BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

GENERALIZACIONES DE LOS OPERADORES NORMALES EN LOS ESPACIOS DE HILBERT

T E S I S

para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

presenta:

MANUEL FEBRONIO RODRÍGUEZ

director de tesis:

DR. SLAVISA DJORDJEVIC

PUEBLA, PUE. *26 de Junio de 2013*

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el apoyo que me brindaron y por la paciencia que me tuvieron mientras me dedicaba al estudio, ya que sin ellos esto no sería posible.

Así mismo agradezco a cada uno de mis hermanos, porque siempre han estado conmigo en los momentos malos y buenos de mi vida.

Le agradezco al Dr. Slavisa Djordjevic por aceptar dirigir esta tesis, por el tiempo dedicado a la misma, por sus observaciones y por sus valiosas sugerencias.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla que desde el momento en que ingresé a la licenciatura siempre tuve su apoyo como profesor, por la revisión crítica de esta tesis, por sus comentarios y por sus observaciones.

También le agradezco al M.C. Juan Francisco Estrada por sus valiosas observaciones a este trabajo y por la revisión de la misma.

Al Dr. Javier Mendoza por sus observaciones aportadas a esta tesis y por la revisión de la misma.

De la misma manera les agradezco a los profesores Angel Contreras Pérez y Fernando Castillo por sus enseñanzas.

Les doy las gracias a cada uno de los maestros que he tenido hasta ahora, por sus buenos consejos y enseñanzas.

Finalmente agradezco a cada uno de mis amigos que siempre me opoyaron a seguir adelante, gracias por la amistad de cada un de ellos.

Introducción

En la actualidad la rama de estudio más interesante de operadores lineales ha sido la investigación de algunas clases de operadores especiales, particularmente generalizaciones de los operadores normales, tal como casinormal, hiponormal, paranormal, normaloide, entre otras.

Por tal motivo, nos hemos propuesto estudiar algunas clases de operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert que pertenecen a una de las clases que generalizan a los operadores normales.

Estudiaremos propiedades más relevantes de tales operadores, principalmente sus propiedades espectrales. Ya que el espectro de un operador lineal define su comportamiento en general, es por ello que el análisis espectral de operadores lineales es uno de los campos más importantes de la teoría de operadores, en el cual muchos matemáticos trabajan, particularmente de los operadores normales. Además, la teoría espectral en ciertas clases de los operadores que generalizan los operadores normales, como las ya mencionadas anteriormente, tienen una implicación directa en ecuaciones diferenciales e integrales y como consecuencia de los anteriores, un impacto en mecánica, teoría cuántica, entre otros.

Como ya mencionamos anteriormente, el objetivo general de esta tesis es el estudio de diferentes generalizaciones de los operadores normales en los espacios de Hilbert.

Para ello usaremos métodos modernos del análisis funcional, teoría de operadores, teoría espectral, análisis complejo, teoría de la medida, etc.

Esta tesis se divide en tres grandes capítulos.

En el capítulo 1 nuestro objetivo es enunciar algunas definiciones, propiedades y resultados de la teoría de espacios de Banach y de Hilbert y obviamente de operadores lineales acotadas en tales espacios, los cuales servirán de base para los capítulos posteriores.

En el capítulo 2 nuestro principal objetivo es la teoría espectral de los operadores normales. Discutiremos las propiedades de los operadores auto-adjuntos , positivos, unitarios, etc. necesarios para establecer la representación espectral de los operadores normales y para el desarrollo de tercer capítulo.

Finalmente, en capítulo 3 estudiamos algunos operadores que pertenecen a una clase que generalizan a los operadores normales. Empezamos por estudiar las propiedades más importantes de los operadores normaloide y espectraloide. En seguida, introducimos a los operadores paranormales, hiponormales y quasinormales con sus respectivas propiedades. También daremos y demostraremos algunos ejemplos de tales operadores, como son los desplazamientos unilaterales.

Finalmente daremos la relación que existen entre los operadores que generalizan los operadores normales. Demostraremos que las siguientes contenciones son ciertas y estrictas, es decir, existen operadores hiponormales que no son quasinormales, también existen operadores paranormales que no son hiponormales y también existen operadores normaloides que no son paranormales.

$$Quasinormal \subset Hiponormal \subset Paranormal \subset Normaloide \subset Espectraloide.$$

Índice general

GENERALIZACIONES DE LOS OPERADORES NORMALES EN LOS ESPACIOS DE HILBERT

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP,

Licenciatura en Matemáticas

Manuel Febronio Rodríguez

26 de junio de 2013

Capítulo 1

Espacios de Banach y de Hilbert

En este capítulo damos los conceptos y resultados necesarios que nos permitan introducir y desarrollar los capítulos 2 y 3. Cabe destacar, que como en este capítulo no se dan resultados novedosos, gran parte de las demostraciones están remitidas a las bibliografías respectivas, tales como [9]. Además haremos uso de muchos resultados del análisis funcional sin hacer cita explícita.

En concreto, daremos una descripción de espacios de Banach, de Hilbert y de los operadores acotados en el espacio de Banach. También daremos una breve introducción del concepto de álgebras de Banach, homomorfismos entre álgebras de Banach, el cual nos servirá para identificar álgebras con subálgebras de álgebras más grandes. En especial introduciremos el concepto de transformada de Gelfand, el cual nos será útil para identificar subálgebras del álgebra de los operadores acotados en el espacio de Hilbert $B[H]$ con el álgebra $C(\Delta)$, donde Δ es definida en la sección 1.4. Para la sección de álgebas de Banach, los resultados que se dejaron sin demostración puede consultar [12].

1.1. Espacios de Banach

En esta sección introduciremos los conceptos de espacio lineal, normado y de Banach que son conceptos muy básicos para el desarrollo de este capítulo. Usaremos $\mathbb{F}$ para denotar al campo de los números reales o los números complejos. Comencemos recordando la definición de un espacio lineal.

1.1 Definición. Un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{F}$ es un conjunto $X \neq \emptyset$ en la que están definidas dos operaciones binarias que se llaman suma y multiplicación por escalar respectivamente. Tales operaciones se interpretan como aplicaciones $+ : X \times X \longrightarrow X$ tal que $+(x, y) = x + y$ para cada $x, y \in X$ y $* : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ tal que $*(\alpha, x) = \alpha x$ para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $x + y = y + x$.

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(3) existe $\theta \in X$ tales que $x + \theta = \theta + x = x$.

(4) existe $-x \in X$ tales que $x + (-x) = (-x) + x = \theta$.

(5) $1x = x$.

(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Un espacio lineal sobre $\mathbb{R}$ se llamará espacio lineal real y un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ se llamará espacio lineal complejo.

1.2 Definición. Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Una función $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma en X si cumple las siguientes condiciones:

(1) $\|x\| \geq 0$.

(2) $\|x\| > 0$ si $x \neq \theta$.

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

Un espacio normado es un par ordenado $(X, \| \ \|)$, donde X es un espacio lineal y $\| \ \|$ es una norma en X. Además, si X es un espacio lineal real o complejo, entonces diremos que $(X, \| \ \|)$ es un espacio normado real o complejo respectivamente. Por comodidad denotaremos a cualquier espacio normado $(X, \| \ \|)$ simplemente por X.

Todo espacio normado X induce una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Por lo tanto, tiene sentido hablar de la completitud de tales espacios, formalizando la idea tenemos:

1.3 Definición. Un espacio de Banach es un espacio normado completo. Es decir, un espacio de Banach es un espacio normado que es completo como un espacio métrico con respecto a la métrica definida anteriormente.

1.1.1. Subespacios y sumas directas

Sabemos del estudio de los espacios vectoriales la importancia que tiene el estudio de sus subespacios lineales. Aunque en los espacios normados, los subespacios lineales y cerrados son más interesantes, pues intervienen tanto la estructura lineal y topológica.

1.4 Definición. Sea X un espacio lineal. Un subconjunto M no vacío de X es un subespacio lineal de X, si es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de suma y multiplicación por escalares de X restringido a sus elementos. Equivalentemente, se dice que $M \neq \emptyset$ es un subespacio lineal de X si para cada $x, y \in M$ y cada $\alpha \in \mathbb{F}$ cumple que $x + y \in M$ y $\alpha x \in M$. Llamaremos subespacio a un subespacio lineal de un espacio normado X que es cerrado con la métrica inducida por X. Además, diremos que M es un subespacio no trivial de un espacio normado X si $\{\theta\} \neq M \neq X$.

Denotemos por $\mathcal{L}at(X)$ a la colección de todos los subespacios lineales de un espacio lineal X y $Lat(X)$ a la colección de todos los subespacios de un espacio normado X. Note que la intersección de dos subespacios lineales, es trivialmente un subespacio lineal, más aún la intersección arbitraria de subespacios lineales, es un subespacio lineal.

A continuación introduciremos el concepto de subespacio generado por cualquier subconjunto de un espacio normado X.

Sea A cualquier subconjunto de un espacio lineal X y consideremos la subcolección L_A de $\mathcal{L}at(X)$, $L_A = \{M \in \mathcal{L}at(X) : A \subseteq M\}$. Se define al subespacio lineal generado por A, $spanA = \bigcap_{M \in \mathcal{L}at(X)} M$. Observe que $spanA$ es el subespacio lineal más pequeño de X que contiene A.

1.5 Definición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio lineal X y sea $x \in X$. Entonces x es una combinación lineal de elementos de A si existe un subconjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n$ de A y un subconjunto finito de $\mathbb{F}$ digamos $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tales que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

No es complicado demostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de un subconjunto no vacío A de un espacio lineal X es un subespacio lineal de X que coincide con $spanA$.

El siguiente teorema proporciona métodos para formar subespacios a partir de otros subespacios.

1.6 Teorema. Sea X es un espacio normado.

(a) Si M es un subespacio lineal de X, entonces $\overline{M}$ es un subespacio de X.

(b) La intersección de una colección arbitraria no vacía de subespacios de X es también un subespacio de X.

Sea X un espacio normado y sea $A \subseteq X$. Ahora toca definir el subespacio lineal cerrado más pequeño de X que contiene A. Por definición de clausura, el subconjunto cerrado más pequeño de X que contiene el $spanA$ es precisamente su clausura $\overline{spanA}$ en X. Por el teorema anterior, $\overline{spanA}$ es un subespacio de X. Por lo tanto, el subespacio lineal cerrado más pequeño de X que contiene A es $\overline{spanA}$ y lo denotaremos por $\bigvee A = \overline{spanA}$, y que se llamará el subespacio generado por A. Si M es un subespacio de X tales que $M = \bigvee A$ para algún subconjunto A de X, entonces diremos que A genera M. También notemos que la intersección de todos los subespacios de X que contienen A es el subespacio más pequeño de X (ver teorema 1.6) que contiene A. Por lo tanto, $\bigvee A$ es el subespacio más pequeño de X que contiene A, que coincide con la intersección de todos los subespacios de X que contienen A.

Los siguientes conceptos serán fundamentales para el desarrollo de este trabajo, los cuales son la suma de subespacios de un espacio normado X y la suma directa de subespacios lineales de un espacio lineal X.

Sean M y N subespacios lineales de un espacio lineal X, entonces es claro que la suma de M y N definida por

$$M + N = \{x + y \in X : \, x \in M, \, y \in N\}$$

es un subespacio lineal de X. Más generalmente, si $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una subcolección de $\mathcal{L}at(X)$, entonces definimos la suma de esta subcolección como $\sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = \{\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma : \, x_\gamma \in M_\gamma \; para \; cada \; \gamma \;\; y \;\; x_\gamma = \theta \; excepto \; para \; algún \; conjunto \; finito \; de \; índices \; \gamma\}$, que también se puede demostrar que es un subespacio lineal de X.

1.7 Teorema. Sea $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una subcolección de subespacios de un espacio normado X. Entonces

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = \overline{\sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma},$$

donde $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = \bigvee \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \right)$

1.8 Definición. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una familia de espacios lineales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$ y que no necesariamente son subespacios lineales del mismo espacio lineal. La suma directa de $\{X_i\}_{i=1}^n$ es un subconjunto del producto cartesiano, es decir,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \cdots, x_n) : \, x_i \in X_i, \, para\, cada\, i = 1, \cdots, n\}$$

donde las operaciones de adición y multiplicación por escalar se definen como:

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \;\; y \;\; \alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

para cualesquiera $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$.

Es fácil verificar que la suma directa $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ de los espacios lineales $\{X_i\}_{i=1}^n$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$ con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas como antes.

Una generalización del concepto de una suma directa de espacios lineales es la que se presenta a continuación.

Sea $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de espacios lineales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. El conjunto $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = \{\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} : \, x_\gamma \in X_\gamma \, para\, cada\, \gamma \in \Gamma\}$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$ con el vector de adición y multiplicación por escalares definidas en $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ como

$$\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \oplus \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{x_\gamma + y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \; y \; \alpha\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{\alpha x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

para cualesquiera $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_{\gamma\in\Gamma}$ y cada $\alpha \in \mathbb{F}$. Esta es la suma directa de $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ y es un subconjunto del producto cartesiano $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ de los espacios lineales X_γ.

Daremos fin a esta sección introduciendo algunos ejemplos de espacios normados y de Banach.

1.9 Ejemplo. Sea $\mathbb{F}^n$ el espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. En este espacio podemos definir varias normas, entre ellas

1. $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ para cada $0 < p < \infty$.

2. $\|x\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

Los espacios $(\mathbb{F}^n, \| \|_p)$ y $(\mathbb{F}^n, \| \|_\infty)$ son espacios de Banach.

1.10 Ejemplo. Ahora pasamos a subespacios de $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, donde podemos considerar los casos como en el Ejemplo anterior.

1. Sea $l^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ para $1 < p < \infty$ y se toma el espacio normado $(l^p, \| \|_p)$ donde la norma se define como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Más aún $(l^p, \| \|^p)$ es un espacio de Banach.

2. $l^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ y se define la norma en este espacio como

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

   $(l^\infty, \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

El siguiente ejemplo es una generalización de los ejemplos 1.9 y 1.10.

1.11 Ejemplo. Sea $\{(X_n, \| \|_n)\}$ una colección de espacios normados sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Para cada $p \geq 1$, sea

$$[\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p = \{\{x_n\} \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p < \infty\}$$

el subespacio lineal de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Se puede demostrar que tal subespacio lineal es un espacio normado con norma dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para cualesquiera $x = \{x_n\} \in [\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p$.

Ahora sea el subespacio lineal de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$

$$[\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_\infty = \{\{x_n\} \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n : \sup_n \|x_n\|_n < \infty\}$$

que también es un espacio normado con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_n \|x_n\|_n$$

para cualesquiera $x = \{x_n\} \in [\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p$.

Además, también se pueden demostrar que los siguientes $([\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p, \| \|_p)$ y $([\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_\infty, \| \|_\infty)$ son espacios de Banach si y sólo si $(X_n, \| \|_n)$ son espacios de Banach.

También notemos que si los espacios normados $(X_n, \| \|_n)$ coinciden con un espacio normado fijo $(X, \| \|)$, entonces $\bigoplus X$ es la suma directa de infinitas copias de X, en tal caso usaremos la siguiente notación $X^{\mathbb{N}}$. En este caso los espacios de Banach $[\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_p$ y $[\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n]_\infty$ usualmente se denotan por

$l^p(X) = \{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\}$

$l^\infty(X) = \{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} : \sup_n \|x_n\| < \infty\}$
con normas $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ y $\|x\|_\infty = \sup_n \|x_n\|$.

1.12 Ejemplo. Tomemos un espacio cualquiera X, y sobre él consideremos el espacio (X, Σ, μ) un espacio de medida sobre la σ-álgebra Σ de subconjuntos de X con medida $\mu : \Sigma \to \mathbb{F}$. La colección $L = L(X, \Sigma, \mu)$ de todas las funciones medibles e integrables con respecto a μ. Si $f \in L$, entonces $\|f\| = \int |f| d\mu$ es una seminorma en L.

1. El primer caso es considerar el espacio

   $$L^p = \{f : X \to \mathbb{F}\, medible : \int_X |f(t)|^p d\mu(t) < \infty\}$$

   y tomar el espacio vectorial con seminorma $(L^p, \|f\|_p)$, donde

   $$\|f\|_p = \left(\int_X |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   La demostración de que se trata realmente de una seminorma se sigue de la famosa desigualdad de Minkowski.

   Tomemos el subespacio de las funciones con seminorma nula

   $$N = \{f \in L^p : \|f\|_p = 0\} = \{f \in L^p : f = O\, p.c.t.(\mu)\}.$$

El espacio cociente módulo N, L^p/N es un espacio de Banach con norma $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ para cada $[f] \in L^p/N$, donde $[f] = \{g \in L^p : \|g-f\|_p = 0\}$ para cada $f \in L^p$, es decir, el conjunto de todas las funciones en L^p que son μ-equivalentes a f (dos funciones en L^p son μ-equivalentes si son iguales μ-casi donde quiera).

Este espacio de Banach se denomina espacio de clases de funciones L^p y en general se denota por $(L^p, \| \|_p)$.

2. También podemos considerar este otro subconjunto de las funciones medibles $L^\infty = L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ consistiendo de todas las clases de equivalencia de funciones medibles $f : X \to \mathbb{F}$ que son acotadas casi en todo punto de X, dos funciones son equivalentes cuando son iguales μ-casi todo punto de X. Si $f \in L^\infty$ y $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = sup\{|f(x)| : x \notin N\} \, y \, \|f\|_\infty = \text{ínf}\{S(N) : N \in \Sigma, \mu(N) = 0\}$$

conocido como el supremo esencial de f y que f se le conoce como una función esencialmente acotada.

El espacio $(L^\infty, \|f\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Cabe recordar que si $\mu(X) < \infty$, entonces $L^\infty \subseteq L^p$ para todo $1 \leq p < \infty$ y además vale el limite $\text{lím}_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ para cualesquiera $f \in L^\infty$.

1.2. Transformaciones lineales acotadas

En esta sección X y Y denotarán espacios normados sobre $\mathbb{F}$, salvo que se indique lo contrario.

Sean X y Y espacios lineales. Recordemos que una función $T : X \to Y$ es una transformación lineal si cumple que

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \; y \; T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

1.13 Definición. Una transformación lineal $T : X \to Y$ es acotada si existe $\beta \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \beta\|x\|$ para cada $x \in X$. Equivalentemente si T mapea subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de Y.

Los conceptos de continuidad y acotación de transformaciones lineales en el sentido de la definición anterior coinciden, más aún para demostrar la continuidad de una transformación lineal, es suficiente demostrar la continuidad en $\theta \in X$.

Para cada transformación lineal acotada T se define la norma de T como el número no negativo $\|T\| = inf\{\beta \geq 0 : \|T(x)\| \leq \beta\|x\| \, para \, cada \, x \in X\}$. Equivalentemente,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| = 1} \|T(x)\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Note que si T es una transformación lineal acotada de X en Y, entonces existe $\beta \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \beta\|x\|$, para cada $x \in X$ y por lo tanto existe $\|T\|$ para cada tansformación lineal acotada T y que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

para cualesquiera $x \in X$.

Se denotará por $B[X, Y]$ a la colección de todas las transformaciones lineales acotadas de X en Y y simplemente por $B[X]$ si $X = Y$, a los elementos de $B[X]$ les llamaremos operadores. Es fácil demostrar que $(B[X, Y], \| \, \|)$ es un espacio normado, con respecto a la norma definida anteriormente, más aún es un espacio de Banach si Y es un espacio de Banach.

Sea Z un espacio normado, $T \in B[X, Y]$ y $S \in B[Y, Z]$ se llama producto ST al operador composición $S \circ T : X \to Z$. Es evidente que el producto de operadores acotados es un operador acotado, pero podemos ir más lejos y probar que en realidad, $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Esto resulta simplemente de utilizar la siguiente desigualdad

$$\|STx\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|.$$

Trataremos con más detalle el producto de operadores cuando nos ocupemos de las álgebras de Banach.

Uno de los teoremas maś importantes en la teoría de los espacios de Banach es el Teorema de la función inversa, que asegura la continuidad de la inversa de una transformación lineal acotada entre espacios de Banach.

1.14 Teorema. (Teorema de la función inversa). Si X y Y son espacios de Banach y $T \in B[X, Y]$ es biyectiva, entonces $T^{-1} \in B[Y, X]$.

Si X y Y son espacios normados, entonces diremos que $T \in B[X,Y]$ es invertible si tiene una inversa $T^{-1} \in B[Y,X]$. El teorema de la función inversa dice que si X y Y son espacios de Banach y $T \in B[X,Y]$, entonces T tiene una inversa acotada, $T^{-1} \in B[Y,X]$.

Otra de las consecuencias inmediatas del Teorema de la función inversa, dice que si X, Y y Z son espacios de Banach y $T \in B[X,Y]$, $S \in B[Y,Z]$ son invertibles entonces $ST \in B[X,Z]$ es invertible y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

1.15 Definición. Una transformación lineal T de X en Y es acotada inferiormente si existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\|$, para cada $x \in X$.

Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal, recordemos que el espacio nulo de T es el conjunto

$$T^{-1}(\{\theta\}) = \{x \in X : T(x) = \theta\}$$

y que denotaremos por $N(T)$. Si T es acotada, entonces $N(T)$ es un subespacio de X, en efecto, es claro que $N(T)$ es un subespacio lineal de X y como $\{\theta\}$ es cerrado en Y, entonces $T^{-1}(\{\theta\})$ es cerrado en X, porque T es continua. Además, T es inyectiva si y sólo si $N(T) = \{\theta\}$ (ver [9], pag. 56).

También recordemos que el rango de una transformación lineal $T : X \to Y$ es el conjunto

$$R(T) = \{T(x) : x \in X\}$$

que es un subespacio lineal de Y y por el teorema 1.6 su clausura es un subespacio.

El teorema que sigue nos proporciona métodos para determinar cuando una transformación lineal acotada entre espacios de Banach tiene una inversa en su rango.

1.16 Corolario. Si X y Y son espacios de Banach y $T \in B[X,Y]$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) T tiene una inversa en su rango (es decir, existe $T^{-1} \in B[R(T),X]$).

(b) T es acotada inferiormente.

(c) $N(T) = \{\theta\}$ y $\overline{R(T)} = R(T)$.

A continuación daremos un ejemplo de un operador lineal acotado, que vamos a utilizar en el capítulo 2.

1.17 Ejemplo. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita, donde μ es una medida positiva y sea $\varphi \in L^\infty$. Sea $M_\varphi : L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ el operador multiplicación, dado por $M_\varphi \phi = \varphi\phi$, para cualquier $\phi \in L^P$. Si $F \in \Sigma$ tales que $\mu(F) = 0$ en la que φ no está acotada tenemos

$$\|M_\varphi(\phi)\|_p = \left(\int_X |\varphi\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{X\cap F} |\phi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t\in X\cap F} |\varphi(t)| = \|\phi\|_p \|\varphi\|_\infty$$

de donde se deduce que M_φ es un operador acotado con norma p menor o igual a $\|\varphi\|_\infty$.

1.3. Introducción a los Espacios de Hilbert

De aquí hasta el final del capítulo H y K denotarán a los espacios de Hilbert sobre $\mathbb{F}$ y X y Y denotarán a los espacios con producto interno sobre $\mathbb{F}$ respectivamente, al menos que se diga lo contrario.

1.18 Definición. Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Una función $\langle\, ,\, \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ es un producto interior sobre $\mathbb{F}$ si satisface las siguientes propiedades:

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, donde la barra es el conjugado de $\langle y, x\rangle$.

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, así que $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(5) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = \theta$.

para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

Un espacio con producto interno es un par ordenado $(X\, ,\, \langle\, ,\, \rangle)$, donde X es un espacio lineal y $\langle\, ,\, \rangle$ es un producto interno en X. De aquí en adelante denotaremos simplemente por X a un espacio con producto interno $(X\, ,\, \langle\, ,\, \rangle)$ y si X es un espacio lineal real o complejo, entonces diremos que es un espacio con producto interno real o complejo, respectivamente.

De los axiomas se deducen inmediatamente las siguientes propiedades básicas:

(a) Por (2) y (4) tenemos que $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in X$ si y sólo si $x = \theta$.

(b) $\forall x, y, z \in X$: y $\forall \alpha \in \mathbb{F}$: $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ y $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de los espacios con producto interno X, es la desigualdad de Schwarz. Lo cual dice que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

para cada $x, y \in X$. Donde $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, para cada $x \in X$. De esta desigualdad se deduce que la función $\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, para cada $x \in X$, es una norma en X. Por tanto, todo espacio con producto interno es un espacio normado y por lo tanto un espacio métrico, con la métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

1.19 Definición. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo. En otras palabras, un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno que es completo como un espacio métrico con respecto a la métrica definida en la observación anterior.

Otras de las propiedades importantes de esta sección son las que se presentan a continuación.

(a) Ley del paralelogramo.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

(b) Identidad de polarización real. Si $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno real, entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

(c) Identidad de polarización compleja. Si $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno complejo, entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Cabe señalar que no todo espacio normado es un espacio con producto interno (ver ejemplo 1.22). Pero si X es un espacio normado que satisface la ley del paralelogramo entonces existe un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ en X tal que $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Además el único producto interior que induce, está dada por la identidad de polarización.

1.20 Ejemplo. A continuación enumeramos algunos ejemplos sencillos de espacios de Hilbert.

1. Los espacios $(\mathbb{F}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ y $(l^2, \langle\, ,\, \rangle)$ son espacios de Hilbert con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ y $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$.

2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita, luego $(L^2(\mu), \langle, \rangle)$ resulta un espacio de Hilbert con $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(t).\overline{g(t)}d\mu(t)$. Es de interés especial el caso en el que el espacio de base es un intervalo compacto de la recta y la medida utilizada es la llamada medida de Lebesgue. Notamos a esos espacios $L^2([a, b])$.

3. Sea $\{(H_n, \langle\, ,\, \rangle_n)\}$ una colección de espacios de Hilbert sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Entonces
$$([\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n]_2, \langle\, ,\, \rangle)$$
es un espacio de Hilbert con el producto interior definida por
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle_n$$
para cualesquiera $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in [\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n]_2$ y que induce la norma $\|\,\|_2$ del ejemplo 1.11.

El siguiente ejemplo muestra que no todos los espacios con producto interno son de Hilbert.

1.21 Ejemplo. Consideremos la función $\langle\, ,\, \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{F}$ dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ para cada $f, g \in C[0, 1]$. La función $\langle\, ,\, \rangle$ es un producto interno en $C[0, 1]$ con la norma $\|\,\|_2$. $(C[0, 1], \langle\, ,\, \rangle)$ es un espacio con producto interno pero no es un espacio de Hilbert, ya que no es un espacio de Banach.

También notemos que no todos los espacios de Banach son de Hilbert, como lo muestra el siguiente ejemplo.

1.22 Ejemplo. Considere los espacios de Banach $(l^p, \|\,\|_p)$ y $(l^\infty, \|\,\|_\infty)$ del ejemplo 1.10. Estos espacios no son de Hilbert, excepto para $(l^2, \|\,\|_2)$. Las normas $\|\,\|_p$ para cada $p \neq 2$ y $\|\,\|_\infty$ no cumplen la ley del paralelogramo y por lo tanto no inducen ningún producto interno en l^p o en l^∞.

1.3.1. Subespacios ortogonales

En esta sección sólo daremos algunas propiedades básicas de un espacio de Hilbert, que serán útiles para el desarrollo de este trabajo.

Sugerido por la noción de perpendicularidad en espacios euclídeos se puede definir el siguiente concepto.

1.23 Definición. Sean $x, y \in X$ y $A, B \subseteq X$. Entonces, diremos que x y y son ortogonales (notación $x \perp y$) si $\langle x, y\rangle = 0$, x es ortogonal a A (notación $x \perp A$) si $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in A$. A y B son ortogonales (notación $A \perp B$) si $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $x \in A$ y $y \in B$ y también diremos que A es un conjunto ortogonal si $x \perp y$ para cada $x, y \in A$ tales que $x \neq y$.

Ahora, podemos definir el siguiente concepto:

1.24 Definición. Sea $M \subseteq X$. Se dice que M es subespacio ortogonal si es un subespacio de X y es un conjunto ortogonal.

Una de las tantas propiedades del plano $\mathbb{R}^2$ que se conserva en cualquier espacio de Hilbert es que en ellos puede formularse una generalización del conocido teorema de Pitágoras. Esto es

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

siempre que $x \perp y$. Esto se sigue inmediatamente de la definición de ortogonalidad y de la siguiente igualdad

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Como una consecuencia importante del teorema de Pitágoras es que la suma finita de subespacios ortogonales de H, es también un subespacio, es decir, si M y N son subespacios ortogonales de H, entonces $M + N$ es un subespacio de H. Formalizando la idea tenemos:

1.25 Teorema. Si M y N son subespacios ortogonales de H, entonces $M+N$ es un subespacio de H.

Otro concepto que juega un papel importante en la teoría de los espacios de Hilbert, es el siguiente:

Sea $A \subseteq X$, definimos el complemento ortogonal de A como

$$A^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y\rangle = 0 \, para \, cada \, y \in A\}.$$

Si $A = \emptyset$, entonces para cada $x \in A$ no existe $y \in A$ tales que $\langle x, y\rangle \neq 0$, y por lo tanto $\emptyset^{\perp} = X$. Claramente, $x \perp \{\theta\}$ para cada $x \in X$, y $x \perp X$ si y sólo si $x = \theta$. Por lo tanto $\{\theta\}^{\perp} = X$ y $X^{\perp} = \{\theta\}$.

Sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Los siguientes resultados son consecuencias inmediatas de la definición de complemento ortogonal.

(a) $A \perp A^{\perp}$, $A \cap A^{\perp} \subseteq \{\theta\}$, $A \cap A^{\perp} = \{\theta\}$ siempre que $\theta \in A$

(b) $A \perp B$ si y sólo si $A \subseteq B^{\perp}$ si y sólo si $B \subseteq A^{\perp}$.

(c) $A \perp B$ implica que $A \cap B \subseteq \{\theta\}$ y $A \perp B$ si y sólo si $B \perp A$.

(d) Si $A \subseteq B$, entonces $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. Además $A \subseteq A^{\perp\perp}$ y $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.

(f) El complemento ortogonal $A^{\perp}$ de A es un subespacio de H. Además $A^{\perp} = \overline{(A^{\perp})} = (\overline{A})^{\perp} = (spanA)^{\perp} = (\bigvee A)^{\perp}$ y si $\overline{A} = X$, entonces $A^{\perp} = \{\theta\}$.

El teorema que sigue caracteriza a los subespacios lineales de un espacio de Hilbert en términos de su complemento ortogonal.

1.26 Teorema. Sea M un subespacio lineal de H.

(a) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$ y $M^{\perp} = \{\theta\}$ si y sólo si $\overline{M} = H$.

(b) Si A es cualquier subconjunto de H, entonces $A^{\perp\perp} = \bigvee A$ y $A^{\perp} = \{\theta\}$ si y sólo si $\bigvee A = H$.

Para establecer los resultados más generales de esta sección, definiremos el siguiente concepto.

1.27 Definición. Sea X un espacio normado y sea $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de elementos de X. Diremos que $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia sumable con suma $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito de índices $N_\epsilon \subseteq \Gamma$ tal que para todo subconjunto finito de Γ, si $N_\epsilon \subseteq N$, entonces $\|\sum_{n\in N} x_n - \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma\| < \epsilon$.

Se llamará familia p-sumable, para algún $p \geq 0$ si $\{\|x_\gamma\|^p\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia sumable de números positivos. En particular, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia absolutamente sumable si $\{\|x_\gamma\|\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia sumable y es una familia cuadrada-sumable si $\{\|x_\gamma\|^2\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia sumable.

Sea X un espacio normado. Es claro que si $\Gamma = \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{\in\mathbb{N}}$ es una familia sumable en X, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. En efecto, si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $N_\epsilon \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\| \sum_{n \in N} x_n - x\|$ para algún $x \in X$ siempre que N es finito y $N_\epsilon \subseteq N \subseteq \mathbb{N}$, entonces poniendo $n_\epsilon = \# N_\epsilon$ se sigue que $\| \sum_{n=1}^{k} x_n - x\| < \epsilon$ siempre que $n \geq n_\epsilon$.

De la definición anterior, se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

Si $x, y \in X$ tales que $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x$ y $\sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma = y$ entonces

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha x_\gamma + \beta y_\gamma) = \alpha x + \beta y$$

para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Además si Y es un espacio normado y $T \in B[X, Y]$ entonces

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} T(x_\gamma) = T(x).$$

El siguiente teorema dice que cuando una familia no numerable de vectores en un espacio normado es sumable, entonces sólo tiene un número numerable de vectores no nulos.

1.28 Teorema. Sea X un espacio de Banach. Si $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia sumable en X, entonces el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq \theta\}$ es numerable.

Otra de las consecuencias inmediatas de la definición 1.27, dice que si $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ y $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ son sumables en X con sumas $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ y $\sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma$ en X, respectivamente, entonces $\{\langle x_\gamma, y \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ y $\{\langle x, y_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ son familias sumables en $\mathbb{F}$, para cualesquiera $x, y \in X$ y con sumas

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x_\gamma, y \rangle = \langle \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma, y \rangle \text{ y } \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, y_\gamma \rangle = \langle x, \sum_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma \rangle.$$

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Pitágoras.

1.29 Teorema. Si $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia ortogonal en H. Entonces $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es cuadrada-sumable si y sólo si es una familia sumable en H y en este caso $\| \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|^2$.

El siguiente resultado es el teorema central de la geometría de cualquier espacio de Hilbert y que justifica el uso de la palabra complemento.

1.30 Teorema. (Teorema de la proyección). Sea M un subespacio de H. Entonces $H = M \oplus M^\perp$.

La demostración de este teorema se sigue de que $M, M^{\perp} \subseteq M + M^{\perp}$ y por lo tanto $(M + M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = M^{\perp} \cap \overline{M} = M^{\perp} \cap M = \{\theta\}$, luego por el teorema 1.26, se obtiene que $H = M + M^{\perp}$ al ser $M + M^{\perp}$ cerrado.

El teorema de la estructura ortogonal dice que $\sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ es cerrado siempre que $\{M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subespacios ortogonales dos a dos de H.

1.31 Teorema. (Teorema de la estructura ortogonal). Sea $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de subespacios de H tales que $M_\gamma \perp M_\alpha$ para cada $\gamma \neq \alpha$. Entonces $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ y la representación $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, $x_\gamma \in M_\gamma$ de $x \in \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ es única.

Terminamos esta sección identificando la suma de cualquier familia de subespacios ortogonales dos a dos con la suma directa ortogonal de tales subespacios, que es una simple aplicación del Teorema de la estructura ortogonal, pero antes un teorema.

En la categoría de espacios de Hilbert, el concepto natural de isomorfismo es aquel que preserva el producto escalar junto con la estructura lineal. Es decir, una aplicación lineal que preserve productos escalares. Veamos que los isomorfismos en este sentido son exactamente las isometrías.

1.32 Teorema. Sean X y Y espacios con productos internos. Una transformación lineal $V : X \to Y$ es una isometría si y sólo si $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Una transformación unitaria de X en Y es una isometría lineal sobreyectiva, equivalentemente, una isometría lineal invertible. Diremos que dos espacios con productos internos X y Y son equivalentemente unitarios si existe una transformación unitaria entre ellos, equivalentemente, si son isométricamente isomorfos. En este caso, se denotarán por $X \cong Y$.

Sea $\{M_\gamma\}$ una colección de subespacios ortogonales dos a dos de un espacio de Hilbert. Notemos que cada M_γ son espacios de Hilbert. Sea

$$[\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma]_2 = \{\{x_\gamma\} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|^2 < \infty\}$$

con el producto interno, dado por

$$\langle x, y\rangle_\oplus = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x_\gamma, y_\gamma\rangle$$

para cualesquiera $x = \{x_\gamma\}, y = \{y_\gamma\} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$. Al espacio de Hilbert $[\bigoplus_\gamma M_\gamma]_2$ se le conoce como la suma directa ortogonal y la denotaremos simplemente por $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$.

Sea $\Phi : \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \to \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, definida por

$$\Phi(\{x_\gamma\}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$$

para cada $\{x_\gamma\} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, que es claramente lineal bien definida y biyectiva, por el teorema de la estructura ortogonal. Más aún, Φ es una isometría, pues si $M_\beta \perp M_\alpha$ para $\beta \neq \alpha$ y por la continuidad del producto interno, tenemos

$$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle \sum_\gamma x_\gamma, \sum_\alpha y_\alpha\rangle = \sum_\gamma \sum_\alpha \langle x_\gamma, y_\alpha\rangle = \sum_\gamma \langle x_\gamma, y_\gamma\rangle = \langle x, y\rangle_\oplus$$

para cualesquiera $x = \{x_\gamma\}, y = \{y_\gamma\} \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$. Por lo tanto, Φ es una transformación unitaria, luego

$$\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma \cong \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma.$$

Si $\{M_\gamma\}$ genera H, entonces su suma directa ortogonal, usualmente es identificado con su imagen, es decir, $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma = H$.

1.3.2. Bases ortonormales

En esta sección estudiaremos la noción de base de un espacio de Hilbert y daremos algunos ejemplos. Vamos a representar todo elemento de un espacio de Hilbert como combinación lineal (que incluso puede ser no numerable) de elementos de un conjunto ortonormal maximal, concepto que definiremos posteriormente. Los coeficientes de dicha combinación lineal se llamarán coeficientes de Fourier del elemento dado.

Sea A un subconjunto de X. Diremos que A es ortonormal si es un conjunto ortogonal y $\|x\| = 1$, para cada $x \in A$, además es fácil mostar que los conjuntos ortonormales son linealmente independientes. También diremos que $A \in \mathcal{P}(X)$ es maximal en $\mathcal{P}(X)$ si no existe $B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subset B$.

Un conjunto ortonormal B en X que genera X se llamará una base ortonormal para X. Esto es equivalente a que B sea un conjunto ortonormal maximal en X, si X es un espacio de Hilbert. Usando el lema de Zorn se puede demostrar que todo espacio de Hilbert no nulo tiene una base ortonormal.

El siguiente teorema nos da algunas caracterizaciones de las bases ortonormales en espacios de Hilbert.

1.33 Teorema. Sea $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia ortonormal en H. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es base ortonormal de H.

(2) Si $x \in H$ y si $x \perp x_\gamma$, para cada γ, entonces $x = \theta$ (es decir, $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} = \{\theta\}$).

(3) (Expansión de Fourier). Si $x \in H$, entonces $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, x_\gamma\rangle x_\gamma$ y la representación es única.

(4) Si $x, y \in H$, entonces $\langle x, y\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, x_\gamma\rangle\overline{\langle y, x_\gamma\rangle}$.

(5) Si $x \in H$, entonces $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, x_\gamma\rangle|^2$.
Este se llama la identidadad de Parseval.

Cualesquiera dos bases ortonormales de un espacio de Hilbert H tienen la misma cardinalidad, a tal cardinalidad común se llamará la dimensión de H. Si H es dimensionalmente finito, la $\dim H = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente teorema caracteriza a los espacios de Hilbert separables en términos de su dimensión ortogonal.

1.34 Teorema. Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si tiene una base ortonormal numerable.

El siguiente teorema dice que si H es un espacio de Hilbert separable es equivalentemente unitario a l^2, en particular si H es n-dimensional, entonces es equivalentemente unitario a $\mathbb{F}^n$.

1.35 Teorema. Dos espacios de Hilbert son equivalentemente unitarios si y sólo si tienen la misma dimensión ortogonal.

A continuación enumeramos una lista de bases ortonormales para ciertos espacios de Hilbert.

1.36 Ejemplo. En este ejemplo exhibimos bases ortonormales para algunos espacios de Hilbert separables clásicos.

1. Si $H = l^2$, entonces

$$\mathcal{B} = \{e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una base ortonormal de H. En efecto, $\mathcal{B}$ es un familia ortonormal, ya que $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, \; si\, n = m \\ 0, \; si\, n \neq m \end{cases}$
Además, es claro que $\mathcal{B}^\perp = \{x \in l^2 : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\; y \;\; \langle x_n, e_n \rangle = x_n = 0\, para\, cada\, n\} = \{\theta\}$. Por lo tanto, por (2) del teorema 1.33 $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de H.

2. Si el espacio de Hilbert es $L^2([a,b])$ y $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ entonces

$$\{e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \frac{t-a}{b-a}} : n \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal.

Como caso particular del ejemplo anterior es el siguiente

3. $\{e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para el espacio de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$.

1.4. Álgebras de Banach

1.37 Definición. Un álgebra es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$ en la que está definida una operación binaria que se llama multiplicación

$$A \times A \to A, \, (x, y) \mapsto xy$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $x(yz) = (xy)z$,

2. $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ y

3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha x)$

para cada $x, y, z \in A$ y cada $\alpha \in \mathbb{F}$. Un álgebra conmutativa es un álgebra tales que $xy = yx$ para cualesquiera $x, y \in A$.

Una subálgebra de A es un subespacio vectorial B de A tales que $xy \in B$ siempre que $x, y \in B$.

En esta sección sólo trataremos con álgebras complejas.

1.38 Definición. Si A es un espacio normado y al mismo tiempo es un álgebra que satisface la propiedad multiplicativa, esto es, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para cualesquiera $x, y \in A$, entonces A se llamará álgebra normada. Si A tiene un elemento unidad e tales que

$$xe = ex = x \;\; y \;\; \|e\| = 1$$

para cualquier $x \in A$, entonces diremos que A es un álgebra normada con unidad.

Si en la definición anterior A es un espacio normado completo entonces A se llamará álgebra de Banach.

Es claro que la unidad e de A de la definición anterior es único, pues si e' satisface $xe' = e'x = x$ para $x \in A$, entonces $e' = e'e = e$. Además, la desigualdad multiplicativa implica que la operación multiplicación es continua en A.

Como ejemplos de álgebras de Banach, tenemos:

Si X es un espacio de Banach, entonces por las observaciones hechos en la sección 1.2, $B[X]$ es un álgebra de Banach con unidad I si la operación producto es la composición de transformaciones lineales.

Otro ejemplo de un álgebra de Banach es $C(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones complejas continuas en Ω, donde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ compacto y en este caso la unidad es la función constante 1. Las operaciones se definen puntualmente y la norma es $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \Omega\}$.

Ahora pasemos a introducir el concepto de homomorfismos, que nos servirá para identificar álgebras con subálgebras de álgebras más grandes.

1.39 Definición. Un homomorfismo de un álgebra A a un álgebra B es una función lineal $h : A \to B$ tales que

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$.

Un elemento x de un álgebra A con unidad e, diremos que es invertible si tiene una inversa en A, es decir, si existe $x^{-1} \in A$ tales que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$. $G(A)$ denotará al conjunto de todos los elementos invertibles de A, entonces $G(A)$ es un grupo. Además, si $x \in G(A)$, entonces tiene inversa única.

Si A es un álgebra con unidad e y $h : A \to \mathbb{F}$ es un homomorfismo, entonces $h(e) = 1$ y $h(x) \neq 0$ si $x \in G(A)$. Además, si A es un álgebra de Banach, h es continua.

1.40 Definición. Sea A un álgebra de Banach con unidad e. Se define el espectro de $x \in A$ como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}.$$

El complemento de $\sigma(x)$ es el conjunto resolvente de x, $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \in G(A)\}$.

1.41 Teorema. Si A es un álgebra de Banach con unidad e y $x \in A$, entonces el $\sigma(x)$ es compacto y no vacío.

Si x es un elemento de un álgebra de Banach A con unidad, por el teorema anterior se deduce que $\rho(x)$ es un conjunto abierto y no vacío.

Sea x un elemento de un álgebra de Banach A con unidad. Se define el radio espectral de x como

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

el cual se denotará por $r(x)$.

1.42 Teorema. Si A es un álgebra de Banach con unidad y $x \in A$, entonces

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \ \ y \ \ r(x) \leq \|x\|.$$

1.43 Definición. Una función $x \mapsto x^*$ de un álgebra A se llama involución si tiene las siguientes cuatro propiedades:

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$.
2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.
3. $(xy)^* = y^* x^*$.
4. $x^{**} = x$.

para cualesquiera $x, y \in A$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.44 Definición. Un álgebra de Banach A con involución $x \mapsto x^*$ que satisface

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

para cada $x \in A$ se llama un B^*-álgebra.

El álgebra de Banach con unidad $C(\Omega)$ es un ejemplo de B^*-álgebra con la norma $\| \|_\infty$ y $f^* = \overline{f}$ para cada $f \in C(\Omega)$.

1.45 Definición. Sean A y B B^*-álgebras. Un $*$-homomorfismo es un homomorfismo de álgebras $h : A \to B$ tales que $h(x^*) = h(x)^*$ para cada $x \in A$, es decir, preserva involuciones. Si h es un $*$-homomorfismo biyectiva, diremos que es $*$-isomorfismo.

Sean A y B B^*-álgebras. Diremos que A y B son $*$-isomorfos si existe un $*$-isomorfismo h entre ellos. En este caso, si e es la unidad en A entonces $h(e)$ es la unidad de B y $G(B) = h(G(A))$ y por lo tanto $\lambda e - x \in G(A)$ si y sólo si $\lambda h(e) - h(x) = h(\lambda e - x) \in G(B)$, es decir, $\sigma_A(x) = \sigma_B(h(x))$ para cada $x \in A$.

Denotemos con Δ al conjunto de todos los homomorfismos $h : A \to \mathbb{C}$ en un álgebra de Banach con unidad A.

1.46 Teorema. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad.

(a) $x \in G(A)$ si y sólo si $h(x) \neq 0$ para cada $h \in \Delta$.

(b) $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $h(x) = \lambda$ para algún $h \in \Delta$.

1.47 Definición. Sea A un álgebra de Banach conmutativa, se define la transformada de Gelfand de $x \in A$ como la función $\hat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(h) = h(x)$.

Sea $\hat{A}$ el conjunto de todos $\hat{x}$, para cada $x \in A$, donde A es un álgebra conmutativa. La topología de Gelfand de Δ es la topología débil inducida por $\hat{A}$, es decir, la topología más débil que hace a $\hat{x}$ continua para cada $x \in A$. Entonces $\hat{A} \subseteq C(\Delta)$, el álgebra de todas las funciones complejas continuas en Δ.

Se puede demostrar que Δ es un espacio de Hausdorff compacto si A es un álgebra de Banach conmutativo.

La transformada de Gelfand de un álgebra de Banach con unidad A es la función $\Phi : A \to C(\Delta)$ definida por $\Phi(x) = \hat{x}$, para cada $x \in A$. Esta función es un homomorfismo sobre una subálgebra $\hat{A}$ de $C(\Delta)$.

El rango de $\hat{x}$ es $\sigma(x)$, pues si $\lambda \in \hat{x}(\Delta)$, $\hat{x}(h) = \lambda$ para algún $h \in \Delta$, es decir, $h(x) = \lambda$. Por el teorema 1.46, esto ocurre si y sólo si $\lambda \in \sigma(x)$. De esto también se obtiene

$$\|\hat{x}\|_\infty = r(x).$$

Un elemento x de un álgebra de Banach con involución A, se llamará auto-adjunto si $x = x^*$, x se llamará normal si $xx^* = x^*x$. Un subconjunto S de A se dice que es normal si S es conmutativo y $x^* \in S$ siempre que $x \in S$.

Notar que para cada $f \in C(\Omega)$, $ff^* = |f|^2 = f^*f$, entonces todos los elementos de $C(K)$ son normales. Además, si $f \in C(\Omega)$ entonces $\sigma(f) = f(\Omega)$.

1.48 Teorema. (Teorema de Gelfand-Naimark) Sea A un B^*-álgebra conmutativa con unidad. La transformada de Gelfand Φ de A es $*$-isomorfismo isométrico de A sobre $C(\Delta)$.

La transformada de Gelfand Φ del teorema anterior, preserva la involución dada en A a la involución natural en $C(\Delta)$, que es la conjugación, es decir, $\Phi(x^*) = \Phi(x)^* = \overline{\hat{x}}$ para $x \in A$, o de manera equivalente

$$h(x^*) = \overline{h(x)}$$

para cada $x \in A$ y $h \in \Delta$. En particular, x es auto-adjunto si y sólo si $\hat{x}$ es una función de valores reales.

Sea A B^*-álgebra y $x \in A$ normal. La subálgebra cerrada más pequeña que contiene x, x^* y e coincide con la clausura de todos los polinomios en x y x^*. Esto es,

$$\begin{aligned} &\bigcap\{B \subseteq A : \; B \, es \, subálgebra \, cerrada \, de \, A \, tales \, que \, \{x, x^*, e\} \subseteq B\} \\ &\qquad = \overline{\{p(x, x^*) : \; p \, es \, un \, polinomio \, en \, x \, y \, x^*\}}, \end{aligned}$$

se llama B^*-álgebra generada por x y denotaremos por $B^*(x)$. Como x es normal, los polinomios en x y x^* conmutan, así que $B^*(x)$ es conmutativo y por el teorema 1.48, resulta que $B^*(x)$ es $*$-isomorfa a $C(\Delta)$ a través de la transformada de Gelfand.

Por otro lado, sabemos que $\hat{x} : \Delta \to \sigma(x)$ es continua y sobreyectiva. Además, si $h, h_1 \in \Delta$, tales que $\hat{x}(h) = \hat{x}(h_1)$, es decir, $h(x) = h_1(x)$, entonces por el teorema 1.48, $h(x^*) = h_1(x^*)$. Si p es cualquier polinomio de dos variables, se sigue que $h(p(x, x^*)) = h_1(p(x, x^*))$, pues h y h_1 son homomorfismos. Por lo tanto, h y h_1 son iguales en un conjunto denso, luego la continuidad de h y h_1 implican que $h(y) = h_1(y)$ para cada $y \in B^*(x)$, luego $h = h_1$. Por lo tanto, $\hat{x}$ también es inyectiva.

Como Δ es compacto, $\hat{x}^{-1}$ es continua, luego $\hat{x}$ es un homeomorfismo de Δ sobre $\sigma(x)$. Por lo tanto la función $\Psi : C(\sigma(x)) \to C(\Delta)$, definida por

$\Psi(f) = f \circ \hat{x}$ es un isomorfismo isométrico que también preserva la conjugación compleja. Entonces por el teorema 1.48, cada $f \circ \hat{x}$ es la transformada de Gelfand de un único elemento de $B^*(x)$ que denotaremos por $\Phi_x(f)$ y que satisface $\|\Phi_x(f)\| = \|f\|_\infty$. De hecho, $\Phi_x = \Phi^{-1} \circ \Psi$, donde $\Phi : B^*(x) \to C(\Delta)$ es la tansformada de Gelfand de $B^*(x)$. Por el mismo teorema 1.48, $\Phi_x(\overline{f}) = (\Phi_x(f))^*$, además si $f(\lambda) = \lambda$, entonces $f \circ \hat{x} = \hat{x}$, esto es, $\Phi_x(f) = x$.

Por lo tanto, hemos probado el siguiente teorema:

1.49 Teorema. Sea A B^* álgebra. Si $x \in A$ es normal entonces la fórmula

$$\widehat{\Phi_x(f)} = f \circ \hat{x}$$

define un $*$-isomorfismo isométrico Φ_x de $C(\sigma(x))$ sobre $B^*(x)$, tales que $\Phi_x(Id) = x$.

Por lo tanto, por el teorema anterior tiene sentido escribir como $\Phi_x(f) = f(x)$ a los elementos de $B^*(x)$ con su respectivo transformada de Gelfand $f \circ \hat{x}$ y Φ_x se conoce como el cálculo funcional continuo de x. Otra consecuencia inmediata de dicho teorema tenemos:

1.50 Teorema. (Teorema de la función espectral). Sea A B^*-álgebra con unidad y $x \in A$ normal. Si $f \in C(\sigma(x))$ entonces $\sigma_A(f(x)) = f(\sigma(x))$.

Demostración. Sea $f \in C(\sigma(x))$. Puesto que Φ_x es un $*$-isomorfismo de $C(\sigma(x))$ sobre $B^*(a)$, preserva espectros, entonces

$$\sigma_A(f(x)) = \sigma(\Phi_x(f)) = \sigma_{C(\sigma(x))}(f).$$

Pero el espectro en $C(\sigma(x))$ es la imagen directa y entonces $\sigma_A(f(x)) = f(\sigma_A(x))$ $\square$

Capítulo 2

Estructura de los Operadores normales

En este capítulo al igual que en el capítulo 3, asumiremos que $H \neq \{\theta\}$ y $K \neq \{\theta\}$ son espacios de Hilbert complejos y que $X \neq \{\theta\}$ y $Y \neq \{\theta\}$ son espacios de Banach complejos, al menos que digamos lo contrario.

En la sección 2.1, daremos una breve introducción de las proyecciones ortogonales. Debido a la simplicidad, de estos operadores es un problema interesante expresar operadores más generales en términos de proyecciones ortogonales, en particular de los operadores normales. En este apartado estableceremos algunas propiedades de las proyecciones ortogonales.

En la sección 2.2, estudiaremos las principales propiedades del espacio de operadores acotados en espacios de Hilbert. En particular, pondremos mayor atención en los operadores auto-adjuntos, el cual nos servirá para dar el concepto de operador positivo, a su vez este último operador nos permite definir algunos tipos de operadores no normales, en particular de los operadores hiponormales. También estudiaremos algunas propiedades de las isometrías, operadores unitarios, isometrías parciales y por lo tanto la descomposición polar de los operadores acotados.

En la sección 2.3, estudiamos las propiedades principales de un operador normal, especialmente sus propiedades espectrales.

Finalmente en la subsección 2.3.1, analizamos el teorema de representación espectral para operadores normales. Dicha representación será en términos de proyecciones ortogonales.

Al igual que en el capítulo 1, varios de los resultados expuestos en todo el capítulo no serán demostrados, debido a que se pueden encontrar en cualquier libro de análisis funcional, tales como [9].

2.1. Introducción de las proyecciones ortogonales

Una proyección en un espacio lineal X es una transformación lineal $P : X \to X$ tales que $P^2 = P$. Si P es una proyección, entonces también lo es $I - P$, además $R(P) = N(I - P)$ y $N(P) = R(I - P)$. Una proyección ortogonal en un espacio con producto interno X es una proyección $P \in B[X]$ tales que $R(P) \perp N(P)$.

Sea X un espacio con producto interior. Si P es una proyección ortogonal en X, entonces también lo es $(I - P) : X \to X$. Entonces el rango $R(P)$ de P es un subespacio de X, ya que $N(I - P)$ es un subespacio de X.

Sea X un espacio con producto interno. Unas de las principales propiedades de una proyección ortogonal $P : X \to X$ que se usarán con mayor frecuencia en secciones posteriores son las siguientes:

(a) $P \in B[X]$ y $\|P\| = 1$ siempre que $P \neq O$.

(b) $N(P)$ y $R(P)$ son subespacios de X.

(c) $N(P) = R(P)^{\perp}$ y $R(P) = N(P)^{\perp}$.

(d) $X = R(P) + N(P)$ o de manera equivalente $X = R(P) \oplus N(P)$.

Otra manera de enunciar el teorema de la proyección, ahora en su forma analítica es como sigue:

2.1 Teorema. (Teorema de Proyección-Tercera Versión). Para cada subespacio M de H existe una única proyección ortogonal $P \in B[H]$ con $R(P) = M$.

Sea M cualquier subespacio de H. Entonces la única proyección ortogonal P en H para el cual $R(P) = M$ se llamará proyección ortogonal a lo largo de M o proyección ortogonal sobre M.

Ahora consideraremos familias ortogonales de proyecciones ortogonales, que es muy importante en la teoría del teorema espectral, que veremos más adelante.

2.2 Proposición. Sea X un espacio con producto interior. Sean $P_1, P_2 \in B[X]$ proyecciones ortogonales en X. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) $R(P_1) \perp R(P_2)$.

(2) $P_1 P_2 = O$.

(3) $P_2 P_1 = O$.

(4) $R(P_2) \subseteq N(P_1)$.

(5) $R(P_1) \subseteq N(P_2)$.

Si dos proyecciones ortogonales P_1 y P_2 en un espacio con producto interno X satisfacen cualesquiera de las equivalencias de la proposición anterior, entonces diremos que son ortogonales uno del otro o mutuamente ortogonales. Si $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia de proyecciones mutuamente ortogonales en X (es decir, $R(P_\alpha) \perp R(P_\beta)$ siempre que $\alpha \neq \beta$), entonces diremos que $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia ortogonal de proyecciones ortogonales en X. Si $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia ortogonal de proyecciones ortogonales y $\sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma(x) = x$ para cada $x \in X$, entonces $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ se llamará una resolución de la identidad en X. Si $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión infinita entonces la identidad anterior en X, nos dice convergencia fuerte en el operador fuerte, es decir, $\sum_{k=0}^{n} P_k \xrightarrow{s} I$.

Una generalización del concepto de convergencia fuerte de una sucesión de operadores es la siguiente:

2.3 Definición. Sea X un espacio normado. Una familia $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de operadores en $B[X]$ es sumable fuerte a T, si $\{T_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia sumable para cada $x \in X$. En este caso T se escribirá como $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma = T$.

Por lo tanto $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una resolución de la identidad en X si es una familia ortogonal de proyecciones ortogonales en X y es sumable fuerte al operador identidad en X.

Cualquier familia ortogonal de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert es sumable fuerte a la proyección ortogonal a lo largo de la suma de los rangos de tal familia de proyecciones, fomalizando tenemos

2.4 Proposición. Si $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia ortogonal de proyecciones ortogonales en H, entonces es sumable fuerte a la proyección ortogonal $P : H \to H$ a lo largo de $\sum_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma)$. En otras palabras, $\sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma = P$, donde $P \in B[H]$ es la proyección ortogonal a lo largo de $R(P) = \sum_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma)$.

La proposición anterior es una consecuencia del teorema de la proyección y de la estructura ortogonal. Otra versión del teorema de la estructura ortogonal en términos de proyecciones ortogonales es como sigue:

2.5 Teorema. Si $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una resolución de la identidad en H, entonces

$$H = \sum_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma).$$

Recíprocamente, si $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia ortogonal de subespacios de H tales que $H = \sum_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, entonces la familia $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ que consiste de proyecciones ortogonales $P_\gamma \in B[H]$ a lo largo de M_γ es una resolución de la identidad en H.

Como $\{R(P_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia ortogonal de subespacios de H, entonces $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma) \cong \sum_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma)$. Por lo tanto la proposición 2.4 dice que $\sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma = P$, donde $P \in B[H]$ es la proyección ortogonal con $R(P) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma)$ y el teorema 2.5 dice que $H = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R(P_\gamma)$ siempre que $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una resolución de la identidad en H.

Sea $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una resolución de la identidad en H, donde $P_\gamma \neq O$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Sea $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de escalares. Sea $D(T) = \{x \in H : \{\lambda_\gamma P_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}\, es\, una\, familia\, sumable\, de\, vectores\, en\, H\}$. La función $T : D(T) \to H$, definida como $T(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma P_\gamma(x)$ para cada $x \in D(T)$, se dice que es una combinación lineal de proyecciones.

2.6 Proposición. Cada combinación lineal de proyecciones es una transformación lineal. Además, si $T \in L[D(T), H]$ es una combinación lineal de proyecciones , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $D(T) = H$.

(2) $\{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia acotada de escalares.

(3) T es acotada.

Si cualquiera de la equivalencias anteriores son verdaderas, entonces $T \in B[H]$ es tal que $\|T\| = sup_{\gamma\in\Gamma}|\lambda_\gamma|$. Además, $\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma P_\gamma = T$.

2.2. Operadores auto-adjuntos y positivos

Antes de dar el concepto de un operador auto-adjunto, necesitamos primeramente definir el adjunto de un operador, ya que el primero depende de este último y daremos algunas de sus principales propiedades, pero antes necesitamos un teorema auxiliar.

2.7 Teorema. (Teorema de la Representación de Riesz). Cada funcional lineal f en H es acotada si y sólo si existe un único $y \in H$ tales que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para cada $x \in H$. Además, $\|f\| = \|y\|$. Tal vector único $y \in H$ se llama la representación de Riesz de la funcional $f \in B[H, \mathbb{F}]$.

Sea $T \in B[H, K]$ una transformación lineal acotada de H en K. Para cada $y \in K$ consideremos la funcional $f_y : H \to \mathbb{F}$ definida por $f_y(x) = \langle T(x), y \rangle$, para cada $x \in H$. Entonces f_y es una funcional lineal acotada. Así que, por el teorema de la representación de Riesz existe un único $z_y \in H$ tales que $\langle T(x), y \rangle = f_y(x) = \langle x, z_y \rangle$ para cada $x \in H$. Esto define una función $T^* : K \to H$, tales que $T^*(y) = z_y$ para cada $y \in K$, y por lo tanto satisface la siguiente identidad para cada $x \in H$ y para cada $y \in K$ se tiene que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \tag{2.1}$$

Llamaremos a T^* como el adjunto de $T \in B[H, K]$, además se puede mostrar que $T^* \in B[K, H]$ y es la única que cumple la ecuación 2.1.

Otras de las propiedades del adjunto de $T \in B[H, K]$, que utilizaremos con mayor frecuencia en las secciones posteriores son las siguientes:

(a) $(S + T)^* = S^* + T^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ y $(ST)^* = T^* S^*$.

(b) $I^* = I$ y $O^* = O$.

(c) $T^{**} = T$ y $\|T^*\|^2 = \|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$.
Si $H = K$, entonces:

(d) $(T^*)^n = T^{*n} = T^{n*} = (T^n)^*$.

(e) Si T es invertible, entonces T^* también lo es y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Estas propiedades muestran la analogía entre los complejos conjugados de los números complejos y los adjuntos de los operadores lineales acotados. Además nos dice que $B[H]$ es una B^*-álgebra, donde la involución de un operador es su adjunto.

Sea X un espacio lineal y $T : X \to X$ una transformación lineal. Si M es un subespacio vectorial de X, entonces diremos que M es T-invariante si $T(M) \subseteq M$. Ahora tomemos $T \in B[X]$, donde X es un espacio con producto interno y M es un subespacio de X. Si M y $M^\perp$ son $T-$invariantes entonces diremos que M reduce a T o que M es un subespacio reductor de T. Un subespacio reductor no trivial M de T es un subespacio que reduce T tales que $\{\theta\} \neq M \neq X$. Como es claro que $\{\theta\}$ y X son subespacios reductores de T, entonces siempre que digamos M es un subespacio reductor de T entenderemos que es un subespacio reductor no trivial de T. Una manera sencilla de caracterizar a los subespacios reductores de T, nos la proporciona el siguiente teorema:

2.8 Teorema. Sea M cualquier subespacio de H, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) M reduce T.

(b) $T = T\,|_M \oplus T\,|_{M^\perp} = \begin{pmatrix} T\,|_M & O \\ O & T\,|_{M^\perp} \end{pmatrix}$ en $B[M \oplus M^\perp]$.

(c) $PT = TP$, donde P es la proyección a lo largo de M.

Este teorema sugiere que, si M reduce T, entonces la investigación de T se reduce a la investigación de operadores más pequeños $T\,|_M$ y $T\,|_{M^\perp}$, que justifica la terminología subespacio reductor.

Sea $T \in B[H]$ y sea M un subespacio de H. Es fácil mostrar que M es T-invariante si y sólo si $M^\perp$ es T^*-invariante. Por lo tanto T tiene un subespacio invariante no trivial si y sólo si T^* también lo tiene. Además, M reduce T si y sólo si es T-invariante y T^*-invariante. En este caso, $(T|_M)^* = T^*|_M$.

El espacio nulo $N(T)$ y la clausura del rango $\overline{R(T)}$ de T ambos son T-invariantes. Más aún, si $S \in B[H]$ es un operador que conmuta con T y con T^* entonces $N(T)$ y $\overline{R(T)}$ reducen a T. El siguiente resultado muestra que $N(T^*)^\perp$, $R(T^*)^\perp$, $N(T^*T)$ y $\overline{R(TT^*)}$ también son T-invariantes para $T \in B[H]$.

2.9 Proposición. Si $T \in B[H, K]$ entonces:

(1) $N(T) = R(T^*)^\perp = N(T^*T)$.

(2) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = \overline{R(TT^*)}$.

(1*) $N(T^*) = \overline{R(T)} = N(TT^*)$.

(2*) $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp = \overline{R(T^*T)}$.

Las siguientes proposiciones nos dan una buena caraterización de las isometrías y unitarios en términos de sus adjuntos.

2.10 Proposición. Un operador $V \in B[H, K]$ es una isometría si y sólo si $V^*V = I$.

Sabemos que un número complejo λ tiene longitud de 1 si $\lambda\overline{\lambda} = 1$, los operadores unitarios también tienen esas propiedades similares en el álgebra de los operadores acotados, como lo muestra la siguiente proposición.

2.11 Proposición. Sea $U \in B[H, K]$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) U es unitaria.

(b) U es invertible y $U^{-1} = U^*$.

(c) $U^*U = I$ y $UU^* = I$.

(d) U es una isometría y su adjunto U^* también lo es.

Como se mencionó anteriormente, existe un fuerte paralelismo entre el complejo conjugado de un número complejo y el adjunto de un operador. Los números reales pueden caracterizarse como aquellos números complejos que son iguales a sus complejos conjugados. Si consideramos la condición $T = T^*$ para un operador acotado, veremos que se tienen muchas de las propiedades de los números reales para dichos operadores.

2.12 Definición. Un operador $T \in B[H]$ es auto-adjunto o hermitiano si $T = T^*$. Por definición de adjunto de un operador, $T \in B[H]$ es auto-adjunto si y sólo si $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ para cada $x, y \in H$.

Una de las consecuencias inmediatas de la definición de un operador auto-adjunto es que si $T \in B[H]$ es auto-adjunto y si M es un subespacio de H, entonces M es T-invariante si y sólo si $M^\perp$ es T-invariante si y sólo si M reduce T.

La siguiente proposición caracteriza a los operadores auto-adjuntos en espacios de Hilbert complejo.

2.13 Proposición. Sea H un espacio de Hilbert complejo. El operador $T \in B[H]$ es auto-adjunto si y sólo si $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada $x \in H$.

Obviamente el resultado anterior es falso si H es un espacio de Hilbert real, ya que en este caso $\langle T(x), y\rangle \in \mathbb{R}$ para cada $x, y \in H$ y obviamente hay operadores no auto-adjuntos.

La proposición anterior nos permite definir un orden parcial en el conjunto de los operadores auto-adjuntos. Sea $Q \in B[H]$ un operador auto-adjunto. Diremos que Q es no negativa si $\langle Q(x), x\rangle \geq 0$ para cada $x \in H$ y se denotará por $Q \geq O$. Si $\langle Q(x), x\rangle > 0$ para cada $x \in H$ distinto de cero, entonces

Q se llamará positiva y lo denotaremos por $Q > O$. Si existe $\alpha > 0$ tales que $\alpha\|x\|^2 \leq \langle Q(x), x\rangle$ para cada $x \in H$, entonces Q se llamará estrictamente positiva y se denotará por $Q \succ O$. Denotaremos por $B^+[H]$ a la colección de todos los operadores no negativos.

Tomemos $S, T \in B[H]$. Si $T - S$ es auto-adjunto y $O \leq T - S$, entonces escribimos $S \leq T$. De aquí que $S \leq O$ si $O \leq -S$. Es fácil mostrar que $\leq$ define un orden parcial en el conjunto de los operadores auto-adjutos. Similarmente, escribimos $S < T$ o $S \prec T$ si $O < T - S$ o $O \prec S$ y $S < O$ o $S \prec O$ si $O < -S$ o $O \prec -S$ respectivamente.

Los operadores postivos no necesariamente son operadores invertbles. En efecto, $Q \geq O$ y $N(Q) = \{\theta\} \Leftrightarrow T \geq O$ y si $Q(x) = \theta$ implica que $x = \theta$ $\Leftrightarrow Q \geq O$ y $Q(x) \neq \theta$ para cada $x \neq \theta \Leftrightarrow \|Q(x)\| > 0$ para cada $x \neq \theta \Leftrightarrow$ $0 < \|Q(x)\|^2 \leq \|Q\|\langle Q(x), x\rangle$ para cada $x \neq \theta \Leftrightarrow \langle Q(x), x\rangle > 0$ para cada $\theta \neq x \in H \Leftrightarrow T > O$. Además, $Q \geq O$ y $N(Q) = \{\theta\} \Leftrightarrow \overline{R(Q)} = \overline{R(Q^*)} = N(Q)^{\perp}$, por la proposición 2.9 (2^*) y $N(Q) = \{\theta\} \Leftrightarrow R(Q)^{\perp} = N(Q)^{\perp\perp} = N(Q) = \{\theta\}$ $\Leftrightarrow \overline{R(Q)} = H$. Por lo tanto, hemos mostrado lo siguiente:

$$Q > O \Leftrightarrow Q \geq O\, y\, N(Q) = \{\theta\} \Leftrightarrow Q \geq O\, y\, \overline{R(Q)} = H$$

Por lo tanto, $Q > O$ tiene una inversa en su rango que no necesariamente es acotada. Sin embargo, los operadores estrictamente positivos son invertibles. En efecto, $Q \succ O \Leftrightarrow \exists\alpha > 0$: $\alpha\|x\|^2 \leq \langle Q(x), x\rangle \leq \|Q(x)\|\|x\|$ para cada $\theta \neq x \in H \Leftrightarrow \exists\alpha > 0$: $\alpha\|x\| \leq \|Q(x)\|$, para cada $x \in H$, es decir, Q es acotado inferiormente. Así que $R(Q) = \overline{R(Q)}$, entonces $R(Q) = \overline{R(Q)} = H$, pues Q es positivo. Por lo tanto,

$$Q \succ O \Leftrightarrow O \leq Q\, e\, invertible. \tag{2.2}$$

2.14 Teorema. Sean $Q, R \in B[H]$, entonces:

(a) Si $O \prec Q \prec R$, entonces $O \prec R^{-1} \prec Q^{-1}$.

(b) Si $O \prec Q \leq R$, entonces $O \prec R^{-1} \leq Q^{-1}$

(c) Si $O \prec Q < R$, entonces $O \prec R^{-1} < Q^{-1}$

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que una proyección sea una proyección ortogonal.

2.15 Proposición. Si $P \in B[H]$ es una proyección tales que $P \neq O$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) P es una proyección ortogonal.

(b) P es auto-adjunto.

(c) P es no negativa.

(d) $\|P\| = 1$.

El teorema de la proyección y la proposición anterior nos sugieren el resultado siguiente:

2.16 Teorema. Sea M cualquier subespacio de H y sea $T \in B[H]$. Si M es T invariante entonces $(T\mid_M)^* = PT^*\mid_M$ en $B[H]$, donde $P : H \to H$ es la proyección ortogonal a lo largo de H.

Es claro que si $T \in B[H]$ es auto-adjunto, T^2 es positivo, pues $\langle T^2x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$, ahora nos planteamos el problema inverso, dado un operador $T \in B[H]$ positivo, encontrar un operador auto-adjunto $S \in B[H]$ tales que $S^2 = T$. Esto sugiere el siguiente concepto

2.17 Definición. Si T es un operador en $B[H]$, y si existe un operador S en $B[H]$ tales que $S^2 = T$, entonces S es la raíz cuadrada de T.

El teorema que sigue generaliza el hecho de que todo los números reales positivos tienen raíz cuadrada única.

2.18 Teorema. Cada operador $Q \in B^+[H]$ tiene una única raíz cuadrada $Q^{\frac{1}{2}} \in B^+[H]$, que conmuta con cada operador en $B[H]$ que conmuta con Q.

El siguiente teorema nos proporciona unas propiedades principales de los operadores no negativos, que será una herramienta útil para el desarrollo de este trabajo.

2.19 Proposición. Si $Q \in B^+[H]$, entonces

(a) $\|Q^{\frac{1}{2}}\|^2 = \|Q\| = \|Q^2\|^{\frac{1}{2}}$.

(b) $N(Q^{\frac{1}{2}}) = N(Q) = N(Q^2)$ y $\overline{R(Q^{\frac{1}{2}})} = \overline{R(Q)} = \overline{R(Q^2)}$.

Una isometría parcial es una transformación lineal acotada que actúa isométricamente en el complemento ortogonal de su espacio nulo. Esto es, $W \in B[H, K]$ es una isometría parcial si $W\mid_{N(W)^\perp} : N(W)^\perp \to K$ es una isometría.

Si W es una isometría parcial como en la definición anterior, $N(W)^\perp$ y $R(W)$ se le conocen como espacios inicial y final de W.

2.20 Teorema. Sea $W \in B[H]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) W es una isometría parcial con espacio inicial M y espacio final R.

(b) W^*W es la proyección ortogonal sobre M y $R(W) = R$.

(c) $W = WW^*W$.

(d) $W^* = W^*WW^*$.

(e) WW^* es la proyección ortogonal sobre R y $N(W)^\perp = M$.

(f) W^* es una isometría parcial con espacio inicial R y espacio final M.

Sabemos que todo número complejo λ puede ser factorizado en la forma $\lambda = \alpha|\lambda|$, donde $|\alpha| = 1$. Esto sugiere el siguiente concepto

2.21 Definición. Si una transformación $T \in B[H,K]$ es el producto de una isometría parcial $W \in B[H,K]$ y un operador no negativo $Q \in B[H]$ y si $N(W) = N(Q)$, entonces la representación $T = WQ$ se llamará como la descomposición polar de T.

Antes de enunciar el teorema más importante de esta sección, primero observemos que

$TT^* \in B[K]$ y $T^*T \in B[H]$ pertenecen a la clase de los operadores autoadjuntos, pues $(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$, de manera similar se muestra que $(T^*T)^* = T^*T$. Más aún son operadores no negativos, en efecto, como $0 \leq \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$ para cualesquiera $x \in H$, se sigue que $T^*T \geq O$. Como $T^{**} = T$, de manera inmediata se obtiene que $TT^* \geq O$. Entonces tiene sentido lo siguiente

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

que se conoce como el valor absoluto de T. Inmediatamente se obtiene que $|T| \in B^+[H]$ y $|T|^2 = T^*T$.

El siguiente teorema dice que cada transfomación lineal acotada tiene una única descomposición polar.

2.22 Teorema. Si $T \in B[H,K]$, entonces existe una isometría parcial $W \in B[H,K]$ con espacio inicial $N(T)^\perp$ y espacio final $\overline{R(T)}$ tales que $T = W|T|$ y $N(W) = N(|T|)$. Además, si $T = ZQ$, donde $Q \in B[H]$ es un operador no negativo y $Z \in B[H,K]$ es una isometría parcial con $N(Z) = N(Q)$, entonces $Q = |T|$ y $Z = W$.

Si $T = WQ$ es la descomposición polar de T, entonces W^*W es la proyección ortogonal a lo largo de $N(W)^{\perp} = N(Q)^{\perp} = \overline{R(Q)}$ así que $W^*WQ = Q$. Entonces

$$T = WQ \textit{ implica que } W^*T = Q.$$

Como consecuencia inmediata del teorema 2.22, tenemos

2.23 Corolario. Sea $T = WQ$ la descomposición polar de una transformación lineal acotada $T \in B[H, K]$.

(a) $W \in B[H, K]$ es una isometría si y sólo si $N(T) = \{\theta\}$.

(b) Sea $W \in B[H, K]$, W^* es una isometría si y sólo si $\overline{R(T)} = K$.

Por lo tanto, si $T = WQ$ es la descomposición polar de T, entonces W es unitario si y sólo si T es inyectiva y tiene rango denso. En particular si T es invertible, entonces $T = U|T|$, donde $U \in B[H, K]$ es unitario.

2.3. Operadores normales

2.24 Definición. Un operador $T \in B[H]$ es normal si conmuta con su adjunto, es decir, T es normal si $TT^* = T^*T$.

Es claro que todo los operadores auto-adjuntos son operadores normales y por lo tanto también los operadores no negativos y en particular las proyecciones ortogonales. Sin embargo, no todo operador normal es auto-adjunto, pues es claro que todo operador diagonal es normal y no es auto-adjuto si tal operador tiene al menos un número complejo en la diagonal. También es claro que los operadores unitarios son operadores normales.

Estudiaremos en esta sección algunas propiedades de esta clase de operadores, que permitirán simplificar los argumentos en el desarrollo posterior de la teoría.

2.25 Proposición. Un operador $T \in B[H]$ es normal si y sólo si $\|T^*(x)\| = \|T(x)\|$ para cualesquiera $x \in H$.

La prueba de este teorema es consecuencia inmediata de la definición de un operador normal, esto es, si $x \in H$, tenemos

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle \\ &= \|T^*x\|^2. \end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es que los núcleos $N(T)$ y $N(T^*)$ coinciden si T es normal.

Los operadores normales son cerrados bajo traslaciones y multiplicación por escalares.

2.26 Proposición. Si T es un operador normal en H, entonces

(a) $\lambda I - T$ es normal.

(b) αT es normal para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$.

Una manera simple de demostrar la densidad del rango de un operador normal T es mostrando que T es inyectiva.

2.27 Proposición. Si $T \in B[H]$ es un operador normal entonces

(a) $R(T)$ es denso en H si y sólo si $N(T) = \{\theta\}$.

(b) T es invertible si y sólo si existe $\delta > 0$ tales que $\|T(x)\| \geq \delta\|x\|$ para cada $x \in H$.

Estudiaremos a continuación las propiedades espectrales de esta clase de operadores. Veremos que en este caso el espectro de tales operadores se reduce al espectro aproximado. Esto permite simplificar el estudio del espectro para estos operadores, que son además los que se presentan en los ejemplos más comunes.

Recordemos que el espectro $\sigma(T)$ de T en el álgebra de los operadores acotados $B[X]$ es el conjunto todos los números complejos λ tales que $\lambda I - T$ no es invertible. Entonces este conjunto puede ser dividido en las siguientes tres partes de acuerdo al corolario 1.16:

(a) $\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ N(\lambda I - T) \neq \{\theta\}\}$.

(b) $\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ N(\lambda I - T) = \{\theta\},\ \overline{R(\lambda I - T)} = X\ y\ R(\lambda I - T) \neq X\}$

(c) $\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ N(\lambda I - T) = \{\theta\}\ y\ \overline{R(\lambda I - T)} \neq X\}$.

y que llaman, el espectro puntual, el espectro continuo y el espectro residual de T respectivamente.

Note que $\{\sigma_R(T), \sigma_P(T), \sigma_C(T)\}$ es una partición del espectro $\sigma(T)$ de T. También observe que el espectro puntual de T es el conjunto de todos los valores propios de T y que si no es vacía, entonces cada conjunto de vectores propios asociados con valores propios distintos es linealmente independiente.

A continuación definimos el espectro aproximado de un operador.

2.28 Definición. El conjunto de todos los valores aproximados de T es el conjunto $\sigma_{AP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \, no \, es \, acotado \, inferiormente\}$. Equivalentemente, $\lambda \in \sigma_{AP}(T)$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un vector unitario $x_\epsilon \in X$ tales que $\|(\lambda I - T)x_\epsilon\| < \epsilon$.

2.29 Teorema. (Teorema de la función espectral) Sea $T \in B[X]$ cualquier operador y sea $p(t)$ cualquier polinomio con coeficientes complejos. Entonces

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

2.30 Teorema. Si $T \in B[H]$, es un operador invertible, entonces $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Es consecuencia de la ecuación, $T^{-1} - \lambda^{-1}I = (\lambda I - T)\lambda^{-1}T^{-1}$.

2.31 Teorema. Sea $T \in B[H]$ cualquier operador.

(a) $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(b) Si $\lambda \in \sigma_R(T)$, entonces $\overline{\lambda} \in \sigma_P(T^*)$.

(c) Si $\lambda \in \sigma_P(T)$, entonces $\overline{\lambda} \in \sigma_P(T^*) \cup \sigma_R(T^*)$.

Los operadores normales no poseen ningún valor residual.

2.32 Teorema. Si $T \in B[H]$ es normal entonces $\sigma_R(T) = \emptyset$.

Demostración. Como $\lambda I - T$ es normal, entonces $N(\lambda I - T) = N(\overline{\lambda} I - T^*)$ por la observación hecho anteriormente. Ahora si $\lambda \in \sigma_R(T)$, $\overline{\lambda} \in \sigma_P(T^*)$, esto es, $\lambda \in \sigma_P(T)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\sigma_R(T) = \emptyset$. $\square$

Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos de un operador normal son ortogonales. Esto es,

2.33 Teorema. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Si T es un operador normal entonces

$$N(\lambda I - T) \perp N(\mu I - T)$$

siempre que $\lambda \neq \mu$.

Recordemos que una transformación lineal $T \in B[X, Y]$ es compacto si mapea subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Y. Esto es, si $\overline{T(A)}$ es compacto en Y siempre que A es acotado en X.

El siguiente teorema dice que todo operador normal compacto posee al menos un valor propio.

2.34 Teorema. Si $T \in B[H]$ es un operador normal compacto entonces $\sigma_P(T) \neq \emptyset$ y existe $\lambda \in \sigma_P(T)$ tales que $|\lambda| = \|T\|$.

El resultado que sigue nos proporciona una forma más conveniente de caracterizar los valores espectrales de un operador normal.

2.35 Teorema. Si T es un operador normal entonces $\sigma(T) = \sigma_{AP}(T)$.

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_{AP}(T)$, entonces $\lambda I - T$ no es acotada inferiormente. Como $\lambda I - T$ es normal, entonces por la proposición 2.27, $\lambda I - T$ no es invertible, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

Si $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda I - T$ no es invertible, luego $\lambda I - T$ no es acotada inferiormente, esto es, $\lambda \in \sigma_{AP}(T)$. Esto completa la prueba. $\square$

A continuación veamos un ejemplo de un operador normal.

2.36 Ejemplo. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita y tomemos al espacio de Hilbert $L^2(\mu)$ del ejemplo 1.20. Para cada $\varphi \in L^\infty(\mu)$, sea $M_\varphi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ el operador multiplicación definido por $M_\varphi(f) = \varphi.f$ para cada $\varphi \in L^2(\mu)$. Entonces M_φ es un operador normal.

En el ejemplo 1.17, demostramos que $M_\varphi \in B[L^2(\mu)]$. Además, si $f, g \in L^2(\mu)$,

$$\begin{aligned} \langle M_\varphi(f), g\rangle &= \int_\Omega (\varphi.f).\overline{g}d\mu = \int_\Omega f.(\overline{\overline{\varphi}.g})d\mu \\ &= \langle f, \overline{\varphi}.g\rangle = \langle f, M_{\overline{\varphi}}(g)\rangle, \end{aligned}$$

de donde $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$. Así, que $M_\varphi(M_\varphi)^* = (M_\varphi)^* M_\varphi$ si y sólo si $\varphi.\overline{\varphi}.f = |\varphi|^2 f = \overline{\varphi}.\varphi.f$, es decir, M_φ es normal.

También note que M_φ es auto-adjunto siempre y cuando $\varphi.f = \overline{\varphi}.f$ para toda función $f \in L^2(\mu)$, lo que es equivalente a que $\varphi = \overline{\varphi}$ en $L^2(\mu)$, es decir, siempre y cuando $\varphi(z) \in \mathbb{R}$ para casi todo punto. M_φ es unitario si y sólo si $|\varphi|^2 f = f$ en $L^2(\mu)$, es decir, $\|\varphi\| = 1$ para casi todo punto.

2.3.1. Descomposición espectral de operadores normales

Los operadores normales $T \in B[H]$, en el caso de dimensión finita, pueden ser expresados como una combinación lineal de proyecciones ortogonales, es decir, existen proyecciones ortogonales dos a dos $P_1, \cdots, P_n$ definidas en H tal que

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i,$$

donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son los diferentes valores propios de T. En esta sección, veremos que en el caso en que H es dimensionalmente infinito, una cierta generalización es posible pero sólo para la clase de los operadores normales compactos, en tal caso, para este tipo de operadores podremos escribir como una serie con la convergencia de la topología fuerte de operadores, esto es

$$T = \sum_{\sigma_p(T)} \lambda P_\lambda$$

donde $\lambda \in \sigma_P(T)$ son los distintos valores propios de T y $\{P_\lambda\}$ es una resolución de la identidad en H. Pero para el caso de operadores normales cualesquiera en espacios de dimensión arbitraria no será posible en general usar este tipo de expresiones, puesto que algunas veces el espectro ni siquiera es numerable. Pero una generalización es posible cambiando las sumas por integrales sobre el espectro como veremos en esta sección, previa una generalización de la medida[1], la llamada medida espectral.

2.37 Definición. Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea Σ la σ-álgebra de Borel generada por los conjuntos abiertos de Ω. Una medida espectral en H es una función $P : \Sigma \to B[H]$ con las siguientes propiedades:

(a) $P(\emptyset) = O$ y $P(\Sigma) = I$.

(b) $P(\Lambda)$ es una proyección ortogonal para cada $\Lambda \in \Sigma$.

(c) $P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = P(\Lambda_1)P(\Lambda_2)$ para cada $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Sigma$.

(d) Si $\{\Lambda_n\} \subseteq \Sigma$ una sucesión disjuntos dos a dos, entonces

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Lambda_n).$$

En esta sección sólo trataremos con medidas regulares y σ-finitas.

Por (c), las proyecciones ortogonales $P(\Lambda_n)$ en (d) conmutan, además si $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ entonces por (a) y (c) $P(\Lambda_1)$ y $P(\Lambda_2)$ son mutuamente ortogonales.

La convergencia en (d) es en la topología fuerte, en efecto, la obsevación anterior nos dice que la sucesión en (d) es una sucesión ortogonal de proyecciones ortogonales, entonces por la proposición 2.4, $\{\sum_{k=1}^{n} P(\Lambda_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge

[1]Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea Σ la σ-álgebra de Borel generada por los conjuntos abiertos de Ω. Una medida positiva sobre Ω es una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ que es σ-aditiva, esto es, si $\{\Lambda_n\} \subseteq \Sigma$ es disjunta entonces $\mu(\bigcup_{n=}^{\infty} \bigwedge_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu(\Lambda_n)$ y $\mu(\emptyset) = 0$, tambén pediremos que $\mu(K) < \infty$ para K compacto de Ω.

fuertemente a la proyección ortogonal en $B[H]$ a lo largo de $\sum_{n=1}^{\infty} R(P(\Lambda_n))$. Por lo tanto, la propiedad (d) dice que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$ coincide con la proyección ortogonal en $B[H]$ a lo largo de $\sum_{n=1}^{\infty} R(P(\Lambda_n))$. Esto generaliza el concepto de una resolución de la identidad en H. En efecto, si $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de Σ, entonces la sucesión ortogonal de proyecciones ortogonales $\{P(\Lambda_n)\}$ es tal que

$$\sum_{k=1}^{n} P(\Lambda_k) \xrightarrow{s} P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n) = P(\Sigma) = I.$$

Sea $x, y \in H$ y sea P una medida espectral en (Ω, Σ, H), la función $P_{x,y} : \Sigma \to \mathbb{C}$ definida por $P_{x,y}(\Lambda) = \langle P(\Lambda)x, y\rangle$ es una medida compleja en Σ.[2]

Como $P(\Lambda)$ es una proyección auto-adjunto, se sigue que para cada $x \in H$,

$$P_{x,x}(\Lambda) = \langle P(\Lambda)x, x\rangle = \langle P^2(\Lambda)x, x\rangle = \langle P(\Lambda)x, P(\Lambda)x\rangle = \|P(\Lambda)x\|^2$$

así que cada $P_{x,x}$ es una medida positiva en Σ cuya variación total es

$$\|P_{x,x}\| = P_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2 \tag{2.3}$$

Sea P una medida espectral en Σ. Si $\Lambda_n \in \Sigma$ tales que $P(\Lambda_n) = O$ para $n = 1, 2, \dots$ y $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ entonces $P_{x,x}(\Lambda_n) = 0$ para cada $x \in H$. Como $P_{x,x}$ es aditiva numerable, se sigue que $P_{x,x}(\Lambda) = 0$. Pero $\|P(\Lambda)x\|^2 = P_{x,x}(\Lambda)$, es decir, $P(\Lambda) = O$.

Antes de enunciar el primer teorema importante de esta sección, será necesario introducir primero el álgebra $L^{\infty}(P)$.

Sea P una medida espectral en Σ. Sea f una función compleja Σ-medible en Ω. Existe una colección numerable $\{D_n\}$ de discos abiertos que forma una base para la topología de $\mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es separable. Sea $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ tales que $P(f^{-1}(D_n)) = O$. Por la observación anterior, $P(f^{-1}(U)) = O$. Además, U es el subconjunto abierto más grande de $\mathbb{C}$ con esta propiedad.

El rango esencial[3] de f es por definición, el complemento de U. Es el subconjunto cerrado más pequeño de $\mathbb{C}$ que contiene $f(\lambda)$ para casi todo $\lambda \in \Omega$, esto es, para todo $\lambda \in \Omega$ excepto en esos conjuntos $\Lambda \in \Sigma$ tales que $P(\Lambda) = O$.

[2]Una medida compleja es una función a valores complejos definida sobre Σ σ-aditiva y finita sobre compactos. Asociada con medida μ definida por $|\mu|(\Lambda) = \sup \sum |\mu(\Lambda_n)|$, donde el supremo esta tomado sobre todas las colecciones dijuntas finitas de conjuntos de Borel Λ_n cuya unión es Λ.

[3]El rango esencial de f es el complemento de $\bigcup\{U : U\, es\, abierto\, y\, P(f^{-1}(U)) = O\}$

Diremos que f es esencialmente acotada si su rango esencial es acotada, por lo tanto compacto. En tal caso, el supremo esencial de f esta dado por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus U\}.$$

Sea B el álgebra de todas las funciones complejas acotadas Σ-medibles en Ω, con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(\lambda)| :\ \lambda \in \Omega\}$$

es fácil mostrar que B es un álgebra de Banach y que

$$N = \{f \in B :\ \|f\|_\infty = 0\}$$

es un subespacio lineal de B que es cerrado y tales que $fg \in N$ siempre que $f \in B$ y $g \in N$, por la última observación hecho anteriormente. Por lo tanto $B \backslash N$ es un álgebra de Banach, que denotaremos por $L^\infty(P)$. La norma de cualquier $[f] = f + N$ de $L^\infty(P)$ es entonces igual a $\|f\|_\infty$, y su espectro $\sigma([f])$ es el rango esencial de f. Como usualmente se hace en teoría de la medida, la distinción entre f y su clase de equivalencia $[f]$ será ignorado.

2.38 Teorema. Si P es una medida espectral, entonces existe un $*$-isomorfismo isométrico Φ del álgebra de Banach $L^\infty(P)$ sobre una subálgebra cerrada normal A de $B[H]$, que está relacionado con P por la fórmula,

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f dP_{x,y} \tag{2.4}$$

para cualesquiera $x, y \in H$ y $f \in L^\infty(P)$. Además,

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dP_{x,x} \tag{2.5}$$

y un operador $S \in B[H]$ conmuta con cada $P(\Lambda)$ si y sólo si S conmuta con cada $\Phi(f)$.

Si 2.4, se cumple usaremos la siguiente notación

$$\Phi(f) = \int_\Omega f dP.$$

Demostración. Sea $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n\}$ una partición de Ω, con $\Lambda_i \in \Sigma$ y sea s una función simple, tales que $s = \alpha_i$ en Λ_i. Definamos $\Phi(s) \in B[H]$ por

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(\Lambda_i).$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned}\langle\Phi(s)x,y\rangle &= \langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\Lambda_i)x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle P(\Lambda_i)x,y\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i P_{x,y}(\Lambda_i) = \int_\Omega s dP_{x,y}. \end{aligned}\tag{2.6}$$

Si $\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m\}$ es otra partición de Ω y si $t=\beta_j$ en Ω_j, entonces

$$\begin{aligned}\Phi(s)\Phi(t) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(\Lambda_i)\sum_{j=1}^{m}\beta_j P(\Omega_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j P(\Lambda_i)P(\Omega_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j P(\Lambda_i\cap\Omega_j) = \Phi(st) \end{aligned}\tag{2.7}$$

donde la última igualdad se debe a que st también es una función simple igual a $\alpha_i\beta_j$ en $\Lambda_i\cap\Omega_j$. Con un argumento similar también se prueba que para $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$,

$$\Phi(\alpha s+\beta t)=\alpha\Phi(s)+\beta\Phi(t)\tag{2.8}$$

Como cada $P(\Lambda_i)$ es auto-adjunto, obtenemos

$$\Phi(s)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}P(\Lambda_i)=\Phi(\overline{s}).$$

Usando esto y 2.7, obtenemos

$$\Phi(s)^*\Phi(s)=\Phi(\overline{s})\Phi(s)=\Phi(\overline{s}s)=\Phi(|s|^2).\tag{2.9}$$

Usando 2.6, tenemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(s)x\|^2 &= \langle\Phi(s)^*\Phi(s)x,x\rangle \\ &= \langle\Phi(|s|^2)x,x\rangle = \int_\Omega |s|^2 dP_{x,x}\end{aligned}\tag{2.10}$$

así que

$$\|\Phi(s)x\|\le\|s\|_\infty\|P_{x,x}\|=\|s\|_\infty\|x\|\tag{2.11}$$

por 2.3. Por otro lado, si $x\in R(P(\Lambda_j))$, entonces

$$\Phi(s)x=\alpha_j P(\Lambda_j)x=\alpha_j x,\tag{2.12}$$

ya que las proyecciones $P(\Lambda_i)$ tienen rangos mutuamente ortogonales. Si tomamos j tales que $|\alpha_j|=\|s\|_\infty$, entonces usando 2.11 y 2.12 obtenemos

$$\|\Phi(s)\|=\|s\|_\infty.\tag{2.13}$$

Ahora sea $f \in L^{\infty}(P)$. Existe una sucesión de funciones simples s_n medibles que converge a f con la norma de $L^{\infty}(P)$. Por 2.13, los operadores correspondientes $\Phi(s_n)$ forman una sucesión de Cauchy en $B[H]$ y por lo tanto converge a un operador que llamaremos $\Phi(f)$ con la norma en $B[H]$, y que $\Phi(f)$ no depende de la elección particular de $\{s_n\}$. Además, por 2.13,

$$\|\Phi(f)\| = \|f\|_{\infty}. \tag{2.14}$$

Ahora 2.4 se sigue de 2.6, poniendo cada s_n en vez de s, 2.5 se obtiene por 2.10 y si f y g son funciones medibles acotadas aproximadas por funciones simples medibles s_n y t_n con la norma de $B[H]$, obtenemos que 2.7 y 2.8 son verdaderos con f y g en vez de s y t.

Por lo tanto, Φ es un isomorfismo isométrico de $L^{\infty}(P)$ sobre $\Phi(L^{\infty}(P)) \subseteq B[H]$. Además, si (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^{\infty}(P)$, entonces existe $f \in L^{\infty}(P)$, tal que $f_n \to f$, ya que $L^{\infty}(P)$ es completo. Entonces, por 2.14 tenemos

$$\|\Phi(f_n) - \Phi(f)\| = \|\Phi(f_n - f)\| = \|f_n - f\|_{\infty},$$

de donde $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$, es decir, la imagen de Φ, $A = \Phi(L^{\infty}(P))$ es cerrada en $B[H]$.

Finalmente, si Q conmuta con cada $P(\Lambda)$, entonces Q conmuta con cada $\Phi(s)$ siempre que s es función simple, por lo tanto los procesos de aproximaciones usadas anteriormente muestra que Q conmuta con cada elemento de A. $\square$

2.39 Teorema. Si A es una subálgebra normal cerrada de $B[H]$ que contiene el operador identidad I y si Σ es la σ-álgebra de conjunto borelianos en Δ , entonces

(a) Existe una única medida espectral P en Σ tales que

$$T = \int_{\Delta} \hat{T} dP$$

para cada $T \in A$, donde $\hat{T}$ es la transformada de Gelfand de T.

(b) La inversa de la transformada de Gelfand extiende un $*$-isomorfismo ismétrico Φ del álgebra $L^{\infty}(P)$ sobre una subálgebra cerrada B de $B[H]$, $A \subseteq B$, dado por

$$\Phi(f) = \int_{\Delta} f dP$$

Explicitamente, Φ es lineal, multiplicativa y satisface

$$\Phi\overline{f} = (\Phi f)^{*},\ \|\Phi f\| = \|f\|_{\infty} \ \ (f \in L^{\infty}).$$

(c) B es la clausura del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las proyecciones $P(\Lambda)$.

(d) Si $\Lambda \subseteq \Delta$ es abierto y no vacío, entonces $P(\Lambda) \neq O$.

(e) Un operador $S \in B[H]$ conmuta con cada $T \in A$ si y sólo si S conmuta con cada proyección $P(\Lambda)$.

Demostración. Como $B[H]$ es B^*-álgebra y como A es una subálgebra normal cerrada de $B[H]$, entonces A es una B^*-álgebra conmutativa. Entonces por el teorema de Gelfand-Naimark 1.48, el mapeo $\psi : A \to C(\Delta)$, dada por $\psi(T) = \hat{T}$ es un $*$-isomorfismo isométrico.

Sean $x, y \in H$ y sea $\varphi : C(\Delta) \to \mathbb{C}$, $\varphi(\hat{T}) = \langle Tx, y\rangle$. Como $\widehat{T+S} = \hat{T} + \hat{S}$ y por la linealidad de $\langle\, ,\, \rangle$, φ es una funcional lineal acotada en $C(\Delta)$ y que

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|T\|_\infty = 1\} \leq \|T\|\|x\|\|y\| \\ &= \|\hat{T}\|_\infty \|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|, \end{aligned}$$

ya que $\|T\|_\infty = \|T\|$, por ser ψ isometría. Entonces por el teorema de representación de Riesz, existe una única medida Borel compleja regular[4] $\mu_{x,y}$ tales que

$$\langle Tx, y\rangle = \int_\Delta \hat{T} d\mu_{x,y}. \tag{2.15}$$

Para T fijo, el lado izquierdo de 2.15 es funcional lineal acotada en H y por lo tanto también el lado derecho y si $\hat{T}$ es remplazado por cualquier función Borel acotada f. El teorema 2.7, nos dice que existe un operador $\Phi f \in B[H]$ tales que

$$\langle (\Phi f)x, y\rangle = \int_\Delta f d_{\mu_{x,y}}. \tag{2.16}$$

2.15 y 2.16 muestran que $\Phi(\hat{T}) = T$. Entonces Φ es una extensión de la inversa de la transformada de Gelfand. Es claro que Φ es lineal y que T es auto-adjunto si y sólo si $\hat{T}$ es de valores reales. Si T es auto-adjunto,

$$\int_\Delta \hat{T} d_{\mu_{x,y}} = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{\int_\Delta \hat{T} d\mu_{y,x}}$$

esto implica que $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$. Si T no necesariamente es auto-adjunto, T tiene una representación única $T = S + iR$ con S y R auto-adjuntos, usando el

[4]Una medida μ sobre Ω se dice regular si verifica (1) $|\mu|(\Lambda) = \sup\{|\mu(K)| : K \, es\, compacto,\, K \subseteq \Lambda\}$ y (2) $|\mu|(\Lambda) = \text{ínf}\{|\mu(U)| : U \, es\, abierto,\, \Lambda \subseteq U\}$.

mismo razonamiento hecho anteriormente, $\mu_{y,x} = \overline{\mu_{x,y}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle (\Phi \overline{f})x, y\rangle &= \int_\Delta \overline{f} d\mu_{x,y} = \overline{\int_\Delta f d\mu_{y,x}} \\ &= \overline{\langle (\Phi f)y, x\rangle} = \langle x, (\Phi f)y\rangle,\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in H$, así que Φ preserva involuciones, es decir

$$(\Phi f)^* = \Phi \overline{f}.$$

Ahora veamos que Φ es homomorfismo. Sean f, g funciones Borel acotadas en Δ. Sean $S, T \in A$, como Δ es el conjunto de los homomorfismos definidas en A, se sigue que $\widehat{ST} = \hat{S}\hat{T}$, entonces

$$\int_\Delta \hat{S}\hat{T} d\mu_{x,y} = \langle STx, y\rangle = \int_\Delta \hat{S} d\mu_{Tx,y}.$$

Esto es cierto para cada $\hat{S} \in C(\Delta)$, por lo tanto las integrales son iguales si $\hat{S}$ es remplazado por cualquier función Borel acotada f. Luego

$$\begin{aligned}\int_\Delta f\hat{T} d\mu_{x,y} &= \int_\Delta f d\mu_{Tx,y} = \langle (\Phi f)Tx, y\rangle \\ &= \langle Tx, z\rangle = \int_\Delta \hat{T} d\mu_{x,z},\end{aligned}$$

donde $z = (\Phi f)^* y$. También si remplazamos $\hat{T}$ por g, la última y la primera de las integrales son iguales. Esto nos da

$$\begin{aligned}\langle \Phi(fg)x, y\rangle &= \int_\Delta fg d\mu_{x,y} = \int_\Delta g d\mu_{x,z} \\ &= \langle (\Phi g)x, z\rangle = \langle (\Phi g)x, (\Phi f)^*\rangle \\ &= \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ y como Φ también es lineal, Φ es homomorfismo.

Sea Λ un subconjunto Borel de Δ, sea χ_Λ la función característica, definamos P como

$$P(\Lambda) = \Phi(\chi_\Lambda).$$

Como Φ es homomorfismo,

$$\begin{aligned}P(\Lambda \cap \Lambda_1) &= \Phi(\chi_{\Lambda_\Lambda \cap \Lambda_1}) = \Phi(\chi_\Lambda \chi_{\Lambda_1}) \\ &= \Phi(\chi_\Lambda)\Phi(\chi_{\Lambda_1}) = P(\Lambda)P(\Lambda_1)\end{aligned}$$

Si $\Lambda = \Lambda_1$, $P(\Lambda) = P(\Lambda)^2$. Como χ_Λ es real, $\Phi(\chi_\Lambda)$ es de valores reales, luego

$$\begin{aligned} P(\Lambda) &= \Phi(\chi_\Lambda) = \Phi(\overline{\chi_\Lambda}) \\ &= \Phi(\chi_\Lambda)^* = P(\Lambda)^* \end{aligned}$$

así que $P(\Lambda)$ es auto-adjunto y por lo tanto $P(\Lambda)$ es proyección ortogonal por la proposición 2.15. Es claro que $P(\emptyset) = \Phi(0) = O$. Usando 2.15 y 2.16, $P(\Delta) = I$. Además, si $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots\} \subseteq \Sigma$ disjunta, $\{P(\Lambda_n)\}$ converge debilmente, por (2.16) y por lo tanto converge fuertemente a $E(\Lambda)$, es decir,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(\Lambda_n),$$

pues la convergencia débil y la convergecia fuerte coinciden para series de vectores ortogonales. También, note que para $x, y \in H$,

$$P_{x,y}(\Lambda) = \langle P(\Lambda)x, y\rangle = \int_\Delta \chi_\Lambda d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\Lambda).$$

La unicidad de P, se sigue del teorema de la representación de Riesz[5]. Por 2.16 tenemos $\Phi f = \int_\Delta f dP$ y $\|\Phi f\| = \|f\|_\infty$ por el teorema 2.38 y $B = \Phi(L^\infty(P))$ es subálgebra cerrada. Esto prueba (a) y (b).

El inciso (c) se sigue del hecho de que cada $f \in L^\infty(P)$ es el limite uniforme de funciones simples, (d) y (e) es una consecuencia de la parte (a). □

El siguiente teorema dice que cada operador normal acotado T en un espacio de Hilbert induce una medida espectral P en los subconjuntos borelianos de su espectro $\sigma(T)$ y que T puede ser reconstruido de P por una integral del tipo discutido en el teorema 2.38.

2.40 Teorema. (Teorema espectral). Sea Σ la σ-álgebra de conjuntos borelianos en $\sigma(T)$. Si $T \in B[H]$ es normal, entonces existe una única medida espectral P en Σ tales que

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda).$$

Además, si $S \in B[H]$ conmuta con T entonces $P(\Lambda)$ también conmuta con S.

[5]Teorema de representación de Riesz. A cada funcional lineal acotada ϕ sobre $C(\Omega)$ le corresponde una única medida de Borel compleja regular μ tal que $\phi(f) = \int_\Omega f d\mu$ con $\|\mu\| = \|\phi\|$. Además, si $\phi(f) \geq 0$ para todo $f \in C(\Omega)$ entonces $\mu \geq 0$.

Demostración. Sea A la subálgebra cerrada más pequeña de $B[H]$ que contiene I, T y T^*. Como T es normal, A es conmutativa y por lo tanto A aplica el teorema 2.39. Luego por el teorema 1.49, Δ es topológicamente igual a $\sigma(T)$, de esta manera $\hat{T}(\lambda) = \lambda$ para cada $\lambda \in \sigma(T)$. La existencia y la unicidad de P se sigue del teorema 2.39. Así que,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda).$$

es verdadera.

Finalmente si $S \in B[H]$ tal que $ST = TS$, entonces $ST^* = T^*S$ por el teorema Fuglede-Putman-Rosenblum, por lo tanto S conmuta con cada elemento de A. Por (e) del teorema 2.39, $SP(\Lambda) = P(\Lambda)S$ para cada conjunto boreliano $\Lambda \subseteq \sigma(T)$.[6] $\square$

La medida espectral de P del teorema anterior se le conoce como la descomposición espectral de T.

A continuación obtendremos una representación concreta de los operadores normales compactos.

Cualquier combinación lineal de proyecciones es normal y cada combinación lineal de proyecciones compactos tiene un conjunto numerable de valores propios distintos. El teorema espectral de los operadores normales compactos asegura la recíproca.

Probaremos el teorema espectral para operadores normales compactos pero antes un lema.

2.41 Lema. Si $T \in B[H]$ es cualquier operador normal compacto, entonces

$$\sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} N(\lambda I - T) = H.$$

2.42 Teorema. (Teorema espectral para operadores normales compactos). Si $T \in B[H]$ es un operador normal y compacto, entonces existe una resolución de la identidad numerable $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \sigma_P(T)}$ en H tales que

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} \lambda P_\lambda \tag{2.17}$$

[6]Teorema de Fuglede-Putman-Rosenblum. Sean $M, N, T \in B[H]$. Si M y N son normales y $MT = TN$, entonces $M^*T = TN^*$.

donde P_λ es la proyección ortogonal a lo largo de $N(\lambda I - T)$, para cada $\lambda \in \sigma_P(T)$.

De este modo, el espacio H se descompone en subespacios en cada uno de los cuales el operador T es simplemente la multiplicación de un elemento por un número particular.

Demostración. Sabemos que $N(\lambda I - T)$ es un subespacio de H, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Como T es normal, entonces $N(\lambda I - T) \perp N(\mu I - T)$ siempre que $\lambda, \mu \in \sigma_P(T)$ tales que $\lambda \neq \mu$, por el teorema 2.33. Por lo tanto, $\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \in \sigma_P(T)}$ es una familia de subespacios ortogonales dos a dos de H tal que $H = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} N(\lambda I - T)$ por el lema 2.41. Entonces la familia $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \sigma_P(T)}$ de las proyecciones ortogonales a lo largo de cada $N(\lambda I - T)$ es una resolución de la identidad en H por el teorema 2.5. Entonces, $x = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} P_\lambda x$ y como T es lineal y continua entonces, $Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} T(P_\lambda x)$ para cada $x \in H$. Como $P_\lambda x \in R(P_\lambda) = N(\lambda I - T)$, entonces $T(P_\lambda x) = \lambda P_\lambda x$, para cada $\lambda \in \sigma_P(T)$ y cada $x \in H$. Por lo tanto,

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} \lambda P_\lambda x$$

para cualesquiera $x \in H$. $\square$

La ecuación 2.17 se puede reescribir como

$$T = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_P(T)} \lambda P_\lambda.$$

en

$$H = N(T) \oplus \bigoplus_{0 \neq \lambda \in \sigma_P(T)} N(\lambda I - T).$$

Estas representaciones se le conocen como la descomposición espectral de un operador normal compacto T.

Cálculo funcional de los operadores normales

A continuación daremos lo que se conoce como el cálculo funcional de operadores normales.

Si $T \in B[H]$ es normal, por el teorema 1.49, existe $\Phi_T : C(\sigma(T)) \to B^*(T)$ $*$-isomorfismo isométrico tales que $\Phi_T(Id) = T$. Sea P es la descomposición espectral de T (existe P por el teorema 2.40), luego por el teorema 2.38

$$\Phi_T(f) = \int_{\sigma(T)} f dP$$

para cada $f \in C(\sigma(T))$. Pero $\Phi_T(f) = f(T)$, esta es la notación que usaremos para la ecuación anterior. Por el mismo teorema 2.38,

$$\|f(T)x\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f|^2 dP_{x,x}.$$

También note que como $f \in C(\sigma(T))$,

$$\|f(T)\| = \|\Phi_T(f)\| = \|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces

$$\begin{aligned} \|f_n(T) - f(T)\| &= \|\Phi_T(f_n) - \Phi_T(f)\| = \|\Phi_T(f_n - f)\| \\ &= \|f_n - f\|_\infty \to 0, \, si\, n \to \infty \end{aligned}$$

luego, $\|f_n(T) - f(T)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, esto es, $f_n(T) \to f(T)$.

Como consecuencia inmediata del teorema espectral tenemos el siguiente teorema.

2.43 Teorema. Sea Γ la frontera del disco unitario en $\mathbb{C}$. Si T es un operador normal en H, entonces

(a) T es auto-adjunto si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) T es unitario si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \Gamma$.

(c) T es no negativo si y sólo si $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.

(d) T es estrictamente positivo si y sólo si $\sigma(T) \subseteq [\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 0$.

(e) T es proyección ortogonal si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.

Sólo probaremos el lado derecho de las implicaciones para no desviarnos mucho del tema.

Demostración. Sea $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda)$ la representación integral de T, entonces $T^* = \int_{\sigma(T)} \overline{\lambda} P(\lambda)$.

(a) Supongamos que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda = \overline{\lambda}$,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \overline{\lambda} P(\lambda) = T^*,$$

por lo tanto T es auto-adjunto.

(b) Supongamos que $\sigma(T) \subseteq \Gamma$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| = 1$, luego $|\lambda|^2 = 1$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} TT^* &= T^*T = \int_{\sigma(T)} \overline{\lambda}\lambda dP(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} |\lambda|^2 dP(\lambda) = \int_{\sigma(T)} dP(\lambda), \\ &= P(\sigma(T)) = I, \end{aligned}$$

esto es, T es unitario.

(c) Como cada $P_{x,x}$ es una medida positiva y como $\lambda \geq 0$ en $\sigma(T)$, obtenemos $\langle Tx, x \rangle \geq 0$. Por lo tanto, T es no negativo.

(d) Como $\sigma(T) \subseteq [\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 0$, es trivialmente no negativa, por (c). Por otro lado, T es invertible porque $0 \notin \sigma(T)$. Por lo tanto, T es estrictamente positivo por 2.2.

(e) Es consecuencia de (b) y la siguiente igualdad

$$T^2 = \int_{\sigma(T)} \lambda^2 P(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda P(\lambda) = T.$$

$\square$

Capítulo 3

Generalizaciones de los operadores normales

En este capítulo estudiaremos a una cierta clase de operadores que generalizan los operadores normales.

Veremos que esta clase de operadores tienen propiedades muy similares a la clase de los operadores normales. Por comodidad empezamos estudiando las propiedades básicas de operadores normaloides y espectraloides. Demostraremos que todo operador normaloide es espectraloide también daremos y demostraremos algunos ejemplos de este tipo de operadores. En seguida, introduciremos los operadores paranormales con sus respectivas propiedades y demostraremos que están contenidos en la clase de los operadores normaloides.

Posteriormente estudiaremos los operadores hiponormales, veremos que este tipo de operadores pertenecen a la clase de los operadores paranormales y por lo tanto de los operadores normaloides. Daremos condiciones bajo el cual estos operadores llegan a ser normal y también obtendremos la parte normal de tales operadores. Finalmente estudiaremos la estructura de los operadores quasinormales.

3.1. Operadores normaloides

El rango numérico de $T \in B[H]$ es el conjunto

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

y el radio numérico de T es definida por

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

A continuación daremos algunas propiedades básicas para el rango numérico y el radio numérico de cualquier operador acotado T sin demostración, para eso puede consultar [11] en las pág. 91-98.

El rango numérico de T es un conjunto convexo en el plano complejo y si $conv\sigma(T)$ es la envoltura convexa de $\sigma(T)$ entonces $conv\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. Para el radio numérico de T tenemos

3.1 Teorema. Sea T cualquier operador acotado en $B[H]$.

(a) $w(T^n) \leq w(T)^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

(b) $r(T) \leq w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$.

(c) $\frac{1}{d(\lambda,\sigma(T))} \leq \|(T - \lambda T)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda,\overline{W}(T))}$

para cualquier $\lambda \notin \sigma(T)$ para la primera desigualdad y para todo $\lambda \notin \overline{W}(T)$ para la segunda desigualdad.

3.2 Definición. Un operador T se dice que es un operador normaloide si $\|T\| = r(T)$.

Note que si T es un operador normaloide en H, entonces existe $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $\|T\| = |\lambda|$, ya que $\sigma(T)$ es compacto y $|\ | : \sigma(T) \to \mathbb{R}$ es una función continua.

A continuación daremos y demostraremos algunas caracterizaciones básicas de este tipo de operadores, el cual nos servirá para demostrar algunos ejemplos y propiedades de ellos.

3.3 Teorema. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) T es un operador normaloide.

(b) $\|T^n\| = \|T\|^n$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\|T\| = w(T)$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sólo probaremos que $\|T\|^n \leq \|T^n\|$, pues la otra desigualdad siempre es cierto para cualquier operador acotado.

$$\begin{aligned}\|T\|^n &= r(T)^n \textit{ por hipótesis}\\ &= r(T^n)\\ &\leq w(T^n)\\ &\leq \|T^n\|,\end{aligned}$$

de esto se obtiene (b), donde la segunda igualdad es por el teorema 3.1 y las últimas dos desigualdades se deben al teorema 2.29.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si (b) es verdadero, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|$, entonces obtenemos $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|$.

$(a) \Rightarrow (c)$ Si $\|T\| = r(T)$, entonces $\|T\| = w(T)$, porque $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$ siempre es verdadero. □

Note que si $T \in B[H]$ es un operador auto-adjunto, $\|T^2\| = \|T\|^2$ pues $\|TT^*\| = \|T\|^2$ (ver sección 2.2) y $T = T^*$. Por inducción, obtenemos $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, así que

$$\|T\| = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = r(T).$$

Hemos demostrado que todo operador auto-adjunto es normaloide, usando este hecho, podemos demostrar el siguiente teorema.

3.4 Teorema. Si T un operador normal en H, entonces T es normaloide.

Demostración. $(T^*T)^n = T^{*n}T^n$ pues T conmuta con T^*, y T^*T es auto-adjunto, así que por la observación hecho anteriormente tenemos

$$\begin{aligned}\|T\| &= \|T^*T\|^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \|(T^*T)^n\|^{\frac{1}{2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \|T^{*n}T^n\|^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\\ &= r(T).\end{aligned}$$

□

3.5 Definición. Un operador $T \in B[H]$ se dice que es un operador espectraloide si $w(T) = r(T)$

Como primera observación de esta definición tenemos que si $T \in B[H]$ tal que $\|T\| = r(T)$, entonces $w(T) = r(T)$, ya que $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$, por el teorema 3.1, esto es, hemos demostrado el siguiente teorema.

3.6 Teorema. Todo operador normaloide es espectraloide.

Para los operadores espectraloides probaremos.

3.7 Teorema. T es un operador espectraloide en H si y sólo si $w(T^n) = w(T)^n$ para todo número natural n.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sólo probaremos $w(T^n) \geq w(T)^n$ pues la otra desigualdad siempre es verdadera. Observe que

$$\begin{aligned} w(T)^n &= r(T)^n = r(T^n) \\ &\leq w(T^n) \end{aligned}$$

la segunda desigualdad es por el teorema 2.29 y la última desigualdad se debe al teorema 3.1.

($\Leftarrow$) Por el teorema 2.29, $r(T)^n = r(T^n)$, luego por el teorema 3.1, tenemos

$$r(T) = r(T^n)^{\frac{1}{n}} \leq w(T^n)^{\frac{1}{n}} = w(T) \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

y como $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to r(T)$ cuando $n \to \infty$, entonces $w(T) = r(T)$. $\square$

A continuación veamos algunos ejemplos de esta clase de operadores.

3.8 Ejemplo. Sea E un espacio de Hilbert de dos dimensiones, esto es, $E \cong \mathbb{C}^2$. Sea T un operador acotado en un espacio de Hilbert $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$, donde $H_n \cong E$ dado por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & M & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & M & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & M & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad donde \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $\|T\| = \sup\{\|1\|, \|M\|\} = \|1\| = 1$, y por lo tanto $\|T\|^n = 1$. Por otro lado,

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

y en general $T^n = T^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|T^n\| = \|1\| = 1$, por lo tanto $\|T\|^n = \|T^n\|$, esto es, T es normaloide por el teorema 3.3. Además, $\sigma(T) = \{1\} \cup \{0\}$.

3.9 Ejemplo. Sea $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios ortogonales dos a dos de un espacio de Hilbert H tal que $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ y sea S dado por

$$S(\oplus_{n=o}^{\infty} x_n) = S(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus U_3 x_2 \oplus \cdots$$

y tal que $U_{n+1} = S\,|_{H_n}\colon H_n \to H_{n+1}$ es unitario. Así que $H_0 \cong H_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $dim H_n = dim H_{n+1}$ ($\theta \in H_0$).

Es fácil de probar que S es un operador acotado en H y observe que

$$\begin{aligned} \langle S(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n), \oplus_{n=0}^{\infty} x_n \rangle &= \langle \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus \cdots, x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \rangle \\ &= \langle U_1 x_0, x_1 \rangle + \langle U_2 x_1, x_2 \rangle + \langle U_3 x_2, x_3 \rangle + \cdots \\ &= \langle x_0, U_1^* x_1 \rangle + \langle x_1, U_2^* x_2 \rangle + \langle x_2, U_3^* x_3 \rangle + \cdots \\ &= \langle x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots, U_1^* x_1 \oplus U_2^* x_2 \oplus U_3^* x_3 \oplus \cdots \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto el adjunto de S viene dado por

$$S^*(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) = S^*(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = U_1^* x_1 \oplus U_2^* x_2 \oplus U_3^* x_3 \oplus \cdots$$

Finalmente veamos que S^* es un operador normaloide. Note que

$$\begin{aligned} \|S(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n)\|^2 &= \langle \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus \cdots, \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus \cdots \rangle \\ &= \langle U_1 x_0, U_1 x_0 \rangle + \langle U_2 x_1, U_2 x_1 \rangle + \langle U_3 x_2, U_3 x_2 \rangle + \cdots \\ &= \langle x_0, U_1^* U_1 x_0 \rangle + \langle x_1, U_2^* U_2 x_1 \rangle + \langle x_2, U_3^* U_3 x_2 \rangle + \cdots \\ &= \langle x_0, x_0 \rangle + \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle + \cdots \\ &= \| \oplus_{n=0}^{\infty} x_n \|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es una isometría, luego $\|S\| = 1$, entonces $\|S^*\| = 1$ y por lo tanto $\|S^*\|^n = 1$. Por otro lado, como S es isometría entonces por inducción se demuestra que S^n es una isometría. Luego $\|S^n\| = 1$, como $\|S^{n*}\| = \|S^n\|$, entonces $\|S^{*n}\| = \|S^{n*}\| = \|S^n\| = 1$, esto es, $\|S^{*n}\| = 1$. Por lo tanto, $\|S^*\|^n = \|S^{n*}\|$, esto es, S^* es normaloide.

Es costumbre identificar S y S^* con las siguientes matrices infinitas de operadores

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ U_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad y \quad S^* = \begin{pmatrix} 0 & U_1^* & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & U_2^* & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & U_3^* & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

S se le conoce como operador de desplazamiento unilateral.

Un caso particular de este tipo de operador es cuando $H = l^2$, y en este caso S viene dado por

$$S(z) = (0, z_1, z_2, z_3, \cdots) \quad y \quad S^*(z) = (z_2, z_3, z_4, \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots) \in H$.

3.2. Operadores paranormales

3.10 Definición. Un operador T se dice que es un operador paranormal si $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ para cualquier vector unitario $x \in H$.

3.11 Teorema. (a) Si T es un operador paranormal, entonces

$$\|T\| \geq \cdots \geq \frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \geq \cdots \geq \frac{\|T^3x\|}{\|T^2x\|} \geq \cdots \geq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \cdots \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

para cualquier $x \in H$ no nulo.

(b) Si T es un operador paranormal invertible, entonces T^{-1} también es paranormal.

Demostración.

(a) Recordemos que T es paranormal si y sólo si $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ para cualquier $x \in H$ con $\|x\| = 1$.
Remplazando x por $\frac{x}{\|x\|}$ en la desigualdad y redefiniendo, obtenemos

$$T \textit{ es paranormal } \Leftrightarrow \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \textit{ para cualquier } x \in H. \tag{3.1}$$

Remplazando x por Tx en 3.1 y repitiendo este proceso, obtenemos lo deseado.

(a) Si T es un operador paranormal invertible, entonces remplazando x por $T^{-2}x$ en la desigualdad 3.1, obtenemos

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} \geq \frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|} \tag{3.2}$$

para cualquier $x \in H$ no nulo. De esta desigualdad obtenemos que $\|T^{-2}x\| \geq \|T^{-1}x\|^2$ para cualquier $x \in H$ con $\|x\| = 1$, esto es, T^{-1} es paranormal. $\square$

3.12 Teorema. Si T es un operador paranormal, entonces T^n es un operador paranormal para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Usando el inciso (a) del teorema 3.11, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\|T^{2n}x\|}{\|T^n x\|} &= \frac{\|T^{n+1}(T^{n-1}x)\|}{\|T^n x\|} \\ &\geq \frac{T(T^{n-1}x)}{\|x\|} = \frac{\|T^n x\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

de esta desigualdad obtenemos que T^n es paranormal. $\square$

Como corolario de este teorema, se obtiene que T es paranormal si y sólo si T^n es paranormal para cada $n \in \mathbb{N}$.

3.13 Teorema. Si T es paranormal, entonces T es normaloide.

Demostración.

Para cualquier $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, $\|T^2 x\| \geq \|Tx\|^2$. Si para cualquier $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|T^{n+1}x\| &= \|Tx\|\|T^n(\frac{Tx}{\|Tx\|})\| \geq \|Tx\|\|T(\frac{Tx}{\|Tx\|})\|^n \\ &= \|Tx\|^{1-n}\|T^2x\|^n \geq \|Tx\|^{1-n}\|Tx\|^{2n} \\ &= \|Tx\|^{n+1} \end{aligned}$$

y por inducción, obtenemos $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ para todo $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que $\|T^n\| \geq \|T\|^n$.

Por otro lado, $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ siempre es cierto para cualquier operador acotado, luego $\|T^n\| = \|T\|^n$. Por lo tanto,

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T\|,$$

entonces T es normaloide. $\square$

Este teorema asegura que todo operador paranormal es un operador espectraloide, ya que todo operador normaloide es espectraloide por el teorema 3.6. Ahora demostraremos que todo operador normal es paranormal.

3.14 Teorema. Si T es un operador normal en H, entonces T es paranormal.

La demostración de este teorema es una cosecuencia inmediata de la proposición 2.25,

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| = \|T^2x\|\|x\|$$

para cualquier $x \in H$.

Sea M un subespacio invariante de un operaror T en H. Un operador T es hereditariamente normaloide si cada parte de él (incluyendo el mismo T) es normaloide, es decir, si $T\mid_M$ es normaloide y totalmente hereditariamente normaloide si es hereditariamente normaloide y la inversa de cada parte invertible de él (incluyendo su propio inverso si es invertible) es normaloide, esto es, si $T\mid_M$ es invertible, entonces $(T\mid_M)^{-1}$ también es normaloide.

Ahora probaremos que todo operador paranormal es hereditariamente normaloide.

3.15 Teorema. Sea M subespacio invariante de T en H. Si T es paranormal, entonces $T\mid_M$ es paranormal.

Demostración. Sea M un subespacio invariante de T. Sea $x \in M$,

$$\begin{aligned} \|T\mid_M x\|^2 &= \|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\| \\ &= \|(T\mid_M)^2x\|\|x\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto $T\mid_M$ es paranormal. $\square$

Como una consecuencia inmediata del teorema 3.15 y del teorema 3.11, concluimos que todo operador paranormal es totalmente hereditariamente normaloide.

También es fácil de probar que los operadores paranormales y normaloides son cerrados bajo escalares no ceros. Es decir, para cada $\alpha \neq 0$, αT es paranormal o normaloide si y sólo si T es paranormal o normaloide. Y por lo tanto, αT también son hereditariamente y totalmente hereditariamente normaloides.

Ahora que sabemos que la restricción de un operador paranormal a cualquier subespacio invariante sigue siendo paranormal. Entonces vale la pena preguntarse que si la restricción de un operador normal a un subespacio invariante sigue siendo normal. La respuesta a esta pregunta es negativa, tal como muestra el siguiente ejemplo.

3.16 Ejemplo. Sea $T \in B[H]$ definida por

$$T(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots,$$

donde $H = H_0 \oplus H_0 \oplus H_0 \oplus \cdots$.

Si $K = \cdots \oplus M_{-2} \oplus M_{-1} \oplus M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots$ donde $M_n = H_0$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y $U : K \to K$ es definida por

$$U(\cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \cdots \oplus x_{-2} \oplus [x_{-1}] \oplus x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots .$$

donde [ ] es usado para localizar la posición de la coordenada cero.

Por un cálculo similar que se hizo en el ejemplo 3.9, concluimos que el adjunto de U viene dado por

$$U^*(\cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus x_0 \oplus [x_1] \oplus x_2 \oplus \cdots .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U^*U(\cdots \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus \cdots) &= U^*(\cdots \oplus x_{-2} \oplus [x_{-1}] \oplus x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots) \\ &= \cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} UU^*(\cdots \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus \cdots) &= U(\cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus x_0 \oplus [x_1] \oplus \cdots) \\ &= \cdots \oplus x_{-2} \oplus x_{-1} \oplus [x_0] \oplus x_1 \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Por lo tanto, U es unitario. Además, si H es identificado con el subespacio $\cdots \oplus \theta \oplus \theta \oplus H$ de K, entonces H es un subespacio de K. H es U-invariante y $U\mid_H = T$.

Sin embargo, por un cálculo sencillo

$$T^*T(x_0 \oplus x_1 x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \cdots$$

y

$$TT^*(x_0 \oplus x_1 x_2 \oplus \cdots) = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots ,$$

de donde se deduce que T no es normal.

En la siguiente sección obtendremos las condiciones para que la restricción de un operador normal a algún subespacio invariante siga siendo normal.

Para finalizar esta sección veamos un ejemplo de este tipo de opeadores.

3.17 Ejemplo. Sea $H = l^2$ y sean S y P los operadores acotados dados por

$$S(z) = (0, z_1, z_2, z_3 \cdots) \qquad y \qquad P(z) = (z_1, 0, 0, \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, \cdots) \in H$, y con sus respectivas representaciones matriciales

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que S es el operador del ejemplo 3.9. Sea $T = \begin{pmatrix} S+I & P \\ O & O \end{pmatrix}$, entonces T es un operador en $H \oplus H$. Es claro que $P = P^*$ y recordemos que S^* esta dado por $S^*(z) = (z_2, z_3, z_4 \cdots)$ para cualquier $z = (z_1, z_2, \cdots) \in H$. Por otro lado, si $u, v \in H$,

$$\begin{aligned} \langle T(x \oplus y), u \oplus v\rangle &= \langle((S+I)x + Py) \oplus \theta, u \oplus v\rangle \\ &= \langle (S+I)x + Py, u\rangle + \langle \theta, v\rangle \\ &= \langle (S+I)x, u\rangle + \langle Py, u\rangle \\ &= \langle x, (S^*+I)u\rangle + \langle y, Pu\rangle \\ &= \langle x \oplus y, (S^*+I)u \oplus Pu\rangle, \end{aligned}$$

esto demuestra que $T^* = \begin{pmatrix} S^*+I & O \\ P & O \end{pmatrix}$.

Finalmente veamos que T es paranormal. Sea $z \in H$,

$$\begin{aligned} \|T(z \oplus \theta)\|^2 &= \|(S+I)z \oplus \theta\|^2 = \|(S+I)z\|^2 \\ &= \|(z_1, z_1 + z_2, z_2 + z_3, \cdots)\|^2 \\ &= |z_1|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + z_{n+1}|^2 \\ &= \|(z_1, 0, 0, \cdots)\|^2 + \|(z_1 + z_2, z_2 + z_3, \cdots)\|^2 \\ &= \|Pz\|^2 + \|(S^*+I)z\|^2 = \|(S^*+I)z \oplus Pz\|^2 \\ &= \|T^*(z \oplus \theta)\|^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tomemos $x \oplus y \in H \oplus H$ tal que $\|x \oplus y\| = 1$,

$$\begin{aligned} \|T(x \oplus y)\|^2 &= \langle T^*T(x \oplus y), x \oplus y\rangle \\ &\leq \|T^*T(x \oplus y)\|. \end{aligned}$$

Como $T(x \oplus y) = z \oplus \theta$, donde $z = (S+I)x + Py \in H$, y usando 3.3, tenemos

$$\begin{aligned} \|T(x \oplus y)\|^2 &\leq \|T^*T(x \oplus y)\| = \|T^*(z \oplus \theta)\| \\ &= \|T(z \oplus \theta)\| = \|T^2(x \oplus y)\|, \end{aligned}$$

para cualquier $\|x \oplus y\| = 1$ y por lo tanto T es un operador paranormal.

3.3. Operadores hiponormales

3.18 Definición. Un operador $T \in B[H]$ se dice que es un operador hiponormal si $TT^* \leq T^*T$.

Note que la definición anterior tiene sentido, ya que $T^*T - TT^*$ es un operador auto-adjunto y $T^*T - TT^* \geq O$ es no negativo. También observe que todo operador normal es hiponormal por definición.

3.19 Proposición. $T \in B[H]$ es hiponormal si y sólo si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ para cada $x \in H$.

La demostración de esta proposición útil se sigue de que T es hiponormal si y sólo si $0 \leq \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle$, para cualquier $x \in H$.

3.20 Teorema. Si T es hiponormal, entonces T es paranormal.

DEMOSTRACIÓN. (a) Si T es hiponormal, entonces $\|T^*(x)\| \leq \|T(x)\|$ para cualquier $x \in H$, así que $\|T^*Tx\| \leq \|TTx\|$ para cualquier $x \in H$. De esto, se sigue que

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \\ &\leq \|T^2x\| \|x\|, \end{aligned}$$

luego $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|$ para cualquier $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, esto es, T es paranormal. $\square$

En la sección 3.2 demostramos que todo operador paranormal es un operador normaloide, entonces el teorema 3.20 nos dice que todo operador hiponormal es un operador normaloide, es decir, $r(T) = \|T\|$.

Los operadores hiponormales también pertenecen a la clase de los operadores hereditariamente normaloides. Tal como demuestra el siguiente teorema.

3.21 Teorema. Sea M un subespacio T-invariante en H.

(a) Si T es hiponormal, entonces $T\,|_M$ es hiponormal.

(b) Si T es hiponormal y $T\,|_M$ es normal, entonces M reduce T.

Demostración.

(a) Como M es T-invariante, $T\mid_M \in B[M]$. Sea P la proyección ortogonal sobre M, entonces $(T\mid_M)^* = PT^*\mid_M$ en $B[H]$ por el teorema 2.16, así que para cualquier $x \in M$,

$$\begin{aligned} \|(T\mid_M)^* x\| &= \|PT^*\mid_M x\| \\ &\leq \|P\|\|T^*\mid_M x\| \\ &= \|T^*\mid_M x\| \\ &\leq \|T\mid_M x\|, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por la proposición 2.15 y la última desigualdad es por la hiponormalidad de T. Por lo tanto, $T\mid_M$ es hiponormal según la proposición 3.19.

(b) Sea $T = \begin{pmatrix} T\mid_M & R \\ O & S \end{pmatrix}$ la representación matricial de T en $B[M \oplus M^\perp]$, así que $T^* = \begin{pmatrix} (T\mid_M)^* & O \\ R^* & S^* \end{pmatrix}$ en $M \oplus M^\perp$.
Sea $N = T\mid_M$. Como $T\mid_M$ es normal tenemos:

$$\begin{aligned} T^*T - TT^* &= \begin{pmatrix} N^*N & N^*R \\ R^*N & R^*R + S^*S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} NN^* + RR^* & RS^* \\ SR^* & SS^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -RR^* & N^*R - RS^* \\ R^*N - SR^* & R^*R + S^*S - RS^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sea $u \in M$, pongamos $x = (u, \theta) = u \oplus \theta \in M \oplus M^\perp$. Sea $D = T^*T - TT^*$, luego

$$\begin{aligned} Dx &= \begin{pmatrix} -RR^* & N^*R - RS^* \\ R^*N - SR^* & R^*R + S^*S - RS^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= (-RR^*u, (R^*N - SR^*)u) \\ &= -RR^*u \oplus (R^*N - SR^*)u \end{aligned}$$

en $M \oplus M^\perp$. Como T es hiponormal

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Dx, x\rangle &= \langle -RR^*u \oplus (R^*N - SR^*)u, u \oplus \theta\rangle \\ &= -\langle RR^*u, u\rangle + \langle (R^*N - SR^*)u, \theta\rangle \\ &= -\langle RR^*u, u\rangle = -\langle R^*u, R^*u\rangle \\ &= -\|R^*u\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $R^* = O$ y por lo tanto $R = O$. Por lo tanto, la representación matricial de T es $\begin{pmatrix} T\mid_M & O \\ O & S \end{pmatrix}$ en $M \oplus M^\perp$, de donde se deduce que M es un subespacio reductor de T por el teorema 2.8. $\square$

3.22 Corolario. Sea M un subespacio invariante de un operador normal T. Entonces $T\mid_M$ es normal si y sólo si M reduce T.

La demostración de este corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior, pues si T es normal, entonces es hiponormal, y si $T\mid_M$ es normal y M es un subespacio invariante de T, se sigue que M reduce T. Recíprocamente, si M es un subespacio reductor de T, entonces $T\mid_M \in B[M]$ y $(T\mid_M)^* = T^*\mid_M$. Luego usando la proposición 2.25, obtenemos la normalidad de $T\mid_M$.

Finalmente demostraremos que todo operador hiponormal es totalmente hereditariamente normaloide. Pero antes probaremos el siguiente teorema.

3.23 Teorema. Si $T \in B[H]$ es un operador hiponormal invertible, entonces T^{-1} es hiponormal.

Demostración. Supongamos que $T \in B[H]$ es hiponormal e invertible. Bastará demostrar que $T^{-1}(T^{-1})^* \leq (T^{-1})^*T^{-1}$, pues si $T \in B[H]$ es invertible se sigue que $T^{-1} \in B[H]$ por el teorema de la función inversa.

Sabemos que si T es invertible, entonces T^* también lo es y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Así que $TT^* \in B[H]$ es invertible y como $TT^* \geq O$, entonces $TT^* \succ O$.

Usando la hiponormalidad de T, $O \prec TT^* \leq T^*T$, de donde se sigue que $(T^*T)^{-1} \leq (TT^*)^{-1}$ por el teorema 2.14. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T^{-1}(T^{-1})^* &= T^{-1}(T^*)^{-1} \\ &= (T^*T)^{-1} \leq (TT^*)^{-1} \\ &= (T^*)^{-1}T^{-1} = (T^{-1})^*T^{-1}. \end{aligned}$$

De esta desigualdad concluimos la hiponormalidad de T^{-1}. $\square$

3.24 Teorema. Si T es un operador hiponormal, entonces T es totalmente hereditariamente normaloide.

Demostración. Por (a) del teorema 3.21, T es hereditariamente normaloide. Entonces bastará probar que la inversa de cada parte invertible de T es normaloide. Sea M un subespacio de H, T-invariante. Sabemos que $T\mid_M$ es hiponormal y si es invertible, entonces $(T\mid_M)^{-1}$ es hiponormal por el teorema 3.23 y por lo tanto normaloide. Esto es, T es totalmente hereditariamente normaloide. $\square$

3.3.1. Valores propios de un operador hiponormal

La hiponormalidad es cerrada bajo traslaciones y que dos de sus vectores propios a valores propios distintos son ortogonales.

3.25 Teorema. Si $T \in B[H]$ es hiponormal, entonces

(a) $\lambda I - T$ es hiponormal, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Si $\lambda \in \sigma_P(T)$ y $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \overline{\lambda}x$, es decir, $N(\lambda I - T) \subseteq N(\overline{\lambda}I - T^*)$.

(c) Si x y y son los vectores propios a valores propios distintos de T, entonces $x \perp y$, esto es, $N(\lambda I - T) \perp N(\mu I - T)$ siempre que $\lambda \neq \mu$.

Demostración.

(a) Éste se obtiene de la siguiente manera,

$(\lambda I - T)^*(\lambda I - T) - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^*$
$= (\overline{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T) - (\lambda I - T)(\overline{\lambda}I - T^*)$
$= |\lambda|^2 I - \overline{\lambda}T - \lambda T^* + T^*T - |\lambda|^2 I + \lambda T^* + \overline{\lambda}T - TT^*$
$= T^*T - TT^* \geq O$, por ser T hiponormal.

(b) Por (a), $\lambda I - T$ es hiponormal, luego por la proposición 3.19 tenemos $\|(\overline{\lambda}I - T^*)x\| = \|(\lambda I - T)^*x\| \leq \|(\lambda I - T)x\|$, para cada $x \in H$ y por lo tanto (b).

(c) Supongamos que $x \in N(\lambda I - T)$ y $y \in N(\mu I - T)$ con $\lambda \neq \mu$, entonces $Tx = \lambda x$ y $Ty = \mu y$, luego por (b) tenemos $T^*x = \overline{\lambda}x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \mu y, x \rangle &= \langle Ty, x \rangle = \langle y, T^*x \rangle \\ &= \langle y, \overline{\lambda}x \rangle \\ &= \langle \lambda y, x \rangle, \end{aligned}$$

así que $(\mu - \lambda)\langle y, x \rangle = 0$ y como $\lambda \neq \mu$ tenemos que $\langle y, x \rangle = 0$. □

3.26 Corolario. Si T es un operador hiponormal en H, entonces $N(\lambda I - T)$ es un subespacio que reduce T para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.27 Teorema. Si $T \in B[H]$ es compacto y normaloide, entonces $\sigma_P(T) \neq \emptyset$ y existe $\lambda \in \sigma_P(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$.

Antes de probar este teorema necesitamos un lema auxiliar, el cual omitiremos su demostración para ello puede consultar [9], pág. 476.

3.28 Lema. Si T es un operador compacto en H, entonces $\sigma(T) - \{0\} = \sigma_P(T) - \{0\}$.

Ahora la demostración del teorema.

DEMOSTRACIÓN. Para no caer en trivialidades supongamos que $T \neq O$. Como T es normaloide, $\sigma(T) \neq \{0\}$ y

$$\|T\| = r(T) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

así que existe $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$. Además, si T es compacto y $\sigma(T) \neq \{0\}$, entonces por el lema anterior $\emptyset \neq \sigma(T) - \{0\} \subseteq \sigma_P(T)$ y por lo tanto

$$r(T) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_P(T)\} = \|T\|.$$

Por lo tanto, existe $\lambda \in \sigma_P(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$. $\square$

3.29 Lema. Si T es un operador en H y si $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_1 y σ_2 son conjuntos cerrados disjuntos no vacíos en $\mathbb{C}$, entonces existen un par de subespacios invariantes no triviales M y N de T tal que $H = M + N$, $M \cap N = \emptyset$, $\sigma(T\mid_M) = \sigma_1$ y $\sigma(T\mid_N) = \sigma_2$.

Ahora podemos probar el siguiente teorema.

3.30 Teorema. Todo punto aislado del espectro $\sigma(T)$ de un operador hiponormal T en H es un valor propio de T.

[1] DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\sigma(T)$ tiene al menos dos elementos, pues en caso contrario es fácil de probar. Sea λ un punto aislado del espectro de T, $\sigma(T) - \{\lambda\} \neq \emptyset$ y cerrado. En efecto, si μ es punto de acumulación de $\sigma(T) - \{\lambda\}$, también es punto de acumulación de $\sigma(T)$, por ser compacto. Por otro lado, si $\mu \in \sigma(T)$, entonces $\lambda = \mu$ por la misma razón de que $\sigma(T)$ contiene todos sus puntos de acumulación. Lo cual es una contradicción, por lo tanto $\sigma(T) - \{\lambda\}$ contiene todo sus puntos de acumulación, y por lo tanto es cerrado.

Por el lema previo T tiene un subespacio invariante no trivial M tal que $\sigma(T\mid_M) = \{\lambda\}$. Sea $S = T\mid_M$ en el espacio de Hilbert $M \neq \{\theta\}$, por el teorema 3.21 S es hiponormal, entonces $\lambda I - S$ es hiponormal por (a) del teorema 3.25, así que

$$\|\lambda I - S\| = \sup\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(S)\} = 0,$$

por teorema 2.29 y por que $\sigma(S) = \{\lambda\}$. Por lo tanto, $\lambda I - T = O$ porque el único operador hiponormal quasinilpotente es el operador nulo. Como $M \neq \{\theta\}$, existe $x \in M$ no nulo tal que $S(x) = \lambda x$, esto es, $\lambda \in \sigma_P(T)$. $\square$

[1] Un operador $T \in B[X]$ es quasinilpotente si r(T)=0.

3.3.2. Parte normal de un operador hiponormal

3.31 Teorema. Sea T un operador hiponormal en H. Entonces $\|Tx\| = \|T^*x\|$ si y sólo si $T^*Tx = TT^*x$.

DEMOSTRACIÓN.

Como $T^*T - TT^* \geq O$, posee raíz no negativa por la proposición 2.18, luego la conclusión se sigue de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \|(T^*T - TT^*)^{\frac{1}{2}}x\|^2 &= \langle (T^*T - TT^*)^{\frac{1}{2}}x, (T^*T - TT^*)^{\frac{1}{2}}x\rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle \\ &= \|Tx\|^2 - \|T^*\|^2 \end{aligned}$$

□

3.32 Teorema. Si T es un operador hiponormal en H, entonces

$$\{x \in H : \|T^n x\| = \|T^{*n}x\|, con\, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in H : T^{*n}T^n x = T^n T^{*n}x\}$$

y es un subespacio que reduce T.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $A = \{x \in H : \|T^n x\| = \|T^{*n}x\|, con\, n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in H : T^{*n}T^n x = T^n T^{*n}x\}$.
Es claro que B es un subespacio lineal de H, por definición y por la linealidad de $T^{*n}T^n$ y T^nT^{*n} para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, bastará probar que B es cerrado.
Sea $x \in \overline{B}$, existe $x_m \in B$ tales que $x_m \to x$ cuando $m \to \infty$. Note que $\forall n \in \mathbb{N} : T^{*n}T^n x_m = T^nT^{*n}x_m$, así que,

$$\begin{aligned} \|T^nT^{*n}x_m - T^{*n}T^n x\| &= \|T^{*n}T^n x_m - T^{*n}T^n x\| \\ &\leq \|T^{*n}\|\|T^n x_m - T^n x\| \\ &\leq \|T^{*n}\|\|T^n\|\|x_m - x\| \to 0,\ si\, m \to \infty, \end{aligned}$$

de esto se sigue que

$$\begin{aligned} \|T^{*n}T^n x - T^nT^{*n}x\| &\leq \|T^{*n}T^n x - T^nT^{*n}x_m\| + \|T^nT^{*n}x_m - T^nT^{*n}x\| \\ &\leq \|T^{*n}T^n x - T^nT^{*n}x_m\| + \|T^n\|\|T^{*n}x_m - T^{*n}x\| \\ &\leq \|T^{*n}T^n x - T^nT^{*n}x_m\| + \|T^n\|\|T^{*n}\|\|x_m - x\| \\ &\to 0,\ cuando\, m \to \infty. \end{aligned}$$

Así que, $T^{*n}T^nx = T^nT^{*n}x$, esto es, $x \in B$ y por lo tanto B es cerrado.

Ahora veamos que $A = B$.

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: T^{*n}T^nx = T^nT^{*n}x \\ &\Rightarrow \|T^nx\|^2 - \|T^{*n}x\|^2 = \langle T^*T^nx, T^{n-1}x\rangle - \langle TT^{*n}x, T^{*n-1}x\rangle \\ &= \cdots = \langle T^{*n}T^nx, x\rangle - \langle T^nT^{*n}x, x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Sea $x \in A$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Entonces por el teorema 3.31,

$$T^*Tx = TT^*x \tag{3.4}$$

Por (3.4) y por la proposición 3.19, $\|T^2x\| \geq \|T^*Tx\| = \|TT^*x\| \geq \|T^{*2}x\|$ y por la ecuación $\|T^2x\| = \|T^{*2}x\|$, tenemos

$$\|T(Tx)\| = \|T^*(Tx)\| = \|T(T^*x)\| = \|T^*(T^*x)\|$$

y por lo tanto, usando el teorema 3.31 tenemos,

$$T^*T(Tx) = TT^*(Tx) \;\; y \;\; T^*T(T^*x) = TT^*(T^*x)$$

Por (3.4),

$$T^*T^2x = TT^*Tx = T^2T^*x \;\; y \;\; T^{*2}Tx = T^*TT^*x = TT^{*2}x. \tag{3.5}$$

Por (3.5) y por la proposición 3.19,

$$\begin{aligned} \|T^3x\| &\geq \|T^*T^2x\| = \|TT^*Tx\| = \|T^2T^*x\| \\ &\geq \|T^*TT^*x\| = \|T^{*2}Tx\| = \|TT^{*2}x\| \geq \|T^{*3}x\| \end{aligned}$$

y por la ecuación $\|T^3x\| = \|T^{*3}x\|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(T^2x)\| &= \|T^*(T^2x)\| = \|T(T^*Tx)\| = \|T^*(T^*Tx)\| \\ &= \|T(TT^*x)\| = \|T^*(TT^*x)\| = \|T(T^{*2}x)\| = \|T^*(T^{*2}x)\| \end{aligned}$$

y por lo tanto, usando el teorema 3.31 obtenemos

$$\begin{gathered} T^*T(T^2x) = TT^*(T^2x),\; T^*T(T^*Tx) = TT^*(T^*Tx), \\ T^*T(TT^*x) = TT^*(TT^*x) \;\; y \;\; T^*T(T^{*2}x) = TT^*(T^{*2}x). \end{gathered}$$

Por (3.4) y (3.5), obtenemos

$T^*T^3x = TT^*T^2x = T^2T^*Tx = T^3T^*x,$

$TT^{*3}x = T^*TT^{*2}x = T^{*2}TT^*x = T^{*3}Tx \;\; y$
$T^{*2}T^2x = T^*TT^*Tx = T^*T^2T^*x = TT^*TT^*x = TT^{*2}Tx = T^2T^{*2}x.$

Repitiendo el mismo argumento anterior, obtenemos

$$\begin{array}{c} \|T^n(Tx)\| = \|T^{*n}(Tx)\| = \|T^n(T^*x)\| = \|T^{*n}(T^*x)\| \\ y \;\; \forall n \in \mathbb{N} : \; T^{*n}T^nx = T^nT^{*n}x \end{array}.$$

Por lo tanto, A reduce T y $x \in B$, esto es, $A \subseteq B$. Esto completa la prueba.

□

Denotemos por H_T al subespacio A del teorema 3.32, es decir,

$$\begin{aligned} H_T &= \{x \in H : \|T^nx\| = \|T^{*n}x\|, \, con \, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in H : T^{*n}T^nx = T^nT^{*n}x\}. \end{aligned}$$

3.33 Teorema. Si T es un operador hiponormal en H, entonces H_T es el subespacio reductor maximal de T en la cual su restricción es normal.

Demostración. Usando el teorema anterior H_T es un subespacio reductor de T, entonces es suficiente demostrar que H_T es maximal. Como H_T reduce T, $(T\mid_{H_T})^* = T^*\mid_{H_T}$. Sea $x \in H_T$, entonces $\|T^*x\| = \|Tx\|$, esto implica que

$$\begin{aligned} \|(T\mid_{H_T})^*x\| &= \|T^*\mid_{H_T} x\| = \|T^*x\| \\ &= \|Tx\| = \|T\mid_{H_T} x\| \end{aligned}$$

y por la proposición 2.25, $T\mid_{H_T}$ es normal.

Si M es un subespacio que contiene H_T y reduce T y si $T\mid_M$ es normal, entonces para cualquier $x \in M$,

$$\begin{aligned} \|T^nx\| &= \|(T\mid_M)^nx\| = \|(T\mid_M)^{*n}x\| \\ &= \|(T^*\mid_M)^nx\| = \|T^{*n}x\| \end{aligned}$$

y $x \in H_T$ y por lo tanto $M = H_T$.

3.34 Corolario. Si T es un operador hiponormal en H y si $H_T = \{\theta\}$, entonces $\sigma_P(T) = \emptyset$.

Demostración. Si $Tx = \lambda x$, entonces por el teorema 3.25, $T^*x = \overline{\lambda}x$ y para cada $n = 1, 2, \cdots$, obtenemos

$$T^{*n}T^nx = \lambda^nT^{*n}x = \lambda^n\overline{\lambda}^nx = \overline{\lambda}^nT^nx = T^nT^{*n}x$$

y por el teorema 3.33, $x \in H_T = \{\theta\}$ y por lo tanto $x = \theta$. Esto es, $\sigma_P(T) = \emptyset$.

□

3.3.3. Condiciones en hiponormalidad implicando normalidad

En esta subsección daremos condiciones que se necesitan para que un operador hiponormal siga siendo normal. Para probar uno de estos resultados necesitaremos un lema auxiliar.

3.35 Lema. Sea T un operador hiponormal y sea

$$M = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} N(\lambda I - T).$$

Entonces M reduce T y $T|_M$ es normal.

3.36 Teorema. Si T es un operador hiponormal compacto, entonces T es normal.

Demostración. Sea $M = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T)} N_\lambda$, donde $N_\lambda = N(\lambda I - T)$ para cada $\lambda \in \sigma_P(T)$. Supongamos que

$$\begin{aligned} \sigma_P(T|_{M^\perp}) \neq \emptyset \;\; &\Rightarrow \;\; \exists x \in M^\perp,\, x \neq \theta : \; \lambda x = T|_{M^\perp} x = Tx \\ &\Rightarrow \;\; x \in N_\lambda \subseteq M \Rightarrow x \in M \cap M^\perp, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, de donde $\sigma_P(T|_{M^\perp}) = \emptyset$. Como T es compacto, $T|_{M^\perp}$ es compacto. Además, $T|_{M^\perp}$ es hiponormal, por el teorema 3.21, entonces por el teorema 3.27, $\sigma_P(T|_{M^\perp}) \neq \emptyset$, lo cual no puede ser, así que $T|_{M^\perp} = O$, es decir, $M^\perp = \{\theta\}$. Así, que $H = M$ y por el lema previo T es normal. □

En particular, si H es de dimensión finita y T es hiponormal en H, entonces T es normal, porque todo operador definida en un espacio de dimensión finita es compacto.

3.37 Teorema. Si T es un operador hiponormal invertible, T y T^{-1} son contracciones, entonces T es normal.

Demostración. Como T y T^{-1} son contracciones entonces,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|TT^{*-1}T^*x\| \leq \|TT^{*-1}\|\|T^*x\| \\ &\leq \|T\|\|T^{*-1}\|\|T^*x\| \leq \|T^{*-1}\|\|T^*x\| \\ &= \|(T^{-1})^*\|\|T^*x\| = \|T^{-1}\|\|T^*x\| \\ &\leq \|T^*x\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, T es hiponormal, así que $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$. Por lo tanto, $\|T^*x\| = \|Tx\|$, esto es, T es normal. □

En el teorema anterior, la condición de hiponormalidad puede ser omitido. Más aún bajo estas condiciones (sin la hiponormalidad de T) T es unitario (ver [11], pág. 212).

3.38 Teorema. Si T es un operador hiponormal en H y si

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \, |\lambda| = 1\},$$

entonces T es unitario.

Demostración. Como T es hiponormal, T es normaloide, así que $r(T) = \|T\|$, luego $\|T\| = 1$.
Por hipótesis, $0 \notin \sigma(T)$, luego T es invertible y por lo tanto, por teorema 3.23, T^{-1} también es hiponormal. Entonces, usando el teorema 2.30,

$$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \, \lambda \in \sigma(T)\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \, |\lambda| = 1\},$$

y como T^{-1} es normaloide, obtenemos $\|T^{-1}\| = 1$.
Por lo tanto, como $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, obtenemos que para cualquier $x \in H$,

$$\|Tx\| \leq \|x\| \;\; y \;\; \|T^{-1}x\| \leq \|x\|,$$

de esto se obtiene que

$$\|Tx\| = \|x\| = \|T^{-1}x\|$$

para cualquier $x \in H$ y por lo tanto T es una isometría invertible, es decir, T es unitario por la proposición 2.11. □

3.39 Lema. Sea $T \in B[H]$, T es auto-adjunto si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ y $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para todo número complejo λ puramente imaginaria.

3.40 Teorema. Si T es un operador hiponormal en H y si

$$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R},$$

entonces T es auto-adjunto.

Demostración. Si λ es puramente imaginaria, es decir, si $\lambda = ai$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$ por hipótesis, luego $T - \lambda I$ es invertible y por lo tanto, por la proposición 3.19 y el teorema 3.23, $(T - \lambda I)^{-1}$ también es hiponormal y por lo tanto normaloide, así que

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| = \sup\{|\mu| : \, \mu \in \sigma((T - \lambda I)^{-1})\}$$

y entonces, por los teoremas 2.29 y 2.30,

$$\sigma((T - \lambda I)^{-1}) = \{(\mu - \lambda)^{-1} : \, \mu \in \sigma(T)\},$$

y obtenemos

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| = \sup\{|\mu-\lambda|^{-1} : \mu \in \sigma(T)\} \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

porque $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Por lo tanto, T es auto-adjunto, por el lema 3.39. □

3.41 Corolario. Sea T un operador hiponormal.

(a) Si $\sigma(T) \subseteq [0,\infty)$, entonces T es no negativo.

(b) Si $\sigma(T) \subseteq [\alpha,\infty)$ para algún $\alpha > 0$, entonces T es estrictamente positiva.

(c) Si $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$, entonces T es una proyección ortogonal.

Ahora veamos un ejemplo de esta clase de operadores.

3.42 Ejemplo. Sea $H = l^2$ y consideremos al operador S del ejemplo 3.9. Sea $T = S^* + 2S$, esto es,

$$T(z) = (z_2, z_3+2z_1, z_4+2z_2, z_5+2z_3, \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots)$ en H.

Calculemos el adjunto de T,

$$\begin{aligned}
\langle T(z), z\rangle &= \langle (z_2, z_3+2z_1, z_4+2z_2, z_5+2z_3, \cdots), (z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots)\rangle \\
&= z_2\overline{z_1} + (z_3+2z_1)\overline{z_2} + (z_4+2z_2)\overline{z_3} + (z_5+2z_3)\overline{z_4} + \cdots \\
&= z_1\overline{2z_2} + z_2\overline{z_1+2z_3} + z_3\overline{z_2+2z_4} + z_4\overline{z_3+2z_5}\cdots \\
&= \langle (z_1, z_2, z_3, \cdots), (2z_2, z_1+2z_3, z_2+2z_4, \cdots)\rangle,
\end{aligned}$$

así que T^* esta dado por

$$T^*(z) = (2z_2, z_1+2z_3, z_2+2z_4, z_3+2z_5, \cdots).$$

Por otro lado note que

$$\begin{aligned}
\|T(z)\|^2 - \|T^*(z)\|^2 &= |z_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |z_{n+1}+2z_{n-1}|^2 - \left(4|z_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |z_{n-1}+2x_{n+1}|^2\right) \\
&= -3|z_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[|z_{n+1}+2z_{n-1}|^2 - |z_{n-1}+2x_{n+1}|^2\right] \\
&= -3|z_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-3z_{n+1}+3z_{n-1}) \\
&= -3|z_2|^2 + 3|z_1|^2 + 3|z_2|^2 \\
&= 3|z_1|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T(z_1, z_2, \cdots)\|^2 \geq \|T^*(z_1, z_2, \cdots)\|^2$, esto es, T es hiponormal.

3.4. Operadores quasinormales

3.43 Definición. Un operador $T \in B[H]$ es quasinormal si $(T^*T)T = T(T^*T)$.

Es claro que todo operador normal es quasinormal, ya que si T es normal, $TT^* = T^*T$, luego $(T^*T)T = (TT^*)T = T(T^*T)$, esto es, T es quasinormal.

3.44 Teorema. Sea $T \in B[H]$. Si $T = V|T|$ es la descomposición polar de T, entonces $V|T| = |T|V$ si y sólo si T es quasinormal.

Demostración. Sabemos que $|T|^2 = T^*T$ por definición, entonces

($\Rightarrow$) Como $V|T| = |T|V$, entonces $|T|^2 = |T|V|T| = V|T|^2$, luego $TT^*T = V|T||T|^2 = |T|^2V|T| = T^*TT$, esto es, T es quasinormal.

($\Rightarrow$) Si T es quasinormal, esto es, $TT^*T = T^*TT$, entonces $T|T|^2 = |T|^2T$. Luego $T|T| = |T|T$ por el teorema 2.18, pues $|T| = (\underline{|T^2|})^{\frac{1}{2}}$, así que $V|T||T| = |T|V|T|$, esto es, $(V|T|-|T|V)|T| = O$. Por lo tanto, $\overline{R(|T|)} \subseteq N(V|T|-|T|V)$ y entonces

$$N(|T|)^{\perp} \subseteq N(V|T| - |T|V) \tag{3.6}$$

por la proposición 2.9, ya que $|T| = |T|^*$. Por otro lado, sabemos que $N(|T|) = N(V)$ por el teorema 2.22. Luego, si $u \in N(|T|)$ se sigue que $u \in N(V)$, así que $(V|T| - |T|V)u = \theta$ y por lo tanto

$$N(|T|) \subseteq N(V|T| - |T|V) \tag{3.7}$$

Por 3.6, 3.7 y el teorema de la proyección se sigue que $H = N(V|T| - |T|V)$, esto es, $V|T| = |T|V$. □

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior probaremos, el corolario siguiente.

3.45 Corolario. Si T es un operador quasinormal invertible, entonces T es normal.

Demostración. Sea $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Como T es invertible, U es unitario por la observación del corolario 2.23, así que $UU^* = U^*U = I$. Usando el teorema 3.44, tenemos

$$\begin{aligned} TT^* &= U|T|T^* = U|T||T|U^* \\ &= |T|U|T|U^* = |T||T|UU^* \\ &= |T|^2 = T^*T, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la normalidad de T. □

El siguiente teorema es muy significativo, ya que no poseen la misma propiedad para los operadores no normales ya estudiadas en este capítulo.

3.46 Teorema. Si $T \in B[H]$ es quasinormal entonces existe un espacio de Hilbert K y un operador normal N tal que $H \subseteq K$ y

$$N(H) \subseteq K\,,\; N\,|_H = T.$$

Demostración. Supongamos que T es quasinormal. Como el subespacio que reduce T es su espacio nulo $N(T)$, entonces $T = O \oplus S$ en $N(T) \oplus N(T)^{\perp}$, con $O = T\,|_{N(T)}$ y $S = T\,|_{N(T)^{\perp}}$. Note que $T^*T = O \oplus S^*S$, entonces

$$\begin{aligned}(O \oplus S^*S)(O \oplus S) &= (T^*T)T = T(T^*T) \\ &= (O \oplus S)(O \oplus S^*S).\end{aligned}$$

De esto, se obtiene que $O \oplus S^*SS = O \oplus SS^*S$ y por lo tanto $S^*SS = SS^*S$, esto es, S es quasinormal. Sea $S = V|S|$ la descomposición polar de S. Como $N(S) = \{\theta\}$ por definición de S, se sigue que V es una isometría por el corolario 2.23. Sea

$$U = \begin{pmatrix} V & I - VV^* \\ O & V^* \end{pmatrix} \; y \; R = \begin{pmatrix} |S| & O \\ O & |S| \end{pmatrix}$$

en $B[N(T)^{\perp} \oplus N(T)^{\perp}]$. Como $V|S| = |S|V$ por el teorema 3.44, se sigue que $|S|V^* = V^*|S|$ y por lo tanto $U^*U = UU^* = I$, es decir, U es unitario y $UR = RU$. Ahora sea $N_1 = UR$ en $B[N(T)^{\perp} \oplus N(T)^{\perp}]$, entonces $N(T)^{\perp}$ es N_1-invariante y $S = N_1\,|_{N(T)^{\perp}}$. Finalmente notemos que

$$N_1^*N_1 = RU^*UR = R^2 = R^2U^*U = UR^2U^* = N_1N_1^*$$

esto es, N_1 es normal, Por lo tanto, $T = O \oplus S$ cumple la conclusión del teorema, donde $N = O \oplus N_1$ y $K = N(T) \oplus N(T)^{\perp} \oplus N(T)^{\perp}$. $\square$

Como ya mencionamos anteriormente los operadores ya estudiadas en este capítulo no necesariamente satisfacen la conclusión del teorema 3.46, por ejemplo, sabemos que $T = S^* + 2S$ es hiponormal, donde S es el desplazamiento unilateral, pero se puede demostrar que T no cumple con la dicha propiedad. No haremos la demostración aquí, porque se necesita la teoría de operadores subnormales.

Para finalizar este capítulo probaremos que todo operador quasinormal es hiponormal.

3.47 Teorema. Si $T \in B[H]$ es quasinormal, entonces T es hiponormal.

Demostración. Por el teorema de la proyección, $H = \overline{N(T^*) + N(T^*)^{\perp}}$, pero por la proposición 2.9, $N(T^*)^{\perp} = \overline{R(T)}$, luego $H = \overline{N(T^*) + R(T)}$. Luego tomemos $x \in H$, tal que $x = u + v$ con $u \in N(T^*)$ y $v \in \overline{R(T)}$, entonces existen $v_n \in R(T)$ tales que $v_n \to v$.

Pongamos $D = T^*T - TT^*$. Como $u \in N(T^*)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle Du, u\rangle &= \langle (T^*T - TT^*)u, u\rangle \\
&= \langle T^*Tu, u\rangle - \langle TT^*u, u\rangle \\
&= \langle T^*Tu, u\rangle = \langle Tu, Tu\rangle \\
&= \|Tu\|^2.
\end{aligned}$$

Si T es quasinormal, $DT = O$. Como cada $v_n \in R(T)$, $Dv_n = \theta$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que

$$\begin{aligned}
\langle Du, v\rangle &= \langle Du, \lim_{n\to\infty} v_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Du, v_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle u, Dv_n\rangle = 0.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestran que $\langle Dv, u\rangle = 0$ y $\langle Dv, v\rangle = 0$, de esto obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle Dx, x\rangle &= \langle Dx, u + v\rangle = \langle Dx, u\rangle + \langle Dx, v\rangle \\
&= \langle D(u + v), u\rangle + \langle D(u + v), v\rangle \\
&= \langle Du, u\rangle + \langle Dv, u\rangle + \langle Du, v\rangle + \langle Dv, v\rangle \\
&= \langle Du, u\rangle = \|Tu\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D \geq O$, es decir, $T^*T \geq TT^*$ y por lo tanto T es hiponormal. □

Como ejemplo de operadores quasinormales tenemos:

3.48 Ejemplo. Sea S el operador acotado del ejemplo 3.9, esto es,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ U_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & U_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & U_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Recordemos que si $\oplus_{n=0}^{\infty} x_n \in H$, entonces

$$S(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) = S(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = \theta \oplus U_1x_0 \oplus U_2x_1 \oplus U_3x_2 \oplus \cdots$$

y el adjunto de S está dado por

$$S^*(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) = S^*(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots) = U_1^* x_1 \oplus U_2^* x_2 \oplus U_3^* x_3 \oplus \cdots$$

También note que

$$\begin{aligned} S^*S(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) &= S^*(\theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus U_3 x_2 \oplus \cdots) \\ &= U_1^* U_1 x_0 \oplus U_2^* U_2 x_1 \oplus U_3^* U_3 x_2 \oplus \cdots \\ &= x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} SS^*S(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) &= S(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \cdots) \\ &= \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus U_3 x_2 \oplus \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^*SS(\oplus_{n=0}^{\infty} x_n) &= S^*S(\theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus U_3 x_2 \oplus \cdots) \\ &= S^*(\theta \oplus U_1 \theta \oplus U_2 U_1 x_0 \oplus U_3 U_2 x_1 \oplus \cdots) \\ &= U_1^* U_1 \theta \oplus U_2^* U_2 U_1 x_0 \oplus U_3^* U_3 U_2 x_1 \oplus \cdots \\ &= \theta \oplus U_1 x_0 \oplus U_2 x_1 \oplus U_3 x_2 \oplus \cdots \end{aligned}$$

Por lo lo tanto, S es quasinormal por definición.

En particular, si $H = l^2$, entonces $S(z) = (0, z_1, z_2, z_2)$ (ver ejemplo 3.9), para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots)$ es un operador quasinormal.

3.5. Relación de algunos operadores que generalizan los operadores normales

En esta sección veremos como están relacionados los operadores no normales que hemos estudiado.

Hasta ahora hemos probado las siguientes contenciones

$Normal \subset Quasinormal \subset Hiponormal \subset Paranormal \subset Normaloide \subset Espectraloide$

y ahora veremos que estas contenciones son estrictas.

Empecemos con demostrar que no todo operador quasinormal es normal.

3.49 Ejemplo. Sea $H = l^2$ y S como en el ejemplo 3.9, esto es,

$$S(z) = (0, z_1, z_2, z_3, \cdots),$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots)$, S es quasinormal por la observación hecho en el ejemplo 3.48. Recordemos que S^* esta dado por

$$S^*(z) = (z_2, z_3, z_4, z_5 \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots)$ en H. Sea $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, entonces

$$\begin{aligned} S(e_1) &= (0, 1, 0, \cdots) \\ &\Rightarrow \|S(e_1)\| = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, $S^*(e_1) = (0, 0, 0, \cdots)$, luego $\|S^*(e_1)\| = 0$, así que $\|S^*(e_1)\| \neq \|S(e_1)\|$ y por lo tanto S no es normal por la proposición 2.25.

De paso hemos dado un ejemplo de un operador isometría que no es normal, ya que S es isometría por la observación hecho en el ejemplo 3.9.

Ejemplo de un operador normaloide que no es paranormal.

3.50 Ejemplo. Sea S^* como en el ejemplo anterior. En el ejemplo 3.9, demostramos que S^* es un operador normaloide.

Por un cálculo sencillo se demuestra que

$$S^{*2}(z) = (z_3, z_4, z_5, \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots) \in H$. Tomemos $e_2 = (0, 1, 0, 0, \cdots)$, entonces

$$\begin{aligned} S^*(e_2) &= (1, 0, 0, \cdots) \quad y \quad S^{*2}(e_2) = (0, 0, 0, \cdots) \\ &\Rightarrow \|S^*(e_2)\|^2 = 1 \quad y \quad \|S^{*2}(e_2)\| = 0 \\ &\Rightarrow \|S^{*2}(e_2)\| \ngeq \|S^*(e_2)\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S no es paranormal.

Ejemplo de un operador hiponormal que no es quasinormal.

3.51 Ejemplo. Sea $H = l^2$, sabemos que $T = S^* + 2S$ es un operador hiponormal, pero no es quasinormal. En efecto, recordemos que T^*, esta dado por $T^*(z) = (2z_2, z_1 + 2z_3, z_2 + 2z_4, z_3 + 2z_5, \cdots)$, entonces

$$\begin{aligned} T^*T(z) &= T^*(z_2, z_3 + 2z_1, z_4 + 2z_2, z_5 + 2z_3, z_6 + 2z_4 \cdots) \\ &= (2(z_3 + 2z_1), z_2 + 2(z_4 + 2z_2), z_3 + 2z_1 + 2(z_5 + 2z_3), \cdots) \\ &= (2z_3 + 4z_1, 2z_4 + 5z_2, 2z_5 + 5z_3 + 2z_1, 2z_6 + 5z_4 + 2z_2, \cdots) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} T^2(z) &= T(z_2, z_3+2z_1, z_4+2z_2, z_5+2z_3, z_6+2z_4, \cdots) \\ &= (z_3+2z_1, z_4+2z_2+2z_2, z_5+2z_3+2(z_3+2z_1), \cdots) \\ &= (z_3+2z_1, z_4+4z_2, z_5+4z_3+4z_1, z_6+4z_4+4z_2, \cdots) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} TT^*T(z) &= T(T^*T(z)) = T(2z_3+4z_1, 2z_4+5z_2, 2z_5+5z_3+2z_1, \cdots) \\ &= (2z_4+5z_2, 2z_5+5z_3+2z_1+2(2z_3+4z_1), \cdots) \\ &= (2z_4+5z_2, 2z_5+9z_3+10z_1, 2z_6+9z_4+12z_2, \cdots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^*TT(z) &= T^*(z_3+2z_1, z_4+4z_2, z_5+4z_3+4z_1, \cdots) \\ &= (2z_3+4z_1, 2z_5+9z_3+10z_1, 2z_6+9z_4+12z_2, \cdots). \end{aligned}$$

Sea $z = (1,0,0,0,\cdots) \in H$, entonces $(0,10,0,0,\cdots) = TT^*T(z) \neq T^*TT(z) = (4,10,0,0,\cdots)$. Por lo tanto, $TT^*T \neq T^*TT$, esto es, T no es quasinormal.

Ejemplo de un operador paranormal que no es hiponormal.

3.52 Ejemplo. Sea $H = l^2$, sabemos que $T = S^* + 2S$ es un operador hiponormal, entonces T es paranormal, luego T^2 también es paranormal por el teorema 3.12, pero T^2 no es hiponormal. En efecto, en el ejemplo 3.51 calculamos T^2 y haciendo lo mismo con T^{2*} tenemos

$$T^{2*}(z) = (2z_1+4z_3, 4z_2+4z_4, z_1+4z_3+4z_5, z_2+4z_4+4z_6, z_3+4z_5+4z_7, \cdots)$$

para cualquier $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots) \in H$.

Sea $x = (1,0,-2,0,0,\cdots)$, entonces $T^2(x) = (0,0,-4,0,-8,0,\cdots)$ y $T^{2*}(x) = (-6,0,-7,0,-2,0,\cdots)$, luego

$$\|T^2x\| = \sqrt{80} < \|T^{*2}x\| = \sqrt{89},$$

por lo tanto T^2 no es hiponormal.

Por lo tanto hemos probado que las siguientes contenciones son estrictas.

$$Normal \subset Quasinormal \subset Hiponormal \subset Paranormal \subset Normaloide.$$

A continuación introducimos otras clases especiales de operadores que están relacionados con los operadores no normales ya estudiadas.

3.53 Definición. (a) Un operador T en H es un operador convexoide si $\overline{W(T)} = conv\sigma(T)$, donde $conv\sigma(T)$ es la envoltura convexa de $\sigma(T)$.

(b) Un operador T en H es un operador de condición G_1 si $\|(T-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda,\sigma(T))}$ para todo $\lambda \notin \sigma(T)$.

(c) Un operador T en H es un operador traslaloide si $T - \lambda I$ es un operador normaloide para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como primera observación de la definición, tenemos que todo operador traslaloide es normaloide por definición. Ahora probaremos el siguiente resultado.

3.54 Teorema. Sea T un operador hiponormal. Entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

(a) T es un operador traslaloide.

(b) T es un operador de condición G_1.

Demostración. (a) Por el teorema 3.25 inciso (a) $T - \lambda I$ es hiponormal, luego $T - \lambda I$ es normaloide y por lo tanto T es traslaloide.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d(\lambda,\sigma(T))} &= \sup_{\mu\in\sigma(T)} \frac{1}{|\mu-\lambda|} \\
&= \sup_{\mu\in\sigma(T-\lambda I)} \frac{1}{|\mu|} \\
&= \sup_{\mu\in\sigma((T-\lambda I)^{-1})} |\mu| \\
&= r((T-\lambda I)^{-1}),
\end{aligned}$$

para cualquier $\lambda \notin \sigma(T)$, la segunda igualdad es por el teorema 2.29 y la tercera igualdad es por el teorema 2.30. Si T es hiponormal, también lo es $\lambda I - T$ por el teorema 3.25 inciso (a), así que $\lambda I - T$ es normaloide y por lo tanto, $\|(T-\lambda I)^{-1}\| = r((T-\lambda I)^{-1})$, entonces $\|(T-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda,\sigma(T))}$, esto es, T es de condición G_1. □

En particular, todos los operadores auto-adjuntos, normales y quasinormales son operadores traslaloides y de condiciones G_1.

Antes de dar la relación que existen entre los operadores traslaloides y convexoides será necesario enunciar primero los siguientes resultados, cuyas demostraciones serán omitidos, para ello consulte [11], pág. 107-108.

3.55 Teorema. Un operador T es convexoide si y sólo si $T-\lambda I$ es espectraloide para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

En particular el teorema previo muestra que todo operador convexoide es espectraloide.

3.56 Teorema. Un operador T es convexoide si y sólo si $\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, conv\sigma(T))}$ para cualquier $\lambda \notin \sigma(T)$.

Ahora probemos el siguiente teorema.

3.57 Teorema. (a) Si $T \in B[H]$ es un operador traslaloide, entonces T es un operador convexoide.

(c) Si $T \in B[H]$ es de condición G_1, entonces T es un operador convexoide.

Demostración. (a) Sea T un operador traslaloide. Esto es, $T-\lambda I$ es normaloide para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T-\lambda I$ es espectraloide para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, así que T es convexoide por el teorema 3.55.

(b) Sea T un operador de condición G_1. Como $\sigma(T) \subseteq conv\sigma(T)$,

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))} \leq \frac{1}{d(\lambda, conv\sigma(T))}$$

para cualquier $\lambda \notin conv\sigma(T)$. Por lo tanto, T es convexoide por el teorema 3.56. □

3.58 Corolario. (a) Cada operador hiponormal es un operador convexoide.

(b) Cada operador quasinormal es un operador convexoide.

(c) Cada operador normal es convexoide.

Demostración. Sólo probaremos (a), ya que (b) y (c) son consecuencias inmediatas de (a). Si T es un operador hiponormal, entonces T es traslaloide por (a) del teorema 3.54, así que T es convexoide por (a) del teorema 3.57. □

Un ejemplo de un operador convexoide es el siguiente:

3.59 Ejemplo. Sea E un espacio de Hilbert de dos dimensiones. Sean C y D las siguientes matrices, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sea T una matriz infinita definida en el espacio de Hilbert $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, donde cada $H_n \cong E$ de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C^{\frac{1}{2}} & \boxed{0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\boxed{0}$ muestra la posición del elemento $(0,0)$ de la matriz. Entonces

$$T^2 = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Por un cálculo sencillo se demuestra que $D \geq C$, pero que $D^2 \ngeq C^2$, así que T es hiponormal y que T^2 no lo es, pero T^2 es paranormal por el teorema 3.3, porque todo opearador hiponormal es paranormal. Demostraremos que T^2 es convexoide como sigue. Por un simple cálculo, los valores propios de D son $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Pongamos $\mu = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Entonces $1 < \mu$, $\|T\| = \sqrt{\mu}$ y $\|T^2\| = \mu$, porque T y T^2 son normaloides.

Sea $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ el vector propio de D para el valor propio μ y $\psi = (\varphi_1, 0)$, $0 = (0,0)$. Tomemos un número complejo λ tal que $1 < |\lambda| < \mu$ y pongamos

$$\Phi = (\cdots, 0, \frac{1}{\lambda^3}\psi, 0, \frac{1}{\lambda^2}\psi, 0, \frac{1}{\lambda}\psi, \boxed{0}, \psi, 0, \frac{\lambda}{\mu}\varphi, 0, \frac{\lambda^2}{\mu^2}\varphi, 0, \frac{\lambda^3}{\mu^3}\varphi, 0, \cdots),$$

donde cada componente es un vector en H_n, $(-\infty < n < \infty)$ respectivamente y $\boxed{0}$ muestra la componente de la coordenada cero. Entonces Φ es un vector en H y por un simple cálculo se demuestra que $T^{*2}\Phi = \lambda\Phi$. Esto asegura que cada número complejo λ tal que $1 < |\lambda| < \mu$ es el espectro $\sigma(T^2)$ y así la envoltura convexa del espectro coincide con el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mu\}$. Por otro lado como $\|T^2\| = \mu$, el rango numérico de T^2 esta contenido en este disco, recordemos que $\|T^2\| = w(T)$. Como este disco es cerrado, $\overline{W(T)}$ tambén esta contenido en el mismo disco. Por lo tanto, $conv\sigma(T^2) = \overline{W(T^2)}$, esto es, T^2 es convexoide.

De paso hemos demostrado que no todo operador convexoide es hiponormal.

Cada operador hiponormal es convexoide, así que es natural preguntarse que si cada operador paranormal es convexoide. La respuesta es no, como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.60 Ejemplo. Sea T como en el ejemplo 3.17, T es paranormal. Veamos que no es convexoide.

Sea $x = (-\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots)$ y $= (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \cdots)$. Entonces $\|x \oplus y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ y

$$\begin{aligned} \langle T(x \oplus y), x \oplus y \rangle &= \langle (S+I)x + Py \oplus \theta, x \oplus y \rangle \\ &= \langle (S+I)x + Py, x \rangle = \|x\|^2 + \langle Py, x \rangle \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \in W(T). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $r(S) \leq \|S\| = 1$, $\sigma(S) \subset D$, donde D es el disco cerrado unitario, por lo tanto $\sigma(T) = \sigma(S+I) \cup \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$. Luego $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \notin conv\sigma(T)$. Esto demuestra que T no es convexoide.

También existen operadores normaloides que no son convexoides tales como del ejemplo 3.8, demostramos que T es normaloide, sin embargo se puede demostrar que no es convexoide. También hay operadores convexoides que no son paranormales. Sea $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y N es un operador normal cuyo espectro es el disco cerrado $\overline{D}$ unitario. Se puede demostrar que T es convexoide, pero que T no es paranormal pues $Te_1 = e_2$ y $T^2 e_1 = 0$ para vectores unitarios $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$ y $e_2 = (0, 1, 0, \cdots)$.

En resumen hemos demostrado el siguiente diagrama de implicaciones de los operadores no normales y clases especiales de operadores normales.

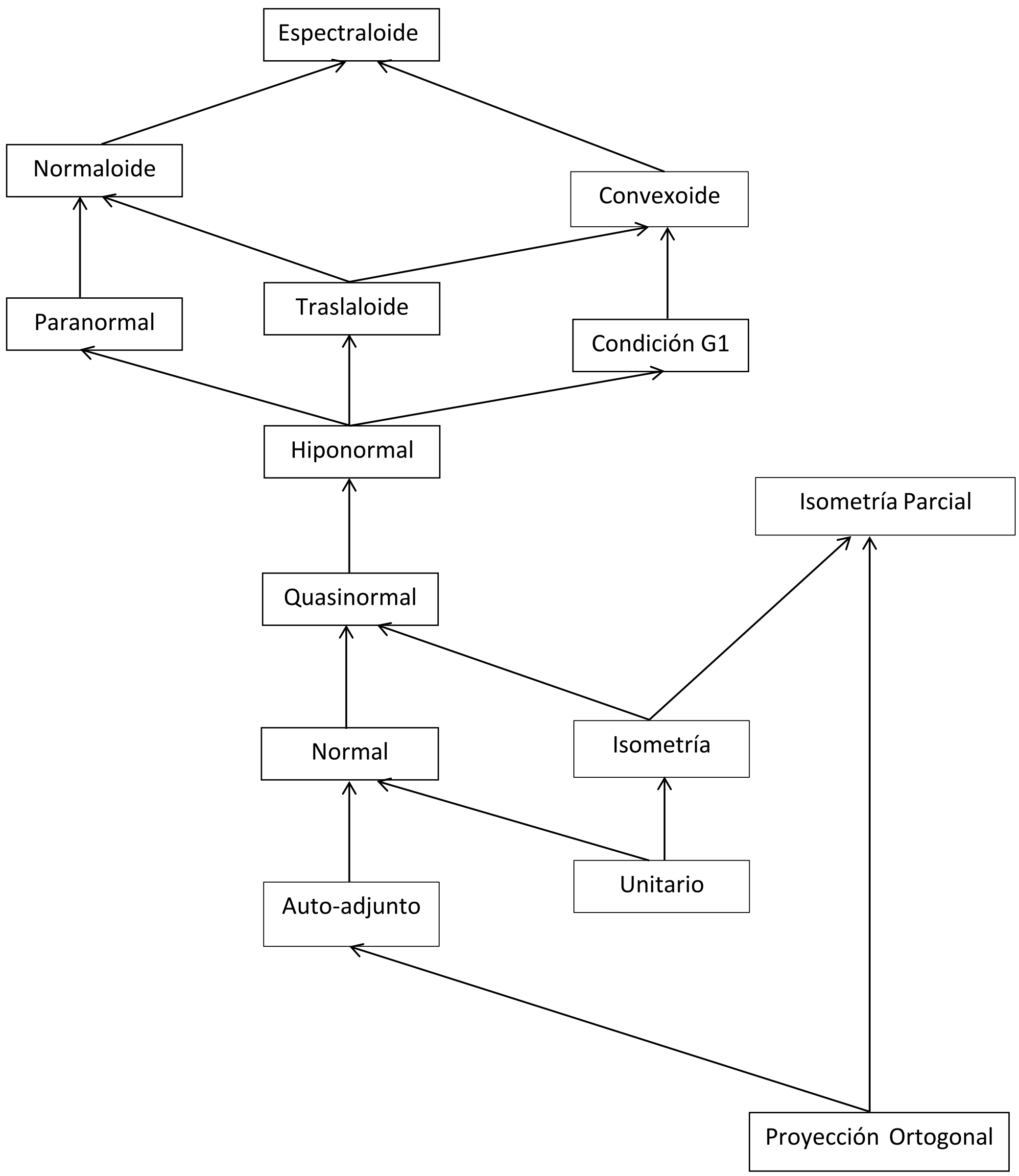

Figura 3.1: Diagrama de implicaciones de los operadores no normales y clases especiales de los operadores normales.[83]

3.5.1. Condiciones en isometría parcial implicando quasinormalidad y paranormalidad

3.61 Teorema. Sea $T \in B[H]$, T es isometría parcial y quasinormal si y sólo si T es la suma directa de una isometría y cero.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $T \in B[H]$ es quasinormal, entonces T^*T conmuta con T y con T^*, así que $N(T^*T)$ reduce T. Pero por la proposición 2.9, $N(TT^*) = N(T)$, luego $N(T)$ reduce T. Por otro lado, T es isometría parcial, es decir, $T\mid_{N(T)^\perp}: N(T)^\perp \to N(T)^\perp$ es isometría, luego $T = T\mid_{N(T)^\perp} \oplus O$ en $H = N(T)^\perp \oplus N(T)$, donde $O = T\mid_{N(T)}$, por lo tanto T es la suma directa de una isometría y cero.

($\Leftarrow$) Si $T = S \oplus O$, donde S es una isometría, esto es, $S^*S = I$ entonces

$$T^*TT = (S^*S \oplus O)(S \oplus O) = S \oplus O = T = (S \oplus O)(S^*S \oplus O) = TT^*T$$

y por lo tanto T es quasinormal. $\square$

3.62 Teorema. Sea $T \in B[H]$, T es una isometría parcial normal si y sólo si T es la suma directa de un operador unitario y cero.

Demostración. ($\Rightarrow$) Como T es isometría parcial, entonces T^*T es la proyección ortogonal a lo largo de $N(T)^\perp$ y TT^* es la proyección ortogonal a lo largo de $R(T)$ por el teorema 2.20, pero $T^*T = TT^*$, luego $R(T) = N(T)^\perp$, así que $T\mid_{N(T)^\perp}$ es una isometría sobreyectiva, esto es, $T\mid_{N(T)^\perp}: N(T)^\perp \to N(T)^\perp$ es unitario y por lo tanto $T = \mathit{unitario} \oplus O$ en $N(T)^\perp \oplus N(T) = H$.

($\Leftarrow$) Es obvio, porque todo operador unitario es normal. $\square$

3.63 Teorema. Si T es una isometría parcial y paranormal, entonces T es quasinormal, esto es, T es la suma directa de una isometría y cero.

Demostración. Como T es paranormal, $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$, remplazando x por T^*Tx obtenemos la siguiente desigualdad,

$$\|TT^*Tx\|^2 \leq \|T^2T^*Tx\|\|T^*Tx\| \tag{3.8}$$

Si T es isometría parcial, T^*T es una proyección ortogonal según el teorema 2.20, así que $T^*T = (T^*T)^2$ y auto-adjunto, entonces

$$\begin{aligned} \|T^*Tx\|^2 &= \langle (T^*T)^2x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \\ &= \|Tx\|^2 \\ &\Rightarrow \|T^*Tx\| = \|Tx\|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando nuevamente de que T es isometría parcial tenemos que $T = TT^*T$, por el teorema 2.20 y por 3.8 y 3.9 tenemos,

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|Tx\|$$

lo cual implica $\|Tx\| \leq \|T^2x\|$. Como T es isometría parcial, $\|T\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \|T^2x\| \leq \|T\|\|Tx\| = \|Tx\| \\ &\Rightarrow \|Tx\| = \|T^2x\| \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \|T^*T^2x - Tx\|^2 &= \langle T^*T^2x, T^*T^2x\rangle - \langle T^*T^2x, Tx\rangle \\ &- \langle Tx, T^*T^2x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle \\ &= \|Tx\|^2 - \|T^2x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T^*TT = T = TT^*T$, esto es, T es quasinormal. □

3.64 Corolario. Si T es una isometría parcial, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) T es quasinormal, (b) T es hiponormal, (c) T es paranormal.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) y (b) $\Rightarrow$ (c) son obvios, porque todo operador quasinormal es hiponormal y todo operador hiponormal es paranormal.

(c) $\Rightarrow$ (a). Se sigue del teorema 3.63.
(b) $\Rightarrow$ (a). T es hiponormal e isometría parcial $\Rightarrow$ T es isometría parcial y paranormal $\Rightarrow$ T es isometría parcial y quasinormal, porque (c) $\Rightarrow$ (a).
(c) $\Rightarrow$ (b). T es isometría parcial y paranormal $\Rightarrow$ T es isometría parcial y quasinormal, porque (c) $\Rightarrow$ (a) y por lo tanto T es hiponormal e isometría parcial. □

3.5.2. Condiciones implicando normalidad e isometría parcial

3.65 Teorema. (a) Si T es un operador normaloide idempotente, entonces T es una proyección ortogonal.

(b) Si T es un operador paranormal idempotente, entonces T es una proyección ortogonal.

Demostración. (a) Si T es un operador normaloide idempotente, entonces $\|T\| = \|T^2\| = \|T\|^2 \Rightarrow \|T\| = 1$ entonces por el teorema 2.15, T es proyección ortogonal. (b) es consecuencia de (a), ya que todo operador paranormal es normaloide. $\square$

Note que si T es un operador contracción y satisface $T^n = T$ para algún entero $n \geq 2$, entonces T^{n-1} es una proyección ortogonal, en efecto, $T^{2(n-1)} = T^{n-2}T^n = T^{n-2}T = T^{n-1}$, así que T^{n-1} es idempotente. Y usando de que $\|T\| \leq 1$, entonces por un simple cálculo se obtiene que $\|T^{n-1}x - (T^{n-1})^*T^{n-1}x\|^2 = \|(T^{n-1})^*T^{n-1}x\|^2 - \|T^{n-1}x\|^2 \leq 0$ para cualquier $x \in H$. Por lo tanto, $T^{n-1} = (T^{n-1})^*T^{n-1}$, esto es, T^{n-1} es auto-adjunto. Por lo tanto, T es proyección ortogonal. Usando éste resultado podemos mostrar el siguiente teorema.

3.66 Teorema. Si T es un operador contracción y $T^n = T$ para algún entero $n \geq 2$ entonces T es normal e isometría parcial.

Demostración. Como T es contracción y T^{n-1} es una proyección ortogonal por la observación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \|T^n x\| = \|TT^{n-1}x\| = \|TT^{*n-1}x\| \\
&\leq \|T\|\|T^{*n-2}\|\|T^*x\| \leq \|T\|\|T^*\|^{n-2}\|T^*x\| \\
&\leq \|T^*x\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|T^*x\| &= \|T^{*n}x\| = \|T^*T^{*n-1}x\| = \|T^*T^{n-1}x\| \\
&\leq \|T^*\|\|T^{n-2}\|\|Tx\| \leq \|T^*\|\|T\|^{n-2}\|Tx\| \\
&\leq \|Tx\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|Tx\| = \|T^*x\|$, esto es, T es normal.

Finalmente probaremos que T es isometría parcial. Note que

$$\begin{aligned}
\|Tx - TT^*Tx\| &= \|Tx\|^2 - \langle Tx, TT^*Tx\rangle - \langle TT^*Tx, Tx\rangle + \|TT^*Tx\|^2 \\
&= \|Tx\|^2 - 2\|T^*Tx\|^2 + \|TT^*Tx\|^2 \\
&\leq \|Tx\|^2 - 2\|T^*Tx\|^2 + \|T^*Tx\| \\
&= \|Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&= \|T^n x\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&= \|T^{n-1}Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&= \|T^{*n-2}T^*Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \\
&\leq \|T^*\|^{n-2}\|T^*Tx\|^2 - \|T^*Tx\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

la útima y la tercera de las desigualdades se debe a que $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$, la quinta igualdad es porque $T^n = T$ y la penúltima igualdad es porque T^{n-1} es proyección ortogonal. Por lo tanto, $T = TT^*T$, esto es, T es isometría parcial. $\square$

3.67 Corolario. (a) Si T es normaloide y $T^n = T$ para algún entero $n \geq 2$, entonces T es normal e isometría parcial.

(b) Si T es paranormal y $T^n = T$ para algún entero $n \geq 2$, entonces T es normal e isometría parcial.

DEMOSTRACIÓN. (a) Como existe $n \geq 2$ tales que $T^n = T$ y como T es normaloide entonces $\|T\| = \|T^n\| = \|T\|^n$, esto implica que $\|T\| = 1$, entonces por el teorema 3.66, T es normal e isometría parcial.

(b) Es consecuencia de (b), ya que todo operador paranormal es normaloide. $\square$

3.68 Corolario. Si T es un operador normaloide y $T^n = I$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces T es unitario.

DEMOSTRACIÓN. Como $T^n = I$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $T^{n+1} = T$. Pero T es normaloide, así que T es normal e isometría parcial por el corolario 3.67, entonces $T^*T = TT^*$ y $T = TT^*T$, luego

$$T^*T = TT^* = T^nTT^* = T^{n-1}TT^*T = T^{n-1}T = T^n = I.$$

Por lo tanto, T es unitario. $\square$

3.69 Corolario. Si T es un operador espectraloide y $T^n = T$ para algún $n \geq 2$ entonces T es normal e isometría parcial.

Bibliografía

[1] [AFHV] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero and D. Voiculescu, Approximation of Hilbert space operators, Vol. II, Research Notes in Mathematics 102, Pitman, Boston, 1984.

[2] [SB] S.K. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974.

[3] [DDj1] B.P. Duggal and S. Djordjevic, Weyl's theorems in the class of algebraically p-hyponormal operators, Commentations Mathematicae, XL (2000), 49-56.

[4] [DjD] S. Djordjevic and B.P. Duggal, Weyl's theorem and continuity of spectra in the class of p-hyponormal operators, Studia Mathematica 143 (1) (2000), 23-32.

[5] [DO] H.R. Dowson, Spectral theory of linear operators, Academic Press, London, 1978.

[6] [RH] R.E. Harte, Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators, Dekker, New York, 1988.

[7] [DX] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal operators, Birkhauser, New York, 1983.

[8] [TY] T. Yoshino, Introduction to operator theory, Logman Scientific and technical, Tohoku University, Japan, 1993.

[9] [CSK] Carlos S. Kubrusly, Elements of Operator Theory, Birkhauser Boston.

[10] [LNOT] Woo Young Lee, Lecture Notes on operator Theory, Seoul National University.

[11] [ILO] Takayuki Furuta, Invitation to Linear Operators.

[12] [FA] Walter Rudin, Functional Analysis, 2d ed., McGraw Hill, Boston, Massachusetts, 1991.

Índice alfabético