Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Existencia y No Naturalidad de las Cápsulas Inyectivas

TESIS

que para obtener el grado de:

Licenciado en Matemáticas

presenta:

Marcos Jaziel Antonio Martínez

Director de Tesis:

Ivan Fernando Vilchis Montalvo

Puebla, Pue., Agosto 2022

Agradecimientos

Primeramente, quiero agradecer a mis padres, a mi mamá Isabel que con cariño y paciencia me ha cuidado desde el momento en que nací, su constancia y esfuerzo, aunados a la esperanza que ella siempre ha tenido de ver un mejor futuro para ella y su familia, me llenan de alegría y me hacen sentir muy afortunado. A mi padre Feliciano, que durante estos años ha hecho todo lo posible por ayudarnos a hacer frente a los cambios que con tanta frecuencia hemos vivido como familia, es él quien me ayudó a ser valiente y así buscar siempre el mejor lugar para desarrollarme como persona y como estudiante.

Agradezco a mis hermanas, que tanto he extrañado y que me han brindaron el cariño que necesitaba para poder aprender, a través de su compañía, a ser más tolerante, paciente y observador, cualidades que han sido herramientas indispensables para mi aprendizaje. Siempre serán parte de mis motivos para continuar buscando lo mejor de esta vida.

A mi tía Silvia le agradezco el gran apoyo que me ha brindado para afrontar este desafío al estar tan lejos de casa. Gracias a ella pude expandir mis horizontes y conocer un sinfín de cosas nuevas.

Agradezco a mis amigos de la facultad por su compañerismo, su ayuda y por compartir tantas experiencias juntos. Y de forma especial a Axel Villanueva, uno de mis más grandes amigos, quien ha sido un ejemplo a seguir en muchos aspectos de mi desarrollo personal.

A mi novia Elisa le agradezco profundamente su apoyo en los momentos más complicados de mi carrera, su cariño, su desinteresado amor y su ejemplo como estudiante me permitieron enfocarme en mis deberes académicos y así poder concretar la meta de graduarme.

Le agradezco a mis docentes su tiempo y constancia al impartir los cursos que he tomado. Al profesor Manuel Ibarra por la calidad que se esforzaba en dar a su enseñanza y estar siempre dispuesto a brindar a sus estudiantes ayuda para comenzar nuevos proyectos. Y por supuesto, a mi director de tesis, el Dr. Ivan Vilchis por confiar en mí y brindarme la oportunidad de trabajar bajo su dirección en muchas ocasiones, su guía y ayuda han tenido en mi vida un gran impacto, gracias por ello profesor.

Finalmente, agradezco a mis sinodales, al Dr. César Cejudo, al Dr. José Angoa y al Dr. Agustín Contreras por su revisión de esta tesis y sus observaciones que me han ayudado a mejorarla.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como propósito investigar el concepto de inyectividad en Teoría de Categorías, de forma más precisa: el estudio sobre la existencia y *no naturalidad* de las *cápsulas inyectivas*. Para abordar el tema de la no naturalidad, se abordarán y desarrollarán algunos resultados expuestos en el artículo *Injective hulls are not natural* ([2]); en cambio, para estudiar condiciones que permitan la existencia de cápsulas inyectivas (o de *suficientes cápsulas inyectivas*) se ha tomado como principal referencia a los siguientes artículos: *Injective objects and cogenerating sets* ([38]) y *Essentiality and Injectivity* ([9]).

Este texto está organizado en tres capítulos, de los cuales los primeros dos fueron escritos pensando en brindar al lector las herramientas necesarias para abordar los resultados y demostraciones que se expondrán en el tercero. Para tener un mejor panorama sobre lo que podemos encontrar en cada capítulo podemos considerar lo siguiente:

En el Capítulo 1. se brinda la definición de R-módulo, R-morfismo y se prueban algunos resultados relacionados a los productos y sumas directas de módulos. Se analiza el concepto de *divisibilidad*, se exponen algunos ejemplos de módulos divisibles y se brinda una caracterización de estos requerida para probar que el "p-grupo de Prüfer", denotado por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, es un grupo abeliano divisible. Finalmente se da la definición de sucesión exacta de R-morfismos, la definición de submódulo esencial y se demuestra que si N_1 y N_2 son submódulos esenciales de M_1 y M_2 respectivamente, entonces la suma directa $N_1 \oplus N_2$ es un submódulo esencial de $M_1 \oplus M_2$.

En el Capítulo 2., tomando como base a [1] y [39], se proporcionan algunas definiciones y resultados primordiales para el estudio de la Teoría de Categorías. Se define primeramente lo que es una categoría, así como aquello que la conforma y se demuestran algunas propiedades importantes que cumplen los objetos y morfismos de toda categoría. Posterior a esto, nos centramos en las categorías de módulos R-**Mód**, donde considerando sucesiones exactas de R-morfismos, se demuestra que el funtor $Hom(M,-) : R\text{-}\mathbf{Mód}\to\mathbf{Ab}$ cumple con ser *exacto izquierdo*. Por último se definen el concepto de subcategoría, de transformación natural y de subobjeto, y se demuestran resultados relacionados con fuentes, productos y pozos.

En el tercer y último capítulo, se concentran la mayoría de resultados relacionados a los conceptos de esencialidad e inyectividad que estudiaremos en este texto. Comenzando con la definición de objeto inyectivo, se muestran algunos ejemplos de estos en categorías como **Set** y R-**Mód**, y con ayuda de los resultados del Capítulo 2, se desarrollan proposiciones, como por ejemplo el *Criterio de Baer*, para verificar si un módulo es inyectivo. Se demuestra que el producto de una colección de objetos $\mathcal{H}$-inyectivos también lo es, y con ello y la definición de clase *cogeneradora* tenemos lo necesario para enunciar el Lema 3.3.10, el cual nos dice que una categoría con un $\mathcal{H}$-cogenerador $\mathcal{H}$-inyectivo tiene *naturalmente suficientes $\mathcal{H}$-inyectivos.*

Visto lo anterior, se procede a definir lo que es una extensión o morfismo $\mathcal{H}$-*esencial*, arribando con ello al concepto de cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva. Luego, al preguntarnos si es posible que en un categoría $\mathcal{C}$, las cápsulas inyectivas $(E(A), \iota_A)$ conformen una transformación natural $\iota = (\iota_A)_{A \in \mathcal{C}_0} : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow E$, analizaremos dos ejemplos que nos permitirán suponer que esto no se cumple en general, demostrando posteriormente que aunque las cápsulas inyectivas estén determinadas de forma única, salvo isomorfismo, la respuesta es no, a menos que la situación sea trivial, en el sentido de que todos los objetos fueran $\mathcal{H}$-inyectivos, en cuyo caso el funtor que envía cada objeto A al objeto $E(A)$ de su cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva, estaría dado por el funtor identidad $id_{\mathcal{C}}$.

Finalmente, se analizan los resultados que se nos brindan en los capítulos 2 y 3 de [9] para desarrollar así tres Teoremas sobre inyectividad, los cuales resultan ser de gran importancia para establecer algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una categoría para contar con cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas.

Es importante indicar, como último comentario, que para algunos resultados del texto necesitaremos el Lema de Zorn, que nos dice que "cualquier conjunto (parcialmente) ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene un elemento máximo", por lo que asumiremos como verdadero el Axioma de Elección para Conjuntos; si el lector esta familiarizado con la Teoría de Categorías, podría preguntarse si los resultados expuestos en donde se usa el Axioma de Elección para Conjuntos, se pueden aplicar a colecciones *mas grandes* que un conjunto, como son *clases propias* o *conglomerados*, si este es el caso se le invita a consultar el articulo *Categorial forms of the Axiom of Choice* ([11]), donde podrá encontrar información sobre los puntos a considerar si se desea trabajar con el Axioma de Elección en ese tipo de colecciones.

Capítulo 1

Teoría de Módulos

Para el desarrollo de este capítulo, se ha tomado como referencia a [36], [27] y [21], donde el lector podrá encontrar los conceptos básicos de la Teoría de Anillos y resultados adicionales de la Teoría de Módulos. A menos de que se diga lo contrario, a lo largo del texto al hablar de un anillo R, este será un anillo asociativo con uno.

1.1. R-Módulos

Definición 1.1.1. Sea R un anillo. Se define lo siguiente:

1. Un *R-módulo izquierdo* es un grupo aditivo abeliano M equipado con una función $R \times M \to M$ (usualmente llamada *multiplicación escalar*), denotada por $(r, m) \mapsto rm$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $m, m' \in M$ y $r, r' \in R$:

   a) $r(m + m') = rm + rm'$;

   b) $(r + r')m = rm + r'm$;

   c) $(rr')m = r(r'm)$;

   d) $1_R m = m$.

2. Un *R-módulo derecho* es un grupo aditivo abeliano M equipado con una función $M \times R \to M$ denotada por $(m, r) \mapsto mr$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $m, m' \in M$ y $r, r' \in R$:

   a) $(m + m')r = mr + m'r$;

   b) $m(r + r') = mr + mr'$;

   c) $m(rr') = (mr)r'$;

   d) $m1_R = m$.

Observaciones. 1. Un R-módulo izquierdo M en ocasiones se denota por ${}_RM$, y a un R-módulo derecho M por M_R.

2. Si un R-módulo izquierdo es a su vez un R-módulo derecho, omitiremos el adjetivo derecho o izquierdo y diremos únicamente que M es un R-módulo. Por lo tanto, si R es un anillo conmutativo, entonces todo R-módulo izquierdo cumple con ser un R-módulo.

Ejemplos 1.1.2.

1. Todo espacio vectorial V sobre un campo k es un k-módulo.

2. Si $\mathbb{Z}$ denota al anillo de los números enteros, entonces todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo.

3. Todo anillo R es un R-módulo sobre si mismo: definamos la multiplicación escalar $R \times R \to R$ como la multiplicación definida en R.

4. Si S es un subanillo de R, entonces R es a su vez un S-módulo izquierdo y un S-módulo derecho, donde la multiplicación escalar esta dada nuevamente por la multiplicación de elementos de R.

Definición 1.1.3. Sean R y S anillos. Diremos que un grupo abeliano M es un (R, S)-*bimódulo*, denotado por

$$_RM_S$$

si M es un R-módulo izquierdo, un S-módulo derecho y las dos multiplicaciones escalares están relacionadas por la siguiente ley asociativa:

$$r(ms) = (rm)s$$

para cada $r \in R$, $m \in M$ y $s \in S$.

Ejemplos 1.1.4.

1. Todo anillo R es un (R, R)-bimódulo, donde las multiplicaciones escalares están dadas por la multiplicación definida en R.

2. Si M es un R-módulo izquierdo (es decir que $M = {}_RM$), entonces debido a que por definición M es un grupo abeliano, se tiene que M cumple a su vez con ser un $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo, es decir que $M = {}_RM_{\mathbb{Z}}$. Similarmente, si N es un R-módulo derecho, entonces N es también un bimódulo ${}_{\mathbb{Z}}N_R$.

Definición 1.1.5. Si R es un anillo y M y N son ambos R-módulos izquierdos (o ambos R-módulos derechos), entonces una función $f : M \to N$ es un R-morfismo si

1. $f(m + m') = f(m) + f(m')$;

2. $f(rm) = rf(m)$

para cualesquiera $m, m' \in M$ y $r \in R$. Diremos además que f es un R-epimorfismo si f cumple con ser una función suprayectiva y un R-monomorfismo si f es una función inyectiva.

Ejemplo 1.1.6. Si R es un campo, entonces todo R-módulo es un espacio vectorial sobre R, y todo R-morfismo es una transformación lineal.

Proposición 1.1.7. Si A, B son R-módulos izquierdos, entonces el conjunto

$$Hom_R(A, B) = \{f : A \to B | f \text{ es un } R\text{-morfismo}\}$$

es un grupo abeliano.

Demostración. Veamos lo siguiente:

1. Existe el morfismo $\widehat{0} : A \to B$ dado por $\widehat{0}(a) = 0_B$ para cada $a \in A$, el cual cumple claramente con ser un R-morfismo de A en B, es decir un elemento de $Hom_R(A, B)$.

2. Para cada $f, g \in Hom_R(A, B)$, el morfismo $(f + g) : A \to B$ dado por $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ cumple también con ser un R-morfismo.

3. Definimos para cada $f \in Hom_R(A, B)$ al morfismo $(-f) : A \to B$ dado por $(-f)(a) = -f(a)$, de esta forma $f + (-f) = \widehat{0} = (-f) + f$.

A través de los puntos anteriores es sencillo comprobar que la suma es asociativa y conmutativa. Por lo tanto $Hom_R(A, B)$ cumple con ser un grupo abeliano. ■

Definición 1.1.8. Si M es un R-módulo izquierdo, entonces un *submódulo* N de M, denotado por $N \leq M$, es un subgrupo aditivo N de M cerrado bajo la multiplicación escalar: $rn \in N$ para toda $n \in N$ y $r \in R$.

Ejemplos 1.1.9.

1. Tanto el módulo $\{0\}$ como M son submódulos de un R-módulo izquierdo (o derecho) M.

2. Si $f : M \to N$ es un R-morfismo, entonces $ker(f) \leq M$ y $im(f) \leq N$, donde

$$ker(f) = \{a \in dom(f) : f(a) = 0\},$$

además si $A \leq N$, entonces $f^{-1}[A] \leq M$.

3. Si $\{S_i : i \in I\}$ es una familia de submódulos de un R-módulo izquierdo M, entonces $\bigcap_{i \in I} S_i$ es un submódulo de M.

Definición 1.1.10. Si N es un submódulo de un R-módulo izquierdo M, entonces el *módulo cociente* es el grupo cociente M/N equipado con la multiplicación escalar:

$$r(m + N) = rm + N.$$

Observaciones. Al R-morfismo $\pi : M \to M/N$ dado por $\pi(m) = m + N$, lo llamaremos morfismo natural.

Definición 1.1.11. Sea R un anillo y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos izquierdos.

1. El *producto directo* $\prod_{i \in I} A_i$ es el R-módulo izquierdo cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de los A_i, es decir, el conjunto

$$\{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f \text{ es función y } f(i) \in A_i \text{ para cada } i \in I\}$$

cuyos elementos suelen ser llamados I-tuplas y denotados por $(a_i)_{i \in I}$ (donde a_i es la *coordenada* i-ésima y $a_i \in A_i$ para cada $i \in I$), o simplemente por (a_i), equipado con la suma y multiplicación escalar siguientes:

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$$
$$r(a_i) = (ra_i)$$

para cada $r \in R$ y $a_i, b_i \in A_i$ con $i \in I$. Para el producto directo se definen también las *proyecciones*

$$\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$$
$$(a_j) \mapsto \pi_i\big((a_j)\big) = a_i$$

es decir que para cada $i \in I$, la imagen de (a_j) bajo la función π_i es igual a la coordenada i-ésima de (a_j).

2. La *suma directa* de los R-módulos A_i, denotada por $\bigoplus_{i\in I} A_i$, es el submódulo de $\prod_{i\in I} A_i$ que consiste de todos los (a_i) cuyas coordenadas a_i son casi todas 0, es decir, todas salvo un número finito de ellas son 0. Para la suma directa se definen las *inclusiones*

$$\mu_i : A_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i$$

donde $\mu_i(a)$ es el elemento (a_j) en $\bigoplus_{i\in I} A_i$ con i-ésima coordenada igual a a, y las demás coordenadas iguales a 0.

Observaciones.

1. Cada elemento $a = (a_i)$ en $\bigoplus_{i\in I} A_i$ se puede expresar de forma única por

$$a = \sum_{i\in I} \mu_i(a_i).$$

2. Si I es un conjunto finito, entonces $\prod_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i$.

Proposición 1.1.12. Sea R un anillo. Dada una suma directa $D = \bigoplus_{i\in I} S_i$ de R-módulos izquierdos, un R-módulo izquierdo M, y una familia $\{f_i : S_i \to M\}_{i\in I}$ de R-morfismos, existe un único R-morfismo $f : D \to M$ que hace conmutar el diagrama siguiente para cada $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} & S_i \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ D \arrow[rr, "f"'] & & M \end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos a $f : D \to M$ por $f((s_i)) = \sum_{i\in I} f_i(s_i)$, esta función esta bien definida ya que por ser (s_i) un elemento de D, se cumple que $\sum_{i\in I} f_i(s_i)$ es una suma de una cantidad finita de elementos distintos de 0. Ahora si $i \in I$ y $s \in S_i$, sea $(t_j) = \mu_i(s)$ y veamos que

$$f\mu_i(s) = f\big(\mu_i(s)\big) = f\big((t_j)\big) = \sum_{j\in I} f_j(t_j)$$

luego, debido a que para cada $j \neq i$ se cumple que $t_j = 0$, entonces para cada $j \neq i$, se cumple que $f_j(t_j) = 0$ (ya que para cada $i \in I$, f_i es un R-morfismo), de lo que se sigue que $\sum_{j\in I} f_j(t_j) = f_i(t_i) = f_i(s)$, obtenido así que $f\mu_i(s) = f_i(s)$. Por lo tanto $f\mu_i = f_i$ para cada $i \in I$.

Para corroborar la unicidad, supongamos que existe otro R-morfismo $\psi : D \to M$ que hace conmutar el diagrama, entonces para cada $(s_i) \in D$ debido a que ψ es un R-morfismo, se cumple que

$$\psi((s_i)) = \psi\Big(\sum_{i\in I} \mu_i(s_i)\Big) = \sum_{i\in I} \psi(\mu_i(s_i)) = \sum_{i\in I} \psi\mu_i(s_i) = \sum_{i\in I} f_i(s_i) = f((s_i)).$$

Obteniendo así que $\psi = f$. ■

Para la siguiente definición debemos tomar en cuenta que el concepto de divisibilidad es definido de maneras distintas en la literatura, como ejemplos véase [36], [17] y [26] (páginas. 496, 180 y 15 respectivamente), por lo cual, intentado abordar una mayor cantidad de posibilidades, en la siguiente definición se considerarán no solo a los anillos que cumplan con ser *dominios*:

Definición 1.1.13. Sea R un anillo y D un R-módulo izquierdo. Si $d \in D$ y $r \in R$, diremos que d es *divisible* por r si existe algún elemento $d' \in D$ que cumpla que $d = rd'$; además, diremos que D es divisible si para cada $d \in D$ y $r \in R \setminus \{0\}$ no divisor de cero, se cumple que d es divisible por r.

Ejemplo 1.1.14. El grupo aditivo de números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$, es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{Z}$ con $r \neq 0$, entonces existe $\frac{a}{rb} \in \mathbb{Q}$ que cumple que

$$r\left(\frac{a}{rb}\right) = \frac{ra}{rb} = \frac{a}{b}.$$

Es importante observar que si R es un dominio, se cumple entonces que todo elemento $r \in R$ distinto de cero, cumple con no ser un divisor de cero. Tomando en consideración lo anterior veamos lo siguiente:

Proposición 1.1.15. Sea R un dominio.

1. Todo producto directo y suma directa de R-módulos izquierdos divisibles es divisible.

2. Todo módulo cociente de un R-módulo izquierdo divisible es divisible.

Demostración.

1. Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos izquierdos divisibles y $r \in R$ con $r \neq 0$. Si $(a_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces sea $J \subseteq I$ el conjunto de índices en donde (a_i) tiene coordenadas no cero, es decir que $j \in J$ si y sólo si el elemento j-ésimo a_j de (a_i), cumple que $a_j \neq 0$.

   Debido a que $J \subseteq I$, se cumple en particular que para cada $j \in J$, el R-módulo M_j es divisible, de esto se sigue que para cada $j \in J$, existe $m_j \in M_j$ que cumple que $a_j = rm_j$. Definamos ahora una función $g : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ por:

$$g(i) = \begin{cases} m_i & si \quad i \in J \\ \\ 0 & si \quad i \notin J \end{cases}$$

   Esta función cumple con ser un elemento de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ (ya que en este caso J es un conjunto finito por la manera en que se ha definido), y además podemos ver que para cada $i \in I$ se cumple lo siguiente:

   - Si $j \in J$, entonces $(a_i)(j) = a_j = rm_j = rg(j)$.
   - Si $j \in I \setminus J$, entonces $(a_i)(j) = 0 = r0 = rg(j)$

Obteniendo así que $(a_i) = rg$ y por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es divisible.

La demostración de que el producto directo de R-módulos izquierdos es divisible es similar a la realizada para la suma directa considerando a $J = I$.

2. Sea M un R-módulo izquierdo y $r \in R$ con $r \neq 0$. Observemos primero que si N es un R-módulo izquierdo y $f : M \to N$ es un R-epimorfismo, entonces si $n \in N$, existe $m \in M$ que cumple que $f(m) = n$, luego por ser M divisible, existe $m' \in M$ de tal forma que $m = rm'$; así

$$n = f(m) = f(rm') = rf(m')$$

con $f(m') \in N$. Arribando con esto a que N es un R-módulo izquierdo divisible.

Por lo tanto, debido a que para cada módulo cociente M/N de M, el morfismo natural $\pi : M \to M/N$ es un R-epimorfismo, se cumple que todo módulo cociente de M es divisible.

■

La siguiente caracterización de los módulos divisibles nos permitirá demostrar en el Ejemplo 1.1.17 que el grupo cociente $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano divisible.

Proposición 1.1.16. Sea R un dominio. Un R-módulo izquierdo M es divisible si y sólo si para cada $r \in R$ distinto de cero, se cumple que $rM = M$.

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea $r \in R$ un elemento no cero. Si M es un R-módulo izquierdo divisible, entonces claramente $rM \subseteq M$, además si $m \in M$, entonces existe $n \in M$ tal que $rn = m$, es decir que $m = rn \in rM$, por lo que $M \subseteq rM$. Por lo tanto $rM = M$; como la elección de r fue arbitraria esto se cumple para todo elemento no cero $r \in R$.

$\Leftarrow$] Si $rM = M$ para cada $r \in R$ distinto de cero, entonces si $m \in M$ y $s \in R$ con $s \neq 0$, tenemos que $m \in M = sM$, por lo que existe un elemento $n \in M$ tal que $m = sn$. Por lo tanto M es divisible. ■

Ejemplo 1.1.17. Dado un número entero primo p, el grupo cociente $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano divisible (visto como $\mathbb{Z}$ módulo), donde

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{p^n} \ \mid \ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es decir el conjunto de elementos de $\mathbb{Q}$ cuyo denominador es una potencia de p (incluido $p^0 = 1$):

Lo primero que debemos corroborar es que $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}$ es un grupo abeliano, para esto veamos que si $\frac{a}{p^n}, \frac{b}{p^m} \in \mathbb{Q}_p$, entonces

$$\frac{a}{p^n} - \frac{b}{p^m} = \frac{ap^m - bp^n}{p^n p^m} = \frac{ap^m - bp^n}{p^{n+m}} \in \mathbb{Q}_p,$$

obteniendo así que $\mathbb{Q}_p$ es en efecto un subgrupo aditivo de $\mathbb{Q}$. Además debido a que claramente $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}_p$, entonces $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ cumple con ser un grupo abeliano. Ahora sea $E = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$. Si $\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in E$, entonces por la manera en que definimos la multiplicación escalar para los módulos cociente (ver definición 1.1.10) se cumple lo siguiente:

- si $n = 0$, entonces existe $\frac{a}{p} + \mathbb{Z} \in E$ tal que $p(\frac{a}{p} + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z} = \frac{a}{1} + \mathbb{Z} = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}$;
- si $n > 0$, entonces existe $\frac{a}{p^{n-1}} + \mathbb{Z} \in E$ tal que $p(\frac{a}{p^{n-1}} + \mathbb{Z}) = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}$.

obteniendo en ambos casos que $\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in pE$. Por lo tanto $E \subseteq pE$ y consecuentemente $E = pE$. Además si q es un número primo distinto de p y $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in E$, entonces

$$p^n x = p^n \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0$$

y debido a que q y p^n son primos relativos, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $qa + p^n b = 1$, por lo que

$$q(ax) = qax + (0)b = qax + p^n bx = (qa + p^n b)x = (1)x = x$$

obteniendo una vez mas que $x \in qE$, por lo cual $E \subseteq qE$ y por lo tanto $qE = E$. Finalmente si $z \in \mathbb{Z}$ con $z \neq 0$, entonces si sucede que $z < -1$, por el Teorema Fundamental de la Aritmética para $-z > 1$, existe una cantidad finita de números primos $q_1, q_2, ..., q_m$ de tal forma que $q_1 q_2 \cdots q_m = -z$, por lo que

$$\begin{aligned} zE = -zE = [q_1 q_2 \cdots q_m]E &= [q_1 q_2 \cdots q_{m-1}]q_m E \\ &= [q_1 q_2 \cdots q_{m-1}]E = \cdots = E. \end{aligned}$$

De manera análoga si $z > 1$, se obtiene que $zE = E$ y como claramente para $z = 1$ o $z = -1$ se cumple que $zE = E$, entonces $zE = E$ para todo elemento $z \in \mathbb{Z}$ distinto de cero, luego por la Proposición 1.1.16 se cumple que $E = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible.

El grupo $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ mencionado en el ejemplo anterior, suele denotarse por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y es conocido como el "p-grupo de Prüfer".

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.2.1. Una sucesión de R-morfismos y R-módulos izquierdos

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

es llamada una *sucesión exacta* si $im(f_{n+1}) = ker(f_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observaciones.

1. No es necesario escribir un nombre para los R-morfismos $\{0\} \xrightarrow{f} A$ o $B \xrightarrow{g} \{0\}$, debido a que en cualquiera de los dos casos, tales morfismos son únicos: tanto f como g son el *R-morfismo cero* (al que en ocasiones se suele denotar por $\widehat{0}$), es decir el morfismo que cumple que $g(y) = 0$ para toda $y \in dom(g)$.
2. Usualmente denotaremos por 0 al R-módulo $\{0\}$ mencionado en el punto anterior.

Proposición 1.2.2.

1. Una sucesión $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacta si y sólo si f es una función inyectiva.
2. Una sucesión $B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta si y sólo si g es suprayectiva.

3. Una sucesión $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ es exacta si y sólo si f es un isomorfismo.

Demostración.

1. Si $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es una sucesión exacta, entonces debido a que la imagen de la función $0 \to A$, cumple con ser $\{0\}$, por tratarse de una sucesión exacta, tenemos que $ker(f) = \{0\}$, lo que implica que f es una función inyectiva.

   En cambio si f es una función inyectiva, entonces la sucesión $ker(f) \to A \xrightarrow{f} B$ es una sucesión exacta ya que por ser f inyectiva, tenemos que $ker(f) = \{0\} = 0$.

2. Si $B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión exacta, entonces $im(g) = ker(\widehat{0}) = C$, por lo que g es una suprayectiva. En cambio si g es suprayectiva se cumple que $im(g) = C$ y a su vez $C = ker(\widehat{0})$, por lo que $B \xrightarrow{g} C \to 0$ cumple con ser una sucesión exacta.

3. Se sigue de los dos puntos anteriores.

■

1.3. Extensiones esenciales.

Definición 1.3.1. Sea R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Si N es un submódulo de M, diremos que M es una *extensión esencial* de N si para cada submódulo no cero H de M, se cumple que $N \cap H \neq 0$. Diremos también que, en este caso N es un *submódulo esencial* de M, situación que denotaremos por $N \leq_e M$.

Observaciones.

1. Todo R-módulo izquierdo M tiene siempre una extensión esencial debido a que $M \leq_e M$.

2. Si para un R-módulo izquierdo M, sucede que $0 \leq_e M$, entonces $M = 0$.

De forma mas general, para un R-módulo izquierdo M, habitualmente usaremos la expresión "extensión esencial de M" para referirnos a algún R-monomorfismo $f : M \to N$ que cumpla que $f[M] \leq_e N$; al morfismo f se le suele llamar monomorfismo esencial.

Ejemplos 1.3.2.

1. Si vemos a $\mathbb{Z}$ como un módulo sobre si mismo, entonces para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se cumple que $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$:

   Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $M \leq \mathbb{Z}$ con $M \neq 0$, entonces existe un elemento $m \in M \leq \mathbb{Z}$ distinto de cero, luego $nm \in M$ y $nm \in n\mathbb{Z}$, es decir que $n\mathbb{Z} \cap M \neq 0$.

2. Si vemos a $\mathbb{Q}$ como un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se cumple que $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$:

   Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $M \leq \mathbb{Q}$ con $M \neq 0$, entonces existe un elemento $m \in M$ tal que $m \neq 0$, en particular $m \in \mathbb{Q}$, por lo que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0 \neq b$ tal que $\frac{a}{b} = m$. Luego por ser M un submódulo de $\mathbb{Q}$, tenemos que $na = n(b(\frac{a}{b})) = nb(\frac{a}{b}) \in M$ y claramente $na \in n\mathbb{Z}$. Por lo tanto $n\mathbb{Z} \cap M \neq 0$.

Proposición 1.3.3. Sea R un anillo. Si $f : M \to N$ es un R-morfismo de R-módulos izquierdos y $A \leq_e N$, entonces $f^{-1}[A] \leq_e M$.

Demostración. Supongamos que $f^{-1}[A]$ no es un submódulo esencial de M, entonces existe un submódulo $B \neq 0$ de M, tal que $f^{-1}[A] \cap B = 0$, luego como $ker(f) \subseteq f^{-1}[A]$, entonces $ker(f) \cap B = 0$, lo cual nos indica que si $x, y \in B$ con $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, ya que en caso contrario tendríamos que

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$$

obteniendo con esto que $x - y \in ker(f) \cap B$, lo cual es una contradicción debido a que $x - y \neq 0$; por lo tanto $f|_B : B \to f[B]$ es un isomorfismo.

Se sigue que $f[B]$ es un submódulo no cero de N y debido a que $f^{-1}[A] \cap B = 0$, si $x \in A \cap f[B]$, entonces existe $b \in B$ tal que $f(b) = x$ y como $x \in A$, entonces $b \in f^{-1}[A]$, por lo que $b \in f^{-1}[A] \cap B$, es decir que $b = 0$, lo que indica que $x = f(b) = f(0) = 0$. Así $A \cap f[B] = 0$, lo cual es una contradicción ya que por ser A un submódulo esencial de N debe cumplir se que $A \cap f[B] \neq 0$. ■

Proposición 1.3.4. Sea R un anillo. Si M es un R-módulo izquierdo y se tiene que $N_1 \leq_e M_1 \leq M$ y $N_2 \leq_e M_2 \leq M$, entonces:

1. $N_1 \cap N_2 \leq_e M_1 \cap M_2$.

2. $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$.

Demostración.

1. Si H es un submódulo no cero de $M_1 \cap M_2$, entonces H es en particular un submódulo no cero de M_1 y de M_2, luego debido a que $N_1 \leq_e M_1$, se cumple que $H \cap N_1 \leq M_1$ y $H \cap N_1 \neq 0$, de igual forma como $N_2 \leq_e M_2$ y $H \cap N_1 \leq H \leq M_2$, tenemos que $H \cap (N_1 \cap N_2) = (H \cap N_1) \cap N_2 \neq 0$. Por lo tanto, $N_1 \cap N_2 \leq_e M_1 \cap M_2$.

2. Si consideramos a las proyecciones $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \to M_1$ y $\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \to M_2$, se cumple que
$$\pi_1^{-1}[N_1] = N_1 \oplus M_2 \quad \text{y} \quad \pi_2^{-1}[N_2] = M_1 \oplus N_2$$
por lo cual, por la Proposición 1.3.3 tenemos que $N_1 \oplus M_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ y a su vez $M_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$. Se sigue por el punto 1. que
$$(N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2) \leq_e (M_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus M_2). \tag{1.1}$$
Finalmente veamos que $N_1 \oplus N_2 = (N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2)$:
   - Si $(n, m) \in (N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2)$, entonces $(n, m) \in N_1 \oplus M_2$ y $(n, m) \in M_1 \oplus N_2$, por lo cual $n \in N_1$ y $m \in N_2$. Por lo tanto $(n, m) \in N_1 \oplus N_2$.
   - En cambio si $(n, m) \in N_1 \oplus N_2$, entonces debido a que $N_1 \leq_e M_1$ y a que $N_2 \leq_e M_2$, se cumple que $n \in M_1$ y a su vez $m \in M_2$. Se sigue que $(n, m) \in N_1 \oplus M_2$ y $(n, m) \in M_1 \oplus N_2$. Obteniendo así que $(n, m) \in (N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2)$.

   Por lo tanto, de 1.1 se sigue que $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$.

■

Capítulo 2

Teoría de Categorías

2.1. Categorías

Definición 2.1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ está dada por una clase de *objetos* $\mathcal{C}_0$ y una clase de *flechas* $\mathcal{C}_1$ (también llamadas *morfismos*) que tienen la siguiente estructura:

1. Cada flecha tiene un *dominio* y un *codominio* que son objetos de $\mathcal{C}$; se escribe $f : X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$ si X es el dominio de la flecha f, y Y su codominio. También se escribe $X = dom(f)$ e $Y = cod(f)$;

2. Para cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, el conjunto de flechas con dominio A y codominio B es denotado por $hom(A, B)$ y sus elementos son llamados $\mathcal{C}$-morfismos de A en B;

3. Dadas dos flechas f y g tales que $cod(f) = dom(g)$, la composición de f y g, escrita gf, está definida y tiene dominio $dom(f)$ y codominio $cod(g)$:

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \mapsto (X \xrightarrow{gf} Z)$$

4. La composición es asociativa, es decir: dadas $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, $h(gf) = (hg)f$;

5. Para cada objeto X hay una flecha *identidad* $id_X : X \to X$, que satisface $id_X g = g$ para cada $g : Y \to X$ y $f id_X = f$ para cada $f : X \to Y$.

Observaciones. 1. Si se trata con más de una categoría, usaremos subíndices (como $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$) para aclarar a que categoría hacemos referencia.

2. La clase de todos los $\mathcal{C}$-morfismos, denotada por $Mor(\mathcal{C})$ está definida como la unión de todos los conjuntos $hom(A, B)$ en $\mathcal{C}$.

3. Si X y Y son objetos de $\mathcal{C}$, denotaremos también por $\mathcal{C}(X, Y)$ al conjunto de morfismos mencionado en el punto 2 de la Definición 2.1.1.

Ejemplos 2.1.2. Algunas categorías de las que se hablara en este texto son:

- **Set** que tiene como objetos a los conjuntos y los morfismos entre objetos son las funciones entre conjuntos.

- **Pos** cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones monótonas.
- **Field** que tiene como objetos a campos y como flechas a los morfismos entre estos.
- **Grp** tiene como objetos a grupos y como flechas a los morfismos de grupos.
- **Ab** es la categoría de grupos abelianos y morfismos de grupos.
- La categoría vacía, que es la categoría sin objetos y, por tanto, sin morfismos, es decir, la categoría cuya clase de objetos es el conjunto vacío. Esta categoría suele denotarse por **0**.
- Clases preordenadas vistas como categorías: Cada clase preordenada, es decir cada par $(X, \leq)$, donde X es una clase y $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva en X, puede se considerada como una categoría, cuyos objetos son los elementos de X, sus morfismos están dados por

$$hom(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{si} \quad x \leq y \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  y la composición de morfismos está determinada por $(y,z)(x,y) = (x,z)$.

Hablaremos también de categorías que se construyen a partir de categorías ya definidas, un ejemplo de esto son las *categorías rebanadas* que se definen de la siguiente forma:

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y C un objeto de $\mathcal{C}$. La *categoría rebanada* $\mathcal{C}/C$ tiene como objetos a todos los morfismos de la categoría $\mathcal{C}$ cuyo codominio es C y un morfismo de $g : D \to C$ a $h : E \to C$ en $\mathcal{C}/C$ es un morfismo $k : D \to E$ en $\mathcal{C}$ que cumple que $hk = g$, es decir que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "g"'] & & E \arrow[dl, "h"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.1.4. Para las flechas de una categoría $\mathcal{C}$ se define lo siguiente:

1. Llamamos a una flecha $f : A \to B$ *mono* (o monomorfismo), si para cualquier otro objeto C y para cualquier par de flechas $g, h : C \to A$, $fg = fh$ implica $g = h$. Se denotará por Mono($\mathcal{C}$) a la clase de todos los monomorfismos de $\mathcal{C}$.
2. Llamamos a una flecha $f : A \to B$ *epi* (o epimorfismo) si para cualquier par de flechas $g, h : B \to C$, $gf = hf$ implica $g = h$. Denotaremos por Epi($\mathcal{C}$) a la clase de todos los epimorfismos de $\mathcal{C}$.
3. Un morfismo $f : A \to B$ es un *isomorfismo* siempre que exista un morfismo $g : B \to A$ con $gf = id_A$ y $fg = id_B$. Al morfismo g se le llama inversa de f. Se dice que dos objetos A y B en una categoría son isomorfos, lo cual se denota usualmente por $A \cong B$, siempre que exista un isomorfismo $f : A \to B$.

En la categoría **Set** los monomorfismos son exactamente las funciones inyectivas y los epimorfismos coinciden con las funciones suprayectivas; lo mismo sucede en **Pos**, **Grp** y **Ab**. En cambio en la categoría **Field** todo morfismo es un monomorfismo.

Proposición 2.1.5. Si $g_1 : B \to A$ y $g_2 : B \to A$ son inversas de un isomorfismo $f : A \to B$, entonces $g_1 = g_2$.

Demostración. Basta observar que

$$g_1 = id_A g_1 = (g_2 f) g_1 = g_2(f g_1) = g_2 id_B = g_2.$$

■

Por la proposición anterior podemos hablar de *la* inversa de un isomorfismo f, que denotaremos por f^{-1}.

Dos casos importantes que hay que resaltar con respecto a lo que un isomorfismo puede representar (de acuerdo a la categoría que consideremos) son los siguientes:

Ejemplos 2.1.6.

1. Los isomorfismos en las categorías rebanadas. Si $g : D \to C$ y $h : E \to C$ son objetos de una categoría $\mathcal{C}/C$, entonces un isomorfismo de g a h es un isomorfismo $k : D \to E$ en $\mathcal{C}$, que hace conmutar a los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "g"'] & & E \arrow[dl, "h"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[dr, "g"'] & & E \arrow[ll, "k^{-1}"'] \arrow[dl, "h"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

2. Si consideramos a una clase preordenada $(X, \leq)$ como una categoría, entonces para cualesquiera dos objetos x y y, se cumple que $x \cong y$ si y sólo si $x \leq y$ y $y \leq x$:

   Si $x \cong y$, entonces claramente $x \leq y$ y $y \leq x$. En cambio, si sucede que $x \leq y$ y $y \leq x$, tenemos lo siguiente:

$$(y, x)(x, y) = (x, x) = id_x \quad \text{y} \quad (x, y)(y, x) = (y, y) = id_y$$

   por lo que tanto (x, y) como (y, x) son isomorfismos.

Estos ejemplos vistos nos brindarán ayuda al intentar definir una relación de orden, como lo haremos en el Capítulo 3, en cierta clase de morfismos, resaltando que en ese caso veremos a los morfismos como objetos, tal como sucede en las categorías rebanadas.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, diremos que:

1. Un monomorfismo f es extremo siempre que satisfaga la siguiente condición: si $f = gh$, con h un epimorfismo, entonces h cumple con ser un isomorfismo.

2. Un epimorfismo f es extremo siempre que satisfaga la siguiente condición: si $f = gh$, con g un monomorfismo, entonces g cumple con ser un isomorfismo.

Proposición 2.1.8. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos:

1. Si gf es un monomorfismo extremo entonces f también lo es.

2. Si gf es un epimorfismo extremo entonces g también lo es.

Demostración.

1. Si gf es un monomorfismo extremo y $f = hk$ con k un epimorfismo, entonces $gf = g(hk) = (gh)k$, implica que k es un isomorfismo.

2. Si gf es un epimorfismo extremo y $g = hk$ con h un monomorfismo, entonces $gf = (hk)f = h(kf)$, implica que h es un isomorfismo.

■

Proposición 2.1.9. Para cualquier morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$, son equivalentes:

1. f es un isomorfismo.

2. f es un monomorfismo extremo y un epimorfismo.

Demostración. Veamos por separado ambas implicaciones:

1.⇒ 2. Si f es un isomorfismo, entonces f es un monomorfismo y un epimorfismo, por lo cual bastará comprobar que f es un monomorfismo extremo:

Si $f = gh$ con $h : A \to C$ un epimorfismo y $g : C \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces f^{-1} existe y se cumple que $id_A = f^{-1}f = f^{-1}(gh) = (f^{-1}g)h$, luego $[h(f^{-1}g)]h = h[(f^{-1}g)h] = hid_A = h = id_C h$, y por ser h un epimorfismo esto implica que $h(f^{-1}g) = id_C$. Por lo tanto h es un isomorfismo.

2.⇒ 1. Si f es un monomorfismo extremo y un epimorfismo, entonces $f = id_B f$ implica que f es un isomorfismo. ■

Definición 2.1.10. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, la *categoría dual* (u opuesta) de $\mathcal{C}$, es la categoría $\mathcal{C}^{op}$ que tiene los mismos objetos que la categoría $\mathcal{C}$, pero para cada par A, B de objetos de $\mathcal{C}^{op}$ se cumple que $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$, (es decir que excepto por su dirección, tiene los mismos morfismos que $\mathcal{C}$), y además $f \circ^{op} g = g \circ f$, donde $\circ$ denota la composición en $\mathcal{C}$.

Observaciones. Para cada morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$, utilizaremos la notación $\overline{f}$ para denotar al morfismo opuesto de f, es decir el morfismo $\overline{f} : B \to A$ en $\mathcal{C}^{op}$. De esta forma si $\overline{f} : A \to B$ y $\overline{g} : B \to C$, para la composición en $\mathcal{C}^{op}$ se tiene que $\overline{g}\,\overline{f} = \overline{fg}$.

Ejemplos 2.1.11.

- Si $A = (X, \leq)$ es una clase preordenada, considerada como categoría, entonces $A^{op} = (X, \geq)$.

- Si $A = (M, \circ, e)$ es un monoide, considerado como una categoría, entonces $A^{op} = (M, \hat{\circ}, e)$, donde $a \hat{\circ} b = b \circ a$.

2.2. Funtores

Definición 2.2.1. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consta de operaciones $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ y $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$, tal que para cada $f : X \to Y$, $F_1(f) : F_0(X) \to F_0(Y)$ y:

1. Para $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $F_1(gf) = F_1(g)F_1(f)$;
2. $F_1(id_x) = id_{F_0(X)}$ para cada $X \in \mathcal{C}_0$.

Diremos además que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es:

a) Una *inmersión* si F es inyectivo sobre morfismos.

b) *Pleno* si para cualesquiera dos objetos A, B de $\mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ es una función suprayectiva.

c) *Fiel* si la función del punto anterior es siempre inyectiva.

d) Un *isomorfismo* si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. Se dice que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas siempre que exista un isomorfismo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Observaciones.

1. Los funtores F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ se denotarán también por $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$. Con frecuencia usaremos las notaciones simplificadas $F(A)$ y $F(f)$ en lugar de $F_1(A)$ y $F_2(f)$ respectivamente. De hecho, suele denotarse la acción sobre ambos objetos y morfismos de manera simultanea a través de
$$F(A \xrightarrow{f} B) = F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$
2. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un isomorfismo, entonces el funtor G mencionado en el inciso d) de la definición anterior es el único con la propiedad mencionada, por lo que se denotara por F^{-1}, la demostración de este echo se realiza de manera análoga a la vista en la Proposición 2.1.5.
3. De manera frecuente es posible encontrar el termino "funtor contravariante" en la literatura. Lo que en la definición anterior definimos como funtor suele ser llamado entonces "funtor covariante". Un funtor *contravariante* F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ invierte la dirección de las flechas, por lo que si $f : A \to B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces $F(f)$ es un morfismo de $F(B)$ a $F(A)$ en $\mathcal{D}$. En otras palabras, un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es un funtor de $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ (o equivalentemente, de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}^{op}$).

Ejemplos 2.2.2.

1. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, existe el *funtor identidad* $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por
$$id_{\mathcal{C}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$$
2. Para cualesquiera dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y cualquier objeto B de $\mathcal{D}$, existe el *funtor constante* $F_B : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con valor B, definido por
$$F_B(X \xrightarrow{f} Y) = B \xrightarrow{id_B} B$$

3. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto cualquiera A de $\mathcal{C}$, existe el funtor $Hom(A,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ definido de la siguiente forma

$$Hom(A,-)(B \xrightarrow{f} C) = hom(A,B) \xrightarrow{Hom(A,f)} hom(A,C)$$

donde $Hom(A,f)(g) = fg$.

4. De manera similar al ejemplo anterior, para cualquier categoría $\mathcal{C}$ y un objeto arbitrario A de $\mathcal{C}$, se define el funtor $Hom(-,A) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ determinado por

$$Hom(-,A)(B \xrightarrow{\overline{f}} C) = hom_{\mathcal{C}}(B,A) \xrightarrow{Hom(\overline{f},A)} hom_{\mathcal{C}}(C,A)$$

donde $Hom(\overline{f},A)(g) = gf$.

Ejemplo 2.2.3. El funtor potencia $\mathcal{P} : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}$ definido por

$$\mathcal{P}(A \xrightarrow{\overline{f}} B) = \mathcal{P}A \xrightarrow{\mathcal{P}\overline{f}} \mathcal{P}B$$

donde $\mathcal{P}A$ es el conjunto potencia de A, y para cada $X \subseteq A$, $\mathcal{P}\overline{f}(X)$ es la preimagen $f^{-1}[X]$ de X bajo la función $f : B \to A$, es un ejemplo de un funtor que es una inmersión pero no es pleno.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{P}$ definido de esta forma es efectivamente un funtor:

- Debido a que para cualquier conjunto A, el conjunto potencia de A es un conjunto, entonces $\mathcal{P}$ manda objetos en objetos.

- Si $\overline{f} : A \to B$ en $\mathbf{Set}^{op}$, entonces $f : B \to A$ es función, por lo que si $X \subseteq A$, entonces $f^{-1}[X] \subseteq B$, por lo que $f^{-1}[X] \in \mathcal{P}B$, obteniendo asi que $dom(\mathcal{P}\overline{f}) = \mathcal{P}A$. Además, si $\mathcal{P}\overline{f}(X) = B_1$ y $\mathcal{P}\overline{f}(X) = B_2$, entonces $f^{-1}[X] = B_1$ y $f^{-1}[X] = B_2$, por lo que $B_1 = B_2$. Por lo tanto $\mathcal{P}\overline{f}$ es en efecto una función bien definida. Por lo tanto $\mathcal{P}$ envía morfismos en morfismos.

- Si $\overline{f} : A \to B$ y $\overline{g} : B \to C$, entonces $dom(\mathcal{P}\overline{g}\overline{f}) = \mathcal{P}(A) = dom(\mathcal{P}\overline{g}\mathcal{P}\overline{f})$ ya que $\mathcal{P}A \xrightarrow{\mathcal{P}\overline{f}} \mathcal{P}B \xrightarrow{\mathcal{P}\overline{g}} \mathcal{P}C$. Luego, si $X \in \mathcal{P}A$, entonces $\mathcal{P}\overline{g}\overline{f}(X) = \mathcal{P}\overline{fg}(X) = (fg)^{-1}[X] = g^{-1}\big[f^{-1}[X]\big] = \mathcal{P}\overline{g}(f^{-1}[X]) = \mathcal{P}\overline{g}(\mathcal{P}\overline{f}(X)) = \mathcal{P}\overline{g}\mathcal{P}\overline{f}(X)$. Por lo tanto $\mathcal{P}\overline{g}\overline{f} = \mathcal{P}\overline{g}\mathcal{P}\overline{f}$.

- Para cada A objeto de $\mathbf{Set}^{op}$ se cumple que $dom(\mathcal{P}\overline{id_A}) = \mathcal{P}A = dom(id_{\mathcal{P}A})$, y si $X \subseteq A$, entonces $\mathcal{P}\overline{id_A}(X) = id_A^{-1}[X] = X = id_{\mathcal{P}A}(X)$. Por lo tanto $\mathcal{P}id_A = id_{\mathcal{P}A}$.

Para ver ahora que es una inmersión, sean $\overline{f} : A \to B$ y $\overline{g} : C \to D$ dos morfismos distintos en $\mathbf{Set}^{op}$, es decir $f : B \to A$ y $g : D \to C$ funciones distintas en $\mathbf{Set}$. Observemos lo siguiente:

- Si sucede que $dom(f) = B \neq D = dom(g)$, entonces $cod(\mathcal{P}\overline{f}) = \mathcal{P}B \neq \mathcal{P}D = cod(\mathcal{P}\overline{g})$.

- Si $cod(f) = A \neq C = cod(g)$, entonces $dom(\mathcal{P}\overline{f}) = \mathcal{P}A \neq \mathcal{P}C = dom(\mathcal{P}\overline{g})$.

- Si $A = C$, $B = D$ y existe $x \in B$ tal que $f(x) \neq g(x)$, entonces $x \in f^{-1}\big[\{f(x)\}\big]$ y sin embargo $x \notin g^{-1}\big[\{f(x)\}\big]$ ya que de ser así, entonces $g(x) = f(x)$ lo que es una contradicción. De esto se sigue que existe $Y = \{f(x)\} \subseteq A$ tal que $\mathcal{P}\overline{f}(Y) \neq \mathcal{P}\overline{g}(Y)$.

Obteniendo en los tres casos posibles que $\mathcal{P}\overline{f} \neq \mathcal{P}\overline{g}$. Por lo tanto si $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son morfismos distintos en $\mathbf{Set}^{op}$, entonces $\mathcal{P}\overline{f} \neq \mathcal{P}\overline{g}$, comprobando así que $\mathcal{P}$ es una inmersión.

Por último, veamos que $\mathcal{P}$ no es pleno, para esto sean $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$ objetos de $\mathbf{Set}^{op}$ y consideremos a la función $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ (en $\mathbf{Set}(\mathcal{P}A, \mathcal{P}B)$) definida por

$$h(X) = \begin{cases} B & si \quad X = \emptyset \\ \\ \emptyset & si \quad X = A \end{cases}$$

La función h está bien definida ya que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$. Supongamos ahora que existe $\overline{f} : A \to B$ en $\mathbf{Set}^{op}(A, B)$ tal que $\mathcal{P}\overline{f} = h$, entonces $\mathcal{P}\overline{f}(\emptyset) = h(\emptyset) = B$, por lo que $f^{-1}[\emptyset] = B = \{y\}$ lo que es una contradicción ya que $y \in f^{-1}[\emptyset]$ implica que existe $z \in \emptyset$ tal que $f(y) = z$. Por lo tanto no existe $\overline{f}$ en $\mathbf{Set}^{op}(A, B)$ tal que $\mathcal{P}\overline{f} = h$, obteniendo así que $\mathcal{P}$ no es pleno. ■

Proposición 2.2.4. Todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva isomorfismos, es decir que si $f : A \to B$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Demostración. Si $f : A \to B$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces existe $f^{-1} : B \to A$ de tal forma que $ff^{-1} = id_B$ y $f^{-1}f = id_A$, luego por ser F un funtor se cumple que:

$$F(f)F(f^{-1}) = F(ff^{-1}) = F(id_B) = id_{F(B)}$$

y a su vez

$$F(f^{-1})F(f) = F(f^{-1}f) = F(id_A) = id_{F(A)}$$

obteniendo así que $F(f)$ es en efecto un isomorfismo. ■

2.3. Categorías de módulos

Definición 2.3.1. Para cualquier anillo R, denotamos por R-**Mód** a la categoría de R-módulos izquierdos y R-morfismos entre ellos; similarmente denotamos por **Mód**-R a la categoría de R-módulos derechos.

Observación. En una categoría R-**Mód** se cumple que para cualesquiera dos objetos M, N de esta categoría, el conjunto de morfismos $hom(M, N)$ es exactamente el conjunto $Hom_R(M, N)$ descrito en la Proposición 1.1.7.

Ejemplos 2.3.2.

1. Si R es un anillo conmutativo, entonces la categoría R-**Mód** es isomorfa a **Mód**-R.

2. Debido a que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo, se cumple que la categoría $\mathbb{Z}$-**Mód** coincide con la categoría **Ab**.

Definición 2.3.3. Un funtor $F : R$-**Mód**$\to$**Ab** es *exacto izquierdo* si la exactitud (ver Definición 1.2.1) de

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C);$$

Un funtor $F : R$-**Mód**$\to$**Ab** es *exacto derecho* si la exactitud de

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0.$$

Proposición 2.3.4. El funtor $Hom(M,-) : R$-**Mód**$\to$**Ab** es exacto izquierdo para todo R-módulo izquierdo M.

Demostración. Si $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es una sucesión exacta, deseamos probar que

$$0 \to Hom_R(M,A) \xrightarrow{Hom(M,\alpha)} Hom_R(M,B) \xrightarrow{Hom(M,\beta)} Hom_R(M,C)$$

es una sucesión exacta, donde $Hom(M,\alpha)(f) = \alpha f$ para cada $f \in Hom_R(M,A)$ y $Hom(M,\beta)(g) = \beta g$ para cada $g \in Hom(M,\beta)$. Para comprobar esto observemos los siguientes puntos:

- Si $f \in ker(Hom(M,\alpha))$, entonces $\alpha f = \widehat{0}$, por lo que $(\alpha f)(m) = 0$ para toda $m \in M$. Luego por ser α una función inyectiva, el echo de que $\alpha(f(m)) = (\alpha f)(m) = 0 = \alpha(0)$ para cada $m \in M$ implica que $f(m) = 0$ para cada $m \in M$, es decir que $f = \widehat{0}$.

  Por lo tanto $ker(Hom(M,\alpha)) = \{\widehat{0}\}$. Obteniendo así que $ker(Hom(M,\alpha)) = im(\widehat{0})$.

- Supongamos que $g \in im(Hom(M,\alpha))$, entonces $g = \alpha f$ para algún morfismo $f \in Hom_R(M,A)$, luego $Hom(M,\beta)(g) = \beta g = \beta(\alpha f) = (\beta\alpha)f$; además por ser $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ una sucesión exacta, obtenemos que $im(\alpha) = ker(\beta)$, de donde se sigue que $\beta(\alpha(a)) = 0$ para cada $a \in A$, por lo que $(\beta\alpha)(a) = 0$ para cada $a \in dom(\beta\alpha)$, es decir que $\beta\alpha = \widehat{0}$. Esto nos permite ver que

  $$Hom(M,\beta)(g) = \beta g = \beta(\alpha f) = (\beta\alpha)f = \widehat{0}$$

  y de esta forma $g \in ker(Hom(M,\beta))$. Por lo tanto

  $$im(Hom(M,\alpha)) \subseteq ker(Hom(M,\beta)).$$

- Ahora si $g \in ker(Hom(M,\beta))$, entonces debemos encontrar un morfismo $f \in Hom_R(M,A)$ de tal forma que $g = \alpha f$. Si $m \in M$, entonces $\beta(g(m)) = (\beta g)(m) = \widehat{0}(m) = 0$, por lo que $g(m) \in ker\beta = im(\alpha)$; luego por la inyectividad de α, para cada $m \in M$ existe un único elemento $a_m \in A$ de tal forma que $\alpha(a_m) = g(m)$. Por último defínase $f : M \to A$ por $f(m) = a_m$; la función f cumple que para toda $m \in M$

  $$\alpha f(m) = \alpha(f(m)) = \alpha(a_m) = g(m)$$

  por lo que $\alpha f = g$. Por lo tanto

  $$ker(Hom(M,\beta)) \subseteq im(Hom(M,\alpha)).$$

Los tres puntos anteriores prueban que en efecto

$$0 \to Hom_R(M,A) \xrightarrow{Hom(M,\alpha)} Hom_R(M,B) \xrightarrow{Hom(M,\beta)} Hom_R(M,C)$$

es una sucesión exacta. ■

Definición 2.3.5. Un funtor contravariante $F : R$-**Mód**$\to$**Ab** es *exacto izquierdo* si la exactitud de

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A);$$

Un funtor contravariante $F : R$-**Mód**$\to$**Ab** es *exacto derecho* si la exactitud de

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

implica la exactitud de

$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to 0$$

Proposición 2.3.6. El funtor $Hom(-,M) : R$-**Mód**^{op} $\to$**Ab** es exacto izquierdo para todo R-módulo izquierdo M.

Demostración. La demostración es similar a la realizada en la Proposición 2.3.4. ■

Definición 2.3.7. Un funtor $F : R$-**Mód**$\to$**Ab** es *exacto* si es exacto izquierdo y exacto derecho.

Observación. Si F es un funtor exacto izquierdo que preserva epimorfismos, entonces F es exacto: Si $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces por ser exacto izquierdo tenemos que

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

es una sucesión exacta, en particular se cumple que $im(F(f)) = ker(F(g))$; luego como F preserva epimorfismos, tenemos que $F(g) : F(B) \to F(C)$ es un epimorfismo, por lo que la sucesión

$$F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

es exacta. Obteniendo así la exactitud de la sucesión

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

De la misma forma, un funtor exacto derecho que preserve monomorfismos es exacto. Para los funtores contravariantes tenemos que: un funtor contravariante exacto izquierdo es exacto si convierte monomorfismos en epimorfismos y un funtor contravariante exacto derecho es exacto si convierte epimorfismos en monomorfismos.

2.4. Objetos iniciales y terminales

Definición 2.4.1. Un objeto X de una categoría $\mathcal{C}$ se llama *terminal* si para cualquier objeto Y de $\mathcal{C}$, hay exactamente un morfismo $Y \to X$ en la categoría. Dualmente, X es *inicial* si para todo Y existe exactamente un morfismo $X \to Y$. Un objeto X se denomina objeto cero siempre que sea tanto un objeto inicial como un objeto terminal.

Proposición 2.4.2. Los objetos iniciales de un categoría $\mathcal{C}$ son esencialmente únicos, es decir,

1. Si A y B son objetos iniciales, entonces A y B son isomorfos.

2. Si A es un objeto inicial, entonces todo objeto isomorfo a A es un objeto inicial.

De manera análoga los puntos 1. y 2. se cumplen para los objetos terminales.

Demostración. Veremos únicamente lo que sucede para los objetos iniciales ya que para verificar los puntos para los objetos terminales se requieren argumentos similares:

1. Si A y B son objetos iniciales, entonces por definición existen morfismos únicos $k : A \to B$ y $h : B \to A$, más aún, existe un único morfismo con $dom(A)$ y $cod(A)$ a saber id_A. Entonces debe cumplirse que $hk = id_A$ y de igual forma $kh = id_B$ por lo que k cumple con ser un isomorfismo. Por lo tanto A y B son isomorfos.

2. Si A es un objeto inicial y B es isomorfo a A, entonces existe $f : B \to A$ un isomorfismo. Luego por definición, si C es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces existe un único morfismo $g : A \to C$, por lo que la composición $gf : B \to C$ es un morfismo de B a C. Este morfismo es único ya que si $h : B \to C$, entonces $hf^{-1} : A \to C$, por lo que $hf^{-1} = g$ y de esta forma $h = gf$. Por lo tanto B es un objeto inicial.

■

Ejemplos 2.4.3.

- En la categoría **Set** el único objeto inicial es el conjunto vacío y cualquier conjunto con un solo elemento es un objeto terminal.

- El conjunto vacío considerado como un conjunto parcialmente ordenado es el único objeto inicial para **Pos**.

- Un grupo con un elemento es un elemento inicial y terminal de **Grp** al mismo tiempo, es decir, un objeto cero.

2.5. Subcategorías

Definición 2.5.1. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos categorías, entonces:

1. Diremos que $\mathcal{B}$ es subcategoría de $\mathcal{C}$ si:

   a) $\mathcal{B}_0$ es subclase de $\mathcal{C}_0$;

   b) Para cualesquiera A, B objetos de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$;

   c) Para cada objeto B de $\mathcal{B}$ la identidad id_B en $\mathcal{B}$ es igual a la identidad id_B en $\mathcal{C}$;

d) La ley de composición en $\mathcal{B}$ es la restricción de la ley de composición en $\mathcal{C}$ a los morfismos de $\mathcal{B}$.

2. $\mathcal{B}$ es llamada *subcategoría plena* de $\mathcal{C}$ si, además de lo anterior, se cumple que para cualesquiera A, B objetos de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

Ejemplos 2.5.2.

- Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, la categoría vacía y $\mathcal{C}$ en sí son subcategorías plenas de $\mathcal{C}$.

- **Grp** es una subcategoría plena de la categoría **Mon** que consta de todos los monoides y morfismos entre monoides (es decir, morfismos de semigrupos que conservan la unidad).

- **Mon** es una subcategoría no plena de la categoría **Sgr** de todos los semigrupos y morfismos de semigrupos, para comprobar esto consideremos a $A = (\mathbb{N}, +, 0)$ y a $B = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$ objetos de **Mon**, y a la función constante $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la función f es claramente un morfismo de semigrupos que no conserva la unidad ya que $f(0) = 0$, por lo que f no pertenece a $\mathbf{Mon}(A, B)$.

2.6. Transformaciones naturales

Definición 2.6.1. Una transformación natural entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en una familia de morfismos $(\mu_C : FC \to GC)_{C \in \mathcal{C}_0}$ indicados por la colección de objetos de $\mathcal{C}$, satisfaciendo el siguiente requisito: para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\mu_{C'}"'] & GC' \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$ (el diagrama de arriba se llama el cuadrado de naturalidad). Decimos que $\mu = (\mu_C)_{C \in \mathcal{C}_0} : F \Rightarrow G$ y llamamos a μ_C la *componente en* C de la transformación natural μ.

Ejemplo 2.6.2. Sea $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ el funtor que olvida (o funtor subyacente), donde $U(G)$ es el conjunto subyacente de G, y $U(f) = f$ es la función subyacente del morfismo f y consideremos también al "funtor cuadrático" $S : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ dado por $S(G \xrightarrow{f} H) = G^2 \xrightarrow{f^2} H^2$ donde $f^2(x, y) = (f(x), f(y))$. Debido a que para cada grupo G la operación definida en G es una función $\tau_G : G^2 \to G$, entonces la familia de morfismos $\tau = (\tau_G)$ es una transformación natural de S a U ya que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos y $(x, y) \in G^2$ entonces

$$\begin{aligned} U(f)\tau_G(x, y) = U(f)(\tau_G(x, y)) = U(f)(x \cdot y) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) &= \tau_H(f(x), f(y)) \\ &= \tau_H(f^2(x, y)) \\ &= \tau_H S(f)(x, y) \end{aligned}$$

obteniendo así que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
S(G) \arrow[r, "\tau_G"] \arrow[d, "S(f)"'] & U(G) \arrow[d, "U(f)"] \\
S(H) \arrow[r, "\tau_H"'] & U(H)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
G^2 \arrow[r, "\tau_G"] \arrow[d, "f^2"'] & G \arrow[d, "f"] \\
H^2 \arrow[r, "\tau_H"'] & H
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

2.7. Fuentes

Definición 2.7.1. En una categoría $\mathcal{C}$, una *fuente* es un par $(A, (f_i)_{i\in I})$ que consta de un objeto A y una familia de morfismos $f_i : A \to A_i$ con dominio A, indicados por alguna clase I. El objeto A es llamado dominio de la fuente y la familia $(A_i)_{i\in I}$ el codominio de la fuente.

Observaciones.

1. Siempre que sea conveniente, usaremos notaciones más concisas, como $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I}$ o $(A, f_i)_I$.

2. Las fuentes indicadas por un conjunto se denominan fuentes pequeñas.

3. La clase indicadora I de una fuente $(A, f_i)_I$ puede ser una clase propia (es decir una clase que no es conjunto), un conjunto no vacío o el conjunto vacío. En el caso en que $I = \emptyset$, la fuente estará determinada por el objeto A. En cambio, cuando $I \neq \emptyset$, la fuente está determinada principalmente por la familia de morfismos $\{f_i | i \in I\}$.

Definición 2.7.2. Si $\mathcal{S} = (A \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ es una fuente y para cada $i \in I$, $\mathcal{S}_i = (A_i \xrightarrow{g_{ij}} A_{ij})_{j\in J_i}$ (con J_i una clase para cada $i \in I$) es una fuente, entonces la fuente

$$(\mathcal{S}_i) \circ \mathcal{S} = (A \xrightarrow{g_{ij}f_i} A_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$$

es llamada la *composición* de $\mathcal{S}$ y la familia $(\mathcal{S}_i)_I$.

Observaciones.

1. Si $\mathcal{S} = (A \xrightarrow{f_i} A_i)$ es una fuente y $f : B \to A$ es un morfismo entonces $\mathcal{S} \circ f$ denotará a la fuente $\mathcal{S} \circ f = (B \xrightarrow{f_i f} A_i)_I$.

2. La composición de morfismos puede considerarse como un caso especial de la composición de fuentes.

Definición 2.7.3. Una fuente $(A, f_i)_{i\in I}$ se denomina *mono-fuente* siempre que se pueda cancelar por la izquierda, es decir, siempre que para cualquier par $r, s : B \to A$ de morfismos, si se cumple que para cada $i \in I$, $f_i r = f_i s$, entonces $r = s$.

Ejemplos 2.7.4.

- Una fuente con un solo morfismo $(A, f) = (A \xrightarrow{f} A_1)$ es una mono-fuente si y sólo si f es monomorfismo.

- En la categoría **Set**, las mono-fuentes son precisamente las *fuentes que separan puntos* $(A, f_i)_I$, es decir, fuentes (A, f_i) tales que tal para cualesquiera dos elementos diferentes a y b de A existe $i \in I$, de forma que $f_i(a) \neq f_i(b)$.

Proposición 2.7.5. Sea $(A, f_i)_I$ una fuente en una categoría $\mathcal{C}$.

1. Si f_j es un monomorfismo para algún $j \in I$, entonces $(A, f_i)_I$ es una mono-fuente.

2. Si $(A, f_j)_J$ es una mono-fuente para alguna clase $J \subseteq I$, entonces $(A, f_i)_I$ también lo es.

Demostración. Si $r, s : B \to A$ son morfismos tales que para cada $i \in I$ se cumple que $f_i r = f_i s$, entonces para el punto 1. basta con observar que si existe $j \in I$ de tal forma que f_j es un monomorfismo, entonces $f_j r = f_j s$, implica que $r = s$. De forma similar si $(A, f_j)_J$ es una mono-fuente para alguna clase $J \subseteq I$, obtenemos que $r = s$. Por lo tanto, en ambos casos se concluye que $(A, f_i)_I$ es una mono-fuente. ■

Proposición 2.7.6. Sea $\mathcal{T} = (\mathcal{S}_i) \circ \mathcal{S}$ una composición de fuentes (ver Definición 2.7.2).

1. Si $\mathcal{S}$ y todos las fuentes $\mathcal{S}_i$ son mono-fuentes, entonces $\mathcal{T}$ es mono-fuente.

2. Si $\mathcal{T}$ es una mono-fuente, entonces $\mathcal{S}$ también lo es.

Demostración. Sean $u, v : B \to A$ morfismos en $\mathcal{C}$.

1. Si se cumple que para toda $i \in I$, y para toda $j \in J_i$, que $(g_{ij} f_i)u = (g_{ij} f_i)v$, entonces $g_{ij}(f_i u) = g_{ij}(f_i v)$ y debido a que todas las fuentes $\mathcal{S}_i$ son mono-fuentes, entonces $f_i u = f_i v$ para toda $i \in I$, por lo que $u = v$ ya que $\mathcal{S}$ también cumple con ser mono-fuente.

2. Si para cada $i \in I$ se cumple que $f_i u = f_i v$, entonces para cada $i \in I$ y para cada $j \in J_i$ tenemos que $g_{ij}(f_i u) = g_{ij}(f_i v)$, por lo que $(g_{ij} f_i)u = (g_{ij} f_i)v$ y como $\mathcal{T}$ es mono-fuente, entonces $u = v$.

■

De esta proposición se desprende el siguiente corolario que será de gran utilidad más adelante:

Corolario 2.7.7. Si $\mathcal{S} = (A \xrightarrow{f_i} A_i)$ es una mono-fuente, entonces $f : B \to A$ es un monomorfismo si y sólo si $\mathcal{S} \circ f$ es una mono-fuente.

Definición 2.7.8. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathcal{C}$ indicada por una clase I. Un *producto* de la familia $\{C_i\}_{i \in I}$ es una fuente $\mathcal{P} = (P \xrightarrow{\pi_i} C_i)_{i \in I}$, donde P es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\{\pi_i : P \to C_i \mid i \in I\}$ es una familia de morfismos (llamados proyecciones) con la siguiente propiedad universal:

Si $\mathcal{S} = (A \xrightarrow{f_i} C_i)_{i \in I}$ es una fuente en $\mathcal{C}$ con el mismo codominio que $\mathcal{P}$, entonces existe un único morfismo $f : A \to P$ en $\mathcal{C}$ de tal forma que $\mathcal{S} = \mathcal{P} \circ f$, o dicho de otra forma que $\pi_i f = f_i$ para toda $i \in I$, cumpliéndose así que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ & C_i \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in I$.

Ejemplos 2.7.9.

1. En la categoría **Set**, dados dos conjuntos A_1, A_2, las proyecciones del producto cartesiano $\pi_1 : A_1 \times A_2 \to A_1$ y $\pi_2 : A_1 \times A_2 \to A_2$ dadas por $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ forman un producto $(A_1 \times A_2 \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i=1,2}$. Esto ya que dada una fuente $(A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i=1,2}$ existe un único morfismo $f : A \to A_1 \times A_2$ dado por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ que cumple que $\pi_i f(a) = \pi_i(f(a)) = \pi_i((f_1(a), f_2(a))) = f_i(a)$, es decir que $f_i = \pi_i f$.

2. Si R es un anillo y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces el producto directo $\prod_{j\in I} A_j$ y las proyecciones π_i (ver Definición 1.1.11) cumplen con ser un producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en la categoría R-**Mód**:

   Si $\mathcal{S} = (A \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I}$ es una fuente con el mismo codominio que $(\prod_{j\in I} A_j \xrightarrow{\pi_i} A_i)_{i\in I}$, entonces sea $f : A \to \prod_{j\in I} A_j$ dada por $f(a) = (f_j(a))$, (es decir la I-tupla cuya coordenada i-ésima esta dada por $f_i(a)$). Es claro que para cada $a \in A$ e $i \in I$ se cumple que
   $$\pi_i f(a) = \pi_i(f(a)) = \pi_i\big((f_j(a))\big) = f_i(a)$$
   obteniendo con esto que el diagrama siguiente
   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j\in I} A_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$
   conmuta. Para corroborar la unicidad del morfismo f supongamos que existe otro morfismo $g : A \to \prod_{j\in I} A_j$ que hace conmutar el diagrama anterior. Tenemos entonces que para cada $a \in A$ e $i \in I$ se cumple que $\pi_i g(a) = f_i(a)$, es decir que la coordenada i-ésima de $g(a)$ es $f_i(a)$, de la misma manera en que sucede con $f(a)$ debido a la manera en que definimos a la función f. Por lo tanto $f(a) = g(a)$ para cada $a \in A$, concluyendo con esto que $f = g$.

3. Una fuente con un solo morfismo $(A, f) = (A \xrightarrow{f} A_1)$ es un producto de $\{A_1\}$ si y sólo si f es un isomorfismo. Para corroborar esto veamos que:

   - Si $f : A \to A_1$ es un isomorfismo y $h : B \to A_1$ es un morfismo, entonces $g = f^{-1}h$ es un morfismo $g : B \to A$ que cumple que $fg = f(f^{-1}h) = id_{A_1}h = h$. Además si $k : B \to A$ es un morfismo que cumple que $fk = h$, entonces $fg = fk$, de lo que se sigue que $f^{-1}fg = f^{-1}fk$, es decir, $g = k$. Obteniendo así que g es único y por lo tanto (A, f) es un producto.
   - Si (A, f) es un producto, entonces para el morfismo $id_{A_1} : A_1 \to A_1$, existe $h : A_1 \to A$ que hace conmutar el diagrama
   $$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "id_{A_1}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A_1 \end{tikzcd}$$
   es decir que $fh = id_{A_1}$. Luego, como $id_A : A \to A$ cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A_1 \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, si $k : A \to A$, es un morfismo que cumple que $fk = f$, debe cumplirse que $id_A = k$ ya que id_A es único debido a que (A, f) es un producto. Por lo tanto como $f(hf) = (fh)f = id_{A_1} f = f$, se cumple que $hf = id_A$. Por lo que f es un isomorfismo.

Proposición 2.7.10. Todo producto $\mathcal{P}$ es una mono-fuente.

Demostración. Si $\mathcal{P} = (P, f_i)_{i\in I}$ es un producto y $u, v : A \to P$ son dos morfismos en $\mathcal{C}$ tales que para cada $i \in I$, se cumple que $f_i u = f_i v$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{P} \circ u = \mathcal{P} \circ v$, es una fuente con el mismo codominio que $\mathcal{P}$, por lo que existe un único morfismo $f : A \to P$ que cumple que $\mathcal{S} = \mathcal{P} \circ f$, lo que implica que forzosamente $u = f$ y a su vez $v = f$, es decir $u = v$. ∎

Proposición 2.7.11. Para una familia $\{A_i | i \in I\}$ de objetos en $\mathcal{C}$, los productos de $\{A_i | i \in I\}$ son esencialmente únicos, es decir que se cumple que si $\mathcal{P} = (P \xrightarrow{\pi_i} A_i)_I$ es un producto de $\{A_i | i \in I\}$, entonces

1. Si $\mathcal{Q} = (Q \xrightarrow{\gamma_i} A_i)_I$ es un producto de la familia $\{A_i | i \in I\}$, entonces existe un isomorfismo $h : Q \to P$ que cumple que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \circ h$.

2. Para cada isomorfismo $h : A \to P$, la fuente $\mathcal{P} \circ h$ es un producto de la familia $\{A_i | i \in I\}$.

Demostración.

1. Debido a que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son productos con el mismo codominio, entonces existen dos morfismos $h : Q \to P$ y $k : P \to Q$ únicos tales que cumplen que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \circ h$ y $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \circ k$, es decir que los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & Q \arrow[d, "\gamma_i"] \\ & A_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\gamma_i"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

conmutan para cada $i \in I$. Luego para cada $i \in I$, se cumple que $\pi_i(hk) = (\pi_i h)k = \gamma_i k = \pi_i = \pi_i id_P$, y como P es mono-fuente, esto implica que $hk = id_P$; manera análoga se tiene que $kh = id_Q$. Por lo tanto h es un isomorfismo que cumple que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \circ h$.

2. Si $h : A \to P$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{P} \circ h = (A \xrightarrow{\pi_i h} A_i)_I$ es una fuente con el mismo codominio que $\mathcal{P}$. Ahora, si $\mathcal{S} = (C \xrightarrow{c_i} A_i)_I$ es una fuente con el mismo codominio que $\mathcal{P} \circ h$, entonces por ser $\mathcal{P}$ un producto, existe un único morfismo $f : C \to P$ de tal forma que $\mathcal{P} \circ f = \mathcal{S}$, luego $g = h^{-1} f$ es un morfismo $g : C \to A$ que cumple que para cada $i \in I$, $(\pi_i h)g = (\pi_i h)(h^{-1} f) = \pi_i (hh^{-1}) f = \pi_i f = c_i$, por lo que $(\mathcal{P} \circ h) \circ g = \mathcal{S}$.

El morfismo g es único ya que si $k : C \to A$ es un morfismo que cumple que $(\mathcal{P} \circ h) \circ k = \mathcal{S}$, entonces para cada $i \in I$, $(\pi_i h)g = c_i$ y a su vez $(\pi_i h)k = c_i$, por lo que para cada $i \in I$, se tiene que $\pi_i(hg) = \pi_i(hk)$, luego por ser $\mathcal{P}$ un producto, es en particular una mono-fuente, por lo que en este caso se cumple que $hg = hk$, y consecuentemente $h^{-1}hg = h^{-1}hk$, es decir $g = k$.

Por lo anterior visto $\mathcal{P} \circ h$ cumple con ser un producto de la familia $\{A_i | i \in I\}$.

■

Debido al inciso a) de la proposición anterior, si en un categoría $\mathcal{C}$ existen productos para una familia de objetos $\{C_i | i \in I\}$, entonces a los productos de la familia $\{C_i | i \in I\}$ los denotaremos por $(\prod_{j\in I} C_j \xrightarrow{\pi_i} C_i)_I$; además si para cada $i \in I$, $C_i = C$, entonces $\prod_{j \in I} C_j$ se escribirá simplemente como C^I.

Proposición 2.7.12. Sea $\mathcal{G}$ un conjunto de objetos en una categoría $\mathcal{C}$ y A un objeto de $\mathcal{C}$, se cumple que: si para cada $G \in \mathcal{G}$, los productos

$$\mathcal{P}_G = \left(G^{\mathcal{C}(A,G)} \xrightarrow{\pi_{Gi}} G\right)_{i \in \mathcal{C}(A,G)} \quad \text{y} \quad \mathcal{P} = \left(\prod_{H \in \mathcal{G}} H^{\mathcal{C}(A,H)} \xrightarrow{\pi_G} G^{\mathcal{C}(A,G)}\right)_{G \in \mathcal{G}}$$

existen, entonces existe en $\mathcal{C}$ un único morfismo:

$$\iota_A : A \to \prod_{H \in \mathcal{G}} H^{\mathcal{C}(A,H)}$$

que cumple que, ι_A es monomorfismo si y sólo si la fuente de todos los morfismos en $\mathcal{C}$ con dominio A y codominio en $\mathcal{G}$ es una mono-fuente.

Demostración. Si $G \in \mathcal{G}$, entonces podemos considerar a $\mathcal{C}(A,G)$ como una fuente $\mathcal{S}_G = (A \xrightarrow{g_{Gi}} G_i)_{i \in \mathcal{C}(A,G)}$ donde $G_i = G$ para cada $i \in \mathcal{C}(A,G)$, luego por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo f_G en $\mathcal{C}$ de tal forma que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_G"] \arrow[dr, "g_{Gi}"'] & \prod_{i \in \mathcal{C}(A,G)} G_i \arrow[d, "\pi_{Gi}"] \\ & G_i \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_G"] \arrow[dr, "g_{Gi}"'] & G^{\mathcal{C}(A,G)} \arrow[d, "\pi_{Gi}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in \mathcal{C}(A,G)$. Ahora si consideramos a la fuente $(A \xrightarrow{f_G} G^{\mathcal{C}(A,G)})_{G \in \mathcal{G}}$, entonces nuevamente por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo f en $\mathcal{C}$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_G"'] & \prod_{H \in \mathcal{G}} H^{\mathcal{C}(A,H)} \arrow[d, "\pi_G"] \\ & G^{\mathcal{C}(A,G)} \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $G \in \mathcal{G}$. Ahora debemos observar que si $G \in \mathcal{G}$ y consideramos a un morfismo $\gamma : A \to G$, entonces γ es un morfismo de la fuente $\mathcal{S}_G$, por lo que existe $i \in \mathcal{C}(A,G)$ tal que $\gamma = g_{Gi}$, y como $\pi_{Gi}\pi_G f = \pi_{Gi}(\pi_G f) = \pi_{Gi} f_G = g_{Gi} = \gamma$, entonces γ es un elemento de la fuente $[(\mathcal{P}_G) \circ \mathcal{P}] \circ f$.

Lo anterior nos permite ver que la fuente $[(\mathcal{P}_G) \circ \mathcal{P}] \circ f$, es exactamente la fuente de todos los morfismos de A en algún elemento G de $\mathcal{G}$. Además como para cada $G \in \mathcal{G}$, $\mathcal{P}_G$ cumple con ser un producto, entonces por el punto 1. de la Proposición 2.7.6, se cumple que $(\mathcal{P}_G) \circ \mathcal{P}$ es una mono-fuente, por lo cual, solo resta observar que por el Corolario 2.7.7, se cumple que $[(\mathcal{P}_G) \circ \mathcal{P}] \circ f$ es una mono-fuente si y sólo si f es un monomorfismo. Por lo tanto $\iota_A = f$ es el morfismo buscado. ■

2.8. Pozos

El concepto dual al de fuente es llamado pozo y se define de la siguiente forma:

Definición 2.8.1. En una categoría $\mathcal{C}$, un *pozo* es un par $((f_i)_{i \in I}, A)$ (denotado también por $(f_i, A)_I$ o $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I})$ que consta de un objeto A y una familia de morfismos $f_i : A_i \to A$ indicados por alguna clase I. El objeto A es llamado codominio del pozo y la familia $(A_i)_{i \in I}$ el dominio del pozo. La composición de pozos se define de forma dual a la de la composición de las fuentes (ver Definición 2.7.2).

La siguiente tabla proporciona los nombres de los conceptos duales a los investigados en la sección anterior:

Concepto	Concepto dual
Fuente	Pozo
Mono-fuente	Epi-pozo
Producto $(\prod A_j, \pi_i)_{i \in I}$	Coproducto $(\mu_i, \coprod A_j)_{i \in I}$
Proyecciones π_i	Inclusiones μ_i

Veamos a continuación las definiciones de los conceptos expuestos en la tabla, seguidos de algunos ejemplos importantes:

Definición 2.8.2. Un pozo $(f_i, A)_I$ se denomina *epi-pozo* siempre que se pueda cancelar por la derecha, es decir, siempre que para cualquier par $r, s : A \to B$ de morfismos, si se cumple que para cada $i \in I$, $rf_i = sf_i$, entonces $r = s$.

Definición 2.8.3. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathcal{C}$ indicada por una clase I. Un *coproducto* de la familia $\{C_i\}_{i \in I}$ es un pozo $\mathcal{O} = (C_i \xrightarrow{\mu_i} O)_{i \in I}$, donde O es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\{\mu_i : C_i \to O | i \in I\}$ es una familia de morfismos (llamados inclusiones) con la siguiente propiedad universal:

Si $\mathcal{Q} = (C_i \xrightarrow{f_i} Q)_{i \in I}$ es un pozo con el mismo dominio que $\mathcal{O}$, entonces existe un único morfismo $f : O \to Q$ en $\mathcal{C}$ de tal forma que $\mathcal{Q} = f \circ \mathcal{O}$, o dicho de otra forma que $f\mu_i = f_i$ para toda $i \in I$, cumpliéndose así que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Q & O \arrow[l, "f"'] \\
& C_i \arrow[u, "\mu_i"'] \arrow[ul, "f_i"]
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in I$.

Ejemplo 2.8.4. En la categoría **Set** un pozo $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$ es un epi-pozo si y sólo si $A = \bigcup_{i \in I} f_i[A_i]$:

- Si $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$ es un epi-pozo, entonces claramente $\bigcup_{i\in I} f_i[A_i] \subseteq A$. Supongamos ahora que existe $x \in A \setminus \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$, y consideremos a las funciones $r : A \to \{0,1\}$ definida por $r(a) = 0$ para cada $a \in A$ y a la función $s : A \to \{0,1\}$ dada por

$$s(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a \neq x \\ \\ 1 & si \quad a = x \end{cases}$$

  Podemos observar que para cada $i \in I$, si $a_i \in A_i$, entonces $f_i(a_i) \neq x$ (esto debido a que $x \notin \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$), y consecuentemente

$$rf_i(a_i) = r(f_i(a_i)) = 0 = s(f_i(a_i)) = sf_i(a_i).$$

  Por lo tanto, para cada $i \in I$, tenemos que $rf_i = sf_i$, luego, por ser $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$ un epi-pozo se debe cumplir que $r = s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \setminus \bigcup_{i\in I} f_i[A_i] = \emptyset$, y de esta forma $A = \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$

- Supongamos ahora que $A = \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$ y que $s, r : A \to B$ son funciones tales que $sf_i = rf_i$ para cada $i \in I$. Si $a \in A = \bigcup_{i\in I} f_i[A_i]$, entonces existe $j \in I$ de tal forma que $a \in f_j[A_j]$, y de esta forma $a = f_j(a_j)$ para algún $a_j \in A_j$; se sigue que

$$r(a) = r(f_j(a_j)) = rf_j(a_j) = sf_j(a_j) = s(f_j(a_j)) = s(a).$$

  Por lo tanto $r = s$, obteniendo con esto que $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_I$ es un epi-pozo.

Ejemplos 2.8.5.

1. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos (es decir, que si $i, j \in I$ con $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$), indicada por un conjunto I, entonces el pozo $(A_i \xrightarrow{\mu_i} \bigcup_{j\in I} A_j)$, donde $\mu_i(a_i) = a_i$ para cada $i \in I$, es un coproducto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en **Set**:

   Observemos primero que por ser $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, sucede que para cada $a \in A$, existe un único $i \in I$ de tal forma que $a = a_i$ para algún $a_i \in A_i$. Entonces, si $(A_i \xrightarrow{f_i} A)$ es un pozo con el mismo dominio que $(A_i \xrightarrow{\mu_i} \bigcup_{j\in I} A_j)$, entonces definamos $f : \bigcup_{j\in I} A_j \to A$ por $f(a_i) = f_i(a_i)$. Esta función esta bien definida debido a la observación que se mencionó al principio y además cumple que si $i \in I$, entonces para cada $a_i \in A_i$

$$f_i(a_i) = f(a_i) = f(\mu_i(a_i)) = f\mu_i(a_i)$$

   comprobando con esto que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \bigcup_{j\in I} A_j \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

   conmuta para cada $i \in I$. Para corroborar la unicidad de f, veamos que si $g : \bigcup_{j\in I} A_j \to A$ es otra función que hace conmutar al diagrama anterior, entonces para cada $a_i \in \bigcup_{j\in I} A_j$ se cumple que

$$g(a_i) = g(\mu_i(a_i)) = g\mu_i(a_i) = f_i(a_i) = f(a_i)$$

   y por lo tanto $g = f$.

2. Si R es un anillo y $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-módulos izquierdos, entonces la Proposición 1.1.12 , nos muestra que la suma directa $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un coproducto de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ en la categoría R-**Mód**.

2.9. Subobjetos

Al estudiar diferentes categorías, podemos observar que decir "A es un subobjeto de B" no es solo una propiedad del objeto A, sino también del "morfismo inclusión" naturalmente asociado de A en B. Por lo tanto, definiremos a los subobjetos de un objeto B como pares (A, m), donde A es un objeto y $m : A \to B$ es un "morfismo de inclusión".

Dado que para diferentes categorías uno puede necesitar diferentes conceptos para caracterizar a los "morfismos inclusión", el concepto de subobjeto se hará dependiente de alguna clase $\mathcal{M}$ de morfismos que represente (en cada caso) a dichas inclusiones.

Definición 2.9.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos de $\mathcal{C}$. Un $\mathcal{M}$-subobjeto de un objeto B de $\mathcal{C}$, es un par (A, m), donde A es un objeto de $\mathcal{C}$ y el morfismo $m : A \to B$ es un elemento de $\mathcal{M}$, en este caso diremos también que (m, B) es una $\mathcal{M}$-extensión de A.

Así como la relación de contención ($\subseteq$) determina un orden parcial en el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$, de un conjunto dado A, podemos intentar ordenar a los subobjetos de un objeto A en una categoría arbitraria considerando lo siguiente:

Definición 2.9.2. Sean (A, m) y (A', m') subobjetos de un objeto B.

1. Diremos que (A, m) es *mas pequeño* que (A', m'), denotado por $(A, m) \leq (A', m')$, siempre que exista un morfismo $h : A \to A'$ que haga conmutar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "m"'] & A' \arrow[d, "m'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

2. Diremos que (A, m) y (A', m') son isomorfos si existe un isomorfismo $h : A \to A'$ tal que $m'h = m$.

Observaciones.

1. En caso de existir el morfismo h mencionado en el primer punto, este es único debido a que, si existe algún otro morfismo h' tal que $m'h' = m$, entonces por ser m' un monomorfismo (por definición), la igualdad $m'h' = m = m'h$ implica que $h = h'$.

2. Para todo objeto A, la relación definida en el punto 1. determina un preorden en la clase de subobjetos de A. En general la antisimetría no se cumple, pero si para dos subobjetos de A sucede que $(A, m) \leq (A', m')$ y $(A', m') \leq (A, m)$, entonces estos deben ser isomorfos.

Terminaremos esta sección con la Definición 2.9.3 que nos permitirá hacer distinciones entre clases y conjuntos, a la hora de hablar de la colección de subobjetos o extensiones de los objetos de una categoría arbitraria.

Definición 2.9.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos de una categoría $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{C}$ está:

1. $\mathcal{M}$-bienpotenciada si cada objeto de $\mathcal{C}$ tiene una clase propia de $\mathcal{M}$-subobjetos no isomorfos por pares.

2. $\mathcal{M}$-biencopotenciada si cada objeto de $\mathcal{C}$ tiene una clase propia de $\mathcal{M}$-extensiones (ver Definición 2.9.1) no isomorfas por pares.

Capítulo 3

Cápsulas Inyectivas

A lo largo del texto, $\mathcal{H}$ representará a una clase clase arbitraria de morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. Aunque los conceptos y definiciones que trataremos nos hagan pensar a los morfismos en $\mathcal{H}$ como “inmersiones", no hay una suposición a priori sobre $\mathcal{H}$.

En lo subsiguiente, usualmente omitiremos el prefijo $\mathcal{H}$ cuando consideremos a $\mathcal{H}$ como la clase de todos los monomorfismos de la categoría que estemos abordando.

3.1. Objetos inyectivos

Definición 3.1.1. Un objeto I de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{H}$-*inyectivo* si la función $\mathcal{C}(h,I) : \mathcal{C}(B,I) \to \mathcal{C}(A,I)$ es suprayectiva para toda $h : A \to B$ en $\mathcal{H}$, de manera que para cada $f : A \to I$ existe $g : B \to I$ que extiende a h, es decir, de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & I \end{tikzcd}$$

conmuta. Los objetos $\mathcal{H}$-inyectivos forma la subcategoría plena $\mathcal{H}$-**Inj** de $\mathcal{C}$.

Ejemplos 3.1.2.

1. En la categoría **Set** los objetos inyectivos son exactamente todos los conjuntos no vacíos:

   Si $A \neq \emptyset$, sea $a \in A$ un elemento fijo y veamos que si $h : B \to C$ es un morfismo en $\mathcal{H}$, es decir, una función inyectiva, entonces para cualquier función $f : B \to A$ podemos definir una función $g : C \to D$ dada por

   $$g(c) = \begin{cases} f(b) & si \quad c = h(b) \text{ para algún } b \in B \\ \\ a & si \qquad\qquad c \notin Im(h) \end{cases}$$

   que cumple que $f = gh$. La función g está bien definida ya que si para algún $c \in C$ sucede que $c = h(b) = h(b')$, entonces $b = b'$ debido a la inyectividad de h, y consecuentemente $f(b) = f(b')$.

2. Sea B un conjunto no vacío y consideremos a la categoría rebanada $\mathcal{C} = \mathbf{Set}/B$. Si $\mathcal{H}$ es la clase de todas las funciones inyectivas con codominio B, entonces toda función suprayectiva con codominio B es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo en $\mathcal{C}$:

Sean $f : X \to B$ una función suprayectiva, y, $g : Y \to B$ y $h : Z \to B$ objetos de $\mathcal{C}$, entonces si $\gamma : g \to f$ y $\alpha : g \to h$ son morfismos de $\mathcal{C}$, es decir funciones $\gamma : Y \to X$ y $\alpha : Y \to Z$ en **Set** que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

con α un elemento de $\mathcal{H}$, es decir que α es una función inyectiva, deseamos encontrar un morfismo $\beta : f \to h$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & h \arrow[d, "\beta"] \\ & f \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{C}$; para esto notemos que si $z \in Z$, entonces $h(z) \in B$, y como f es una función suprayectiva, entonces podemos elegir para cada $z \in Z$, un elemento fijo b_z en la preimagen del conjunto $\{h(z)\}$, es decir $b_z \in f^{-1}(\{h(z)\})$. Ahora consideremos a la función $\beta : Z \to X$ definida de la siguiente forma:

$$\beta(z) = \begin{cases} \gamma(y) & si \quad z = \alpha(y) \text{ para algún } y \in Y \\ \\ b_z & si \qquad\qquad z \notin Im(\alpha) \end{cases}$$

Para comprobar que la función β está bien definida basta con observar que α es una función inyectiva y que para cada $z \in Z$, el elemento b_z es un elemento fijo de B previamente seleccionado (es decir que al momento de evaluar la función $\beta(z)$ no estamos tomando un elemento cualquiera de $f^{-1}(\{h(z)\})$. Además se cumple que para cada $z \in Z$:

a) Si $z \in Im(\alpha)$ y $z = \alpha(y)$ para algún $y \in Y$, entonces

$$f\beta(z) = f(\beta(z)) = f(\gamma(y)) = f\gamma(y) = g(y) = h\alpha(y) = h(\alpha(y)) = h(z)$$

b) Si $z \notin Im(\alpha)$, entonces

$$f\beta(z) = f(\beta(z)) = f(b_z) = h(z)$$

Por lo que $f\beta = h$, es decir que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "h"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta, obteniendo así que en efecto β es un morfismo en $\mathcal{C}$ con dominio h y codominio f. Por ultimo veamos que si $y \in Y$, entonces $\beta\alpha(y) = \beta(\alpha(y)) = \gamma(y)$, por lo cual se cumple que $\beta\alpha = \gamma$, es decir que β es el morfismo buscado.

Para las categorías de módulos R-**Mód**, si elegimos a $\mathcal{H}$=Mono(R-**Mód**), entonces el concepto de $\mathcal{H}$-inyectividad estudiado en este texto coincide con el concepto usualmente utilizado en álgebra (como ejemplos véase [17], [36], [27]); considerando esto, dado un anillo R, veremos a continuación en las Proposiciones 3.1.3, 3.1.5, 3.1.6 y el Teorema 3.1.4 algunas condiciones necesarias y suficientes para que un objeto de $\mathcal{C} = R$-**Mód**, es decir un R-módulo izquierdo, cumpla con ser inyectivo:

Proposición 3.1.3. Un R-módulo izquierdo M es inyectivo si y solo si el funtor $Hom(-, M)$ es exacto.

Demostración. Veamos lo siguiente:

$\Rightarrow$] Sea E un módulo inyectivo y $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ una sucesión exacta. Hemos probado ya que para cualquier R-módulo izquierdo M se cumple que $Hom(-, M)$ es un funtor exacto izquierdo, en particular cuando M es inyectivo, por lo cual bastará con comprobar que $Hom(-, M)(\alpha) : Hom_R(B, M) \to Hom_R(A, M)$ es un epimorfismo de grupos abelianos:

Debido a que α es inyectiva, se cumple que $\alpha \in \mathcal{H}$, por lo que si $g \in Hom_R(A, M)$, entonces por la inyectividad de M, existe un morfismo $f : B \to M$ en $\mathcal{C}$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

es decir que $f \in Hom_R(B, M)$ y $Hom(-, M)(\alpha)(f) = Hom(\alpha, M)(f) = f\alpha = g$.

$\Leftarrow$] Sea $Hom(-, M)$ un funtor exacto. Si $\alpha : A \to B$ es un morfismo de $\mathcal{H}$, es decir un monomorfismo, y $\beta : A \to M$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces consideremos la sucesión exacta

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\pi} B/im(\alpha) \to 0$$

donde π es el morfismo natural (véase la Definición 1.1.10). Debido a que $Hom(-, M)$ es exacto entonces $Hom(\alpha, M) : Hom_R(B, M) \to Hom_R(A, M)$ es un epimorfismo, luego como $\beta \in Hom_R(A, M)$, existe $\gamma : B \to M$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto M es inyectivo. ■

Teorema 3.1.4. (Criterio de Baer). Un R-módulo izquierdo E es inyectivo si y sólo si cada morfismo $f : I \to E$, donde I es un ideal izquierdo en R, puede ser extendido a R.

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea E un R-módulo izquierdo inyectivo y $f : I \to E$ un morfismo en $\mathcal{C}$, donde I es un ideal izquierdo en R. Debido a que todo ideal izquierdo de R es a su vez un submódulo de R, si consideramos al morfismo inclusión $i : I \to R$, este cumple con ser un monomorfismo, por lo que $i \in \mathcal{H}$, y de esta forma por la inyectividad de E, existe un morfismo $g : R \to E$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & R \arrow[d, "g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

es decir que g es el morfismo buscado.

$\Leftarrow$] Si $f : A \to E$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ e $i : A \to B$ es elemento de $\mathcal{H}$, entonces i es un monomorfismo, por lo cual podemos considerar a i como el morfismo inclusión (de esta forma $i(a) = a$ para cada $a \in A$). Consideremos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Nuestro objetivo es encontrar un morfismo $g : B \to E$, que cumpla que $gi = f$, para esto definamos al conjunto

$$\begin{aligned} X &= \{(A', g') \mid A \leq A' \leq B \text{ y } g' : A' \to E \text{ extiende a } f\} \\ &= \{(A', g') \mid A \leq A' \leq B, g' : A' \to E \text{ y } g \restriction_A = f\} \end{aligned}$$

el cual cumple con ser no vacío ya que al menos $(A, f) \in X$ (esto debido a que claramente $A \leq A \leq B$ y $f \restriction_A = f$). Para aproximarnos al morfismo buscado podemos observar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E & & & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & A' \arrow[ul, bend right, "g'"] \arrow[r, hook] & A'' \arrow[ull, bend right, "g''"'] \arrow[r, dotted, no head] & B \arrow[ulll, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

(donde la flecha $\hookrightarrow$ indica el morfismo inclusión) y de esta forma definir una relación de orden en X dada por:

$$(A', g') \preceq (A'', g'') \text{ si y sólo si } A' \leq A'' \text{ y } g'' \restriction_{A'} = g'.$$

La relación $\preceq$ cumple lo siguiente:

1. Para cualquier elemento (A', g') de X, se tiene que $A' \leq A'$ y $g' \restriction_{A'} = g'$, por lo cual $(A', g') \preceq (A', g')$. Por lo tanto $\preceq$ es una relación reflexiva en X.

2. Para cualesquiera $(A', g'), (A'', g'') \in X$, si sucede que $(A', g') \preceq (A'', g'')$ y $(A'', g'') \preceq (A', g')$, entonces $A' \leq A''$ y $A'' \leq A'$, por lo que $A' = A''$, además debido a que $g'' \restriction_{A'} = g'$, entonces se tiene que

$$g'' = g'' \restriction_{A''} = g'' \restriction_{A'} = g'.$$

   Obteniendo con esto que $(A', g') = (A'', g'')$, lo cual nos indica que $\preceq$ es una relación antisimétrica en X.

3. Si (A', g'), (A'', g'') y (A''', g''') son elementos de X tales que $(A', g') \preceq (A'', g'')$ y $(A'', g'') \preceq (A''', g''')$, entonces $A' \leq A''$ y $A'' \leq A'''$ por lo que $A' \leq A'''$ y a su vez, debido a que $g''' \restriction_{A''} = g''$ y $g'' \restriction_{A'} = g'$, tenemos que

$$g''' \restriction_{A'} = g'' \restriction_{A'} = g'.$$

   Por lo tanto $(A', g') \preceq (A''', g''')$, por lo cual $\preceq$ es una relación transitiva en X.

Por los tres puntos anteriores, se cumple que $(X, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Luego, si $C = \{(A_i, g_i)\}_{i\in I}$ es una cadena en X, entonces proponemos a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \gamma\right)$ como una cota superior para C en X, donde $\gamma : \bigcup_{i\in I} A_i \to E$ esta dada por $g(a) = g_i(a)$ si $a \in A_i$. Veamos primero que la función γ esta bien definida:

Si $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$, supongamos que existen $i, j \in I$ tales que $i \neq j$ y además $a \in A_i$ y $a \in A_j$. Por ser C una cadena se debe cumplir que $(A_i, g_i) \preceq (A_j, g_j)$ o que $(A_j, g_j) \preceq (A_i, g_i)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $(A_i, g_i) \preceq (A_j, g_j)$, entonces $g_j \restriction_{A_i} = g_i$ por lo que

$$g_j(a) = g_i(a) = \gamma(a).$$

Para corroborar que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \gamma\right)$ es en efecto un elemento de X, debemos observar que para cada $i \in I$ se cumple que $A \leq A_i \leq B$, por lo cual $A \leq \bigcup_{i\in I} A_i \leq B$, más aún, si $a \in A$, entonces $a \in A_j$ para algún $j \in I$, por lo que $\gamma(a) = g_j(a) = f(a)$ ya que $g_j \restriction_A = f$. Entonces $\gamma \restriction_A = f$ y $A \leq \bigcup_{i\in I} A_i \leq B$, comprobando así que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \gamma\right) \in X$.

Ahora, si $(A_j, g_j) \in C$, entonces claramente $A_j \leq \bigcup_{i\in I} A_i$ y por la manera en que definimos a γ se cumple también que $\gamma \restriction_{A_j} = g_j$. Por lo tanto $(A_j, g_j) \preceq \left(\bigcup_{i\in I} A_i, \gamma\right)$ para cada $(A_j, g_j) \in C$, es decir que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \gamma\right)$ es realmente una cota superior de C en X.

Se sigue, por el Lema de Zorn que existe un elemento $\preceq$-máximo, llamémosle (A_0, g_0), en X. Si sucede que $A_0 = B$, entonces $g_0 i = f$ y hemos terminado, supongamos en cambio que $A_0 \lneq B$; existe entonces un elemento $b \in B$ que cumple $b \notin A_0$, tomando esto en cuenta definamos el siguiente conjunto

$$I = \{r \in R \mid rb \in A_0\},$$

si $r_1, r_2 \in I$, entonces $r_1 b \in A_0$ y $r_2 b \in A_0$, por lo que $(r_1 - r_2)b = r_1 b - r_2 b \in A_0$, lo que implica que $r_1 - r_2 \in I$, además si $s \in R$ y $r \in I$, entonces $(sr)b = s(rb) \in A_0$ por lo que $sr \in I$. Por lo tanto I es un ideal izquierdo de R. Definamos ahora una función $h : I \to E$ por $h(r) = g_0(rb)$, esta función cumple lo siguiente:

1. Para cualesquiera $r_1, r_2 \in I$, se cumple que $h(r_1 + r_2) = g_0((r_1 + r_2)b) = g_0(r_1 b + r_2 b) = g_0(r_1 b) + g_0(r_2 b) = h(r_1) + h(r_2)$.

2. Si $s \in R$, entonces para todo $r \in I$, $h(sr) = g_0((sr)b) = g_0(s(rb)) = sg_0(rb) = sh(r)$.

Por los dos puntos anteriores h cumple con ser un R-morfismo. Luego, por hipótesis existe un morfismo $\alpha : R \to E$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
E & \\
I \arrow[u, "h"] \arrow[r, hook, "j"'] & R \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Como $b \notin A_0$, sea $A_1 = A_0 + Rb$ y $g_1 : A_1 \to E$ una función dada por

$$g_1(y) = g_1(a_0 + rb) = g_0(a_0) + r\alpha(1)$$

donde $a_0 \in A_0$, $r \in R$ y $y = a_0 + rb$. Veamos que g_1 esta bien definida:

Supongamos que $a_0 + rb = a_0' + r'b$, entonces $(r - r')b = a_0' - a_0 \in A_0$, por lo que $(r - r') \in I$, lo cual implica que $g_0((r - r')b)$ y $h(r - r')$ están definidos. Se sigue que

$$\begin{aligned}
g_0(a_0' - a_0) = g_0((r - r')b) = h(r - r') = \alpha j(r - r') = \alpha(j(r - r')) &= \alpha(r - r') \\
&= \alpha((r - r')1) \\
&= (r - r')\alpha(1)
\end{aligned}$$

cumpliéndose así que $g_0(a_0') - g_0(a_0) = r\alpha(1) - r'\alpha(1)$, consecuentemente

$$g_1(a_0' + r'b) = g_0(a_0') + r'\alpha(1) = g_0(a_0) + r\alpha(1) = g_1(a_0 + rb)$$

corroborando de esta manera que g_1 esta bien definida. Finalmente debido a que $b \in B \setminus A_0$, se tiene que $A_0 \lneq A_1 \leq B$ y podemos ver que si $a_0 \in A_0$, entonces $g_1(a_0) = g_0(a_0)$, por lo que $g_1 \restriction_{A_0} = g_0$; de esto se sigue que $(A_0, g_0) \prec (A_1, g_1)$ y debido a que $A \leq A_0 \lneq A_1 \leq B$, entonces $g_1 \restriction_A = g_0 \restriction_A = f$, es decir que $(A_1, g_1) \in X$, lo cual contradice la maximalidad de (A_0, g_0). Por lo tanto $A_0 = B$ y así $g = g_0$ es el morfismo buscado. Concluyendo con esto que E es un R-módulo izquierdo inyectivo. ■

Proposición 3.1.5. Si R es un dominio, entonces todo R-módulo izquierdo inyectivo es divisible.

Demostración. Sea E un R-módulo inyectivo, $m \in E$ y $r \in R$ con $r \neq 0$. Definamos una función $f : Rr \to E$ por $f(sr) = sm$, esta función esta bien definida debido a que si $sr = s'r$, entonces $(s - s')r = 0$, luego por ser R un dominio y $r \neq 0$, se cumple que $s - s' = 0$, es decir que $s = s'$ y así

$$f(sr) = sm = s'm = f(s'r)$$

Ahora, debido a que el morfismo inclusión $i : Rr \to R$ es un elemento de $\mathcal{H}$, se sigue por la inyectividad de E, que existe un morfismo $g : R \to E$ en $\mathcal{C}$, es decir un R-morfismo, que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
E & \\
Rr \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "i"'] & R \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

por lo cual, en particular se tiene que

$$m = 1m = f(1r) = gi(1r) = gi(r) = g(r) = rg(1)$$

donde $g(1) \in E$. Por lo tanto $m = rg(1)$, comprando así que E es divisible. ■

Proposición 3.1.6. Sea R un dominio de ideales principales. Se cumple lo siguiente:

1. Un R-módulo izquierdo E es inyectivo si y sólo si es divisible.

2. Todo cociente de un R-módulo inyectivo es inyectivo.

Demostración.

1. Debido a la Proposición 3.1.5 probaremos únicamente, usando el criterio de Baer, que en este caso todo R-módulo izquierdo divisible es inyectivo:

   Sea E un R-módulo izquierdo divisible y $f : I \to E$ un morfismo, donde I es un ideal de R. Si $I = \{0\}$, entonces claramente el morfismo $\widehat{0} : R \to E$ cumple que $f = \widehat{0}i$ (donde $i : I \to R$ es el morfismo inclusión). En cambio si $I \neq \{0\}$, entonces por hipótesis existe $a \in I$, con $a \neq 0$, de tal forma que $I = Ra$, luego debido a que E es divisible y a que $a \neq 0$, existe $e \in E$ de tal forma que $f(a) = ae$.

Definimos ahora una función $h : R \to E$ por $h(r) = re$ para cada $r \in R$. El morfismo h cumple que $hi = f$, donde $i : I \to R$ es el morfismo inclusión, debido a que si $s \in I = Ra$, entonces $s = ra$ para algún $r \in R$, obteniendo así que

$$f(s) = f(ra) = rf(a) = r(ae) = (ra)e = h(ra) = h(s) = hi(s).$$

Luego por el criterio de Baer, E es inyectivo.

2. Usando 1. podemos ver que, si E es un R-módulo izquierdo inyectivo, entonces E cumple con ser divisible, luego por el segundo punto de la Proposición 1.1.15, todo módulo cociente de E es divisible, y por lo tanto inyectivo.

■

Como consecuencia de la Proposición anterior y la Proposición 1.1.15, se cumple que los grupos abelianos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son inyectivos (vistos, claro como $\mathbb{Z}$-módulos). Además, el grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ cuenta con la siguiente propiedad:

Proposición 3.1.7. Para cualquier grupo abeliano A, si $a \in A$ con $a \neq 0$, entonces existe un morfismo de grupos $f_a : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que cumple que $f(a) \neq 0$.

Demostración. Sea $a \in A$ un elemento distinto de cero. Consideremos al grupo abeliano $\mathbb{Z}a$ como un grupo cíclico generado por a, es decir $\mathbb{Z}a = \langle a \rangle$. Utilizando el lema de Zorn es posible corroborar que este grupo cuenta con un submódulo propio máximo:

Sea $(X, \leq)$ el conjunto parcialmente ordenado por la relación de submódulo, de submódulos propios de $\mathbb{Z}a$; este conjunto es no vacío ya que el módulo 0 es un submódulo propio de $\mathbb{Z}a \neq 0$, además si $C = \{M_i\}_{i \in I}$ es una cadena en X, entonces $\bigcup_{i \in I} M_i$ es una cota superior para C en X, ya que claramente $M_i \leq \bigcup_{i \in I} M_i$ para cada $i \in I$, y cumple además con ser un submódulo propio de $\mathbb{Z}a$, de otra forma si suponemos que $\bigcup_{i \in I} M_i = \mathbb{Z}a = \langle a \rangle$, entonces $a \in \bigcup_{i \in I} M_i$, por lo cual existe $j \in I$ de tal forma que $a \in M_j$, luego por ser M_j un submódulo propio de $\mathbb{Z}a$ debe cumplirse que $\mathbb{Z}a = \langle a \rangle \subseteq M_j \subsetneq \mathbb{Z}a$, lo cual es una contradicción.

Denotemos entonces por M al submódulo propio máximo de $\mathbb{Z}a$, observemos que por ser $\mathbb{Z}a$ un grupo abeliano se cumple que M es a su vez un subgrupo máximo de $\mathbb{Z}a$. Es posible corroborar por medio del Teorema de Correspondencia para grupos ([34] pág. 38) que el grupo cociente $\mathbb{Z}a/M$ es un grupo simple, es decir que sus únicos subgrupos normales son los subgrupos triviales: el subgrupo $\{0\}$ y el mismo. Más aún $\mathbb{Z}a/M$ es también un grupo abeliano, por lo cual debe cumplirse que $\mathbb{Z}a/M$ es un grupo finito de orden p, siendo p un número entero primo.

De lo anterior se sigue que $\mathbb{Z}a/M = \langle z \rangle$ para algún $z \in \mathbb{Z}a/M$ distinto de 0.[1] Luego debido a que el elemento $\left(\frac{1}{p} + \mathbb{Z}\right) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene orden p, entonces existe un isomorfismo $\psi : \langle z \rangle \to \langle \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \rangle$. Entonces si denotamos por $i : \langle \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ al morfismo inclusión, definamos $h_a = i\psi\pi$, donde $\pi : \mathbb{Z}a \to \mathbb{Z}a/M$ es el morfismo natural. El morfismo h_a cumple que

$$h_a(a) = i\psi\pi(a) = i(\psi(\pi(a))) = \psi(\pi(a)) \neq 0$$

ya que en este caso $\pi(a) \neq 0 = M$, debido a que $a \notin M$ (si sucediera lo contrario, entonces $\mathbb{Z}a = \langle a \rangle \subseteq M \subsetneq \mathbb{Z}a$, lo cual es una contradicción).

[1] Esto es consecuencia del Teorema 2.19 enunciado en la pág. 29 de [34], el cual nos brinda una caracterización de los grupos cíclicos.

Finalmente, por ser $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, existe un morfismo $f_a : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "h_a"'] & A \arrow[d, "f_a"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Obteniendo con esto que $f_a(a) = f_a(i(a)) = f_a i(a) = h_a(a) \neq 0$, es decir que $f_a : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el morfismo buscado. ■

Proposición 3.1.8. Sea $\{C_i | i \in I\}$ una familia de objetos $\mathcal{H}$-inyectivos en una categoría $\mathcal{C}$, indicada por un conjunto I. Si $\mathcal{P} = (\prod_{j\in I} C_j \xrightarrow{\pi_i} C_i)_I$ es un producto de $\{C_i | i \in I\}$, entonces $\prod_{j\in I} C_j$ es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo.

Demostración. Si $h : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{H}$ y $f : A \to P$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces como para cada $i \in I$, C_i es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo, entonces para cada $i \in I$ existe un morfismo, llamémosle $g_i : B \to C_i$ de tal forma que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi_i f"'] & B \arrow[d, "g_i"] \\ & C_i \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, la fuente $(B \xrightarrow{g_i} C_i)_I$ tiene el mismo codominio que $\mathcal{P}$, por lo que existe un único morfismo $\gamma : B \to \prod_{j\in I} C_j$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "g_i"'] & \prod_{j\in I} C_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & C_i \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $i \in I$, lo cual implica que para cada $i \in I$, $(\pi_i\gamma)h = g_i h$, es decir que $\pi_i(\gamma h) = \pi_i f$. Finalmente, como $\mathcal{P}$ cumple con ser mono-fuente, entonces $\gamma h = f$. Obteniendo así que $\prod_{j\in I} C_j$ es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo. ■

3.2. Cogeneradores

Definición 3.2.1. Una clase $\mathcal{G}$ de objetos es *cogeneradora* (también *coseparadora*) en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera dos morfismos distintos $u, v : X \to A$ en $\mathcal{C}$ hay un morfismo $h : A \to G$ con $G \in \mathcal{G}$ y $hu \neq hv$. En el caso en que $\mathcal{G}$ conste de un solo elemento G, diremos simplemente que el elemento G es un cogenerador en $\mathcal{C}$.

Observación. De manera equivalente a la definición anterior, una clase $\mathcal{G}$ es cogeneradora en $\mathcal{C}$ si para todo objeto A en $\mathcal{C}$, la fuente de todos los morfismos con dominio A y codominio en $\mathcal{G}$ es una mono-fuente. Además si $\mathcal{G}$ es un conjunto, por la Proposición 2.7.12 esto es lo mismo que decir que el morfismo canónico

$$\iota_A : A \to \prod_{H\in\mathcal{G}} H^{\mathcal{C}(A,H)}$$

es un monomorfismo, siempre que los productos necesarios existan en $\mathcal{C}$.

La siguiente Proposición nos brinda una caracterización importante sobre los cogeneradores de R-**Mód**; en [30] (pág. 71) se menciona que esto se cumple en general para *categorías aditivas.*

Proposición 3.2.2. Sea R un anillo. En la categoría $\mathcal{C} = R$-**Mód**, un R-módulo izquierdo G es un cogenerador en $\mathcal{C}$ si y sólo si para cada R-módulo izquierdo M, si $m \in M$ es un elemento no cero, entonces existe un morfismo $f : M \to G$ tal que $f(m) \neq 0$.

Demostración. Sean G y M dos R-módulos izquierdos.

$\Rightarrow$] Si G cumple con ser un cogenerador en $\mathcal{C}$, entonces si $m \in M$ es un elemento distinto de cero, tenemos que para los morfismos $g, \widehat{0} : R \to M$, donde $g(r) = rm$ para cada $r \in R$, existe un morfismo $f : M \to G$ de tal forma que $fg \neq f\widehat{0}$, es decir que $fg \neq \widehat{0}$. Si sucediera que $f(m) = 0$, entonces $fg(1) = f(g(1)) = f(m) = 0$, pero por ser fg un R-morfismo esto implicaría que para cada $r \in R$,

$$fg(r) = fg(r1) = rfg(1) = r0 = 0$$

lo cual es una contradicción ya que $fg \neq \widehat{0}$. Por lo tanto $f(m) \neq 0$.

$\Leftarrow$] Si $u, v : X \to M$ son morfismos distintos en $\mathcal{C}$, entonces existe $x \in X$ tal que $u(x) \neq v(x)$, luego por hipótesis, para $m = u(x) - v(x) \neq 0$, existe un morfismo $f : M \to G$ en $\mathcal{C}$ que cumple que $f(m) \neq 0$. Se sigue que $fu(x) \neq fv(x)$, ya que en caso contrario se tendría que

$$f(m) = f(u(x) - v(x)) = f(u(x)) - f(v(x)) = 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $fu \neq fv$, es decir que G es un cogenerador en $\mathcal{C}$.

■

Definición 3.2.3. Por un $\mathcal{H}$-cogenerador en $\mathcal{C}$ queremos decir un conjunto indicado $\mathcal{G}$ de objetos en $\mathcal{C}$, tal que todos los productos de $\mathcal{G}$-objetos indicados por un conjunto existen en $\mathcal{C}$ y que los morfismos canónicos ι_A mencionados en la Definición 3.2.1 se encuentran en $\mathcal{H}$. $\mathcal{G}$ es un *$\mathcal{H}$-cogenerador $\mathcal{H}$-inyectivo* si, además, todos los objetos en $\mathcal{G}$ son $\mathcal{H}$-inyectivos.

Ejemplos 3.2.4.

1. Si en la categoría $\mathcal{C} = $ **Set** consideramos a $\mathcal{H} =$Mono(**Set**), entonces cada conjunto G que contenga al menos dos elementos distintos es un cogenerador en $\mathcal{C}$:

   Si G es un conjunto tal que $|G| \geq 2$, entonces sean $b, c \in G$ elementos fijos distintos entre sí. Ahora si $u, v : X \to A$ son funciones distintas, entonces existe $x \in X$ tal que $u(x) \neq v(x)$, luego definimos $h : A \to G$ como sigue

   $$h(a) = \begin{cases} b & si \quad a = u(x) \\ c & si \quad a \neq u(x) \end{cases}$$

   claramente la función h está bien definida y además se cumple que

   $$hu(x) = h(u(x)) = b \neq c = h(v(x)) = hv(x)$$

   por lo que $hu \neq hv$, obteniendo así que G es un cogenerador.

2. Bajo las condiciones del segundo ejemplo de los Ejemplos 3.1.2, para cualquier conjunto $c \notin B$, la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{k : B \cup \{c\} \to B \mid k \text{ es función y } k \restriction_B = id_B\}$$

es cogeneradora en $\mathcal{C}$:

Sean $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ funciones y $\alpha, \beta : f \to g$ morfismos distintos en $\mathcal{C}$, es decir funciones que hacen conmutativo al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Debido a que $\alpha \neq \beta$, existe $x \in X$ tal que $\alpha(x) \neq \beta(x)$, por lo cual si definimos una función $h : B \cup \{c\} \to B$ por

$$h(b) = \begin{cases} b & si \quad b \in B \\ \\ g(\alpha(x)) & si \quad b = c \end{cases}$$

esta cumple con ser un elemento de $\mathcal{F}$ y además la función $\gamma : Y \to B \cup \{c\}$ dada por

$$\gamma(y) = \begin{cases} g(y) & si \quad y \neq \alpha(x) \\ \\ c & si \quad y = \alpha(x) \end{cases}$$

(la cual está bien definida debido a que g es una función definida en todo Y), satisface que para cada $y \in Y$, si $y = \alpha(x)$, entonces

$$h\gamma(y) = h(\gamma(y)) = h(\gamma(\alpha(x))) = h(c) = g(\alpha(x)) = g(y)$$

en caso contrario, si $y \neq \alpha(x)$, entonces $h\gamma(y) = h(\gamma(y)) = h(g(y)) = g(y)$. Por lo tanto el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "g"'] & & B \cup \{c\} \arrow[dl, "h"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta, y de esta forma $\gamma : g \to h$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ que cumple que $\gamma\alpha(x) = \gamma(\alpha(x)) = c$ y a su vez $\gamma\beta(x) = \gamma(\beta(x)) = g(\beta(x))$, y debido a que $g(\beta(x)) \in B$ y $c \notin B$, se sigue que $\gamma\alpha(x) \neq \gamma\beta(x)$, concluyendo con esto que $\gamma : g \to h$ es un morfismo con codominio en $\mathcal{F}$ que cumple que $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$.

3. Si $\mathcal{C}$ =**Ab** y $\mathcal{H}$ = **Mono**($\mathcal{C}$), entonces el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo en $\mathcal{C}$:

Debido a que hemos comprobado ya que el grupo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo y que para cada conjunto I, el producto directo $\prod_{i \in I} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con las proyecciones π_i son un producto en $\mathcal{C}$, entonces por la observación realizada sobre la Definición 3.2.1 es suficiente observar que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, si $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces el morfismo canónico $\iota_A : A \to G^{\mathcal{C}(A,G)}$ es un elemento de $\mathcal{H}$, es decir un monomorfismo, debido a que las Proposiciones 3.2.2 y 3.1.7 nos indican que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador en esta categoría de grupos abelianos.

4. Dado un anillo R, en la categoría R-**Mód**, es posible encontrar en [36](pág. 530) y [37] (pág. 70) que el grupo abeliano $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo izquierdo inyectivo[2] (con multiplicación escalar dada por $sf : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, donde $sf : r \mapsto f(rs)$) y así, de manera similar al ejemplo 3. es posible comprobar que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un cogenerador inyectivo en la categoría R-**Mód** probando únicamente, a través de la Proposición 3.2.2, que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un cogenerador en esta categoría:

   Si M es un R-módulo izquierdo y $a \in M$ es distinto de cero, entonces por la Proposición 3.1.7, existe un morfismo de grupos $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de tal forma que $f(a) \neq 0$. Definamos ahora para cada $m \in M$, una función $f_m : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dada por $f_m(r) = f(rm)$, la cual cumple con ser un elemento de $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Podemos ahora definir una función $\varphi : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por $\varphi(m) = f_m$ para cada $m \in M$, la cual cumple lo siguiente:

   - Para cualesquiera $m, n \in M$, $\varphi(m+n) = \varphi(m)+\varphi(n)$ ya que si $r \in R$, entonces
   $$f_{m+n}(r) = f(r(m+n)) = f(rm+rn) = f(rm) + f(rn) = f_m(r) + f_n(r).$$
   - Si $r \in R$ y $m \in M$, entonces $\varphi(rm) = r\varphi(m)$ debido a que si $s \in R$, entonces
   $$f_{rm}(s) = f(s(rm)) = f((sr)m) = f_m(sr) = rf_m(s).$$

   Por lo tanto φ es un R-morfismo que cumple además que para $1 \in R$, $\varphi(a)(1) = f_a(1) = f(1a) = f(a) \neq 0$, obteniendo así que $\varphi(a) \neq \widehat{0} = 0$.

3.3. Cápsulas inyectivas

Para poder definir el concepto de cápsula inyectiva, necesitamos primero definir lo que es una extensión $\mathcal{H}$-esencial, para esto consideramos el primer tipo de esencialidad (ver Definición 3.3.1) mencionado en [9]; se invita al lector a revisar las diferentes nociones de "esencialidad" que se estudian en este artículo, donde se analiza con detalle las similitudes y diferencias entre estas formas de definir este concepto.

Definición 3.3.1. Un morfismo h en $\mathcal{H}$ es $\mathcal{H}$-*esencial* si para cada morfismo g en $\mathcal{C}$, si la composición gh está en $\mathcal{H}$, entonces g lo está. La clase de todos los morfismos $\mathcal{H}$-esenciales en $\mathcal{C}$ se denota por $\mathcal{H}^*$.

Para las categorías de módulos si consideramos a $\mathcal{H}$ como la clase de monomorfismos, entonces todo morfismo $f : A \to B$ que cumpla con ser $\mathcal{H}$-esencial, cumple con ser una extensión esencial de A (ver Definición 1.3.1), veamos esto a través del siguiente Lema:

Lema 3.3.2. Sea R un anillo y $\mathcal{H}$ =Mono(R-**Mód**). Si M es un R-módulo izquierdo, entonces un monomorfismo $f : M \to N$ es una extensión esencial de M si y sólo si f es un morfismo $\mathcal{H}$-esencial.

[2] Compárese también con el Lema 3.50 de [16] (pág. 164).

Demostración. Sea $f : M \to N$ un monomorfismo. Veamos lo siguiente:

$\Rightarrow]$ Si $f : M \to N$ es una extensión esencial de M y $g : N \to H$ es un R-morfismo que no es un elemento de $\mathcal{H}$, es decir que g no es un monomorfismo, entonces $ker(g) \neq 0$ y como $f[M] \leq_e N$, se cumple que $ker(g) \cap f[M] \neq 0$, luego debido a que f es un monomorfismo y a que existe $y \in ker(g) \cap f[M]$ tal que $y \neq 0$, entonces $f^{-1}[f[M] \cap ker(g)] \neq 0$, más aún podemos ver que se cumple lo siguiente

- Si $m \in f^{-1}[f[M] \cap ker(g)]$, entonces $f(m) \in f[M] \cap ker(g)$, por lo que $gf(m) = g(f(m)) = 0$, es decir que $m \in ker(gf)$. Por lo tanto $f^{-1}[f[M] \cap ker(g)] \subseteq ker(gf)$.

Lo anterior nos permite ver que $ker(gf) \neq 0$, concluyendo así que gf no es un monomorfismo, es decir que $gf \notin \mathcal{H}$.

$\Leftarrow]$ Si $f : M \to N$ no es una extensión esencial de M, entonces existe un submódulo no cero A de N tal que $f[M] \cap A = 0$. Luego el morfismo πf, donde $\pi : N \to N/A$ es el morfismo natural, es un monomorfismo debido a que si $m \in ker(\pi f)$, entonces $\pi f(m) = \pi(f(m)) = 0 = A$, por lo que $f(m) \in A$ y claramente $f(m) \in f[M]$, es decir que $f(m) \in f[M] \cap A$ por lo que $f(m) = 0$; se sigue debido a que f es un monomorfismo que $m = 0$ y por lo tanto $ker(\pi f) = 0$.

Sin embargo el morfismo π no cumple con ser un monomorfismo debido a que por ser $A \neq 0$ existen al menos dos elementos distintos, digamos a y 0, en A que cumplen que $\pi(a) = a + A = A = 0 = \pi(0)$. Por lo tanto f no es un morfismo $\mathcal{H}$-esencial. ■

Definición 3.3.3. Si A es un objeto de una categoría $\mathcal{C}$, $h : A \to I$ es un morfismo $\mathcal{H}$-esencial y I es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo, entonces al par (I, h) se le llamará *cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva* de A.

Proposición 3.3.4. Las cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas son esencialmente únicas, es decir que si para un objeto un objeto A en un categoría $\mathcal{C}$, se cumple que (I, h) y (J, k) son cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas de A, entonces existe un isomorfismo $f : I \to J$ que cumple que $k = fh$.

Demostración. Sean $h : A \to I$ y $k : A \to J$ morfismos $\mathcal{H}$-esenciales, con I, J objetos $\mathcal{H}$-inyectivos. Por ser J un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo existe $f : I \to J$ un morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $k = fh$ [3.1 a)], y como $h \in \mathcal{H}^*$, entonces $f \in \mathcal{H}$. De manera similar, la $\mathcal{H}$-inyectividad de I nos permite encontrar un morfismo $g : J \to I$ de $\mathcal{C}$ que cumple que $id_I = gf$ [3.1 b)], por lo que $gk = g(fh) = (gf)h = id_I h = h$, y debido a que $k \in \mathcal{H}^*$, se sigue que $g \in \mathcal{H}$; luego la $\mathcal{H}$-inyectividad de J nos permite nuevamente encontrar un morfismo $l : I \to J$ de tal forma que $id_J = lg$ [3.1 c)]. Pero esto implica que $l = l id_I = l(gf) = (lg)f = id_J f = f$, obteniendo así que $id_I = gf$ y a su vez $id_J = fg$, por lo que f es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & I \arrow[d, "f"] \\ & J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_I"'] & J \arrow[d, "g"] \\ & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "id_J"'] & I \arrow[d, "l"] \\ & J \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

$a)$ $\qquad$ $b)$ $\qquad$ $c)$

■

Corolario 3.3.5. Si para un objeto A en un categoría $\mathcal{C}$, (I, h) y (J, k) son cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas de A, entonces cada morfismo $f : I \to J$ en $\mathcal{C}$ que cumple que $k = fh$, es un isomorfismo.

Por la Proposición 3.3.4, si un objeto A en una categoría $\mathcal{C}$ tiene cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas, entonces a estas las denotaremos por $(E(A), \iota_A)$ o de forma mas simple por (EA, ι_A).

Ejemplos 3.3.6.

1. En la categoría **Set**, si $\mathcal{H}$ =Mono(**Set**), entonces la cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva de un conjunto A puede estar dada por

$$(EA, \iota_A) = \begin{cases} (A, id_A) & si \quad A \neq \emptyset \\ \\ (1, \varphi) & si \quad A = \emptyset \end{cases}$$

   (donde φ denota a la única función que va del conjunto vacío al 1) ya que tanto como id_A y φ cumplen con ser morfismos $\mathcal{H}$-esenciales.

2. Para cualquier anillo R, y cualquier objeto M en la categoría R-**Mód**, es decir cualquier R-módulo izquierdo M, existe un cápsula inyectiva $(E(M), \iota_M)$ de M, un resultado que podemos encontrar en [35](pág. 127).

Proposición 3.3.7. Sea R un anillo y $\mathcal{H}$ =Mono(R-**Mód**). Si A es un objeto de R-**Mód** y $E(A)$ es un objeto inyectivo, entonces $(E(A), \iota_A)$ es una cápsula inyectiva de A si y solo si $\iota_A : A \to E(A)$ es una extensión esencial de A.

Demostración. Se sigue directamente del Lema 3.3.2. ■

La Proposición anterior nos permite ver que para cada R-módulo izquierdo inyectivo M, si N es un submódulo esencial de M, entonces (M, i_N) es una cápsula inyectiva de N, donde $i_N : N \to M$ es el morfismo inclusión, debido a que $i_N[N] = N \leq_e M$.

Ejemplo 3.3.8. Dado un número entero primo $p \in \mathbb{Z}$, es posible observar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tiene exactamente $p-1$ elementos de orden p, a saber, $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}, \frac{2}{p} + \mathbb{Z}, ..., \frac{p-1}{p} + \mathbb{Z}$, por lo cual $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es isomorfo al submódulo $A = \mathbb{Z}(\frac{1}{p} + \mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, más aún podemos comprobar que $A \leq_e \mathbb{Z}_{p^\infty}$:

Si M es un submódulo no cero de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, entonces cada elemento $x \in M$ no cero puede ser escrito en la forma $x = \frac{m}{p^n} + \mathbb{Z}$ para algún $n > 0$ y de tal forma que m sea un primo relativo de p distinto de cero; luego, existen enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $ma + p^n b = 1$; se sigue que

$$x = (1)x = (ma + p^n b)x = max + p^n bx = max + 0 = max$$

por lo cual $ax = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}$, obteniendo con esto que $p^{n-1}ax = \frac{1}{p} + \mathbb{Z}$ es un elemento no cero de A y claramente $p^{n-1}ax \in M$. Así hemos obtenido que $A \cap M \neq 0$ y por lo tanto $A \leq_e \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Visto esto podemos notar que por ser $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ un $\mathbb{Z}$-módulo divisible (ver Ejemplo 1.1.17), este cumple con ser inyectivo, por lo cual si $f : \mathbb{Z}_p \to A$ es un isomorfismo, entonces por la Proposición 3.3.7 se cumple que $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, i_A f)$ es una cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}_p$.

Definición 3.3.9. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene *suficientes* $\mathcal{H}$*-inyectivos* si para cada objeto A en $\mathcal{C}$ hay un morfismo $\iota_A : A \to EA$ en $\mathcal{H}$, con EA un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo; si, además, se puede elegir ι_A para que sea $\mathcal{H}$-esencial, entonces $\mathcal{C}$ tiene *cápsulas* $\mathcal{H}$*-inyectivas* (a menudo también llamadas *envolventes*). Si, en cualquiera de los dos casos, existe un endofuntor E, que haga que $\iota = (\iota_A)_{A \in \mathcal{C}_0} : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow E$ sea una transformación natural, diremos entonces que $\mathcal{C}$ tiene *naturalmente suficientes* $\mathcal{H}$*-inyectivos* o que tiene *naturalmente cápsulas* $\mathcal{H}$*-inyectivas*, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} id_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}(f)"'] & E(A) \arrow[d, "E(f)"] \\ id_{\mathcal{C}}(B) \arrow[r, "\iota_B"'] & E(B) \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"'] & EA \arrow[d, "E(f)"] \\ B \arrow[r, "\iota_B"'] & EB \end{tikzcd}$$

En [38] podemos encontrar resultados que nos brindan condiciones necesarias y suficientes para que una categoría $\mathcal{C}$ cuente con suficientes $\mathcal{H}$-inyectivos. Concluiremos esta sección enunciando uno de estos resultados, cuya demostración puede ser consultada en la pág. 3 de [2] (compárese con el punto 2. del Lema 7. de [38], páginas 9 y 10):

Lema 3.3.10. Una categoría $\mathcal{C}$ con un $\mathcal{H}$-cogenerador $\mathcal{H}$-inyectivo tiene naturalmente suficientes $\mathcal{H}$-inyectivos.

3.4. No naturalidad de las cápsulas inyectivas

Ejemplo 3.4.1. Sea $\mathcal{C}$ = **Set** y $\mathcal{H}$ =Mono(**Set**). Si para cada conjunto A, elegimos a $(E(A), \iota_A)$ como en el Ejemplo 3.3.6, entonces no es posible encontrar un funtor $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que haga que $\iota = (\iota_A)_{A\in\mathcal{C}_0} : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow E$ sea una transformación natural, ya que de ser así entonces para los morfismos

$$\emptyset \xrightarrow{\varphi} 1 \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} 2$$

donde 1 y 2 son conjuntos, con uno y dos elementos respectivamente, y x y y son funciones distintas entre sí, tendríamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} id_{\mathcal{C}}(\emptyset) \arrow[r, "\iota_\emptyset"] \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}(\varphi)"'] & E\emptyset \arrow[d, "E(\varphi)"] \\ id_{\mathcal{C}}(1) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, shift right, "id_{\mathcal{C}}(x)"'] \arrow[d, shift left, "id_{\mathcal{C}}(y)"] & E1 \arrow[d, shift right, "E(x)"'] \arrow[d, shift left, "E(y)"] \\ id_{\mathcal{C}}(2) \arrow[r, "\iota_2"'] & E2 \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & 1 \arrow[d, "id"] \\ 1 \arrow[r, "id"] \arrow[d, shift right, "x"'] \arrow[d, shift left, "y"] & 1 \arrow[d, shift right, "E(x)"'] \arrow[d, shift left, "E(y)"] \\ 2 \arrow[r, "id"'] & 2 \end{tikzcd}$$

(donde $E(\varphi)$ es igual al morfismo id_1 debido a que este es el único morfismo del conjunto 1 en si mismo) lo cual implica, por la naturalidad de ι, que $E(x) = E(x)id = idx = x$ y a su vez $E(y) = E(y)id = idy = y$, lo que nos permite ver que $E(x) \neq E(y)$, pero por ser E un funtor se cumple a su vez que

$$E(x) = E(x)id = E(x)E(\varphi) = E(x\varphi) = E(\varphi) = E(y\varphi) = E(y)E(\varphi) = E(y)id = E(y)$$

arribando así a una contradicción.

La argumentación vista en el ejemplo anterior se puede trasladar a contextos mucho más elaborados, como lo veremos en el Ejemplo 3.4.2, para el cual si el lector desea tener mayor información de los términos mencionados, como *extensión algébrica* o *cerradura algebraica* puede consultar [40] o [18].

Ejemplo 3.4.2. Sea $\mathcal{C} = \textbf{Field}$ y elijamos a $\mathcal{H}$ como la clase de extensiones algebraicas. Un argumento que utiliza el Lema de Zorn (ver Proposición 2.48 de [40], pág. 76) muestra que $\mathcal{H}$-inyectivo significa algebraicamente cerrado, y la cápsula inyectiva de EK de un campo K es su cerradura algebraica.

Nuevamente, no es posible hallar un funtor $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que haga que $\iota = (\iota_A)_{A \in \mathcal{C}_0}$ sea una transformación natural, de lo contrario, los dos $\mathbb{R}$-automorfismos (es decir automorfismos que dejan fijos a los elementos de $\mathbb{R}$) $id, t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde $t(a + bi) = a - bi$ para cada $a + bi \in \mathbb{C}$, de la cerradura algebraica $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ nos daría el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "j"'] & E(\mathbb{R}) \arrow[d, "E(j)"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "id"'] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "t"] & E(\mathbb{C}) \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "E(t)"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "id"'] & E(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Luego, debido a que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, hook, "j"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "E(j)"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "id"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

debe conmutar, para el morfismo $E(j)$ tenemos dos opciones:

1. Si $E(j) = id$, entonces por la naturalidad de ι, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "id"] \arrow[d, "t"'] & E(\mathbb{C}) \arrow[d, "E(t)"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "id"'] & E(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

conmuta, obteniendo así que $E(t) = t$. Pero debido a que E es un funtor, entonces

$$E(j) = E(tj) = E(t)E(j) = tid = t,$$

lo cual es una contradicción.

2. Si $E(j) = t$, entonces una vez más, por ser E un funtor tenemos que

$$E(j) = E(tj) = E(t)E(j) = tt = id$$

arribando nuevamente a una contradicción.

Los ejemplos anteriores pueden verse como una consecuencia del Teorema 3.4.4, para el cual haremos uso del siguiente Lema:

Lema 3.4.3. Si una categoría $\mathcal{C}$ tiene naturalmente cápsulas inyectivas dadas por $\iota_A : A \to EA$ para cada objeto A en $\mathcal{C}$, entonces:

Si para cada objeto A, el morfismo $\iota_A : A \to E(A)$ es un monomorfismo y el morfismo $E(\iota_A)$ es un epimorfismo, entonces ι_A es un epimorfismo.

Demostración. Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Si $\alpha, \beta : E(A) \to B$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $\alpha\iota_A = \beta\iota_A$, entonces por ser E un funtor se cumple que $E(\alpha)E(\iota) = E(\alpha\iota_A) = E(\beta\iota_A) = E(\beta)E(\iota_A)$, pero por hipotesis $E(\iota_A)$ es un epimorfismo, por lo que $E(\alpha) = E(\beta)$. Tenemos además que por la naturalidad de ι, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
id_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}(\iota_A)"'] & E(A) \arrow[d, "E(\iota_A)"] \\
id_{\mathcal{C}}(EA) \arrow[r, "\iota_{EA}"] \arrow[d, shift right, "id_{\mathcal{C}}(\alpha)"'] \arrow[d, shift left, "id_{\mathcal{C}}(\beta)"] & E(EA) \arrow[d, shift right, "E(\alpha)"'] \arrow[d, shift left, "E(\beta)"] \\
id_{\mathcal{C}}(B) \arrow[r, "\iota_B"'] & E(B)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\iota_A"'] & EA \arrow[d, "E(\iota_A)"] \\
EA \arrow[r, "\iota_{EA}"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & EEA \arrow[d, shift right, "E(\alpha)"'] \arrow[d, shift left, "E(\beta)"] \\
B \arrow[r, "\iota_B"'] & EB
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que:

$$\iota_B\alpha = E(\alpha)\iota_{EA} = E(\beta)\iota_{EA} = \iota_B\beta$$

lo cual implica que $\alpha = \beta$ debido a que ι_B es un monomorfismo. Por lo tanto ι_A es un epimorfismo. ■

Teorema 3.4.4. Suponga que todo isomorfismo está en $\mathcal{H}^*$ y que todo morfismo h en $\mathcal{H}^*$ es un monomorfismo extremo de $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ no puede tener naturalmente cápsulas inyectivas, a menos que todos los objetos en $\mathcal{C}$ sean $\mathcal{H}$-inyectivos.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene naturalmente cápsulas inyectivas dadas, por $\iota_A : A \to EA$ para cada objeto A en $\mathcal{C}$ y sea $h : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{H}$. Si $f : X \to A$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, deseamos encontrar un morfismo g que haga conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Debido a que EA es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo, existe un morfismo $\alpha : Y \to EA$ de tal forma que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[r, "\iota_A"'] & EA
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Luego si logramos probar que ι_A es un isomorfismo, entonces $g = \iota_A^{-1}\alpha$ seria el morfismo buscado ya que $gh = (\iota_A^{-1}\alpha)h = \iota_A^{-1}(\alpha h) = \iota_A^{-1}(\iota_A f) = (\iota_A^{-1}\iota_A)f = f$. Para comprobar lo anterior veamos primero que $E(\iota_A) : E(A) \to E(EA)$ es en efecto un isomorfismo:

El morfismo $\iota_{EA} : EA \to EEA$ se encuentra en $\mathcal{H}$ por ser (EEA, ι_{EA}) una cápsula inyectiva de EA, y como EEA cumple con ser un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo, entonces existe un morfismo β de tal forma que $\beta\iota_{EA} = id_{EA}$, es decir que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "\iota_{EA}"] \arrow[dr, "id_{EA}"'] & EEA \arrow[d, "\beta"] \\
& EA
\end{tikzcd}$$

conmuta. Además, por ser id_{EA} un isomorfismo se cumple que $\beta\iota_{EA} = id_{EA} \in \mathcal{H}$ y por la $\mathcal{H}$-esencialidad de ι_{EA}, esto implica que $\beta \in \mathcal{H}$; ahora por la $\mathcal{H}$-inyectividad de EEA, existe un morfismo $\gamma : EA \to EEA$, de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} EEA \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "id_{EEA}"'] & EA \arrow[d, "\gamma"] \\ & EEA \end{tikzcd}$$

conmuta y debido a que $\gamma = \gamma id_{EA} = \gamma(\beta\iota_{EA}) = (\gamma\beta)\iota_{EA} = id_{EEA}\iota_{EA} = \iota_{EA}$, entonces $\iota_{EA}\beta = id_{EEA}$, obteniendo así que ι_{EA} es un isomorfismo.

Ahora, debido a que todo isomorfismo está en $\mathcal{H}^*$, entonces podemos asumir que $\iota_{EA} = id_{EA}$; luego para el morfismo ι_A tenemos que

$$\begin{tikzcd} id_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}(\iota_A)"'] & E(A) \arrow[d, "E(\iota_{EA})"] \\ id_{\mathcal{C}}(EA) \arrow[r, "\iota_{EA}"'] & E(EA) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\iota_A"'] & E(A) \arrow[d, "E(\iota_A)"] \\ EA \arrow[r, "id_{EA}"'] & E(EA) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que $E(\iota_A)\iota_A = id_{EA}\iota_A = \iota_A$, se sigue por el Corolario 3.3.5 que $E(\iota_A)$ es un isomorfismo.

Finalmente debido a que para cada objeto C de $\mathcal{C}$, el morfismo ι_C es un elemento de $\mathcal{H}^*$, entonces para cada $C \in \mathcal{C}_0$, el morfismo ι_C es un monomorfismo extremo (en particular un monomorfismo), lo cual implica por el Lema 3.4.3 que ι_A es también un epimorfismo y por lo tanto, por la Proposición 2.1.9, se cumple que ι_A es en efecto un isomorfismo. ■

Para un anillo R, podemos ver que por ser $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ un cogenerador inyectivo, por la Proposición 3.3.10, la categoría R-**Mód** tiene naturalmente suficientes inyectivos, más aún, como se mencionó en el segundo ejemplo de los Ejemplos 3.3.6, estas categorías tienen cápsulas inyectivas, pero como indica el Teorema 3.4.4, a menos de que todo objeto sea $\mathcal{H}$-inyectivo, estas no contarán con naturalmente cápsulas inyectivas. Para la demostración del Teorema 3.4.6 que se relaciona con este problema de existencia funtorial o de no naturalidad en la categoría $\mathbb{Z}$-**Mód**, demostraremos primero la siguiente Proposición:

Proposición 3.4.5. Sea R un anillo. Si M es un R-módulo izquierdo inyectivo, entonces M no tiene extensiones esenciales propias, es decir que si $f : M \to N$ es una extensión esencial de M, entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Si un monomorfismo $f : M \to N$ es una extensión esencial de A, entonces por ser M inyectivo existe un morfismo $g : N \to M$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_M"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego por el Lema 3.3.2, g es un monomorfismo, por lo que $g(fg) = id_M g = g id_N$, implica que $fg = id_N$. Por lo tanto g es un isomorfismo. ■

Para el enunciado y demostración del siguiente Teorema, (enunciado de una forma ligeramente distinta en [21] pág. 23) debemos considerar que si $(E(M), \iota_M)$ es una cápsula inyectiva de un $\mathbb{Z}$-módulo M, entonces ι_M es, por la manera en que hemos trabajo el concepto de inyectividad en las categorías de módulos, un monomorfismo, y de esta manera para facilitar la notación, podemos pensar a ι_M como el morfismo inclusión, de esta forma diremos simplemente que $E(M)$ es una cápsula inyectiva de M (haciendo alusión al morfismo ι_M en cada momento en que esto se mencione).

Teorema 3.4.6. No existe un funtor $F : \mathbb{Z}$-**Mód**$\to \mathbb{Z}$-**Mód** de tal forma que para cada objeto A de $\mathbb{Z}$-**Mód**, $F(A)$ sea isomorfo a la cápsula inyectiva $E(A)$ de A.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que existe este funtor F. Lo primero que debemos observar es que F preserva a los morfismos cero: el morfismo $\widehat{0} : A \to B$ siempre puede ser factorizado a través del módulo cero como $gf = \widehat{0}$, donde $f : A \to 0$ y $g : 0 \to B$ y debido a que $F(0) \cong E(0) = 0$, podemos ver que $F(\widehat{0}) = F(g)F(f)$ se factoriza a través del módulo cero, por lo que $F(\widehat{0})$ es el morfismo $\widehat{0} : F(A) \to F(B)$.

Consideremos ahora al $\mathbb{Z}$-módulo $A = \mathbb{Z}_2$ y a las proyecciones $\pi_i : A \oplus A \to A$ e inyecciones $\mu_i : A \to A \oplus A$ de la suma directa, (con $i = 1, 2$). Como consecuencia de la Proposición 1.3.4 se cumple que $A \oplus A \leq_e E(A) \oplus E(A)$, lo que implica que $E(A \oplus A) \cong E(A) \oplus E(A)$; se sigue que

$$F(A \oplus A) \cong E(A \oplus A) \cong E(A) \oplus E(A) \cong F(A) \oplus (A),$$

y a pesar de que no tenemos de manera inmediata información que nos indique si $F(\pi_i)$ y $F(\mu_i)$ son las proyecciones e inyecciones de esta suma directa, es posible en este caso particular, demostrar que esto se cumple:

Debido a que para cada $a \in A$, $\pi_i\mu_i(a) = \pi_i(\mu_i(a)) = a$, se cumple para cada i que $\pi_i\mu_i = id_A$, como consecuencia de esto

$$F(\pi_i)F(\mu_i) = F(\pi_i\mu_i) = F(id_A) = id_{F(A)}$$

es un isomorfismo, por lo cual $F(\mu_i)$ cumple con ser un monomorfismo y así

(1) $F(\mu_1)[F(A)] \cap ker(F(\pi_1)) = 0$, debido a que si $y \in F(\mu_1)[F(A)] \cap ker(F(\pi_1))$, entonces existe $x \in F(A)$ de tal forma que $y = F(\mu_1)(x)$ y

$$0 = F(\pi_1)(y) = F(\pi_1)(F(\mu_1)(x)) = F(\pi_1)F(\mu_1)(x) = id_A(x)$$

por lo que $x = 0$ y consecuentemente $y = F(\mu_1)(x) = F(\mu_1)(0) = 0$.

(2) $F(\mu_2)[F(A)] \leq ker(F(\pi_2))$, ya que si $y \in F(\mu_2)[F(A)]$ y $y = F(\mu_2)(x)$, entonces $F(\pi_1)(y) = F(\pi_1)F(\mu_2)(x)$ y como $\pi_1\mu_2 = \widehat{0}$, entonces $F(\pi_1)F(\mu_2) = \widehat{0}$ por lo que $F(\pi_1)(y) = 0$.

Por lo tanto, de los dos puntos anteriores se obtiene $F(\mu_1)[F(A)] \cap F(\mu_2)[F(A)] = 0$, lo cual implica que el submódulo $B = F(\mu_1)[F(A)] + F(\mu_2)[F(A)]$ de $F(A \oplus A)$ es isomorfo a $F(\mu_1)[F(A)] \oplus F(\mu_2)[F(A)]$. Además debido a para cada i claramente $F(\mu_i) : F(A) \to F(\mu_i)[F(A)]$ es un isomorfismo, entonces

$$F(\mu_1)[F(A)] + F(\mu_2)[F(A)] \cong F(A) \oplus F(A)$$

Luego como $F(A \oplus A) \cong E(A \oplus A)$, entonces $F(A \oplus A)$ debe tener un submódulo esencial C isomorfo a $A \oplus A$. Debemos notar que por ser $A = \mathbb{Z}_2$, este submódulo C debe contener exactamente cuatro elementos, a saber el 0 y otros tres elementos de orden 2.

Se cumple también por el Ejemplo 3.3.8, que $E(A) \cong \mathbb{Z}_{2^\infty}$, el cual es un módulo que contiene un solo elemento de orden 2. Entonces tanto B como $F(A \oplus A)$ que son isomorfos a $E(A) \oplus E(A)$, deben contener exactamente tres elementos de orden 2. Como resultado de lo anterior, se puede ver que $C \leq B$ y debido a que $C \leq_e F(A \oplus A)$, entonces $B \leq_e F(A \oplus A)$.

Por otra parte debido a que $F(A)$ es inyectivo, entonces $F(A) \oplus F(A)$ también lo es, y como $B \cong F(A) \oplus F(A)$, entonces por la Proposición 3.4.5, se cumple que B no tiene extensiones esenciales propias, por lo que $B = F(A \oplus A)$, es decir que

$$F(A \oplus A) = F(\mu_1)[F(A)] + F(\mu_2)[F(A)].$$

Puesto que $F(\pi_i)F(\mu_i) = id_{F(A)}$ para cada i, y $F(\pi_i)F(\mu_k)$ si $i \neq k$, entonces podemos ver que si $b \in F(A \oplus A)$, por la igualdad anterior, existen $a_1, a_2 \in F(A)$ de tal forma que $b = F(\mu_1)(a_1) + F(\mu_2)(a_2)$, por lo cual

$$(F(\mu_1)F(\pi_1) + F(\mu_2)F(\pi_2))(b) = F(\mu_1)F(\pi_1)(b) + F(\mu_2)F(\pi_2)(b)$$

donde

$$\begin{aligned} F(\mu_1)F(\pi_1)(b) &= F(\mu_1)F(\pi_1)\big[F(\mu_1)(a_1) + F(\mu_2)(a_2)\big] \\ &= F(\mu_1)F(\pi_1)F(\mu_1)(a_1) + F(\mu_1)F(\pi_1)F(\mu_2)(a_2) \\ &= F(\mu_1)(a_1) + 0 \\ &= F(\mu_1)(a_1) \end{aligned}$$

y de manera similar $F(\mu_2)F(\pi_2)(b) = F(\mu_2)(a_2)$, obteniendo así que $(F(\mu_1)F(\pi_1) + F(\mu_2)F(\pi_2))(b) = b$. Por lo tanto

$$F(\mu_1)F(\pi_1) + F(\mu_2)F(\pi_2) = id_{F(A \oplus A)},$$

lo cual implica que en efecto, los morfismos $F(\pi_i)$, $F(\mu_i)$ son las proyecciones e inclusiones respectivamente de la descomposición $F(A \oplus A) \cong F(A) \oplus F(A)$.

Finalmente sean $f : A \to A \oplus A$ el morfismo diagonal, es decir que $f(a) = (a, a)$ y $g : A \oplus A \to A$ el morfismo suma, donde $g(a_1, a_2) = a_1 + a_2$. Se cumple que $\pi_i f = id_A = g\mu_i$ para cada i, por lo que $F(\pi_i)F(f) = id_F(A) = F(g)F(\mu_i)$. Entonces

$$\begin{aligned} F(g)F(f) = F(g)id_{F(A \oplus A)}F(f) &= F(g)\big[F(\mu_1)F(\pi_1) + F(\mu_2)F(\pi_2)\big]F(f) \\ &= F(g)\big[F(\mu_1)F(\pi_1)F(f) + F(\mu_2)F(\pi_2)F(f)\big] \\ &= F(g)\big[F(\mu_1) + F(\mu_2)\big] \\ &= F(g)F(\mu_1) + F(g)F(\mu_2) \\ &= id_{F(A)} + id_{F(A)} \end{aligned}$$

y como $F(A) \cong E(A) \cong Z_{2^\infty}$, entonces $F(A)$ contiene elementos de orden mayor a 2, por lo que $F(g)F(f) \neq \widehat{0}$. Sin embargo, como para cada elemento $a \in A$ se cumple que $a + a = 0$, entonces $gf = \widehat{0}$ y como consecuencia $F(g)F(f) = F(gf) = F(\widehat{0}) = \widehat{0}$, arribando así a una contradicción. ■

Finalizamos esta sección comentando que si se desea continuar estudiando este problema de existencia/naturalidad, es posible analizar la Sección 4. de [2] y el artículo *The functor that wouldn't be* ([31]).

3.5. Estructuras de factorización.

A lo largo de esta y la siguiente sección, $\mathcal{C}$ denotará a una categoría arbitraria.

Definición 3.5.1. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ dos clases de morfismos de $\mathcal{C}$. El par $(\mathcal{E},\mathcal{H})$ se denomina una estructura de factorización para los morfismos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ se denomina $(\mathcal{E},\mathcal{H})$-estructurado si se cumple que:

1. La clase $\mathcal{E}$ es cerrada bajo composición por la izquierda con isomorfismos, es decir que si $e \in \mathcal{E}$ y f es un isomorfismo, entonces si la composición fe está definida, debe cumplirse que $fe \in \mathcal{E}$.

2. La clase $\mathcal{H}$ es cerrada bajo la composición por la derecha con isomorfismos, es decir que si $h \in \mathcal{H}$ y f es un isomorfismo, entonces si la composición hf está definida, debe cumplirse que $hf \in \mathcal{H}$.

3. Cada morfismo f en $\mathcal{C}$ tiene una factorización $f = he$, con $e \in \mathcal{E}$ y $h \in \mathcal{H}$.

4. $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de $(\mathcal{E},\mathcal{H})$-*diagonalización única*, es decir que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $h \in \mathcal{H}$ existe una única *diagonal* $d : B \to C$ que cumple que $de = f$ y $hd = g$.

Proposición 3.5.2. Si $\mathcal{C}$ está $(\mathcal{E},\mathcal{H})$-estructurado, entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $A \xrightarrow{e_i} C_i \xrightarrow{h_i} B$ son $(\mathcal{E},\mathcal{H})$-factorizaciones de $f : A \to B$, entonces existe un isomorfismo h que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_2"'] & C_1 \arrow[d, "h_1"] \arrow[dl, "h"'] \\ C_2 \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd}$$

2. $\textbf{Iso}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

3. Tanto $\mathcal{E}$ como $\mathcal{H}$ son cerrados bajo composición.

4. Si $gf \in \mathcal{H}$ con $g \in \mathcal{H}$, entonces $f \in \mathcal{H}$.

Demostración.

1. Por la propiedad de diagonalización, existen morfismos únicos h y k que hacen conmutar los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_2"'] & C_1 \arrow[d, "h_1"] \arrow[dl, "h"'] \\ C_2 \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "e_1"'] & C_2 \arrow[d, "h_2"] \arrow[dl, "k"'] \\ C_1 \arrow[r, "h_1"'] & B \end{tikzcd}$$

De esta forma se cumple que $(kh)e_1 = k(he_1) = ke_2 = e_1$ y $h_1(kh) = (h_1k)h = h_2h = h_1$, por lo que los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_1"'] & C_1 \arrow[d, "h_1"] \arrow[dl, "kh"'] \\ C_1 \arrow[r, "h_1"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e_1"'] & C_1 \arrow[d, "h_1"] \arrow[dl, "id_{C_1}"'] \\ C_1 \arrow[r, "h_1"'] & B \end{tikzcd}$$

conmutan, luego por unicidad tenemos que $kh = id_{C_1}$; de manera análoga es posible comprobar que $hk = id_{C_2}$. Por lo tanto h es un isomorfismo.

2. Si $f : A \to B$ es un isomorfismo de $\mathcal{C}$ y $A \xrightarrow{e} C \xrightarrow{h} B$ es una $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorización de f, entonces para $d = f^{-1}h$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "id_A"'] & C \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d"'] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

conmuta, luego $(ed)e = e(de) = eid_A = e$ y $h(ed) = (he)d = (fid_A)d = fd = h$, por lo que los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & C \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "id_C"'] \\ C \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & C \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "ed"'] \\ C \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

conmutan; se sigue por unicidad que $ed = id_C$ y por 3.2 también $de = id_A$. Por lo tanto e es un isomorfismo y como por hipótesis $\mathcal{H}$ es cerrado bajo composición con isomorfismos, entonces $f = he \in \mathcal{H}$. Similarmente para corroborar que $f \in \mathcal{E}$, basta considerar al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "id_B"] \arrow[dl, "d"'] \\ C \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

con $d = ef^{-1}$. Por lo tanto $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

3. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathcal{H}$, si $A \xrightarrow{e} D \xrightarrow{h} C$ es una $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorización para gf, entonces podemos construir de manera sucesiva los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d_1"'] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "id_A"'] & D \arrow[d, "d_1"] \arrow[dl, "d_2"'] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

y debido a que $gfd_2 = gd_1 = h$, entonces se obtiene también siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "id_A"'] & D \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "d_2"'] \\ A \arrow[r, "gf"'] & C \end{tikzcd}$$

Finalmente, si realizamos el mismo procedimiento que en el punto 2., entonces se obtiene que $gf \in \mathcal{H}$, es decir que $\mathcal{H}$ es cerrado bajo composición; para comprobar que esto se cumple también para $\mathcal{E}$ realiza un procedimiento análogo al visto para $\mathcal{H}$.

4. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos tales que $gf \in \mathcal{H}$ y $g \in \mathcal{H}$. Si $A \xrightarrow{e} D \xrightarrow{h} B$ es una $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorización de f, entonces tanto $(gh)e$ como $(gf)id_A$ son $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorizaciones de gf, por lo que por el punto 1., existe un isomorfismo φ que cumple que $\varphi e = id_A$. Se sigue que $e = \varphi^{-1}$, por lo que e cumple con ser un isomorfismo, y por lo tanto $f = he \in \mathcal{H}$.

■

3.6. Existencia de cápsulas inyectivas

En esta sección consideraremos a $\mathcal{H}$ como una subclase de $Mono(\mathcal{C})$ que es *isomorfismo cerrada*, es decir que contiene a todos los isomorfismos y es cerrada bajo la composición con estos, y veremos algunas condiciones que debe cumplir una categoría para contar con cápsulas inyectivas, siguiendo y exponiendo algunos de los resultados que podemos encontrar en [38] y [9].

Debido a su complejidad y extensión no se explicarán en su totalidad algunos temas implícitos del desarrollo de esta sección, tales como son, el porque podemos considerar al conjunto de extensiones de un objeto A (denotado por Σ en [9]) como un conjunto parcialmente ordenado (ver Proposición 3.6.5 y Teorema 3.6.13) y porque es necesaria la hipótesis de que la clase $\mathcal{H}$ sea derecha regular (ver Definición 3.6.4); sin embargo si consideramos que una extensión $f : B \to A$ de un objeto B nos indica que B es un subobjeto de A, entonces con base en la información expuesta en la sección 4.1 de [20], que habla de subobjetos, podemos decir lo siguiente al respecto:

Denotemos por X a la clase de subobjetos de A. Si retomamos la relación de orden $\leq$, definida en la sección 2.9, sobre la clase X, podemos considerar la relación "es isomorfo a" y particionar a los elementos de X en clases de equivalencia $[f] = \{g : f \cong g\}$. Luego formar la colección

$$Sub(A) = \{[f] : f \text{ es un monomorfismo y } cod(f) = A\}$$

y *redefinir* a los subobjetos de A como las clases de equivalencia determinadas por monomorfismos con codominio A. De esta forma obtenemos que $Sub(A)$ es una clase parcialmente ordenada por la relación

$$[f] \preceq [g] \Leftrightarrow f \leq g.$$

Llegado este punto debemos intentar "desvanecer" la diferencia entre clase de equivalencia y *representante*; por ejemplo podríamos optar por decir que "f es un subobjeto de A", cuando estrictamente lo que sucede es que estamos considerando a la clase $[f]$ como un subobjeto de A, de igual forma decir que "f es mas pequeño g" como subobjetos de A cuando lo que sucede realmente es que $[f] \preceq [g]$.

Lo que se espera al realizar este *abuso de lenguaje* es que podamos referirnos a los subobjetos de A únicamente a través de los representantes de clases, tomando en cuenta que la relación de isomorfismo, puede ayudar a preservar las propiedades de subobjeto de nuestro interés, resaltando que, desde un punto de vista categórico podría ser mas provechoso preguntar cuando dos objetos son isomorfos a cuando son iguales (en la sección 8 de [29] que tiene como nombre "*Equality versus isomorphism*" podemos hallar información sobre el porque en la Teoría de Categorías podría resultar adecuado considerar a la relación de isomorfismo entre objetos sobre la relación de igualdad entre estos)[3].

Como última observación, podemos encontrar en [1] (pág. 45) que bajo el Axioma de Elección para conjuntos, todo conjunto preordenado visto como categoría es *equivalente*[4] a un conjunto parcialmente orden (visto también como categoría).

Definición 3.6.1. Decimos que la categoría $\mathcal{C}$:

1. Cumple la *$\mathcal{H}$-condición de Banaschewski* si para cada morfismo h en $\mathcal{H}$ existe un morfismo g en $\mathcal{C}$ de tal forma que $gh \in \mathcal{H}^*$.

2. Tiene *$\mathcal{H}$-transferibilidad* si para cualquier par de morfismos con el mismo dominio $f : A \to B$ y $g : A \to C$, si $f \in \mathcal{H}$, entonces es posible completar el siguiente diagrama conmutativo con un morfismo $u \in \mathcal{H}$ y un morfismo v en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "u"'] & D \end{tikzcd}$$

Definición 3.6.2. Dado un conjunto parcialmente ordenado I, un *sistema directo* en $\mathcal{C}$ es un par ordenado $\big((A_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j)_{i\leq j}\big)$, abreviado $\{A_i, \varphi_i^j\}_I$, donde $(A_i)_{i\in I}$ es una familia indicada de objetos de $\mathcal{C}$ y $(\varphi_i^j : A_i \to A_j)_{i\leq j}$ es una familia indicada de morfismos para los cuales $\varphi_i^i = id_{A_i}$ para cada $i \in I$, y tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $i \leq j \leq k$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\varphi_i^k"] \arrow[dr, "\varphi_i^j"'] & & A_k \\ & A_j \arrow[ur, "\varphi_j^k"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 3.6.3. Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ cumple la *$\mathcal{H}$-condición de la cadena* si todo sistema directo $\{A_i, \varphi_i^j\}_I$, cuya clase indicadora I es un conjunto bien ordenado con un elemento mínimo 0 y $\varphi_0^i \in \mathcal{H}$ para cada $i \in I$, admite una "cota superior", es decir un pozo $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I}$ que cumple que $f_0 \in \mathcal{H}$ y $f_j\varphi_i^j = f_i$ para cada $i \leq j$.

La expresión "cota superior" usada en la definición anterior puede sugerirnos o hacernos pensar en que debe haber un orden impuesto de forma implícita en los objetos o morfismos del sistema directo (o bien de la categoría) que estemos considerando, sin embargo, debido a que esta noción difiere notoriamente (por proponer un pozo como una cota superior) con la relación de orden para morfismos mencionada al inicio de esta sección, se invita al lector a comparar la definición anterior con la definición de "límite directo" o "colímite" descrita en la pág. 238 de [35].

[3]Véase también [12], y [3] en su apartado "*The equivalence principle*".

[4]La definición de categorías equivalentes puede encontrarse en [1] (pág. 36) o bien en la sección 7.9 de [4].

Definición 3.6.4. Diremos que la clase $\mathcal{H}$ cumple con ser derecha regular si para cada morfismo f de $\mathcal{H}$ se cumple que para cualquier morfismo g de $\mathcal{C}$, la igualdad $gf = f$ implica que g es un isomorfismo.

Proposición 3.6.5. Sea $\mathcal{E}$ una clase de morfismos de $\mathcal{C}$ derecha regular. Si $\mathcal{C}$ está $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-estructurado y $\mathcal{E}$-biencopotenciado, entonces la $\mathcal{H}$-condición de la cadena implica la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski.

Demostración. Sea $h : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{H}$ y consideremos a la siguiente subclase de la clase de $\mathcal{E}$-extensiones de B, la cual está parcialmente ordenada por la relación $\leq$ (ver Definición 2.9.2):

$$\Sigma = \{g : B \to C \mid g \in \mathcal{E}, gh \in \mathcal{H}\}$$

Esta clase cumple con ser un conjunto debido a que $\mathcal{C}$ en este caso es $\mathcal{E}$-biencopotenciado y Σ contiene solo $\mathcal{E}$-extensiones del objeto B, más aún Σ es no vacío ya que el morfismo identidad id_B es un elemento de $\mathcal{E}$ por ser un isomorfismo y claramente $id_B h = h$ es un elemento de $\mathcal{H}$. Ahora si $\mathcal{A} = \{g_i : B \to C_i\}_{i \in I}$ es una cadena en Σ, entonces debido a que $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$, se cumple que $\mathcal{A}$ es también un conjunto, por lo cual, por el Teorema del Buen Orden [5] existe una buena ordenación para $\mathcal{A}$, digamos $\mathcal{A} = \{g_\beta : B \to C_\beta\}_{\beta < \gamma}$, donde γ es el ordinal asociado al orden de este conjunto. Ahora si denotamos por

(1) $A_0 = A$, $A_1 = B$ y $A_{\beta+2} = C_\beta$ para cada $\beta < \gamma$,

(2) $\varphi_0^1 = h$, $\varphi_1^{\beta+2} = g_\beta \in \mathcal{A}$ y $\varphi_\alpha^\beta : A_\alpha \to A_\beta$ a los morfismos que nos brinda la relación $g_\alpha \leq g_\beta$ para cada $0 \leq \alpha \leq \beta < \gamma$,

entonces podemos considerar al sistema directo $\{A_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}_I$, donde $I = \gamma + 2$, que con diagramas se vería así:

$$\begin{tikzcd}
 & & C_0 \arrow[d, dashed] & & & & A_2 \arrow[d, dashed, "\varphi_2^3"] \\
 & & C_1 \arrow[d, dashed] & & & & A_3 \arrow[d, dashed, "\varphi_3^4"] \\
A \arrow[r, "h"] & B \arrow[ruu, bend left, "g_0"] \arrow[ru, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] \arrow[rd, "g_\beta"'] & C_2 \arrow[d, dotted, no head] & = & A_0 \arrow[r, "\varphi_0^1"] & A_1 \arrow[ruu, "\varphi_1^2"] \arrow[ru, "\varphi_1^3"'] \arrow[r, "\varphi_1^4"'] \arrow[rd, "\varphi_1^{\beta+2}"'] & A_4 \arrow[d, dotted, no head] \\
 & & C_\beta \arrow[d, dotted] & & & & A_{\beta+2} \arrow[d, dotted] \\
 & & {} & & & & {}
\end{tikzcd}$$

Es posible observar ver que para cada $\alpha \in I$, se cumple que $\varphi_0^\alpha = \varphi_1^\alpha h = g_\beta h$ para algún $\beta < \gamma$, y debido a que $g_\beta \in \Sigma$, entonces $\varphi_0^\alpha = g_\beta h \in \mathcal{H}$, luego por la $\mathcal{H}$-condición de la cadena, existe un pozo $(A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} Z)_I$ de tal forma que $f_0 \in \mathcal{H}$ y $f_\beta \varphi_\alpha^\beta = f_\alpha$ para cada $\alpha \leq \beta$.

Ahora sea $A_1 \xrightarrow{e_1} D \xrightarrow{h_1} Z$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorización para f_1. Debido a que $f_0 = f_1 \varphi_0^1 = f_1 h = (h_1 e_1) h = h_1(e_1 h) \in \mathcal{H}$, por el punto 4. de la Proposición 3.5.2 se cumple que

[5] El Teorema del Buen Orden es una equivalencia del Axioma de Elección, resultado que podemos encontrar en [23].

$e_1 h$ es un elemento de $\mathcal{H}$ y por lo tanto $e_1 \in \Sigma$, más aún, por la propiedad de $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-diagonalización única, para cada $\alpha \in I$ mayor a 1, existe un morfismo d_α que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1^\alpha"] \arrow[d, "e_1"'] & A_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \arrow[dl, "d_\alpha"'] \\ D \arrow[r, "h_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

obteniendo con esto que e_1 es una cota para $\mathcal{A}$, debido a que $\varphi_1^{\beta+2} = g_\beta$ para cada $\beta < \gamma$. Luego por el Lema de Zorn existe un elemento $\leq$-máximo en Σ, denotémoslo por e, que hace que eh sea un morfismo $\mathcal{H}$-esencial:

Si $g : M \to N$ en un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $geh \in \mathcal{H}$, entonces sea $M \xrightarrow{e_g} H \xrightarrow{h_g} N$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$-factorización para g. Debido a que $h_g(e_g eh) = (h_g e_g)eh = geh \in \mathcal{H}$, se cumple que $e_g eh \in \mathcal{H}$, lo que implica que $e_g e \in \Sigma$ y como e_g cumple que $e_g e = e_g e$, entonces $e \leq e_g e$, además por ser e un elemento máximo de Σ, se tiene también que $e_g e \leq e$, por lo cual $e = e_g e$. Finalmente por ser $\mathcal{E}$ derecha regular se cumple que e_g es un isomorfismo y por lo tanto $g = h_g e_g \in \mathcal{H}$. ■

Definición 3.6.6. Un objeto A en $\mathcal{C}$ es llamado un $\mathcal{H}$-retracto de su $\mathcal{H}$-extensión $f : A \to B$, si existe un morfismo $g : B \to A$ en $\mathcal{C}$, llamado *retracción*, que cumpla que $gf = id_A$ (es decir que f tenga una *inversa por la izquierda*). Diremos además que A es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto si es un $\mathcal{H}$-retracto de cada una de sus $\mathcal{H}$-extensiones.

Proposición 3.6.7. Toda retracción es un epimorfismo.

Demostración. Si $g : B \to A$ es una retracción de un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{H}$, entonces si $u, v : A \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que $ug = vg$, entonces

$$u = uid_A = u(gf) = (ug)f = (vg)f = v(gf) = vid_A = v.$$

■

Lema 3.6.8.

1. Todo objeto $\mathcal{H}$-inyectivo es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto. El recíproco se cumple si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-transferibilidad o si $\mathcal{C}$ tiene suficientes $\mathcal{H}$-inyectivos.

2. Todo $\mathcal{H}$-retracto absoluto no tiene $\mathcal{H}$-extensiones esenciales propias. El recíproco se cumple si $\mathcal{C}$ cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski.

Demostración.

1. $\Rightarrow]$ Sea E es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo, si $h : E \to D$ es una $\mathcal{H}$-extensión, entonces existe un morfismo $g : D \to E$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "id_E"'] & D \arrow[d, "g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

es decir que $gh = id_E$. Debido a que la elección de h fue arbitraria, se cumple que E es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto.

$\Leftarrow]$ Sea E un objeto en $\mathcal{C}$, veamos lo siguiente:

- Si E es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto y $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-transferibilidad, entonces si $h : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{H}$ y $f : A \to E$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces por la $\mathcal{H}$-transferibilidad, se cumple que existen morfismos $v : B \to D$ y $u : E \to D$ con $u \in \mathcal{H}$ que hacen conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ E \arrow[r, "u"'] & D \end{tikzcd}$$

luego por ser u una $\mathcal{H}$-extensión de E, existe un morfismo $g : D \to E$ de tal forma que $gu = id_E$; así, se obtiene que $f = id_E f = (gu)f = g(uf) = g(vh) = (gv)h$, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "gv"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Por lo tanto E es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo.

- En cambio si $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, entonces para el objeto E existe un morfismo $u : E \to F$ en $\mathcal{H}$, con F un objeto $\mathcal{H}$-inyecto; se sigue, por la $\mathcal{H}$-inyectividad de F, que existe un morfismo $v : B \to F$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "v"] \\ E \arrow[r, "u"'] & F \end{tikzcd}$$

De manera análoga a lo visto en el punto anterior, en este caso también se obtiene que si E es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto, entonces E es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo.

2. $\Rightarrow$] Sea E es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto. Si $f : E \to F$ es una extensión $\mathcal{H}$-esencial, entonces existe un epimorfismo $g : F \to E$ tal que $gf = id_E$, y debido a que $\mathcal{H}$ contiene a id_E, por ser este un isomorfismo, entonces por ser la $\mathcal{H}$-esencialidad de f, se cumple que $g \in \mathcal{H}$, es decir que g es también un monomorfismo. Se sigue que

$$g(fg) = (gf)g = id_E g = g id_F$$

y por ser g un monomorfismo lo anterior implica que $fg = id_F$. Por lo tanto f es un isomorfismo, obteniendo que f no es una extensión $\mathcal{H}$-esencial propia.

$\Leftarrow$] Sea A un objeto en $\mathcal{C}$ que no tiene extensiones $\mathcal{H}$-esenciales propias. Si $\mathcal{C}$ cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski, entonces para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{H}$, existe un morfismo $g : B \to C$ en $\mathcal{C}$ de tal forma que $gf \in \mathcal{H}^*$, por lo cual $gf : A \to C$ es una extensión $\mathcal{H}$-esencial de A, y por lo tanto, un isomorfismo. Sea $\varphi = (gf)^{-1}g$, podemos ver que

$$\varphi f = ((gf)^{-1}g)f = (gf)^{-1}(gf) = id_A$$

por lo que $\varphi : B \to A$ es una retracción de f. Como esto se cumple para cada $\mathcal{H}$-extensión de A, entonces A es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto.

■

Como consecuencia del Lema anterior, tenemos el Teorema siguiente, el cual es nombrado como el Primer Teorema de Inyectividad en [9]:

Teorema 3.6.9. (Primer Teorema de Inyectividad). Si $\mathcal{C}$ cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski y tiene además $\mathcal{H}$-transferabilidad, entonces los siguiente puntos son equivalentes para cada objeto A de $\mathcal{C}$:

1. A es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo.

2. A es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto.

3. A no tiene extensiones $\mathcal{H}$-esenciales propias.

Definición 3.6.10. Se dice que un morfismo $\mathcal{H}$-esencial f es máximo, si $gf \in \mathcal{H}^*$ implica que g es un isomorfismo.

Teorema 3.6.11. (Segundo Teorema de Inyectividad).

1. Si $f : A \to B$ es una extensión $\mathcal{H}$-esencial de A y B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto, entonces f es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A.

2. Si $\mathcal{C}$ tiene la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski y $\mathcal{H}$ es cerrado bajo composición, entonces: si $f : A \to B$ es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A, entonces B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto.

3. Si (B, f) es una cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva de A, entonces f es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A.

4. Si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-transferibilidad, cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski y $\mathcal{H}$ es cerrado bajo composición, entonces para toda extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima $f : A \to B$ de A, se cumple que (B, f) es una cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva de A.

Demostración.

1. Si $g : B \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $gf \in \mathcal{H}^*$, entonces por la $\mathcal{H}$-esencialidad de f, tenemos que $g \in \mathcal{H}$, luego debido a que B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto, existe un morfismo $\varphi : C \to B$ de tal forma que $\varphi g = id_B$. Se sigue que $\varphi g f \in \mathcal{H}$ y como gf es $\mathcal{H}$-esencial, entonces $\varphi \in \mathcal{H}$ cumple con ser un monomorfismo, por lo cual $\varphi g \varphi = \varphi$ implica que $g\varphi = id_C$. Por lo tanto g es un isomorfismo y así f es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A.

2. Sea A un objeto de $\mathcal{C}$ y $f : A \to B$ una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A. Si $g : B \to C$ es un morfismo en $\mathcal{H}$, entonces por hipótesis se cumple que $gf \in \mathcal{H}$, luego por la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski, existe un morfismo $h : C \to D$ en $\mathcal{C}$ que cumple que $(hg)f = h(gf) \in \mathcal{H}^*$; se sigue por la maximalidad de f que hg es un isomorfismo. Luego el morfismo $(hg)^{-1}h : C \to B$ es una inversa izquierda de g ya que
$$[(hg)^{-1}h]g = (hg)^{-1}(hg) = id_B.$$
Debido a que esto se cumple para cualquier $\mathcal{H}$-extensión de B, tenemos que B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto.

3. Por el punto 1. del Lema 3.6.8, se cumple que B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto, por lo cual por el primer punto de este Teorema, se sigue que f es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A.

4. Si $f : A \to B$ es una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A, entonces por el punto 1. se cumple que B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto, luego por el Teorema 3.6.9 se cumple que B es un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo y por lo tanto (B, f) es una cápsula inyectiva de A.

■

Definición 3.6.12. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-cotas si toda fuente $(A \xrightarrow{h_i} A_i)_{i\in I}$ de morfismo de $\mathcal{H}$ indicada por un conjunto I tiene una cota superior; es decir, un morfismo $h : A \to B$ en $\mathcal{H}$ que cumple que para cada $i \in I$, existe un morfismo $f_i : A_i \to B$ de tal forma que $h = f_i h_i$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_i"] \arrow[dr, "h"'] & A_i \arrow[d, "f_i"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Lema 3.6.13. Si $\mathcal{H}$ es derecha regular y $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{H}^*$-biencopotenciada que cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski, entonces: Si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-cotas, entonces cada objeto A de $\mathcal{C}$ tiene una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima.

Demostración. Sea A un objeto de $\mathcal{H}$ y consideremos a $\Sigma = \{h_\alpha : A \to A_\alpha \mid \alpha \in I, h_\alpha \in \mathcal{H}^*\}$. Una vez mas, debido a que $\mathcal{C}$ es $\mathcal{H}^*$-biencopotenciado, $(\Sigma, \leq)$ es un conjunto no vacío parcialmente ordenado.

Puesto que $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{H}$-cotas, para toda cadena $\mathcal{A} = \{h_\beta : A \to A_\beta\}_{\beta\in J}$ en Σ, existe un morfismo $h : A \to Y$ en $\mathcal{H}$, que cumple que para cada $\beta \in J$ existe un morfismo f_β que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[dr, "h"'] & A_i \arrow[d, "f_\beta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Luego, por la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski, existe un morfismo $g : Y \to B$ tal que $gh \in \mathcal{H}^*$; el morfismo gh cumple con ser una cota de $\mathcal{A}$ en X ya que si $h_\beta \in \mathcal{A}$, entonces $(gf_\beta)h_\beta = gh$. Se sigue por el Lema de Zorn, que Σ tiene un elemento máximo, digamos f, que cumple con ser una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima de A:

Si $gf \in \mathcal{H}^*$, entonces claramente $f \leq gf$ y por la maximalidad de f, se tiene que $gf \leq f$, por lo cual $gf = f$; se sigue por la regularidad derecha de $\mathcal{H}$ que g es un isomorfismo. ■

Enunciamos, a modo de conclusión, el Tercer Teorema de Inyectividad estudiado en [9], el cual nos brinda condiciones necesarias y suficientes para que una categoría cuente con cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas:

Teorema 3.6.14. (Tercer Teorema de Inyectividad). Sea $\mathcal{H}$ cerrada bajo composición y derecha regular, entonces $\mathcal{C}$ tiene cápsulas $\mathcal{H}$-inyectivas, si y sólo si, tiene $\mathcal{H}$-cotas, $\mathcal{H}$-transferibilidad, es $\mathcal{H}^*$-biencopotenciado y cumple la $\mathcal{H}$-condición de Banaschewski.

Demostración. La necesidad se obtiene directamente del echo de que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, el objeto $E(A)$ es por hipótesis un objeto $\mathcal{H}$-inyectivo. En cambio, para la suficiencia basta con observar que bajo las hipótesis dadas, por el Lema 3.6.13, todo objeto de A cuenta con una extensión $\mathcal{H}$-esencial máxima $f : A \to B$, luego por el punto 2. del Teorema 3.6.11 se cumple que B es un $\mathcal{H}$-retracto absoluto. Concluyendo por el Teorema 3.6.9 que (B, f) es una cápsula $\mathcal{H}$-inyectiva de A.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Jiří Adámek, Horst Herrlich y George E. Strecker. *Abstract and concrete categories. The joy of cats*. English. New York etc.: John Wiley &| Sons, Inc., 1990. ISBN: 0-471-60922-6.

[2] Jiří Adámek et al. "Injective hulls are not natural." English. En: *Algebra Universalis* 48.4 (2002), págs. 379-388. ISSN: 0002-5240. DOI: 10.1007/s000120200006.

[3] Benedikt Ahrens y Paige Randall North. "Univalent Foundations and the equivalence principle". En: *Reflections on the Foundations of Mathematics*. Springer, 2019, págs. 137-150.

[4] Steve Awodey. *Category theory*. Oxford university press, 2010.

[5] Reinhold Baer. "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group". English. En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 46 (1940), págs. 800-806. ISSN: 0002-9904. DOI: 10.1090/S0002-9904-1940-07306-9.

[6] B. Banaschewski. *Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras*. English. Proc. Conf. universal Algebra, Queen's Univ., Kingston 1969, 131-147 (1970). 1970.

[7] B. Banaschewski. "When are divisible Abelian groups injective?" English. En: *Quaestiones Mathematicae* 4 (1981), págs. 285-307. ISSN: 1607-3606. DOI: 10.1080/16073606.1981.9632250.

[8] Michael Barr. "The existence of injective effacements". En: *Canadian Mathematical Bulletin* 18.1 (1975), págs. 1-6.

[9] H. Barzegar, M. M. Ebrahimi y M. Mahmoudi. "Essentiality and injectivity". English. En: *Applied Categorical Structures* 18.1 (2010), págs. 73-83. ISSN: 0927-2852. DOI: 10.1007/s10485-008-9165-0.

[10] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. Volume 1: Basic category theory*. English. Vol. 50. Encycl. Math. Appl. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. ISBN: 0-521-44178-1.

[11] Andreas BM Brunner, Hugo L Mariano y Samuel G Da Silva. "Categorial forms of the axiom of choice". En: *Logic Journal of the IGPL* 25.4 (2017), págs. 408-430.

[12] Thierry Coquand y Nils Anders Danielsson. "Isomorphism is equality". En: *Indagationes Mathematicae* 24.4 (2013), págs. 1105-1120.

[13] Víctor Arellano de la Cruz. "La Inyectividad Relativa a Clases de Módulos". Tesis de mtría. Universidad Autónoma Metropolina, 2015.

[14] Alan Day. "Injectivity in equational classes of algebras". English. En: *Canadian Journal of Mathematics* 24 (1972), págs. 209-220. ISSN: 0008-414X. DOI: 10.4153/CJM-1972-017-8.

[15] Beno Eckmann y A. Schopf. "Über injektive Moduln". German. En: *Archiv der Mathematik* 4 (1953), págs. 75-78. ISSN: 0003-889X. DOI: 10.1007/BF01899665.

[16] Carl Faith. *Algebra: rings, modules and categories I*. Vol. 190. Springer Science & Business Media, 2012.

[17] Yun Fan, Q. Y. Xiong e Y. L. Zheng. *A course in algebra*. English. Singapore: World Scientific, 2000. ISBN: 981-02-4061-9.

[18] John B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. English. Addison-Wesley Series in mathematics. Reading, Mass.-Palo Alto-London-DonMills, Ontario: Addison-Wesley Publishing Company. xvi, 447 p. (1967). 1967.

[19] P. Gabriel. "Des catégories abéliennes". French. En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 90 (1962), págs. 323-448. ISSN: 0037-9484. DOI: 10.24033/bsmf.1583.

[20] Robert Goldblatt. *Topoi: the categorial analysis of logic*. Elsevier, 2014.

[21] Kenneth R. Goodearl. *Ring theory. Nonsingular rings and modules*. English. Vol. 33. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, 1976.

[22] A. Grothendieck. "Sur quelques points d'algèbre homologique". French. En: *Tohoku Mathematical Journal. Second Series* 9 (1957), págs. 119-221. ISSN: 0040-8735.

[23] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[24] H Herrlich, G Salicrup y GE Strecker. "Factorizations, denseness, separation, and relatively compact objects". En: *Topology and its Applications* 27.2 (1987), págs. 157-169.

[25] Wilfrid Hodges y Saharon Shelah. "Naturality and definability. I". English. En: *Journal of the London Mathematical Society. Second Series* 33 (1986), págs. 1-12. ISSN: 0024-6107. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.1.1.

[26] Friedrich Kasch. *Modules and rings*. Vol. 17. Academic press, 1982.

[27] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*. English. Vol. 189. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 1999. ISBN: 0-387-98428-3.

[28] J. Lambek y P. J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*. English. Vol. 7. Camb. Stud. Adv. Math. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[29] Barry Mazur. *When is one thing equal to some other thing?* Citeseer, 2008.

[30] Barry Mitchell. *Theory of categories*. English. New York and London: Academic Press. XI, 273 p. (1965). 1965.

[31] Y. T. Rhineghost. "The functor that wouldn't be". English. En: *Categorical perspectives. Papers from the international conference held in honor of George E. Strecker on the occasion of his 60th birthday at Kent State University, Kent, OH, USA, August 1998*. Boston, MA: Birkhäuser, 2001, págs. 29-35. ISBN: 0-8176-4186-6.

[32] Hugo Alberto Rincón-Mejía. *Álgebra lineal*. Spanish. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2001. ISBN: 968-36-9263-X.

[33] Juan Fernando de la Rosa Reyes. "Categoría de Módulos". Tesis de mtría. Universidad de La Laguna, 2015.

[34] Joseph J Rotman. *An introduction to the theory of groups*. Vol. 148. Springer Science & Business Media, 2012.

[35] Joseph J Rotman y Joseph Jonah Rotman. *An introduction to homological algebra.* Vol. 2. Springer, 2009.

[36] Joseph J. Rotman. *Advanced modern algebra. Part 1.* English. 3rd edition. Vol. 165. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2015. ISBN: 978-1-4704-1554-9.

[37] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra.* English. Pure and Applied Mathematics, 85. New York-San Francisco-London: Academic Press. XI, 376 p. $ 26.50 (1979). 1979.

[38] Walter Tholen. "Injective objects and cogenerating sets". English. En: *Journal of Algebra* 73 (1981), págs. 139-155. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/0021-8693(81)90351-3.

[39] Jaap Van Oosten. *Basic category theory.* Aarhus Universitet. Basic Research in Computer Science [BRICS], 1995.

[40] Felipe Zaldívar. *Teoría de Galois.* Anthropos Editorial, 1996.

Índice alfabético