de 2013.

Dedicado a
mi familia

Con todo mi cariño para:

Mis padres:
María Luisa Sánchez Castro y José Delfino Castro Loyo

Mi tío:
Sergio Sánchez Castro

Mis hermanos:
Alejandro Castro Sánchez
Luis Delfino Castro Sánchez

Mis sobrinos:
Varely, Jeremy, Joselyn

Mi cuñada:
Elvia

Solamente quiero andar sobre las nubes,
tomado de tu mano, sabiéndote a mi lado.
A.D.H.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, darme la oportunidad de llegar a este momento tan importante en mi vida, así mismo por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Les agradezco a mis padres por el gran amor y la confianza que siempre me han brindado y con lo cual he logrado culminar mi esfuerzo, terminando así mi carrera profesional, que es para mí la mejor de las herencias.

También agradezco a mi Tío y a mis hermanos por el apoyo incomparable que siempre he recibido de su parte, hago este triunfo compartido, sólo esperando que comprendan que mis ideales y esfuerzos son inspirados en cada uno de ustedes. Gracias por ayudarme cada día a cruzar con firmeza el camino de la superación, porque con su apoyo y aliento hoy he logrado uno de mis más grandes anhelos. Con amor y agradecimiento infinito.

Agradezco al resto de mis tíos y tías, por todo el apoyo que me han dado, a mis primos y primas en especial a (Maricruz, Reyna, Anais y Fatima) por darme tantos momentos memorables, divertidos y agradables, por compartir conmigo las diferentes etapas de mi vida y por ser grandes amigas.

Gracias a todos mis amigos, por su compañía, ayuda y palabras de aliento que siempre me brindaron. En especial, a Alex, Iván, Enrique, Ángel, Ricardo, Miguel, Fernanda, Alejandra, Cristina, Karina, Carmen, Martha Patricia, Valeria Montserrat y Trinidad que considero como parte de mi familia y quienes durante la carrera estuvimos juntos para apoyarnos en los momentos de trabajo y de diversión, en cada uno de ustedes hay una persona muy especial, de la cual he aprendido y disfrutado, gracias por su amistad sincera.

Además, a Noemi, Pilar, Germán, Francisco y Luis, quienes también me brindaron su ayuda durante las sesiones de seminario y una linda amistad.

Agradezco a todos los profesores de la facultad que han contribuido a mi formación como matemática. En especial, le agradezco a mi tutor Celestino Soriano Soriano quien además con su apoyo incondicional en el transcurso de mi carrera universitaria ha sido una valiosa guía, además al Dr. David Herrera Carrasco y al Dr. Fernando Macías Romero, quien es mi asesor de tesis; a ellos dos gracias por el apoyo, consejos, enseñanzas y atenciones que me han brindado, por compartir momentos de alegría, tristeza y demostrarme que siempre podré contar con ellos, gracias por su amistad.

Les agradezco a mis sinodales: David Herrera Carrasco, Raúl Escobedo Conde y Manuel Ibarra Contreras, por haber aceptado dedicar una parte de su tiempo a revisar este trabajo y ayudarme a mejorar esta tesis. De todo corazón, muchas gracias.

Mary

Índice general

Introducción

La Teoría de los Continuos es una rama del área de Topología, que trata del estudio de las propiedades topológicas de los espacios no vacíos, métricos, compactos y conexos. De hecho a un espacio topológico con estas propiedades se le llama *continuo*. La topología, en ocasiones, se torna demasiado abstracta y es complicado tener una idea geométrica de lo que estamos haciendo; por otro lado, en la Teoría de los Continuos tenemos siempre la ayuda de la métrica, que nos invita a imaginar por lo menos la distancia que hay entre los puntos del espacio. Los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de un continuo X con alguna característica particular. En esta tesis, cuando X es un continuo, analizamos propiedades relacionadas con los hiperespacios $2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$ y $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$, topologizados con la métrica de Hausdorff.

El tema en el que nos enfocamos, en esta tesis, trata de las funciones de Whitney, presentamos una demostración de la existencia de las funciones de Whitney, y algunas propiedades de los niveles de Whitney.

Las funciones de Whitney constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios; uno de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios garantiza la existencia de funciones de Whitney, para el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo; este resultado se debe a Whitney, quien en 1933 fue el primero en construir este tipo especial de funciones en ciertos espacios de conjuntos.

Sin embargo, el primero en utilizar estas funciones, ahora llamadas funciones de Whitney, para el estudio de los hiperespacios fue Kelley en 1942, vea [8, Pág. 105].

En el Capítulo 1 enunciamos algunos conceptos y revisamos los resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

En el Capítulo 2 definimos la función de Whitney, y además garantizamos la existencia; enunciamos algunos resultados de manera que podemos ver nuevas funciones de Whitney a partir de funciones de Whitney dadas y como parte final de esta sección veremos los niveles de Whitney.

La contribución de este trabajo consiste en que hemos introducido el estudio de las funciones de Whitney ofreciendo resultados conocidos que se encuentran, en la mayoría de los casos, en referencias muy especializadas sobre este tema, damos pruebas detalladas de la mayoría de las afirmaciones con la intención de que esto sirva como base para posteriores estudios que nos abrirán camino para el acercamiento de otras propiedades, que no se estudian en este trabajo, como las propiedades Whitney-reversibles, fuertemente Whitney-reversible y secuencialmente fuerte Whitney-reversible, entre otras; particularmente, se puede estudiar el trabajo realizado por Alejandro Illanes y Rocío Leonel denominado "Whitney Equivalent Continua" publicado en Topology Proceedings 2012, vea [9].

A continuación se habla brevemente de la vida y obra de Hassler Whitney:

Whitney asistió a la Universidad de Yale, donde recibió su primer grado en 1928. En la Universidad de Harvard, fue galardonado con el doctorado en 1932, otorgado por una tesis sobre la teoría de grafos bajo la supervisión de George David Birkhoff, haciendo una importante contribución al teorema de los cuatro colores. Whitney se casó con Margaret Howell R., el 30 de mayo de 1930, tuvieron tres hijos, James, Carol, y Marian; él continuó trabajando en Harvard, siendo nombrado instructor en matemáticas desde 1930 hasta 1935, aunque entre los años de $1931 - 1933$ los pasó como Investigador en el Consejo Nacional de Investigación en Harvard y Princeton. A partir de 1935 fue ascendido a profesor asistente y luego a partir de 1940 profesor asociado. De 1943 a 1945 fue miembro del Grupo de Matemática Aplicada de la Comisión de Investigación de la Defensa Nacional. Harvard hizo a Whitney profesor de tiempo completo en 1946 y ocupó esta cátedra hasta que aceptó una oferta del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton de una plaza de profesor en 1952. Whitney publicó el libro integración geométrica en 1957 que describe su trabajo sobre las interacciones entre la topología algebraica y la teoría de la integración. Este tema fue objeto de la conferencia que dio Whitney para el Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Cambridge, Massachusetts en 1950. Su segundo libro de variedades analíticas complejas se publicó en 1972; más información de la vida de Whitney se puede revisar en: *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Whitney.html*.

María Castro Sánchez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
2013

Capítulo 1

Hiperespacios de continuos

En este capítulo enunciamos algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. La intención de este trabajo es que cualquiera que posea cierta madurez matemática, sea capaz de entenderlo. Es importante resaltar que los criterios para decidir probar un resultado se deben a que algunos teoremas resultan no ser tan obvios y fue necesario hacer notar dicho procedimiento, además, cada uno de los resultados presentados nos fue abriendo camino para llegar a nuestro objetivo de este trabajo que es dar las demostraciones a detalle de dos propiedades de Whitney. En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\overline{A}$, $Fr(A)$ e $Int(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\overline{A}_Y$, $Fr_Y(A)$ e $Int_Y(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales y el plano euclidiano, respectivamente. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto.

Sean X un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto V de X es una **vecindad** de p si existe un abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.

1.1. Continuos

A continuación mencionamos las definiciones transcendentales de nuestro trabajo de investigación.

Las raíces del concepto de continuo están en la noción de continuidad. En la segunda mitad del siglo XIX los matemáticos iniciaron un lento (y difícil) avance para establecer los conceptos básicos del *Analysis Situs,* como se llamaba en ese tiempo la topología. Muchos de los objetos estudiados en el periodo inicial de la topología eran considerados como subconjuntos de la línea real, el plano o más generalmente del n-espacio Euclidiano para un entero positivo arbitrario n. La primera clase de espacios abstractos a la cual fueron generalizados varios conceptos y resultados fue la clase de los espacios métricos, definidos en 1906 por M. Fréchet, aunque el término espacio métrico fue introducido hasta 1914 por F. Hausdorff. Uno de los conceptos básicos de la topología es la conexidad; la definición actual de este concepto fue introducida en 1893 por C. Jordan. Otro concepto topológico relacionado con la noción de continuo es el de compacidad; su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel, el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado tiene una subcubierta finita. La definición actual esencialmente se debe a P. S. Aleksandrov y a P. S. Urysohn, vea [2, pág. 225].

Definición 1.1. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Ejemplo 1.2. (1) El intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo.

(2) Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$.

(3) La circunferencia unitaria $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ es un continuo.

(4) Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a S^1.

1.2. Hiperespacios

La teoría de los hiperespacios tiene sus inicios en los primeros años del siglo XX con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris.

Definición 1.3. Dado un continuo X, sean

$$2^X = \{A \colon A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\} \quad \text{y}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.4. Sean X un continuo con métrica d , $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, la ε-**nube** alrededor de A (o la nube con centro en A y radio ε) es el conjunto $N(\varepsilon, A) = \{x \in X \colon \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}$.

Definición 1.5. Sean X un continuo con métrica d. Si $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la **bola abierta** en X con centro en a y radio ε es el conjunto

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in X \colon d(a,x) < \varepsilon\}.$$

El siguiente resultado relaciona el conjunto con su nube, y la nube con las bolas.

Teorema 1.6. Si X es un continuo, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$A \subset N(\varepsilon, A) \text{ y } N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon).$$

Demostración. Supongamos $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Para cada $a \in A$, $d(a, a) = 0 < \varepsilon$. Así $A \subset N(\varepsilon, A)$.

Por otro lado, sea $p \in \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$, consecuentemente existe $a_1 \in A$ tal que $p \in B(a_1, \varepsilon)$, es decir, $d(a_1, p) < \varepsilon$, luego $p \in N(\varepsilon, A)$. Así, $\bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon) \subset N(\varepsilon, A)$.

Sólo falta mostrar que $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$. Para esto, sea $p \in N(\varepsilon, A)$, consecuentemente existe $a_0 \in A$ tal que $d(a_0, p) < \varepsilon$ luego $p \in B(a_0, \varepsilon)$, por lo que $p \in \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$. Así $N(\varepsilon, A) \subset \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$.

Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B(a, \varepsilon)$. □

Por consiguiente, cada conjunto de la forma $N(\varepsilon, A)$ es abierto en X. Más aún, si $a \in X$, entonces $N(\varepsilon, \{a\}) = B(a, \varepsilon)$.

El siguiente resultado contiene propiedades relacionadas con el concepto de nube.

Teorema 1.7. Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

(1) si $0 < \delta < \varepsilon$ y $A \subset B$, entonces $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$.

(2) $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$.

(3) $N(\varepsilon, A) = \displaystyle\bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$.

Demostración. (1) Sea $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Como $\delta < \varepsilon$, tenemos que $d(a, x) < \varepsilon$. Puesto que, $A \subset B$, consecuentemente $a \in B$, de donde $x \in N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, B)$.

(2) Por el inciso (1) de este teorema, $N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y $N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Así,

$$N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B). \tag{1.2.1}$$

Ahora, sea $z \in N(\varepsilon, A \cup B)$. Existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. Tenemos dos casos $b \in A$ o $b \in B$.

(i) Si $b \in A$, entonces $z \in N(\varepsilon, A)$.

(ii) Si $b \in B$, entonces $z \in N(\varepsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto,

$$N(\varepsilon, A \cup B) \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B). \tag{1.2.2}$$

De (1.2.1) y (1.2.2), tenemos que $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$.

(3) Sea $x \in N(\varepsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Sea δ tal que $d(x, a) < \delta < \varepsilon$. De aquí, $0 < \delta < \varepsilon$ y $x \in N(\delta, A)$. Por lo tanto

$$N(\varepsilon, A) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A) \tag{1.2.3}$$

Por el inciso (1) de este teorema,

$$\bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A) \tag{1.2.4}$$

De (1.2.3) y (1.2.4), tenemos que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. $\square$

Recordemos que

$$d(A, B) = \text{ínf}\, \{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$$

denota la distancia entre los subconjuntos A y B del continuo X con métrica d.

Una propiedad adicional relacionada con el concepto de nube, de suma importancia, es la que sigue.

Teorema 1.8. Si X es un continuo, $A \in 2^X$ y U un abierto en X tales que $A \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset N(\varepsilon, A) \subset U$.

Demostración. Como A es cerrado en X, $X - U$ es compacto y $A \subset U$, tenemos que $d(A, X-U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A,X-U)}{2}$ y supongamos que $p \in N(\varepsilon, A)$. De aquí, para algún $a \in A$, $p \in B(a, \varepsilon)$. Si $p \in X-U$, notemos que $d(A, X-U) \leq d(p,a) < \varepsilon = \frac{d(A,X-U)}{2}$, esto es una contradicción. Por tanto $p \in U$. Luego $N(\varepsilon, A) \subset U$. Finalmente, por el Teorema 1.6, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A)$. $\square$

Definición 1.9. Sea X un continuo, para cada $A, B \in 2^X$, sea

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon A \subset N(\varepsilon, B) \ \text{ y } \ B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

De acuerdo a [12, Teorema (0.2), pág. 2], tenemos lo siguiente.

Teorema 1.10. Si X es un continuo, entonces $(2^X, H)$ es un espacio métrico.

Si X es un continuo, la **métrica de Hausdorff** es H. Así 2^X con la métrica de Hausdorff se llama el **hiperespacio de los subconjuntos no vacíos y cerrados** en X y el subespacio de $(2^X, H)$, $C(X)$ es el **hiperespacio de los subcontinuos** de X.

Definición 1.11. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subconjuntos de X, no vacíos. El **vietórico** de U_1, $U_2, \ldots, U_n$, denotado por $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, es el conjunto

$$\left\{A \in 2^X\colon A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ } y \text{ } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ } para \text{ } cada \text{ } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}.$$

El siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X de un continuo X dado, la demostración se puede consultar en [5, Teorema (2.20), pág. 26].

Teorema 1.12. Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_1, U_2, \ldots, U_n$ son abiertos en X y $n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X.

La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la *Topología de Vietoris*.

Todos los hiperespacios de un continuo los podemos considerar ya sea con la topología inducida por la métrica de Hausdorff o con la topología de Vietoris, de manera indistinta, vea [5, Teorema (2.22), pág. 27].

Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ siempre los consideramos con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [12, Teorema (1.13), pág. 65].

Teorema 1.13. Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ también son continuos.

Teorema 1.14. Si X es un continuo con métrica d, entonces se cumple lo siguiente:

(1) Si $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

(2) Para cada $m \in \mathbb{N}$, sean $A_m, B_m \in 2^X$ tales que $A_m \subset B_m$. Si las sucesiones $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergen a A y B en 2^X, respectivamente, entonces $A \subset B$.

Demostración. (1) Sean $E = \{\delta > 0\colon A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)\}$. Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego existe $\delta \in E$ tal que $\delta < \varepsilon$. De donde $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por el Teorema 1.7 inciso (1), $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$, concluimos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Recíprocamente:

(i) Supongamos $B \subset N(\varepsilon, A)$. Por el Teorema 1.7 inciso (3), tenemos que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. De donde, $B \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$. Luego, dado que B es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y números positivos $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, A)$. Pongamos $r_1 = \text{máx}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Tenemos que $0 < r_1 < \varepsilon$ y $B \subset N(r_1, A)$.

(ii) Análogamente al caso (i). Suponiendo que $A \subset N(\varepsilon, B)$, existe r_2 tal que $0 < r_2 < \varepsilon$ y $A \subset N(r_2, B)$.

Finalmente, sea $r = \text{máx}\{r_1, r_2\}$, tenemos que $0 < r < \varepsilon$, $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Así $r \in E$, luego $\text{ínf}\, E \leq r$. Por lo tanto, $H(A, B) < \varepsilon$.

Por lo tanto, si $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

(2) Supongamos que $A \not\subset B$. Fijemos $a \in A - B$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d(\{a\}, B)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B, B_k) < \frac{\varepsilon}{2}$, se sigue de la parte (1) que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_k)$ y $B_k \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$. Luego existe $x \in A_k$ tal que $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $A_k \subset B_k$, tenemos que $x \in B_k$; luego existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Notemos que, $\varepsilon < dist(a, B) \leq d(a, b) < \varepsilon$, esto es una contradicción.

Por lo tanto, $A \subset B$. $\square$

El Teorema 1.15, conocido como el criterio M. de Weierstrass, muestra una manera de construir funciones continuas a partir de sucesiones de funciones continuas. Esto ayudará para dar una expresión explícita de algunas funciones de Whitney como en el Teorema 2.9. Una demostración de este criterio de Weierstrass se puede deducir del resultado que se encuentra en [7, Teorema (10.5), pág. 85].

Teorema 1.15. Sea X un espacio topológico. Si $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in X$, $\mid \mu_n(x) \mid \leq M$, entonces la función μ, definida por $\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(x)}{2^n}$, es una función continua.

El resultado que sigue, conocido como el Teorema del pegado (o empalme) de funciones, también muestra una manera de construir funciones continuas a partir de funciones continuas dadas. Esto nos servirá para probar la continuidad de la función definida como el máximo de dos funciones de Whitney. Una prueba de este Teorema se puede consultar en [4, Teorema (1.F.6), pág. 32].

Teorema 1.16. Sean X y Y espacios topológicos y A y B subconjuntos cerrados en X, tales que $X = A \cup B$. Sean $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h\colon X \to Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

En la teoría de los hiperespacios es de mucha ayuda tener ideas geométricas de cómo son. A continuación, presentamos los hiperespacios para el continuo más simple que es el intervalo cerrado $[0, 1]$ y S^1.

Ejemplo 1.17. (1) El hiperespacio de los subcontinuos del intervalo cerrado $C([0,1]) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, vea [10, Teorema (3.2)].

(2) El hiperespacio de los subcontinuos de la circunferencia $C(S^1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, vea [10, Teorema (3.4)].

1.3. Funciones continuas entre continuos

Varias de las propiedades de las funciones continuas entre continuos son muy importantes. Ellas han representado un tema muy interesante de estudio e investigación para los especialistas en teoría de continuos.

Las funciones continuas y homeomorfismos entre espacios abstractos fueron considerados por primera vez por M. Fréchet en 1910. Desde un punto de vista estrecho, la noción de homeomorfismo, fue presentada primero por H. Poincaré $(1854-1912)$. La primera exposición sistemática y exhaustiva sobre estas clases de funciones fue dada, en 1914, por F. Hausdorff. Una de las clases más importantes de funciones, que de manera natural está colocada entre la clase de todas las funciones y la clase de los homeomorfismos, es la de las *funciones abiertas*. En 1913, H. Weil introdujo la noción de función abierta para funciones del plano en si mismo. En 1931, N. Aronszajn definió las funciones abiertas entre espacios topológicos y en 1937, G. T. Whyburn estudió las funciones abiertas entre espacios compactos, vea [2, pág. 225].

Definición 1.18. Sean X y Y continuos, una función $f \colon X \to Y$ es **abierta** si para cualquier conjunto abierto U en X, la imagen

$f(U)$ es un conjunto abierto en Y.

De manera similar, también existe el concepto que sigue.

Definición 1.19. Sean X y Y continuos, una función $f\colon X \to Y$ es **cerrada** si para cualquier conjunto cerrado E en X, la imagen $f(E)$ es un conjunto cerrado en Y.

Las funciones continuas entre continuos siempre son cerradas, como mostramos a continuación.

Teorema 1.20. Si X, Y son continuos y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

Demostración. Supongamos que X y Y son continuos y $f\colon X \to Y$ es una función continua. Tomemos A cerrado en X, luego A es compacto, consecuentemente $f(A)$ es compacto.

Mostremos que $Y - f(A)$ es abierto en Y.

Sea x_0 un punto de $Y - f(A)$. Para cada punto a de $f(A)$, como Y es de Hausdorff, existen abiertos y ajenos U_a y V_a que contienen a los puntos x_0 y a, respectivamente. La colección $\{V_a\colon a \in f(A)\}$ es una cubierta de $f(A)$ de conjuntos abiertos en Y; por lo tanto, existe un número finito $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$ que cubren a $f(A)$. El conjunto abierto $V = V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_n}$ contiene a $f(A)$, y es ajeno del conjunto abierto $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$ formado por las intersecciones de los correspondientes abiertos de Y que contienen a x_0. Sea $z \in V$, para alguna i, tenemos que $z \in V_{a_i}$. Por lo tanto $z \notin U_{a_i}$, así $z \notin U$. De manera análoga, se puede ver que si $z \in U$, entonces $z \notin V$. Luego, U es un abierto de Y que contienen a x_0 ajeno de $f(A)$. Así, $Y - f(A)$ es abierto en Y. Por lo tanto, $f(A)$ es cerrado en Y. □

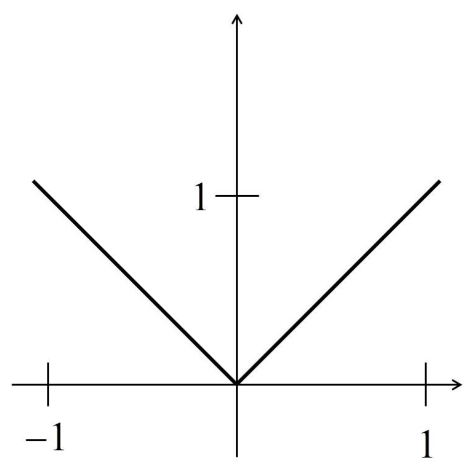
Las *funciones monótonas* fueron estudiadas por primera vez, en 1925, por R. L. Moore en términos de *descomposiciones semi-*

continuas superiores; las funciones monótonas fueron introducidas, en 1934, por G. T. Whyburn, quien demostró que las propiedades de ser un arco o una curva cerrada simple son invariantes bajo funciones monótonas, vea [2, pág. 225].

Definición 1.21. Sean X y Y continuos, una función $f\colon X \to Y$ es **monótona**, si para cada $y \in Y$, tenemos que $f^{-1}(y)$ es conexo.

Veamos que existe una función abierta que no es monótona, como sigue.

Ejemplo 1.22. Si $f\colon [-1,1] \to [0,1]$ es la función definida, para toda $t \in [-1,1]$, por $f(t) = |t|$, entonces



f es abierta y no es monótona.

Demostración. Veamos que f es una función abierta. Para esto, basta considerar los siguientes casos:

(1) Para un subconjunto abierto (a,b) del arco $[-1,1]$, tenemos que

$$f((a,b)) = \begin{cases} (a,b), & \text{si } \ 0 < a, \\ (-b,-a), & \text{si } \ b < 0, \\ [0, \max\{-a,b\}), & \text{si } \ a < 0 < b, \end{cases}$$

así, $f((a,b))$ es un subconjunto abierto de $[0,1]$.

(2) Sea $[-1,b)$ un subconjunto abierto de $[-1,1]$, luego

$$f([-1,b)) = \begin{cases} (-b,1], & \text{si } b \leq 0, \\ [0,1], & \text{si } b > 0. \end{cases}$$

que son conjuntos abiertos en $[0,1]$.

(3) Sea $(a,1]$ un subconjunto abierto de $[-1,1]$, luego

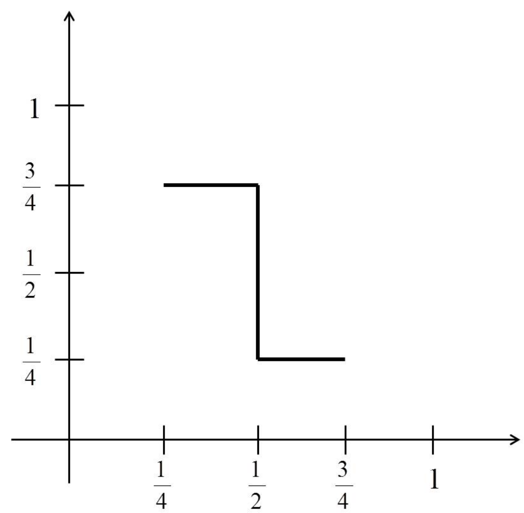
$$f((a,1]) = \begin{cases} (a,1], & \text{si } a \geq 0, \\ [0,1], & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

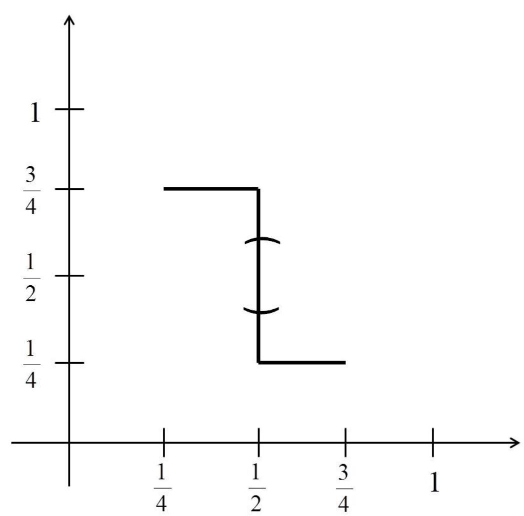
que son conjuntos abiertos en $[0,1]$.

La función f no es una función monótona por que $f^{-1}(1) = \{x \in [-1,1] : f(x) = 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$, es disconexo. $\square$

Veamos que existe una función monótona y que no es abierta, como sigue.

Ejemplo 1.23. Si $X = \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \times \left\{\frac{3}{4}\right\}\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \left\{\frac{1}{4}\right\}\right)$ y $Y = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, entonces la función $f\colon X \to Y$ definida, para cada punto $(x,y) \in X$ por $f((x,y)) = x$, es monótona y no es abierta.





Demostración. Veamos que f es una función monótona. Consideremos los dos casos posibles.

(1) Si $y \in Y \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, entonces

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \left(y, \frac{3}{4}\right), & \text{si } \frac{1}{4} \leq y < \frac{1}{2}, \\ \left(y, \frac{1}{4}\right), & \text{si } \frac{1}{2} < y \leq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Así, $f^{-1}(y)$ es conexo.

(2) Si $y = \frac{1}{2}$, entonces

$$f^{-1}(y) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

Así, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Por lo tanto, f es monótona.

El conjunto $A = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ es abierto en X. Como $f(A) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ no es abierto en Y, tenemos que f no es abierta. $\square$

El siguiente teorema, conocido como el Teorema del Cable Cortado es muy utilizado en la teoría de los continuos. Una demostración de este resultado se puede consultar en [11, Teorema (5.2), pág. 72].

Teorema 1.24. Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio métrico compacto X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta tanto a A como a B, entonces existen dos subconjuntos cerrados y ajenos X_1 y X_2 de X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.

El resultado que sigue lo usaremos para probar el Teorema 1.27. Una demostración de este resultado se puede consultar en [1, Proposición (2.8), pág. 47].

Teorema 1.25. Sean X, Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función abierta. Si $Z \subset Y$, entonces $f|_{f^{-1}(Z)}\colon f^{-1}(Z) \to Z$ es abierta.

Las funciones confluentes son una generalización de las funciones monótonas y abiertas, esta noción la introdujo Janusz J. Charatonik en 1964, vea [2, pág. 225].

Definición 1.26. Sean X y Y continuos, una función $f\colon X \to Y$ es **confluente**, si para cada subcontinuo B de Y y cada componente conexa C de $f^{-1}(B)$, tenemos que $f(C) = B$.

De aquí en adelante a las componentes conexas se les llamará simplemente componentes.

Teorema 1.27. Sean X y Y continuos, $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es una función abierta, entonces f es confluente.

Demostración. Supongamos que f no es confluente, así, existen un subcontinuo B de Y y una componente C de $f^{-1}(B)$ tales que $f(C) \neq B$. Ya que $f(C) \subset B$, existen $b \in B$ tal que $C \cap f^{-1}(b) = \emptyset$. Dado que C es componente de $f^{-1}(B)$, tenemos que C es cerrado en $f^{-1}(B)$. Como f es continua, $f^{-1}(b)$ es cerrado en $f^{-1}(B)$.

Veamos que ningún subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$ intersecta tanto a C como a $f^{-1}(b)$. Para esto suponemos lo contrario, es decir, existe un conexo R en $f^{-1}(B)$ tal que $R \cap f^{-1}(b) \neq \emptyset$ y $R \cap C \neq \emptyset$.

Dado que C es una componente de $f^{-1}(B)$, tenemos que $R \subset C$, lo cual implica que $C \cap f^{-1}(b) \neq \emptyset$, esto es una contradicción.

Por el Teorema 1.24, tenemos que $f^{-1}(B) = G \cup H$ donde G y H son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en $f^{-1}(B)$, con $C \subset G$ y $f^{-1}(b) \subset H$.

Veamos que $f(G)$ es abierto, cerrado y distinto del vacío. Puesto que $G = (X - H) \bigcap f^{-1}(B)$, se sigue que G es abierto en $f^{-1}(B)$. Como f es una función abierta, por el Teorema 1.25, tenemos que $f\,|_{f^{-1}(B)}\,(G) = f(G)$ es abierto en B. Dado que G es compacto y f es una función continua, $f(G)$ es cerrado en B y $F(G) \neq \emptyset$, ya que $G \neq \emptyset$. Por la conexidad de B, se cumple que $B = f(G)$. Luego, $b \in f(G)$, es decir, $f^{-1}(b) \cap G \neq \emptyset$, esto contradice que H y G son ajenos. Por lo tanto, f es una función confluente. $\square$

Veamos que existe una función continua, suprayectiva y confluente que no es abierta.

Ejemplo 1.28. Sean $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x < 2, y = sen(\frac{1}{x-1})\}$, $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 1, -1 \leq y \leq 1\}$ y $X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq x \leq 1, y = 1\}$. Definamos $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $Y = X_1 \cup X_2$ y consideremos la función $f \colon X \to Y$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & \text{si } (x,y) \in X_1 \cup X_2, \\ (y,x), & \text{si } (x,y) \in X_3. \end{cases}$$

Entonces f es confluente y no es abierta.

Demostración. Notemos que f es continua y suprayectiva. Veamos que f es confluente. Sea $B \in C(Y)$. Tenemos los siguientes casos:

(1) $B \in C(X_1)$. En este caso, $f^{-1}(B) = B$. Así que $f^{-1}(B)$ sólo tiene una componente, B, y es tal que $f(B) = B$.

(2) $B \in C(X_2)$. En este caso, $f^{-1}(B)$ tiene dos componentes, digamos A_1 y A_2. Además, una de estas dos componentes, supongamos que A_1, es igual a B. Luego, por la definición de f, tenemos que $f(A_1) = B = f(A_2)$.

(3) Existe $b \in (1,2]$ tal que $B = X_2 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x \leq b, y = sen\frac{1}{(x-1)}\}$. En este caso, notemos que $f^{-1}(B) = B \cup X_3$. Así que, $f^{-1}(B)$ tiene sólo una componente, $B \cup X_3$, y es tal que $f(B \cup X_3) = B$.

Por lo tanto, f es confluente.

Ahora veamos que f no es abierta. Para esto, tomemos el conjunto abierto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1, y = 1\}$ en X. Notemos que $f(U) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 1, -1 < y < 1\}$. Fijemos

$z \in f(U)$. Observemos que, para cada $\varepsilon > 0$, $B(z,\varepsilon) \not\subset f(U)$. Consecuentemente, $f(U)$ no es un conjunto abierto en Y. Por lo tanto, f no es abierta. $\square$

El siguiente resultado es una caracterización de una función monótona; con el cual se demuestra en el Teorema 1.30, que las funciones monótonas son confluentes. Una demostración del Teorema 1.29 se puede consultar en [1, Teorema (2.4), pág. 45].

Teorema 1.29. Sean X y Y continuos, $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva es monótona si y sólo si para cada $B \in C(Y)$, tenemos que $f^{-1}(B) \in C(X)$.

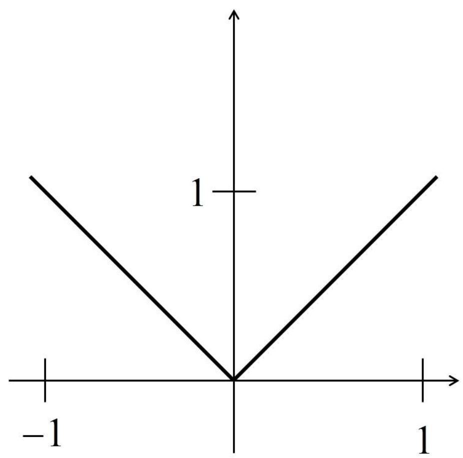
Teorema 1.30. Sean X y Y continuos, $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es monótona, entonces f es confluente.

Demostración. Sean $B \in C(Y)$ y C una componente de $f^{-1}(B)$. Veamos que $f(C) = B$. Como f es monótona, por el Teorema 1.29, tenemos que $f^{-1}(B) \in C(X)$. Luego, $C = f^{-1}(B)$. Como f es suprayectiva, $f(C) = f(f^{-1}(B)) = B$. Por lo tanto, f es confluente. $\square$

Veamos que existe una función continua, suprayectiva y confluente que no es monótona.

Ejemplo 1.31. Si $f\colon [-1,1] \to [0,1]$ es una función definida, para toda $t \in [-1,1]$, por

$$f(t) = |t|,$$



entonces f es una función confluente y no es monótona.

Demostración. Veamos que f es confluente.

Los subcontinuos de $[0,1]$ se pueden caracterizar de dos formas: los subespacios homeomorfos a $[0,1]$ y los subespacios singulares.

(1) Para el intervalo cerrado $[a,b]$ de $[0,1]$, tenemos que

$$f^{-1}([a,b]) = \begin{cases} [-b,-a] \cup [a,b]\,, & \text{si} \quad a>0, \\ [-b,b]\,, & \text{si} \quad a=0. \end{cases}$$

Cada componente de $f^{-1}([a,b])$, evidentemente, tiene imagen, bajo f, igual al intervalo $[a,b]$.

(2) Para cualquier punto c en $[0,1]$, tenemos que

$$f^{-1}(c) = \begin{cases} \{-c\} \cup \{c\}\,, & \text{si} \quad c \neq 0, \\ \{c\}\,, & \text{si} \quad c=0. \end{cases}$$

Cada componente de $f^{-1}(c)$ consiste de un punto cuya imagen, bajo f, es igual al conjunto de partida $\{c\}$.

De lo visto en los casos (1) y (2) se sigue que f es confluente.

Ahora veamos que f no es monótona.

Como $f^{-1}(1) = \{-1\} \cup \{1\}$, tenemos que $f^{-1}(1)$ es disconexo. Por lo tanto f no es una función monótona. $\square$

Teorema 1.32. Sean X, Y y Z continuos. Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son funciones confluentes, entonces la función $g \circ f\colon X \to Z$ es confluente.

Demostración. Sean B un subcontinuo de Z y C una componente de $(g \circ f)^{-1}(B)$. Veamos que $(g \circ f)(C) = B$.

Sean D la componente de $g^{-1}(B)$ tal que $f(C) \subset D$ y E la componente de $f^{-1}(D)$ tal que $C \subset E$. De donde, tenemos que $C \subset E \subset f^{-1}(D) \subset f^{-1}(g^{-1}(B))$. Luego, $C \subset E \subset (g \circ f)^{-1}(B)$, entonces $C = E$, por que C es una componente de $(g \circ f)^{-1}(B)$. Como, f es confluente, $f(C) = f(E) = D$. Además, g es confluente, así $g(f(C)) = g(f(E)) = g(D) = B$, es decir, $(g \circ f)(C) = B$. Por lo tanto, $g \circ f\colon X \to Z$ es confluente. $\square$

Definición 1.33. Sea X un espacio métrico, X es **totalmente disconexo**, si cada componente de X consiste de un sólo punto.

Definición 1.34. Una función continua $f\colon X \to Y$ **es ligera** si para cada $x \in X$, tenemos que $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo.

Teorema 1.35. Sean X, Y y Z continuos. Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son funciones ligeras, entonces la función $g \circ f\colon X \to Z$ es ligera.

Demostración. Sean $A \in C(X)$ y $z \in Z$ tales que $A \subset (g \circ f)^{-1}(z)$. Como $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$, tenemos que $f(A) \subset g^{-1}(z)$. Sabemos que g es una función ligera y $f(A) \in C(Y)$, tenemos que $f(A)$ es degenerado, es decir, existe $y \in Y$ tal que $f(A) = \{y\}$. Dado que f es una función ligera, $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ es totalmente disconexo. Y además, $A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(y)$, consecuentemente A es degenerado. Es decir, para cada $x \in X$, cada componente de $(g \circ f)^{-1}(g \circ f(x))$ consiste de un sólo punto. Por lo tanto, la función $g \circ f \colon X \to Z$ es ligera. $\square$

En los Teoremas 2.20, 2.21 y 2.22 estudiaremos funciones ligeras.

1.4. Arcos ordenados

Definición 1.36. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha \colon [0,1] \to 2^X$ es un **arco ordenado** de A a B en 2^X si cumple lo siguiente:

(1) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

(2) si $t, s \in [0,1]$ tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.

Definición 1.37. Sean X, Y continuos, una función $f \colon X \to Y$ es un homeomorfismo si f es una función biyectiva, continua y f^{-1} es una función continua.

A continuación presentamos unos resultados importantes, para el estudio de ciertas propiedades en los hiperespacios.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [6, Teorema (1.54), pág. 40].

Teorema 1.38. Sean X un continuo con métrica d y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) existe un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1.

(2) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Teorema 1.39. Sea X un continuo. Si α es un arco ordenado en 2^X comenzando con $A_0 \in C(X)$, entonces el arco ordenado está contenido en $C(X)$, es decir, $\alpha([0,1]) \subset C(X)$.

Demostración. Sean $t \in (0,1]$ y $B = \alpha(t)$. Sea β el subarco de α con puntos finales A_0 y B. Por la Definición 1.36, β es un arco ordenado de A_0 a B. Así, por el Teorema 1.38, tenemos que

(1) $A_0 \subset B$ y

(2) cada componente de B intersecta a A_0.

De (1), tenemos que

(3) $B = \cup\{A_0 \cup K \colon K \text{ es una componente de } B\}$.

Por (2) y además como A_0 es conexo, tenemos que

(4) para cada componente K de B, tenemos que $A_0 \cup K$ es conexo.

Por (3) y (4), concluimos que $B \in C(X)$. Por lo tanto, $\alpha([0,1]) \subset C(X)$. □

Tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 1.40. Si X es un continuo, $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B contenido en $C(X)$.

Demostración. Si X es un continuo, $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A, por el Teorema 1.38 existe un arco ordenado en 2^X de A a B. Así, por el Teorema 1.39, el arco ordenado de A a B está contenido en $C(X)$. □

Capítulo 2

Dos Propiedades de Whitney

2.1. Funciones de Whitney

Definición 2.1. Sea X un continuo. Una **función de Whitney para el hiperespacio** 2^X es una función continua $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ tal que

(1) para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$ y

(2) para cada A, $B \in 2^X$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Una **función de Whitney para el hiperespacio** $C(X)$ es una función continua de $C(X)$ en $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones (1) y

(3) para cada A, $B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

La restricción a $C(X)$ de una función de Whitney para 2^X es una función de Whitney para $C(X)$, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Si X es un continuo y $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney para 2^X, entonces $\mu\,|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$.

Demostración. (i) Por demostrar que $\mu\,|_{C(X)}\colon C(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Sea U un subconjunto abierto en $\mathbb{R}$, es decir, por demostrar $(\mu\,|_{C(X)})^{-1}(U)$ es un abierto en $C(X)$, es decir, $(\mu\,|_{C(X)})^{-1}(U) = V \bigcap C(X)$ para algún abierto V en 2^X. Como μ es una función continua, tenemos que $\mu^{-1}(U)$ es un abierto en 2^X, y luego $\mu^{-1}(U) \bigcap C(X)$ es un abierto en $C(X)$. Como $(\mu\,|_{C(X)})^{-1}(U) = \mu^{-1}(U) \bigcap C(X)$, tenemos que $\mu\,|_{C(X)}\,:\; C(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(ii) Para cada $x \in X$, tenemos que $\mu\,|_{C(X)}\,(\{x\}) = \mu(\{x\}) = 0$.

(iii) Como $\mu\,|_{C(X)}\,(B) = \mu(B)$ para cada $B \in C(X)$, resulta que como $A, B \in C(X)$ en particular $A, B \in 2^X$, tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$, es decir, $\mu\,|_{C(X)}\,(A) < \mu\,|_{C(X)}\,(B)$. Por lo tanto, $\mu\,|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$. $\square$

Ejemplo 2.3. La recíproca del Teorema 2.2 no se cumple: La función diámetro $\text{diám}\colon\; 2^{[0,1]} \to [0,1]$ no es una función de Whitney para $2^{[0,1]}$, ya que $\text{diám}([0,1]) = \text{diám}(\{0,1\})$.

Sin embargo, si restringimos esta función a $C([0,1])$, la nueva función sí es una función de Whitney para $C([0,1])$.

Teorema 2.4. Si X es un continuo arco conexo y la función diámetro es una función de Whitney para $C(X)$, entonces X es un arco.

Demostración. Supongamos que d es la métrica del continuo X. Sean $p, q \in X$ tales que el $\text{diám}(X) = d(p,q)$. Por hipótesis existe un arco A en X que une los puntos p y q; es decir, $d(p,q) \leq \sup\{d(x,y)\colon x,y \in A\} = \text{diám}(A) \leq \text{diám}(X) = d(p,q)$. Por tanto, $\text{diám}(A) = \text{diám}(X)$. Como diám es una función de Whitney para $C(X)$, tenemos que $A = X$. Por lo tanto, X es un arco. $\square$

El resultado que sigue lo utilizamos para probar el Teorema 2.6.

Teorema 2.5. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para 2^X. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sean A_m, $B_m \in 2^X$ tales que $A_m \subset B_m$ y $\mu(B_m) - \mu(A_m) < \frac{1}{m}$. Si la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a B en 2^X, entonces $A = B$.

Demostración. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_m \subset B_m$, por Teorema 1.14 (2), tenemos que $A \subset B$. Como μ es una función de Whitney para 2^X, tenemos que

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Notemos que

$$0 \leq \mu(B) - \mu(A) = \mu(\text{lím} B_m) - \mu(\text{lím} A_m).$$

Como μ es continua, $\mu(\text{lím} B_m) - \mu(\text{lím} A_m) = \text{lím}\mu(B_m) - \text{lím}\mu(A_m) = \text{lím}(\mu(B_m) - \mu(A_m)) \leq \text{lím}\frac{1}{m} = 0$.

Así, $\mu(B) - \mu(A) = 0$. Por lo tanto, $\mu(B) = \mu(A)$. Como μ es una función de Whitney para 2^X, concluimos que $A = B$. $\square$

El siguiente resultado establece condiciones para estimar la distancia entre dos elementos de 2^X, mediante funciones de Whitney.

Teorema 2.6. Si X es un continuo, μ es una función de Whitney para 2^X y H es la métrica de Hausdorff para 2^X, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $A,\ B \in 2^X$ con $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$, tenemos que $H(A, B) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $A_\delta, B_\delta \in 2^X$ con $A_\delta \subset B_\delta$, $\mu(B_\delta) - \mu(A_\delta) < \delta$ y $H(A_\delta, B_\delta) \geq \varepsilon$. En particular, para cada $m \in \mathbb{N}$, existen $A_m, B_m \in 2^X$ con $A_m \subset B_m$, $\mu(B_m) - \mu(A_m) < \frac{1}{m}$ y $H(A_m, B_m) \geq \varepsilon$.

Como 2^X es métrico compacto, la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a algún elemento $A \in 2^X$. Ahora, la respectiva subsucesión $\{B_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{B_{m_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a algún elemento $B \in 2^X$. Así, tenemos dos subsucesiones $\{A_{m_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{B_{m_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ de las sucesiones $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$, respectivamente, que convergen a A y B, respectivamente, tales que $A_{m_{k_j}} \subset B_{m_{k_j}}$ y $\mu(B_{m_{k_j}}) - \mu(A_{m_{k_j}}) < \frac{1}{m_{k_j}}$.

Por el Teorema 2.5, tenemos que $A = B$, luego $H(A, B) = 0$. Por otro lado, como $H(A_{m_{k_j}}, B_{m_{k_j}}) \geq \varepsilon > 0 = H(A, B)$, consecuentemente $\text{lím} H(A_{m_{k_j}}, B_{m_{k_j}}) \geq \varepsilon > 0$, tenemos que $0 = H(A, B) = H(\text{lím} A_{m_{k_j}}, \text{lím} B_{m_{k_j}}) \geq \varepsilon > 0$, esto es una contradicción. $\square$

Teorema 2.7. Si X es un continuo, μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $K \in C(X)$ con $\text{diám}(K) < \delta$ cumple que $\mu(K) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que para $\delta > 0$ existe $K_\delta \in C(X)$ tal que $\text{diám}(K_\delta) < \delta$ y $\mu(K_\delta) \geq \varepsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $K_n \in C(X)$ con $\text{diám}(K_n) < \frac{1}{n}$ y $\mu(K_n) \geq \varepsilon$.

Como $C(X)$ es métrico compacto, la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{K_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a algún $K \in C(X)$.

Como la función diámetro es continua consecuentemente, la sucesión $\{\text{diám}(K_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ converge a diám(K). Dado que para cada $j \in \mathbb{N}$, diám$(K_{n_j}) < \frac{1}{n_j}$, tenemos que diám$(K) = 0$, es decir, $K = \{x\}$. Por lo tanto, $\mu(K) = 0$.

Por otro lado, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mu(K_{n_j}) \geq \varepsilon$; y dado que $\{\mu(K_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $\mu(K)$, tenemos que $\mu(K) \geq \varepsilon$. Esto es una contradicción. □

Teorema 2.8. Si X es un continuo, μ es una función de Whitney para 2^X y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $K \in 2^X$ con diám$(K) < \delta$ cumple que $\mu(K) < \varepsilon$.

Demostración. La prueba es similar a la demostración del Teorema 2.7. □

2.2. Existencia de funciones de Whitney

Las funciones de Whitney nos proporcionan una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

Aquí vemos la existencia de las funciones de Whitney y presentamos de manera explícita la función.

Teorema 2.9. Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X.

Demostración. Como X es un espacio métrico compacto, podemos elegir un subconjunto denso y numerable $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ de X.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mu_n \colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $\mu_n(A) = \text{máx}\{d(a, a_n) \colon a \in A\} - \text{mín}\{d(a, a_n) \colon a \in A\}$.

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, veamos que μ_n es continua.

Demostración de (1). Sean $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, mostremos que $\mid \mu_n(A) - \mu_n(B) \mid < \varepsilon$, es decir, mostraremos que μ_n es uniformemente continua, con lo que podemos asegurar que μ_n sea continua.

Como A y B son compactos, existen $a_0, a_* \in A$ y $b_0, b_* \in B$ tales que

(i) $d(a_n, a_0) = \text{máx}\{d(a_n, a) \colon a \in A\}$,

(ii) $d(a_n, a_*) = \text{mín}\{d(a_n, a) \colon a \in A\}$,

(iii) $d(a_n, b_0) = \text{máx}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$ y,

(iv) $d(a_n, b_*) = \text{mín}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$.

Es decir, $\mu_n(A) = d(a_n, a_0) - d(a_n, a_k)$.

Como $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, por el Teorema 1.14 (1), tenemos que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$ y $B \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$.

Como $b_0, b_* \in B$ existen $a, x \in A$ tales que $d(a, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x, b_*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos que $d(a_n, b_0) \leq d(a_n, a) + d(a, b_0) < d(a_n, a) + \frac{\varepsilon}{2} \leq d(a_n, a_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Así que $d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, $d(a_n, a_*) \leq d(a_n, x) \leq d(a_n, b_*) + d(b_*, x) < d(a_n, b_*) + \frac{\varepsilon}{2}$. Obtenemos $d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Similarmente, $d(a_n, a_0) - d(a_n, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(a_n, b_*) - d(a_n, a_*) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $a_0, a_* \in A$ existen $b, y \in B$ tales que $d(a_0, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(a_*, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos que $d(a_n, a_0) \leq d(a_n, b) + d(b, a_0) < d(a_n, b) + \frac{\varepsilon}{2} \leq d(a_n, b_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $d(a_n, a_0) - d(a_n, b_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, $d(a_n, b_*) \leq d(a_n, y) \leq d(a_n, a_*) + d(a_*, y) \leq d(a_n, a_*) + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $d(a_n, b_*) - d(a_n, a_*) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto, $|d(a_n, b_0) - d(a_n, a_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|d(a_n, a_*) - d(a_n, b_*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí, $|\ d(a_n, b_0) - d(a_n, b_*) - (d(a_n, a_0) - d(a_n, a_*))\ | < \varepsilon$. Es decir, $|\mu_n(B) - \mu_n(A)| < \varepsilon$.

(2) Veamos que si $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu_n(\{x\}) = 0$.

Demostración de (2). Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{d(a_n, a) \colon a \in \{x\}\} = \{d(a_n, x)\}$, luego $\mu_n(\{x\}) = \text{máx}\{d(a_n, x)\} - \text{mín}\{d(a_n, x)\} = d(x, a_n) - d(x, a_n) = 0$.

(3) Mostremos que si $A, B \in 2^X$ y $A \subset B$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

Demostración de (3). Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \subset \{d(a_n, b) \colon b \in B\}$. De aquí, $\text{máx}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$ y $\text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \geq \text{mín}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$.

Luego, $\text{máx}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$ y $-\text{mín}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \leq -\text{mín}\{d(a_n, b) \colon b \in B\}$. De donde, $\mu_n(A) = \text{máx}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, b) \colon b \in B\} - \text{mín}\{d(a_n, b) \colon b \in B\} = \mu_n(B)$. Por lo tanto, $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para $n \in \mathbb{N}$.

(4) Veamos que la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada.

Demostración de (4). Sea $M = \text{diám}(X)$. Como X es compacto, en particular X es acotado, luego $\mu_n(A) = \text{máx}\{\ d(a_n, a) \colon a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(a_n, a) \colon a \in A\} \leq M$. De donde $\mu_n(A) \leq M$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $A \in 2^X$.

(5) Tenemos que la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ es una serie de términos positivos que convergen a 1 y además por (4), $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A)}{2^n} \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2^n} = M$. Así, $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A)}{2^n}$ converge y por tanto la función $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A)}{2^n} \in \mathbb{R}$ está bien definida.

Por (1) y (4), tenemos que μ_n es continua para $n \in \mathbb{N}$ y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotado. Así por el Teorema 1.15 la función $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A)}{2^n} \in \mathbb{R}$ es continua.

(6) Veamos que si $x \in X$, entonces $\mu(\{x\}) = 0$.

Demostración de (6). Es inmediato de (2).

Sólo nos falta probar que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

(7) Veamos que para cada $A, B \in 2^X$ tal que $A \subsetneq B$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.

Demostración de (7). Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Elijamos $b_0 \in B - A$. Como A es cerrado en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(b_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Como D es denso, existe $a_n \in D \cap B(b_0, \frac{\varepsilon}{2})$.

Para esta n veamos que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.

Notemos que $\max\{d(a_n, a)\colon a \in A\} \leq \max\{d(a_n, b)\colon b \in B\}$ y $\min\{d(a_n, b)\colon b \in B\} \leq d(a_n, b_0)$.

Además $\min\{d(a_n, a)\colon a \in A\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, pues de lo contrario, si $\min\{d(a_n, a)\colon a \in A\} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ y esto implica que $d(a, b_0) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_0) < \varepsilon$, así que $a \in B(b_0, \varepsilon) \cap A$, esto contradice la elección de ε.

De donde, $\min\,\{d(a_n, a)\colon a \in A\} \geq \frac{\varepsilon}{2} > d(a_n, b_0) \geq \min\,\{d(a_n, b)\colon b \in B\}$.

Luego, $\mu_n(A) = \text{máx}\,\{d(a_n, a)\colon a \in A\} - \text{mín}\{d(a_n, a)\colon a \in A\} < \text{máx}\,\{d(a_n, b)\colon b \in B\} - \text{mín}\{d(a_n, b)\colon b \in B\} = \mu_n(B)$.

(8) Si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Demostración de (8). Se sigue de (3) y (7).

Por lo tanto μ es una función de Whitney. □

2.3. Funciones de Whitney a partir de funciones de Whitney

Como observamos en la sección anterior, una expresión explícita de una función de Whitney en general no es sencilla. En esta sección obtenemos nuevas funciones de Whitney a partir de funciones de Whitney dadas.

Teorema 2.10. La función producto de dos funciones de Whitney es una función de Whitney.

Demostración. Sean X un continuo, $\mu_1, \mu_2\colon 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney y $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida por $\mu(A) = \mu_1(A)\mu_2(A)$, para cada $A \in 2^X$.

Veamos que μ es una función de Whitney, para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función μ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Demostración de (a). Tenemos que μ_1 y μ_2 son funciones de Whitney para 2^X, de aquí, μ_1 y μ_2 son funciones continuas, luego μ es continua ya que por el Teorema [4, Teorema (1.F.3), pág. 27] el producto de dos funciones continuas es continua.

Demostración de (b). Para cada $x \in X$, notemos que $\mu(\{x\}) = \mu_1(\{x\})\mu_2(\{x\}) = 0$.

Demostración de (c). Si $A, B \in 2^X$ son tales que $A \subsetneq B$, entonces $0 \leq \mu_1(A) < \mu_1(B)$ y $0 \leq \mu_2(A) < \mu_2(B)$. Por lo tanto, $0 \leq \mu_1(A)\mu_2(A) < \mu_1(B)\mu_2(B)$, es decir, $\mu(A) < \mu(B)$.

Así, resulta que μ es una función de Whitney. □

Teorema 2.11. Si X es un continuo, μ es una función de Whitney para 2^X y $A_0 \in 2^X$, entonces la función $\varphi\colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $B \in 2^X$, por $\varphi(B) = (\mu(A_0 \cup B)\mu(B))^{\frac{1}{2}}$ es una función de Whitney.

Demostración. Veamos lo siguiente.

(a) La función φ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\varphi(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $\varphi(A) < \varphi(B)$.

Demostración de (a). Vamos a probar que la función $g\colon 2^X \to 2^X$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $g(A) = A \cup A_0$, es continua. En efecto, sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Pongamos a $\delta = \varepsilon$. Ahora, sea $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$. Veamos que $H(g(A), g(B)) = H(A \cup A_0, B \cup A_0) < \epsilon$. Por el Teorema 1.14 (1), basta ver que $A \cup A_0 \subset N(\varepsilon, B \cup A_0)$ y $B \cup A_0 \subset N(\varepsilon, A \cup A_0)$. Veamos que $A \cup A_0 \subset N(\varepsilon, B \cup A_0)$. Sea $x \in A \cup A_0$, así, $x \in A$ o $x \in A_0$.

Si $x \in A$, como $A \subset N(\varepsilon, B)$, entonces existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$, luego $x \in N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, $x \in N(\varepsilon, B \cup A_0)$. Ahora, si $x \in A_0$, tenemos que $x \in N(\varepsilon, B \cup A_0)$. De manera análoga resulta que, $B \cup A_0 \subset N(\varepsilon, A \cup A_0)$. Por lo tanto, g es continua.

Sea $\mu_1 \colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $\mu_1(A) = \mu(A \cup A_0)$. Observemos que $\mu_1 = \mu \circ g$. Como μ y g son funciones continuas, por el Teorema (1.F.1) de [4, pág. 27] la composición resulta una función continua. Por lo tanto, μ_1 es continua.

Por otro lado, definamos $\mu_2 \colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $\mu_2(A) = \mu_1(A)\mu(A)$. Dado que μ_1 y μ son funciones continuas, por el Teorema (1.F.3) de [4, pág. 27] el producto de funciones continuas es continua. Así, μ_2 es continua. Podemos ver a la función φ como $\varphi(A) = (\mu_2(A))^{\frac{1}{2}}$. Así, φ es continua ya que es una composición de funciones continuas.

Demostración de (b). Para cada $x \in X$, tenemos que $\varphi(\{x\}) = (\mu_2(\{x\}))^{\frac{1}{2}} = (\mu(\{x\})\mu_1(\{x\}))^{\frac{1}{2}} = 0$.

Demostración de (c). Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, así $\mu(A) < \mu(B)$. Además, notemos que $\mu(B) > 0$; por tanto, $\mu(B \cup A_0) > 0$. Como $A \subset B$, consecuentemente $A \cup A_0 \subset B \cup A_0$, luego $\mu(A \cup A_0) \leq \mu(B \cup A_0)$; por consiguiente $\varphi(A) = (\mu(A \cup A_0)\mu(A))^{\frac{1}{2}} < (\mu(B \cup A_0)\mu(B))^{\frac{1}{2}} = \varphi(B)$. Por lo tanto, $\varphi(A) < \varphi(B)$.

Concluimos por (a), (b) y (c) que φ es una función de Whitney. $\square$

Corolario 2.12. En relación con el Teorema 2.11, tenemos que $\varphi(A) = \mu(A)$ si y sólo si $A = \{x\}$ para algún $x \in X$ o $A_0 \subset A$.

Demostración. Si $A = \{x\}$, entonces $\varphi(A) = \mu(A)$. Ahora, si A es un conjunto con más de un elemento, entonces $\varphi(A) = \mu(A)$ si y sólo si $\mu(A \cup A_0)\mu(A) = \mu(A)^2$. Es decir, $\varphi(A) = \mu(A)$

si y sólo si $\mu(A \cup A_0) = \mu(A)$. Así, $\varphi(A) = \mu(A)$ si y sólo si $A \cup A_0 = A$, lo cual ocurre si y sólo si $A_0 \subset A$. $\square$

Teorema 2.13. Las funciones máximo y mínimo de dos funciones de Whitney son ambas funciones de Whitney.

Demostración. Veamos primero que el máximo de dos funciones de Whitney es una función de Whitney.

Sean X un continuo, $\mu_1, \mu_2 \colon 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney y $\mu \colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida por $\mu(A) = \text{máx}\{\mu_1(A), \mu_2(A)\}$ para cada A en 2^X.

Demostremos lo siguiente.

(a) La función μ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

(c) Para $A, B \in 2^X$ tal que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Demostración de (a). Como $Z_1 = \{A \in 2^X \colon \mu_1(A) \geq \mu_2(A)\} = \{A \in 2^X \colon (\mu_1 - \mu_2)(A) \geq 0\} = (\mu_1 - \mu_2)^{-1}([0, \infty))$, y $Z_2 = \{A \in 2^X \colon \mu_1(A) \leq \mu_2(A)\} = \{A \in 2^X \colon 0 \leq (\mu_2 - \mu_1)(A)\} = (\mu_2 - \mu_1)^{-1}([0, \infty))$. Notemos que $2^X = Z_1 \cup Z_2$.

Ahora veamos que Z_1 y Z_2 son cerrados en 2^X.

Como μ_1 y μ_2 son funciones de Whitney, obtenemos que μ_1 y μ_2 son funciones continuas, luego por [4, Teorema (1.F.3), pág. 27] resulta que $(\mu_1 - \mu_2)$ y $(\mu_2 - \mu_1)$ son continuas. Como $[0, \infty)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, luego $(\mu_1 - \mu_2)^{-1}([0, \infty))$ $(\mu_2 - \mu_1)^{-1}([0, \infty))$ son cerrados en 2^X. Además $\mu\,|_{Z_1} \colon Z_1 \to \mathbb{R}$ es tal que $\mu\,|_{Z_1} (A) = \mu_1(A)$ para cada $A \in Z_1$ y $\mu\,|_{Z_2} \colon Z_2 \to \mathbb{R}$ es tal que $\mu\,|_{Z_2} (B) = \mu_2(B)$ para cada $B \in Z_2$. Por lo tanto, $\mu\,|_{Z_1}$ y $\mu\,|_{Z_2}$ son funciones continuas. Ahora, si $A \in Z_1 \cap Z_2$, entonces $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Así, $\mu\,|_{Z_1} (A) = \mu\,|_{Z_2} (A)$.

Definimos $F \colon 2^X \to \mathbb{R}$, para cada $A \in 2^X$, por

$$F(A) = \begin{cases} \mu\mid_{Z_1}(A), & \text{si } A \in Z_1, \\ \mu\mid_{Z_2}(A), & \text{si } A \in Z_2. \end{cases}$$

Por el Teorema 1.16, la función F es continua. Dado que para cada $A \in 2^X$, tenemos que $F(A) = \mu(A)$ luego μ es una función continua.

Demostración de (b). Por definición $\mu(\{x\}) = \text{máx}\{\mu_1(\{x\}), \mu_2(\{x\})\}$. Como $\mu_1(\{x\}) = 0$ y $\mu_2(\{x\}) = 0$ así, $\mu(\{x\}) = 0$.

Demostración de (c) Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, luego $\mu_1(A) < \mu_1(B)$ y $\mu_2(A) < \mu_2(B)$.

Consideramos los siguientes casos:

(i) Si $\mu(A) = \mu_1(A)$, entonces $\mu(A) = \mu_1(A) < \mu_1(B) \leq \text{máx}\{\mu_1(B), \mu_2(B)\} = \mu(B)$. Así, $\mu(A) < \mu(B)$.

(ii) Si $\mu(A) = \mu_2(A)$, entonces $\mu(A) = \mu_2(A) < \mu_2(B) \leq \text{máx}\{\mu_1(B), \mu_2(B)\} = \mu(B)$. De donde, $\mu(A) < \mu(B)$.

Por (a), (b) y (c), concluimos que μ es una función de Whitney.

Ahora veamos que el mínimo de dos funciones de Whitney es una función de Whitney.

Sean X un continuo, $\mu_1, \mu_2 \colon 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney y $\chi \colon 2^X \to \mathbb{R}$ definida por $\chi(A) = \text{mín}\{\mu_1(A), \mu_2(A)\}$ para cada A en 2^X. Veamos que χ es función de Whitney para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función χ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, tenemos que $\chi(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in 2^X$ tal que si $A \subsetneq B$, entonces $\chi(A) < \chi(B)$.

Demostración de (a). De manera similar a como se probó que μ es una función continua, se puede probar que χ es continua.

Demostración de (b). Por definición $\chi(\{x\}) = \text{mín}\{\mu_1(\{x\}), \mu_2(\{x\})\}$. Como $\mu_1(\{x\}) = 0$ y $\mu_2(\{x\}) = 0$, tenemos que $\chi(\{x\}) = 0$.

Demostración de (c). Si $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, entonces $\mu_1(A) < \mu_1(B)$ y $\mu_2(A) < \mu_2(B)$.

Consideramos los siguientes casos:

(i) Si $\chi(B) = \mu_1(B)$, entonces $\chi(A) \leq \mu_1(A) < \mu_1(B) = \chi(B)$. Así, $\chi(A) < \chi(B)$.

(ii) Si $\chi(B) = \mu_2(B)$, entonces $\chi(A) \leq \mu_2(A) < \mu_2(B) = \chi(B)$. De donde, $\chi(A) < \chi(B)$.

En conclusión por (a), (b) y (c), χ es una función de Whitney.

$\square$

Teorema 2.14. Cualquier combinación lineal con coeficientes positivos de dos funciones de Whitney es también una función de Whitney.

Demostración. Sean X un continuo y $\mu_1, \mu_2 \colon 2^X \to \mathbb{R}$ funciones de Whitney. Veamos que si $\alpha > 0$, entonces la función $\chi \colon 2^X \to \mathbb{R}$ dada por $\chi(A) = \alpha\mu_1(A)$ es una función de Whitney para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función χ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\chi(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$, tenemos que $\chi(A) < \chi(B)$.

Demostración de (a). Sea $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Dado que μ_1 es continua existe $\delta > 0$ tal que si $H(A, B) < \delta$, entonces $\mid \mu_1(A) - \mu_1(B) \mid < \frac{\epsilon}{\alpha}$. Sólo resta mostrar que δ sirve para comprobar que χ es continua. Si $B \in 2^X$ tal que $H(A, B) < \delta$, entonces $\mid \chi(A) - \chi(B) \mid = \mid \alpha\mu_1(A) - \alpha\mu_1(B) \mid = \mid \alpha(\mu_1(A) - \mu_1(B)) \mid = \alpha \mid \mu_1(A) - \mu_1(B) \mid < \alpha \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon$. Por lo tanto, χ es continua.

Demostración de (b). Por definición $\chi(\{x\}) = \alpha\mu_1(\{x\})$. Como μ_1 es función de Whitney, de aquí, $\alpha\mu_1(\{x\}) = \alpha 0 = 0$. Por lo tanto, $\chi(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.

Demostración de (c). Ahora bien, si $A, B \in 2^X$ son tales que $A \subsetneq B$, entonces μ_1 es una función de Whitney, resulta que $\mu_1(A) < \mu_1(B)$ y por hipótesis $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mu_1(A) < \alpha\mu_1(B)$, y por definición, tenemos que $\chi(A) = \alpha\mu_1(A)$ y $\chi(B) = \alpha\mu_1(B)$. Así, $\chi(A) < \chi(B)$.

Con los incisos (a), (b) y (c), χ es una función de Whitney.

Ahora consideramos la función $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ dada por $\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$ para cada $A \in 2^X$. Veamos que μ es una función de Whitney para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función μ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in 2^X$ tales que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Demostración de (a). Tenemos que μ_1 y μ_2 son funciones de Whitney, así μ_1 y μ_2 son funciones continuas, luego por el Teorema [4, Teorema (1.F.3), pág. 27] resulta que la suma de dos funciones continuas es continua. Por lo tanto, μ es continua.

Demostración de (b). En efecto, tenemos por definición que $\mu(\{x\}) = \mu_1(\{x\}) + \mu_2(\{x\})$. Como μ_1 y μ_2 son funciones de Whitney, tenemos que $\mu_1(\{x\}) = 0$ y $\mu_2(\{x\}) = 0$. Por lo tanto, $\mu(\{x\}) = 0$.

Demostración de (c). Si $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$, entonces $\mu_1(A) < \mu_1(B)$ y $\mu_2(A) < \mu_2(B)$. Luego, $\mu_1(A)+\mu_2(A) < \mu_1(B)+\mu_2(B)$, y por definición, $\mu(A) = \mu_1(A)+\mu_2(A)$ y $\mu(B) = \mu_1(B) + \mu_2(B)$, es decir, $\mu(A) < \mu(B)$.

Con los incisos (a), (b) y (c), μ es una función de Whitney.

La prueba del Teorema 2.14 se tiene al combinar las funciones χ y μ. $\square$

A continuación consideramos una clase particular de funciones llamadas *funciones inducidas* entre los continuos X y Y. Notemos que, para cada A en $C(X)$, la imagen de A bajo f es un subcontinuo de Y y, de aquí, la relación $A \mapsto f(A)$ está bien definida. De manera análoga, para cada A en 2^X. Así, obtenemos lo siguiente.

Definición 2.15. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua, la función $\widehat{f}\colon C(X) \to C(Y)$ definida, para cada $A \in C(X)$, por $\widehat{f}(A) = f(A)$ es la **función inducida por** f.

Definición 2.16. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua, la función $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ definida, para cada $A \in 2^X$, por $2^f(A) = f(A)$ es la **función inducida por** f.

Cuando la función es continua, la continuidad de la función inducida se preserva, como lo garantizamos en el siguiente resultado.

Teorema 2.17. Si X y Y son continuos y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces la función inducida $\widehat{f}$ es continua.

Demostración. Sea $W_1, \ldots, W_n$ un número finito de subconjuntos abiertos de Y, por el Teorema 1.20, tenemos que f es una función cerrada. Veamos que:

$$(\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) = \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle. \tag{2.3.1}$$

Para comprobar esta igualdad (2.3.1), primero veamos que

$$(\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle) \subset \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle.$$

Sea $B \in (\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$, luego $\widehat{f}(B) \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$. Por la Definición 1.11, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$; tenemos que $f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ y $f(B) \cap W_i \neq \emptyset$.

Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ resulta, $B \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$ y $f(B) \cap W_i \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, obtenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(W_i)$ y $B \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $B \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$.

Para concluir la prueba de (2.3.1) resta probar que

$$\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle \subset (\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle).$$

Sea $B \in \langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$. Por la Definición 1.11, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(W_i)$ y $B \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$.

Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$; $B \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$ y $B \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $B \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$ y $f(B) \cap W_i \neq \emptyset$.

De donde $f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ y $f(B) \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que f es una función cerrada, así $\widehat{f}(B) \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$.

Por lo tanto, $B \in (\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$.

Como f es continua y $W_1, \ldots, W_n$ son abiertos en Y, tenemos que $f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n)$ son abiertos en X. Luego, $\langle f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle$ es abierto en $C(X)$. Así, $(\widehat{f})^{-1}(\langle W_1, \ldots, W_n \rangle)$ es abierto en $C(X)$. Como $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ son subbásicos de $C(X)$ consecuentemente, la función inducida $\widehat{f}$ es continua. $\square$

Terminamos esta sección analizando cuándo una función inducida preserva las propiedades de una función de Whitney. Es decir, dados X y Y continuos, una función continua $f \colon X \to Y$ y una función de Whitney $\mu \colon C(Y) \to \mathbb{R}$, bajo qué condiciones la composición $\mu \circ \widehat{f} \colon C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney. El Teorema 2.19 resuelve esta pregunta para el caso en que $X = [0, 1] = Y$.

Definición 2.18. Sean X y Y continuos, una función $f \colon X \to Y$ **es un encaje** si X es homeomorfo a $f(X)$.

Teorema 2.19. Sean $f \colon [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y $\mu \colon C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Entonces, $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney si y sólo si f es un encaje.

Demostración. Supongamos que $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney y probemos que f es un encaje; para esto, basta probar que f es inyectiva.

Supongamos que f no es inyectiva, luego existen $a, b \in [0,1]$, con $a < b$, tales que $f(a) = f(b)$. Por hipótesis, como $\mu \circ \widehat{f}\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney y $\{a\} \subsetneq [a,b]$, tenemos que

$$(\mu \circ \widehat{f})([a,b]) > (\mu \circ \widehat{f})(\{a\}) = 0,$$

Además,

$$0 < (\mu \circ \widehat{f})([a,b]) = \mu(\widehat{f}([a,b]) = \mu(f([a,b])$$

Luego, $f([a,b])$ es un continuo no degenerado contenido en $[0,1]$. Así, existen $c, d \in [0,1]$, con $c < d$, tales que

$$f([a,b]) = [c,d]. \tag{2.3.2}$$

Sean $x, y \in [a,b]$ tales que

$$f(x) = c \text{ y } f(y) = d. \tag{2.3.3}$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que $x < y$. Como $f(a) = f(b)$, tenemos que $x \neq a$ o $y \neq b$. En cualquier caso, obtenemos que:

$$[x,y] \subsetneq [a,b]. \tag{2.3.4}$$

Sin embargo, por (2.3.2) y (2.3.3), tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \widehat{f})([a,b]) &= \mu(\widehat{f}([a,b])) \\
&= \mu(f([a,b])) \\
&= \mu([c,d]) \\
&= \mu(f([x,y])) \\
&= \mu(\widehat{f}([x,y])) \\
&= (\mu \circ \widehat{f})([x,y]).
\end{aligned}$$

Esto y (2.3.4) contradicen la hipótesis de que $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney.

Por lo tanto, concluimos que f es inyectiva.

Supongamos ahora que f es un encaje y probemos que $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función $\mu \circ \widehat{f}$ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, tenemos que $(\mu \circ \widehat{f})(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, tenemos que $(\mu \circ \widehat{f})(A) < (\mu \circ \widehat{f})(B)$.

Demostración de (a). Por Teorema 2.17 la función inducida $\widehat{f}$ es continua y por hipótesis μ es una función de Whitney, de aquí, μ es continua consecuentemente, por el [4, Teorema (1.F.3), pág. 27] resulta que $\mu \circ \widehat{f}$ también es continua.

Demostración de (b). Notemos que si $x \in X$, entonces $(\mu \circ \widehat{f})(\{x\}) = (\mu(\widehat{f}(\{x\})) = (\mu(f(\{x\})) = \mu(\{f(x)\}) = 0$.

Demostración de (c). Sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Como f es un encaje, $f(A) \subsetneq f(B)$, luego $(\mu \circ \widehat{f})(A) = \mu(\widehat{f}(A))$

$= \mu(f(A)) < \mu(f(B)) = \mu(\widehat{f}(B)) = (\mu \circ \widehat{f})(B)$. Así obtenemos que $(\mu \circ \widehat{f})(A) < (\mu \circ \widehat{f})(B)$.

Por lo tanto, por (a), (b) y (c), concluimos que $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney. $\square$

El siguiente teorema se encuentra originalmente demostrado en [3, Teorema (3.6), pág. 183].

Teorema 2.20. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Entonces, la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ es ligera si y sólo si para cada $A, B \in 2^X$ la condición $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A implica $f(A) \subsetneq f(B)$.

Como una consecuencia de Teorema 2.20 y algunos resultados de [3] obtenemos el siguiente resultado de J. B. Fugate y S. B. Nadler, Jr., que está formulado como un ejercicio en [12, (1.212.3), pág. 204].

Teorema 2.21. Sean X y Y continuos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Entonces la función inducida $\widehat{f}\colon C(X) \to C(Y)$ es ligera si y sólo si para cada $B \in C(X)$ y para cada $A \in C(B) - \{B\}$, tenemos que $f(A) \subsetneq f(B)$.

A continuación presentamos una caracterización general de las funciones que preservan las propiedades de una función de Whitney.

Teorema 2.22. Sean X y Y continuos, $f\colon X \to Y$ una función continua y $\mu\colon C(Y) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Entonces $\mu \circ \widehat{f}\colon C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney si y sólo si $\widehat{f}$ es ligera.

Demostración. Supongamos que $\widehat{f}$ es ligera y veamos que $\mu \circ \widehat{f}\colon C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney para esto demostremos lo siguiente.

(a) La función $\mu \circ \widehat{f}$ es continua.

(b) Para cada $x \in X$, $\mu \circ \widehat{f}(\{x\}) = 0$.

(c) Para cada $A, B \in C(X)$ tales que si $A \subsetneq B$, entonces $(\mu \circ \widehat{f})(A) < (\mu \circ \widehat{f})(B)$.

Demostración de (a). Por el Teorema 2.17 la función inducida $\widehat{f}$ es continua y por hipótesis μ es una función de Whitney, de aquí resulta que μ es continua, tenemos que $\mu \circ \widehat{f}$ es continua.

Demostración de (b). Notemos que si $x \in X$, entonces $(\mu \circ \widehat{f})(\{x\}) = \mu(\widehat{f}(\{x\})) = \mu(f(\{x\})) = \mu(\{f(x)\}) = 0$.

Por lo tanto, $(\mu \circ \widehat{f})(\{x\}) = 0$.

Demostración de (c). Sea $B \in C(X)$ y $A \in C(B) - \{B\}$. Como $\widehat{f}$ es ligera, por el Teorema 2.21, $f(A) \subsetneq f(B)$. Así, $(\mu \circ \widehat{f})(A) = \mu(\widehat{f}(A)) = \mu(f(A)) < \mu(f(B)) = \mu(\widehat{f}(B)) = (\mu \circ \widehat{f})(B)$.

Por lo tanto, $(\mu \circ \widehat{f})(A) < (\mu \circ \widehat{f})(B)$.

Por (a), (b) y (c), resulta que $\mu \circ \widehat{f}$ es una función de Whitney.

Ahora, veamos que $\widehat{f}$ es ligera.

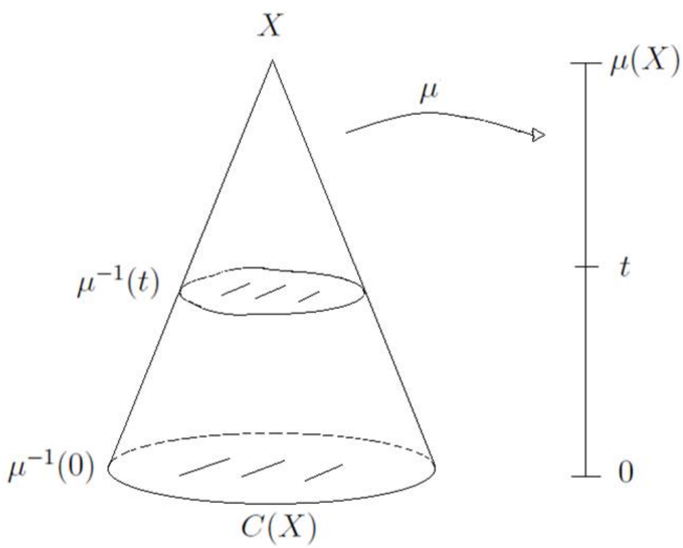
Supongamos que $\mu \circ \widehat{f} \colon C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney. Luego, para cada $B \in C(X)$ y para cada $A \in C(B) - \{B\}$, $(\mu \circ \widehat{f})(A) < (\mu \circ \widehat{f})(B)$. Así, $\mu(f(A)) < \mu(f(B))$, como μ es una función de Whitney, tenemos que $f(A) \subsetneq f(B)$. Por el Teorema 2.21, la función inducida $\widehat{f}$ es ligera. $\square$

2.4. Niveles de Whitney

El estudio de los niveles de Whitney ha resultado ser de gran utilidad para el estudio de los hiperespacios (por ejemplo, las propiedades de Whitney). En esta sección damos algunas de sus propiedades básicas.

Definición 2.23. Sean X un continuo, $\mu\colon 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el **nivel de Whitney para** 2^X en t es el conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.

Definición 2.24. Sean X un continuo, $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el **nivel de Whitney para** $C(X)$ en t es el conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.



Definición 2.25. Un continuo X es **unicoherente** si cada vez que A, B son subcontinuos de X, tales que $A \cup B = X$, resulta que $A \cap B$ es un conexo.

El siguiente resultado se encuentran en [12, Corolario (1.176), pág. 178].

Teorema 2.26. Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son unicoherentes.

Definición 2.27. Sea X un continuo, $F_1(X) = \{\{x\}: x \in X\}$. Notar que como $F_1 \subset 2^X$, $F_1(X)$ con la métrica de Hausdorff es un espacio métrico.

Además, X y $F_1(X)$ son homeomorfos de forma natural mediante la asociación x con $\{x\}$.

Luego, $\mu^{-1}(0) = F_1(X)$.

El siguiente también es un resultado conocido, aquí podemos notar como la unión de los elementos de un nivel de Whitney es igual a X.

Teorema 2.28. Si X es un continuo, $\mu: C(X) \to [0,\infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$.

Demostración. Por definición, la unión de los elementos de $\mu^{-1}(t)$ está contenida en X, resta ver que todo elemento de X pertenece a un elemento de $\mu^{-1}(t)$.

Sea $p \in X$. Veamos que existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \in A$. Por el Corolario 1.40 existe un arco ordenado $\alpha: [0,1] \to C(X)$ de $\{p\}$ a X, contenido en $C(X)$. La función $\varphi = \mu\circ\alpha: [0,1] \to [0,\mu(X)]$ es continua; $\varphi(0) = \mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0$ y $\varphi(1) = \mu(\alpha(1)) = \mu(X)$.

El Teorema del Valor Intermedio nos asegura que existe $s \in [0,1]$ tal que $t = \varphi(s) = \mu(\alpha(s))$. Así, $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$. Como α es un arco ordenado, $\{p\} \subset \alpha(s)$. Así, $p \in \bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\}$. Por lo tanto, $\bigcup\{A: A \in \mu^{-1}(t)\} = X$. $\square$

Ahora, veamos que los niveles de Whitney son no degenerados.

Teorema 2.29. Sean X un continuo y μ alguna función de Whitney para $C(X)$. Si $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado.

Demostración. Sea $\mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney. Elegimos $A \in \mu^{-1}(t)$. Como $t \neq \mu(X)$, $\mu(A) < \mu(X)$, por lo que $A \neq X$, así que podemos elegir un punto $p \in X - A$. Por el Teorema 2.28, existe $B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \in B$. Luego, A, B son dos elementos diferentes de $\mu^{-1}(t)$. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado. $\square$

2.5. Propiedades de Whitney

Definición 2.30. Sea P una propiedad topológica. Decimos que P **es una propiedad de Whitney** si cada vez que el continuo X tiene la propiedad P, para cada función de Whitney μ para $C(X)$ y para cada $t \in [0, \mu(X))$, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [12, Teorema (1.3), pág. 57].

Teorema 2.31. Sean X un continuo con métrica d, μ una función de Whitney y $\Lambda \subset 2^X$ tal que si $A, B \in \Lambda$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, μ es uno a uno sobre Λ y por consiguiente, si Λ es compacto, la restricción de μ a Λ es un homeomorfismo.

Teorema 2.32. Si X es un continuo, $\mu\colon C(X) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.

Demostración. Sean X un continuo, $\mu\colon C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$.

Veamos que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.

Si $t = 0$, entonces $\mu^{-1}(0) = \{\{x\}: x \in X\} = F_1(X)$ el cual es homeomorfo a X. De donde, $\mu^{-1}(0)$ es un continuo.

Así, para el propósito de la demostración, asumimos que $t \neq 0$.

Veamos que $\mu^{-1}([0,t])$ es un continuo.

Sean $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Por el Teorema 1.38, existe un arco ordenado $\alpha_A\colon [0,\mu(X)] \to 2^X$ tal que $\alpha_A(0) = \{a\}$ y $\alpha_A(\mu(X)) = A$. Como $\{a\} \in C(X)$ por el Teorema 1.39, $\alpha_A \subset C(X)$.

Afirmamos que $\mu^{-1}([0,t]) = \displaystyle\bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X)$.

Veamos que $\mu^{-1}([0,t]) \subset \displaystyle\bigcup_{A\in\mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X)$.

Sea $L \in \mu^{-1}([0,t])$, tenemos que $\mu(L) \in [0,t]$, es decir, existe $r \in [0,t]$ tal que $\mu(L) = r$.

Si $r = 0$, entonces $L = \{p\}$, así $L \in F_1(X)$.

Ahora, si $0 < r < t$, entonces $L \in \mu^{-1}(r)$, $r < t$. Sea $e \in L$. Por el Teorema 1.38 existe un arco ordenado $\sigma_L\colon [0,r] \to 2^X$ tal que $\sigma_L(0) = \{e\}$ y $\sigma_L(r) = L$. Por el Teorema 1.39, como $\{e\} \in C(X)$, $\sigma \subset C(X) \subset 2^X$. Por el Teorema 2.31 $\psi\,|_\sigma\colon \sigma \to [0,r]$ es un homeomorfismo, tenemos que existe su inverso $h\colon [0,r] \to \sigma$ tal que $h(0) = \{e\}$ y $h(r) = L$, si $t, s \in [0,r]$ tales que $t < s$, entonces $h(t) \subsetneq h(s)$.

Sea $L \in X$. Por el Teorema 1.38 existe un arco ordenado $\psi_L\colon [r,\mu(X)] \to 2^X$ tal que $\psi_L(r) = L$ y $\psi_L(\mu(X)) = X$. Por el Teorema 1.39, como $L \in C(X)$, $\psi_L \subset C(X) \subset 2^X$. Por el Teorema 2.31 $\mu\mid_{\psi}\colon \psi \to [\mu(L), \mu(X)]$ es un homeomorfismo.

Como $\mu\mid_{\psi}$ es suprayectiva y $t \in [r, \mu(X)]$, tenemos que existe $T \in \psi$ tal que $\mu(T) = t$. Por lo tanto, $T \in \mu^{-1}(t)$.

Sea $\gamma \subset \psi$ el arco ordenado con extremos en L y T. Por el Teorema 2.31 $\mu\mid_{\gamma}\colon \gamma \to [\mu(L), \mu(T)]$ es un homeomorfismo, luego existe su inverso $h_1\colon [r, t] \to \gamma$ tal que $h_1(r) = L$ y $h_1(t) = T$, si $r, s \in [r, t]$ tales que $r < s$, entonces $h_1(r) \subsetneq h_1(s)$.

Definimos $\alpha_T\colon [0, T] \to C(X)$.

$$\alpha_T(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in [0, r] \\ h_1(x), & \text{si } x \in [r, t] \end{cases}$$

tal que $\alpha_T(0) = \{e\}$ y $\alpha_T(t) = T$, si $r, s \in [0, T]$ tal que $r < s$, entonces $h(r) \subsetneq h(s)$.

Así, $L \in \alpha_T$, luego $L \in \displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0, t]) \subset \displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X)$.

Ahora, veamos que $\displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X) \subset \mu^{-1}([0, t])$.

Sea $B \in F_1(X)$ consecuentemente, $\mu(B) = 0$. Luego, $B \in \mu^{-1}(0)$. Como $\mu^{-1}(0) \subset \mu^{-1}([0, t])$, resulta que $B \in \mu^{-1}([0, t])$.
Así, $F_1(X) \subset \mu^{-1}([0, t])$.

Sean $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Tomemos α_A el arco ordenado contenido en $C(X)$, con extremos en $\{a\}$ y A. Así, para todo $B \in \alpha_A$, tenemos que $\{a\} \subset B \subset A$.

De aquí, $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = t$, es decir, $\mu(B) = r$ con $0 \leq r \leq t$. Por lo que, $B \in \mu^{-1}(r)$, con $0 \leq r \leq t$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([0,t])$, tenemos que $B \in \mu^{-1}([0,t])$. Luego, $\alpha_A \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Por lo tanto, $\displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Así, $\mu^{-1}([0,t]) = \displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X)$.

Para cada $A \in \mu^{-1}(t)$, el arco ordenado α_A es conexo. Así, $\alpha_A \cap F_1(X) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $\displaystyle\bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X)$ es conexo.

Por consiguiente, $\mu^{-1}([0,t])$ es conexo.

Notemos que $\mu^{-1}([0,t])$ es un conjunto cerrado en $C(X)$, ya que μ es una función continua y $[0,t]$ es cerrado.

Por el Teorema 1.13, tenemos que $C(X)$ es compacto. Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t])$ es compacto.

Como $\mu^{-1}([0,t]) \subset C(X)$, tenemos que $\mu^{-1}([0,t])$ es métrico.

De donde, $\mu^{-1}([0,t])$ es un continuo.

Ahora, veamos que $\mu^{-1}([t,\mu(X)])$ es un continuo.

Sean $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Por el Teorema 1.38, existe un arco ordenado $\beta_A \colon [t, \mu(X)] \to 2^X$ tal que $\beta_A(t) = A$ y $\beta_A(\mu(X)) = X$. Como $A \in C(X)$ por el Teorema 1.39, $\beta_A \subset C(X)$.

Afirmamos que, $\mu^{-1}([t, \mu(X)]) = \bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \beta_A$.

Su demostración es de manera similar a:

$$\mu^{-1}([0, t]) = \bigcup_{A \in \mu^{-1}(t)} \alpha_A \cup F_1(X).$$

Como para cada $A \in \mu^{-1}(t)$, el arco ordenado β_A es conexo. Como $X \in \beta_A$, tenemos que $\bigcup\limits_{A \in \mu^{-1}(t)} \beta_A$ es conexo. Por consiguiente, $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es conexo.

Además, $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es un conjunto cerrado en $C(X)$, ya que μ es una función continua y $[t, \mu(X)]$ es cerrado.

Por el Teorema 1.13, tenemos que $C(X)$ es compacto. Así, $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es compacto.

Como $\mu^{-1}([t, \mu(X)]) \subset C(X)$, luego $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es métrico.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([t, \mu(X)])$ es un continuo.

Además, veamos que $\mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)]) = C(X)$.

Por definición,

$$\mu^{-1}([0, t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)]) \subset C(X).$$

Sólo basta demostrar que

$$C(X) \subset \mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,\mu(X)]).$$

Tenemos que $A \in C(X)$, luego $\mu(A) = r$, con $r \in [0, \mu(X)]$.

Ahora, si $0 \leq r \leq t$, entonces $A \in \mu^{-1}(r)$, con $r \leq t$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([0,t])$, tenemos que $A \in \mu^{-1}([0,t])$.

Ahora, si $t \leq r \leq \mu(X)$, entonces $A \in \mu^{-1}(r)$, con $t \leq r \leq \mu(X)$. Como $\mu^{-1}(r) \subset \mu^{-1}([t,\mu(X)])$, tenemos que $A \in \mu^{-1}([t,\mu(X)])$.

Así, $A \in \mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,\mu(X)])$. Por lo que $C(X) \subset \mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,\mu(X)])$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,\mu(X)]) = C(X)$.

Ahora, veamos que $\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,\mu(X)]) = \mu^{-1}(t)$.

Para esto notemos que las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $A \in \mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,\mu(X)])$,

(2) $A \in \mu^{-1}([0,t])$ y $A \in \mu^{-1}([t,\mu(X)])$,

(3) $0 \leq \mu(A) \leq t$ y $t \leq \mu(A) \leq \mu(X)$,

(4) $\mu(A) = t$,

(5) $A \in \mu(t)$.

Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,\mu(X)]) = \mu^{-1}(t)$.

Tenemos que:

(i) $\mu^{-1}([0,t])$ es un subcontinuo de $C(X)$.

(ii) $\mu^{-1}([t,\mu(X)])$ es un subcontinuo de $C(X)$.

(iii) $\mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,\mu(X)]) = C(X)$.

(iv) $\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,\mu(X)]) = \mu^{-1}(t)$.

Así, por (i), (ii), (iii), (iv) y por Teorema 2.26, resulta que $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Tenemos que $\mu^{-1}([0,t]), \mu^{-1}([t,\mu(X)])$ son cerrados en $C(X)$, por (iv) resulta que $\mu^{-1}(t)$ es cerrado en $C(X)$ y como $C(X)$ es compacto. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es compacto.

Además, como $\mu^{-1}(t) \subset C(X)$, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es métrico.

Como $t < \mu(X)$, por Teorema 2.29, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado.

Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es un continuo. □

Ejemplo 2.33. Veamos la siguiente construcción de una función de Whitney μ, que la definimos para ser utilizada en la demostración del Teorema 2.34.

Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $n \geq 2$ un número natural fijo.

Sea $\lambda_n\colon F_n(A) \to [0,\infty)$ definido, para cada $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in F_n(A)$, por $\lambda_n(K) = \text{mín}\{d(a_i,a_j)\colon i \neq j\}$.

Notemos que $0 \leq \lambda_n(K) \leq \text{diám}[A]$ para cada $K \in F_n(A)$. Notemos que $\{\lambda_n(K)\colon K \in F_n(A)\}$ está acotado superiormente y no es vacío.

Sea $\mu_n(A) = \sup \{\lambda_n(K) \colon K \in F_n(A)\}$.
Como $0 \leq \mu_n(A) \leq$diám$[A]$ para cada $n = 2, 3, \ldots$, la serie

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^{n-1}}$$

converge por comparación de la serie

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{diám}[A]}{2^{n-1}}.$$

Sea $\mu \colon 2^X \to [0, \infty)$ definida, para cada $A \in 2^X$, por

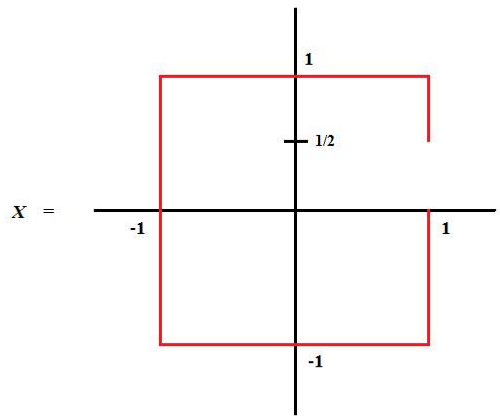
$$\mu(A) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^{n-1}}.$$

La función μ es de Whitney; vea [13, págs. 275-278].

Ahora, veamos que existen funciones de Whitney para 2^X y $t \in [0, \mu(X)]$, pero $\mu^{-1}(t)$ no es conexo.

Teorema 2.34. Existen X continuo, $\mu \colon 2^X \to [0, \infty)$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, entonces $\mu^{-1}(t)$ no es conexo y además μ no es una función abierta.

Demostración. Sea X un arco poligonal en $\mathbb{R}^2$ dado por $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \text{máx}\{\mid x \mid, \mid y \mid\} = 1$ y tal que si $x = 1$, entonces $y \leq 0$ o $y \geq \frac{1}{2}\}$, es decir, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \text{máx}\{\mid x \mid, \mid y \mid\} = 1\}$ menos los puntos (x, y) de este conjunto tales que cuando $x = 1$, $0 < y < \frac{1}{2}$.



Sea la métrica d para X, la métrica usual para $\mathbb{R}^2$ restringido a $X \times X$. Sea μ que denota una función de Whitney para 2^X construida como en el Ejemplo 2.33.

Sean $A_0 = \{(1,0),(1,\frac{1}{2})\}$ y $W = \{K \in 2^X \colon H(A_0, K) < \frac{1}{4}\}$.

Sea $B \in W$ tal que $B \neq A_0$. Como $A_0 \subset N(\frac{1}{4}, B)$, existe un subconjunto de dos elementos B_0 de B tal que $B_0 \neq A_0$ y $B_0 \in W$.

Supongamos $B_0 = \{(1, \frac{1}{2}+r_1),(1,-r_2)\}$ tal que $\mid (1,\frac{1}{2}+r_1) - (1,\frac{1}{2}) \mid = \mid r_1 - \frac{1}{2} \mid < \frac{1}{4}$.

Observemos que:

(1) diám$[A_0] <$ diám$[B_0]$.

Por la manera que $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n, \ldots$ son definidos en el Ejemplo 2.33 y del hecho que A_0 y B_0 son conjuntos de dos elementos, tenemos que:

(2) $\mu_2(A_0) =$ diám$[A_0]$,

(3) $\mu_2(B_0) =$ diám$[B_0]$,

(4) Para cada $n \geq 3$, $\mu_n(A_0) = 0 = \mu_n(B_0)$.

Por (2), (3), (4) y por la fórmula para μ en el Ejemplo 2.33, tenemos:

(5) $\mu(A_0) = \frac{\text{diám}[A_0]}{2}$ y $\mu(B_0) = \frac{\text{diám}[B_0]}{2}$.

Por (1) y (5), resulta que

(6) $\mu(A_0) < \mu(B_0)$.

Como $B_0 \subset B$, tenemos que $\mu(B_0) \leq \mu(B)$. Por (6), tenemos que:

(7) $\mu(A_0) < \mu(B)$.

Sea $t_0 = \mu(A_0)$. Por (7), para todo $B \in W$, tenemos que $B \neq A_0$ y $\mu(A_0) < \mu(B)$ de donde:

(8) $\mu(W) \subset [t_0, \mu(X)]$ y $\mu^{-1}(t_0) \cap W = \{A_0\}$.

Como W es un subconjunto abierto de 2^X, tenemos que A_0 es un punto aislado de $\mu^{-1}(t_0)$.

Luego, $\mu^{-1}(t_0)$ no es conexo.

Por lo tanto, μ no es monótona.

Además, como W es un subconjunto abierto de 2^X y $t_0 \neq 0$, se deduce de (8) y $t_0 \in \mu(W)$, $t_0 \notin Int\mu(W)$ de $[0, \mu(X)]$, que $\mu(W)$ no es un subconjunto abierto de $[0, \mu(X)]$.

Por lo tanto, μ no es una función abierta. □

Pudimos notar que las funciones de Whitney para 2^X, se comportan de manera distinta a $C(X)$.

Teorema 2.35. Si $g\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$ está definida, para cada $[a,b] \in C([0,1])$, por $g([a,b]) = a$, entonces g es continua.

Demostración. Sea $A \in C([0,1])$.

(1) Supongamos que $A = \{a\}$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $\lim A_n = \{a\}$.

Demostremos que $\lim g(A_n) = g(\{a\})$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $A_n \in B_{C([0,1])}(\{a\}, \varepsilon)$. Así, si $n > N$, entonces $H(A_n, \{a\}) < \varepsilon$, es decir, $A_n \subset N(\varepsilon, \{a\})$ y $\{a\} \subset N(\varepsilon, A_n)$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $A_n = [a_n, b_n]$. Si $n > N$, como $a_n \in A_n$, tenemos que $\mid g(A_n) - g(\{a\}) \mid = \mid a_n - a \mid < \varepsilon$. Así, $\lim g(A_n) = g(\{a\})$.

(2) Ahora supongamos que $A = [a, b]$, con $a < b$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $\lim A_n = A$.

Demostremos que $\lim g(A_n) = g(A)$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $A_n \in B_{C([0,1])}(A, \varepsilon)$. Así, si $n > N$, entonces $H(A_n, A) < \varepsilon$, es decir, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ y $A \subset N(\varepsilon, A_n)$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, cada $A_n = [a_n, b_n]$. Como $a_n \in A_n$, existe $p_n \in A$ tal que

$$\mid a_n - p_n \mid < \varepsilon \tag{2.5.1}$$

y existe $q_n \in A_n$ tal que

$$\mid a - q_n \mid < \varepsilon. \tag{2.5.2}$$

(i) Suponemos que $n_1 > N$ y que $0 \leq a_{n_1} - a$. Como $a_{n_1} \leq q_{n_1}$, tenemos que $a_{n_1} - a \leq q_{n_1} - a$. Luego, $\mid a_{n_1} - a \mid \leq \mid q_{n_1} - a \mid$, por (2.5.2), tenemos que $\mid a_{n_1} - a \mid < \varepsilon$.

(ii) Suponemos que $n_2 > N$ y $0 \leq a - a_{n_2}$. Como $a \leq p_{n_2}$, tenemos que $a - a_{n_2} \leq p_{n_2} - a_{n_2}$. Luego, $\mid a - a_{n_2} \mid \leq \mid p_{n_2} - a_{n_2} \mid$, por (2.5.1), tenemos que $\mid a_{n_2} - a \mid < \varepsilon$.

Así, si $n > N$, por caso (i) y (ii), entonces $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$. De donde, $\lim g(A_n) = g(A)$. Por lo tanto, g es continua. $\square$

Veamos que los niveles de Whitney para el intervalo $[0, 1]$ son arcos.

Teorema 2.36. Si $\mu\colon C([0,1]) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu([0,1])$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $[0, 1]$.

Demostración. Sea $\mu\colon C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $t \in [0, \mu(X))$ definimos $f\colon \mu^{-1}(t) \to [0, \mu(X)]$ por $f(A) = \text{mín} A$. Notemos que la función f es la mismísima función g del Teorema 2.35 restringida al nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$. Así, f es continua. Para ver que f es inyectiva, tomemos dos elementos $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $f(A) = f(B)$, luego A y B son de la forma $A = [a, u]$ y $B = [a, v]$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$. Ya que, $\mu(A) = t = \mu(B)$, obtenemos que $A = B$. Por lo tanto, f es inyectiva. Por el Teorema 2.32, $\mu^{-1}(t)$ es compacto, luego f es homeomorfismo sobre su imagen, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $f(\mu^{-1}(t))$. Por el Teorema 2.32, $\mu^{-1}(t)$ es un continuo, luego $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo de $[0, \mu(X)]$. Por el Teorema 2.29, $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado, así $f(\mu^{-1}(t))$ es no degenerado. De modo que $f(\mu^{-1}(t))$ es un subintervalo no degenerado de $[0, \mu(X)]$. Así, $f(\mu^{-1}(t))$ es un arco, y por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es un arco. $\square$

Veamos que los niveles de Whitney para S^1 son homeomorfos a S^1.

Teorema 2.37. Si $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ es la circunferencia unitaria, $\mu\colon C(S^1) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(S^1)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a S^1.

Demostración. Sean $\mu\colon C(S^1) \to [0, \mu(S^1))$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(S^1))$. Para cada $A \in \mu^{-1}(t)$, definimos $f\colon \mu^{-1}(t) \to S^1$ por $f(A) =$ punto medio de A.

Veamos que f es continua. Parametrizamos la circunferencia por $\alpha\colon [0, 2\pi] \to S^1$ definida, para $\ell \in [0, 2\pi]$, por $\alpha(\ell) = (cos\ell, sen\ell)$. Si $B \neq S^1$, sean $P_B = \alpha({t_1}^B)$ y $Q_B = \alpha({t_2}^B)$, donde ${t_1}^B < {t_2}^B$, B es el arco con extremos P_B y Q_B y lo denotaremos por $B = [P_B, Q_B]$. Notemos que la longitud de B, $\ell(B) = \displaystyle\int_{{t_1}^B}^{{t_2}^B} (\sqrt{(-cost)^2 + (sent)^2})\, dt = {t_2}^B - {t_1}^B$. Notar que $f(B) = (cos(\frac{{t_2}^B - {t_1}^B}{2}), sen(\frac{{t_2}^B - {t_1}^B}{2}))$.

Sean $A \in \mu^{-1}(t)$, y $A \neq S^1$. Supongamos que el punto $(1, 0) \notin A$. Sea la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\mu^{-1}(t)$ tales que A_n converge al A. Por demostrar que $f(A_n)$ converge a $f(A)$. Podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(1, 0) \notin A_n$. Como ℓ, la función longitud de arco, es continua, $\ell(A_n)$ converge a $\ell(A)$, es decir, ${t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}$ converge a ${t_2}^A - {t_1}^A$. Así, $f(A_n) = (cos(\frac{{t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}}{2}), sen(\frac{{t_2}^{A_n} - {t_1}^{A_n}}{2}))$ converge a $(cos(\frac{{t_2}^A - {t_1}^A}{2}), sen(\frac{{t_2}^A - {t_1}^A}{2})) = f(A)$. Para cuando $(0, 1) \in A$, se prueba de manera similar. Con todo esto f es continua.

Veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ con $A = [P_A, Q_A]$ y $B = [P_B, Q_B]$ y $\alpha({t_1}^A) = P_A$ y $\alpha({t_2}^A) = Q_A$ con ${t_1}^A < {t_2}^A$ y $\alpha({t_1}^B) = P_B$ y $\alpha({t_2}^B) = Q_B$ con ${t_1}^B < {t_2}^B$. Supongamos $f(A) = f(B)$ y $A \neq B$. Así, $\ell(A) = \ell(B)$. Supongamos $\ell(A) < \ell(B)$, de donde $\frac{\ell(A)}{2} < \frac{\ell(B)}{2}$, luego $\ell([P_A, f(A)]) < \ell([P_B, f(B)]) = \ell([P_B, f(A)]) < \ell([P_B, Q_B])$. De aquí, $P_A \in (P_B, Q_B)$. De manera similar, $Q_A \in (P_B, Q_B)$. Por lo tanto, $A = [P_A, Q_A] \subsetneq [P_B, Q_B] = B$ lo cual es una contradicción, por que $\mu(A) = \mu(B)$. Así, $A = B$, luego f es inyectiva.

Por el Teorema 2.29, $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado, así $f(\mu^{-1}(t))$

es no degenerado. De modo que, $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo no degenerado de S^1. De aquí, $f(\mu^{-1}(t)) \subset S^1$. Sólo basta probar que $S^1 \subset f(\mu^{-1}(t))$ para ver que f es suprayectiva. Sea $p \in S^1$. Sea β es el conjunto que consta de $\{p\}, S^1$ y todos los arcos que tienen a p como punto medio.

$$\beta = \{\{p\}, S^1\} \cup A(p),$$

donde

$$A(p) = \{A \in C(S^1) = A \text{ es un arco con punto medio } p\}.$$

Vamos a parametrizar β como un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S^1. Sea $h_1\colon [0,1] \to C(S^1)$, un arco ordenado que va de $\{p\}$ a S^1. Definimos $h_2\colon h_1 \to \beta$ de la siguiente manera, sea $A \in h_1$, existe $t \in [0,1]$ tal que $h_1(t) = A$. Así que $h_2(A) = B$, donde $B \in \beta$ y longitud de $(B) = t$. Así, $\alpha = h_2 \circ h_1\colon [0,1] \to C(S^1)$ es un arco ordenado de $\{p\}$ a S^1 tal que $\alpha([0,1]) = \beta$. Por el Teorema del Valor Intermedio a $\mu \circ \alpha$, dado $t \in [0, \mu(S^1)]$, existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Así, $\alpha(s)$ es un arco con p como punto medio tal que $\alpha(s) \in \mu^{-1}(t)$. Por tanto, $p = f(\alpha(s)) \in f(\mu^{-1}(t))$. De modo que $S^1 \subset f(\mu^{-1}(t))$. Así, que $f(\mu^{-1}(t)) = S^1$. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a S^1. $\square$

El resultado que sigue fue inspirado para probar los futuros Teoremas 2.39 y 2.40, se puede decir que son nuestras contribuciones originales, hasta donde nosotros sabemos.

Teorema 2.38. Si X y Y son continuos, $\mu\colon C(X) \to [0,\infty)$ es una función de Whitney, $\sigma\colon Y \to X$ es un homeomorfismo, $\mu_1\colon C(Y) \to [0, \mu(X)]$ está definida, para cada $A \in C(Y)$, por $\mu_1(A) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(A)$ y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces ${\mu_1}^{-1}(t)$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$.

Demostración. Para $\sigma\colon Y \to X$ consideremos la función inducida $\widehat{\sigma}\colon C(Y) \to C(X)$. Sea $\mu_1\colon C(Y) \to [0, \mu(X)]$ definida, para cada $A \in C(Y)$, por $\mu_1(A) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(A)$. Tenemos que μ es una función de Whitney, de aquí, μ es continua. Por el Teorema 2.17, $\widehat{\sigma}$ es continua. Luego, μ_1 es una función continua ya que composición de dos funciones continuas es continua. Sea $p \in X$. $\mu_1(\{p\}) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(\{p\}) = \mu(\widehat{\sigma}(\{p\})) = \mu(\sigma(\{p\})) = \mu(\{\sigma(p)\}) = 0$. Sean $A, B \in C(Y)$, tal que $A \subsetneq B$. Así, $\sigma(A) \subset \sigma(B)$. Si $\sigma(A) = \sigma(B)$, entonces $A = \sigma^{-1}(\sigma(A)) = \sigma^{-1}(\sigma(B)) = B$. Por lo tanto, $\sigma(A) \subsetneq \sigma(B)$. Luego, $\mu_1(A) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(A) = \mu(\widehat{\sigma}(A)) = \mu(\sigma(A)) < \mu(\sigma(B)) = \mu(\widehat{\sigma}(B)) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(B) = \mu_1(B)$. Así, μ_1 es una función de Whitney para $C(Y)$. Además, ${\mu_1}^{-1}(t) = (\mu \circ \widehat{\sigma})^{-1}(t) = \widehat{\sigma}^{-1}(\mu^{-1}(t)) = \sigma^{-1}(\mu^{-1}(t))$. Luego, $\sigma(\mu_1^{-1}(t)) = \mu^{-1}(t)$. Por lo tanto, ${\mu_1}^{-1}(t)$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$. □

Los niveles de Whitney para un arco también son arcos.

Teorema 2.39. Si X es un arco, $\mu\colon C(X) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Demostración. Tomemos $\sigma\colon [0,1] \to X$ un homeomorfismo y consideremos la función inducida $\widehat{\sigma}\colon C([0,1]) \to C(X)$. Sea $\mu_1\colon C([0,1]) \to [0, \mu(X)]$ definida, para cada $A \in C([0,1])$, por $\mu_1(A) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(A)$. Como se demostró dentro del Teorema 2.38, μ_1 es una función de Whitney para $C([0,1])$. Sea $t \in [0, \mu(X)]$. Por el Teorema 2.36, tenemos que $\mu_1^{-1}(t)$ es homeomorfo a $[0,1]$. Luego por el Teorema 2.38, $\mu^{-1}(t)$ es un arco. □

Los niveles de Whitney para una curva cerrada simple también son curvas cerradas simples.

Teorema 2.40. Si X es una curva cerrada simple, $\mu\colon C(X) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney y $0 \leq t < \mu(X)$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a X.

Demostración. Tomemos $\sigma\colon S^1 \to X$ un homeomorfismo y consideremos la función inducida $\widehat{\sigma}\colon C(S^1) \to C(X)$. Sea $\mu_1\colon C(S^1) \to [0, \mu(X)]$ definida, para cada $A \in C(S^1)$, por $\mu_1(A) = (\mu \circ \widehat{\sigma})(A)$. Como se demostró dentro del Teorema 2.38, μ_1 es una función de Whitney para $C(S^1)$. Sea $t \in [0, \mu(X)]$. Por el Teorema 2.37, tenemos que $\mu_1^{-1}(t)$ es homeomorfo a S^1. Luego por el Teorema 2.38, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a X. $\square$

Bibliografía

[1] Franco Barragán Mendoza, *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Maestría dirigida por Raúl Escobedo Conde y María de Jesús López Toriz, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla 2007.

[2] Janusz J. Charatonik, *Bosquejo de la historia de la teoría de continuos*, Capítulo 9, del libro *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editores Raúl Escobedo, Sergio Macías y Héctor Méndez, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 31, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[3] Janusz J. Charatonik and Wlodzimierz J. Charatonik, *Lightness of induced mappings*, Tsukuba J. Math., 22, No.1 (1998), 179-192.

[4] Charles O. Christenson and William L. Voxman, *Aspects of Topology*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 39, Marcel Dekker, New York, 1977.

[5] Vianey Cordova Salazar, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Licenciatura dirigida por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 26 de agosto de 2011, http://www.fcfm.buap.mx/secacad/tesisL/VianeyCordovaSalazar.pdf.

[6] Betsy C. Cuevas Martínez, *Propiedades Básicas del n-ésimo Hiperespacio de un Continuo*, Tesis de Licenciatura dirigida por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 22 de junio de 2012, http://www.fcfm.buap.mx/secacad/tesisL/BetsyChristianCuevasMartinez.pdf.

[7] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[8] Alejandro Illanes and Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces : Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.

[9] Alejandro Illanes and Rocio Leonel, *Whitney Equivalent Continua*, Topology Proceedings Vol. 39, pages. 293-315, 2012.

[10] María del Rocío Macías Prado, *Modelos de Hiperespacios*, Tesis de Licenciatura dirigida por David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, agosto de 2013.

[11] Sam B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., ISBN: 0-8247-8659-9, 1992.

[12] Sam B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.

[13] Hassler Whitney, *Regular families of curves, I*, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 18, pages. 275-278, 1932.

Índice alfabético